KEYWORD

수학 Ⅱ

정답 및 해설

빠른 정답 찾기

Ⅰ 집합과 명제

Ⅰ-1. 집합

01 ı 집합의 뜻과 표현

01 10　02 ④　03 ②　04 0　05 5　06 15

02 ı 부분집합

07 ⑤　08 ④　09 ③　10 ①　11 ①　12 ①

[01+02] 개념 실력확인

13 ④　14 ⑤　15 ④　16 ①　17 5　18 ⑤
19 4　20 135　21 ②　22 48　23 ①　24 ③

Ⅰ-2. 집합의 연산

03 ı 집합의 연산

01 ④　02 ③　03 14　04 8　05 12　06 ②

04 ı 집합의 연산 법칙

07 ③　08 ②　09 ②　10 ⑤　11 ④　12 ②

[03+04] 개념 실력확인

13 ③　14 ③　15 ④　16 ②　17 7　18 ①
19 16　20 ⑤　21 58　22 128　23 15　24 ⑤

Ⅰ-3. 명제

05 ı 명제

01 2　02 3　03 3　04 5　05 ③　06 ⑤

06 ı 명제의 역과 대우

07 ④　08 ②　09 ④　10 81　11 ①　12 ⑤

[05+06] 개념 실력확인

13 3　14 ②　15 ①　16 ⑤　17 ④　18 ④
19 ③　20 ⑤　21 ②　22 ③　23 ④　24 ③

Ⅰ-4. 명제의 증명

07 ı 명제의 증명

01 8　02 6　03 4　04 ③　05 ②　06 ③

08 ı 절대부등식

07 ④　08 12　09 ①　10 ⑤　11 ⑤　12 16

[07+08] 개념 실력확인

13 ③　14 ⑤　15 6　16 ②　17 ③　18 ①
19 ⑤　20 ③　21 97　22 14　23 ④　24 28

Ⅰ단원 • [01～08] 개념 종합 문제

01 ③　02 1　03 12　04 8　05 17　06 19
07 ⑤　08 ②　09 16　10 7　11 ⑤　12 28
13 ②　14 ②　15 20　16 ③　17 ⑤　18 ④
19 ⑤　20 ③　21 4　22 4　23 ③　24 48

Ⅱ 함수

Ⅱ-1. 함수

09 ı 함수

01 ③　02 2　03 ③　04 ②　05 ③　06 ②

10 ı 합성함수와 역함수

07 3　08 5　09 2　10 ①　11 ①　12 ②

[09+10] 개념 실력확인

13 ②　14 ①　15 4　16 ④　17 12　18 3
19 ④　20 ④　21 ②　22 ①　23 5　24 ①

Ⅱ-2. 유리함수

11 ı 유리식과 유리함수

01 ⑤　02 ③　03 3　04 ①　05 ⑤　06 ⑤

12 ı 유리함수의 활용

07 3　08 ①　09 ②　10 1　11 7　12 ④

[11+12] 개념 실력확인

13 ③　14 ④　15 ②　16 ①　17 ⑤　18 ⑤
19 ⑤　20 36　21 ①　22 4　23 0　24 ③

Ⅱ-3. 무리함수

13 ı 무리식과 무리함수

01 8　02 2　03 9　04 ③　05 8　06 ①

14 ı 무리함수의 활용

07 3　08 25　09 ④　10 ②　11 ③　12 12

[13+14] 개념 실력확인

13 8　14 ③　15 ③　16 ②　17 ③　18 6
19 9　20 ②　21 48　22 ④　23 ②　24 130

Ⅱ단원 • [09～14] 개념 종합 문제

01 8　02 2　03 9　04 ①　05 8　06 ⑤
07 5　08 ④　09 3　10 4　11 12　12 5
13 ②　14 11　15 ②　16 ①　17 ③　18 ⑤
19 ①　20 1　21 ①　22 16　23 ④　24 ④

[19+20] 개념 실력확인

13 ⑤　14 121　15 55　16 ①　17 ③　18 ④
19 ⑤　20 ①　21 513　22 ①

Ⅲ단원 • [15～20] 개념 종합 문제

01 ②　02 5　03 15　04 ②　05 ③　06 ⑤
07 2　08 75　09 330　10 508　11 ⑤　12 22
13 10　14 105　15 ③　16 ④　17 481　18 46
19 ④　20 ②　21 ③　22 ⑤

Ⅲ 수열

Ⅲ-1. 등차수열과 등비수열

15 | 등차수열

01 ①　02 ④　03 11　04 ③　05 35　06 ③

16 | 등비수열

07 ②　08 260　09 ①　10 256　11 ④　12 ③

[15+16] 개념 실력확인

13 ⑤　14 ②　15 10　16 442　17 ③　18 508
19 40　20 273　21 ④　22 6　23 ①　24 ④

Ⅲ-2. 수열의 합

17 | 수열의 합

01 125　02 ①　03 ③　04 624　05 250　06 ④

18 | 여러 가지 수열의 합

07 ⑤　08 ①　09 ③　10 37　11 215　12 ③

[17+18] 개념 실력확인

13 ⑤　14 ③　15 ⑤　16 ②　17 ④　18 ①
19 ③　20 ⑤　21 ③　22 247

Ⅲ-3. 수학적 귀납법

19 | 수학적 귀납법

01 ①　02 해설 참고　03 28　04 256　05 12
06 ①

20 | 여러 가지 귀납적 정의

07 210　08 ②　09 ⑤　10 192　11 ②　12 21

Ⅳ 지수와 로그

Ⅳ-1. 지수

21 | 거듭제곱근

01 ③　02 16　03 5　04 ⑤　05 ③　06 ④

22 | 지수

07 13　08 ②　09 ①　10 ②　11 ④　12 ②

[21+22] 개념 실력확인

13 ②　14 ④　15 ④　16 ①　17 ③　18 ⑤
19 ④　20 27　21 ⑤　22 ②　23 24　24 ③

Ⅳ-2. 로그

23 | 로그

01 18　02 ④　03 ②　04 ③　05 ②　06 12

24 | 로그의 활용

07 14　08 31　09 ④　10 ⑤
11 (1) 254　(2) -1.5952　(3) 0.254　(4) 1.2024
12 100

[23+24] 개념 실력확인

13 ②　14 20　15 ①　16 ③　17 4　18 9
19 105　20 ②　21 ③　22 ④　23 ②　24 ④

Ⅳ단원 • [21～24] 개념 종합 문제

01 ⑤　02 ①　03 2　04 ③　05 ③　06 30
07 ⑤　08 14　09 ③　10 ②　11 1　12 ①
13 ④　14 ②　15 ②　16 21　17 ③　18 ⑤
19 107

Ⅰ 집합과 명제

01 집합의 뜻과 표현

Ⅰ-1. 집합

문제편 **08~09p**

01 정답 **10**

1은 모든 자연수의 약수이므로

$(\boxed{1,\ 1}),\ (\boxed{1,\ 2}),\ (\boxed{1,\ 3}),\ (\boxed{1,\ 4}),\ (\boxed{1,\ 5})$

모든 자연수는 자기자신을 약수로 가지므로

$\boxed{(2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5)}$

또, $\boxed{2}$는 $\boxed{4}$의 약수이므로 $(\boxed{2,\ 4})$

따라서 집합 X의 원소의 개수는 $5+4+1=\boxed{10}$이다.

02 정답 ④

① $\{\boxed{7,\ 14,\ 21,\ \cdots}\} \Rightarrow$ $\boxed{무한}$집합

② $2<x<3$인 유리수 x의 값은 무수히 많으므로 무한집합이다.

③ $\{x \mid x$는 $-1<x<1$인 실수$\} \Rightarrow$ $\boxed{무한}$집합

④ $|x|<0$인 실수는 존재하지 않으므로

$\{x \mid x$는 $|x|<0$인 실수$\}=\boxed{\varnothing} \Rightarrow$ $\boxed{유한}$집합

⑤ $x<\sqrt{2}$인 무리수 x의 값은 무수히 많으므로 무한집합이다.

03 정답 ②

24 이하의 자연수 n에 대하여

① $2n$일 때, $\{2,\ 4,\ \cdots,\ 48\}$

② $3n-1$일 때, $\{2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 71\}$

③ $5n-3$일 때, $\{2,\ 7,\ \cdots,\ 117\}$

④ $2n+3$일 때, $\{5,\ \cdots,\ 51\}$

⑤ $3n+1$일 때, $\{4,\ \cdots,\ 73\}$

04 정답 **0**

집합 A의 원소가 3개이므로

$A=\{0,\ 4,\ a\}\ (a\neq 0,\ a\neq 4)$라 하자.

조건 (나)에 의하여 $(4+a)\in A$이므로

$4+a=0$ 또는 $4+a=4 \qquad \therefore a=-4$ 또는 $a=0$

그런데 $a\neq 0$이므로 $a=-4$

따라서 $A=\{-4,\ 0,\ 4\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은 0이다.

05 정답 **5**

$x\in A,\ y\in B$에 대하여

$-x+2y$의 값을 구하면 표와 같다.

$2y$ \ $-x$	-2	-3	-4
6	4	3	2
8	6	5	4

따라서 집합 C는

$C=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로

$n(C)=5$

06 정답 **15**

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로 $n(A)=6$

$B=\{4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19\}$이므로 $n(B)=6$

$C=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ 1\right\}$이므로 $n(C)=3$

$\therefore n(A)+n(B)+n(C)=15$

02 부분집합

Ⅰ-1. 집합

문제편 **10~11p**

07 정답 ⑤

$A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$이고,

$B=\{\boxed{-1,\ 0,\ 1,\ 2}\},\ C=\{\boxed{0,\ 1,\ 2}\}$

따라서 세 집합 $A,\ B,\ C$의 포함 관계는

$\boxed{C}\subset\boxed{B}\subset\boxed{A}$이다.

08 정답 ④

$x^2-5x+6=(\boxed{x-3})(\boxed{x-2})=0$에서

$x=\boxed{2}$ 또는 $x=\boxed{3}$이므로 $A=\{\boxed{2,\ 3}\}$

12의 양의 약수는 $\boxed{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12}$이므로

$B=\{\boxed{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12}\}$

따라서 집합 X는 집합 $B=\{\boxed{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12}\}$의 부분집합 중 $\boxed{2,\ 3}$을 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 그 개수는

$2^{\boxed{6}-\boxed{2}}=2^{\boxed{4}}=\boxed{16}$이다.

09 정답 ③

$A\subset B$이고 $B\subset A$이면 $A=B$이므로

$a=5,\ a+b=20 \qquad \therefore b=15$

10 정답 ①

집합 X가 나타내는 영역은

원 $x^2+y^2=8$의 내부(경계선 포함),

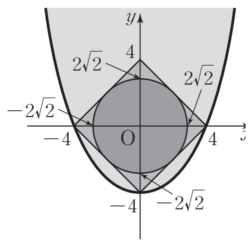
집합 Y가 나타내는 영역은 도형

$|x|+|y|=4$의 내부(경계선 포함),

집합 Z가 나타내는 영역은

포물선 $y=\dfrac{1}{4}x^2-4$의 윗부분

(경계선 포함)이다. $\qquad \therefore X\subset Y\subset Z$



11 정답 ①

집합 X의 원소는 $-2,\ 2,\ \{-2,\ 2\}$로 3개이다.

ㄱ. $\{-2,\ 2\}$는 집합 X의 원소이므로 $\{-2,\ 2\}\in X$ (참)

ㄴ. $-2,\ 2$를 원소로 갖는 집합 X의 부분집합이 $\{-2,\ 2\}$이므로 $\{-2,\ 2\}\subset X$ (참)

ㄷ. -2를 원소로 갖는 집합 X의 부분집합의 개수는 $2^{3-1}=4$이다. (거짓)

ㄹ. 집합 X의 진부분집합의 개수는 $2^3-1=7$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

12 정답 ①

집합 S의 부분집합 중 $\{\varnothing\}$은 제외하고 각 경우를 따져주자.

(ⅰ) 1이 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는

$2^{5-1}-1=15$

(ⅱ) 1이 포함되지 않고 2가 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{5-2}-1=7$

(ⅲ) 1, 2가 포함되지 않고 3이 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{5-3}-1=3$

(ⅳ) 1, 2, 3이 포함되지 않고 4가 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{5-4}-1=1$

(ⅴ) 1, 2, 3, 4가 포함되지 않고 5가 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합은 존재하지 않는다.

따라서 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값은

$1\times15+2\times7+3\times3+4\times1=42$

[01+02] 개념 실력확인

Ⅰ-1. 집합

문제편 12~13p

13 정답 ④

집합 A를 원소나열법으로 나타내면 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

① $3\in A$ ② $4\not\in A$

③ $\{1, 3\}\subset A$ ⑤ $\{1, 3, 5\}\subset A$

따라서 옳은 것은 ④ $\{5, 7\}\subset A$이다.

14 정답 ⑤

두 집합 A, B가 서로 같으므로

$a+2=2$ 또는 $a+2=6-a$

(ⅰ) $a+2=2$일 때,

$a=0$이므로 $A=\{-2, 2\}$, $B=\{2, 6\}$

$\therefore A\neq B$

(ⅱ) $a+2=6-a$일 때,

$a=2$이므로 $A=B=\{2, 4\}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=2$

15 정답 ④

집합 A의 부분집합 중 홀수가 한 개 이상 속해 있는 경우는 전체 부분집합에서 홀수를 원소로 갖지 않는 경우를 빼주면 된다.

즉, 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^5=32$

홀수인 1, 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{5-3}=4$

따라서 구하는 부분집합의 개수는 $32-4=28$이다.

16 정답 ①

집합 A의 원소는 -1, 0, $\{-1, 1\}$, $\varnothing$이므로

② $1\not\in A$ ③ $\{0\}\subset A$

④ $\{-1, 0\}\subset A$ ⑤ $\{-1, 1\}\in A$

따라서 옳은 것은 ① $\{\varnothing\}\subset A$이다.

17 정답 5

두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, $B=\{1, 9, a, a+1\}$에 대하여 $B\subset A$를 만족시키는 집합 B의 원소 중 두 수의 차가 1인 경우를 찾으면 1과 2, 2와 3, 3과 4이다.

$a=1$이면 $B=\{1, 2 ,9\}$이므로 $n(B)=3$

$a=2$이면 $B=\{1, 2, 3, 9\}$이므로 $n(B)=4$

$a=3$이면 $B=\{1, 3, 4, 9\}$이므로 $n(B)=4$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 2, 3이므로 그 합은 5이다.

18 정답 ⑤

ㄱ. $S=\{2, 3, 4\}$의 원소 중 소수는 2, 3이므로

$N(S)=2$이다. (참)

ㄴ. 집합 U의 원소 중 소수인 2, 3, 5, 7이 집합 S에 모두 속할 때, $N(S)$의 최댓값은 4이다. (참)

ㄷ. $N(S)=1$인 집합 S는 원소로 소수를 하나도 갖지 않은 집합$\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$의 부분집합에 소수 하나만을 원소로 더 가지면 되므로 4개의 소수에 대하여 집합 S의 개수는 $2^6\times4=2^8$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19 정답 4

집합 U의 원소 중 x^2 꼴과 같이 제곱인 수를 찾으면 1, 4, 9이므로 이 세 수는 집합 $A=\{a, b\}$의 원소가 될 수 있다. 즉, 집합 A는 $\{1, 4\}$, $\{1, 9\}$, $\{4, 9\}$로 3개이다. 근데, 집합 $\{2, 8\}$도 조건을 만족시키므로 구하는 집합 A의 개수는 $3+1=4$이다.

20 정답 135

두 조건 (가), (나)에 의하여 $A=\{1, 5, a, b\}$이라 하자.

조건 (다)에서 원소의 총합이 18이므로 $1+5+a+b=18$

$\therefore a+b=12$ ⋯ ㉠

조건 (라)에서 집합 A의 원소 중 소수는 2개이므로 5와 그 이외에 두 수 a, b 중에 소수가 1개 있고, ㉠을 만족시키는 수를 찾아보면 $\{a, b\}=\{2, 10\}$, $\{3, 9\}$, $\{7, 5\}$

근데, 집합 A는 집합 U의 부분집합으로 10보다 작은 원소를 가지고 $n(A)=4$이므로

$A=\{1, 3, 5, 9\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 곱은 135이다.

21 정답 ②

ㄱ. $A_3=\{2, 3\}$, $B_4=\{1, 2, 4\}$이므로

두 집합 A_3과 B_4의 공통 원소는 2이다. (참)

ㄴ. $a\in A_n$이면 $a\le n$이고 a는 소수이다.

이때, $a\le n<n+1$이고 a는 소수이므로 $a\in A_{n+1}$

$\therefore A_n\subset A_{n+1}$ (참)

ㄷ. 【반례】 $m=1$, $n=2$이면

$B_1=\{1\}$, $B_2=\{1, 2\}$이므로 $B_1\subset B_2$

그런데 1은 2의 배수가 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22 정답 48

집합 $X=\{1, 3, 9, 27\}$의 부분집합 중 원소 1을 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{4-1}=8$이므로

$f(X_1)\times f(X_2)\times f(X_3)\times\cdots\times f(X_{15})$

에는 원소 1이 8번 곱해져 있다.

마찬가지의 방법으로

$f(X_1)\times f(X_2)\times f(X_3)\times\cdots\times f(X_{15})$에는

원소 3, 9, 27이 각각 8번 곱해져 있으므로

$f(X_1)\times f(X_2)\times f(X_3)\times\cdots\times f(X_{15})$

$=1^8\times3^8\times9^8\times27^8=3^8\times(3^2)^8\times(3^3)^8=3^{8+16+24}=3^{48}$

$\therefore k=48$

23 정답 ①

집합 X는 조건 (가)에 의하여 2, 5를 원소로 가지고, 조건 (나)를 만족시키는 원소를 찾으면 된다.

(ⅰ) $2\in X$일 때,
조건 (나)에 의하여 $2\cdot2\in U$이므로 $4\in X$
이와 같은 방법으로 $2^n(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$은 집합 X의 원소가 되므로 $\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\}$

(ⅱ) $5\in X$일 때,
조건 (나)에 의하여 $2\cdot5\in U$이므로 $10\in X$
이와 같은 방법으로 $2^n\cdot5(n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$는 집합 X의 원소가 되므로 $\{5,\ 10,\ 20,\ 40\}$

따라서 집합 $X=\{2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 16,\ 20,\ 32,\ 40\}$이므로 집합 X의 원소의 개수는 9이다.

24 정답 ③

ㄱ. $A_1(3)=\{x\,|\,N(3,\ x)=1\}$
이때, 3과 4는 서로소이므로 $N(3,\ 4)=1$이다.
$\therefore\ 4\in A_1(3)$ (참)

ㄴ. $A_3(4)=\{x\,|\,N(4,\ x)=3\}$
이때, 4의 양의 약수의 개수가 3이므로 $A_3(4)$는 100 이하의 자연수 중 4의 배수의 집합이다.
$\therefore\ n(A_3(4))=25$ (거짓)

ㄷ. $A_2(a)=\{x\,|\,N(a,\ x)=2\}$
이때, 소수 a의 양의 약수의 개수가 2이므로 $A_2(a)$는 100 이하의 자연수 중 소수 a의 배수의 집합이다.
$\therefore\ n(A_2(a))=\left[\dfrac{100}{a}\right]$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 집합의 연산

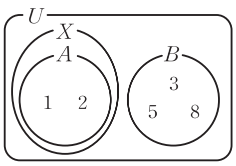
Ⅰ-2. 집합의 연산

문제편 14~15p

01 정답 ④

집합 A와 서로소인 집합은 집합 S의 부분집합 중에서 $\boxed{2,\ 6,\ 9}$를 원소로 갖지 않는 집합이므로 집합 $\{\boxed{4,\ 11}\}$의 부분집합과 같다.
따라서 집합 $\{\boxed{4,\ 11}\}$의 부분집합의 개수는 $2^{\boxed{2}}=\boxed{4}$

02 정답 ③



$A\cap B=\boxed{\varnothing}$에서 $X\cup A=X-B$를 만족시키기 위해서는 $X\cup A=\boxed{X}$, $X-B=\boxed{X}$이므로 $X\cap B=\boxed{\varnothing}$, $X\supset\boxed{A}$이어야 한다.
집합 X는 전체집합
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ 중 $\boxed{1,\ 2}$를 원소로 갖고, $\boxed{3,\ 5,\ 8}$을 원소로 갖지 않아야 한다.
따라서 전체집합 U의 부분집합 X의 원소의 개수는
$2^{8-\boxed{2}-\boxed{3}}=2^{\boxed{3}}=\boxed{8}$이다.

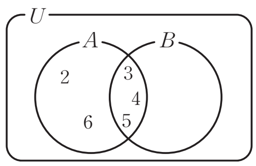
03 정답 14

$A\cap B=\{3,\ 6\}$이므로 집합 A의 원소에서 $a^2-a=6$이다.
$a^2-a-6=(a-3)(a+2)=0$ $\quad\therefore\ a=3$ 또는 $a=-2$
(ⅰ) $a=3$이면 $B=\{3,\ 4,\ 6\}$
(ⅱ) $a=-2$이면 $B=\{-2,\ -1,\ 1\}$
근데, $A\cap B=\{3,\ 6\}$이어야 하므로 $a=3$
$\therefore\ A=\{1,\ 3,\ 6\}$, $B=\{3,\ 4,\ 6\}$
따라서 집합 $A\cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 6\}$의 모든 원소의 합은 14이다.

04 정답 8

$\{2,\ 7,\ 11\}\cup X=\{2,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$에서 집합 X는 집합 S의 부분집합 중 5, 13을 반드시 원소로 갖고, 3, 17을 원소로 갖지 않는 부분집합이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는 $2^{7-2-2}=2^3=8$이다.

05 정답 12



두 집합 A와 $A-B$의 원소를 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.
따라서 $A\cap B=\{3,\ 4,\ 5\}$이므로 모든 원소의 합은 12이다.

06 정답 ②

① $(\varnothing^C)^C=(U)^C=\varnothing$
② $A\cap\varnothing^C=A\cap U=A$
③ $U-A=A^C$
④ $A^C\cap B=B-A$
⑤ $A\subset B$이면 $A\cap B=A$

04 집합의 연산 법칙

Ⅰ-2. 집합의 연산

문제편 16~17p

07 정답 ③

$A\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$
$\qquad\qquad=\boxed{\varnothing}\cup(A\cap B)=\boxed{A\cap B}$
따라서 $\boxed{A\cap B}=\{\boxed{3,\ 4}\}$이므로 집합 $A\cap(A^C\cup B)$의 모든 원소의 합은 $\boxed{7}$이다.

08 정답 ②

전체 신입사원의 집합을 U, 소방안전 교육을 받은 사원의 집합을 A, 심폐소생술 교육을 받은 사원의 집합을 B라 하면
$n(U)=\boxed{200}$, $n(A)=\boxed{120}$, $n(B)=\boxed{115}$
이때, 두 교육을 모두 받지 않은 사원의 수는
$n(U)-n(\boxed{A\cup B})=17$
이므로 소방안전 교육 또는 심폐소생술 교육을 받은 사원의 수는
$n(A\cup B)=200-17=\boxed{183}$
따라서 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$\qquad=120+115-183=\boxed{52}$
이므로 심폐소생술 교육만을 받은 사원의 수는
$n(B-A)=n(B)-n(\boxed{A\cap B})=115-52=\boxed{63}$

09 정답 ②

$(A-B)^C=(A\cap B^C)^C$
$=A^C\cup(B^C)^C$
$=A^C\cup B$
$\therefore A\cup(A-B)^C=A\cup(A^C\cup B)$
$=(A\cup A^C)\cup B$
$=U\cup B=U$

10 정답 ⑤

ㄱ. $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$ (참)
ㄴ. $(A-B)-C=(A\cap B^C)\cap C^C$
$=A\cap(B^C\cap C^C)$
$=A\cap(B\cup C)^C$
$=A-(B\cup C)$ (참)
ㄷ. $A\cap(B-A)^C=A\cap(B\cap A^C)^C=A\cap(B^C\cup A)$
$=(A\cap B^C)\cup(A\cap A)=A$
$(B-A)\cap A=(B\cap A^C)\cap A=B\cap(A^C\cap A)$
$=B\cap\varnothing=\varnothing$
$\{A\cap(B-A)^C\}\cup\{(B-A)\cap A\}=A\cup\varnothing=A$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 정답 ④

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=12+17-25=4$
$\therefore n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=12-4=8$

12 정답 ②

색칠한 부분을 나타내는 집합을 P라 하면 $n(P)=10$이고
$n(P)=n(A\cup B\cup C)-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}$
$+2\{n(A\cap B\cap C)\}$
$2\{n(A\cap B\cap C)\}=n(P)-n(A\cup B\cup C)$
$+\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}$
$=10-14+8=4$
$\therefore n(A\cap B\cap C)=2$

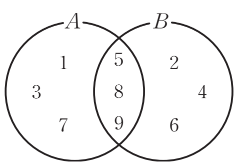
[03+04] 개념 실력확인

I-2. 집합의 연산

문제편 18~19p

13 정답 ③

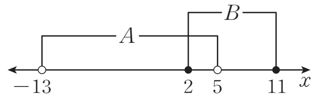
주어진 조건을 만족시키도록 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



따라서 집합 $B=\{2, 4, 5, 6, 8, 9\}$이므로 모든 원소의 합은 34이다.

14 정답 ③

집합 B의 $x^2-13x+22\le0$에서 $(x-11)(x-2)\le0$
$\therefore 2\le x\le11$
이때, $A\cup B=\{x\mid-13<x\le11\}$,
$A\cap B=\{x\mid2\le x<5\}$이므로



$(A-B)\cup(B-A)$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$
$=\{x\mid-13<x<2$ 또는 $5\le x\le11\}$
따라서 구하는 원소 중 자연수인 것은 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11로 8개이다.

15 정답 ④

$A-B=A$에서 $A-B=A-(A\cap B)=A$
$\therefore A\cap B=\varnothing$

16 정답 ②

$A\cap\{2, 4\}\ne\varnothing$이므로 집합 A는 원소 2 또는 4를 포함해야 한다. 즉, 전체집합 U의 부분집합 중
원소 2를 포함하는 것의 개수는 $2^{6-1}=2^5=32$
원소 4를 포함하는 것의 개수는 $2^{6-1}=2^5=32$
원소 2, 4를 모두 포함하는 것의 개수는 $2^{6-2}=2^4=16$
따라서 구하는 집합 A의 개수는
$32+32-16=48$

17 정답 7

집합 A의 $x^2-5x+6\le0$에서 $(x-3)(x-2)\le0$
$\therefore 2\le x\le3$
집합 $A\cap B$의 원소는 연립부등식 $\begin{cases}2\le x\le3\\x^2+y\le10\end{cases}$의 해 (x, y) 중에서 자연수의 해이므로
(i) $x=2$일 때, $2^2+y\le10$ $\quad\therefore y\le6$
자연수의 해 (x, y)는 6개
(ii) $x=3$일 때, $3^2+y\le10$ $\quad\therefore y\le1$
자연수의 해 (x, y)는 1개
(i), (ii)에 의하여 구하는 원소의 개수는 7이다.

18 정답 ①

두 집합 A, B가 서로소이므로 $A\cap B=\varnothing$이다. 즉,
$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B^C\Leftrightarrow B\subset A^C$
$\Leftrightarrow A-B=A\cap B^C=A-(A\cap B)=A$
$\Leftrightarrow B-A=B\cap A^C=B-(A\cap B)=B$

19 정답 16

두 집합 $A=\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$에 대하여
$A\cap X=X\Leftrightarrow X\subset A$
$B\cup X=X\Leftrightarrow B\subset X$
$\therefore B\subset X\subset A$
따라서 집합 X는 집합 B의 원소를 갖는 집합 A의 부분집합이므로 집합 X의 개수는 $2^{8-4}=2^4=16$이다.

20 정답 ⑤

$(A\cup B^C)\cap(A\cup B)=A\cup(B^C\cap B)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad=A\cup\varnothing=A$
$(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B^C)=A^C\cap(B\cup B^C)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad=A^C\cap U=A^C$
$\therefore\ \{(A\cup B^C)\cap(A\cup B)\}\cap\{(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B^C)\}$
$\quad =A\cap A^C=\varnothing$

21 정답 58

$n(A)<n(B)$이므로 $A\subset B$이면 $A\cap B=A$
$\therefore\ 12\le n(A\cap B)\le n(A)=20$ ⋯ ㉠
이때, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$\qquad=20+25-n(A\cap B)$
$\qquad=45-n(A\cap B)$
이므로 ㉠에 의하여 $25\le n(A\cup B)\le 33$
따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 $M=33$, 최솟값은 $m=25$이므로 $M+m=58$이다.

22 정답 128

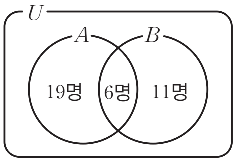
조건 (가)에서 $A\cup X=X$이므로
$A\subset X \qquad \therefore\ \{1, 2\}\subset X$ ⋯ ㉠
$B-A=\{3, 5, 7\}$이고, 조건 (나)에서 $(B-A)\cap X=\{5, 7\}$이므로 $\{3, 5, 7\}\cap X=\{5, 7\}$
$\therefore\ 5, 7\in X,\ 3\notin X$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 집합 X는 1, 2, 5, 7을 반드시 원소로 갖고, 3을 원소로 갖지 않는 전체집합 U의 부분집합이다.
따라서 $n(U)=12$이므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 $2^{12-4-1}=2^7=128$이다.

23 정답 15

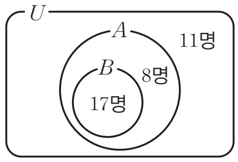
$B=A-(A\cup B^C)=A\cap(A\cup B^C)^C=A\cap(A^C\cap B)$
$\quad=(A\cap A^C)\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$
즉, $B=\varnothing$이므로 $A\cup B=U$에서 $A=U$이다.
따라서 $A-B=U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 15이다.

24 정답 ⑤

학급 학생 전체의 집합을 U, 토요일에 축구 경기를 시청한 학생의 집합을 A, 일요일에 축구 경기를 시청한 학생의 집합을 B라 하면 $n(U)=36$, $n(A)=25$, $n(B)=17$
토요일과 일요일 모두 시청한 학생 수는
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$\qquad=25+17-n(A\cup B)$
$\qquad=42-n(A\cup B)$ ⋯ ㉠
한편, $n(A\cup B)$의 최댓값은 학급 학생 전체 인원 수인 $n(U)=36$이고, 최솟값은 $A\cup B=A$일 때의 인원 수인 $n(A)=25$이다.
㉠에 의하여 $n(A\cap B)$의 최솟값 m은 $n(A\cup B)$가 최대인 경우이므로
$m=42-36=6$



㉠에 의하여 $n(A\cap B)$의 최댓값 M은 $n(A\cup B)$가 최소인 경우이므로
$M=42-25=17$
$\therefore\ M+m=17+6=23$



05 명제

Ⅰ-3. 명제

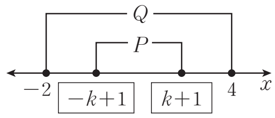
문제편 20~21p

01 정답 2

조건 p의 진리집합은 $\{\boxed{1, 2, 3, 4}\}$ ⋯ ㉠
조건 q의 진리집합은 $\{\boxed{3, 4, 5, 6, 7}\}$
이때, 조건 $\sim q$의 진리집합은 조건 q의 진리집합의 여집합과 같으므로 $\{\boxed{1, 2, 8}\}$ ⋯ ㉡
따라서 조건 'p 그리고 $\sim q$'의 진리집합은 ㉠, ㉡의 교집합으로 $\{\boxed{1, 2}\}$이므로 원소의 개수는 $\boxed{2}$이다.

02 정답 3

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,\boxed{-k+1}\le x\le\boxed{k+1}\}$, $Q=\{x\,|\,-2\le x\le 4\}$
명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면
$P\subset Q$이어야 하므로 그림에서
$\boxed{-k+1}\ge -2$, $\boxed{k+1}\le 4$
$\therefore\ k\le\boxed{3}$
따라서 상수 k의 최댓값은 $\boxed{3}$이다.

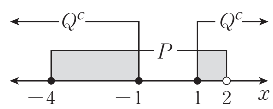


03 정답 3

ㄱ. 부정 : 정사각형의 네 변의 길이는 모두 같다. (참)
ㄴ. 부정 : 27의 약수는 많다.
이때, 참, 거짓을 판단할 수 없으므로 명제가 아니다.
ㄷ. 부정 : $17-7=10$ (참)
ㄹ. 부정 : 14는 소수가 아니다. (참)
ㅁ. 부정 : $x^2-x\ge 0$
이때, x를 포함한 식으로 x의 값에 따라 참인지 거짓인지 판단할 수 있으므로 조건이다.
따라서 부정이 참인 명제는 ㄱ, ㄷ, ㄹ로 3개이다.

04 정답 5

조건 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 조건 'p 그리고 $\sim q$'이다.
이때, 조건 $\sim q$의 진리집합은 $x\le -1$ 또는 $x\ge 1$이고,
조건 'p 그리고 $\sim q$'의 진리집합은 두 조건 p, $\sim q$의 진리집합의 교집합이므로 각각의 진리집합을 P, Q^C라 하면 $P\cap Q^C$는 그림과 같다.



$\therefore\ -4\le x\le -1$ 또는 $1\le x<2$
따라서 구하는 진리집합의 원소 중 정수는 -4, -3, -2, -1, 1로 5개이다.

05 정답 ③

$(P\cup Q)\cap R=\varnothing$이면 $(P\cup Q)\subset R^C$이므로
$P\subset R^C$ 그리고 $Q\subset R^C$
따라서 p이면 $\sim r$이고, q이면 $\sim r$이다.

06 정답 ⑤

명제 $q\longrightarrow p$가 참이면 $Q\subset P$이므로
$P^C\cap Q=\varnothing$

06 명제의 역과 대우

I-3. 명제

문제편 22~23p

07 정답 ④

ㄱ. 전체집합 U의 모든 x에 대하여 $x+3>0$, 즉 $x>\boxed{-3}$이므로 명제는 $\boxed{참}$이다.

ㄴ. $x^2+2x-3=(\boxed{x+3})(\boxed{x-1})>0$
$\therefore x>\boxed{1}$ 또는 $x<\boxed{-3}$
근데, 전체집합 U의 원소 중 $\boxed{-2,\ -1,\ 0,\ 1}$은 조건을 만족시키지 않으므로 명제는 $\boxed{거짓}$이다.

ㄷ. $x^2+x=\boxed{x}(\boxed{x+1})\le 0$
$\therefore \boxed{-1}\le x\le\boxed{0}$
즉, 전체집합 U의 원소 중 $\boxed{-1,\ 0}$은 조건을 만족시키므로 명제는 $\boxed{참}$이다.

따라서 참인 명제는 $\boxed{ㄱ,\ ㄷ}$이다.

08 정답 ②

ㄱ. $x=1$이면 $x^2-2x=\boxed{-1}\neq 0$이므로 명제의 대우는 $\boxed{거짓}$이다.

ㄴ. $|x|\ge 0$, $|y|\ge 0$에서 $|x|+|y|=0$이면 $x=\boxed{0}$, $y=\boxed{0}$이므로 명제의 대우는 $\boxed{참}$이다.

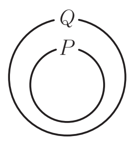
ㄷ. 【반례】 $x=\boxed{2}$, $y=\boxed{-1}$이면 $xy<0$이지만 $x>0$, $y<0$이므로 명제의 대우는 $\boxed{거짓}$이다.

따라서 명제의 대우가 참인 것은 $\boxed{ㄴ}$이다.

09 정답 ④

명제가 거짓일 때 이 명제의 부정은 참이다. 즉, 명제 '$x\le 1$ 또는 $x\ge 2$인 어떤 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\ge 0$이다.'의 부정 '$1<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0$이다.'는 참이다.
이때, 명제 '$1<x<2$이면 $ax^2+bx+c<0$이다.'가 참이므로 $P\subset Q$이다.

ㄱ. $Q^C\subset P^C$ (참)
ㄴ. $P\cup Q=Q$ (거짓)
ㄷ. $P-Q=\varnothing$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10 정답 81

주어진 명제의 부정은 '모든 실수 x에 대하여 $x^2-18x+k\ge 0$'이다.
이때, 이차부등식 $x^2-18x+k\ge 0$이 성립하기 위하여 이차방정식 $x^2-18x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=9^2-k\le 0\qquad\therefore k\ge 81$

따라서 상수 k의 최솟값은 81이다.

11 정답 ①

ㄱ. 역 : $x=1$이면 $x^3=1$이다. (참)
ㄴ. 역 : $x+y\ge 2$이면 $x\ge 1$이고 $y\ge 1$이다.
【반례】 $x=0$, $y=2$ (거짓)
ㄷ. 역 : 두 자연수 x, y에 대하여 xy가 짝수이면 x^2+y^2은 홀수이다.
【반례】 $x=2$, $y=4$(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

12 정답 ⑤

명제 $\sim(\sim p)\longrightarrow\sim q$, 즉 $p\longrightarrow\sim q$의 대우인 명제 $q\longrightarrow\sim p$가 참이므로 명제 $p\longrightarrow\sim q$도 참이다.
또한, 역인 명제 $\sim q\longrightarrow p$가 참이므로 이 역의 대우인 명제 $\sim p\longrightarrow q$도 참이다.
그런데 명제 $p\longrightarrow q$는 항상 참이라 할 수 없다.

[05+06] 개념 실력확인

I-3. 명제

문제편 24~25p

13 정답 3

모든 x에 대하여 $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로

ㄱ. 부정 : 모든 x에 대하여 $x^2+x+1\le 0$이다. (거짓)
ㄴ. 부정 : 모든 x에 대하여 $x^2+x+1>0$이다. (참)

모든 x에 대하여 $x^2-4x+4=(x-2)^2\ge 0$이므로

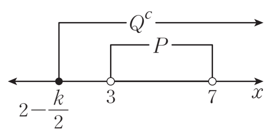
ㄷ. 부정 : 어떤 x에 대하여 $x^2-4x+4>0$이다. (참)
ㄹ. 부정 : 어떤 x에 대하여 $x^2-4x+4\le 0$이다.
이때, 조건을 만족시키는 $x=2$가 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ로 3개이다.

14 정답 ②

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
조건 p : $|x-5|<2$에서 $-2<x-5<2\qquad\therefore 3<x<7$
$\therefore P=\{x\,|\,3<x<7\}$
조건 q : $3x-4<x-k$에서 $2x<4-k$
$\therefore Q=\left\{x\,\middle|\,x<2-\dfrac{k}{2}\right\}$, $Q^C=\left\{x\,\middle|\,x\ge 2-\dfrac{k}{2}\right\}$

이때, 명제 $p\longrightarrow\sim q$가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하므로 그림에서



$2-\dfrac{k}{2}\le 3\qquad\therefore k\ge -2$

따라서 상수 k의 최솟값은 -2이다.

15 정답 ①

명제 p가 참이므로 $C \subset A$

명제 q가 참이므로 $A \cap B \not\subset C$, 즉 $A \cap B \subset C^C$

명제 r가 참이므로 $x \in B$이면 $x \in C^C$에서 $B \subset C^C$, 즉 $C \subset B^C$

따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는 ①과 같다.

16 정답 ⑤

① 역 : $x^2=y^2$이면 $x=y$이다.
【반례】$x=-1$, $y=1$ (거짓)

② 역 : $x+y=0$이면 $x=0$, $y=0$이다.
【반례】$x=-1$, $x=1$ (거짓)

③ 역 : $x^2>0$이면 $x>0$이다.
【반례】$x=-1$ (거짓)

④ 역 : x가 홀수이면 x는 소수이다.
【반례】$x=9$ (거짓)

⑤ 역 : x가 자연수이면 x는 양수이다. (참)

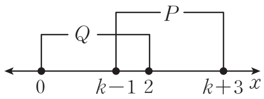
17 정답 ④

명제 '$k-1 \le x \le k+3$인 어떤 실수 x에 대하여 $0 \le x \le 2$이다.'에서 조건 '$k-1 \le x \le k+3$'의 진리집합을 $P=\{x \mid k-1 \le x \le k+3\}$, 조건 '$0 \le x \le 2$'의 진리집합을 $Q=\{x \mid 0 \le x \le 2\}$라 하자.

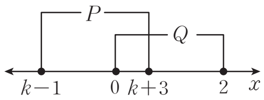
주어진 명제가 참이면 진리집합 P에 속하는 원소 중에서 진리집합 Q에 속하는 원소가 존재한다는 것을 의미하므로 $P \cap Q \neq \varnothing$이어야 한다.

이때, 두 진리집합 P와 Q를 수직선 위에 나타내어 보면 다음의 2가지 경우 중 하나이다.

(i) $k-1 \ge 0$일 때, $k-1 \le 2$
$k \le 3$ $\quad \therefore 1 \le k \le 3$



(ii) $k-1<0$일 때, $0 \le k+3$
$k \ge -3$ $\quad \therefore -3 \le k < 1$



(i), (ii)에 의하여 $-3 \le k \le 3$이다.

따라서 $-3 \le k \le 3$을 만족시키는 정수 k는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3으로 7개이다.

18 정답 ④

ㄱ. $R \subset Q$이므로 $r \to q$는 참이다.

ㄴ. $S \subset R^C$에서 $s \to \sim r$가 참이지만 $\sim r \to s$는 거짓이다.

ㄷ. $S \not\subset P$에서 $S \subset P^C$이므로 $s \to \sim p$는 참이다.

ㄹ. $R \subset P$에서 $P^C \subset R^C$이므로 $\sim p \to \sim r$는 참이다.

따라서 참인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

19 정답 ③

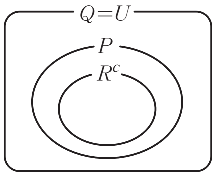
명제 $p \to q$가 참이므로 $P \subset Q$ ⋯ ㉠

명제 $\sim p \to q$가 참이므로 $P^C \subset Q$ ⋯ ㉡

명제 $\sim p \to r$가 참이므로 $P^C \subset R$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡에서 $P \cup P^C \subset Q$이므로 $U=Q$

㉢에서 $R^C \subset P \subset Q$



ㄱ. $Q-R^C=Q \cap R=R$ (참)

ㄴ. $P-R=P \cap R^C=R^C$ (거짓)

ㄷ. $Q-P=Q \cap P^C \subset P^C \subset R$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

20 정답 ⑤

$P-Q=P \cap Q^C=R$이므로 $R \subset P$, $R \subset Q^C$이다.

즉, $r \to p$, $r \to \sim q$는 모두 참이다.

이때, 이 명제의 대우 $\sim p \to \sim r$, $q \to \sim r$도 모두 참이다.

따라서 항상 참인 것은 ⑤번뿐이다.

21 정답 ②

얻은 결과를 명제라 하고 다음 네 조건 p, q, r, s를

p : 갑이 풀었다. q : 을이 풀었다. r : 병이 풀었다.

s : 정이 풀었다.

라고 하면 각 명제

(나) $\sim p \to \sim s$, (다) $q \to r$, (라) $\sim s \to \sim r$는 참이다.

두 명제 (나), (라)의 대우도 참이므로

$s \to p$, $r \to s$

즉, 명제 $q \to r \to s \to p$는 참이다.

이때, 을이 풀었다면 갑, 병, 정 세 명도 푼 것이고, 병이 풀었다면 갑, 정 두 명도 푼 것이므로 (가)에 모순이다.

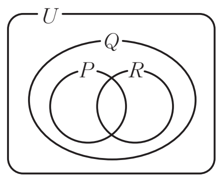
따라서 문제를 푼 사람은 갑, 정이다.

22 정답 ③

ㄱ. $P \cap Q=P$이므로 $P \subset Q$ $\quad \therefore p \to q$ (참)

ㄴ. $R^C \cup Q=U$이므로 $(R^C \cup Q)^C=U^C$
$R \cap Q^C=R-Q=\varnothing$이고 $R \subset Q$
$\therefore r \to q$ (참)

ㄷ. 【반례】$P \cap R \neq \varnothing$일 때, $P \not\subset R^C$
$\therefore p \to \sim r$ (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

23 정답 ④

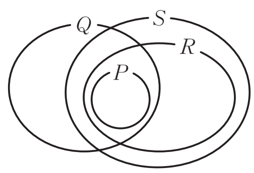
네 조건 p, q, r, s의 진리집합을 각각 P, Q, R, S라 하면

(p 그리고 q) $\to s$에서 $P \cap Q \subset S$

$p \to$ (q 그리고 r)에서 $P \subset Q \cap R$

$r \to s$에서 $R \subset S$

진리집합의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $p \to s$가 참이므로 대우인 $\sim s \to \sim p$도 참이다.

24 정답 ③

조사에서 얻은 결과를 명제라 하고 다음 네 조건 p, q, r, s를

p : 10대, 20대에게 선호도가 높다.

q : 판매량이 많다.

r : 가격이 싸다.

s : 기능이 많다.

라 하면 각 명제 (가) $p \to q$, (나) $r \to q$, (다) $s \to p$는 참이다.

또, (가), (다)에 의하여 명제 $s \to q$도 참이다.

따라서 명제 $s \to q$가 참이면 대우인 명제 ③ $\sim q \to \sim s$도 참이다.

07 명제의 증명

Ⅰ-4. 명제의 증명

문제편 26~27p

01 정답 8

주어진 명제의 대우 '자연수 n에 대하여 n이 $\boxed{\text{짝수}}$이면 n^2+1은 $\boxed{\text{홀수}}$이다.'가 참임을 보이면 된다.

n이 $\boxed{\text{짝수}}$이면 $n=2k$(k는 자연수)로 나타낼 수 있고

$n^2+1=(\boxed{2k})^2+1=4k^2+1=2(\boxed{2k^2})+1$

이므로 n^2+1은 $\boxed{\text{홀수}}$이다.

따라서 $f(k)=\boxed{2k^2}$이므로 $f(2)=\boxed{8}$이다.

02 정답 6

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|3<x\le5\}$, $Q=\{x|x\ge\boxed{4+a}\}$, $R=\{x|-a\le x\le3\}$

q는 p이기 위한 필요조건이므로 $p \Rightarrow q$, 즉 $P\subset Q$

r는 q이기 위한 충분조건이므로 $r \Rightarrow q$, 즉 $R\subset Q$

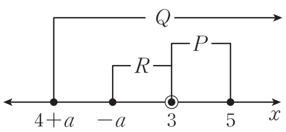
$\therefore P\cup R\subset Q$ ⋯ ㉠

조건 r에 의하여 $-a\le\boxed{3}$, 즉

$a\ge\boxed{-3}$ ⋯ ㉡이므로

$P\cup R=\{x|-a\le x\le5\}$

㉠을 만족시키기 위해서



$\boxed{4+a}\le -a$

$\therefore a\le\boxed{-2}$ ⋯ ㉢

이때, ㉡, ㉢에 의하여 $\boxed{-3}\le a\le\boxed{-2}$

따라서 모든 정수 a의 값은 $\boxed{-3,\ -2}$이므로 그 곱은 $\boxed{6}$이다.

03 정답 4

주어진 명제의 대우가 '$x\le k$이고 $y\le2$이면 $(x+y)^2\le36$이다.'

이므로 '두 양의 실수 x, y에 대하여 $0<x+y\le k+2$이면 $0\le x+y\le6$이다.'가 참이 되기 위해서

$k+2\le6$

$\therefore k\le4$

따라서 상수 k의 최댓값은 4이다.

04 정답 ③

$p^2(n^2-1)=q^2$에서 p는 q^2의 약수인데 p, q가 서로소이므로 $p=1$이어야 한다.

$p^2(n^2-1)=q^2$에 $p=1$을 대입하면 $n^2-1=q^2$

즉, $n^2=$ q^2+1 ← (가)

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때, $n^2=(2k)^2+1$이므로

$(2k)^2<n^2<$ $(2k+1)^2$ ← (나) 즉, $2k<n<2k+1$을 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때, $n^2=(2k+1)^2+1$이므로

$(2k+1)^2$ $<n^2<(2k+2)^2$ 즉, $2k+1<n<2k+2$를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $f(q)=q^2+1$, $g(k)=(2k+1)^2$이므로

$f(2)+g(3)=5+49=54$

05 정답 ②

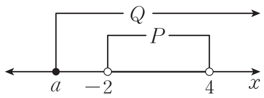
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

조건 p : $x^2-2x-8<0$에서

$(x-4)(x+2)<0$ $\quad\therefore P=\{x|-2<x<4\}$

조건 q : $x\ge a$에서 $Q=\{x|x\ge a\}$

이때, p가 q이기 위한 충분조건이므로 $p\Rightarrow q$, 즉 $P\subset Q$이어야 한다.



$\therefore a\le-2$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다.

06 정답 ③

ㄱ. 조건 p : $|x+1|=2$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

조건 q : $x=1$이므로 $p\Leftarrow q$

ㄴ. 조건 p : $x^2<4$에서 $-2<x<2$

조건 q : $x<2$이므로 $p\Rightarrow q$

ㄷ. 조건 p : $\sqrt{x^2}>\sqrt{y^2}$, 즉 $|x|>|y|$에서

$x>y>0$ 또는 $x<y<0$

조건 q : $x>y>0$이므로 $p\Leftarrow q$

따라서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 $p\Leftarrow q$가 성립해야 하므로 ㄱ, ㄷ이다.

08 절대부등식

Ⅰ-4. 명제의 증명

문제편 28~29p

07 정답 ④

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-kx+3}$의 값이 실수가 되기 위해서는 $kx^2-kx+3\ge0$을 만족시켜야 한다.

이차방정식 $kx^2-kx+3=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $k=0$일 때, $\boxed{3}\ge0$이므로 성립한다.

(ii) $k\ne0$일 때, $k>0$이고 $D\le0$이므로

$D=k^2-12k=k(k-12)\le0$

$\therefore \boxed{0}<k\le\boxed{12}$

(i), (ii)에 의하여 $\boxed{0}\le k\le\boxed{12}$이므로 정수 k의 개수는 $\boxed{13}$이다.

08 정답 12

$x>0$인 실수 x에 대하여

$x^2>0$, $x^2+2>0$

$$x^2+\frac{36}{x^2+2}=(x^2+\boxed{2})+\frac{36}{x^2+2}-\boxed{2}$$

$$\ge\boxed{2}\sqrt{(x^2+\boxed{2})\times\frac{36}{x^2+2}}-\boxed{2}=\boxed{10}$$

단, 등호는 $\boxed{x^2+2}=\dfrac{36}{x^2+2}$일 때 성립하므로

$(x^2+2)^2=36$에서 $x^2=4$

$\therefore x=\boxed{2}$ ($\because x>0$)

따라서 $a=\boxed{2}$, $b=\boxed{10}$이므로 $a+b=\boxed{12}$

09 정답 ①

$f(x)=x^2-2kx-2k^2+k+4$라 하고 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립하기 위해서는

$\frac{D}{4}=k^2-(-2k^2+k+4)<0$

$3k^2-k-4=(3k-4)(k+1)<0$

$\therefore\ -1<k<\frac{4}{3}$

따라서 모든 정수 k의 값은 0, 1이므로 그 합은 1이다.

다른 풀이

$f(x)=(x-k)^2-3k^2+k+4$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립하기 위해서는 $-3k^2+k+4>0$이어야 한다.

즉, $3k^2-k-4<0$에서 $(3k-4)(k+1)<0$이므로

$-1<k<\frac{4}{3}$

10 정답 ⑤

① $(|a|+1)^2-(|a+1|)^2=|a|^2+2|a|+1-a^2-2a-1$
$=2(|a|-a)\geq 0\ (\because |a|\geq a)$

$\therefore\ |a|+1\geq |a+1|$ (거짓)

② 【반례】 $a=0$이면 $a^2<1$ (거짓)

③ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\geq 0$

$\therefore\ a^2-ab\geq -b^2+ab$ (거짓)

④ 【반례】 $a^2+a+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$이므로

$a=-\frac{1}{2}$일 때, $a^2+a<0$이다.(거짓)

⑤ $\sqrt{a}\leq\sqrt{a+b}\leq\sqrt{b}+\sqrt{a+b}$이므로

$\sqrt{a}-\sqrt{b}\leq\sqrt{a+b}$ (참)

11 정답 ⑤

x, y가 실수이므로 코시－슈바르츠 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(2x+3y)^2$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$

이때, $x^2+y^2=13$이므로 $13\cdot 13\geq(2x+3y)^2$

$\therefore\ -13\leq 2x+3y\leq 13$

따라서 $M=13$, $m=-13$이므로

$M-m=26$

12 정답 16

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 직사각형의 넓이는 xy이고, 대각선의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 $x^2+y^2=(4\sqrt{2})^2=32$

이때, $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$32\geq 2xy$ $\qquad\therefore\ xy\leq 16$

따라서 $x=y=4$일 때 직사각형의 넓이는 최대 16이므로 이 직사각형의 둘레의 길이는 $2(x+y)=16$이다.

13 정답 ③

조건 $x^2-3x+2<0$을 나타내는 진리집합을 P라 하면

$(x-2)(x-1)<0$에서 $1<x<2$ $\qquad\therefore\ P=\{x|1<x<2\}$

조건 $|x-a|<a-1$을 나타내는 진리집합을 Q라 하면

$-a+1<x-a<a-1$에서 $1<x<2a-1$

$\therefore\ Q=\{x|1<x<2a-1\}$

따라서 부등식 $x^2-3x+2<0$이 부등식 $|x-a|<a-1$이기 위한 필요조건은 $Q\subset P$이므로 $2a-1\leq 2$ $\qquad\therefore\ a\leq\frac{3}{2}$

14 정답 ⑤

조건 p : $|a|+|b|=0$에서 $a=b=0$

조건 q : $a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0$ $\qquad\therefore\ a=b$

조건 r : $|a+b|=|a-b|$에서 $|a+b|^2=|a-b|^2$이므로

$ab=0$ $\qquad\therefore\ a=0$ 또는 $b=0$

즉, $p\Rightarrow q$ … ㉠, $p\Rightarrow r$ … ㉡이므로

ㄱ. ㉠에 의하여 p는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄴ. ㉡에 의하여 $\sim r\Rightarrow\sim p$이므로 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다. (참)

ㄷ. q이고 r이면 $a=b=0$이므로 q이고 r는 p이기 위한 필요충분조건이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄴ. 조건 $\sim p$: $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$,
조건 $\sim r$: $a\neq 0$이고 $b\neq 0$
이므로 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다. (참)

15 정답 6

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}$

$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}$

$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$

$\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\times\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{b}{c}\times\frac{c}{b}}$

$=2+2+2=6$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

16 정답 ②

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

조건 p : $-3<x-a<4$에서 $a-3<x<a+4$

$\therefore\ P=\{x|a-3<x<a+4\}$

조건 q : $-1\leq 3x-7<23$에서 $6\leq 3x<30$이므로 $2\leq x<10$

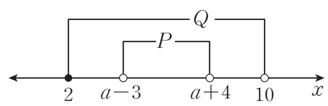
$\therefore\ Q=\{x|2\leq x<10\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$

즉, $a-3\geq 2$이고 $a+4\leq 10$

이므로 $5\leq a\leq 6$

따라서 정수 a는 5, 6으로 2개이다.



17 정답 ③

p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 $p \Rightarrow q$이고 $p \not\Leftarrow q$이면 된다. 즉,

ㄱ. (ⅰ) $p \longrightarrow q$

p : $ab>0$일 때, $a>0$, $b>0$ 또는 $a<0$, $b<0$이므로

$a>0$, $b>0$이면 $|a+b|=a+b=|a|+|b|$

$a<0$, $b<0$이면 $|a+b|=-a-b=|a|+|b|$

$\therefore p \Rightarrow q$

(ⅱ) $q \longrightarrow p$

【반례】 $a=0$이고 $b=1$이면 $ab=0$이므로 $p \not\Leftarrow q$이다.

ㄴ. (ⅰ) $p \longrightarrow q$

$p \longrightarrow q$의 대우인 명제는 '$a<1$이고 $b<1$이면 $a+b<2$이다.'이므로 $p \Rightarrow q$이다.

(ⅱ) $q \longrightarrow p$

【반례】 $a=-3$이고 $b=2$이면 $a+b=-1\le 2$이므로

$p \not\Leftarrow q$이다.

ㄷ. $p \longrightarrow q$

【반례】 $a=0$이고 $b=1$이면 $a^2+ab+b^2=1>0$이므로

$p \not\Rightarrow q$이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

18 정답 ①

$$\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}} \cdots ㉠$$

$a>0$, $b>0$이므로

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 ㉠에서 $\frac{ab}{a^2+b^2}\le\frac{1}{2}$이므로 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

19 정답 ⑤

a, b, c가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$\{1^2+(-2)^2+(\sqrt{3})^2\}(a^2+b^2+c^2)\ge(a-2b+\sqrt{3}c)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } a=-\frac{b}{2}=\frac{c}{\sqrt{3}}\text{일 때 성립}\right)$

이때, $a^2+b^2+c^2=8$이므로

$8^2\ge(a-2b+\sqrt{3}c)^2 \qquad \therefore -8\le a-2b+\sqrt{3}c\le 8$

따라서 $M=8$, $m=-8$이므로

$M-m=16$

20 정답 ③

$$A-B=a+b-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-2ab}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{a+b}>0$$

$\therefore A>B \cdots ㉠$

$$A-C=a+b-\frac{a+b}{b-a}=(a+b)\left(1-\frac{1}{b-a}\right)$$

$$=(a+b)\left(\frac{b-a-1}{b-a}\right)$$

이때, $-a<0$, $b-1<0$에서 $b-a-1<0$이고 $b-a>0$이므로

$A-C<0 \qquad \therefore A<C \cdots ㉡$

㉠, ㉡에 의하여 $B<A<C$

21 정답 97

$\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

삼각형 ABC의 넓이를 구하면

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}(\overline{AB}\times a+\overline{BC}\times b+\overline{CA}\times c)$

$\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}(3a+5b+4c)$

$\therefore 3a+5b+4c=12$

a, b, c가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(3^2+5^2+4^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(3a+5b+4c)^2=12^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{4}\text{일 때 성립}\right)$

이때, $a^2+b^2+c^2\ge\frac{144}{50}=\frac{72}{25}$이므로

$a^2+b^2+c^2$의 최솟값은 $\frac{72}{25}$이다.

따라서 $p=25$, $q=72$이므로 $p+q=97$

22 정답 14

세 양수 a, b, c에 대하여 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$가 실수이므로

코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\}\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \sqrt{a}=\frac{\sqrt{b}}{2}=\frac{\sqrt{c}}{3}\text{일 때 성립}\right)$

이때, $a+b+c=14$에서

$14^2\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$이므로

$0\le\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}\le 14$

따라서 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값은 14이다.

23 정답 ④

ㄱ. 【반례】 $x=y=z$이면 좌변과 우변이 같으므로

$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ (거짓)

ㄴ. $(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

$=x+y-x-2\sqrt{xy}-y$

$=-2\sqrt{xy}<0$

$\therefore \sqrt{x+y}<\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (참)

ㄷ. x, y, z가 실수이므로

$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)$

$\ge(x+y+z)^2=12$ (단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립)

$\therefore x^2+y^2+z^2\ge 4$ (거짓)

ㄹ. $x>0$, $y>0$이므로

$(x+y)\left(\frac{8}{x}+\frac{2}{y}\right)$

$=8+\frac{2x}{y}+\frac{8y}{x}+2$

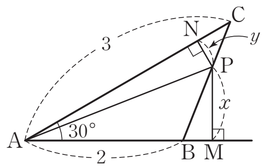
$\ge 10+2\sqrt{\frac{2x}{y}\times\frac{8y}{x}}$ (단, 등호는 $x=2y$일 때 성립)

$=18$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

24 정답 28

그림과 같이 $\overline{PM}=x$, $\overline{PN}=y$라 하면



$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$에서

$\frac{1}{2}\times 2\times 3\times \sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 2\times x+\frac{1}{2}\times 3\times y$

$\therefore\ 2x+3y=3$

$\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$에서

$3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)$

$=13+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}\ge 13+2\sqrt{\frac{6x}{y}\times\frac{6y}{x}}=25$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

이때, $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\ge\frac{25}{3}$이므로 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$의 최솟값은 $\frac{25}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=25$이므로 $p+q=28$

Ⅰ단원 [01~08] 개념 종합 문제

문제편 32~35p

01 정답 ③

8의 양의 배수 8, 16, 24, 32, …이다.

$x<8$일 때, 집합 A는 공집합으로 $n(A)=0$이다.

따라서 $k\le 8$이므로 자연수 k의 개수는 8이다.

02 정답 1

$A\subset B$가 성립하려면 $3\in B$, $-x\in B$이어야 하므로

(i) $3=x^2+2$, 즉 $x^2=1$일 때,

$x=1$이면 $A=\{-1, 3\}$, $B=\{-3, -1, 3\}$이므로 $A\subset B$

$x=-1$이면 $A=\{1, 3\}$, $B=\{-5, -1, 3\}$이므로 $A\not\subset B$

(ii) $3=x-4$, 즉 $x=7$일 때,

$A=\{-7, 3\}$, $B=\{-1, 3, 51\}$이므로 $A\not\subset B$

(i), (ii)에 의하여 $x=1$이다.

다른 풀이

(i) $-x=x^2+2$, 즉 $x^2+x+2=0$일 때,

실수 x는 존재하지 않는다.

(ii) $-x=x-4$, 즉 $x=2$일 때,

$A=\{-2, 3\}$, $B=\{-2, -1, 6\}$이므로 $A\not\subset B$

(iii) $-x=-1$, 즉 $x=1$일 때,

$A=\{-1, 3\}$, $B=\{-3, -1, 3\}$이므로 $A\subset B$

03 정답 12

집합 A에 대하여 $n(A)=k$이고, 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖고, 4, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합 X의 개수가 128이므로

$2^{k-3-2}=2^{k-5}=128=2^7$

$k-5=7\qquad\therefore\ k=12$

04 정답 8

$i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$이므로

$n=1$일 때, $i+\frac{1}{i}=i+\frac{i}{i^2}=i+\frac{i}{-1}=i-i=0$

$n=2$일 때, $i^2+\frac{1}{i^2}=-1+\frac{1}{-1}=-1-1=-2$

$n=3$일 때, $i^3+\frac{1}{i^3}=-i+\frac{i}{i^4}=-i+i=0$

$n=4$일 때, $i^4+\frac{1}{i^4}=1+\frac{1}{1}=2$

$n=5$일 때, $i^5+\frac{1}{i^5}=i\cdot i^4+\frac{1}{i\cdot i^4}=i+\frac{1}{i}=0$

⋮

자연수 n에 대하여 x의 값이 0, -2, 0, 2로 반복되어 나타나므로 $A=\{-2, 0, 2\}$

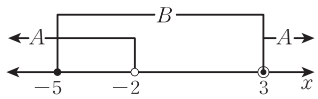
따라서 집합 A의 원소의 개수는 3이므로 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^3=8$이다.

05 정답 17

집합 A에서 $x^2-x-6=(x-3)(x+2)>0$

$\therefore\ x>3,\ x<-2$

조건 (가)를 만족시키기 위하여 집합 B는 $-2\le x\le 3$인 실수를 원소로 포함해야 한다.



이때, 조건 (나) $A\cap B=\{x|-5\le x<-2\}$에 의하여 집합 B의 원소는 $-5\le x\le 3$인 실수이므로

$x^2+ax+b=(x+5)(x-3)=x^2+2x-15\le 0$

따라서 $a=2$, $b=-15$이므로 $a-b=17$

06 정답 19

$A\cap B=\{2\}$, $A-B=\{3\}$이므로 $A=\{2, 3\}$

집합 A에서 $x^2+(2a-1)x+b-1=0$이므로

두 근의 합은 $5=-(2a-1)\qquad\therefore\ a=-2$

두 근의 곱은 $6=b-1\qquad\therefore\ b=7$

집합 B의 $x^2+(2-3b)x-2+3a=0$에 a, b의 값을 대입하면

$x^2-19x-8=0$ ⋯ ㉠

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 이차방정식 ㉠의 근과 계수의 관계에 의하여 19이다.

07 정답 ⑤

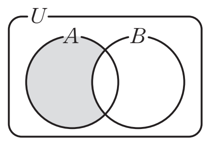
$(A-B^C)^C-B^C=(A\cap B)^C\cap(B^C)^C=(A^C\cup B^C)\cap B$

$=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap B)=(B\cap A^C)\cup\varnothing$

$=B\cap A^C=B-A$

08 정답 ②

① $A\cap B^C=A-B$

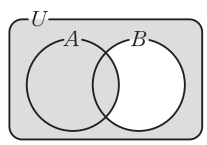


② $(A\cap B)\cup B^C$

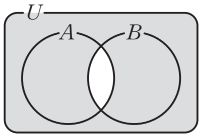
$=(A\cup B^C)\cap(B\cup B^C)$

$=(A\cup B^C)\cap U$

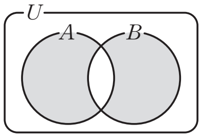
$=A\cup B^C$



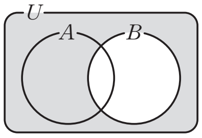
③ $(A\cap B^C)\cup A^C$
$=(A\cup A^C)\cap(B^C\cup A^C)$
$=U\cap(A\cap B)^C$
$=(A\cap B)^C$



④ $(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$



⑤ $(A-B)\cup(A^C\cap B^C)$
$=(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)$
$=(A\cup A^C)\cap B^C$
$=U\cap B^C=B^C$



09 정답 16

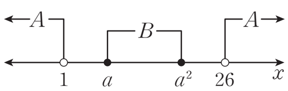
$A=\{1, 3, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로
$A\cap B^C=A-B=\{1, 9\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
따라서 $\{1, 9\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$를 만족시키는 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합 중 1, 9를 원소로 갖는 집합으로 개수는 $2^{6-2}=16$이다.

10 정답 7

10 이하의 자연수 전체의 집합 U에서 세 집합 A, B, C는 각각
$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$, $C=\{1, 2, 3, 6, 7\}$
이고 $A\cap C=\{1, 3, 7\}$
$(A\cup B^C)^C\cup(B\cap C^C)=(A^C\cap B)\cup(B\cap C^C)$
$=(A^C\cap B)\cup(C^C\cap B)$
$=(A^C\cup C^C)\cap B=(A\cap C)^C\cap B$
$=B-(A\cap C)=\{2, 5\}$
따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은 7이다.

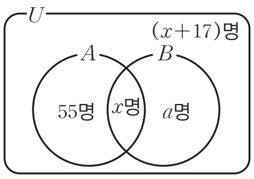
11 정답 ⑤

$A=\{x\mid(x-1)(x-26)>0\}=\{x\mid x<1$ 또는 $x>26\}$
정수 a에 대하여 $a\le a^2$이므로
$B=\{x\mid(x-a)(x-a^2)\le 0\}=\{x\mid a\le x\le a^2\}$
이때, $A\cap B=\varnothing$이 되기 위해서는 $1\le a\le a^2\le 26$이므로
$1\le a\le\sqrt{26}$
따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5로 5개이다.



12 정답 28

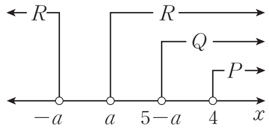
전자제품 구입 예정 고객의 집합을 U, A 제품을 선호한 고객의 집합을 A, B 제품을 선호한 고객의 집합을 B라 하면
$n(U)=100$, $n(A)=55$, $n(B)=a$



이때, A, B 두 제품을 모두 선호한 고객의 수를 $n(A\cap B)=x$로 놓으면 두 제품 모두 선호하지 않는 고객의 수는 조건 (다)에 의하여 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(A\cap B)+17=x+17$
따라서 $n(U)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n((A\cup B)^C)$
이므로 $100=55+a-x+(x+17)$
$\therefore a=28$

13 정답 ②

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 명제 $p\to q$와 명제 $q\to r$가 모두 참이므로 $P\subset Q\subset R$
(i) $P\subset Q$에서 $5-a\le 4$　　$\therefore a\ge 1$
(ii) $Q\subset R$에서 a는 양수이므로 $R=\{x\mid x<-a$ 또는 $x>a\}$
$a\le 5-a$
$\therefore a\le\frac{5}{2}$



(i), (ii)에 의하여 $1\le a\le\frac{5}{2}$
따라서 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$이다.

14 정답 ②

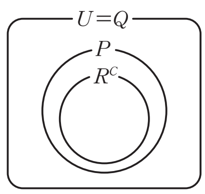
ㄱ. $a=0$일 때,
조건 p : $0\times(x-1)(x-2)<0$이 되어 이 부등식을 만족하는 실수 x는 존재하지 않으므로 $P=\varnothing$이다. (참)
ㄴ. $a>0$, $b=0$일 때,
조건 p의 진리집합은 $P=\{x\mid 1<x<2\}$이고,
조건 q의 진리집합은 $Q=\{x\mid x>0\}$이므로
$P\subset Q$이다. (참)
ㄷ. $a<0$, $b=3$일 때,
조건 p의 진리집합 $P=\{x\mid x<1$ 또는 $x>2\}$에서
조건 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{x\mid 1\le x\le 2\}$이고,
조건 q의 진리집합은 $Q=\{x\mid x>3\}$이므로 $P^C\not\subset Q$이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15 정답 20

명제가 참이면 이 명제의 대우도 참이다.
주어진 명제의 대우는 '$x-6=0$ 또는 $x-2=0$이면 $x^2-ax+b=0$이다.'이다. 따라서 $x=6$, $x=2$가 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$a=6+2=8$, $b=6\times 2=12$이다.
$\therefore a+b=20$

16 정답 ③

$p\Rightarrow q$이므로 $P\subset Q$ ⋯ ㉠
$\sim p\Rightarrow q$이므로 $P^C\subset Q$ ⋯ ㉡
$\sim r\Rightarrow p$이므로 $R^C\subset P$ ⋯ ㉢
㉠, ㉡에서 $P\cup P^C\subset Q$이므로 $U=Q$ ⋯ ㉣
㉠, ㉢에서 $R^C\subset P\subset Q$



ㄱ. ㉡에서 $P^C\subset Q$이다.(참)
ㄴ.【반례】$P=\{1, 2\}$, $R=\{2, 3\}$, $Q=\{1, 2, 3\}$일 때,
$R-P^C=R\cap P=\{2\}\neq\varnothing$(거짓)
ㄷ. ㉣에서 $Q=U$이므로 $R^C\cup P^C\subset Q$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17 정답 ⑤

$(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$
$\Leftrightarrow A-B=\varnothing$이고 $B-A=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B$이고 $B\subset A$
$\Leftrightarrow A=B$

18 정답 ④

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|x>11\}$,

$Q=\{x|x>8-a\}$

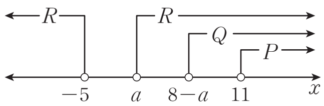
조건 r : $x^2-(a-5)x-5a>0$에서

$(x-a)(x+5)>0$

$\therefore R=\{x|(x-a)(x+5)>0\}$ ⋯ ㉠

이때, p는 q이기 위한 충분조건, r는 q이기 위한 필요조건이므로

$p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$, 즉 $P\subset Q\subset R$여야 한다.



(ⅰ) $P\subset Q$일 때, $8-a\le 11$

$\therefore a\ge -3$

㉠에서 $R=\{x|x>a,\ x<-5\}$

(ⅱ) $Q\subset R$일 때, $a\le 8-a$

$\therefore a\le 4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-3\le a\le 4$

따라서 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은

$4+(-3)=1$이다.

19 정답 ⑤

$$\begin{aligned}A-B&=a^2-a-b+b^2-ab+1\\&=\frac{1}{2}(2a^2-2ab+2b^2+2-2a-2b)\\&=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}\\&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}\ge 0\end{aligned}$$

(단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)

$\therefore A\ge B$

20 정답 ③

정사각형의 넓이 p^2과 직각삼각형의 넓이 $\frac{1}{2}ab$가 같으므로

$p^2=\frac{1}{2}ab$

$\therefore ab=\boxed{2p^2}$ ⋯ ㉠ (가)

직각삼각형에서 $a^2+b^2=c^2$이고 $c=a+2$이므로

$b^2=c^2-a^2=(a+2)^2-a^2=\boxed{4a+4}$ (나)

$\therefore 4a=b^2-4$ ⋯ ㉡

㉠의 양변에 4를 곱하고 ㉡을 대입하면

$8p^2=4ab=b(b^2-4)=\boxed{b(b+2)(b-2)}$ ⋯ ㉢ (다)

여기서 a, b, p가 모두 정수라 하면,

$b^2=\boxed{4a+4}$에서 b는 짝수이므로

$b=2b'$(b'은 자연수)이라 할 때

㉢에 의하여

$$\begin{aligned}p^2&=\frac{2b'}{2}\times\frac{2b'+2}{2}\times\frac{2b'-2}{2}\\&=b'(b'+1)(b'-1)\end{aligned}$$

이 된다.

따라서 $f(p)=2p^2$, $g(a)=4a+4$, $h(b)=b(b+2)(b-2)$이므로

$f(1)+g(2)+h(3)=2+12+15=29$

21 정답 4

$x^2-xy+y^2=\left(x-\boxed{\frac{1}{2}y}\right)^2+\boxed{\frac{3}{4}y^2}$ (가) (나)

x, y가 실수이므로 $\left(x-\boxed{\frac{1}{2}y}\right)^2\ge 0$, $\boxed{\frac{3}{4}y^2}\ge 0$

$\therefore x^2-xy+y^2\ge 0$

단, 등호는 $\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2=0$, $\frac{3}{4}y^2=0$, 즉 $\boxed{x=y=0}$일 때 (다)

성립한다.

따라서 $f(y)=\frac{1}{2}y$, $g(y)=\frac{3}{4}y^2$이므로

$f(2)+g(2)=1+3=4$

22 정답 4

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{(k-1)x^2-4(k-1)x+3k}$의 값이 실수가 되려면 $f(x)=(k-1)x^2-4(k-1)x+3k$라 할 때, $f(x)\ge 0$이 성립해야 한다.

(ⅰ) $k=1$일 때, $3\ge 0$이므로 모든 실수 x에서 성립한다.

(ⅱ) $k\ne 1$일 때, 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D라 하면

$k-1>0$ ⋯ ㉠이고

$\frac{D}{4}=4(k-1)^2-3k(k-1)\le 0$

$k^2-5k+4\le 0$

$(k-1)(k-4)\le 0$

㉠에 의하여 $1<k\le 4$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $1\le k\le 4$이므로 정수 k는 1, 2, 3, 4로 4개이다.

23 정답 ③

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 점 A(2, 3)을 지나므로

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$ ⋯ ㉠

이때, $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\ge 2\sqrt{\frac{2}{a}\times\frac{3}{b}}=2\sqrt{\frac{6}{ab}}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{2}{a}=\frac{3}{b}\text{일 때 성립}\right)$

즉, ㉠에 의하여 $1\ge 2\sqrt{\frac{6}{ab}}$, 즉 $\frac{1}{2}\ge\sqrt{\frac{6}{ab}}$이므로

양변을 제곱하여 정리하면 $ab\ge 24$($\because a>0,\ b>0$)

따라서 ab의 최솟값은 24이다.

24 정답 48

삼각형 ABC의 넓이는

$\triangle ABP+\triangle BCP+\triangle CAP=S_1+S_2+S_3=12$

이때, S_1, S_2, S_3은 실수이므로

코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(S_1^2+S_2^2+S_3^2)\ge(S_1+S_2+S_3)^2$

(단, 등호는 $S_1=S_2=S_3$일 때 성립)

$3(S_1^2+S_2^2+S_3^2)\ge 12^2=144$

$\therefore S_1^2+S_2^2+S_3^2\ge 48$

Ⅱ 함수

09 함수

Ⅱ-1. 함수

문제편 38~39p

01 정답 ③

ㄱ. $f(x)=-x$에 대하여

$f(-1)=1\in X$, $f(0)=0\in X$, $f(1)=-1\in X$

이므로 $f(x)$는 X에서 X로의 $\boxed{\text{함수이다.}}$

ㄴ. $g(x)=|x|+1$에 대하여

$g(-1)=2\notin X$, $g(0)=1\in X$, $g(1)=2\notin X$

이므로 $g(x)$는 X에서 X로의 $\boxed{\text{함수가 아니다.}}$

ㄷ. $h(x)=-x^2$에 대하여

$h(-1)=-1\in X$, $h(0)=0\in X$, $h(1)=-1\in X$

이므로 $h(x)$는 X에서 X로의 $\boxed{\text{함수이다.}}$

따라서 X에서 X로의 함수가 되는 것은 $\boxed{\text{ㄱ, ㄷ}}$이다.

02 정답 2

함수 $f(x)$는 일대일함수이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 축 $x=\boxed{-2}$를 기준으로 한쪽 부분만 생각해야 한다.

그런데 함수 $f(x)$의 정의역이 $X=\{x|x\ge k\}$이므로

$k\ge\boxed{-2}$ ⋯ ㉠

함수 $f: X \longrightarrow X$에 의하여 정의역과 공역(치역)이 같으므로

$f(k)=\boxed{k}$이어야 한다.

즉, $k^2+4k-10=\boxed{k}$에서 $k^2+3k-10=(\boxed{k+5})(\boxed{k-2})=0$

$\therefore$ $k=\boxed{-5}$ 또는 $k=\boxed{2}$

따라서 ㉠에 의하여 $k=\boxed{2}$이다.

03 정답 ③

2는 유리수이므로 $f(2)=2+1=3$

$\sqrt{3}$은 무리수이므로 $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$

$\therefore$ $f(2)+f(\sqrt{3})=3+3=6$

04 정답 ②

$f(14)=2f(7)=2f(2\cdot4-1)=2\cdot(-1)^4=2$

$f(20)=2f(10)=4f(5)=4f(2\cdot3-1)=4\cdot(-1)^3=-4$

$\therefore$ $f(14)+f(20)=2+(-4)=-2$

05 정답 ③

함수 $f(x)$가 일대일 대응이기 위해서는

$x\le1$일 때, 직선 $y=-3x+9$의 기울기가 음수이므로

$x>1$일 때, 직선 $y=(a-6)(1-x)+6$의 기울기도 음수이어야 한다.

즉, 직선 $y=-(a-6)x+a$의 기울기 $-(a-6)$이 0보다 작아야 하므로 $-(a-6)<0$, $a-6>0$

$\therefore$ $a>6$

따라서 정수 a의 최솟값은 7이다.

06 정답 ②

$g(x)$가 항등함수이므로 조건 (가)에서 $g(3)=3$

$\therefore$ $f(2)=h(6)=3$

한편, $f(x)$가 일대일 대응이고 $f(2)=3$이므로

조건 (나)에서 $f(2)f(3)=f(6)$, 즉 $3f(3)=f(6)$을 만족시키기 위해서는 치역 $X=\{2, 3, 6\}$에 대하여 $f(6)=6$, $f(3)=2$

또한, $h(x)$가 상수함수이므로 $h(2)=h(6)=3$

$\therefore$ $f(3)+h(2)=2+3=5$

10 합성함수와 역함수

Ⅱ-1. 함수

문제편 40~41p

07 정답 3

$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$(f\circ h)(1)=g(1)$에서 $f(h(\boxed{1}))=g(1)$

$h(1)=k$로 놓으면 $f(\boxed{k})=g(1)$ ⋯ ㉠

$f(x)=2x-1$에서 $f(\boxed{k})=\boxed{2k-1}$

$g(x)=-3x+8$에서 $g(1)=\boxed{5}$

㉠에 의하여 $\boxed{2k-1}=\boxed{5}$

따라서 $k=\boxed{3}$이므로 $h(1)=\boxed{3}$이다.

08 정답 5

$f(1)=\boxed{2}$, $f(2)=\boxed{3}$이므로

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(\boxed{2})=\boxed{3}$

또한, $f^{-1}(5)=\boxed{3}$, $f^{-1}(\boxed{3})=\boxed{2}$이고,

$(f\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ f^{-1}$이므로

$$(f\circ f)^{-1}(5)=(f^{-1}\circ f^{-1})(5)=f^{-1}(f^{-1}(5))=f^{-1}(\boxed{3})=\boxed{2}$$

$\therefore$ $(f\circ f)(1)+(f\circ f)^{-1}(5)=3+2=\boxed{5}$

09 정답 2

$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$이므로

$$(f\circ(g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=3h(x)-1=x^2+x-1$$

따라서 $h(x)=\frac{1}{3}(x^2+x)$이므로

$h(2)=\frac{1}{3}(4+2)=2$

10 정답 ①

$f(1)=2$이므로

$f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(3)=4$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(4)=1$

또한, $f(5)=5$에서 $f^2(5)=f^3(5)=f^4(5)=5$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $f^n(5)=5$이다.

따라서 $2016=4\times504$에서

$f^{2016}(1)=f^{4\times504}(1)=f^4(1)=1$이고 $f^{2018}(5)=5$이므로

$f^{2016}(1)+f^{2018}(5)=1+5=6$

11 정답 ①

$f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$

따라서 $g(2)=g(f(1))=5$이다.

12 정답 ②

$(f\circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))=f(2)=3,$

$(g\circ f)^{-1}(4)=(f^{-1}\circ g^{-1})(4)=f^{-1}(g^{-1}(4))=f^{-1}(3)=2$

$\therefore (f\circ g^{-1})(1)+(g\circ f)^{-1}(4)=3+2=5$

[09+10] 개념 실력확인

Ⅱ-1. 함수

문제편 42~43p

13 정답 ②

$f(-1)=g(-1)$이므로 $-1+a=1-b$에서 $a+b=2$ ⋯ ㉠

$f(2)=g(2)$이므로 $2+a=4+2b$에서 $a-2b=2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=2,\ b=0$

$\therefore a-b=2$

14 정답 ①

함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여 $f(2)-f(3)=3$이므로

$f(2)=8,\ f(3)=5$

이때, $f(1)=7$이고, 함수 f가 일대일 대응이므로

$f(4)=6$

$\therefore f(3)+f(4)=5+6=11$

15 정답 4

$f(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x\le 1) \\ -2x+4 & (1<x\le 2)\end{cases}$이므로

$f(x)=1$일 때, $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

즉, 방정식 $f(f(x))=1$의 해는 $f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=\frac{3}{2}$의 해와 같다.

(i) $f(x)=\frac{1}{2}$이면 $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}$

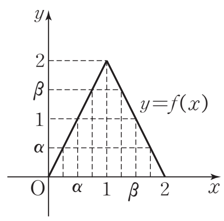
(ii) $f(x)=\frac{3}{2}$이면 $x=\frac{3}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}$

(i), (ii)에 의하여 모든 실근의 합은 4이다.

다른 풀이

함수 $f(x)$의 그래프는 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(x)=1$을 만족시키는 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=1 \qquad \therefore \alpha+\beta=2$



마찬가지로 $f(x)=\alpha,\ f(x)=\beta$를 만족시키는 각각의 두 근도 $x=1$에 대하여 대칭이므로 각각의 두 근의 합도 2이다. 따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 4이다.

16 정답 ④

$f(0)=3,\ f(1)=1,\ f(2)=3,$

$g(0)=a+b,\ g(1)=b,\ g(2)=a+b$이고

두 함수 f와 g가 서로 같으므로

$f(0)=g(0),\ f(1)=g(1),\ f(2)=g(2)$

$\therefore a+b=3,\ b=1$

따라서 $a=2,\ b=1$이므로

$2a-b=3$

17 정답 12

함수 $f(x)$의 기울기가 양이고 일대일 대응이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 1),\ (a,\ 4)$를 지난다.

$f(-1)=-3+b=1 \qquad \therefore b=4$

$f(a)=3a+b=4 \qquad \therefore a=0$

$\therefore 3(a+b)=12$

18 정답 3

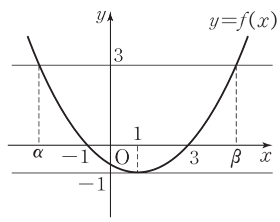
$f(x)=0$일 때, $x=-1$ 또는 $x=3$이므로 방정식 $f(f(x))=0$의 해는 $f(x)=-1$ 또는 $f(x)=3$의 해와 같다.

(i) $f(x)=-1$일 때, $x=1$ ⋯ ㉠

(ii) $f(x)=3$일 때, 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 이 두 실근은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=1$

$\therefore \alpha+\beta=2$ ⋯ ㉡



따라서 ㉠, ㉡에 의하여 서로 다른 모든 실근의 합은 $1+2=3$이다.

19 정답 ④

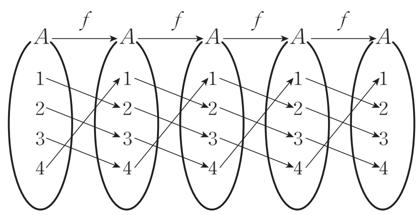
합성함수와 역함수의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f\circ g^{-1} &= f\circ(f^{-1}\circ g)\circ f\circ g^{-1} \\ &= (f\circ f^{-1})\circ g\circ f\circ g^{-1} \\ &= g\circ f\circ g^{-1} \end{aligned}$$

이때, $g^{-1}(2)=2,\ f(2)=3,\ g(3)=1$이므로

$$\begin{aligned} (f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f\circ g^{-1})(2) &= (g\circ f\circ g^{-1})(2) \\ &= g(f(g^{-1}(2))) \\ &= g(f(2)) \\ &= g(3)=1 \end{aligned}$$

20 정답 ④



주어진 함수의 정의에 따라 대응 관계를 나타내면 그림과 같으므로

$f^4(x)=x$

$f^{2012}(2)=f^{4\times503}(2)=2$

$f^{2013}(3)=f^{4\times503+1}(3)=f^1(3)=4$

$\therefore f^{2012}(2)+f^{2013}(3)=2+4=6$

21 정답 ②

ㄱ. f, g가 모두 항등함수이면 모든 $x \in X$에 대하여

$f(x)=g(x)=x$이므로

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=x$

따라서 $g \circ f$는 항등함수이다. (참)

ㄴ. $g \circ f$가 항등함수이면 모든 $x \in X$에 대하여 $g(f(x))=x$

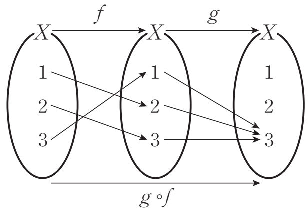
즉, f의 역함수는 g이고 g의 역함수는 f이다. 따라서 f, g는 모두 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다.(참)

ㄷ. 【반례】 그림과 같이

$(g \circ f)(x)=3$일 때,

$g(x)=3$이지만 $f(x)$는

상수함수가 아니다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22 정답 ①

두 함수 f, g의 정의에 의하여

$f(1)=3$, $f(2)=9$, $f(3)=7$, $f(4)=1$,

$g(1)=7$, $g(2)=9$, $g(3)=3$, $g(4)=1$이고,

$g^{-1}(1)=4$, $f^{-1}(7)=3$

$\therefore (f \circ g^{-1})(1)+(g \circ f^{-1})(7)$

$=f(g^{-1}(1))+g(f^{-1}(7))$

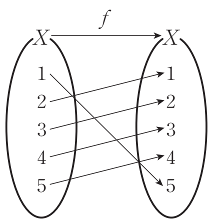
$=f(4)+g(3)$

$=1+3=4$

23 정답 5

f^{-1}는 f의 역함수이므로 함수 $f(x)$는

그림과 같은 대응 관계를 나타낸다.



함수 $f(x)$에서 $f^5(x)=x$이고

$2017=403\times5+2$이므로

$f^{2017}(3)=f^2(3)=f(f(3))$

$=f(2)=1$

함수 $g(x)$에서 $g(4)=3$이므로

$g^2(4)=g(g(4))=g(3)=4$

$g^3(4)=g(g^2(4))=3$

즉, 자연수 n에 대하여 $g^{2n}(4)=4$이므로 $g^{2018}(4)=4$

$\therefore f^{2017}(3)+g^{2018}(4)=1+4=5$

24 정답 ①

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c\,(x>-1)$라 하면

조건 (나)에서 $f(0)=0$이므로 $c=0$

$f(1)=3$이므로 $a+b=3$ ⋯ ㉠

$g(8)=2$에서 $f(2)=8$이므로 $4a+2b=8$

$\therefore 2a+b=4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=1$, $b=2$

$\therefore f(x)=x^2+2x$

한편, $g(15)$의 값은 $f(x)=15$일 때 x의 값이므로

$x^2+2x=15$에서

$x^2+2x-15=(x+5)(x-3)=0 \qquad \therefore x=3\ (\because x>-1)$

$\therefore g(15)=3$

11 유리식과 유리함수

Ⅱ-2. 유리함수

문제편 **44~45p**

01 정답 ⑤

주어진 정의에 의하여

$\langle A, B\rangle=\dfrac{A-B}{AB}=\dfrac{1}{\boxed{B}}-\dfrac{1}{\boxed{A}}$이므로

$\left(\dfrac{1}{\boxed{x}}-\dfrac{1}{\boxed{x+2}}\right)+\left(\dfrac{1}{\boxed{x+2}}-\dfrac{1}{\boxed{x+4}}\right)+\left(\dfrac{1}{\boxed{x+4}}-\dfrac{1}{\boxed{x+6}}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+a}$

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+\boxed{6}}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+a}$

$\therefore a=\boxed{6}$

02 정답 ③

유리함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=-2$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x+\boxed{1}}+(\boxed{-2})\,(k\neq0)$

이때, 점 $(0, 1)$을 지나므로 $f(0)=\boxed{1}$

$k-2=1 \qquad \therefore k=\boxed{3}$

따라서 $f(x)=\dfrac{\boxed{3}}{x+\boxed{1}}-\boxed{2}$이므로

$f(-4)=\boxed{-3}$

03 정답 3

$$\frac{1-\dfrac{1}{x+1}}{1+\dfrac{1}{x-1}}=\frac{\dfrac{x+1-1}{x+1}}{\dfrac{x-1+1}{x-1}}=\frac{x(x-1)}{x(x+1)}$$

$$=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}$$

$$=1-\frac{2}{x+1}$$

따라서 $p=1$, $q=-2$이므로 $p-q=3$

04 정답 ①

두 상수 a, b에 대하여 희망고와 사랑고의 남녀 학생 수를 각각 표로 나타내면 다음과 같다.

구분	희망고	사랑고	계
남학생	$6a$	$2b$	$6a+2b$
여학생	$5a$	$3b$	$5a+3b$
계	$11a$	$5b$	

두 고등학교의 전체 남녀 학생 수의 비가 $4:5$이므로

$(6a+2b):(5a+3b)=4:5$

$4(5a+3b)=5(6a+2b) \qquad \therefore b=5a$

$\therefore$ (희망고 전체 학생 수) : (사랑고 전체 학생 수)

$=11a:5b=11a:25a$

$=11:25$

Ⅱ 11~12

05 정답 ⑤

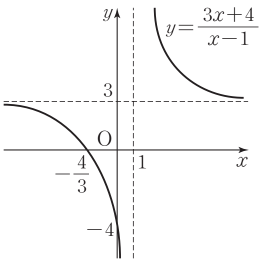
유리함수 $y=\dfrac{3x+4}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+7}{x-1}=\dfrac{7}{x-1}+3$에서

ㄱ. 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=3$이다. (참)

ㄴ. 그래프는 제 3 사분면을 지난다. (참)

ㄷ. 그래프는 점근선의 교점 $(1,\ 3)$을 지나고 기울기가 1 또는 -1인 직선에 대하여 대칭이므로 $y-3=\pm(x-1)$

즉, $y=x+2$ 또는 $y=-x+4$이다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

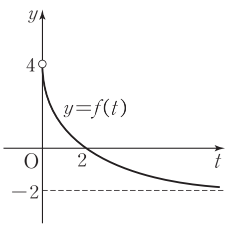
06 정답 ⑤

선분 AB를 $1 : t(t>0)$로 내분하는 점 P의 좌표 $f(t)$는

$f(t)=\dfrac{1\cdot 4+t\cdot(-2)}{1+t}=\dfrac{4-2t}{1+t}$

$=\dfrac{6}{t+1}-2(t>0)$

이므로 유리함수 $f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



12 유리함수의 활용

Ⅱ-2. 유리함수

문제편 46~47p

07 정답 3

$f(x)=\dfrac{ax+1}{2x+b}$로 놓으면 $f^{-1}(x)=\dfrac{\boxed{-b}x+1}{2x-\boxed{a}}$이므로

$f(x)=f^{-1}(x)$에서 $\dfrac{ax+1}{2x+b}=\dfrac{\boxed{-b}x+1}{2x-\boxed{a}}$

$\therefore\ a=\boxed{-b}$ ⋯ ㉠

이때, 함수 $f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$f(0)=\boxed{1}$ $\quad\therefore\ b=\boxed{1}$

㉠에 의하여 $a=\boxed{-1}$

$\therefore\ b-2a=\boxed{3}$

다른 풀이

점 $(0,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $(1,\ 0)$도 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(0)=1$에서 $\dfrac{1}{b}=1$ $\quad\therefore\ b=1$

$f(1)=0$에서 $\dfrac{a+1}{2+b}=0$ $\quad\therefore\ a=-1$

$\therefore\ b-2a=3$

08 정답 ①

점 P의 x좌표를 a라 하면 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(a,\ \boxed{\dfrac{9}{a}}\right)\ (a>0)$

이므로 $\mathrm{Q}(\boxed{a},\ 0)$, $\mathrm{R}\left(0,\ \boxed{\dfrac{9}{a}}\right)$

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\boxed{\dfrac{9}{a}}$, $\overline{\mathrm{PR}}=\boxed{a}$이고 $a>0$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=\boxed{\dfrac{9}{a}}+\boxed{a}\ge 2\sqrt{\boxed{\dfrac{9}{a}}\times\boxed{a}}=\boxed{6}$

(단, 등호는 $a=\boxed{3}$일 때 성립)

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은 $\boxed{6}$이다.

09 정답 ②

$g(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\dfrac{3}{k-1}+2=3$에서 $\dfrac{3}{k-1}=1$ $\quad\therefore\ k=4$

$\therefore\ g(3)=4$

10 정답 1

$f^{-1}(x)=\dfrac{5}{x-2}+2$에서 $f^{-1}=f$이므로

$f^1(1)=f(1)=-3$,

$f^2(1)=f(f(1))=f(-3)=1$,

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(1)=-3$,

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(-3)=1$,

⋮

따라서 자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 $f^n(1)=-3$, n이 짝수이면 $f^n(1)=1$이므로 $(f^{-1})^{246}(1)=f^{246}(1)=1$이다.

11 정답 7

삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{CAB}=90°$인 직각삼각형으로, 두 점 A, B의 y좌표는 서로 같고 두 점 A, C의 x좌표는 서로 같다.

점 A의 좌표를 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$이라 하면 $\mathrm{B}\left(ak,\ \dfrac{1}{a}\right)$, $\mathrm{C}\left(a,\ \dfrac{k}{a}\right)$이다.

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=a(k-1)$, $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{a}(k-1)$이고

삼각형 ABC의 넓이가 18이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}\times a(k-1)\times\dfrac{1}{a}(k-1)=18$

$(k-1)^2=36$, $k-1=\pm 6$

$\therefore\ k=-5$ 또는 $k=7$

그런데 $k>1$이므로 $k=7$이다.

12 정답 ④

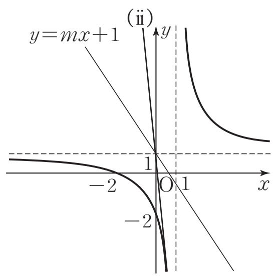
직선 $y=mx+1$은 m에 관계없이 $(0,\ 1)$을 지난다.

함수 $y=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+1$

의 그래프와 직선 $y=mx+1$은

(i) $m=0$일 때,

직선은 $y=1$이므로 만나지 않는다.



(ii) $m\neq0$일 때,

$\frac{x+2}{x-1}=mx+1$에서 이차방정식 $mx^2-mx-3=0$의 판별식을 D라 하면 $D\geq0$이 되어야 만나므로

$D=m^2+12m=m(m+12)\geq0$

$\therefore m>0,\ m\leq-12$

(i), (ii)에 의하여 $m<0$인 실수 m의 최댓값은 -12이다.

[11+12] 개념 실력확인

Ⅱ-2. 유리함수

문제편 48~49p

13 정답 ③

$x-y+z=0$ ⋯ ㉠

$2x-3y+z=0$ ⋯ ㉡

㉡−㉠에서 $x-2y=0$　　$\therefore x=2y$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $2y-y+z=0$　　$\therefore z=-y$

$$\therefore \frac{x^2-y^2+2z^2}{2xy+yz-3zx}=\frac{(2y)^2-y^2+2(-y)^2}{2(2y)y+y(-y)-3(-y)(2y)}=\frac{5y^2}{9y^2}=\frac{5}{9}$$

14 정답 ④

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1,\ y=-1$이므로

$p=1,\ q=-1$

즉, 이 함수의 식은 $y=\frac{k}{x-1}-1(k\neq0)$이고 이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\frac{k}{0-1}-1$　　$\therefore k=-1$

$\therefore p+q+k=1+(-1)+(-1)=-1$

15 정답 ②

ㄱ. 함수 $y=\frac{x+2}{x+1}=\frac{(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}+1$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 함수 $y=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+2$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y=\frac{3x+5}{x+2}=\frac{3(x+2)-1}{x+2}=\frac{-1}{x+2}+3$의 그래프는 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동하여 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 있는 그래프를 나타내는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

16 정답 ①

상수 k에 대하여 $\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}=k$라 하면

$x+y=3k$ ⋯ ㉠, $y+z=4k$ ⋯ ㉡, $z+x=5k$ ⋯ ㉢이므로

㉠+㉡+㉢에서 $x+y+z=6k$ ⋯ ㉣

㉣−㉠에서 $z=3k$

㉣−㉡에서 $x=2k$

㉣−㉢에서 $y=k$

$$\therefore \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{2k\cdot k+k\cdot3k+3k\cdot2k}{(2k)^2+(k)^2+(3k)^2}=\frac{11k^2}{14k^2}=\frac{11}{14}$$

17 정답 ⑤

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2,\ y=-1$이므로

$f(x)=\frac{k}{x-2}-1(k\neq0)$로 놓자.

이때, 이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{1-2}-1$　　$\therefore k=-1$

따라서 $f(x)=\frac{-1}{x-2}-1$이므로 $f(3)=-2$이다.

18 정답 ⑤

$f(x)=\frac{3x+k}{x+4}=\frac{3(x+4)+k-12}{x+4}=\frac{k-12}{x+4}+3$이고

곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$y-3=\frac{k-12}{(x+2)+4}+3$　　$\therefore g(x)=\frac{k-12}{x+6}+6$

이때, 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $x=-6,\ y=6$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-6,\ 6)$이다.

따라서 점 $(-6,\ 6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-6)=\frac{3\cdot(-6)+k}{-6+4}=6$　　$\therefore k=6$

19 정답 ⑤

함수 $y=\frac{3ax}{2x-1}=\frac{3a\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3a}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{3a}{4}}{x-\frac{1}{2}}+\frac{3a}{2}$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{3a}{2}$이고 두 직선 $x=m$, $y=m$이므로 $m=\frac{1}{2}=\frac{3a}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{3},\ m=\frac{1}{2}$이므로 $a+m=\frac{5}{6}$

20 정답 36

$f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$이므로 $\frac{3+b}{a+1}=2$

$\therefore 2a-b=1$ ⋯ ㉠

또, $f(2)=3$이므로 $\frac{6+b}{2a+1}=3$　　$\therefore 6a-b=3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=\frac{1}{2},\ b=0$　　$\therefore f(x)=\frac{6x}{x+2}$

따라서 $f(f(f(1)))=f(f(2))=f(3)=\frac{18}{5}$이므로

$10f(f(f(1)))=36$

21 정답 ①

$x>0$에서 정의된 함수 $y=\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수 $y=\frac{6}{x-3}+2$의 그래프 위의 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{6}{a-3}+2\right)(a>3)$라 하면

$\overline{\mathrm{OQ}}=a,\ \overline{\mathrm{PQ}}=\frac{6}{a-3}+2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \triangle\mathrm{POQ}&=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{PQ}}\\&=\frac{1}{2}a\left(\frac{6}{a-3}+2\right)\\&=\frac{1}{2}(a-3+3)\left(\frac{6}{a-3}+2\right)\\&=6+(a-3)+\frac{9}{a-3}\end{aligned}$$

이때, $a-3>0,\ \frac{9}{a-3}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\triangle\mathrm{POQ}\ge 6+2\sqrt{(a-3)\times\frac{9}{a-3}}=12$

(단, 등호는 $a=6$일 때 성립)

따라서 삼각형 POQ의 넓이의 최솟값은 12이다.

22 정답 4

함수 $f(x)=\frac{ax+5}{3x-6}$의 역함수는 $f^{-1}(x)=\frac{6x+5}{3x-a}$이고

$f=f^{-1}$이므로 $a=6$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=\frac{6x+5}{3x-6}=\frac{6(x-2)+17}{3(x-2)}\\&=\frac{\frac{17}{3}}{x-2}+2\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=2$이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ p+q=2+2=4$

23 정답 0

유리함수 $f(x)=\frac{a}{x+3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$$\begin{aligned}y&=\frac{a}{x+3-b}+1-3\\&=\frac{a}{x+3-b}-2\end{aligned}$$

이때, 이 평행이동한 함수와 $g(x)$가 일치하므로

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{cx+6}{x-2}=\frac{c(x-2)+2c+6}{x-2}\\&=\frac{2c+6}{x-2}+c\end{aligned}$$

에서 $a=2c+6,\ 3-b=-2,\ c=-2$

$\therefore\ a=2,\ b=5,\ c=-2$

따라서 $f(x)=\frac{2}{x+3}+1,\ g(x)=\frac{-2x+6}{x-2}$에서

$f(-2)=3,\ g(3)=0$이므로

$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(3)=0$

24 정답 ③

함수 $y=\frac{2}{x-1}+2$ 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$b=\frac{2}{a-1}+2(a>1)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=b-2=\frac{2}{a-1},\ \overline{\mathrm{PR}}=a-1$

이때, 사각형 PRSQ는 직사각형이므로 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}2(\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{PQ}})&=2(a-1)+2\times\frac{2}{a-1}\\&\ge 2\sqrt{2(a-1)\times\frac{4}{a-1}}=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

(단, 등호는 $a-1=\sqrt{2}$일 때 성립)

따라서 사각형 PRSQ의 둘레의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

13 무리식과 무리함수

Ⅱ-3. 무리함수

문제편 50~51p

01 정답 8

$f(n)=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=2(\sqrt{\boxed{n+2}}-\sqrt{\boxed{n+1}})$

$$\begin{aligned}\therefore\ &f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(23)\\&=2(\boxed{\sqrt{2}-\sqrt{1}})+2(\boxed{\sqrt{3}-\sqrt{2}})+2(\boxed{\sqrt{4}-\sqrt{3}})+\\&\qquad\cdots+2(\boxed{\sqrt{25}-\sqrt{24}})\\&=2(\sqrt{\boxed{25}}-\sqrt{\boxed{1}})=2(5-1)=\boxed{8}\end{aligned}$$

02 정답 2

주어진 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 $\boxed{-\frac{1}{2}}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{-1}$만큼 평행이동한 것이므로 주어진 그래프의 함수의 식은 $y+\boxed{1}=\sqrt{a\left(x+\boxed{\frac{1}{2}}\right)}$ ⋯ ㉠

이때, 이 무리함수의 그래프가 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$을 지나므로 ㉠에 대입하면 $1=\sqrt{\boxed{\frac{1}{2}}a}$ $\quad\therefore\ a=\boxed{2}$

따라서 $y=\sqrt{\boxed{2}x+\boxed{1}}-\boxed{1}$이므로

$b=\boxed{1},\ c=\boxed{-1}$

$\therefore\ a+b+c=2+1+(-1)=\boxed{2}$

03 정답 9

무리식 $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}$가 실수 값을 가지므로

$2x+3\ge 0$이고 $4-x\ge 0$이다. $\quad\therefore\ -\frac{3}{2}\le x\le 4$

따라서 정수 x의 값은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이므로

그 합은 9이다.

04 정답 ③

$a>b$, $ab<0$에서 $a-b>0$이고, $a>0>b$이므로

$$\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{a^2}-\frac{b}{\sqrt{b^2}}=|a-b|-|a|-\frac{b}{|b|}$$
$$=a-b-a-\frac{b}{-b}$$
$$=-b+1$$

05 정답 8

두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$가 함수 $y=\sqrt{5x}$의 그래프 위에 있으므로 $b=\sqrt{5a}$, $d=\sqrt{5c}$

이때, $b+d=3$이므로 $\sqrt{5a}+\sqrt{5c}=3$

$\sqrt{5}(\sqrt{a}+\sqrt{c})=3$ ($\because$ $0<a<c$)

$\therefore$ $\sqrt{a}+\sqrt{c}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

한편, 직선 PQ의 기울기를 구하면

$$\frac{d-b}{c-a}=\frac{\sqrt{5c}-\sqrt{5a}}{c-a}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{c}-\sqrt{a})}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{c}-\sqrt{a})}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{5}}{\frac{3}{\sqrt{5}}}=\frac{5}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=5$이므로 $p+q=8$

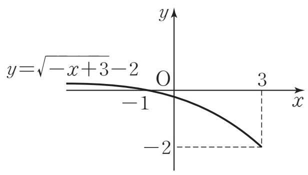
06 정답 ①

ㄱ. $y=\sqrt{-x+3}-2$에서 $x-3\le 0$이므로 정의역은 $\{x|x\le 3\}$, $\sqrt{-x+3}\ge 0$에서 $y=\sqrt{3-x}-2\ge -2$이므로 치역은 $\{y|y\ge -2\}$이다. (참)

ㄴ. 무리함수 $y=\sqrt{-x+3}-2$에서 $x=0$을 대입하면 $y=\sqrt{3}-2$이고, $y=0$을 대입하면 $x=-1$이다.
따라서 주어진 무리함수의 그래프는 두 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ \sqrt{3}-2)$를 지나므로 x축, y축과 모두 만난다. (참)

ㄷ. 무리함수 $y=\sqrt{-(x-3)}-2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없다. (거짓)

ㄹ. 그림과 같이 주어진 무리함수의 그래프는 제 1 사분면을 지나지 않는다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 무리함수의 활용

문제편 52~53p

07 정답 3

함수 $y=x^2-6x+8(x\ge 3)$의 역함수는 $y=\sqrt{x+a}+b$이다.

즉, $y=x^2-6x+8=(\boxed{x-3})^2-\boxed{1}$을 x에 대하여 풀면

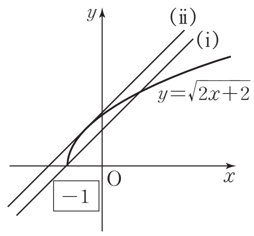
$(\boxed{x-3})^2=y+\boxed{1}$에서 $x\ge 3$이므로 $x=\sqrt{y+\boxed{1}}+\boxed{3}\,(y\ge -1)$

x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면 $y=\sqrt{x+\boxed{1}}+\boxed{3}\,(x\ge -1)$

따라서 $a=\boxed{1}$, $b=\boxed{3}$이므로 $ab=\boxed{3}$

08 정답 25

곡선 $y=\sqrt{2x+2}=\sqrt{2(x+1)}$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선은 그림과 같이 (ⅰ), (ⅱ) 사이와 (ⅰ)에 있어야 한다.



(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(\boxed{-1},\ 0)$을 지날 때, $k=\boxed{1}$

(ⅱ) 직선 $y=x+k$가 곡선 $y=\sqrt{2x+2}$에 접할 때,
$x+k=\sqrt{2x+2}$에서 양변을 제곱하면
$x^2+2(\boxed{k-1})x+\boxed{k^2-2}=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(\boxed{k-1})^2-(\boxed{k^2-2})=0$ $\quad\therefore$ $k=\boxed{\dfrac{3}{2}}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 상수 k의 값의 범위는

$\boxed{1}\le k<\boxed{\dfrac{3}{2}}$이므로 $a+b=1+\dfrac{3}{2}=\boxed{\dfrac{5}{2}}$

$\therefore$ $10(a+b)=\boxed{25}$

09 정답 ④

$(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(1)$
$=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(1)=(f^{-1}\circ g)(1)$
$=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(2)$

이때, $f^{-1}(2)=k$로 놓으면 $f(k)=2$이므로

$\sqrt{2k-3}=2$의 양변을 제곱하면

$2k-3=4$ $\quad\therefore$ $k=\dfrac{7}{2}$

$\therefore$ $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(1)=\dfrac{7}{2}$

10 정답 ②

$x\ge 2$에서 함수 $f(x)=\sqrt{x-2}+2$는 함수 $g(x)=x^2-4x+6$의 역함수이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 두 함수 $y=g(x)$와 $y=x$의 그래프의 교점이다.

$x^2-4x+6=x$에서

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 두 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$와 $(3,\ 3)$이므로

두 점 사이의 거리는 $\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$이다.

11 정답 ③

무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{a(x+1)}+2$

이 무리함수의 그래프와 직선 $y=x-1$이 접하므로

$\sqrt{a(x+1)}+2=x-1$에서

$\sqrt{a(x+1)}=x-3$의 양변을 제곱하면

$a(x+1)=(x-3)^2$

$x^2-(6+a)x+9-a=0$

이 이차방정식의 판별식 D라 하면

$D=(6+a)^2-4(9-a)=0$

$a^2+16a=0$

$a(a+16)=0 \qquad \therefore a=-16(\because a\neq 0)$

12 정답 12

현 B의 장력, 주파수, 밀도를 각각 T, ω, ρ라 하면

현 A의 장력, 주파수, 밀도는 각각 $3T$, $\frac{1}{2}\omega$, $n\rho$이다.

현 B에서 $\omega=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, 즉 $L=\frac{1}{2\omega}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ ⋯ ㉠가 성립하고

두 현 A, B는 길이가 같으므로 현 A의 길이는

$L=\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\omega\right)}\sqrt{\frac{3T}{n\rho}}=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{3T}{n\rho}}$ ⋯ ㉡

이때, ㉠=㉡이므로 $\frac{1}{2\omega}\sqrt{\frac{T}{\rho}}=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{3T}{n\rho}}$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\rho}}=\sqrt{\frac{3T}{n\rho}}=\sqrt{\frac{3}{n}}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$

$\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{3}{n}}$의 양변을 제곱하면

$\frac{1}{4}=\frac{3}{n} \qquad \therefore n=12$

[13+14] 개념 실력확인

Ⅱ-3. 무리함수

문제편 54~55p

13 정답 8

$\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$

$=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}-(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})=2\sqrt{a}=2\sqrt{16}=8$

14 정답 ③

주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 $b=-1$, $c=2$

유리함수 $f(x)=\frac{a}{x-1}+2$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=-a+2 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore a=-1,\ b=-1,\ c=2$

이때, 무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$에서 $y=-\sqrt{-x-1}+2$이므로 이 함수의 그래프와 x축과의 교점은 $y=0$을 대입하면

$0=-\sqrt{-x-1}+2$, 즉 $\sqrt{-x-1}=2$의 양변을 제곱하면

$-x-1=4 \qquad \therefore x=-5$

따라서 구하는 교점의 x좌표는 -5이다.

15 정답 ③

무리함수 $f(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이므로

$a=4,\ b=1$

$\therefore f(x)=\sqrt{x+4}+1$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\sqrt{x+4}+1=x$, 즉 $\sqrt{x+4}=x-1(x\geq 1)$의 양변을 제곱하면

$x+4=(x-1)^2$

$x^2-3x-3=0$

이때, $x\geq 1$이므로

$x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$

따라서 $p=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$, $q=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$이므로

$p+q=3+\sqrt{21}$

16 정답 ②

$\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}=-\sqrt{x^2-1}$

$\qquad =-\sqrt{(x+1)(x-1)}$

이므로 $x+1\leq 0$, $x-1\leq 0$ ⋯ ㉠

$\therefore \sqrt{(x-1)^2+4x}-\sqrt{(x+1)^2-4x}$

$=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$

$=|x+1|-|x-1|$

$=-(x+1)+(x-1)(\because$ ㉠$)$

$=-2$

17 정답 ③

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$이므로

$f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

이 함수의 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나므로

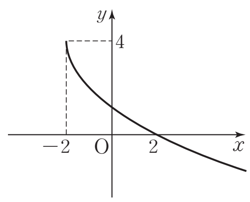
$a=-2$

즉, $f(x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

$\qquad =-2x^2+2x+4$

이므로 $b=2$, $c=4$

따라서 무리함수 $g(x)=-2\sqrt{x+2}+4$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. 정의역은 $\{x|x\geq -2\}$이고

치역은 $\{y|y\leq 4\}$이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f(x)=-2(x^2-x-2)=-2(x+1)(x-2)=0$의 두 근이 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로

$\alpha=-1,\ \beta=2$

따라서 $-1\leq x\leq 2$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은

$g(-1)=2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18 정답 6

무리함수 $f(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프이므로

$f(x)=\sqrt{a(x+2)}-1$

이 함수의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $1=\sqrt{2a}-1$, 즉

$\sqrt{2a}=2$의 양변을 제곱하면 $2a=4$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore f(x)=\sqrt{2(x+2)}-1$

이때, $f(g(x))=x$가 성립하는 함수 $y=g(x)(x\geq-1)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(3)=k$로 놓으면 $f(k)=3$이다.

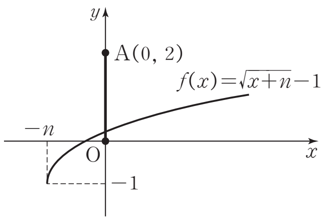
$\sqrt{2(k+2)}-1=3$, 즉 $\sqrt{2(k+2)}=4$의 양변을 제곱하면

$2(k+2)=16$ $\quad\therefore k=6$

$\therefore g(3)=6$

19 정답 9

함수 $f(x)=\sqrt{x+n}-1$의 그래프는 그림과 같다.



무리함수 $f(x)=\sqrt{x+n}-1$의 그래프가

(i) 점 O$(0,\ 0)$을 지날 때,

$\sqrt{0+n}-1=0$이므로

$\sqrt{n}=1$ $\quad\therefore n=1$

(ii) 점 A$(0,\ 2)$를 지날 때,

$\sqrt{0+n}-1=2$이므로 $\sqrt{n}=3$

$\therefore n=9$

(i), (ii)에 의하여 무리함수 $f(x)=\sqrt{x+n}-1$의 그래프가 선분 OA와 만나도록 하는 정수 n의 값은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$로 9개이다.

20 정답 ②

두 함수 $y=\sqrt{ax}$와 $y=x$의 그래프의 교점의 x좌표가 2이므로

$\sqrt{2a}=2$ $\quad\therefore a=2$

이때, $y=\sqrt{2x+b}$와 $y=x$의 그래프가 접하므로

$\sqrt{2x+b}=x$의 양변을 제곱하면

이차방정식 $x^2-2x-b=0$은 중근을 가진다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

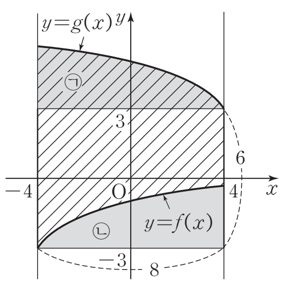
$\dfrac{D}{4}=1+b=0$ $\quad\therefore b=-1$

$\therefore ab=-2$

21 정답 48

$f(x)=\sqrt{x+4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

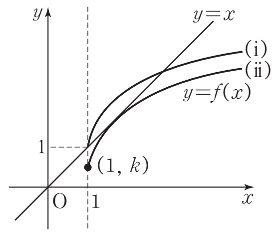
또, $g(x)=\sqrt{-x+4}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음, x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



$f(-4)=-3$, $g(4)=3$이므로 그림에서 어두운 ㉠, ㉡ 부분의 넓이가 같다. 따라서 구하는 도형은 빗금친 부분과 같고, ㉠ 부분을 ㉡ 부분으로 이동시키면 구하는 넓이는 가로의 길이가 8, 세로의 길이가 6인 직사각형의 넓이와 같으므로 $6\times8=48$이다.

22 정답 ④

무리함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+k$의 그래프는 점 $(1,\ k)$를 지나므로 그림과 같이 (i), (ii) 사이에 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 (i)일 때, 상수 k의 최댓값은 1이다.

다른 풀이

무리함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나는 것과 같다.

$\sqrt{x-1}+k=x$, 즉 $\sqrt{x-1}=x-k(x\geq k)$의 양변을 제곱하면

$x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$

이 이차방정식이 $x\geq k$에서 서로 다른 실근을 가지면 되므로

$f(x)=\left(x-\dfrac{2k+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)^2+k^2+1$이라 하면

이차함수 $f(x)$의 그래프의 축 $x=\dfrac{2k+1}{2}>k$에 의하여

(i) $f(k)\geq0$, 즉 $k^2-(2k+1)k+k^2+1\geq0$

$\therefore k\leq1$

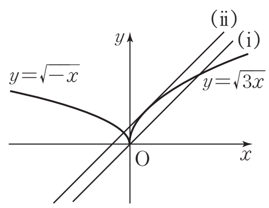
(ii) $f\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)<0$, 즉 $-\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)^2+k^2+1<0$

$\therefore k>\dfrac{3}{4}$

(i), (ii)에 의하여 $\dfrac{3}{4}<k\leq1$이므로 상수 k의 최댓값은 1이다.

23 정답 ②

방정식 $\sqrt{x+2|x|}=x+k$가 서로 다른 세 실근을 가지기 위해서는 두 함수 $f(x)=\sqrt{x+2|x|}$와 $g(x)=x+k$라 놓으면 이 두 함수의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나면 된다.



즉, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{3x} & (x\geq0)\\ \sqrt{-x} & (x<0)\end{cases}$이므로

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 직선 $g(x)=x+k$가 그림과 같이 (i)과 (ii) 사이일 때이다.

(i) 함수 $g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지날 때,

$k=0$

(ii) 두 함수 $y=\sqrt{3x}$와 $g(x)$의 그래프가 서로 접할 때,

$\sqrt{3x}=x+k$의 양변을 제곱하면 $3x=(x+k)^2$

$x^2+(2k-3)x+k^2=0$

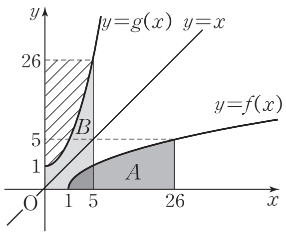
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-3)^2-4k^2=0$ $\quad\therefore k=\dfrac{3}{4}$

(i), (ii)에 의하여 $0<k<\dfrac{3}{4}$

24 정답 **130**

함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$의 역함수가 $g(x)=x^2+1$이므로 두 함수의 그래프는 그림과 같다.



$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=26$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, $y=g(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=5$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하면 빗금친 부분의 넓이와 A가 같으므로 $A+B$의 값은 두 변의 길이가 26, 5인 직사각형의 넓이이다.
따라서 구하는 넓이의 합은 $26\times5=130$이다.

Ⅱ 단원 [09~14] 개념 종합 문제

문제편 56~59p

01 정답 **8**

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 같으므로 $x^2-3x+1=5x-7$, 즉
$x^2-8x+8=0$ ⋯ ㉠
이때, 집합 $X=\{a, b\}$는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 정의역으로 a, b는 이차방정식 ㉠의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$a+b=8$

02 정답 **2**

집합 X에서 집합 Y로의 일차함수 $f(x)=ax+b$가 일대일 대응이 되려면 일대일함수이고, 치역과 공역이 같아야 한다.
일차함수는 일대일함수이고, $a>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 3)$을 지나야 한다.
즉, $f(-1)=0$, $f(2)=3$이므로
$-a+b=0$, $2a+b=3$
따라서 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$이므로
$a+b=2$

03 정답 **9**

일대일 대응일 때, 정의역의 원소 a에 대응할 수 있는 공역의 원소는 a, b, c로 3개, 정의역의 원소 b에 대응할 수 있는 공역의 원소는 정의역의 원소 a에 대응한 원소를 제외한 2개, 정의역의 원소 c에 대응할 수 있는 공역의 원소는 나머지 1개이므로 X에서 X로의 일대일 대응의 개수는 $3\times2\times1=6$이다.
상수함수일 때, 정의역의 원소 a, b, c에 대응할 수 있는 공역의 원소는 a 또는 b 또는 c이므로 X에서 X로의 상수함수의 개수는 3이다.
따라서 $p=6$, $q=3$이므로 $p+q=9$이다.

04 정답 ①

$\dfrac{x+1}{x-1}=-1$이면 $x=0$이므로
$f(-1)=2\cdot0-3=-3$
$\dfrac{x+1}{x-1}=3$이면 $x=2$이므로
$f(3)=2\cdot2-3=1$
$\therefore f(-1)+f(3)=-3+1=-2$

05 정답 **8**

$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x\le1) \\ -x+2 & (1<x\le2) \end{cases}$이므로
$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$에서
$f\left(f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$
$\therefore 16f\left(f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)=8$

06 정답 ⑤

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(4)=4$
$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(3)=2$
$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(2)=3$
$(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(4)=4$
따라서 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시키는 모든 x의 값은 2, 3, 4이므로 그 합은 9이다.

07 정답 **5**

$f(4)=2$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $g(4)=3$이므로
$g(4)>f(4)$ $\quad\therefore h(4)=g(4)=3$ ⋯ ㉠
함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $g(3)=3$이고, $f(3)\le g(3)$이면 $h(3)=g(3)=3$이므로 ㉠에 의하여 함수 $h(x)$가 일대일 대응이라는 조건에 모순이다.
이때, $f(3)>g(3)=3$이므로 $f(3)=4$이고 $h(3)=f(3)=4$
또, $g(1)=2>1$이므로 $h(1)=1$이면 모순이다.
$\therefore h(1)=2$, $h(2)=1$
따라서 $h(2)=1$, $g(2)=1$이므로 $f(2)=1$
$\therefore f(2)+h(3)=1+4=5$

08 정답 ④

$f^1\left(\dfrac{2}{7}\right)=f\left(\dfrac{2}{7}\right)=-2\cdot\dfrac{2}{7}+1=\dfrac{3}{7}$
$f^2\left(\dfrac{2}{7}\right)=f\left(f\left(\dfrac{2}{7}\right)\right)=f\left(\dfrac{3}{7}\right)=-2\cdot\dfrac{3}{7}+1=\dfrac{1}{7}$
$f^3\left(\dfrac{2}{7}\right)=f\left(f^2\left(\dfrac{2}{7}\right)\right)=f\left(\dfrac{1}{7}\right)=-2\cdot\dfrac{1}{7}+1=\dfrac{5}{7}$
$f^4\left(\dfrac{2}{7}\right)=f\left(f^3\left(\dfrac{2}{7}\right)\right)=f\left(\dfrac{5}{7}\right)=2\cdot\dfrac{5}{7}-1=\dfrac{3}{7}$
$f^5\left(\dfrac{2}{7}\right)=f\left(f^4\left(\dfrac{2}{7}\right)\right)=f\left(\dfrac{3}{7}\right)=-2\cdot\dfrac{3}{7}+1=\dfrac{1}{7}$
$\vdots$
$f^{2016}\left(\dfrac{2}{7}\right)=f^{3\times672}\left(\dfrac{2}{7}\right)=f^3\left(\dfrac{2}{7}\right)=\dfrac{5}{7}$
$f^{2017}\left(\dfrac{2}{7}\right)=f^{3\times672+1}\left(\dfrac{2}{7}\right)=f^1\left(\dfrac{2}{7}\right)=\dfrac{3}{7}$
$\therefore f^{2016}\left(\dfrac{2}{7}\right)+f^{2017}\left(\dfrac{2}{7}\right)=\dfrac{5}{7}+\dfrac{3}{7}=\dfrac{8}{7}$

09 정답 3

(i) $x \geq \frac{1}{2}$일 때,

$f(x)=2x-1-kx+2=(2-k)x+1$

(ii) $x<\frac{1}{2}$일 때,

$f(x)=-2x+1-kx+2=(-2-k)x+3$

이때, (i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일 대응이어야 하므로 $x \geq \frac{1}{2}$과 $x<\frac{1}{2}$일 때, 직선의 기울기는 같은 부호이어야 한다.

즉, 기울기의 곱이 0보다 커야 하므로

$(2-k)(-2-k)>0$

$(k-2)(k+2)>0 \qquad \therefore k>2,\ k<-2$

따라서 자연수 k의 최솟값은 3이다.

10 정답 4

$\frac{a-2b}{b}=\frac{2a-b}{a}$에서 $\frac{a}{b}-\frac{2b}{b}=\frac{2a}{a}-\frac{b}{a}$

$\frac{a}{b}-2=2-\frac{b}{a}$

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}=4$

11 정답 12

$\frac{3m+9}{m^2-9}=\frac{3(m+3)}{(m-3)(m+3)}=\frac{3}{m-3}\ (\because m \neq \pm 3)$

이것이 정수가 되기 위해서는 $m-3=\pm 1,\ \pm 3$이다.

따라서 정수 m의 값은 0, 2, 4, 6이므로 그 합은 12이다.

12 정답 5

유리함수의 그래프는 두 점근선의 교점에 대하여 대칭이므로

$y=\frac{ax+1}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+1}{x+b}=\frac{-ab+1}{x+b}+a$

즉, 이 유리함수의 그래프는 점 $(-b,\ a)$에 대하여 대칭이므로

$a=2,\ b=3 \qquad \therefore a+b=5$

13 정답 ②

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{4}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-b,\ -\frac{4}{b}\right)(a>0,\ b>0)$라 하면 네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{4}{a}\right)$, $\mathrm{C}(-b,\ 0)$, $\mathrm{D}\left(0,\ -\frac{4}{b}\right)$

육각형 APBCQD의 넓이를 S라 하면

$S=\square\mathrm{OAPB}+\square\mathrm{OCQD}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{ODA}$

$=a\times\frac{4}{a}+b\times\frac{4}{b}+\frac{1}{2}\times b\times\frac{4}{a}+\frac{1}{2}\times a\times\frac{4}{b}$

$=8+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$ ⋯ ㉠

이때, $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균에 의하여

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 ㉠에 의하여 $S\geq 8+2\times 2=12$이므로 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 12이다.

14 정답 11

$(g\circ f^{-1})^{-1}(3)=(f\circ g^{-1})(3)=f(g^{-1}(3))$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$에서 $2k-1=3$

$k=2 \qquad \therefore g^{-1}(3)=2$

$f(g^{-1}(3))=f(2)=\frac{2\cdot 2+3}{2+2}=\frac{7}{4}$

따라서 $p=4,\ q=7$이므로 $p+q=11$

15 정답 ②

$(f\circ g)(x)=x$이므로 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

함수 $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}=\frac{2(x+3)-7}{x+3}=\frac{-7}{x+3}+2$의 역함수는

$g(x)=\frac{-7}{x-2}-3$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은

$x=2$이고 $y=-3$이다.

따라서 $p=2,\ q=-3$이므로

$p+q=-1$

16 정답 ①

무리함수 $y=\sqrt{-2x+4}+a$의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{-2\cdot 0+4}+a$

$a+2=3 \qquad \therefore a=1$

또, 무리함수 $y=\sqrt{-2x+4}+1$의 그래프가 점 $(b,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{-2b+4}+1$

$-2b+4=0 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

17 정답 ③

$f(x)=\sqrt{ax}$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$\sqrt{a}=1$

즉, $a=1$이므로 $f(x)=\sqrt{x}$

$g(x)=\sqrt{bx}$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지나므로

$\sqrt{2b}=2$의 양변을 제곱하면 $2b=4$

즉, $b=2$이므로 $g(x)=\sqrt{2x}$

$h(x)=\sqrt{cx}$의 그래프가 점 $(4,\ 4)$를 지나므로

$\sqrt{4c}=4$의 양변을 제곱하면 $4c=16$

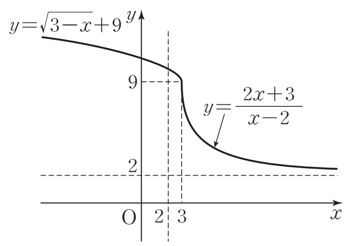
즉, $c=4$이므로 $h(x)=\sqrt{4x}$

따라서 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{2x}$, $h(x)=\sqrt{4x}$이므로

$(h\circ g\circ f)(64)=h(g(f(64)))=h(g(8))=h(4)=4$

18 정답 ⑤

조건 (가)에서 치역이 $\{y|y>2\}$이고, 조건 (나)에서 함수 f는 일대일함수이므로 주어진 함수의 그래프는 그림과 같다.



$f(3)=9$이므로 $a=9$

$\therefore f(x)=\sqrt{3-x}+9\ (x\leq 3)$

이때, $f(2)f(k)=10f(k)=40$이므로 $f(k)=4$에서

$\frac{2k+3}{k-2}=4,\ 2k+3=4k-8 \qquad \therefore k=\frac{11}{2}$

19 정답 ①

함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$에서 $f(2)=3$이므로

$\sqrt{2a+b}=3$ $\quad \therefore 2a+b=9$ ⋯ ㉠

$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로 $g(5)=10$이면 $f(10)=5$

$\sqrt{10a+b}=5$ $\quad \therefore 10a+b=25$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=2$, $b=5$

$\therefore a+b=7$

20 정답 1

$f(x)=2-2x$, $g(x)=\sqrt{3-x}-1$에서

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{3-(2-2x)}-1=\sqrt{2x+1}-1$

이때, $y=\sqrt{2x+1}-1$로 놓고 x에 대하여 정리하자.

$y+1=\sqrt{2x+1}(y\geq -1)$

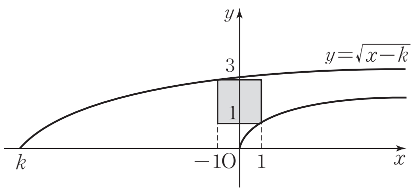
이 식의 양변을 제곱하면 $(y+1)^2=2x+1$ $\quad \therefore x=\frac{1}{2}y^2+y$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\frac{1}{2}x^2+x\ (x\geq -1)$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=-1$이므로 $a(b-c)=1$

21 정답 ①

집합 A가 나타내는 영역은 그림의 어두운 부분과 같다.



이때, $A\cap B\neq\varnothing$이므로 집합 A의 영역과 무리함수 $y=\sqrt{x-k}$의 그래프가 만나야 한다.

즉, $y=\sqrt{x-k}$의 그래프가

(i) 점 $(-1, 3)$을 지날 때, k의 값이 최소

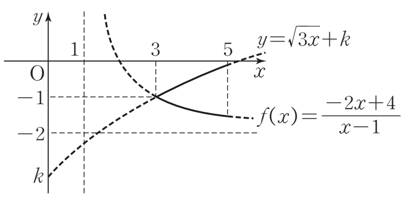
(ii) 점 $(1, 1)$을 지날 때, k의 값이 최대

(i), (ii)에 의하여 실수 k의 최솟값은

$3=\sqrt{-1-k}$에서 $9=-1-k$이므로 $k=-10$이다.

22 정답 16

$3\leq x\leq 5$에서 정의된 함수를 $f(x)=\frac{-2x+4}{x-1}=\frac{2}{x-1}-2$라 하면 이 함수의 그래프는 그림과 같다.



즉, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 한 점에 만나도록 하는 k의 값은

(i) 점 $(3,\ f(3))$을 지날 때, 최대

(ii) 점 $(5,\ f(5))$를 지날 때, 최소

(i), (ii)에 의하여 $f(3)=-1$이므로 실수 k의 최댓값은

$-1=\sqrt{9}+k$ $\quad \therefore k=-4$

따라서 $M=-4$이므로 $M^2=16$이다.

23 정답 ④

함수 $y=\sqrt{x-1}+1$의 역함수는 $x=\sqrt{y-1}+1$이므로 두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x-1}+1=x$, 즉 $\sqrt{x-1}=x-1(x\geq 1)$의 양변을 제곱하면

$x-1=(x-1)^2$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 두 함수의 그래프의 교점의 좌표는 $(1, 1)$, $(2, 2)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

24 정답 ④

함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 역함수 관계이다.

즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점 A는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\frac{1}{2}x^2-3=x(x\geq 0)$에서

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\quad \therefore x=3(\because x\geq 0)$

$\therefore \mathrm{A}(3, 3)$

점 C는 기울기 -1인 직선 l 위의 점이므로 점 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(2, \frac{1}{2}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

한편, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선 l의 방정식은

$y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)+2=-x+\frac{5}{2}$

$\therefore 2x+2y-5=0$

이때, 점 $\mathrm{A}(3, 3)$과 직선 l : $2x+2y-5=0$ 사이의 거리가 삼각형ABC의 높이이므로

$\frac{|2\cdot 3+2\cdot 3-5|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{7}{2\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{7\sqrt{2}}{4}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{21}{8}$

Ⅲ 수열

15 등차수열

Ⅲ-1. 등차수열과 등비수열

문제편 62~63p

01 정답 ①

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_9=2+\boxed{8}d$, $a_3=2+\boxed{2}d$

$a_9=3a_3$이므로

$2+\boxed{8}d=3(2+\boxed{2}d)$ $\quad\therefore d=\boxed{2}$

따라서 $a_n=2+\boxed{2}(n-1)=\boxed{2n}$이므로

$a_5=\boxed{10}$

02 정답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_6=60$에서 $\dfrac{\boxed{6}(2a+\boxed{5}d)}{2}=60$

$\therefore \boxed{2}a+\boxed{5}d=\boxed{20}$ ⋯ ㉠

$S_{30}=-420$에서 $\dfrac{\boxed{30}(2a+\boxed{29}d)}{2}=-420$

$\therefore \boxed{2}a+\boxed{29}d=\boxed{-28}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\boxed{15}$, $d=\boxed{-2}$

따라서 $S_n=\dfrac{\boxed{n}\{2\times\boxed{15}+(n-1)\times(\boxed{-2})\}}{2}$

$=\boxed{n}(\boxed{16}-n)$

이므로 $S_{15}=\boxed{15}$

$\therefore a_{16}+a_{17}+a_{18}+\cdots+a_{30}=S_{30}-S_{15}$

$=-420-\boxed{15}$

$=\boxed{-435}$

03 정답 11

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=a+3d=20$ ⋯ ㉠

$a_8=a+7d=8$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $d=-3$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=29$

$\therefore a_n=29-3(n-1)=-3n+32$

이때, $a_n=-3n+32<0$이면

$n>\dfrac{32}{3}=10.6\cdots$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제 11 항이다.

04 정답 ③

컵 C에 들어 있는 물의 양을 a라 하면 등차수열을 이루는 5개의 컵에 들어 있는 물의 양은

$a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$

이때, 5개 컵의 물의 양의 합이 800 mL이므로

$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=800$

$5a=800$ $\quad\therefore a=160$

따라서 컵 C에 들어 있는 물의 양은 160 mL이다.

05 정답 35

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공차를 d라 하면

$a_2=a_1+d=4$ ⋯ ㉠ $\quad a_5=a_1+4d=13$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a_1=1$, $d=3$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=\dfrac{5(1+13)}{2}=35$

06 정답 ③

$S_n=n^2+3n$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+3\cdot1=4$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=2n+2$ ⋯ ㉠

이때, ㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=4$이므로

$a_n=2n+2\ (n\ge1)$ $\quad\therefore a_1+a_9=4+20=24$

다른 풀이

$S_n=n^2+3n$에서

$a_1=S_1=1^2+3\cdot1=4$

$a_9=S_9-S_8=(9^2+3\cdot9)-(8^2+3\cdot8)=20$

$\therefore a_1+a_9=4+20=24$

16 등비수열

Ⅲ-1. 등차수열과 등비수열

문제편 64~65p

07 정답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\dfrac{a_5}{a_2}=2$에서 $\dfrac{ar^{\boxed{4}}}{ar^{\boxed{1}}}=2$ $\quad\therefore \boxed{r^3}=2$ ⋯ ㉠

$a_4+a_7=12$에서 $ar^{\boxed{3}}+ar^{\boxed{6}}=12$

$\therefore ar^{\boxed{3}}(1+r^{\boxed{3}})=12$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a\cdot2\cdot(1+2)=12$에서 $a=\boxed{2}$

$\therefore a_{13}=ar^{\boxed{12}}=a(r^{\boxed{3}})^{\boxed{4}}=\boxed{2}\times2^{\boxed{4}}=\boxed{32}$

08 정답 260

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n=\dfrac{a(r^{\boxed{n}}-1)}{r-1}=20$ ⋯ ㉠

$S_{2n}=\dfrac{a(r^{\boxed{2n}}-1)}{r-1}=\dfrac{a(\boxed{r^n-1})(\boxed{r^n+1})}{r-1}=80$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠에서 $\boxed{r^n+1}=4$이므로 $r^n=\boxed{3}$

$\therefore S_{3n}=\dfrac{a(r^{\boxed{3n}}-1)}{r-1}=\dfrac{a(\boxed{r^n-1})(\boxed{r^{2n}+r^n+1})}{r-1}$

$=S_n(\boxed{r^{2n}+r^n+1})=20(3^2+3+1)=\boxed{260}$

09 정답 ①

첫째항이 12, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열의 제 $n+2$ 항이 $\dfrac{3}{128}$이므로

$12\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2-1}=\dfrac{3}{128}$에서 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{9}$

$n+1=9$ $\quad\therefore n=8$

10 정답 256

수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 a_2, a_6, a_{10}과 a_4, a_6, a_8이 각각 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 즉, 등비중항의 성질에 의하여

$a_2\times a_{10}=(a_6)^2$

$a_4\times a_8=(a_6)^2$

$\therefore\ a_2\times a_4\times a_8\times a_{10}=(a_6)^4=4^4=256$

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면,

$a_6=ar^5=4$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_2\times a_4\times a_8\times a_{10}&=ar\times ar^3\times ar^7\times ar^9=a^4r^{20}\\&=(ar^5)^4=4^4=256\end{aligned}$$

11 정답 ④

(ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=5-1=4$

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n=S_n-S_{n-1}&=(5^n-1)-(5^{n-1}-1)\\&=5^n-5^{n-1}=4\cdot 5^{n-1}\ \cdots\ ㉠\end{aligned}$$

이때, ㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=4$이므로

$a_n=4\cdot 5^{n-1}\ (n\geq 1)$

$\therefore\ \dfrac{a_5}{a_3}=\dfrac{4\cdot 5^4}{4\cdot 5^2}=5^2=25$

12 정답 ③

매월 초에 100만 원씩 적립하면 1년 후, 즉 12개월 후 월말까지 적립금의 원리합계는

$100(1+0.01)+100(1+0.01)^2+\cdots+100(1+0.01)^{12}$

$=\dfrac{100\times 1.01(1.01^{12}-1)}{1.01-1}$

$=\dfrac{100\times 1.01(1.13-1)}{0.01}$

$=1313$(만 원)

[15+16] 개념 실력확인 Ⅲ-1. 등차수열과 등비수열

문제편 66~67p

13 정답 ⑤

등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라 하면

$a_7=a+6d=-23\ \cdots\ ㉠$

$a_{21}=a+20d=5\ \cdots\ ㉡$

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-35$, $d=2$

$\therefore\ a_n=-35+(n-1)\cdot 2=2n-37$

이때, $2n-37>0$에서 $2n>37$

$\therefore\ n>\dfrac{37}{2}=18.5$

따라서 처음으로 양수가 나오는 항은 제 19 항이다.

14 정답 ②

$a_4=S_4-S_3=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{20}$

15 정답 10

등차중항의 성질에 의하여 $a_2+a_{10}=2a_6$이므로

조건 (가)에서 $a_2+a_6+a_{10}=a_6+2a_6=8$ $\quad\therefore\ a_6=\dfrac{8}{3}$

즉, 첫째항은 1이고, 공차를 d라 하면 $1+5d=\dfrac{8}{3}$ $\quad\therefore\ d=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ a_n=1+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{1}{3}n+\dfrac{2}{3}$

조건 (나)에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{3}n+\dfrac{2}{3}\right)}{2}=25$

$n^2+5n-150=0$

$(n-10)(n+15)=0$

$\therefore\ n=10\ (\because n>0)$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때, $a_1=1$이므로

$a_n=1+(n-1)d$

조건 (가)에 의하여

$(1+d)+(1+5d)+(1+9d)=8$

$\therefore\ d=\dfrac{1}{3}$

조건 (나)에 의하여

$\dfrac{n\left\{2+\dfrac{1}{3}(n-1)\right\}}{2}=25$

$n^2+5n-150=0$

$(n-10)(n+15)=0$

$\therefore\ n=10\ (\because n>0)$

16 정답 442

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a , 공차를 d라 하면

$a_{11}+a_{21}=82$에서 $(a+10d)+(a+20d)=82$

$\therefore\ a+15d=41\ \cdots\ ㉠$

$a_{11}-a_{21}=6$에서 $(a+10d)-(a+20d)=6$

$-10d=6$ $\quad\therefore\ d=-\dfrac{3}{5}\ \cdots\ ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=41-15\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=50$

$\therefore\ a_n=50+(n-1)\left(-\dfrac{3}{5}\right)$

집합 A의 원소인 a_n이 자연수이므로

(ⅰ) $n-1$은 5의 배수이다.

$n-1=5k$, 즉 $n=5k+1$(k는 음이 아닌 정수)

(ⅱ) $a_n>0$ 즉, $a_n=50+(n-1)\left(-\dfrac{3}{5}\right)>0$에서

$-\dfrac{3}{5}n+\dfrac{253}{5}>0$ $\quad\therefore\ n<\dfrac{253}{3}=84.3\cdots$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 n의 값은 1, 6, 11, $\cdots$, 81로 17개이다.

따라서 수열 a_1, a_6, a_{11}, $\cdots$, a_{81}은 첫째항 $a_1=50$이고 마지막 항이 $a_{81}=2$인 등차수열이므로 그 합은

$\dfrac{17(50+2)}{2}=442$

17 정답 ③

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-5$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^2-6n-\{(n-1)^2-6(n-1)\}\\&=2n-7 \cdots ㉠\end{aligned}$$

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=-5$이므로

$a_n=2n-7\ (n\geq 1)$

이때, $a_n\leq 0$이면 $2n-7\leq 0$

$\therefore n\leq \frac{7}{2}=3.5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 3이다.

18 정답 508

등비중항의 성질에 의하여 $a_2a_4=(a_3)^2=16$이고,

조건 (가)에 의하여 $a_3\neq -4$이므로 $a_3=4$

이때, 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$라 하면

$a_3+a_6=a_3+a_3r^3=a_3(1+r^3)=12$

$4(1+r^3)=12 \qquad \therefore r^3=2$

$$\begin{aligned}\therefore a_3+a_6+a_9+a_{12}+a_{15}+a_{18}+a_{21}\\=\frac{a_3\{(r^3)^7-1\}}{r^3-1}=\frac{4(2^7-1)}{2-1}=508\end{aligned}$$

19 정답 40

$S_n=\frac{n\{2a-2(n-1)\}}{2}=n(a+1-n)$이므로

$S_n\leq 100$이면 $n(a+1-n)\leq 100$

$\therefore n^2-(a+1)n+100\geq 0 \cdots ㉠$

이때, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 모든 자연수 n에 대하여 ㉠을 만족시키기 위해서

$D=(a+1)^2-4\cdot 100\leq 0$이므로

$(a+1+20)(a+1-20)\leq 0$

$(a+21)(a-19)\leq 0$

$\therefore -21\leq a\leq 19$

따라서 정수 a의 최댓값은 $M=19$, 최솟값은 $m=-21$이므로

$M-m=40$

20 정답 273

다항식 $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$을 $x-1$로 나눌 때의 나머지를 상수 R라 하면

$x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=(x-1)f(x)+R \cdots ㉠$

양변에 $x=1$을 대입하면 $R=1$

한편, $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는 $f(3)$이므로

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^6-3^5+3^4-3^3+3^2-3+1=2f(3)+1$

$$\begin{aligned}\therefore f(3)&=\frac{1}{2}(3^6-3^5+\cdots+3^2-3)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{(-3)\{1-(-3)^6\}}{1-(-3)}\\&=\frac{3}{8}(3^6-1)=273\end{aligned}$$

21 정답 ④

일정한 간격으로 길이가 증가하도록 14개 고무줄로 잘랐으므로 잘려진 고무줄의 길이는 등차수열을 이룬다.

첫째항이 3, 마지막 항이 42, 항의 개수가 14이므로 이 수열의 합은 $\frac{14(3+42)}{2}=315$

따라서 처음 고무줄의 전체 길이는 315이다.

22 정답 6

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2+a_6=82$에서

$ar+ar^5=ar(1+r^4)=82 \cdots ㉠$

$a_3+a_7=246$에서

$ar^2+ar^6=ar^2(1+r^4)=246 \cdots ㉡$

㉡÷㉠에서 $r=3$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{1}{3}$

$\therefore S_n=\frac{\frac{1}{3}(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{6}(3^n-1)$

이때, $S_n>100$이면 $\frac{1}{6}(3^n-1)>100$에서

$3^n>601$이고, $3^5=243$, $3^6=729$이므로

자연수 n에 대하여 $n\geq 6$이다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

23 정답 ①

$f(0)=2$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ f)(0)&=f(f(0))=f(2)\\&=2^{10}-2^9+\cdots+2^2-2+2\\&=\frac{(-2)\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}+2\\&=\frac{2\times 1023}{3}+2=684\end{aligned}$$

24 정답 ④

원 C_1의 중심은 $(0, 0)$, 반지름의 길이는 1이고,

원 C_2의 중심은 $(1, 0)$, 반지름의 길이는 r이므로

$\overline{OP}=1$

$\overline{OR}=1+r$

$\overline{QR}=\overline{OQ}+\overline{OR}=1+(1+r)=2+r$

이때, $\overline{OP}$, $\overline{OR}$, $\overline{QR}$의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

등비중항의 성질에 의하여

$(1+r)^2=1\times(2+r)$

$r^2+r-1=0$

$\therefore r=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (\because 0<r<\sqrt{2})$

17 수열의 합

Ⅲ-2. 수열의 합

문제편 **68~69p**

01 정답 125

등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 3이므로 일반항은

$a_n=\boxed{3n-1}$

$$\sum_{k=1}^{16}(a_k+3)-\sum_{i=1}^{15}(a_i-2)$$
$$=(a_{\boxed{16}}+3)+\sum_{k=1}^{15}(a_k+3)-\sum_{i=1}^{15}(a_i-2)$$
$$=(a_{\boxed{16}}+3)+\sum_{k=1}^{15}(a_k+3)-\sum_{k=1}^{15}(\boxed{a_k-2})$$
$$=(\boxed{47}+3)+\sum_{k=1}^{15}\{(a_k+3)-(\boxed{a_k-2})\}$$
$$=\boxed{50}+\sum_{k=1}^{15}\boxed{5}=\boxed{50}+\boxed{5}\cdot 15=\boxed{125}$$

02 정답 ①

$\displaystyle\sum_{k=2}^{9}(k+1)=\sum_{k=1}^{8}(\boxed{k+2})$이므로

$$\sum_{k=1}^{8}(k+2)^2-\sum_{k=2}^{9}(k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{8}(k+2)^2-\sum_{k=1}^{8}(\boxed{k+2})$$
$$=\sum_{k=1}^{8}\{(k+2)^2-(\boxed{k+2})\}$$
$$=\sum_{k=1}^{8}(k^2+\boxed{3}k+\boxed{2})=\sum_{k=1}^{8}k^2+\boxed{3}\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}\boxed{2}$$
$$=\frac{\boxed{8\cdot 9\cdot 17}}{6}+\boxed{3}\cdot\frac{\boxed{8\cdot 9}}{2}+\boxed{2}\cdot\boxed{8}$$
$$=204+108+16=\boxed{328}$$

03 정답 ③

$$\sum_{k=1}^{25}(a_{2k-1}+a_{2k})=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{49}+a_{50})$$
$$=\sum_{k=1}^{50}a_k=75$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{50}(3a_k+2)=3\sum_{k=1}^{50}a_k+\sum_{k=1}^{50}2=3\cdot 75+2\cdot 50=325$$

04 정답 624

$$\sum_{k=1}^{4}(k+1)^4-\sum_{k=2}^{5}(k-1)^4$$
$$=(2^4+3^4+4^4+5^4)-(1^4+2^4+3^4+4^4)$$
$$=5^4-1=624$$

05 정답 250

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=-2$, $a_5=a+4d=7$이므로 두 식을 연립하면

$a=-5$, $d=3$

$\therefore a_n=-5+3(n-1)=3n-8$

이때, $a_{2n}=6n-8$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=\sum_{k=1}^{10}(6k-8)=6\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}8$$
$$=6\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-8\cdot 10=250$$

06 정답 ④

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}}{4}$$
$$=\frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$
$$\therefore 1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+10\cdot 11\cdot 12$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k(k+1)(k+2)=\frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{4}=4290$$

18 여러 가지 수열의 합

Ⅲ-2. 수열의 합

문제편 **70~71p**

07 정답 ⑤

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+3)}{2}-\frac{(\boxed{n-1})(\boxed{n+2})}{2}$$
$$=\boxed{n+1}\,(n\geq 2)$$

이때, $a_1=S_1=\boxed{2}$이므로 $a_n=\boxed{n+1}\,(n\geq\boxed{1})$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{(\boxed{n+1})(\boxed{n+2})}=\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{\boxed{n+1}}-\frac{1}{\boxed{n+2}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{22}\right)$$
$$=\frac{1}{\boxed{2}}-\frac{1}{\boxed{22}}=\boxed{\frac{5}{11}}$$

08 정답 ①

$(\boxed{1})$, $(\boxed{2,\ 1})$, $(\boxed{2^2,\ 2,\ 1})$, $(\boxed{2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1})$, $\cdots$

1군　2군　3군　4군　$\cdots$

n군의 첫째항은 $\boxed{2^{n-1}}$이고, 항의 개수는 $\boxed{n}$이므로

n군은 $(\boxed{2^{n-1},\ 2^{n-2},\ \cdots,\ 1})$이다.

제 100 항이 n군에 속한다고 하면

$1+2+3+\cdots+n\geq 100$, 즉 $\dfrac{\boxed{n(n+1)}}{2}\geq 100$

$n=\boxed{13}$일 때, $\dfrac{\boxed{13\cdot 14}}{2}=\boxed{91}$

$n=\boxed{14}$일 때, $\dfrac{\boxed{14\cdot 15}}{2}=\boxed{105}$

제 100 항은 $\boxed{14}$군에 속하고, $\boxed{13}$군까지의 항의 개수가 $\boxed{91}$이므로 제 100 항은 $\boxed{14}$군의 $\boxed{9}$번째 항이다.

따라서 14군은 $(2^{13},\ 2^{12},\ 2^{11},\ \cdots,\ 1)$이므로

제 100 항은 $2^{13-9+1}=2^{\boxed{5}}$이다.

09 정답 ③

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

따라서 $\sqrt{n+1}-1=10$, 즉 $\sqrt{n+1}=11$의 양변을 제곱하면

$n+1=121$

$\therefore n=120$

10 정답 37

$$\sum_{k=1}^{9}\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$$
$$=1-\frac{1}{19}=\frac{18}{19}$$

따라서 $p=19$, $q=18$이므로 $p+q=37$

11 정답 215

주어진 수열에서 항을 적당히 묶어 규칙성을 가진 군으로 나누면

$$\underset{1군}{\left(\frac{1}{1}\right)},\ \underset{2군}{\left(\frac{1}{2},\frac{2}{2}\right)},\ \underset{3군}{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3}\right)},\ \underset{\cdots}{\cdots},\ \underset{m군}{\left(\frac{1}{m},\frac{2}{m},\frac{3}{m},\cdots,\frac{m}{m}\right)},\ \underset{\cdots}{\cdots}$$

m군의 첫째항은 $\frac{1}{m}$이고 항의 개수는 m이므로 $\frac{5}{21}$는 21군의 5번째 항이다.

$\therefore n=(1+2+3+\cdots+20)+5$

$\quad=\frac{20(20+1)}{2}+5=215$

12 정답 ③

n행의 k번째 항이 $\frac{1}{2}$이라 하면

$\frac{k}{2^n}=\frac{1}{2}$

$\therefore k=2^{n-1}$

이때, n행의 항의 개수는 (2^n-1)개이므로 n행에서 $\frac{1}{2}$보다 큰 수의 개수는

$a_n=(2^n-1)-2^{n-1}$

$\quad=2^{n-1}-1$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2^{n-1}-1)$

$\quad=\frac{2^{10}-1}{2-1}-10$

$\quad=1013$

[17+18] 개념 실력확인

문제편 72~73p

13 정답 ⑤

$$\sum_{n=1}^{10}(2a_n-1)^2=\sum_{n=1}^{10}(4a_n^{\,2}-4a_n+1)$$
$$=4\sum_{n=1}^{10}a_n^{\,2}-4\sum_{n=1}^{10}a_n+\sum_{n=1}^{10}1$$
$$=4\sum_{n=1}^{10}a_n^{\,2}-4\cdot4+1\cdot10=34$$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n^{\,2}=10$

14 정답 ③

$$\sum_{k=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{k}kj\right)=\sum_{k=1}^{5}\left(k\sum_{j=1}^{k}j\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\left\{k\cdot\frac{k(k+1)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{k^3+k^2}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}k^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{5\cdot6}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{5\cdot6\cdot11}{6}=140$$

15 정답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_9=4a_5$에서

$ar^8=4ar^4$

$ar^4(r^4-4)=0$

이때, 모든 항이 양수이므로 $r>0$이고, $ar^4\neq0$, $r^4=4$

$\therefore r=\sqrt{2}$

$a_3+a_7=40$에서 $ar^2+ar^6=2a+8a=40$이므로

$a=4 \qquad \therefore a_n=4(\sqrt{2})^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{12}\frac{a_{n+1}-a_n}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}$$
$$=\sum_{n=1}^{12}\frac{(a_{n+1}-a_n)(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})}{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})}$$
$$=\sum_{n=1}^{12}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$$
$$=(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+\cdots+(\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_{12}})$$
$$=\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_1}=\sqrt{4(\sqrt{2})^{12}}-\sqrt{4}$$
$$=16-2=14$$

16 정답 ②

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-1)$$
$$=\left\{\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-(n+1)^2\right\}-\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2-(k^2-1)\}-(n+1)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2k+2)-(n+1)^2$$
$$=n(n+1)+2n-(n+1)^2$$
$$=n-1=99$$

$\therefore n=100$

17 정답 ④

$\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=2}^{10}k^2+\sum_{k=3}^{10}k^2+\cdots+\sum_{k=10}^{10}k^2$

$=1+2^2+3^2+\cdots+10^2$

$\quad+2^2+3^2+\cdots+10^2$

$\qquad+3^2+\cdots+10^2$

$\qquad\quad\cdots+\cdots+10^2$

$=1^2+2\cdot 2^2+3\cdot 3^2+\cdots+10\cdot 10^2$

$=1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3$

$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2$

$=3025$

18 정답 ①

$a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2)$이므로

$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$

$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)$

$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3}$

이때, $S_1=a_1=2$이므로 $\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{6}\qquad\therefore S_{11}=6$

19 정답 ③

두 함수의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식

$x^2-nx+n^2+1=nx+2$의 해이므로

$x^2-2nx+n^2-1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_nb_n=n^2-1=(n+1)(n-1)$

$\therefore \sum_{n=2}^{9}\frac{45}{a_nb_n}=\sum_{n=2}^{9}\frac{45}{(n+1)(n-1)}$

$=45\sum_{n=2}^{9}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{45}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{45}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$=29$

20 정답 ⑤

n행에 있는 자연수의 합은 1에서 n까지 자연수를 2번 더하고, 1을 빼준 것과 같으므로

$a_n=\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2-1=n(n+1)-1=n^2+n-1$

$a_9=81+9-1=89$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k-1)$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-n$

$S_9=\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}+\frac{9\cdot 10}{2}-9=321$

$\therefore a_9+S_9=89+321=410$

21 정답 ③

곡선 $y=x^2+x$와 직선 $y=nx-2$의 교점의 좌표를 각각

$A(\alpha,\ \alpha^2+\alpha)$, $B(\beta,\ \beta^2+\beta)$라 하면

직선 OA의 기울기는

$a_n=\frac{(\alpha^2+\alpha)-0}{\alpha-0}=\alpha+1$

이고, 직선 OB의 기울기는

$b_n=\frac{(\beta^2+\beta)-0}{\beta-0}=\beta+1$

$\therefore a_n+b_n=\alpha+\beta+2 \cdots$ ㉠

한편, $y=x^2+x$와 $y=nx-2$를 연립하면

$x^2+x=nx-2$

$\therefore x^2-(n-1)x+2=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=n-1$

㉠에 의하여 $a_n+b_n=n+1$

$\therefore \sum_{n=4}^{20}(a_n+b_n)=\sum_{n=4}^{20}(n+1)$

$=5+6+7+\cdots+21$

$=\frac{17(5+21)}{2}=221$

22 정답 247

$n\ge 2$일 때,

(i) n행의 홀수 번째 놓인 원 안에는 $(2n-1)$이 n개이다.

(ii) n행의 짝수 번째 놓인 원 안에는

$\{2\times(2n-1)+(2n-3)\}=(6n-5)$가 $(n-1)$개이다.

(i), (ii)에 의하여 n행의 모든 수의 합을 a_n이라 하면

$a_n=(2n-1)n+(6n-5)(n-1)$

$=8n^2-12n+5\ (n\ge 2)$

이때, $a_1=1$이므로

$a_n=8n^2-12n+5\ (n\ge 1)$

$S=\sum_{n=1}^{10}(8n^2-12n+5)$

$=8\sum_{n=1}^{10}n^2-12\sum_{n=1}^{10}n+\sum_{n=1}^{10}5$

$=8\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-12\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+5\cdot 10$

$=2470$

$\therefore \frac{S}{10}=247$

19 수학적 귀납법

Ⅲ-3. 수학적 귀납법

문제편 74~75p

01 정답 ①

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\boxed{2}$, 공차가 $\boxed{3}$인 등차수열이므로

$a_n=\boxed{2}+(n-1)\cdot\boxed{3}$ $\quad\therefore a_8=2+7\cdot3=\boxed{23}$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\boxed{1}$, 공비가 $\boxed{2}$인 등비수열이므로

$b_n=\boxed{1}\cdot(\boxed{2})^{n-1}$ $\quad\therefore b_8=1\cdot2^7=\boxed{128}$

$\therefore a_8+b_8=23+128=\boxed{151}$

02 정답 해설 참고

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{1}{1\cdot3}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$, (우변)$=\dfrac{1}{2\cdot1+1}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

양변에 $\boxed{\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$을 각각 더하면

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$$

$$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k+1}{2k+3}=\frac{\boxed{k+1}}{2(\boxed{k+1})+1}$$

따라서 $n=\boxed{k+1}$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

03 정답 28

${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 공비는

$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{16}{8}=2$이다. $\quad\therefore a_n=8\cdot2^{n-1}=2^{n+2}$

이때, $a_k=2^{30}$에서 $2^{k+2}=2^{30}$이므로

$k+2=30 \quad\therefore k=28$

04 정답 256

수열 $\{a_n\}$은 조건 (나)에 의하여 공비 -2인 등비수열이며,

$a_2=-2a_1$을 조건 (가)에 대입하면 $a_1=-2a_1+3$

$\therefore a_1=1$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공비가 -2인 등비수열이므로 $a_n=1\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$

$\therefore a_9=(-2)^8=256$

05 정답 12

(ii) $n=k(k\geq2)$일 때, k^3-k가 6의 배수라 가정하면

$$(k+1)^3-(k+1)=(k^3+3k^2+3k+1)-(k+1)$$
$$=(\underbrace{k^3-k}_{\text{(가)}})+3(\underbrace{k^2+k}_{\text{(나)}})$$

이때, $k^3-k=(k-1)k(k+1)$은 연속된 세 자연수의 곱으로 6의 배수이고, $k^2+k=k(k+1)$은 연속된 두 자연수의 곱으로 $\underbrace{2}_{\text{(다)}}$의 배수이므로 k^3-k, $3(k^2+k)$는 모두 6의 배수이다.

따라서 $f(k)=k^3-k$, $g(k)=k^2+k$, $p=2$이므로

$f(p)+g(p)=f(2)+g(2)=(2^3-2)+(2^2+2)=12$

06 정답 ①

(ii) $n=k$일 때, ㉡이 성립한다고 가정하면

$$a_k=(1+2+3+\cdots+k)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$$

이다. ㉠에서 $\dfrac{a_{k+1}}{k+2}=\dfrac{a_k}{k}+\dfrac{1}{2}$이므로

이 등식의 양변에 $k+2$를 곱하면

$$a_{k+1}$$
$$=\underbrace{\frac{k+2}{k}}_{\text{(가)}}a_k+\frac{k+2}{2}$$
$$=\frac{k+2}{k}(1+2+3+\cdots+k)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{k+2}{2}$$
$$=\frac{k+2}{k}\times\frac{k(k+1)}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{k+2}{2}$$
$$=\underbrace{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}_{\text{(나)}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{k+2}{2}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{(k+1)(k+2)}{2(k+1)}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k+1}\right\}$$
$$=\{1+2+3+\cdots+(k+1)\}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)$$

따라서 $f(k)=\dfrac{k+2}{k}$, $g(k)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$이므로

$f(10)\times g(9)=\dfrac{12}{10}\times\dfrac{10\times11}{2}=66$

20 여러 가지 귀납적 정의

Ⅲ-3. 수학적 귀납법

문제편 76~77p

07 정답 210

$$
\begin{aligned}
a_2&=a_1+4\cdot\boxed{1}+3\\
a_3&=a_2+4\cdot\boxed{2}+3\\
a_4&=a_3+4\cdot\boxed{3}+3\\
&\ \vdots\\
+)\ a_n&=a_{n-1}+4(\boxed{n-1})+3\\
\hline
a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(\boxed{4k+3})\\
&=3+4\cdot\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}+3(\boxed{n-1})\\
&=\boxed{2n^2+n}
\end{aligned}
$$

$\therefore a_{10}=2\cdot10^2+10=\boxed{210}$

08 정답 ②

$a_{n+1}=a_n=\alpha$라 하면,

$\alpha=3\alpha-3 \qquad \therefore\ \alpha=\boxed{\dfrac{3}{2}}$

$a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$이므로 $a_{n+1}-\boxed{\dfrac{3}{2}}=\boxed{3}\left(a_n-\boxed{\dfrac{3}{2}}\right)$

수열 $\left\{a_n-\boxed{\dfrac{3}{2}}\right\}$은 첫째항이 $a_1-\boxed{\dfrac{3}{2}}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$, 공비가 $\boxed{3}$인 등비수열이므로

$a_n-\boxed{\dfrac{3}{2}}=\boxed{\dfrac{1}{2}}\times(\boxed{3})^{n-1}$

따라서 $a_n=\dfrac{(\boxed{3})^{n-1}+\boxed{3}}{2}$이므로

$a_6-a_5=\dfrac{3^5+3}{2}-\dfrac{3^4+3}{2}$

$=\dfrac{3^4(3-1)}{2}=3^{\boxed{4}}=\boxed{81}$

다른 풀이

$a_{n+2}=3a_{n+1}-3 \cdots$ ㉠

$a_{n+1}=3a_n-3 \cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=1$이고 공비가 3인 등비수열이므로

$a_{n+1}-a_n=3^{n-1}$

$\therefore\ a_6-a_5=3^4=81$

09 정답 ⑤

조건 (가)에서 $a_2-a_1=2$, $a_3-a_2=4$이므로 조건 (나)에 의하여 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 공차가 2이고, 첫째항이 $a_2-a_1=2$인 등차수열이다.

$a_{n+1}-a_n=2+2(n-1)=2n$이므로

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=2 \\ & a_3-a_2=4 \\ & a_4-a_3=6 \\ & \quad\vdots \\ +) & a_8-a_7=14 \\ \hline & a_8-a_1=2+4+6+\cdots+14 \\ & \quad=\dfrac{7(2+14)}{2}=56 \end{array}$$

따라서 $a_1=1$이므로 $a_8=56+a_1=57$이다.

10 정답 192

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3^n$에서 $a_{n+1}=3^n a_n$이므로

$$\begin{array}{rl} & a_2=3^1a_1 \\ & a_3=3^2a_2 \\ & a_4=3^3a_3 \\ & \quad\vdots \\ \times) & a_n=3^{n-1}a_{n-1} \\ \hline & a_n=3^1\times3^2\times3^3\times\cdots\times3^{n-1}\times a_1 \\ & \quad=3^{1+2+\cdots+(n-1)}\times9=3^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot3^2=3^{\frac{n^2-n+4}{2}} \end{array}$$

따라서 $a_n=3^{f(n)}$에서 $f(n)=\dfrac{n^2-n+4}{2}$이므로

$f(20)=\dfrac{400-20+4}{2}=192$이다.

11 정답 ②

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$이므로 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=3-1=2$, 공비가 2인 등비수열이다.

$a_{n+1}-a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$

$\therefore\ a_{10}-a_9=2^9$

12 정답 21

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$의 양변에 역수를 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3a_n+1}{a_n}$

$=\dfrac{1}{a_n}+3$

수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1}=1$, 공차가 3인 등차수열이므로

$\dfrac{1}{a_n}=1+(n-1)\cdot3$

$=3n-2$

$\therefore\ a_n=\dfrac{1}{3n-2}$

이때, $a_k=\dfrac{1}{61}$에서

$\dfrac{1}{3k-2}=\dfrac{1}{61}$

$3k-2=61$

$3k=63$

$\therefore\ k=21$

따라서 자연수 k의 값은 21이다.

[19+20] 개념 실력확인

Ⅲ-3. 수학적 귀납법

문제편 **78~79p**

13 정답 ⑤

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$, 즉 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때, 공차를 d라 하면 $a_1=5$이므로

$a_{10}=5+9d=41$, $9d=36 \qquad \therefore\ d=4$

$\therefore\ a_{20}=5+19\cdot4=81$

14 정답 121

조건 (나)에서 $a_{n+1}=a_n+3^n$이므로

$$\begin{array}{rl} & a_2=a_1+3 \\ & a_3=a_2+3^2 \\ & a_4=a_3+3^3 \\ +) & a_5=a_4+3^4 \\ \hline & a_5=a_1+3+3^2+3^3+3^4 \\ & \quad=1+3+3^2+3^3+3^4 \\ & \quad=\dfrac{1\cdot(3^5-1)}{3-1}=121 \end{array}$$

15 정답 55

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n}{n+1}$$에서

$a_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n}{n+1}a_n$이므로

$$\begin{aligned}
&a_2=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}a_1\\
&a_3=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}a_2\\
&\quad\vdots\\
\times)\ &a_n=\frac{n+1}{n}\times\frac{n-1}{n}a_{n-1}\\
\hline
&a_n=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}a_1=\frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

$\therefore\ 100a_{10}=100\times\frac{11}{20}=55$

16 정답 ①

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이고, 공차는 $a_3-a_2=3$이므로 첫째항을 a_1이라 하면

$a_2=a_1+3\qquad\therefore\ a_1=a_2-3=-4$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\frac{10\{2(-4)+3(10-1)\}}{2}=95$$

17 정답 ③

조건 (나)에서 $(a_n+a_{n+1})^2=4a_na_{n+1}+4^n$이므로

$(a_n+a_{n+1})^2-4a_na_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)^2=4^n$

이때, 조건 (가)에서 $a_{n+1}-a_n>0$이므로 $a_{n+1}-a_n=2^n$

$$\begin{aligned}
&a_2-a_1=2\\
&a_3-a_2=2^2\\
&a_4-a_3=2^3\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_{10}-a_9=2^9\\
\hline
&a_{10}-a_1=2+2^2+2^3+\cdots+2^9=\frac{2(2^9-1)}{2-1}=1022
\end{aligned}$$

$\therefore\ a_{10}=1022+a_1=1023$

18 정답 ④

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{n^2-1}{n^2}a_n=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}a_n\\
&=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}a_n\ (n\ge 2)\text{이므로}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_3=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}a_2\\
&a_4=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}a_3\\
&a_5=\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}a_4\\
&\quad\vdots\\
\times)\ &a_n=\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n}{n-1}a_{n-1}\\
\hline
&a_n=\frac{1}{2}\times\frac{n}{n-1}a_2=\frac{n}{2(n-1)}a_2
\end{aligned}$$

이때, $a_{50}=\frac{50}{2\times 49}a_2=\frac{25}{49}$이므로 $a_2=1$

$\therefore\ a_{100}=\frac{100}{2\times 99}\cdot 1=\frac{50}{99}$

19 정답 ⑤

$a_{n+1}=2a_n-5$에서 $a_{n+1}-5=2(a_n-5)$이므로 수열 $\{a_n-5\}$는 첫째항이 $a_1-5=2$, 공비가 2인 등비수열이다.

즉, $a_n-5=2\cdot 2^{n-1}=2^n$이므로 $a_n=2^n+5$

$\therefore\ S_{10}-S_9=a_{10}=2^{10}+5=1029$

20 정답 ①

(i) $n=2$일 때,

좌변$=(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h=$(우변)

따라서 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k(k\ge\overset{(가)}{\boxed{2}})$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$이므로 양변에 $\underset{(나)}{\boxed{1+h}}$를 곱하면

$$\begin{aligned}
(1+h)^{k+1}&>(1+kh)(1+h)\\
&=1+(\overset{(다)}{\boxed{k+1}})h+kh^2\\
&>1+(\boxed{k+1})h
\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $f(h)=h+1$, $g(k)=k+1$이므로

$f(2a)\times g(a)=f(4)\times g(2)=5\times 3=15$

21 정답 513

자연수 n에 대하여 $a_n>0$이므로 주어진 부등식에 역수를 취하면

$n<\frac{k}{a_n}<n+2\qquad\therefore\ na_n<k<(n+2)a_n$

자연수 k의 개수 a_{n+1}은

$a_{n+1}=(n+2)a_n-na_n-1=2a_n-1$

이때, $a_{n+1}-1=2(a_n-1)$이므로 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=1$, 공비 2인 등비수열이다.

즉, $a_n-1=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$이므로 $a_n=2^{n-1}+1$

$\therefore\ a_{10}=2^9+1=513$

22 정답 ①

(ii) $n=m$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$6\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)=5\sum_{k=1}^{m}k^4+\sum_{k=1}^{m}k^2$이다.

$n=m+1$일 때, ㉠이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}
&6\left(\sum_{k=1}^{m+1}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m+1}k^2\right)\\
&=6\left\{\sum_{k=1}^{m}k+(\overset{(가)}{\boxed{m+1}})\right\}\left\{\sum_{k=1}^{m}k^2+(m+1)^2\right\}\\
&=6\left\{\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)+(m+1)\sum_{k=1}^{m}k^2+(m+1)^2\sum_{k=1}^{m}k+(m+1)^3\right\}\\
&=6\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)\\
&\qquad+(\boxed{m+1})\left\{6\sum_{k=1}^{m}k^2+6(m+1)\sum_{k=1}^{m}k+6(m+1)^2\right\}
\end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned}
&(\boxed{m+1})\times\left\{6\sum_{k=1}^{m}k^2+6(m+1)\sum_{k=1}^{m}k+6(m+1)^2\right\}\\
&=(m+1)\times\{m(m+1)(2m+1)+3m(m+1)^2+6(m+1)^2\}\\
&=(m+1)^2\times\{m(2m+1)+3m(m+1)+6(m+1)\}\\
&=(m+1)^2\times(\underset{(나)}{\boxed{5m^2+10m+6}})\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

따라서 $f(m)=m+1$, $g(m)=5m^2+10m+6$이므로

$$\frac{g(10)}{f(5)}=\frac{606}{6}=101$$

Ⅲ 단원 [15~20] 개념 종합 문제

문제편 80~83p

01 정답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=10$ ⋯ ㉠

$a_4-a_2=(a+3d)-(a+d)=4$, $2d=4$ $\quad\therefore d=2$

㉠에 대입하면 $a+4=10$ $\quad\therefore a=6$

$\therefore a_8=a+7d=6+7\cdot2=20$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4-a_2=4$에서

$a_4=a_2+2d$이므로

$a_4-a_2=2d=4$ $\quad\therefore d=2$

또, $a_3=a_2+d=10$이므로 $a_2=8$

$\therefore a_8=a_2+6d=8+12=20$

02 정답 5

등차중항의 성질에 의하여 $2k+5=\dfrac{(3k-1)+(5k-9)}{2}$

이므로 $2k+5=4k-5$

$2k=10$ $\quad\therefore k=5$

03 정답 15

$5+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+73=5+585+73$

$=663$

즉, 첫째항이 5, 마지막 항이 73, 항의 개수가 $n+2$인 등차수열의 합이 663이므로

$\dfrac{(n+2)(5+73)}{2}=663$, $n+2=17$

$\therefore n=15$

04 정답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공차를 d라 하면,

$S_n : S_{3n}=1:9$이므로 $S_{3n}=9S_n$

$\dfrac{3n\{2a_1+(3n-1)d\}}{2}=9\times\dfrac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}$

$\therefore d=2a_1$

따라서 $a_2=a_1+d=3a_1$이므로 $k=3$이다.

05 정답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d$, $a_{20}=a+19d$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{20}(-1)^nS_n&=-S_1+S_2-S_3+S_4-\cdots-S_{19}+S_{20}\\&=(S_2-S_1)+(S_4-S_3)+\cdots+(S_{20}-S_{19})\\&=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}\\&=\frac{10(a_2+a_{20})}{2}=\frac{10(a+d+a+19d)}{2}\\&=10(a+10d)=150\end{aligned}$$

$a+10d=15$

$\therefore a_7+a_{15}=(a+6d)+(a+14d)=2(a+10d)=30$

다른 풀이

$a_{11}=a+10d=15$이고

a_7, a_{11}, a_{15}가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_7+a_{15}=2a_{11}=30$

06 정답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_5\times a_6=ar^4\times ar^5=a^2r^9=2$

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{10}$

$=a\times ar\times ar^2\times\cdots\times ar^9$

$=a^{10}r^{45}=(a^2r^9)^5=2^5=32$

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$에서

$a_1\times a_{10}=a_2\times a_9=\cdots=a_5\times a_6=2$

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{10}=(a_5\times a_6)^5=2^5=32$

07 정답 2

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

a_1, $a_3=a_1+2d$, $a_7=a_1+6d$

이 순서대로 등비수열을 이루므로 등비중항의 성질에 의하여

$(a_3)^2=a_1a_7$에서 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+6d)$

$2d^2-a_1d=0$, $d(2d-a_1)=0$ $\quad\therefore a_1=2d(\because d\neq0)$

$\therefore r=\dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{2a_1}{a_1}=2$

08 정답 75

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\dfrac{a_1(1-r^5)}{1-r}=44$ ⋯ ㉠

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9+a_{10}$

$=\dfrac{a_1(1-r^{10})}{1-r}=\dfrac{a_1(1-r^5)(1+r^5)}{1-r}=1452$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $44(1+r^5)=1452$

$1+r^5=33$, $r^5=32$ $\quad\therefore r=2$

㉠에 대입하면 $31a_1=44$ $\quad\therefore a_1=\dfrac{44}{31}$

따라서 $p=31$, $q=44$이므로 $p+q=75$

09 정답 330

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=2n+1$이고 $a_nb_n=n(n+1)$

$$\begin{aligned}\therefore\sum_{n=1}^{10}(1-a_n)(1-b_n)&=\sum_{n=1}^{10}\{1-(a_n+b_n)+a_nb_n\}\\&=\sum_{n=1}^{10}\{1-(2n+1)+n(n+1)\}\\&=\sum_{n=1}^{10}(n^2-n)\\&=\sum_{n=1}^{10}n^2-\sum_{n=1}^{10}n\\&=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-\frac{10\cdot11}{2}\\&=330\end{aligned}$$

10 정답 508

등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2이므로 일반항 a_n은

$a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{7}(a_k+1)^2-\sum_{k=1}^{7}(a_k-1)^2 &=\sum_{k=1}^{7}\{(a_k+1)^2-(a_k-1)^2\}\\ &=\sum_{k=1}^{7}\{(a_k^2+2a_k+1)-(a_k^2-2a_k+1)\}\\ &=4\sum_{k=1}^{7}a_k=4\sum_{k=1}^{7}2^{k-1}\\ &=4\cdot\frac{1\cdot(2^7-1)}{2-1}=508\end{aligned}$$

11 정답 ⑤

조건 (가)에 의하여

$a_1+a_2+a_3+a_4=a_1-2a_1+4a_1-8a_1=-5a_1$

조건 (나)에 의하여

$a_5+a_6+a_7+a_8=-5a_1+2\cdot 4=-5a_1+8$

$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=(-5a_1+8)+2\cdot 4=-5a_1+16$

$a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}=(-5a_1+16)+2\cdot 4=-5a_1+24$

$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=(-5a_1+24)+2\cdot 4=-5a_1+32$

따라서 $\sum_{n=1}^{20}a_n=-25a_1+80=130$이므로 $a_1=-2$

12 정답 22

n행에는 $(2n-1)$개의 자연수가 있으므로

1행에서 n행까지 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

1행에서 10행까지 항의 개수는 $10^2=100$,

1행에서 11행까지 항의 개수는 $11^2=121$이다.

이때, 10행의 마지막 수는 $10^2=100$이고, 11행의 첫 번째 수는 101이므로 111은 $p=11$행의 왼쪽에서 $q=11$번째에 있다.

$\therefore p+q=11+11=22$

13 정답 10

[단계 1] (1, 1)

[단계 2] (2, 1)

[단계 3] (3, 1), (3, 3)

[단계 4] (4, 1), (4, 3)

[단계 5] (5, 1), (5, 3), (5, 5)

[단계 6] (6, 1), (6, 3), (6, 5)

⋮

$2k$단계까지 찍힌 점의 개수가

$(1+1)+(2+2)+(3+3)+\cdots+(k+k)$

$=2\times1+2\times2+2\times3+\cdots+2\times k$

$=2\times\frac{k(k+1)}{2}=k(k+1)$

이다. 이때, $k(k+1)\le 24$에서 $k=4$일 때, $4\times5=20$이므로 $2k=8$단계에서 20개의 점이 찍힌다. 24번째 찍히는 점은 9단계 4번째 점이므로 (9, 7)이다.

따라서 두 점 (1, 1)과 (9, 7)을 이은 선분의 길이는

$\sqrt{(9-1)^2+(7-1)^2}=10$

14 정답 105

조건 (가)에서 $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=n^2+n$이라 하면

$b_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}=2n(n\ge2)$

이때, $b_1=1^2+1=2$이므로 $b_n=2n(n\ge1)$ ⋯ ㉠

또, 조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-5\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k-5)b_k$이므로

$(a_n-5)b_n=\frac{n^2(n+1)^2}{2}-\frac{(n-1)^2n^2}{2}=2n^3(n\ge2)$

$(a_1-5)b_1=\frac{1^2\times2^2}{2}=2$이므로 $(a_n-5)b_n=2n^3(n\ge1)$

따라서 ㉠에 의하여 $a_n=n^2+5$이므로 $a_{10}=105$이다.

15 정답 ③

$a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=16$ ⋯ ㉠

$a_{12}=a+11d=43$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=10$, $d=3$

$\therefore a_{31}=a+30d=10+30\cdot3=100$

16 정답 ④

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 27, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

$\therefore a_9=27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8=\frac{1}{243}$

17 정답 481

홀수항은 첫째항이 $a_1=2$이고 공차가 3인 등차수열을 이루고, 짝수항은 첫째항이 $a_2=3$이고 공비가 2인 등비수열을 이룬다.

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k&=(a_1+a_3+\cdots+a_{15})+(a_2+a_4+\cdots+a_{14})\\&=\frac{8(2\cdot2+7\cdot3)}{2}+\frac{3(2^7-1)}{2-1}\\&=100+381=481\end{aligned}$$

18 정답 46

집합 $A_n=\{x|(x-n)(x-2n+1)\le0\}$에서

$(x-n)(x-2n+1)\le0$이므로 $n\le x\le 2n-1$

$\therefore A_n=\{x|n\le x\le 2n-1\}$

$25\in A_n$인 n의 값의 범위를 구하면 $n\le25\le2n-1$

즉, $n\le25$이고 $n\ge13$에서 $13\le n\le25$

$\therefore a_n=\begin{cases}-1 & (1\le n\le 12 \text{ 또는 } n\ge26)\\ 1 & (13\le n\le25)\end{cases}$

이때, $\sum_{k=1}^{m}a_k=-20$에서 $m\ge26$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}a_k&=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=13}^{25}a_k+\sum_{k=26}^{m}a_k\\&=(-1)\times12+1\times(25-13+1)+(-1)\times(m-26+1)\\&=-m+26=-20\end{aligned}$$

$\therefore m=46$

19 정답 ④

주어진 수열의 제 n 항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{n+2}{(n+1)^3-(n+1)}=\frac{n+2}{(n+1)\{(n+1)^2-1\}}$$
$$=\frac{n+2}{(n+1)n(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)$$
$$=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

20 정답 ②

$a_1=1$이고, $a_{n+1}=\frac{2n}{n+1}a_n$이므로

$$a_2=\frac{2\times1}{2}a_1$$
$$a_3=\frac{2\times2}{3}a_2$$
$$\times)\ a_4=\frac{2\times3}{4}a_3$$
$$a_4=\frac{2}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{4}a_1$$
$$=2a_1=2$$

21 정답 ③

$S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+3$에서 $S_{n+1}-6=\frac{1}{2}(S_n-6)$이므로

수열 $\{S_n-6\}$은 첫째항이 $S_1-6=a_1-6=4$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

즉, $S_n-6=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 $S_n=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+6$

$$\therefore a_7+a_8+a_9+a_{10}=S_{10}-S_6$$
$$=\left\{4\left(\frac{1}{2}\right)^9+6\right\}-\left\{4\left(\frac{1}{2}\right)^5+6\right\}$$
$$=4\cdot\frac{1-2^4}{2^9}=\frac{-15}{2^7}=-\frac{15}{128}$$

22 정답 ⑤

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$a_k=2^k+\frac{1}{k}$이므로

$$ka_{k+1}=2ka_k-\frac{k+2}{k+1}=2k\left(2^k+\frac{1}{k}\right)-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=\underbrace{k\cdot2^{k+1}+2}_{(가)}-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=k\cdot2^{k+1}+\frac{2k+2-k-2}{k+1}$$
$$=k\cdot2^{k+1}+\underbrace{\frac{k}{k+1}}_{(나)}$$
$$\therefore a_{k+1}=2^{k+1}+\frac{1}{k+1}$$

따라서 $f(k)=k\cdot2^{k+1}+2$, $g(k)=\frac{k}{k+1}$이므로

$f(3)\times g(4)=50\times\frac{4}{5}=40$

Ⅳ 지수와 로그

21 거듭제곱근

Ⅳ-1. 지수

문제편 **86~87p**

01 정답 ③

실수 a의 n제곱근 중 실수의 개수는

n \ a	$a>0$	$a<0$
홀수	$\boxed{1}$개	$\boxed{1}$개
짝수	$\boxed{2}$개	$\boxed{0}$개

-3의 제곱근 중 실수는 $\boxed{0}$개이므로 $f_2(-3)=\boxed{0}$

-2의 세제곱근 중 실수는 $\boxed{\sqrt[3]{-2}}$로 $\boxed{1}$개뿐이므로

$f_3(-2)=\boxed{1}$

5의 네제곱근 중 실수는 $\boxed{\sqrt[4]{5},\ -\sqrt[4]{5}}$로 $\boxed{2}$개이므로

$f_4(5)=\boxed{2}$

$\therefore\ f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)=0+1+2=\boxed{3}$

02 정답 **16**

$(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이므로

$\left\{(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}\right\}^{\boxed{n}}=\left\{(3^{\boxed{\frac{5}{3}}})^{\frac{1}{2}}\right\}^{\boxed{n}}=3^{\boxed{\frac{5}{6}}n}$ ⋯ ㉠

㉠이 자연수가 되기 위해서는 n이 $\boxed{6}$의 배수이면 된다.

따라서 $2\le n\le100$이므로 자연수 n의 개수는 $\boxed{16}$이다.

03 정답 **5**

방정식 $x^n=-2$가 실근을 가지기 위하여 $-2<0$이므로

n은 홀수이어야 한다.

따라서 10 이하의 자연수 n은 1, 3, 5, 7, 9로 5개이다.

04 정답 ⑤

(i) $a=5$일 때, 모든 실수 b에 대하여 $\sqrt[a]{b}$가 실수이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 7이다.

(ii) $a=4$, 6일 때, $b\ge0$일 때에만 $\sqrt[a]{b}$가 실수이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times4=8$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는 $7+8=15$이다.

05 정답 ③

$$\sqrt{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}}\times\sqrt[5]{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}=\frac{\sqrt{\sqrt[5]{a}}}{\sqrt{\sqrt[4]{a}}}\times\frac{\sqrt[4]{\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a}}}\times\frac{\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}}$$
$$=\frac{\sqrt[10]{a}}{\sqrt[8]{a}}\times\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[20]{a}}\times\frac{\sqrt[20]{a}}{\sqrt[10]{a}}=1$$

06 정답 ④

$A=\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125}$

$B=\sqrt[3]{10}=\sqrt[6]{10^2}=\sqrt[6]{100}$

$C=\sqrt[6]{111}$

따라서 $\sqrt[6]{100}<\sqrt[6]{111}<\sqrt[6]{125}$이므로 $B<C<A$이다.

07 정답 13

$$\frac{\sqrt{\boxed{\sqrt[3]{3}}}}{\sqrt{\boxed{\sqrt{9}}}}\times\frac{\sqrt[4]{\boxed{\sqrt{81}}}}{\sqrt[4]{\boxed{\sqrt[3]{3}}}}=\frac{\sqrt[\boxed{6}]{3}}{\sqrt[\boxed{4}]{9}}\times\frac{\sqrt[\boxed{8}]{81}}{\sqrt[\boxed{12}]{3}}=\frac{\sqrt[\boxed{6}]{3}}{\sqrt[\boxed{4}]{3^{\boxed{2}}}}\times\frac{\sqrt[\boxed{8}]{3^{\boxed{4}}}}{\sqrt[\boxed{12}]{3}}$$

$$=\frac{3^{\boxed{\frac{1}{6}}}}{3^{\boxed{\frac{1}{2}}}}\times\frac{3^{\boxed{\frac{1}{2}}}}{3^{\boxed{\frac{1}{12}}}}$$

$$=3^{\boxed{\frac{1}{6}}+\boxed{\frac{1}{2}}-\boxed{\frac{1}{2}}-\boxed{\frac{1}{12}}}=3^{\boxed{\frac{1}{12}}}$$

따라서 $p=\boxed{12}$, $q=\boxed{1}$이므로

$p+q=\boxed{13}$

08 정답 ②

$27^x=3^{\boxed{3x}}$ $\quad\therefore 3^{\boxed{3x}}=5$ ⋯ ㉠

$125^y=5^{\boxed{3y}}$ $\quad\therefore 5^{\boxed{3y}}=9=3^{\boxed{2}}$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(3^{\boxed{3x}})^{\boxed{3y}}=3^{\boxed{2}}$

$3^{\boxed{9xy}}=3^{\boxed{2}}$

$\boxed{9}\,xy=\boxed{2}$

$\therefore xy=\boxed{\frac{2}{9}}$

09 정답 ①

$(2^3)^{\frac{2}{3}}\times(3^2)^{\frac{1}{2}}=2^{3\times\frac{2}{3}}\times3^{2\times\frac{1}{2}}=2^2\times3=12$

10 정답 ②

$A=2^{\sqrt{3}}$, $B=\sqrt[3]{81}=3^{\frac{4}{3}}$, $C=\sqrt[4]{256}=2^2$에서

$2^{\sqrt{3}}<2^2$이므로 $A<C$

한편, $B=3^{\frac{4}{3}}=81^{\frac{1}{3}}$, $C=2^2=2^{\frac{6}{3}}=64^{\frac{1}{3}}$에서

$64^{\frac{1}{3}}<81^{\frac{1}{3}}$이므로 $C<B$

$\therefore A<C<B$

11 정답 ④

$$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2$$
$$=4^2-2=14$$
$$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^3-3\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$=4^3-3\cdot4=52$$
$$\therefore \frac{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}}{a+a^{-1}}=\frac{52}{14}=\frac{26}{7}$$

12 정답 ②

$a=27^{\frac{1}{x}}$, $b=27^{\frac{1}{y}}$, $c=27^{\frac{1}{z}}$이고,

$abc=27^{\frac{1}{x}}\times27^{\frac{1}{y}}\times27^{\frac{1}{z}}=27^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=9$이므로

$3^{3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=3^2$, $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=2$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$

13 정답 ②

$$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3=\left(2\sqrt[3]{2^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2\times2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}$$

이때, $\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로 $\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

14 정답 ④

$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{12}}=(3^4)^{\frac{1}{12}}=81^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{12}}=(5^3)^{\frac{1}{12}}=125^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}=7^{\frac{2}{12}}=(7^2)^{\frac{1}{12}}=49^{\frac{1}{12}}$

따라서 $49^{\frac{1}{12}}<81^{\frac{1}{12}}<125^{\frac{1}{12}}$이므로

$\sqrt[6]{7}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{5}$

15 정답 ④

$$f(x)=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{10}}{x^{-2}+x^{-3}+\cdots+x^{-12}}$$
$$=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{10}}{(1+x+x^2+\cdots+x^{10})x^{-12}}=\frac{1}{x^{-12}}=x^{12}$$

$\therefore f(\sqrt[4]{5})=(\sqrt[4]{5})^{12}=5^3=125$

16 정답 ①

$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{4}{n}}$이 자연수가 되려면

$-\frac{4}{n}$가 자연수가 되어야 한다.

따라서 정수 n의 값은 -1, -2, -4이므로 그 합은 -7이다.

17 정답 ③

ㄱ. $\sqrt{a}<\sqrt[3]{b}$에서 $a^{\frac{1}{2}}<b^{\frac{1}{3}}$

$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^6<\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^6$ $\quad\therefore a^3<b^2$ (참)

ㄴ. $\sqrt[3]{a^2}<\sqrt[4]{b}$에서 $a^{\frac{2}{3}}<b^{\frac{1}{4}}$

$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3<\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^3$ $\quad\therefore a^2<b^{\frac{3}{4}}<b$ (거짓)

ㄷ. $\sqrt[4]{a}<\sqrt[3]{b^2}$에서 $a^{\frac{1}{4}}<b^{\frac{2}{3}}$

$\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4<\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^4$ $\quad\therefore a<b^{\frac{8}{3}}<b^3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18 정답 ⑤

$$f(1)\times f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(20)$$
$$=5^{\frac{1}{1\cdot2}}\times5^{\frac{1}{2\cdot3}}\times5^{\frac{1}{3\cdot4}}\times\cdots\times5^{\frac{1}{20\cdot21}}$$
$$=5^{\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{20\cdot21}}$$
$$=5^{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)}$$
$$=5^{1-\frac{1}{21}}=5^{\frac{20}{21}}$$

$\therefore a=\frac{20}{21}$

19 정답 ④

$9^x+9^{1-x}=3^{2x}+3^{2(1-x)}$

$=(3^x+3^{1-x})^2-2\cdot3^x\cdot3^{1-x}$

$=(3^x+3^{1-x})^2-2\cdot3=10^2-6=94$

20 정답 27

$a^x=b^y=3^z$이므로

$a=3^{\frac{z}{x}}$, $b=3^{\frac{z}{y}}$ ($\because$ $a>0$, $b>0$)

$ab=3^{\frac{z}{x}}\cdot3^{\frac{z}{y}}=3^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}=3^{z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=3^{z\cdot\frac{3}{z}}=3^3=27$

다른 풀이

$a^x=b^y=3^z=k(k>0)$라 하면

$a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$, $3=k^{\frac{1}{z}}$

이때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{z}$이므로 $k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{3}{z}}$

$k^{\frac{1}{x}}\cdot k^{\frac{1}{y}}=\left(k^{\frac{1}{z}}\right)^3$

$\therefore$ $ab=3^3=27$

21 정답 ⑤

주어진 등식 $T_iV_i^{\gamma-1}=T_fV_f^{\gamma-1}$에 기체몰 열용량의 비 $\gamma=\frac{5}{3}$를

대입하여 정리하면 $T_iV_i^{\frac{2}{3}}=T_fV_f^{\frac{2}{3}}$

이때, $T_i=480$, $V_i=5$, $T_f=270$이므로

$480\times5^{\frac{2}{3}}=270\times V_f^{\frac{2}{3}}$

$16\times5^{\frac{2}{3}}=9\times V_f^{\frac{2}{3}}$

$V_f^{\frac{2}{3}}=\frac{16}{9}\times5^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{4}{3}\right)^2\times(5^{\frac{2}{3}})$

$\therefore$ $V_f=\left(\frac{4}{3}\right)^3\times(5^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{4}{3}\right)^3\times5=\frac{320}{27}$

22 정답 ②

$x^3=\left(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}\right)^3=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3+3\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=3+3^{-1}+3\cdot1\cdot x=3x+\frac{10}{3}$

$x^3-3x=\frac{10}{3}$

따라서 양변에 6을 곱하면 $6x^3-18x=20$이다.

23 정답 24

0이 아닌 세 실수 α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\beta=\alpha+\gamma$ ⋯ ㉠

$x^{\frac{1}{\alpha}}=y^{-\frac{1}{\beta}}=z^{\frac{2}{\gamma}}=k(k>0)$라 하면

$x=k^{\alpha}$, $y=k^{-\beta}$, $z^2=k^{\gamma}$이므로

$16xz^2+9y^2=16k^{\alpha}k^{\gamma}+9k^{-2\beta}=16k^{\alpha+\gamma}+9k^{-2\beta}$

$=16k^{2\beta}+9k^{-2\beta}$ ($\because$ ㉠)

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$16k^{2\beta}+9k^{-2\beta}\geq2\sqrt{16k^{2\beta}\times9k^{-2\beta}}$

$=2\sqrt{16\times9}$

$=24$ (단, 등호는 $16k^{2\beta}=9k^{-2\beta}$일 때 성립)

따라서 $16xz^2+9y^2\geq24$이므로 $16xz^2+9y^2$의 최솟값은 24이다.

24 정답 ③

원본의 글자 크기를 a, 축소 비율을 $r(0<r<1)$, n회째의 복사본의 글자 크기를 a_n이라 하면 $a_n=ar^n$

$a_5=ar^5=\frac{1}{2}a$ $\quad\therefore$ $r^5=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\frac{a_7}{a_5}=\frac{ar^7}{ar^5}=r^2=(r^5)^{\frac{2}{5}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$

따라서 $p=5$, $q=2$이므로 $pq=10$

23 로그

Ⅳ-2. 로그

문제편 **92~93p**

01 정답 18

$\log_{(x-3)}(-x^2+11x-24)$의 밑이 $x-3$이므로

$x-3>0$, $x-3\neq\boxed{1}$

$\therefore$ $x>3$, $x\neq\boxed{4}$ ⋯ ㉠

$\log_{(x-3)}(-x^2+11x-24)$의 진수가 $-x^2+11x-24$이므로

$-x^2+11x-24>0$, $x^2-11x+24<0$,

$(\boxed{x-3})(\boxed{x-8})<0$ $\quad\therefore$ $\boxed{3}<x<\boxed{8}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 정수 x의 값의 범위는 $\boxed{4}<x<\boxed{8}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x의 값은 $\boxed{5,\ 6,\ 7}$이므로

그 합은 $\boxed{18}$이다.

02 정답 ④

이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근이 $\log\alpha$, $\log\beta$이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=\boxed{3}$, $\log\alpha\cdot\log\beta=\boxed{\frac{1}{2}}$

따라서 밑이 10인 로그로 정리하면

$\log_{\alpha}\beta+\log_{\beta}\alpha$

$=\frac{\boxed{\log\beta}}{\log\alpha}+\frac{\log\alpha}{\boxed{\log\beta}}=\frac{(\boxed{\log\beta})^2+(\boxed{\log\alpha})^2}{\log\alpha\cdot\log\beta}$

$=\frac{(\boxed{\log\alpha+\log\beta})^2-2\boxed{\log\alpha\cdot\log\beta}}{\log\alpha\cdot\log\beta}$

$=\frac{\boxed{9}-2\cdot\boxed{\frac{1}{2}}}{\boxed{\frac{1}{2}}}=\boxed{16}$

03 정답 ②

$\log_a5=2$에서 $a^2=5$ ⋯ ㉠

$\log_58=b$에서 $5^b=8$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(a^2)^b=8$이고, $(a^b)^2=8$ $\quad\therefore$ $a^b=2\sqrt{2}$ ($\because$ $a>0$)

04 정답 ③

$x=\log_2(\sqrt{5}+2)$에서 $2^x=\sqrt{5}+2$

$\therefore$ $2^x-2^{-x}=2^x-\frac{1}{2^x}=\sqrt{5}+2-\frac{1}{\sqrt{5}+2}$

$=\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}-2)=4$

05 정답 ②

$$\log_5 30+\log_5\frac{1}{10}-\log_5 15=\log_5\frac{30}{10\times15}$$
$$=\log_5\frac{1}{5}=\log_5 5^{-1}$$
$$=-1$$

06 정답 12

밑이 10인 로그로 정리하면

$$\frac{\log_b 3}{\log_a 3}=2\text{에서 }\frac{\dfrac{\log 3}{\log b}}{\dfrac{\log 3}{\log a}}=\frac{\log a}{\log b}=2\text{이므로}$$

$\log a=2\log b$, $\log a=\log b^2$ $\quad\therefore a=b^2$ ⋯ ㉠

$$\frac{\log_b 81a}{\log_4 16}=3\text{에서 }\frac{\log_b 81a}{\log_4 4^2}=\frac{\log_b 81a}{2}=3\text{이므로}$$

$\log_b 81a=6$ $\quad\therefore b^6=81a$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^3=81a$, $a^3-81a=a(a+9)(a-9)=0$

이때, a는 자연수이므로 $a=9$

㉠에 의하여 자연수 b의 값은 $b=3$

$\therefore a+b=12$

다른 풀이

$\dfrac{\log_b 3}{\log_a 3}=\log_b a=2$이고,

$\dfrac{\log_b 81a}{\log_4 16}=\dfrac{\log_b 81+\log_b a}{\log_4 4^2}=3$에서

$\log_b 81+\log_b a=6$이므로

$\log_b 81=6-\log_b a=6-2=4$

$b^4=81$ $\quad\therefore b=3$

$\log_b a=\log_3 a=2$이므로 $a=3^2=9$

$\therefore a+b=12$

24 로그의 활용

Ⅳ-2. 로그

문제편 94~95p

07 정답 14

밑이 10인 로그로 정리하면

$$\frac{\log_{c^4} b}{\log_{a^2} b}=\frac{1}{4}\text{에서 }\frac{\dfrac{\log b}{\boxed{\log c^4}}}{\dfrac{\log b}{\boxed{\log a^2}}}=\frac{\boxed{2}\log a}{\boxed{4}\log c}=\frac{1}{4}\text{이므로}$$

$\boxed{2}\log a=\log c$ $\quad\therefore c=\boxed{a^2}$ ⋯ ㉠

$$\frac{\log_{b^3} c^2}{\log_{a^2} c^4}=\frac{1}{9}\text{에서 }\frac{\dfrac{\boxed{\log c^2}}{\boxed{\log b^3}}}{\dfrac{\boxed{\log c^4}}{\log a^2}}=\frac{\dfrac{2\log c}{3\log b}}{\dfrac{4\log c}{2\log a}}=\frac{\log a}{\boxed{3}\log b}=\frac{1}{9}\text{이므로}$$

$\boxed{3}\log a=\log b$ $\quad\therefore b=\boxed{a^3}$ ⋯ ㉡

이때, 세 자연수 a, b, c는 1보다 크고 10보다 작은 자연수이므로 ㉡에 의하여 $1<b=\boxed{a^3}<10$ $\quad\therefore a=\boxed{2}$

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $b=a^3=2^3=\boxed{8}$이고, $c=a^2=2^2=\boxed{4}$이므로 $a+b+c=2+8+4=\boxed{14}$

08 정답 31

$10<x<100$, 즉 $1<\log x<2$에서

$\boxed{\dfrac{1}{2}}<\dfrac{1}{2}\log x=\log\sqrt{x}<\boxed{1}$이므로

$\log\sqrt{x}$의 정수 부분은 $\boxed{0}$, 소수 부분은 $\boxed{\log\sqrt{x}}$이다.

또한, $\boxed{-2}<-\log x=\log\dfrac{1}{x}<\boxed{-1}$이므로

$\log\dfrac{1}{x}$의 정수 부분은 $\boxed{-2}$이고 소수 부분은 $\boxed{\log\dfrac{1}{x}+2}$이다.

이때, $\boxed{\log\sqrt{x}}=5\left(\boxed{\log\dfrac{1}{x}+2}\right)$에서

$\dfrac{1}{2}\log x=5\log\dfrac{1}{x}+10$, $\dfrac{11}{2}\log x=10$

$\therefore \log x=\boxed{\dfrac{20}{11}}$

따라서 $p=11$, $q=20$이므로 $p+q=\boxed{31}$

09 정답 ④

$(2^{\log_4 5})^{\log_5 6}=2^{\log_4 5\cdot\log_5 6}$에서

$\log_4 5\cdot\log_5 6=\log_4 6$이므로

$(2^{\log_4 5})^{\log_5 6}=2^{\log_4 6}=6^{\log_4 2}=6^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$

10 정답 ⑤

$27^x=125^y=225$에서

$x=\log_{27} 225$, $y=\log_{125} 225$이므로

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_{27} 225}+\frac{1}{\log_{125} 225}$$
$$=\log_{225} 27+\log_{225} 125$$
$$=\log_{225}(27\times125)=\log_{15^2}(3^3\times5^3)$$
$$=\log_{15^2} 15^3=\frac{3}{2}$$

11 정답 (1) 254 (2) −1.5952 (3) 0.254 (4) 1.2024

(1) $\log x=2.4048=2+0.4048$

$=\log 100+\log 2.54=\log 254$

$\therefore x=254$

(2) $x=\log 0.0254=\log 10^{-2}+\log 2.54$

$=-2+0.4048$

$=-1.5952$

(3) $\log x=-0.5952=-1+0.4048$

$=\log 10^{-1}+\log 2.54$

$=\log 0.254$

$\therefore x=0.254$

(4) $x=\log\sqrt{254}=\dfrac{1}{2}\log(100\times2.54)=\dfrac{1}{2}(\log 100\times\log 2.54)$

$=\dfrac{1}{2}(2+0.4048)=1.2024$

12 정답 100

$\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분이 같으면

$\log x^2-\log x=2\log x-\log x=\log x=(\text{정수})$

이때, $100\le x<1000$에서 $2\le\log x<3$이고 $\log x$가 정수이므로

$\log x=2$ $\quad\therefore x=100$

[23+24] 개념 실력확인

문제편 **96~97p**

13 정답 ②

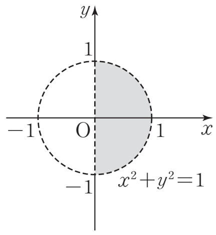
로그의 밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$ $\quad\therefore 0<x<1,\ x>1 \cdots$ ㉠

로그의 진수의 조건에서 $1-x^2-y^2>0$ $\quad\therefore x^2+y^2<1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 점 $(x,\ y)$가 나타내는 영역은 그림의 어두운 부분(경계선 제외)과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\pi\cdot1^2=\frac{\pi}{2}$



14 정답 20

$$\log_a 3\times\log_9 b=\log_a 3\times\frac{\log_a b}{\log_a 9}$$
$$=\log_a 3\times\frac{\log_a b}{2\log_a 3}$$
$$=\frac{1}{2}\log_a b=10$$

$\therefore \log_a b=20$

15 정답 ①

$ab=256$의 양변에 밑이 4인 로그를 취하면

$\log_4 ab=\log_4 256$

$\therefore \log_4 a+\log_4 b=4 \cdots$ ㉠

$\log_4 \frac{a^2}{b}=-1$에서 $2\log_4 a-\log_4 b=-1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\log_4 a=1$, $\log_4 b=3$

$\therefore \log_4 a+12\log_b 4=\log_4 a+\frac{12}{\log_4 b}=1+\frac{12}{3}=5$

16 정답 ③

로그의 밑의 조건에서 $a-3>0$, $a-3\neq1$

$\therefore a>3,\ a\neq4 \cdots$ ㉠

로그의 진수의 조건에서 $x^2+ax+2a>0$이므로

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot2a=a^2-8a<0$

$a(a-8)<0$ $\quad\therefore 0<a<8 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $3<a<8$, $a\neq4$

따라서 정수 a는 5, 6, 7로 3개이다.

17 정답 4

$\log_4 3\cdot\log_a 3a\cdot\log_{3a} 4a=\log_4 9$를 밑이 10인 로그로 정리하면

$$\frac{\log 3}{\log 4}\cdot\frac{\log 3a}{\log a}\cdot\frac{\log 4a}{\log 3a}=\frac{\log 9}{\log 4}$$

$$\frac{\log 4a}{\log a}=\frac{\log 9}{\log 3}=\frac{\log 3^2}{\log 3}=2$$

$\log 4a=2\log a=\log a^2$

따라서 $a^2=4a$이므로 $a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$

$\therefore a=4(\because a>0)$

18 정답 9

두 조건 (가), (나)를 밑이 3이 되도록 정리하면

$\log_a b=\frac{\log_3 b}{\log_3 a}=\frac{4}{3}$에서 $\log_3 b=\frac{4}{3}\log_3 a \cdots$ ㉠

$\log_{3^2} a+\log_3 b=11$에서 $\frac{1}{2}\log_3 a+\log_3 b=11 \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2}\log_3 a+\frac{4}{3}\log_3 a=11$이므로 $\frac{11}{6}\log_3 a=11$

$\log_3 a=6$ $\quad\therefore a=3^6$

㉠에 의하여 $\log_3 b=\frac{4}{3}\log_3 3^6=8$이므로 $b=3^8$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{3^8}{3^6}=3^2=9$

다른 풀이

조건 (가)에서 $\log_a b=\frac{4}{3}$에서 $b=a^{\frac{4}{3}} \cdots$ ㉠

조건 (나)를 밑이 9가 되도록 정리하면

$\log_9 a+\log_3 b=\log_9 a+\log_9 b^2=\log_9 ab^2=11$

$\therefore ab^2=9^{11} \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2=a^{\frac{11}{3}}=9^{11}$ $\quad\therefore a=9^3$

㉠에서 $b=a^{\frac{4}{3}}=(9^3)^{\frac{4}{3}}=9^4$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{9^4}{9^3}=9$

19 정답 105

수열 $\{a_n\}$이 첫째항과 공비가 모두 5인 등비수열이므로

$a_n=5\cdot5^{n-1}=5^n$

이때, $\log_{25} 5^n=\log_{5^2} 5^n=\frac{n}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{20}\log_{25} a_n=\sum_{n=1}^{20}\frac{n}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{20}n=\frac{1}{2}\cdot\frac{20\cdot21}{2}=105$$

20 정답 ②

상용로그 $\log N$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 n, $\alpha(0\le\alpha<1)$라 하면 이차방정식 $4x^2-23x+k=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\frac{23}{4} \cdots$ ㉠, $n\alpha=\frac{k}{4}$

$\therefore k=4n\alpha \cdots$ ㉡

이때, ㉠에서 $\frac{23}{4}=5.75=5+0.75$이므로

$n=5$, $\alpha=0.75$

따라서 이 값을 ㉡에 대입하면

$k=4n\alpha=4\times5\times0.75=15$

21 정답 ③

속력이 $v=450$(km/시)일 때, 태풍이 지속되는 동안 이동한 거리를 d(km)라 하면

관계식 $v=150\log_{10} d+300$에서

$450=150\log_{10} d+300$

$150=150\log_{10} d$

$\therefore d=10$(km)

22 정답 ④

$144=2^4\times3^2$이므로 144의 양의 약수를 작은 수부터

차례대로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{15}$라 하면

$a_1a_{15}=a_2a_{14}=\cdots=a_7a_9=144=(12)^2,\ a_8=12$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{15}\log_{12}a_n &=\log_{12}a_1+\log_{12}a_2+\log_{12}a_3+\cdots+\log_{12}a_{15}\\ &=\log_{12}a_1a_2\cdots a_{15}\\ &=\log_{12}(a_1a_{15})(a_2a_{14})\cdots(a_7a_9)(a_8)\\ &=\log_{12}(144)^7(12)\\ &=\log_{12}(12)^{15}=15\end{aligned}$$

23 정답 ②

$\log x$의 정수 부분이 3이므로

$\log x=3+\alpha\ (0\le\alpha<1)$

이때, $\log\sqrt[3]{x}=\log x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log x=1+\frac{1}{3}\alpha$이고,

$\log x$의 소수 부분과 $\log\sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\alpha+\frac{1}{3}\alpha=1$

$\therefore\ \alpha=\frac{3}{4}$

따라서 $\log\sqrt[3]{x}$의 소수 부분은 $\frac{1}{3}\alpha=\frac{1}{4}$이다.

24 정답 ④

$$\frac{V_A}{V_B}=\frac{4.86(1010-900)^{0.5}}{4.86(1010-960)^{0.5}}=\left(\frac{110}{50}\right)^{0.5}=\sqrt{2.2}$$

$$\begin{aligned}\log\frac{V_A}{V_B}&=\log\sqrt{2.2}\\ &=\frac{1}{2}(\log1.1+\log2)\\ &=0.1712=\log1.483\end{aligned}$$

$\therefore\ \frac{V_A}{V_B}=1.483$

Ⅳ 단원 [21~24] 개념 종합 문제

문제편 98~100p

01 정답 ⑤

세 집합 $A,\ B,\ C$에 대하여

$A=\{-3,\ 3\}$,

$B=\{-3\}$,

$C=\{-3,\ 3,\ 3i,\ -3i\}$

이므로 $(A\cup C)-(B\cap C)=\{3,\ 3i,\ -3i\}$이다.

따라서 구하는 모든 원소의 합은 3이다.

02 정답 ①

$$\begin{aligned}&(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})\\ &=(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2\times3}+\sqrt[3]{3^2})\\ &=(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3\\ &=\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[3]{3^3}\\ &=2+3=5\end{aligned}$$

03 정답 2

(주어진 식)

$$\begin{aligned}&=\left(\sqrt[10]{a}\times\frac{2}{\sqrt[6]{a}}\right)\div\left(\sqrt[15]{a}\times\frac{2}{\sqrt[6]{a}}\right)\times\left(\sqrt[15]{a}\times\frac{2}{\sqrt[10]{a}}\right)\\ &=\frac{2\sqrt[10]{a}}{\sqrt[6]{a}}\div\frac{2\sqrt[15]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\frac{2\sqrt[15]{a}}{\sqrt[10]{a}}\\ &=\frac{2\sqrt[10]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\frac{\sqrt[6]{a}}{2\sqrt[15]{a}}\times\frac{2\sqrt[15]{a}}{\sqrt[10]{a}}\\ &=2\end{aligned}$$

04 정답 ③

$$\left(\frac{3^{\sqrt{5}}}{3^2}\right)^{\sqrt{5}+2}=(3^{\sqrt{5}-2})^{\sqrt{5}+2}=3^{5-4}=3$$

05 정답 ③

$\sqrt[3]{27}\times\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^6}}=3\times\sqrt[6]{3^6}=9$

의 제곱근 중 양수인 것은

$a=\sqrt{9}=3$

$$\begin{aligned}&5^{\frac{3}{4}}\div3^{\frac{8}{3}}\times\left(5^{\frac{3}{2}}\times3^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &=5^{\frac{3}{4}}\times3^{-\frac{8}{3}}\times5^{-\frac{3}{4}}\times3^{-\frac{1}{3}}\\ &=3^{-3}\end{aligned}$$

의 세제곱근 중 실수인 것은

$b=\sqrt[3]{3^{-3}}=3^{-1}$

$\therefore\ ab=3\times3^{-1}=1$

06 정답 30

$a=3^{\frac{1}{6}},\ b=7^{\frac{1}{5}},\ c=11^{\frac{1}{2}}$에서

$(abc)^n=\left(3^{\frac{1}{6}}\cdot7^{\frac{1}{5}}\cdot11^{\frac{1}{2}}\right)^n$

이므로 주어진 식의 값이 자연수가 되려면 n은 6, 5, 2의 공배수이어야 한다.

따라서 최소의 자연수 n은 6, 5, 2의 최소공배수이므로 30이다.

07 정답 ⑤

$A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=10^{\frac{1}{6}}=(10^2)^{\frac{1}{12}}=100^{\frac{1}{12}}$

$B=\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}=(5^3)^{\frac{1}{12}}=125^{\frac{1}{12}}$

$C=\sqrt[4]{\sqrt[3]{90}}=90^{\frac{1}{12}}$

따라서 $90^{\frac{1}{12}}<100^{\frac{1}{12}}<125^{\frac{1}{12}}$이므로 $C<A<B$이다.

08 정답 14

$3^{-2a}\times\sqrt{7}=2^{a-\frac{1}{2}}$에서 $\frac{\sqrt{7}}{9^a}=\frac{2^a}{\sqrt{2}}$

따라서 $18^a=\sqrt{14}$이므로

$324^a=(18^2)^a=(18^a)^2=(\sqrt{14})^2=14$

09 정답 ③

$\left(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}\right)\left(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}\right)$

$x^{\frac{1}{6}}=X$, $y^{\frac{1}{6}}=Y$로 놓으면

(주어진 식)

$=(X-Y)(X+Y)(X^2-XY+Y^2)(X^2+XY+Y^2)$

$=(X+Y)(X^2-XY+Y^2)(X-Y)(X^2+XY+Y^2)$

$=(X^3+Y^3)(X^3-Y^3)=X^6-Y^6=x-y$

10 정답 ②

$80^x=2$에서 $2^{\frac{1}{x}}=80$ ⋯ ㉠

$\left(\frac{1}{10}\right)^y=4=2^2$에서 $2^{\frac{2}{y}}=\frac{1}{10}$ ⋯ ㉡

$a^z=8=2^3$에서 $2^{\frac{1}{z}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$ ⋯ ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면 $2^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}}=\frac{80\times\frac{1}{10}}{\sqrt[3]{a}}$

이때, $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=1$이므로 $2=\frac{8}{\sqrt[3]{a}}$ $\quad\therefore \sqrt[3]{a}=4$

$\therefore a=4^3=64$

11 정답 1

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-4$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4-2\cdot(-4)=12$

$\therefore \log_2(\log_4(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2))$

$=\log_2(\log_4(12-(-4)))$

$=\log_2(\log_4 16)=\log_2(\log_4 4^2)=\log_2 2=1$

12 정답 ①

나머지정리에 의하여 다항식 x^2+2x+3을

일차식 $x-\log_2 a$로 나눈 나머지는

$(\log_2 a)^2+2\log_2 a+3$ ⋯ ㉠

또, 일차식 $x-\log_2 2a$로 나눈 나머지는

$(\log_2 2a)^2+2\log_2 2a+3$

$=(\log_2 2+\log_2 a)^2+2(\log_2 2+\log_2 a)+3$

$=(\log_2 a+1)^2+2\log_2 a+5$ ⋯ ㉡

㉠=㉡이므로 $\log_2 a=t$라 하면

$t^2+2t+3=(t+1)^2+2t+5$에서 $2t=-3$

$t=\log_2 a=-\frac{3}{2}$ $\quad\therefore a=2^{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

13 정답 ④

$a^3b^7=1$의 양변에 밑이 a인 로그를 취하면 $\log_a a^3b^7=\log_a 1$이므로 로그의 성질을 이용하여 정리하면

$\log_a a^3+\log_a b^7=0$

$3+7\log_a b=0$ $\quad\therefore \log_a b=-\frac{3}{7}$

$\therefore \log_a a^7b^{14}=\log_a a^7+\log_a b^{14}=7+14\log_a b$

$=7+14\times\left(-\frac{3}{7}\right)$

$=7-6=1$

14 정답 ②

$\log_2 5=b$이고,

$\log_4 3=\log_{2^2} 3=\frac{1}{2}\log_2 3=a$이므로 $\log_2 3=2a$

$\therefore \log_{45} 405=\frac{\log_2 405}{\log_2 45}=\frac{\log_2(3^4\times5)}{\log_2(3^2\times5)}$

$=\frac{\log_2 3^4+\log_2 5}{\log_2 3^2+\log_2 5}$

$=\frac{4\log_2 3+\log_2 5}{2\log_2 3+\log_2 5}$

$=\frac{8a+b}{4a+b}$

15 정답 ②

$\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_4 x}+\frac{1}{\log_5 x}=\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_a x}$

에서

$\log_x 3+\log_x 4+\log_x 5=\log_x 3+\log_x a$

이때, 밑이 x로 같으므로

$\log_x(3\times4\times5)=\log_x(3a)$

$3a=60$

$\therefore a=20$

16 정답 21

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$라 하면

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=\log\frac{2\cdot3}{2}=\log 3$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\log\frac{n(n+1)}{2}$

$=\log\frac{n+2}{n}$ ⋯ ㉠

이때, ㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=\log 3$이므로

$a_n=\log\frac{n+2}{n}$ $(n\geq1)$

따라서 $a_{2k}=\log\frac{2k+2}{2k}=\log\frac{k+1}{k}=\log(k+1)-\log k$

이므로

$\sum_{k=1}^{20}a_{2k}=\sum_{k=1}^{20}\{\log(k+1)-\log k\}=\log 21=p$

$\therefore 10^p=21$

17 정답 ③

$\log_{a+b}c+\log_{a-b}c=2\log_{a+b}c\cdot\log_{a-b}c$에서 밑이 c가 되도록 정리하면

$$\frac{1}{\log_c(a+b)}+\frac{1}{\log_c(a-b)}=\frac{2}{\log_c(a+b)\cdot\log_c(a-b)}$$

양변에 $\log_c(a+b)\cdot\log_c(a-b)$를 곱하면

$\log_c(a-b)+\log_c(a+b)=2$

$\log_c(a-b)(a+b)=\log_c(a^2-b^2)=2$

로그의 정의에 의하여 $a^2-b^2=c^2$

$\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이다.

18 정답 ⑤

N^{10}은 76자리의 수이므로 $\log N^{10}$의 정수 부분은 75이다.

즉, $75\le\log N^{10}<76$이므로

$7.5\le\log N<7.6$

이때, $\log\frac{1}{N^4}=-4\log N$에서

$-30.4<-4\log N\le-30.0$이므로 $\log\frac{1}{N^4}=-31+0.\times\times\times$

따라서 $\frac{1}{N^4}$의 정수 부분은 -31이므로 소수점 아래 31번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore n=31$

19 정답 107

가용 대역폭이 B(Hz)로 일정하고, 수신 신호 전력이 1.2W일 때, 잡음 전력이 0.4W, a(W)인 채널 용량을 각각 C_1(bps), C_2(bps)라 하면

$C_1=B\log_2\left(1+\frac{1.2}{0.4}\right)=B\log_2 4=2B$

$C_2=B\log_2\left(1+\frac{1.2}{a}\right)$

이때, $C_2=3C_1$이므로 $B\log_2\left(1+\frac{1.2}{a}\right)=3\times 2B$에서

$\log_2\left(1+\frac{1.2}{a}\right)=6$

$1+\frac{1.2}{a}=2^6$

$\frac{1.2}{a}=63$

$\therefore a=\frac{1.2}{63}=\frac{2}{105}$

따라서 $p=105$, $q=2$이므로 $p+q=107$

세상에서 가장 인색함은 밝은 웃음을 아끼는 일이다.

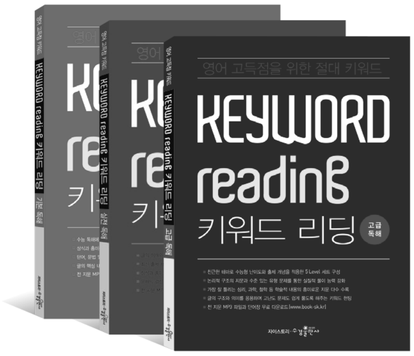
눈가의 근육을 조금만 움직여서 한두 번 미소 짓는 것만으로도 사람들에게
행복감을 안겨줄 수 있는데 그것조차 안하는 사람이 있다.

– 바덴 –

IV 종합

수능 독해
만점 절대
키 워 드

키워드 리딩



| 기본 독해·실전 독해·고급 독해 |

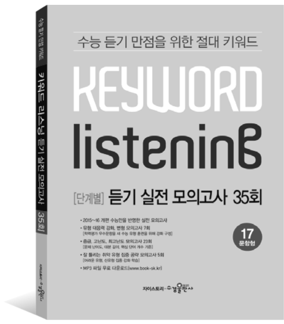
Keyword Reading

글쓴이의 의도와 생각을 쉽게 알아내는
수능 독해 훈련 프로그램

- **키워드 리딩 기본 독해 :** 중등 영어를 총정리하면서 고등 영어 교과서에 등장한 필수 구문을 확실히 잡아 독해 기본을 완성시키는 교재입니다.
- **키워드 리딩 실전 독해 :** 상식과 흥미를 만족시키는 고품위 지문으로 문제 유형별 해법을 단계적으로 익히며 논리적 추론력을 키울 수 있는 교재입니다.
- **키워드 리딩 고급 독해 :** 테마로 묶은 5단계의 실전 문제를 차례대로 풀어가면서 최종 목표인 수능 1등급에 도달하는 고난도 정복 교재입니다.

수능 듣기
완벽 대비
키 워 드

키워드 리스닝



| 키워드 리스닝 단계별 실전 모의고사 35회 |

Keyword Listening

수능 듣기의 단계별 실력 향상 프로그램

Step 1 신유형과 잘 틀리는 유형 정복을 위한
유형 강화 모의고사

Step 2 소재와 난이도 및 구성까지 예측한
출제 적중 모의고사

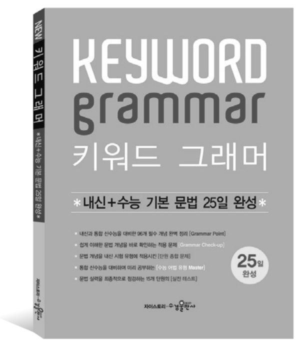
Step 3 긴 지문, 어려운 유형을 집중 훈련시키는
취약 유형 모의고사

Step 4 수능 듣기 만점 이상의 실력을 보장하는
최고난도 모의고사

- **키워드 리스닝 실전 모의고사 35회**는 2015, 2016학년도의 개정 수능을 반영한 17문항형의 실전 모의고사입니다. 단계별로 구성된 모의고사를 한 회씩 풀어나가면서 수능 듣기의 자신감을 쌓고, 만점 목표를 이룰 수 있는 교재입니다.

고등 필수
영문법 절대
키 워 드

키워드 그래머



| 키워드 그래머 |

Keyword Grammar

내신 및 수능 문법의 기본을 다지는 **25일 완성**
영문법 훈련 프로그램

Step 1 Grammar Point
고등 필수 영문법 개념 정리

Step 2 Grammar Check-up
확인 학습 및 이해도 점검

Step 3 **단원 종합 문제**
내신 및 수능 유형 문제로 실전 적용

Step 4 **단원별 실전 테스트**
실력 점검 및 총정리

- 키워드 그래머는 고등 필수 영문법의 기초를 다지는 기본 어법서입니다. 꼭 필요한 필수 어법만을 정리한 알찬 어법 개념 설명과 내신 및 수능 문법 문제에 대비할 수 있는 단계적 테스트를 겸한 체계적 구성의 문법 교재입니다.