정답 및 해설

Ⅰ. 다항식

Ⅱ. 방정식과 부등식

Ⅲ. 도형의 방정식

I. 다항식

1. 다항식의 연산

확인문제 pp.12~20

001 정답 $a^2+4ab+b^2$

$A-2(X-B)=3A$이면 $A-2X+2B=3A$이므로

$-2X=2A-2B$

$\therefore X=B-A$

$=(2a^2+ab-b^2)-(a^2-3ab-2b^2)$

$=2a^2+ab-b^2-a^2+3ab+2b^2$

$=a^2+4ab+b^2$

002 정답 $6x^3-3x^2-3x-2$

$4A-\{B-2(C-A)\}=4A-(B-2C+2A)$

$=4A-B+2C-2A$

$=2A-B+2C$

이므로

(주어진 식)$=2(x^3-2x^2+1)-(-x^2+3x+2)+2(2x^3-1)$

$=2x^3-4x^2+2+x^2-3x-2+4x^3-2$

$=(2+4)x^3+(-4+1)x^2-3x+(2-2-2)$

$=6x^3-3x^2-3x-2$

003 정답 $2x^4+2x^3+x^2+3x-3$

$AB+BC=AB+CB=(A+C)B$

$=\{(x^2-2x-1)+(x^2+2x+4)\}(x^2+x-1)$

$=(2x^2+3)(x^2+x-1)$

$=2x^2(x^2+x-1)+3(x^2+x-1)$

$=2x^4+2x^3-2x^2+3x^2+3x-3$

$=2x^4+2x^3+x^2+3x-3$

004 정답 (1) x^4-16
(2) $2x^4-3x^3-2x^2-5x-2$
(3) $a^4-2a^2b^2-3ab^3-2b^4$

(1) $(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)$

$=x(x^3+2x^2+4x+8)-2(x^3+2x^2+4x+8)$

$=x^4+2x^3+4x^2+8x-2x^3-4x^2-8x-16$

$=x^4-16$

(2) $(x^2-2x-1)(2x^2+x+2)$

$=x^2(2x^2+x+2)-2x(2x^2+x+2)-(2x^2+x+2)$

$=2x^4+x^3+2x^2-4x^3-2x^2-4x-2x^2-x-2$

$=2x^4-3x^3-2x^2-5x-2$

(3) $(a+b)(a-2b)(a^2+ab+b^2)$

$=(a^2-ab-2b^2)(a^2+ab+b^2)$

$=a^2(a^2+ab+b^2)-ab(a^2+ab+b^2)-2b^2(a^2+ab+b^2)$

$=a^4+a^3b+a^2b^2-a^3b-a^2b^2-ab^3-2a^2b^2-2ab^3-2b^4$

$=a^4-2a^2b^2-3ab^3-2b^4$

005 정답 5

3차항이 생기는 경우는 (2차항)×(1차항), (1차항)×(2차항)

이므로 x^3의 계수는

$3\times2+(-1)\times1=6-1=5$

006 정답 0

먼저 상수항을 구하면 $3\times b=6$에서 $b=2$

2차항이 생기는 경우는

(2차항)×(상수항), (1차항)×(1차항), (상수항)×(2차항)

이므로 x^2의 계수는

$(-2)\times b+(-4)\times a+3\times1=-2b-4a+3$

즉, $-2b-4a+3=-4-4a+3=7$에서 $a=-2$

$\therefore a+b=-2+2=0$

007 정답 (1) $4x^4+4x^3-7x^2-4x+3$
(2) $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$
(3) $x^4-2x^3-23x^2-12x+36$

(1) $2x^2+x=A$라 두면

(주어진 식)$=(A-1)(A-3)$

$=A^2-4A+3$

$=(2x^2+x)^2-4(2x^2+x)+3$

$=4x^4+4x^3+x^2-8x^2-4x+3$

$=4x^4+4x^3-7x^2-4x+3$

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$

$=\{(x^2+5x)+4\}\{(x^2+5x)+6\}$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$

$=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24$

$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

(3) $(x-1)(x+2)(x+3)(x-6)$

$=\{(x-1)(x-6)\}\{(x+2)(x+3)\}$

$=(x^2-7x+6)(x^2+5x+6)$

$x^2+6=A$라 두면

(주어진 식)$=(A-7x)(A+5x)$

$=A^2-2xA-35x^2$

$=(x^2+6)^2-2x(x^2+6)-35x^2$

$=x^4+12x^2+36-2x^3-12x-35x^2$

$=x^4-2x^3-23x^2-12x+36$

008 정답 (1) **4** (2) **4** (3) **0**

(1) $(x^2+2x+1)^2$의 전개식에서 x^2이 곱해지는 항은 모두 2차 이상의 식이 되므로 $(x^2+2x+1)^2$의 일차항의 계수는 x^2을 제외한 나머지 $(2x+1)^2$의 일차항의 계수와 같다.
따라서 $(2x+1)^2=4x^2+4x+1$에서 일차항의 계수는 4이다.

(2) $(x+1)^4=(x+1)^2(x+1)^2=(x^2+2x+1)(x^2+2x+1)$에서 일차항은
(일차항)×(상수항)과 (상수항)×(일차항)
에서 생기므로 일차항의 계수는
$2\times1+1\times2=4$

(3) $(x+2)(x^3+x-1)^2$의 전개식에서 x^3이 곱해지는 항은 모두 삼차 이상의 식이 되므로 x^2항의 계수는 x^3을 제외한 $(x+2)(x-1)^2$의 전개식의 x^2항의 계수와 같다.
$(x+2)(x-1)^2=(x+2)(x^2-2x+1)$에서 x^2항은 (일차항)×(일차항)과 (상수항)×(이차항)에서 생기므로 x^2항의 계수는 $1\times(-2)+2\times1=0$

009 정답 $\boldsymbol{x^3-5}$

$A=(x-2)(x^2+2x+4)+3$
$=x(x^2+2x+4)-2(x^2+2x+4)+3$
$=x^3+2x^2+4x-2x^2-4x-8+3$
$=x^3-5$

010 정답 $\boldsymbol{x^2-x-1}$

다항식 x^3+x+1을 다항식 A로 나눈 몫이 $x+1$, 나머지가 $3x+2$이므로 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여
$$x^3+x+1=A(x+1)+3x+2$$
좌변이 3차식이므로 다항식 A는 2차식이다.
여기서 $A=ax^2+bx+c$ (단, $a\neq0$)라 두면
$$x^3+x+1=(ax^2+bx+c)(x+1)+3x+2 \quad \cdots\cdots ㉠$$
양변의 x^3항의 계수를 비교하면 $x^3=ax^3$에서 $a=1$
또한 양변의 상수항을 비교하면 $1=c+2$에서 $c=-1$
$a=1$, $c=-1$을 ㉠에 대입하면
$$x^3+x+1=(x^2+bx-1)(x+1)+3x+2 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉡의 양변의 x^2항의 계수를 비교하면
$0=b+1$에서 $b=-1$ $\quad\therefore A=x^2-x-1$

011 정답 $\boldsymbol{3x+1}$

다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여
$$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+2x+3$$
양변에 $x+1$을 곱하면
$$(x+1)f(x)=(x+1)\{(x^2+x+1)Q(x)+2x+3\}$$
$$=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+(x+1)(2x+3)$$
$$=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+2x^2+5x+3$$
이므로 다항식 $(x+1)f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지는 $2x^2+5x+3$을 x^2+x+1로 나눈 나머지와 같다.
$$2x^2+5x+3=(x^2+x+1)\cdot2+3x+1$$
이므로 나머지는 $3x+1$이다.

012 정답 $\boldsymbol{-1}$

다항식 A를 x^2-x+1로 나눈 몫이 $x+1$이고 나머지가 $2x+1$이므로 다항식의 나눗셈의 원리에서
$A=(x^2-x+1)(x+1)+2x+1$
$=(x+1)(x^2-x+1)+2x+1$
이므로 다항식 A를 $x+1$로 나눈 나머지는 $2x+1$을 $x+1$로 나눈 나머지와 같다.
따라서 $2x+1=2(x+1)-1$이므로 나머지는 -1이다.

연습문제 I ······ pp.21~23

013 정답 (1) $\boldsymbol{3x^3+2yx^2-y^2x-2y^3}$
(2) $\boldsymbol{2y^3-y^2+x^2y+x^3}$

(1) 동류항끼리 정리한 후 x에 대하여 차수가 높은 항부터 쓰면
(주어진 식)$=x^3-2y^3+x^2y+2x^3-xy^2+x^2y$
$=3x^3-2y^3+2x^2y-xy^2$
$=3x^3+2yx^2-y^2x-2y^3$

(2) 동류항끼리 정리한 후 y에 대하여 차수가 높은 항부터 쓰면
(주어진 식)$=2x^3-x^2y+2y^3-y^2+2x^2y-x^3$
$=x^3+x^2y+2y^3-y^2$
$=2y^3-y^2+x^2y+x^3$

014 정답 (1) $\boldsymbol{4x^3+(5y^2-y^3)x^2+(6y^2-5)x-y+3}$
(2) $\boldsymbol{4x^3-5x+3-y+(5x^2+6x)y^2-x^2y^3}$

(1) $-x^2y^3$과 $5x^2y^2$은 x에 대한 이차항이므로 동류항이다.
정리를 하면 $(5y^2-y^3)x^2$
$6xy^2$과 $-5x$는 x에 대한 일차항이므로 동류항이다.
정리를 하면 $(6y^2-5)x$
따라서 x에 대하여 차수가 높은 항부터 쓰면
(주어진 식)$=4x^3+(5y^2-y^3)x^2+(6y^2-5)x-y+3$

(2) $5x^2y^2$과 $6xy^2$은 y에 대한 이차항이므로 동류항이다.
정리를 하면 $(5x^2+6x)y^2$
$4x^3$, $-5x$, 3은 y에 대한 상수항이므로 동류항이다.
정리를 하면
$4x^3-5x+3$
따라서 y에 대하여 차수가 낮은 항부터 쓰면
$4x^3-5x+3-y+(5x^2+6x)y^2-x^2y^3$

015 정답 (가) 덧셈에 대한 교환법칙 (나) 분배법칙
(다) 덧셈에 대한 결합법칙

016 정답 (1) $\mathbf{13x^2+5x-21}$
(2) $\mathbf{22x^2+5x-39}$

(1) $A+2B=(7x^2+5x-9)+2(3x^2-6)$
$=7x^2+5x-9+6x^2-12$
$=13x^2+5x-21$

(2) $3(A-B)-2(A-4B)$
$=3A-3B-2A+8B$
$=A+5B$
$=(7x^2+5x-9)+5(3x^2-6)$
$=7x^2+5x-9+15x^2-30$
$=22x^2+5x-39$

017 정답 (1) 전개한 식 : $\mathbf{x^4+4x^3+2x^2-5x-2}$,
$\mathbf{x^2}$의 계수 : 2
(2) 전개한 식 : $\mathbf{4x^3+16x^2+19x+6}$,
$\mathbf{x^2}$의 계수 : 16

(1) $(x^2+x-2)(x^2+3x+1)=x^4+4x^3+2x^2-5x-2$
이므로 x^2의 계수는 2이다.

(2) $(x+2)(2x+1)(2x+3)=(2x^2+5x+2)(2x+3)$
$=4x^3+16x^2+19x+6$
이므로 x^2의 계수는 16이다.

018 정답 (1) $\mathbf{x^4+4x^3+4x^2-1}$
(2) $\mathbf{x^4+4x^3-7x^2-22x+24}$

(1) $(x+1)^2(x^2+2x-1)$
$=(x^2+2x+1)(x^2+2x-1)$
$=(x^2+2x)^2-1$
$=x^4+4x^3+4x^2-1$

(2) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$
$=(x-1)(x+3)(x-2)(x+4)$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)$
$=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$
$=x^4+4x^3+4x^2-11x^2-22x+24$
$=x^4+4x^3-7x^2-22x+24$

019 정답 ④

$(2x^2+x-3)(x^2+x+k)$의 전개식에서 일차항은
$(x-3)(x+k)$의 전개식의 일차항과 같으므로
$kx-3x=(k-3)x$
이때 일차항의 계수가 5이므로
$k-3=5 \quad \therefore k=8$

020 정답 (1) 몫 : $\mathbf{2x}$, 나머지 : $\mathbf{-7x+1}$
(2) 몫 : $\mathbf{2x-3}$, 나머지 : $\mathbf{4x+3}$

(1) $A=2x^3-3x+1$, $B=x^2+2$

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^2+2\,\overline{)\,2x^3\quad -3x+1} \\ 2x^3\quad +4x \\ \hline -7x+1 \end{array}$$

$\therefore$ 몫 : $2x$, 나머지 : $-7x+1$

(2) $A=2x^3-9x^2+17x-3$, $B=x^2-3x+2$

$$\begin{array}{r} 2x-3 \\ x^2-3x+2\,\overline{)\,2x^3-9x^2+17x-3} \\ 2x^3-6x^2+\ 4x \\ \hline -3x^2+13x-3 \\ -3x^2+\ 9x-6 \\ \hline 4x+3 \end{array}$$

$\therefore$ 몫 : $2x-3$, 나머지 : $4x+3$

021 정답 $\mathbf{2x^3+x^2+3x}$

$P(x)=(x^2+1)(2x+1)+x-1$
$=2x^3+x^2+2x+1+x-1$
$=2x^3+x^2+3x$

022 정답 ④

$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ x^2-x-1\,\overline{)\,2x^3-3x^2+\ x+3} \\ 2x^3-2x^2-2x \\ \hline -x^2+3x+3 \\ -x^2+\ x+1 \\ \hline 2x+2 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=2x-1$, $R(x)=2x+2$이므로
$Q(2)+R(1)=(2\cdot2-1)+(2\cdot1+2)$
$=3+4=7$

023 정답 $\mathbf{-1}$

$$\begin{array}{r} x^2+x\qquad -k \\ x^2-2x+k\,\overline{)\,x^4-x^3-2x^2\qquad +\qquad 3x} \\ x^4-2x^3+kx^2 \qquad\qquad\qquad \\ \hline x^3-(2+k)x^2+\qquad 3x \\ x^3-\qquad 2x^2\qquad +kx \\ \hline -kx^2+(3-k)x \\ -kx^2+2kx\qquad -k^2 \\ \hline (3-3k)x+k^2 \end{array}$$

이때 나머지가 $6x+1$이므로

$$(3-3k)x+k^2=6x+1$$

에서 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$\begin{cases} 3-3k=6 \\ k^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ k=\pm1 \end{cases}$$

$\therefore k=-1$

024 정답 $2x^2+x$

$4x^3+5x-3=A(2x-1)+6x-3$이므로

$$4x^3-x=A(2x-1)$$

$$\therefore A=(4x^3-x)\div(2x-1)$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x^2+x \\ \hline 2x-1 & 4x^3 \qquad\quad -x \\ & 4x^3-2x^2 \\ \hline & \qquad 2x^2-x \\ & \qquad 2x^2-x \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\therefore A=2x^2+x$

025 정답 몫 : $x-2$, 나머지 : -2

$$\begin{aligned} A&=(x-3)(x^2+x+1)+5 \\ &=x^3+x^2+x-3x^2-3x-3+5 \\ &=x^3-2x^2-2x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline x^2-2 & x^3-2x^2-2x+2 \\ & x^3 \qquad\;\; -2x \\ \hline & \quad -2x^2 \qquad +2 \\ & \quad -2x^2 \qquad +4 \\ \hline & \qquad\qquad\quad -2 \end{array}$$

$\therefore$ 몫 : $x-2$, 나머지 : -2

026 정답 $-x+2$

다항식 A를 $(x^2+1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$$\begin{aligned} A&=(x^2+1)(x+2)Q(x)+3x^2-x+5 \\ &=(x^2+1)(x+2)Q(x)+3(x^2+1)-x+2 \\ &=(x^2+1)\{(x+2)Q(x)+3\}-x+2 \end{aligned}$$

따라서 다항식 A를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $-x+2$이다.

다른 풀이

$$A=\underbrace{(x^2+1)(x+2)Q(x)}_{㉠}+3x^2-x+5$$

㉠은 x^2+1로 나누어떨어지므로 다항식 A를 x^2+1로 나눈 나머지는 $3x^2-x+5$를 x^2+1로 나눈 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r|l} & \qquad 3 \\ \hline x^2+1 & 3x^2-x+5 \\ & 3x^2 \qquad +3 \\ \hline & \quad\; -x+2 \end{array}$$

따라서 다항식 A를 x^2+1로 나눈 나머지는 $-x+2$이다.

027 정답 $3x-5$

다항식 $f(x)$를 x^2-x+1로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 다항식의 나눗셈의 원리에서

$$f(x)=(x^2-x+1)Q(x)+2x+3$$

양변에 $x-1$을 곱하면

$$\begin{aligned} (x-1)f(x)&=(x-1)\{(x^2-x+1)Q(x)+2x+3\} \\ &=(x-1)(x^2-x+1)Q(x)+(x-1)(2x+3) \\ &=(x-1)(x^2-x+1)Q(x)+2x^2+x-3 \end{aligned}$$

이므로 다항식 $(x-1)f(x)$를 x^2-x+1로 나눈 나머지는 $2x^2+x-3$을 x^2-x+1로 나눈 나머지와 같다.

$$2x^2+x-3=(x^2-x+1)\cdot2+3x-5$$

따라서 $(x-1)f(x)$를 x^2-x+1로 나눈 나머지는 $3x-5$이다.

개념 보충

$$\begin{array}{r|l} & \qquad 2 \\ \hline x^2-x+1 & 2x^2+x\;\;-3 \\ & 2x^2-2x+2 \\ \hline & \qquad 3x-5 \end{array}$$

연습문제 Ⅱ p.24

028 정답 $x^4+6x^3-7x^2-36x+36$

$$\begin{aligned} &(x-1)(x-2)(x+3)(x+6) \\ &=\{(x-1)(x+6)\}\{(x-2)(x+3)\} \\ &=(x^2+5x-6)(x^2+x-6) \\ &=\{(x^2-6)+5x\}\{(x^2-6)+x\} \\ &=(x^2-6)^2+6x(x^2-6)+5x^2 \\ &=x^4-12x^2+36+6x^3-36x+5x^2 \\ &=x^4+6x^3-7x^2-36x+36 \end{aligned}$$

029 정답 -44

$$\begin{aligned} &(1-2x+3x^2-4x^3+5x^4)^2 \\ &=(5x^4-4x^3+3x^2-2x+1)(5x^4-4x^3+3x^2-2x+1) \\ &=\cdots+5x^4\cdot(-2x)-4x^3\cdot3x^2+3x^2\cdot(-4x^3)-2x\cdot5x^4+\cdots \\ &=\cdots-10x^5-12x^5-12x^5-10x^5+\cdots \\ &=\cdots-44x^5+\cdots \end{aligned}$$

따라서 x^5의 계수는 -44이다.

030 정답 1

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+(a-1) \\
\hline
x^2+x-1 & x^3+ax^2 \qquad\qquad\qquad +b \\
 & x^3+x^2- \qquad\quad x \\
\hline
 & (a-1)x^2+ \qquad x \quad +b \\
 & (a-1)x^2+(a-1)x-(a-1) \\
\hline
 & (2-a)x+b+a-1
\end{array}
$$

이때 나누어떨어지면 나머지가 0이므로

$(2-a)x+b+a-1=0$

$\therefore a=2,\ b+a-1=0$

따라서 $a=2$, $b=-1$이므로

$a+b=1$

031 정답 0 ········· 서술형

$1+x+x^2+x^3=t$로 놓으면

$(1+x+x^2+x^3)^4=t^4$ … ①

$$
\begin{aligned}
(1+x+x^2+x^3+x^4)^4&=(t+x^4)^4\\
&=\{(t+x^4)^2\}^2\\
&=(t^2+2tx^4+x^8)^2\\
&=\{t^2+(2tx^4+x^8)\}^2\\
&=t^4+2(2tx^4+x^8)t^2+(2tx^4+x^8)^2
\end{aligned}
$$
… ②

이때 $2(2tx^4+x^8)t^2$, $(2tx^4+x^8)^2$의 x의 차수는 모두 4차 이상이다.

따라서 두 다항식의 x^3의 계수는 모두 t^4의 전개식에서 결정되므로 x^3의 계수는 서로 같다, 즉 $A=B$이다.

$\therefore A-B=0$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$1+x+x^2+x^3$을 한 문자로 치환하기	30%
②	치환한 식을 전개하기	40%
③	$A-B$의 값을 구하기	30%

2. 곱셈 공식

확인문제 ········· pp.28~33

032 정답
(1) x^3+2x^2-5x-6
(2) $a^2+4b^2+9c^2-4ab+12bc-6ca$
(3) $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$
(4) $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$
(5) $8a^3-b^3$

(1) $$\begin{aligned}(x+1)(x-2)(x+3)&=\{(x+1)(x-2)\}(x+3)\\&=(x^2-x-2)(x+3)\\&=x^3-x^2-2x+3x^2-3x-6\\&=x^3+2x^2-5x-6\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}(a-2b-3c)^2&=a^2+(-2b)^2+(-3c)^2\\&\quad+2\cdot a\cdot(-2b)+2\cdot(-2b)\cdot(-3c)\\&\quad+2\cdot a\cdot(-3c)\\&=a^2+4b^2+9c^2-4ab+12bc-6ac\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(3x+2y)^3&=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2+(2y)^3\\&=27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}(3x-2y)^3&=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3\\&=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)&=(2a-b)\{(2a)^2+2a\cdot b+b^2\}\\&=(2a)^3-b^3=8a^3-b^3\end{aligned}$$

033 정답
(1) $4x^4-4x^3-11x^2+6x+9$
(2) $2a^3+6ab^2$
(3) $x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6$

(1) $$\begin{aligned}(2x^2-x-3)^2&=4x^4+x^2+9-4x^3+6x-12x^2\\&=4x^4-4x^3-11x^2+6x+9\end{aligned}$$

(2) $(a+b)^3+(a-b)^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$=2a^3+6ab^2$

(3) $$\begin{aligned}(x+y)^3(x-y)^3&=\{(x+y)(x-y)\}^3\\&=(x^2-y^2)^3\\&=(x^2)^3-3(x^2)^2y^2+3x^2(y^2)^2-(y^2)^3\\&=x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6\end{aligned}$$

034 정답
(1) a^2-b^2+2b-1
(2) x^4-5x^2+4

(1) $(a-b+1)(a+b-1)$

$=\{a-(b-1)\}\{a+(b-1)\}$

$=a^2-(b-1)^2$

$=a^2-b^2+2b-1$

(2) $(x+1)(x+2)(x^2-3x+2)$

$=(x^2+3x+2)(x^2-3x+2)$

$=(x^2+2+3x)(x^2+2-3x)$
$=(x^2+2)^2-(3x)^2$
$=x^4+4x^2+4-9x^2$
$=x^4-5x^2+4$

035 정답 $4ab$

$(a+b+c)(a+b-c)+(a-b+c)(-a+b+c)$
$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}+\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\}$
$=(a+b)^2-c^2+c^2-(a-b)^2$
$=(a+b)^2-(a-b)^2$
$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$
$=4ab$

036 정답 $a=2$, $b=2$

곱셈 공식 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$에서 a 대신 $2x$, b 대신 y를 대입하면
$(2x-y)\{(2x)^2+(2x)y+y^2\}=(2x)^3-y^3$이므로
$(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)=8x^3-y^3$
따라서 $(ax-y)(4x^2+bxy+y^2)=8x^3-y^3$과 비교하면
$a=2$, $b=2$

037 정답 (1) x^6-1 (2) x^6-y^6

(1) $(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$
$=(x^2-1)(x^4+x^2+1)=(x^2)^3-1^3$
$=x^6-1$
(2) $(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$=(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)\cdot(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$
$=(x^3)^2-(y^3)^2$
$=x^6-y^6$

038 정답 (1) 7 (2) ±35

(1) 먼저 ab의 값을 구하면
$a+b=3$, $a^3+b^3=9$이므로
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서
$9=3^3-3ab\cdot3$
$\therefore ab=2$
$\therefore a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=3^2-2=7$
(2) 먼저 $a+b$의 값을 구하면
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서
$13=(a+b)^2-2\cdot6$
$(a+b)^2=25$
$\therefore a+b=\pm5$
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)^3-18(a+b)$에서
(i) $a+b=5$일 때,
$a^3+b^3=5^3-18\cdot5=35$
(ii) $a+b=-5$일 때,
$a^3+b^3=(-5)^3-18\cdot(-5)=-35$
(i), (ii)에서 $a^3+b^3=\pm35$

039 정답 (1) 8 (2) 32

(1) $x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy=2^2+4=8$
(2) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=2^3+3\cdot4\cdot2$
$=32$

040 정답 $3\sqrt{6}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=4+2=6$
그런데 $x>0$이면 $x+\frac{1}{x}>0$이므로 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$
$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=6\sqrt{6}-3\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

041 정답 (1) 3 (2) 7

(1) $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면
$x-3+\frac{1}{x}=0$　　$\therefore x+\frac{1}{x}=3$
(2) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

개념 보충

$x^2-3x+1=0$에서 $x=0$이면 등식이 성립하지 않는다.
즉, $x\neq0$이므로 등식의 양변을 x로 나눌 수 있다.
따라서 양변을 x로 나누면
$x-3+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=3$
의 역수 형태의 식의 값이 나온다.

042 정답 (1) $\frac{a^2-b}{2}$ (2) a^2+b

(1) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로
$xy+yz+zx=\frac{1}{2}\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\}$
$=\frac{a^2-b}{2}$
(2) $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$
$=2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)$
$=2b+2\cdot\frac{a^2-b}{2}=a^2+b$

다른 풀이

(2) $x+y+z=a$에서

$$x+y=a-z,\ y+z=a-x,\ z+x=a-y$$

이므로

$$\begin{aligned}&(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\\&=(a-z)^2+(a-x)^2+(a-y)^2\\&=(a^2-2az+z^2)+(a^2-2ax+x^2)+(a^2-2ay+y^2)\\&=3a^2-2(x+y+z)a+(x^2+y^2+z^2)\\&=3a^2-2a^2+b\\&=a^2+b\end{aligned}$$

043 정답 (1) 10 (2) 26

$a+b+c=4$, $ab+bc+ca=3$에서

(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=4^2-2\times3\\&=10\end{aligned}$$

(2) $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

$$\begin{aligned}&=2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)\\&=2\cdot10+2\cdot3\\&=26\end{aligned}$$

연습문제 I .... pp.34~35

044 정답 (1) $\boldsymbol{x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3}$

(2) $\boldsymbol{8x^3+12x^2+6x+1}$

(3) $\boldsymbol{x^3-12x^2+48x-64}$

(4) $\boldsymbol{x^3-3x^2yz+3xy^2z^2-y^3z^3}$

(5) $\boldsymbol{8x^3+y^3}$

(6) $\boldsymbol{27x^3+64}$

(7) $\boldsymbol{x^3-8y^3}$

(8) $\boldsymbol{125x^3-8}$

(9) $\boldsymbol{x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6zx}$

(1) $\begin{aligned}[t](x+3y)^3&=x^3+3\cdot x^2\cdot3y+3\cdot x\cdot(3y)^2+(3y)^3\\&=x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3\end{aligned}$

(2) $\begin{aligned}[t](2x+1)^3&=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot1+3\cdot2x\cdot1^2+1^3\\&=8x^3+12x^2+6x+1\end{aligned}$

(3) $\begin{aligned}[t](x-4)^3&=x^3-3\cdot x^2\cdot4+3\cdot x\cdot4^2-4^3\\&=x^3-12x^2+48x-64\end{aligned}$

(4) $\begin{aligned}[t](x-yz)^3&=x^3-3\cdot x^2\cdot yz+3\cdot x\cdot(yz)^2-(yz)^3\\&=x^3-3x^2yz+3xy^2z^2-y^3z^3\end{aligned}$

(5) $\begin{aligned}[t](2x+y)(4x^2-2xy+y^2)&=(2x+y)\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\}\\&=(2x)^3+y^3\\&=8x^3+y^3\end{aligned}$

(6) $\begin{aligned}[t](3x+4)(9x^2-12x+16)&=(3x+4)\{(3x)^2-3x\cdot4+4^2\}\\&=(3x)^3+4^3\\&=27x^3+64\end{aligned}$

(7) $\begin{aligned}[t](x-2y)(x^2+2xy+4y^2)&=(x-2y)\{x^2+x\cdot2y+(2y)^2\}\\&=x^3-(2y)^3\\&=x^3-8y^3\end{aligned}$

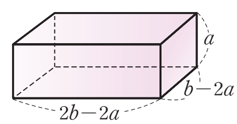
(8) $\begin{aligned}[t](5x-2)(25x^2+10x+4)&=(5x-2)\{(5x)^2+5x\cdot2+2^2\}\\&=(5x)^3-2^3\\&=125x^3-8\end{aligned}$

(9) $\begin{aligned}[t](x-2y-3z)^2&=x^2+(-2y)^2+(-3z)^2+2\cdot x\cdot(-2y)\\&\quad+2\cdot(-2y)\cdot(-3z)+2\cdot(-3z)\cdot x\\&=x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6zx\end{aligned}$

045 정답 $\boldsymbol{4a^3-6a^2b+2ab^2}$

만들어진 상자의 밑면인 직사각형의 가로, 세로의 길이가 각각 $2b-2a$, $b-2a$이고 높이는 a이므로

$$\begin{aligned}(\text{부피})&=a(2b-2a)(b-2a)\\&=a(2a-2b)(2a-b)\\&=a(4a^2-6ab+2b^2)\\&=4a^3-6a^2b+2ab^2\end{aligned}$$



046 정답 ⑤

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(a-b+c)+(a+b-c)(-a+b+c)\\&=\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}+\{b+(a-c)\}\{b-(a-c)\}\\&=(a+c)^2-b^2+b^2-(a-c)^2\\&=a^2+2ac+c^2-(a^2-2ac+c^2)\\&=4ac\end{aligned}$$

047 정답 -2

$$\begin{aligned}&(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)-(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)\\&=(3x+y)\{(3x)^2-3x\cdot y+y^2\}\\&\qquad\qquad-(x-3y)\{x^2+x\cdot3y+(3y)^2\}\\&=(3x)^3+y^3-\{x^3-(3y)^3\}\\&=27x^3+y^3-(x^3-27y^3)\\&=26x^3+28y^3\end{aligned}$$

따라서 $a=26$, $b=28$이므로

$$a-b=26-28=-2$$

048 정답 ④

① $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{2}$

② $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-4=5$

③ $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=3^3-3\cdot2\cdot3=9$

④ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$
$=5^2-2\cdot 2^2=17$

⑤ $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=3^2-4\cdot 2=1$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

다른 풀이

$x=2$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=2$이면 $x+y=3$, $xy=2$를 만족하므로 ①~⑤의 식에 대입하여서 그 값을 확인하여도 된다.

① $\frac{3}{2}$ ② 5 ③ 9 ④ 17 ⑤ 1

049 정답 **36**

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$에서

$10=3^2-xy \qquad \therefore xy=-1$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=3^3-3\cdot(-1)\cdot 3=36$

050 정답 **−36**

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서

$8=36+2xy \qquad \therefore xy=-14$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=6^3+3\cdot(-14)\cdot 6=-36$

051 정답 **12**

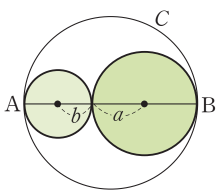
$x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$

$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1^2-(\sqrt{2})^2=-1$이므로

$x^3+x^2y+xy^2+y^3=x^2(x+y)+y^2(x+y)$
$=(x+y)(x^2+y^2)$
$=(x+y)\{(x+y)^2-2xy\}$
$=2\{2^2-2\cdot(-1)\}$
$=12$

052 정답 **$8\sqrt{2}\pi$**

내접하는 두 원의 반지름의 길이를 각각 a, $b(a>b)$라 하자.



이때 $a+b=\frac{1}{2}\overline{\text{AB}}=4$ ...... ㉠

두 원의 넓이의 합이 12π이므로

$(a^2+b^2)\pi=12\pi$

$\therefore a^2+b^2=12$ ...... ㉡

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에서

$16=12+2ab \qquad \therefore ab=2$

한편, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=4^2-4\cdot 2=8$에서

$a-b=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ($\because a>b$)

따라서 두 원의 넓이의 차는

$(a^2-b^2)\pi=(a+b)(a-b)\pi=4\cdot 2\sqrt{2}\pi=8\sqrt{2}\pi$

053 정답 **40**

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=12+4=16$이므로

$x+\frac{2}{x}=4$ ($\because x>0$)

$x^3+\frac{8}{x^3}=\left(x+\frac{2}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{2}{x}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)$
$=4^3-3\cdot 2\cdot 4$
$=40$

054 정답 ④

$x+\frac{1}{x}=-3$의 양변에 x를 곱하여 정리하면

$x^2+1=-3x \qquad \therefore x^2+3x=-1$

$(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+16$
$=(x-1)(x+4)\cdot(x+1)(x+2)+16$
$=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+16$
$=(-1-4)\times(-1+2)+16$
$=-5+16$
$=11$

연습문제 Ⅱ p.36

055 정답 **$x^8+x^4y^4+y^8$**

$(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$
$=x^4+x^2y^2+y^4$

이므로

$(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
$=(x^4+x^2y^2+y^4)(x^4-x^2y^2+y^4)$
$=(x^4+y^4)^2-(x^2y^2)^2$
$=x^8+x^4y^4+y^8$

056 정답 **$\frac{7}{4}$**

$x-y=\frac{1+\sqrt{2}}{2}-\frac{-1+\sqrt{2}}{2}=1$

$xy=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\times\frac{-1+\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=1^3+3\times\frac{1}{4}\times 1$
$=\frac{7}{4}$

057 정답 (1) -5 (2) 19

(1) $a-b=2$, $b-c=3$을 같은 변끼리 더하면

$a-c=5$ $\therefore c-a=-5$

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

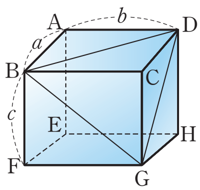
$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{2^2+3^2+(-5)^2\}=19$

058 정답 48



$\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AE}=c$로 놓으면

겉넓이가 94이므로

$2(ab+bc+ca)=94$

$\therefore ab+bc+ca=47$

$\triangle BGD$의 세 변의 길이의 제곱의 합이 100이면

$\overline{BD}^2=a^2+b^2$, $\overline{BG}^2=b^2+c^2$, $\overline{DG}^2=c^2+a^2$이므로

$\overline{BD}^2+\overline{BG}^2+\overline{DG}^2=2(a^2+b^2+c^2)=100$

$\therefore a^2+b^2+c^2=50$

이때 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이므로

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=50+94=144$

$\therefore a+b+c=12$ ($\because a+b+c>0$)

$\therefore 4(a+b+c)=48$

059 정답 $x^3-3xy^2+2y^3$ 서술형

전체 정육면체의 부피는 x^3 … ①

[그림 1]에서 뚫은 구멍은 밑면인 정사각형의 한 변의 길이가 y이고 높이가 x인 정사각기둥 모양이므로 그 부피는

xy^2 … ②

[그림 2]에서 세 방향으로 뚫은 구멍이 겹치는 부분은 모서리의 길이가 y인 정육면체이므로 그 부피는 y^3 … ③

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$x^3-3(xy^2-y^3)-y^3=x^3-3xy^2+2y^3$ … ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	전체 정육면체의 부피를 식으로 나타내기	20%
②	뚫은 구멍의 부피를 식으로 나타내기	20%
③	겹치는 부분의 부피를 식으로 나타내기	20%
④	구하는 입체도형의 부피를 식으로 나타내기	40%

3. 항등식

확인문제 pp.39~46

060 정답 $a=2$, $b=0$, $c=3$

주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수가 각각 같다.

양변에서 동류항의 계수를 비교하면

양변의 이차항에서 $a+b=2$ …… ㉠

양변의 일차항에서 $b+c=3$ …… ㉡

양변의 상수항에서 $c+a=5$ …… ㉢

(㉠+㉡+㉢)÷2를 하면 $a+b+c=5$ …… ㉣

㉣−㉡, ㉣−㉢, ㉣−㉠을 각각 구하면

$a=2$, $b=0$, $c=3$

061 정답 $a=1$, $b=1$, $c=-5$

양변의 최고차항(4차항)의 계수를 비교하면

$a=1$

양변의 상수항을 비교하면

$3c+12=-3$ $\therefore c=-5$

양변의 삼차항의 계수를 비교하면

$b-a=0$ $\therefore b=1$

062 정답 $a=-1$, $b=-1$, $c=1$

주어진 등식을 x, y에 대하여 정리하면

$(a+2b)x+(-2a+b)y+3a-2b=-3x+y-c$

이 등식은 x, y에 대한 항등식이므로

$a+2b=-3$ …… ㉠

$-2a+b=1$ …… ㉡

$3a-2b=-c$ …… ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

㉢에 $a=-1$, $b=-1$을 대입하면 $c=1$

063 정답 $x=8$, $y=9$

주어진 등식을 전개하여 k에 대하여 정리하면

$(x-y+1)k+2x-y-7=0$

위의 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하기 위해서는

$x-y+1=0$, $2x-y-7=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=8$, $y=9$

064 정답 $a=2$, $b=0$, $c=-1$

양변의 최고차항(이차항)의 계수를 비교하면

$a+c=1$ …… ㉠

양변의 일차항의 계수를 비교하면

$2b-c=1$ ⋯⋯ ㉡

양변의 상수항을 비교하면

$-2b-c=1$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $b=0$, $c=-1$

이 값을 ㉠에 대입하여 a의 값을 구하면

$a=2$

065 정답 $a=2$, $b=-2$, $c=2$

양변에 $x=1$을 대입하면

$2=-b \qquad \therefore b=-2$

양변에 $x=2$를 대입하면

$4=2c \qquad \therefore c=2$

양변에 $x=0$을 대입하면

$4=2a \qquad \therefore a=2$

066 정답 8

다항식 $x^4+2x^3+3x^2+mx+n$을 x^2+x+1로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하자.

주어진 다항식이 사차식이므로 $Q(x)$는 이차식이다.

$Q(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 두면

$x^4+2x^3+3x^2+mx+n$

$=(x^2+x+1)(ax^2+bx+c)+3x+2$

양변의 최고차항의 계수를 비교하면 $a=1$

양변의 삼차항의 계수를 비교하면

$a+b=2$에서 $b=1$

양변의 이차항의 계수를 비교하면

$a+b+c=3$에서 $c=1$

양변의 일차항의 계수를 비교하면

$m=b+c+3$에서 $m=5$

양변의 상수항을 비교하면

$n=c+2$에서 $n=3$

따라서 $m+n=8$이다.

067 정답 $a=-2$, $b=2$

다항식 x^3+ax+b를 $(x+1)(x-1)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$는 일차식이다.

$Q(x)=mx+n$ (단, m, n은 상수, $m\neq 0$)이라 두면

$x^3+ax+b=(x+1)(x-1)(mx+n)-x+2$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=-1+2 \qquad \therefore a+b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$-1-a+b=1+2 \qquad \therefore -a+b=4$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

068 정답 $a=4$, $b=-2$

$x-y=1$에서 $y=x-1$을 $ax+2by=4$에 대입하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$ax+2b(x-1)=4$

$(a+2b)x-2b-4=0$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a+2b=0$, $-2b-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$b=-2$, $a=4$

069 정답 2

$x+y=-2$에서 $y=-x-2$를

$ax^2+bxy+y^2+x+cy-2=0$

에 대입하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$ax^2+bx(-x-2)+(-x-2)^2+x+c(-x-2)-2=0$

$(a-b+1)x^2-(2b+c-5)x-2c+2=0$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$$\begin{cases} a-b+1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2b+c-5=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ -2c+2=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉢에서 $c=1$

이 값을 ㉡에 대입하면 $b=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $a=1$

$\therefore abc=2$

070 정답 (1) 0
(2) 1024 (또는 2^{10})
(3) 512 (또는 2^9)

$(x-1)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{10}x^{10}$

(1) 위의 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$ ⋯⋯ ㉠

(2) 위의 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-2)^{10}=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9+a_{10}$

$2^{10}=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9+a_{10}$ ⋯⋯ ㉡

$\therefore a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9+a_{10}=1024$

(3) ㉠+㉡을 하면

$2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})=2^{10}$

$a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}=2^9$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}=512$

071 정답 ㄷ, ㄹ, ㅁ

ㄱ. $x=0$ 또는 $x=2$일 때만 성립하므로 항등식이 아니다.

ㄴ. $x=1$일 때만 성립하므로 항등식이 아니다.

ㄷ. 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$$

이므로 x의 값에 관계없이 등식이 항상 성립한다.

ㄹ. 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$$\begin{aligned}(x-2)^2+2&=(x^2-4x+4)+2\\&=x^2-4x+6\end{aligned}$$

이므로 x의 값에 관계없이 등식이 항상 성립한다.

ㅁ. 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$\begin{aligned}&(x+1)^2-(x+1)=(x^2+2x+1)-(x+1)\\&=x^2+x\end{aligned}$$

주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$$x(x+1)=x^2+x$$

이므로 x의 값에 관계없이 등식이 항상 성립한다.

따라서 항등식은 ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

072 정답 $a=-2$, $b=2$

$-ax+1=2x-b+3$이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$-a=2,\ 1=-b+3$$

$$\therefore a=-2,\ b=2$$

073 정답 $a=-1$, $b=2$

주어진 등식의 좌변을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$$(a+b)x-3a+2b=x+7$$

양변의 계수를 비교하면

$$a+b=1,\ -3a+2b=7$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

다른 풀이

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=3$을 대입하면

$$5b=10 \qquad \therefore b=2$$

양변에 $x=-2$를 대입하면

$$-5a=5 \qquad \therefore a=-1$$

074 정답 2

$(a+b)x+ab+1=0$이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$a+b=0,\ ab=-1$$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2$$

075 정답 $a=2$, $b=1$, $c=3$

주어진 등식을 x, y에 대하여 정리하면

$$(2a-b)x+(a+2b)y+3=3x+4y+c$$

이 등식은 x, y에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$\begin{cases}2a-b=3 & \cdots\cdots ㉠\\ a+2b=4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

$$c=3$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$, $c=3$

076 정답 2

$\dfrac{ax^2-2x+1}{4x^2+bx-2}=k$ ($k\neq0$인 상수)라 하면

$$ax^2-2x+1=4kx^2+bkx-2k$$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$a=4k,\ -2=bk,\ 1=-2k$$

$$\therefore k=-\frac{1}{2},\ a=-2,\ b=4$$

$$\therefore a+b=(-2)+4=2$$

077 정답 1

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$1-a-b-2=0$$

$$\therefore a+b+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$16+8a+2b-2=0$$

$$\therefore 4a+b+7=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-2,\ b=1$$

따라서 주어진 등식은

$$x^4-2x^3+x-2=(x+1)(x-2)f(x)$$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$1-2+1-2=-2f(1)$$

$$-2=-2f(1)$$

$$\therefore f(1)=1$$

078 정답 5

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$2c=8 \qquad \therefore c=4$$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$-2b=0 \qquad \therefore b=0$$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$-a-b+c=3$$

$b=0$, $c=4$를 위의 식에 대입하면

$$-a+4=3 \qquad \therefore a=1$$

$$\therefore a+b+c=5$$

개념 보충

최고차항(이차항)의 계수를 비교하여 $a=1$임을 먼저 구할 수도 있다.

$$ax^2+(b+c)x-a-b+c=x^2+4x+3$$
$$a=1,\ b+c=4,\ -a-b+c=3$$

079 정답 1

다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$$3x^3-2x^2+2x+8=g(x)(3x+1)+10x+1$$

우변에 $g(x)(3x+1)$만 남도록 $10x+1$을 이항하면

$$3x^3-2x^2-8x+7=g(x)(3x+1)$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$$7=7g(2) \qquad \therefore g(2)=1$$

080 정답 (1) -5 (2) 3

(1) x^3+ax+b를 x^2-x-2로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여 다음 등식이 성립한다.

$$x^3+ax+b=(x^2-x-2)Q(x)$$
$$x^3+ax+b=(x-2)(x+1)Q(x)$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=2$를 대입하면

$$8+2a+b=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$$-1-a+b=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-2$

$$\therefore a+b=-3-2=-5$$

(2) x^3+ax+b를 x^2-x+2로 나눈 몫은 일차식이므로 그 몫을 $mx+n$ (m, n은 상수, $m\neq0$)이라 하면 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$$x^3+ax+b=(x^2-x+2)(mx+n)$$

양변의 삼차항의 계수를 비교하면 $1=m$

양변의 이차항의 계수를 비교하면 $0=n-m$

$$\therefore n=m=1$$

일차항의 계수를 비교하면

$$a=-n+2m=-1+2=1$$

상수항을 비교하면 $b=2n=2$

$$\therefore a+b=1+2=3$$

다른 풀이

$$\begin{array}{rllll}
 & x & +1 & & \\ \cline{2-5}
x^2-x+2\,\big) & x^3 & & +ax & +b \\
 & x^3 & -x^2 & +2x & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +(a-2)x & +b \\
 & & x^2 & -x & +2 \\ \cline{2-5}
 & & & (a-1)x & +(b-2)
\end{array}$$

$$a-1=0,\ b-2=0$$
$$\therefore a=1,\ b=2 \Rightarrow a+b=3$$

081 정답 1

x^3의 계수가 1이므로 x^3+ax+b를 x^2-x+1로 나눈 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$$x^3+ax+b=(x^2-x+1)(x+c)+x-1$$

우변을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$$x^3+ax+b=x^3+(c-1)x^2+(2-c)x+c-1$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$0=c-1,\ a=2-c,\ b=c-1$$
$$\therefore c=1,\ a=1,\ b=0$$
$$\therefore a^2+b^2=1$$

다른 풀이

$$\begin{array}{rllll}
 & x & +1 & & \\ \cline{2-5}
x^2-x+1\,\big) & x^3 & & +ax & +b \\
 & x^3 & -x^2 & +x & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +(a-1)x & +b \\
 & & x^2 & -x & +1 \\ \cline{2-5}
 & & & ax & +(b-1)
\end{array}$$

$$\therefore a=0,\ b=1 \Rightarrow a^2+b^2=1$$

082 정답 $a=6$, $b=-2$

$x+2y=3$에서 $x=-2y+3$이므로 주어진 등식에 대입하여 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(a+b)(-2y+3)+(a-b)y=12$$
$$(a+3b)y-3(a+b)+12=0$$

이 등식이 임의의 y에 대하여 성립하므로

즉 y에 대한 항등식이므로

$$a+3b=0,\ -3(a+b)+12=0$$
$$\therefore a=-3b,\ a+b=4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=6,\ b=-2$$

083 정답 4

$x+y=1$이므로 $y=1-x$를 $ax^2+bxy+cy^2=1$에 대입하여 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$ax^2+bx(1-x)+c(1-x)^2=1$$
$$(a-b+c)x^2+(b-2c)x+c=1$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$a-b+c=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠},\ b-2c=0 \quad \cdots\cdots \text{㉡},\ c=1$$

$c=1$을 ㉡에 대입하면 $b=2$

$b=2$, $c=1$을 ㉠에 대입하면 $a=1$

$$\therefore a+b+c=1+2+1=4$$

다른 풀이

$x=y=\frac{1}{2}$이면 $x+y=1$을 만족하므로 주어진 항등식에 대입하면

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+c\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$\frac{a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{c}{4}=1 \qquad \therefore a+b+c=4$$

084 정답 512(또는 2^9)

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=0$을 대입하면

$$0=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

양변에 $x=2$를 대입하면

$$2^{10}=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})=2^{10}$$

$$a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}=2^9$$

085 정답 1

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$(4-2-1)^5=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$$

$$\therefore a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=1$$

연습문제 Ⅱ p.50

086 정답 5

$(x^2-1)=(x+1)(x-1)$이므로 주어진 등식을 정리하면

$$x^4+ax+b=(x+1)(x-1)f(x)+2x+1$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$1-a+b=-1 \qquad \therefore -a+b=-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$$1+a+b=3 \qquad \therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$

이 값을 주어진 등식에 대입하면

$$x^4+2x=(x+1)(x-1)f(x)+2x+1$$

양변에 $x=2$를 대입하면

$$16+4=3f(2)+5$$

$$3f(2)=15$$

$$\therefore f(2)=5$$

087 정답 0

다항식 $2x^3+ax-8$을 x^2+4x+b로 나눈 몫은 일차식이므로

$Q(x)=mx+n$(m, n은 상수, $m\neq0$)이라 하면

다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$$2x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(mx+n)+3x+4$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변의 삼차항의 계수를 비교하면 $2=m$

양변의 이차항의 계수를 비교하면

$$0=n+4m \qquad \therefore n=-8$$

따라서 $Q(x)=2x-8$이므로

$$Q(4)=8-8=0$$

088 정답 $a=6$, $b=3$, $c=-2$

$x+y-z=0$ ······ ㉠, $2x-y+1=0$ ······ ㉡이라 하면

㉡에서 $y=2x+1$ ······ ㉢

이것을 ㉠에 대입하면

$$x+(2x+1)-z=0 \qquad \therefore z=3x+1 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣을 $ax^2+by^2+cz^2=1$에 대입하면

$$ax^2+b(2x+1)^2+c(3x+1)^2=1$$

위의 등식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(a+4b+9c)x^2+2(2b+3c)x+b+c=1$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$\begin{cases} a+4b+9c=0 & \cdots\cdots ㉤ \\ 2b+3c=0 & \cdots\cdots ㉥ \\ b+c=1 & \cdots\cdots ㉦ \end{cases}$$

㉥, ㉦을 연립하여 풀면 $b=3$, $c=-2$

이 값을 ㉤에 대입하면 $a=6$

$$\therefore a=6,\ b=3,\ c=-2$$

089 정답 2^{19} 서술형

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=1$을 대입하면

$$0=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20} \qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad \cdots ①$$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$$(-4)^{10}=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{20}$$

$$4^{10}=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{20}$$

$$2^{20}=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{20} \qquad \cdots\cdots ㉡ \qquad \cdots ②$$

㉠+㉡을 하면

$$2^{20}=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=2^{19} \qquad \cdots ③$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$의 값을 구하기	30 %
②	$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{20}$의 값을 구하기	30 %
③	$a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}$의 값을 구하기	40 %

4. 나머지정리와 인수정리

확인문제 pp.52~61

090 정답 -1

$f(x)=x^3+(a+1)x^2+(2a-3)x+6$이라 하면 나머지정리에 의하여 $f(2)=4$이므로

$f(2)=8+4(a+1)+2(2a-3)+6=4$

$8a+8=0$

$\therefore a=-1$

091 정답 -6

$f(x)=x^3+ax^2+bx-2$에서 나머지정리에 의하여

$f(1)=1+a+b-2=3$

$\therefore a+b=4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(-1)=-1+a-b-2=-3$

$\therefore a-b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=2$

즉, $f(x)=x^3+2x^2+2x-2$이므로 $f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 나머지정리에 의하여 구하면

$f(-2)=-8+8-4-2=-6$

092 정답 $2x-3$

나머지정리에 의하여 $f(-1)=-5,\ f(2)=1$이다.

$f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$f(-1)=-a+b=-5$

$f(2)=2a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-3$

따라서 구하는 나머지는

$2x-3$

093 정답 $4x+7$

나머지정리에 의하여 $f(-1)=3,\ f(-2)=-1$이다.

다항식 $f(x)$를 x^2+3x+2, 즉 $(x+1)(x+2)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)+ax+b$

$f(-1)=-a+b=3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(-2)=-2a+b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=7$

따라서 구하는 나머지는

$4x+7$

094 정답 5

$f(x+1)-x$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2이므로 몫을 $Q(x)$라 두면 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$f(x+1)-x=(x-1)Q(x)+2$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(2)-1=2 \qquad \therefore f(2)=3$

이때 $2f(x)-1$을 $x-2$로 나눈 나머지를 R라 두면 나머지정리에 의하여 $2f(x)-1$에 $x=2$를 대입한 식의 값과 같다.

$\therefore R=2f(2)-1=2\cdot3-1=5$

095 정답 (1) 9 (2) 3 (3) 9

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 3이면 나머지정리에 의하여 $f(2)=3$이므로

(1) $(x+1)f(x)=g(x)$라 두면 $g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$g(2)=(2+1)f(2)$

$=3f(2)=3\times3=9$

(2) $f(x^2-2)=h(x)$라 두면 $h(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$h(2)=f(2^2-2)=f(2)=3$

(3) $(2x-1)f(3x-4)=k(x)$라 두면 $k(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$k(2)=(2\times2-1)f(3\times2-4)$

$=3f(2)=3\times3=9$

096 정답 -1

주어진 다항식을 x^2-1로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3-x^2+ax+b=(x^2-1)Q(x)$

$=(x+1)(x-1)Q(x)$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=1$을 대입하면

$1-1+a+b=0$에서 $a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-1-a+b=0$에서 $a-b=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=1$

$\therefore ab=-1$

097 정답 8

$f(x+3)$이 $x+2$로 나누어떨어지면

$f(-2+3)=0$, 즉 $f(1)=0$이므로

$f(1)=1-5+a-4=0$에서

$a=8$

개념 보충

조립제법의 원리

삼차다항식 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$를 일차식 $x-\alpha$로 나눈 몫과 나머지를 구해보자.

몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

이때 몫은 이차식이고 나머지는 상수이므로

$Q(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$이라 두면

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=(x-\alpha)(b_2x^2+b_1x+b_0)+R$$

양변의 각 항의 계수를 비교하면

삼차항의 계수 : $a_3=b_2$ ⇨ $b_2=a_3$

이차항의 계수 : $a_2=b_1-\alpha b_2$ ⇨ $b_1=a_2+\alpha b_2$

일차항의 계수 : $a_1=b_0-\alpha b_1$ ⇨ $b_0=a_1+\alpha b_1$

상수항 : $a_0=R-\alpha b_0$ ⇨ $R=a_0+\alpha b_0$

따라서 몫 $Q(x)$의 계수와 나머지 R를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{array}{c|cccc}
\alpha & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & \alpha b_2 & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\
\hline
 & b_2 & b_1 & b_0 & \boxed{R} \\
 & \| & \| & \| & \| \\
 & a_3 & a_2+\alpha b_2 & a_1+\alpha b_1 & a_0+\alpha b_0
\end{array}$$

098 정답 4

조립제법을 이용하여 x^3-5x+2를 $x-2$로 나누면

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & 0 & -5 & 2 \\
 & & 2 & 4 & -2 \\
\hline
 & 1 & 2 & -1 & \boxed{0}
\end{array}$$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=0$이므로

$$3a+2b+c=6-2+0=4$$

099 정답 160

$p=-2$이므로 $c=1\times p$, $d=(-4)\times p$에서

$$c=-2,\ d=8$$

한편, $a+c=0$에서 $a=-c=2$

$b+d=3$에서 $b=3-d=-5$

$$\therefore abcd=2\cdot(-5)\cdot(-2)\cdot 8=160$$

100 정답 (1) 몫 : $2x^2-4x+10$, 나머지 : -7

(2) 몫 : x^2-2x+5, 나머지 : -7

(1) 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc}
-\frac{1}{2} & 2 & -3 & 8 & -2 \\
 & & -1 & 2 & -5 \\
\hline
 & 2 & -4 & 10 & \boxed{-7}
\end{array}$$

이므로 다항식 $2x^3-3x^2+8x-2$를 $x+\frac{1}{2}$로 나눌 때의 몫은 $2x^2-4x+10$이고 나머지는 -7이다.

(2) $2x^3-3x^2+8x-2=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+10)-7$

$$=(2x+1)(x^2-2x+5)-7$$

따라서 $2x^3-3x^2+8x-2$를 $2x+1$로 나눌 때의 몫은 x^2-2x+5이고 나머지는 -7이다.

101 정답 $a=1$, $b=4$, $c=6$

$x^3-2x^2+5x+2=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$에서

조립제법을 연이어 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & -2 & 5 & 2 \\
 & & 1 & -1 & 4 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 4 & \boxed{6}\leftarrow c \\
 & & 1 & 0 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & \boxed{4}\leftarrow b & \\
 & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{1}\leftarrow a & &
\end{array}$$

$\therefore a=1$, $b=4$, $c=6$

102 정답 $a=1$, $b=6$, $c=12$, $d=8$

$x^3=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$에서

조립제법을 연이어 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 2 & 4 & 8 \\
\hline
2 & 1 & 2 & 4 & \boxed{8}\leftarrow d \\
 & & 2 & 8 & \\
\hline
2 & 1 & 4 & \boxed{12}\leftarrow c & \\
 & & 2 & & \\
\hline
 & a\rightarrow 1 & \boxed{6}\leftarrow b & &
\end{array}$$

$\therefore d=8$, $c=12$, $b=6$, $a=1$

개념 보충

x^3을 $x-2$에 관한 내림차순으로 정리하면 다음과 같다.

$$x^3=(x-2)^3+6(x-2)^2+12(x-2)+8$$

103 정답 4

$f(x)=2x^3-ax^2+3x-2$라 하면

나머지정리에 의하여

$f(2)=16-4a+6-2=4$

$4a=16$

$\therefore a=4$

104 정답 -1

나머지정리에 의하여

$P(-1)=-1+2-k+3=5$이므로

$k=-1$

105 정답 -1

나머지정리에 의하여 두 다항식

$f(x)=x^3+ax+2,\ g(x)=x^2+3a-5$

를 $x+2$로 나눌 때의 나머지는 각각 $f(-2)$, $g(-2)$의 값과 같으므로

$f(-2)=g(-2)$

$-8-2a+2=4+3a-5$

$-5=5a$

$\therefore a=-1$

106 정답 -9

$P(x)=2x^3+ax^2+bx-4$라 하면 나머지정리에 의하여

$P(1)=2+a+b-4=-5$

$\therefore a+b=-3$ …… ㉠

$P(2)=16+4a+2b-4=0$

$\therefore 2a+b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=0$

$P(x)=2x^3-3x^2-4$이므로 $x+1$로 나눈 나머지는

$P(-1)=-9$이다.

107 정답 -10

$f(x)=(x-2)Q(x)+5$

한편, 몫 $Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$Q(x)=(x+3)Q'(x)+3$이므로

$f(x)=(x-2)Q(x)+5$

$=(x-2)\{(x+3)Q'(x)+3\}+5$

따라서 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는

$f(-3)=(-3-2)\times 3+5$

$=-10$

108 정답 100

다항식 $f(x)$를 $x-2$, $x-3$으로 나눈 나머지가 각각 3, 4이면 나머지정리에 의하여

$f(2)=3,\ f(3)=4$ …… ㉠

한편, 다항식 $f(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

이 식은 x에 대한 항등식이고 ㉠에서

$f(2)=2a+b=3$ …… ㉡

$f(3)=3a+b=4$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1$

따라서 $R(x)=x+1$이므로

$R(99)=100$

109 정답 -5

$f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$f(x)=(x^2-4)Q(x)+2x+5$

이때 $f(-2)=0\cdot Q(-2)+2\cdot(-2)+5=1$이므로

$(x-3)f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는

$-5\cdot f(-2)=-5\cdot 1=-5$

110 정답 3

다항식 $f(x)$를 x^2+x-2로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$f(x)=(x^2+x-2)Q(x)+2x+1$

$=(x+2)(x-1)Q(x)+2x+1$ …… ㉠

㉠에서 x 대신 $2x-3$을 대입하면

$f(2x-3)=(2x-1)(2x-4)Q(2x-3)+4x-5$

$=2(x-2)(2x-1)Q(2x-3)+4(x-2)+3$

$=(x-2)\{2(2x-1)Q(2x-3)+4\}+3$

따라서 $f(2x-3)$을 $x-2$로 나눈 나머지는 3이다.

다른 풀이

다항식 $f(2x-3)$을 $x-2$로 나눈 나머지를 R라 하면

나머지정리에 의하여

$f(2\cdot 2-3)=R$

즉, $f(1)=R$

한편, 다항식 $f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$f(x)=(x^2+x-2)Q(x)+2x+1$

따라서 양변에 $x=1$을 대입하면

$R=f(1)=0\cdot Q(1)+3=3$

111 정답 15

다항식 $f(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지가 5이므로

나머지정리에 의하여 $f(4)=5$

이때, $(x-1)f(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지를 R라 하면

$$R=3f(4)=3\times 5=15$$

112 정답 14

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이므로

다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$$f(x)=(x-2)Q(x)+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또한 몫 $Q(x)$를 $x+2$로 나눈 몫을 $Q'(x)$라 하면

$$Q(x)=(x+2)Q'(x)+2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-2)\{(x+2)Q'(x)+2\}+1 \\ &=(x-2)(x+2)Q'(x)+2(x-2)+1 \\ &=(x-2)(x+2)Q'(x)+2x-3 \end{aligned}$$

$$\therefore f(-2)=2\cdot(-2)-3=-7$$

따라서 $xf(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는

$$-2f(-2)=(-2)\cdot(-7)=14$$

113 정답 7

다항식 $P(x)$를 $2x^2+5x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x+7$이므로 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$$\begin{aligned} P(x)&=(2x^2+5x-3)Q(x)+2x+7 \\ &=(x+3)(2x-1)Q(x)+2x+7 \qquad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

한편, $(x^2-2)P(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 R라 하면

나머지정리에 의하여

$$R=7\times P(-3)$$

㉠에서 $P(-3)=1$이므로

$$R=7\times 1=7$$

114 정답 풀이 참조

(1)

$$\begin{array}{r|rrrr} \boxed{2} & 1 & -3 & 4 & -5 \\ & & \boxed{2} & -2 & \boxed{4} \\ \hline & 1 & \boxed{-1} & 2 & \boxed{-1} \end{array}$$

몫 : $\boxed{x^2-x+2}$, 나머지 : $\boxed{-1}$

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} \boxed{3} & 2 & \boxed{0} & \boxed{-7} & -12 \\ & & \boxed{6} & \boxed{18} & \boxed{33} \\ \hline & 2 & \boxed{6} & 11 & \boxed{21} \end{array}$$

몫 : $\boxed{2x^2+6x+11}$, 나머지 : $\boxed{21}$

115 정답 (1) 몫 : $3x^2+4x+2$, 나머지 : 1

(2) 몫 : x^2-x-2, 나머지 : 1

(1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -2 & -6 & -3 \\ & & 6 & 8 & 4 \\ \hline & 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

몫 : $3x^2+4x+2$, 나머지 : 1

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & 0 & 5 \\ & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}$$

몫 : x^2-x-2, 나머지 : 1

116 정답 4

$x^3-2x^2+3x+4=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$에서

조립제법을 연이어 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ & & 1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 & 6 \leftarrow d \\ & & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2 \leftarrow c & \\ & & 1 & & \\ \hline a \rightarrow & 1 & 1 \leftarrow b & & \end{array}$$

$\therefore a=1,\ b=1,\ c=2,\ d=6$

$\therefore a-b-c+d=1-1-2+6=4$

연습문제 Ⅱ p.65

117 정답 $-x+2$

다항식 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$이므로

$f(x)=(x+3)(x-1)Q_1(x)$에서 $f(1)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

다항식 $f(x)-2$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)-2=(x+1)Q_2(x)$에서 $f(-1)-2=0$

$\therefore f(-1)=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

여기서 $f(x)+1$을 x^2-1로 나눈 몫을 $Q_3(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 $x^2-1=(x+1)(x-1)$이므로

$$f(x)+1=(x+1)(x-1)Q_3(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots ㉢$$

식 ㉢은 x에 대한 항등식이므로 $x=-1$, $x=1$을 대입하면

$$f(-1)+1=-a+b$$

㉡에서 $-a+b=3$

$$f(1)+1=a+b$$

㉠에서 $a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

따라서 구하는 나머지는 $-x+2$이다.

118 정답 ④

다항식 $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나눌 때의 몫은 $Q(x)$이고 나머지는 4이므로 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+4$$

$$\begin{aligned} xf(x)&=x\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+4x \\ &=(2x+1)\cdot\frac{1}{2}xQ(x)+2(2x+1)-2 \\ &=(2x+1)\cdot\left\{\frac{1}{2}xQ(x)+2\right\}-2 \end{aligned}$$

$\therefore$ 몫 : $\frac{1}{2}xQ(x)+2$, 나머지 : -2

119 정답 ④

$P(x)$를 $x(x-2)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$P(x)=x(x-2)Q(x)+ax+b$

$x=0$을 대입하면 $P(0)=b$ …… ㉠

$x=2$를 대입하면 $P(2)=2a+b$ …… ㉡

$P(x)=P(2-x)$에 $x=0$을 대입하면 $P(0)=P(2)$이므로

㉠, ㉡에서 $b=2a+b$ $\quad\therefore a=0$

따라서 $P(x)$를 $x(x-2)$로 나눈 나머지는 b이고

$b=P(0)=P(2)$

따라서 $P(0)$과 $P(2)$는 그 값이 구하는 나머지와 항상 같다.

120 정답 (1) $p=a$, $q=b$, $r=a+b+c$ 서술형

(2) x^2-2x+1

(1) $ax^2+bx+c=p(x-1)(x+1)+q(x-1)+r$가 x에 대한 항등식이므로

먼저 이차항의 계수를 비교하면 $a=p$

양변에 $x=1$을 대입하면

$a+b+c=r$ …… ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$a-b+c=-2q+r$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $q=b$

$\therefore p=a$, $q=b$, $r=a+b+c$ … ①

(2) x^4-2x^3+1을 $(x-1)(x+1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $p(x-1)(x+1)+q(x-1)+r$라 두면

$$\begin{aligned} x^4-2x^3+1=&(x-1)(x+1)(x-2)Q(x) \\ &+p(x-1)(x+1)+q(x-1)+r \end{aligned}$$ … ②

이 식은 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=1$을 대입하면 $1-2+1=r$에서

$r=0$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $1+2+1=-2q+r$에서

$-2q+r=4$ $\quad\therefore q=-2$

양변에 $x=2$를 대입하면

$1=3p+q+r$

$q=-2$, $r=0$을 대입하면 $p=1$

$$\begin{aligned} \therefore p(x-1)(x+1)+q(x-1)+r &=(x-1)(x+1)-2(x-1) \\ &=x^2-2x+1 \end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 x^2-2x+1이다. … ③

다른 풀이

(2) x^4-2x^3+1을 $(x-1)(x+1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c라 두면 다항식의 나눗셈의 원리에 의하여

$$\begin{aligned} x^4-2x^3+1=&(x-1)(x+1)(x-2)Q(x) \\ &+ax^2+bx+c \end{aligned}$$ … ②

양변에 $x=1$을 대입하면 $0=a+b+c$ …… ㉣

양변에 $x=-1$을 대입하면 $4=a-b+c$ …… ㉤

양변에 $x=2$를 대입하면 $1=4a+2b+c$ …… ㉥

㉣－㉤을 하면 $-4=2b$ $\quad\therefore b=-2$

이 값을 ㉣에 대입하면 $a+c=2$

이 값을 ㉥에 대입하면 $4a+c=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $c=1$

따라서 구하는 나머지는 x^2-2x+1이다.

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	p, q, r를 a, b, c에 대하여 나타내기	30 %
②	x^4-2x^3+1을 $(x-1)(x+1)(x-2)$로 나눈 나눗셈 식을 세우기	30 %
③	x^4-2x^3+1을 $(x-1)(x+1)(x-2)$로 나눈 나머지를 구하기	40 %

5. 인수분해

확인문제 pp.70~80

121 정답 (1) $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$
(2) $(a+bc)(a^2-abc+b^2c^2)$
(3) $ab(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

(1) $27x^3+8y^3=(3x)^3+(2y)^3$
$=(3x+2y)\{(3x)^2-3x\cdot 2y+(2y)^2\}$
$=(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

(2) $a^3+b^3c^3=a^3+(bc)^3=(a+bc)\{a^2-a\cdot(bc)+(bc)^2\}$
$=(a+bc)(a^2-abc+b^2c^2)$

(3) $8a^4b-27ab^4=ab(8a^3-27b^3)=ab\{(2a)^3-(3b)^3\}$
$=ab(2a-3b)\{(2a)^2+2a\cdot 3b+(3b)^2\}$
$=ab(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

122 정답 (1) $2b(3a^2+b^2)$
(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2+a+b)$

(1) $(a+b)^3-(a-b)^3$
$=\{(a+b)-(a-b)\}\{(a+b)^2+(a+b)(a-b)+(a-b)^2\}$
$=2b(3a^2+b^2)$

(2) $a^3+a^2-b^3-b^2=(a^3-b^3)+(a^2-b^2)$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)+(a-b)(a+b)$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2+a+b)$

123 정답 (1) $2(a+2)^3$ (2) $b(a-b)^3$

(1) $2a^3+12a^2+24a+16=2(a^3+6a^2+12a+8)$
$=2(a^3+3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2+2^3)$
$=2(a+2)^3$

(2) $a^3b-3a^2b^2+3ab^3-b^4=b(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$
$=b(a-b)^3$

124 정답 (1) $(x+2y+3)^2$ (2) $(2a-b+3c)^2$

(1) $x^2+4y^2+4xy+6x+12y+9$
$=x^2+(2y)^2+3^2+2\cdot x\cdot 2y+2\cdot 2y\cdot 3+2\cdot 3\cdot x$
$=(x+2y+3)^2$

(2) $4a^2+b^2+9c^2-4ab-6bc+12ca$
$=(2a)^2+b^2+(3c)^2-2\cdot 2a\cdot b-2\cdot b\cdot 3c+2\cdot 3c\cdot 2a$
$=(2a-b+3c)^2$

125 정답 (1) $(2x+y+4)(2x+y-5)$
(2) $(x^2+x+1)(x^2+x-3)$
(3) $(x-1)(x-4)(x^2-5x-3)$
(4) $(x^2+5x+5)^2$

(1) $2x+y=X$로 치환하면
$(2x+y)^2-(2x+y)-20=X^2-X-20$
$=(X+4)(X-5)$
$=(2x+y+4)(2x+y-5)$

(2) $(x^2+x)^2-2x^2-2x-3$
$=(x^2+x)^2-2(x^2+x)-3$ ← $x^2+x=A$로 치환
$=A^2-2A-3$
$=(A+1)(A-3)$
$=(x^2+x+1)(x^2+x-3)$

(3) $x^2-5x=X$로 치환하면
$(x^2-5x+3)(x^2-5x-2)-6$
$=(X+3)(X-2)-6$
$=X^2+X-12$
$=(X+4)(X-3)$
$=(x^2-5x+4)(x^2-5x-3)$
$=(x-1)(x-4)(x^2-5x-3)$

(4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$
$=(x+1)(x+4)\cdot(x+2)(x+3)+1$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$ ← $x^2+5x=A$로 치환
$=(A+4)(A+6)+1$
$=A^2+10A+25$
$=(A+5)^2$
$=(x^2+5x+5)^2$

다른 풀이

(3) $x^2-5x+3=X$로 치환하면
$(x^2-5x+3)(x^2-5x-2)-6$
$=X(X-5)-6$
$=X^2-5X-6$
$=(X+1)(X-6)$
$=(x^2-5x+4)(x^2-5x-3)$
$=(x-1)(x-4)(x^2-5x-3)$

126 정답 (1) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
(2) $(x^2+x-3)(x^2-x-3)$
(3) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(1) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2$
$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$
$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(2) $x^4-7x^2+9=(x^4-6x^2+9)-x^2$
$=(x^2-3)^2-x^2$
$=(x^2+x-3)(x^2-x-3)$

(3) $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$
$=(x^2+2)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

127 정답 (1) $\boldsymbol{(x^2+2)(x+1)(x-1)}$

(2) $\boldsymbol{(3x^2-2)(x^2-2)}$

(1) $x^4+x^2-2=t^2+t-2$ ← $x^2=t$라 두기

$=(t+2)(t-1)$

$=(x^2+2)(x^2-1)$

$=(x^2+2)(x+1)(x-1)$

(2) $3x^4-8x^2+4=3t^2-8t+4$ ← $x^2=t$라 두기

$=(3t-2)(t-2)$

$=(3x^2-2)(x^2-2)$

128 정답 (1) $\boldsymbol{(x+2y)(x-y+z)}$

(2) $\boldsymbol{(x+y+1)(2x-y+1)}$

(3) $\boldsymbol{(b-c)(a-b)(a-c)}$ **또는**

$\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

(1) 세 문자 x, y, z 중 차수가 가장 낮은 문자 z에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$x^2+xy-2y^2+xz+2yz=(x+2y)z+x^2+xy-2y^2$

$=(x+2y)z+(x+2y)(x-y)$

$=(x+2y)(x-y+z)$

(2) 두 문자 x, y의 차수가 같으므로 어느 한 문자인 문자 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$2x^2+xy-y^2+3x+1=2x^2+(y+3)x-(y^2-1)$

$=2x^2+(y+3)x-(y+1)(y-1)$

$=\{x+(y+1)\}\{2x-(y-1)\}$

$=(x+y+1)(2x-y+1)$

개념 보충

$$\begin{array}{lcl} x & (y+1) & \longrightarrow (2y+2)x \\ 2x & -(y-1) & \longrightarrow (-y+1)x \\ \hline & & (y+3)x \end{array}$$

(3) 세 문자 a, b, c의 차수가 모두 같으므로 문자 a에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

129 정답 (1) $\boldsymbol{(x+2)(x^2-x+3)}$

(2) $\boldsymbol{(x+1)(x-2)^2}$

(1) $f(x)=x^3+x^2+x+6$으로 놓으면

$f(-2)=-8+4-2+6=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x+2$를 인수로 가진다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ & & -2 & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+2)(x^2-x+3)$

(2) $f(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면

$f(-1)=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 가진다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$

130 정답 $\boldsymbol{(2x+1)(x^2-x+3)}$

$f(x)=2x^3-x^2+5x+3$으로 놓고

$\pm\dfrac{(\text{상수항 3의 약수})}{(\text{최고차항의 계수 2의 약수})}$인 수에서 $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{2}$, $-\dfrac{3}{2}$을 하나씩 대입해 보면

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{2}+3=0$

이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x+\dfrac{1}{2}$을 인수로 가진다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & -1 & 5 & 3 \\ & & -1 & 1 & -3 \\ \hline & 2 & -2 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(2x^2-2x+6)$

$=(2x+1)(x^2-x+3)$

131 정답 **이등변삼각형**

주어진 등식의 좌변을 문자 a에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

즉, $(a-b)(b-c)(a-c)=0$이므로

$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $a=c$

따라서 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

132 정답 **33**

$2^5=x$로 놓으면

$4^5=(2^2)^5=(2^5)^2=x^2$, $8^5=(2^3)^5=(2^5)^3=x^3$이므로

$\dfrac{8^5+1}{4^5-2^5+1}=\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}=\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$

$=x+1=2^5+1=33$

133

정답 (1) $(a+b)(c-d)$
(2) $(a+b+4c)(a+b-9c)$
(3) $(a+b)^2(a-b)^2$
(4) $(2a+3b-c)(2a-3b-c)$
(5) $(x+y+1)(x+y-2)$
(6) $xy(5x-2y)(2x-5y)$

(1) $ac-bd-ad+bc=a(c-d)+b(c-d)$
$=(a+b)(c-d)$

(2) $a+b=t$라 두면
$(a+b)^2-5c(a+b)-36c^2=t^2-5ct-36c^2$
$=(t+4c)(t-9c)$
$=(a+b+4c)(a+b-9c)$

(3) $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(2ab)^2$
$=(a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-2ab)$
$=(a+b)^2(a-b)^2$

(4) $4a^2-9b^2+c^2-4ac=(4a^2-4ac+c^2)-9b^2$
$=(2a-c)^2-(3b)^2$
$=(2a+3b-c)(2a-3b-c)$

(5) $x^2+2xy+y^2-x-y-2=(x+y)^2-(x+y)-2$
$=(x+y+1)(x+y-2)$

(6) $10x^3y-29x^2y^2+10xy^3=xy(10x^2-29xy+10y^2)$
$=xy(5x-2y)(2x-5y)$

134

정답 (1) $(a+2)^3$ (2) $(3x-2)^3$
(3) $(xy-1)^3$ (4) $(x+4y)^3$

(1) $a^3+6a^2+12a+8=a^3+3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2+2^3$
$=(a+2)^3$

(2) $27x^3-54x^2+36x-8=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2+3\cdot 3x\cdot 2^2-2^3$
$=(3x-2)^3$

(3) $x^3y^3-3x^2y^2+3xy-1$
$=(xy)^3-3\cdot(xy)^2\cdot 1+3\cdot xy\cdot 1^2-1^3$
$=(xy-1)^3$

(4) $x^3+12x^2y+48xy^2+64y^3$
$=x^3+3\cdot x^2\cdot 4y+3\cdot x\cdot(4y)^2+(4y)^3$
$=(x+4y)^3$

135

정답 (1) $(x+5y)(x^2-5xy+25y^2)$
(2) $(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$
(3) $(a+b-1)^2$
(4) $(a-2b-3)^2$

(1) $x^3+125y^3=x^3+(5y)^3$
$=(x+5y)\{x^2-x\cdot 5y+(5y)^2\}$
$=(x+5y)(x^2-5xy+25y^2)$

(2) $x^3-64y^3=x^3-(4y)^3$
$=(x-4y)\{x^2+x\cdot 4y+(4y)^2\}$
$=(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$

(3) $a^2+b^2+1+2ab-2b-2a$
$=a^2+b^2+(-1)^2+2ab+2\cdot(-1)\cdot b+2\cdot(-1)\cdot a$
$=(a+b-1)^2$

(4) $a^2+4b^2-4ab-6a+12b+9$
$=a^2+4b^2+9-4ab+12b-6a$
$=a^2+(-2b)^2+(-3)^2+2\cdot a\cdot(-2b)$
$+2\cdot(-2b)\cdot(-3)+2\cdot(-3)\cdot a$
$=(a-2b-3)^2$

136

정답 (1) $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$
(2) $(x-2y+1)(x-2y-3)$
(3) $(x+1)(x+2)(x+4)(x-1)$
(4) $(x^2+x+7)(x^2+x-5)$

(1) $x^2=X$로 치환하면
$x^4-10x^2+9=X^2-10X+9$
$=(X-1)(X-9)$
X에 x^2을 대입하여 정리하면
$(X-1)(X-9)=(x^2-1)(x^2-9)$
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

(2) $x-2y=X$로 놓으면
$(x-2y)^2-2x+4y-3=(x-2y)^2-2(x-2y)-3$
$=X^2-2X-3$
$=(X+1)(X-3)$
$=(x-2y+1)(x-2y-3)$

(3) $x^2+3x=X$로 놓으면
$(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=X^2-2X-8$
$=(X+2)(X-4)$
X에 x^2+3x를 대입하여 정리하면
$(X+2)(X-4)=(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)$
$=(x+1)(x+2)(x+4)(x-1)$

(4) $x^2+x=X$로 치환하면
$(x^2+x-2)(x^2+x+4)-27$
$=(X-2)(X+4)-27$
$=X^2+2X-35$
$=(X+7)(X-5)$
$=(x^2+x+7)(x^2+x-5)$

다른 풀이

(4) $x^2+x-2=X$로 치환할 수도 있다.
$(x^2+x-2)(x^2+x+4)-27$
$=X(X+6)-27$

$=X^2+6X-27$
$=(X+9)(X-3)$
$=(x^2+x-2+9)(x^2+x-2-3)$
$=(x^2+x+7)(x^2+x-5)$

137 정답 6

$x^2=X$로 치환하면

$x^4+4x^2-5=X^2+4X-5$
$=(X+5)(X-1)$

X에 x^2을 대입하여 정리하면

$(X+5)(X-1)=(x^2+5)(x^2-1)$
$=(x^2+5)(x+1)(x-1)$

a, b는 양수이므로 이것을 $(x+1)(x-a)(x^2+b)$와 비교하면

$a=1$, $b=5$
$\therefore a+b=6$

138 정답 (1) $(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$

(2) $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$
(3) $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$
(4) $(x^2+3xy+4y^2)(x^2-3xy+4y^2)$

(1) x^4-7x^2+1에서 x^4+1에 $2x^2$을 더하면 완전제곱식을 얻을 수 있으므로 $2x^2$을 더하고 빼면

$x^4-7x^2+1=x^4-7x^2+1+2x^2-2x^2$
$=x^4+2x^2+1-7x^2-2x^2$
$=(x^2+1)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$

(2) x^4+64에 $16x^2$을 더하면 완전제곱식을 얻을 수 있으므로 $16x^2$을 더하고 빼면

$x^4+64=x^4+16x^2+64-16x^2$
$=(x^2+8)^2-(4x)^2$
$=(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$

(3) x^4+2x^2+9에 $4x^2$을 더하면 완전제곱식을 얻을 수 있으므로 $4x^2$을 더하고 빼면

$x^4+2x^2+9=x^4+2x^2+9+4x^2-4x^2$
$=x^4+6x^2+9-4x^2$
$=(x^2+3)^2-4x^2$
$=(x^2+3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

(4) $x^4-x^2y^2+16y^4$에 $8x^2y^2$을 더하고 빼면

$x^4-x^2y^2+16y^4=x^4+16y^4-x^2y^2+8x^2y^2-8x^2y^2$
$=x^4+8x^2y^2+16y^4-8x^2y^2-x^2y^2$
$=(x^2+4y^2)^2-9x^2y^2$
$=(x^2+4y^2)^2-(3xy)^2$
$=(x^2+3xy+4y^2)(x^2-3xy+4y^2)$

139 정답 (1) $(a^2+b^2+ab)(c+1)$

(2) $(a+c)(a-c)(a^2+b^2+c^2)$

(1) 주어진 식을 가장 차수가 낮은 문자 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2c+a^2+b^2c+b^2+abc+ab$
$=(a^2+b^2+ab)c+(a^2+b^2+ab)$
$=(a^2+b^2+ab)(c+1)$

(2) 주어진 식을 가장 차수가 낮은 문자 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^4+a^2b^2-b^2c^2-c^4=(a^2-c^2)b^2+(a^4-c^4)$
$=(a^2-c^2)b^2+(a^2+c^2)(a^2-c^2)$
$=(a^2-c^2)(a^2+b^2+c^2)$
$=(a+c)(a-c)(a^2+b^2+c^2)$

140 정답 (1) $(a-2c)(a-b+2c)$

(2) $(x-y-1)(2x-y+1)$

(1) 주어진 식을 가장 차수가 낮은 문자 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2-ab+2bc-4c^2=(-a+2c)b+a^2-4c^2$
$=-(a-2c)b+(a+2c)(a-2c)$
$=(a-2c)(a-b+2c)$

(2) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2-3xy+y^2-x-1$
$=2x^2-(3y+1)x+y^2-1$
$=2x^2-(3y+1)x+(y+1)(y-1)$

$$\begin{array}{lcl} 1x & -(y+1) \longrightarrow & (-2y-2)x \\ 2x & -(y-1) \longrightarrow & \underline{(-y+1)x} \\ & & (-3y-1)x \end{array}$$

$\therefore 2x^2-3xy+y^2-x-1=(x-y-1)(2x-y+1)$

141 정답 (1) $(x+4)(x+1)(x-3)$

(2) $(x-1)(x^2+4x-2)$
(3) $(x+2)(x-3)(2x-1)$
(4) $(x-1)^2(x+2)(x+1)$

(1) $P(x)=x^3+2x^2-11x-12$로 놓으면 $P(-1)=0$이므로 $P(x)$는 $x+1$을 인수로 가진다.

조립제법을 이용하여 나머지 인수를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -11 & -12 \\ & & -1 & -1 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2+x-12)$
$=(x+1)(x+4)(x-3)$

(2) $P(x)=x^3+3x^2-6x+2$로 놓으면 $P(1)=0$이므로 $P(x)$는 $x-1$을 인수로 가진다.

조립제법을 이용하여 나머지 인수를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & -6 & 2 \\ & & 1 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & 4 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=x^3+3x^2-6x+2=(x-1)(x^2+4x-2)$

(3) $P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$으로 놓으면

$P(-2)=0$이므로 $P(x)$는 $x+2$를 인수로 가진다.

조립제법을 이용하여 나머지 인수를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & -3 & -11 & 6 \\ & & -4 & 14 & -6 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)(2x^2-7x+3)$

$=(x+2)(x-3)(2x-1)$

(4) $P(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2$로 놓으면

$P(1)=1+1-3-1+2=0$,

$P(-1)=1-1-3+1+2=0$

이므로 $P(x)$는 $x-1$, $x+1$을 인수로 가진다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ & & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline -1 & 1 & 2 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & -1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+x-2)$

$=(x-1)(x+1)(x+2)(x-1)$

$=(x-1)^2(x+2)(x+1)$

142 정답 (1) 0 (2) $(x-a)^2(x+3a)$

(1) $f(a)=a^3+a^3-5a^3+3a^3=0$

(2) $f(a)=0$이므로 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrr} a & 1 & a & -5a^2 & 3a^3 \\ & & a & 2a^2 & -3a^3 \\ \hline & 1 & 2a & -3a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-a)(x^2+2ax-3a^2)$

$=(x-a)(x+3a)(x-a)$

$=(x-a)^2(x+3a)$

143 정답 ④

$(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)(1+2^{16})=k$라 하면

$(1-2)k=(1-2)(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)(1+2^{16})$

$=(1-2^2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)(1+2^{16})$

$=(1-2^4)(1+2^4)(1+2^8)(1+2^{16})$

$=(1-2^8)(1+2^8)(1+2^{16})$

$=(1-2^{16})(1+2^{16})=1-2^{32}$

따라서 $-k=1-2^{32}$이므로

$k=2^{32}-1$

144 정답 (1) 15 (2) 9901

(1) $\dfrac{2^{14}-2^{10}+2^4-1}{2^{10}+1}=\dfrac{2^{10}(2^4-1)+(2^4-1)}{2^{10}+1}$

$=\dfrac{(2^{10}+1)(2^4-1)}{2^{10}+1}$

$=2^4-1=15$

(2) $\dfrac{99^4+99^2+1}{99^2-98}=\dfrac{99^4+2\cdot 99^2+1-99^2}{99^2-99+1}$

$=\dfrac{(99^2+1)^2-99^2}{99^2-99+1}$

$=\dfrac{(99^2+99+1)(99^2-99+1)}{99^2-99+1}$

$=99^2+99+1$

$=99(99+1)+1$

$=99\times 100+1$

$=9901$

145 정답 $4xy(x+y)$

구하는 입체의 부피는 처음 정육면체의 부피 $(x+y)^3$에서 구멍을 만드는 사각기둥의 부피를 빼면 구할 수 있다.

사각기둥의 밑면의 넓이는 $(x-y)^2$, 높이는 $x+y$이므로 사각기둥의 부피는 $(x-y)^2(x+y)$이다.

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$(x+y)^3-(x-y)^2(x+y)$

$=(x+y)\{(x+y)^2-(x-y)^2\}$

$=(x+y)\{(x+y)+(x-y)\}\{(x+y)-(x-y)\}$

$=(x+y)\times 2x\times 2y$

$=4xy(x+y)$

146 정답 $\frac{1}{2}ac$

주어진 식의 좌변을 차수가 가장 낮은 문자 c에 대하여 내림차순으로 인수분해하면

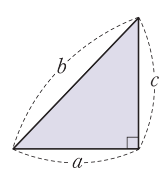
$a^2b+a^3-ab^2+ac^2-b^3+bc^2$

$=(a+b)c^2+a^2(a+b)-b^2(a+b)$

$=(a+b)(c^2-b^2+a^2)$

이므로 $(a+b)(a^2-b^2+c^2)=0$에서 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+b\neq 0$이다.

따라서 $a^2-b^2+c^2=0$, 즉 $a^2+c^2=b^2$이므로 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이고 그 넓이는



$\dfrac{1}{2}\times a\times c=\dfrac{1}{2}ac$

연습문제 Ⅱ p.84

147 정답 (1) **5, 21 또는 21, 5**
(2) $(x^2+4x-6)(x^2+4x-20)$

(2) $(x^2-4x+3)(x^2+12x+35)+15$
$=(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)+15$
$=(x-1)(x+5)\cdot(x-3)(x+7)+15$
$=(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)+15$
← 공통부분인 x^2+4x를 X로 치환
$=(X-5)(X-21)+15$
$=X^2-26X+120$
$=(X-6)(X-20)$
$=(x^2+4x-6)(x^2+4x-20)$

148 정답 (1) $8x^3$
(2) $(x^2-x-3)(x^2-x-5)$
(3) $(x^2-5x+12)(x^2-10x+12)$

(1) $(x+y)^3+3(x+y)(x^2-y^2)+3(x-y)(x^2-y^2)+(x-y)^3$
$=(x+y)^3+3(x+y)(x+y)(x-y)$
$+3(x-y)(x+y)(x-y)+(x-y)^3$
$=(x+y)^3+3(x+y)^2(x-y)$
$+3(x+y)(x-y)^2+(x-y)^3$ ← $x+y=A$, $x-y=B$로 치환
$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$
$=(A+B)^3$
$=(x+y+x-y)^3$
$=(2x)^3=8x^3$

(2) $(x^2-5x+6)(x^2+3x+2)+3$
$=(x-2)(x-3)(x+1)(x+2)+3$
$=(x-2)(x+1)\cdot(x-3)(x+2)+3$
$=(x^2-x-2)(x^2-x-6)+3$ ← $x^2-x=A$로 치환
$=(A-2)(A-6)+3$
$=A^2-8A+15$
$=(A-3)(A-5)$
$=(x^2-x-3)(x^2-x-5)$

(3) $(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)-6x^2$
$=(x-2)(x-6)\cdot(x-3)(x-4)-6x^2$
$=(x^2-8x+12)(x^2-7x+12)-6x^2$ ← $x^2+12=A$로 치환
$=(A-8x)(A-7x)-6x^2$
$=A^2-15xA+50x^2$
$=(A-5x)(A-10x)$
$=(x^2-5x+12)(x^2-10x+12)$

149 정답 $x+5$

$f(x)=x^3+11x^2+39x+45$로 놓으면
$f(-3)=0$이므로 다항식 $x^3+11x^2+39x+45$는 $x+3$을 인수로 가진다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 11 & 39 & 45 \\ & & -3 & -24 & -45 \\ \hline & 1 & 8 & 15 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3+11x^2+39x+45=(x+3)(x^2+8x+15)$
$=(x+3)^2(x+5)$

그런데 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이는 일차항의 계수가 1인 일차식이고 밑면이 정사각형 모양이므로 밑면의 가로의 길이는 $x+3$이고 높이는 $x+5$이다.

150 정답 **131** .... 서술형

연속한 네 개의 자연수를 각각 n, $n+1$, $n+2$, $n+3$(n은 자연수)이라 하자. … ①
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$
$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$
$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$
$=(n^2+3n+1)^2$ … ②
$\therefore 10\cdot11\cdot12\cdot13+1=(10^2+3\times10+1)^2=131^2$
$\therefore N=131$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	연속한 네 자연수를 문자로 놓기	30 %
②	연속한 네 자연수의 곱을 문자의 다항식으로 나타내기	40 %
③	N의 값을 구하기	30 %

Ⅱ 방정식과 부등식

6. 복소수

개념 보충

$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ (단, a, b, c, d 는 실수)라 놓으면

② $\overline{\alpha-\beta}=\overline{(a-c)+(b-d)i}=(a-c)-(b-d)i$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}=(a-bi)-(c-di)=(a-c)-(b-d)i$

$\therefore\ \overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

④ $\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}=\overline{\left(\dfrac{c+di}{a+bi}\right)}=\overline{\left(\dfrac{(c+di)(a-bi)}{a^2+b^2}\right)}$

$=\overline{\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2}+\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}i}$

$=\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2}-\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}i$

$\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}=\dfrac{\overline{c+di}}{\overline{a+bi}}=\dfrac{c-di}{a-bi}=\dfrac{(c-di)(a+bi)}{a^2+b^2}$

$=\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2}+\dfrac{bc-ad}{a^2+b^2}i$

$=\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2}-\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}i$

$\therefore\ \overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}=\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$

확인문제 pp.95~102

151 정답 $a=-1$ 또는 $a=2$, $b=-3$

$(1+i)x^2+(4-i)x+(3-2i)$

$=(x^2+4x+3)+(x^2-x-2)i$ …… ㉠

㉠이 실수가 되려면 허수부분이 0이므로

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$

㉠이 순허수가 되려면 실수부분이 0이므로

$x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=-1$

그런데 $x=-1$이면 허수부분도 0이 되므로 $x=-3$이다.

$\therefore\ b=-3$

152 정답 3

$z=a(1+i)-3(1-i)=(a-3)+(a+3)i$

$z^2=\{(a-3)+(a+3)i\}^2$

$=(a-3)^2-(a+3)^2+2(a-3)(a+3)i$

$=-12a+2(a-3)(a+3)i$

$z^2<0$이 되려면 허수부분이 0이고 실수부분이 음수이어야 하므로

$2(a-3)(a+3)=0,\ -12a<0$

$2(a-3)(a+3)=0$에서 $a=-3$ 또는 $a=3$

$-12a<0$에서 $a>0$이므로

$a=3$

153 정답 4

$(x+yi)(x-yi)=x^2-(yi)^2=x^2-y^2i^2=x^2+y^2$

이므로 주어진 등식은

$x^2+y^2=8+(x+y-4)i$

복소수가 서로 같을 조건에서

$x^2+y^2=8,\ x+y=4$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=16-2xy=8$

$\therefore\ xy=4$

154 정답 3

주어진 등식의 양변에 $(2+i)(2-i)$를 곱하면

$x(2+i)=(1+yi)(2-i)$

$2x+xi=(2+y)+(2y-1)i$

$\therefore\ 2x=2+y,\ x=2y-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{5}{3},\ y=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ x+y=3$

다른 풀이

먼저 좌변과 우변을 각각 분모가 실수가 되도록 만들면

(좌변)$=\dfrac{x(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2x+xi}{5}$

(우변)$=\dfrac{(1+yi)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2+y+(2y-1)i}{5}$

에서 $\dfrac{2x+xi}{5}=\dfrac{2+y+(2y-1)i}{5}$

$2x+xi=2+y+(2y-1)i$

복소수가 서로 같을 조건에서

$2x=2+y,\ x=2y-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{5}{3},\ y=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ x+y=3$

155 정답 0

$\dfrac{2+3i}{3-2i}+\dfrac{2-3i}{3+2i}$

$=\dfrac{(2+3i)(3+2i)+(2-3i)(3-2i)}{(3-2i)(3+2i)}$

$=\dfrac{6+13i+6i^2+6-13i+6i^2}{9-4i^2}$

$=\dfrac{12+12i^2}{9+4}=\dfrac{12-12}{13}=0$

156 정답 1

양변을 $2-3i$로 나누면

$$a+bi=\frac{(1-i)(2+3i)}{(1+i)(2-3i)}=\frac{2+3i-2i-3i^2}{2-3i+2i-3i^2}$$
$$=\frac{2+3i-2i+3}{2-3i+2i+3}=\frac{5+i}{5-i}$$
$$=\frac{(5+i)^2}{(5-i)(5+i)}$$
$$=\frac{5^2+10i+i^2}{5^2-i^2}=\frac{24+10i}{26}$$
$$=\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i$$

a, b는 실수이므로 $a=\frac{12}{13}$, $b=\frac{5}{13}$

$$\therefore a^2+b^2=\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2$$
$$=\frac{12^2+5^2}{13^2}=\frac{144+25}{169}=1$$

157 정답 5

$$(3+i)\bar{z}+2iz=(3+i)(x-yi)+2i(x+yi)$$
$$=(3x+y)+(-3y+x)i+2xi-2y$$
$$=(3x-y)+(-3y+3x)i$$

이므로 $(3x-y)+(-3y+3x)i=5+3i$에서

$$3x-y=5,\ -3y+3x=3$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=1$

$$x^2+y^2=2^2+1^2=5$$

158 정답 $2+i$

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 두면 $\bar{\alpha}=a-bi$이므로 주어진 등식에 대입하면

$$4i(a+bi)+(2-i)(a-bi)=4i-1$$
$$4ai-4b+2a-2bi-ai-b=4i-1$$
$$(2a-5b)+(3a-2b)i=4i-1$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2a-5b=-1,\ 3a-2b=4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$$\therefore \alpha=2+i$$

159 정답 (1) 0 (2) -1 (3) 0

(1) $i^4=1$이므로

$$i^{11}+i^{22}+i^{33}+i^{44}=i^3+i^2+i+1$$
$$=-i-1+i+1=0$$

(2) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}=(-i)^{50}=i^{50}=(i^2)^{25}=(-1)^{25}=-1$$

(3) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$, $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{10}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^5+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^5$$
$$=i^5+(-i)^5=i-i=0$$

160 정답 -4

$x=2+i$에서 $x-2=i$이므로 양변을 제곱하면

$$x^2-4x+4=-1$$
$$x^2-4x=-5$$
$$\therefore x^2-4x+1=-5+1=-4$$

161 정답 (1) $\frac{4}{13}$ (2) 52

$\alpha=2+3i$에서 $\bar{\alpha}=2-3i$이므로

$$\begin{cases}\alpha+\bar{\alpha}=(2+3i)+(2-3i)=4\\ \alpha\bar{\alpha}=(2+3i)(2-3i)=2^2-3^2i^2=2^2+3^2=13\end{cases}$$

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\bar{\alpha}}=\frac{\bar{\alpha}+\alpha}{\alpha\bar{\alpha}}=\frac{4}{13}$

(2) $\alpha^2\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}^2=\alpha\bar{\alpha}(\alpha+\bar{\alpha})=13\times4=52$

다른 풀이

$\alpha=2+3i$이므로

$$\alpha\bar{\alpha}=2^2+3^2=13$$

162 정답 (1) $2+\sqrt{2}i$ (2) $-\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}i$

(1) $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}-\frac{2}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{-8}-2}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{8}i-2}{\sqrt{2}i}$

$$=\frac{(2\sqrt{2}i-2)(-\sqrt{2}i)}{\sqrt{2}i(-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{4+2\sqrt{2}i}{2}=2+\sqrt{2}i$$

(2) $\frac{3-\sqrt{-2}}{-2+\sqrt{-2}}=\frac{3-\sqrt{2}i}{-2+\sqrt{2}i}$

$$=\frac{(3-\sqrt{2}i)(-2-\sqrt{2}i)}{(-2+\sqrt{2}i)(-2-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{(-6-2)+(-3\sqrt{2}+2\sqrt{2})i}{4+2}$$
$$=\frac{-8-\sqrt{2}i}{6}$$
$$=-\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}i$$

163 정답 a

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면 $a>0$, $b<0$이므로

$$\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{b^2}=|a-b|-|b|$$

$a-b>0$, $b<0$이므로

$$|a-b|-|b|=a-b+b=a$$

연습문제 I ·· pp.103~105

164 정답 (1) **1** (2) **0** (3) **0** (4) **0**

(5) $-\dfrac{2}{13}$ (6) **1**

(1) $i^{1004}=(i^2)^{502}=(-1)^{502}=1$

(2) $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$이므로 $i+i^2+i^3+i^4=0$

$$\therefore i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8$$
$$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)=0$$

(3) $i-i^2+i^3-i^4=i-(-1)-i-1=0$이므로

$$i-i^2+i^3-i^4+i^5-i^6+\cdots+i^{99}-i^{100}$$
$$=(i-i^2+i^3-i^4)+i^4(i-i^2+i^3-i^4)$$
$$+\cdots+i^{96}(i-i^2+i^3-i^4)$$
$$=0+0+\cdots+0=0$$

(4) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$

$$=\frac{1+2i+i^2+1-2i+i^2}{1-i^2}=\frac{0}{2}=0$$

(5) $\dfrac{1-i}{2+3i}+\dfrac{1+i}{2-3i}=\dfrac{(1-i)(2-3i)+(1+i)(2+3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$$=\frac{2-3-5i+2-3+5i}{4+9}=-\frac{2}{13}$$

(6) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$
$$=\frac{3i^2-1}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$
$$\therefore \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^6=\left\{\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3\right\}^2=(-1)^2=1$$

165 정답 $\dfrac{1}{4}$

$$(2a+i)^2i=(4a^2+4ai+i^2)i$$
$$=(4a^2+4ai-1)i$$
$$=-4a+(4a^2-1)i$$

이 복소수가 실수이면 허수부분이 0이므로

$$4a^2-1=0 \qquad \therefore a^2=\frac{1}{4}$$

166 정답 $\dfrac{1}{6}$

$$\frac{1}{2-\sqrt{2}i}=\frac{2+\sqrt{2}i}{(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)}=\frac{2+\sqrt{2}i}{2^2-(\sqrt{2}i)^2}$$
$$=\frac{2+\sqrt{2}i}{6}=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}i$$

따라서 실수부분은 $a=\dfrac{1}{3}$, 허수부분은 $b=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$이므로

$$a^2+b^2=\frac{1}{9}+\frac{2}{36}=\frac{2+1}{18}=\frac{1}{6}$$

167 정답 3

$z=a(1+i)-3(1-i)=(a-3)+(a+3)i$

$$z^2=\{(a-3)+(a+3)i\}^2$$
$$=(a-3)^2-(a+3)^2+2(a-3)(a+3)i$$
$$=-12a+2(a-3)(a+3)i$$

$z^2<0$이 되려면 허수부분이 0이고 실수부분이 음수이어야 하므로

$$2(a-3)(a+3)=0,\ -12a<0$$
$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=-3\text{이고 } a>0$$

따라서 $a=3$이다.

다른 풀이

복소수 z에 대하여 $z^2<0$이 되려면 z가 순허수이어야 하므로

$$z=(a-3)+(a+3)i$$

가 순허수일 조건을 구하면

$$a-3=0,\ a+3\neq 0$$
$$\therefore a=3$$

168 정답 4

$(2+i)(\overline{x+yi})=(2+i)(x-yi)$

$$=(2x+y)+(x-2y)i=5-5i$$

$2x+y=5$, $x-2y=-5$에서 $x=1$, $y=3$

$$\therefore x+y=1+3=4$$

169 정답 $x=8$, $y=2$

주어진 등식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{2}i$$

이므로 $\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y-x}{2}i=5-3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{x+y}{2}=5,\ \frac{y-x}{2}=-3$$
$$x+y=10,\ -x+y=-6$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=8$, $y=2$

170 정답 $13+9i$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$이므로

$$\begin{cases}\alpha\beta=(1+3i)(1-2i)=1-2i+3i-6i^2=7+i\\ \alpha+\beta=(1+3i)+(1-2i)=2+i\end{cases}$$
$$\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=(7+i)(2+i)$$
$$=14+7i+2i+i^2$$
$$=13+9i$$

171 정답 $x=1$, $y=-2$

$(1+i)(x+yi)=\overline{3+i}$에서

$$(x-y)+(x+y)i=3-i$$

x, y가 실수이므로 $x+y$, $x-y$도 실수이다.

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x-y=3,\ x+y=-1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-2$

172 정답 1

$z\bar{z}=2$에서 $(a+i)(a-i)=2$

$$a^2-i^2=2$$
$$a^2+1=2$$
$$a^2=1$$

그런데 $a>0$이므로 $a=1$

따라서 $z=1+i$이므로

$$\frac{1}{z}+\frac{z}{2}=\frac{1}{1+i}+\frac{1+i}{2}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}+\frac{1+i}{2}$$
$$=\frac{1-i}{2}+\frac{1+i}{2}$$
$$=1$$

173 정답 $3+2i$

구하는 복소수를 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면

$$\bar{z}=a-bi$$

$(1+i)z+(3+2i)\bar{z}=14+5i$에 대입하면

$$(1+i)(a+bi)+(3+2i)(a-bi)=14+5i$$
$$a+bi+ai+bi^2+3a-3bi+2ai-2bi^2=14+5i$$
$$a+bi+ai-b+3a-3bi+2ai+2b=14+5i$$
$$\therefore\ (4a+b)+(3a-2b)i=14+5i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$4a+b=14,\ 3a-2b=5$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

따라서 구하는 복소수는 $3+2i$이다.

174 정답 (1) $\sqrt{10}i$ (2) $-\sqrt{15}$ (3) $\frac{\sqrt{6}}{2}i$ (4) $-\frac{\sqrt{15}}{3}i$ (5) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ (6) $-6i$ (7) $-1-\sqrt{3}i$

$a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$로 나타낸다.

(1) $\sqrt{2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}\times\sqrt{5}i=\sqrt{2\times5}i=\sqrt{10}i$

(2) $\sqrt{-3}\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\times\sqrt{5}i=\sqrt{3\times5}i^2=-\sqrt{15}$

(3) $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}i=\frac{\sqrt{6}}{2}i$

(4) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{i}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{i}{i^2}=-\sqrt{\frac{5}{3}}i=-\frac{\sqrt{15}}{3}i$

(5) $\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{5}i}{\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$

(6) $\sqrt{-3}\sqrt{-6}\sqrt{-2}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{6}i\cdot\sqrt{2}i=\sqrt{36}i^3=6i^3=-6i$

(7) $\frac{2-2\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}+1}=\frac{2-2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i+1}$

$$=\frac{(2-2\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i-1)}{(\sqrt{3}i+1)(\sqrt{3}i-1)}=\frac{4+4\sqrt{3}i}{-3-1}=-1-\sqrt{3}i$$

175 정답 ②

① $\sqrt{a^3b}=\sqrt{a^2\cdot ab}=|a|\sqrt{ab}=-a\sqrt{ab}$ (○)

② $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ (×)

③ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$ (○)

④ $\sqrt{\frac{b}{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{|a|}=\frac{\sqrt{b}}{-a}=-\frac{\sqrt{b}}{a}$ (○)

⑤ $\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a||b|=(-a)(-b)=ab$ (○)

따라서 성립하지 않는 것은 ②이다.

176 정답 (1) 6 (2) $a<1$, $b\ge-1$

(1) $\sqrt{(1-a)(a-4)}=-\sqrt{1-a}\sqrt{a-4}$가 성립하면

$$1-a\le0,\ a-4\le0 \qquad \therefore\ 1\le a\le4$$

이때 $a+1>0$, $a-5<0$이므로

$$|a+1|+|a-5|=a+1-(a-5)$$
$$=a+1-a+5=6$$

(2) $\sqrt{\frac{b+1}{a-1}}=-\frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}}$에서 $b+1\ge0$, $a-1<0$

$$\therefore\ a<1,\ b\ge-1$$

177 정답 $\sqrt{2}$

$$\alpha^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\beta^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{(1-i)^2}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$\therefore\ \alpha^{49}+\beta^{49}=(\alpha^2)^{24}\cdot\alpha+(\beta^2)^{24}\cdot\beta$$
$$=i^{24}\cdot\alpha+(-i)^{24}\cdot\beta$$
$$=\alpha+\beta$$
$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

178 정답 24

$$(1-i)^2=-2i$$
$$(1-i)^4=(-2i)^2=4i^2=-4$$
$$(1-i)^8=(-4)^2=16$$

따라서 a를 양의 실수가 되게 하는 최소의 자연수는 $n=8$이고 그때의 a의 값은 16이다.

$$\therefore\ n+a=8+16=24$$

179 정답 2

$$\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=\alpha(\bar{\alpha}+\bar{\beta})+\beta(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$$
$$=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$$
$$=(-1-i)(-1+i)$$
$$=(-1)^2-i^2$$
$$=1-(-1)=2$$

180 정답 -1

$z+\bar{z}=2$, $z\cdot\bar{z}=2$이므로

$$\frac{\bar{z}-1}{z}+\frac{z-1}{\bar{z}}=\frac{\bar{z}(\bar{z}-1)+z(z-1)}{z\bar{z}}$$
$$=\frac{(\bar{z})^2-\bar{z}+z^2-z}{z\bar{z}}$$
$$=\frac{(z+\bar{z})^2-2z\bar{z}-(z+\bar{z})}{z\bar{z}}$$
$$=\frac{2^2-4-2}{2}=-1$$

다른 풀이

$z=1+i$이면 $\bar{z}=1-i$이므로

$$\frac{\bar{z}-1}{z}=\frac{(1-i)-1}{1+i}=\frac{-i}{1+i}=\frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1-i}{2}$$
$$\frac{z-1}{\bar{z}}=\overline{\left(\frac{\bar{z}-1}{z}\right)}=\overline{\left(\frac{-1-i}{2}\right)}=\frac{-1+i}{2}$$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{-1-i}{2}+\dfrac{-1+i}{2}=-1$

연습문제 Ⅱ p.106

181 정답 -3, 1

$z=x+yi$(x, y는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=-z$에서

$$\overline{x+yi}=-(x+yi)$$
$$x-yi=-x-yi$$
$$\therefore x=0$$

즉, $\bar{z}=-z$가 성립하면 복소수 z의 실수부분이 0이다.

$$z=(1+3i)a^2+2a-3+i$$
$$=(a^2+2a-3)+(3a^2+1)i$$

여기서 $a^2+2a-3=0$이므로

$$(a+3)(a-1)=0$$
$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=1$$

182 정답 $1-i$

$z_1=1+i$

$$z_2=iz_1=i(1+i)=i+i^2$$
$$z_3=iz_2=i(i+i^2)=i^2+i^3$$
$$z_4=iz_3=i(i^2+i^3)=i^3+i^4 \qquad \cdots$$

따라서 $z_{100}=i^{99}+i^{100}$임을 알 수 있다.

$i^{99}=(i^4)^{24}\cdot i^3=i^3=-i$, $i^{100}=(i^4)^{25}=1$이므로

$$z_{100}=i^{99}+i^{100}=-i+1$$

다른 풀이

$$z_1=1+i$$
$$z_2=i(1+i)=-1+i$$
$$z_3=i(-1+i)=-1-i$$
$$z_4=i(-1-i)=1-i$$
$$z_5=i(1-i)=1+i=z_1$$
$$z_6=z_2$$
$$\vdots$$

z_1, z_2, z_3, z_4의 값이 계속 반복된다.

$$\therefore z_{100}=z_4=1-i$$

183 정답 $1+i$

$z=x+yi$(x, y는 실수)라 두면

$z+\bar{z}=4$에서 $(x+yi)+(x-yi)=4$

$$2x=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$z\bar{z}=4$에서 $(x+yi)(x-yi)=4$

$$x^2+y^2=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=0$

따라서 $z=x+yi=2$이므로

$$\frac{z}{1-i}=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=\frac{2(1+i)}{1^2-i^2}$$
$$=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$$

184 정답 $1+i$, $-1-i$

$z=a+bi$를 $z^2=2i$에 대입하면

$$(a+bi)^2=2i$$
$$a^2-b^2+2abi=2i$$

복소수가 서로 같은 조건에 의해

$$\therefore a^2-b^2=0,\ 2ab=2$$

$a^2-b^2=0$에서 $(a+b)(a-b)=0$

$$\therefore a=-b \text{ 또는 } a=b$$

$2ab=2$에서 $ab=1$

(i) $a=b$일 때, $ab=a^2=1$이므로
  $a=b=\pm1$(복부호 동순)
  $a=b=1$일 때, $z=1+i$이고
  $a=b=-1$일 때, $z=-1-i$

(ii) $a=-b$일 때, $ab=-a^2=1$을 만족하는 실수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $z=1+i$ 또는 $z=-1-i$

185 정답 $2+i$ ······ 서술형

$f(1+i)=a(1+i)^2+b(1+i)+c$
$\quad=a\cdot 2i+b+bi+c$
$\quad=b+c+(2a+b)i$
$\quad=2-i$ ··· ①

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$b+c=2,\ 2a+b=-1$ ··· ②

$f(1-i)=a(1-i)^2+b(1-i)+c$
$\quad=a\cdot(-2i)+b-bi+c$
$\quad=(b+c)-(2a+b)i$
$\quad=2+i$ ··· ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$f(1+i)$를 계산하기	30%
②	$a,\ b,\ c$의 조건식을 구하기	40%
③	$f(1-i)$를 계산하기	30%

다른 풀이

$1+i=z$라 두면

$f(1+i)=f(z)=az^2+bz+c=2-i$

이때 $1-i=\overline{z}$이므로

$f(1-i)=f(\overline{z})=a\overline{z}^2+b\overline{z}+c=\overline{az^2+bz+c}$
$\quad=\overline{2-i}=2+i$

7. 이차방정식의 근의 판별

확인문제 ······ pp.110~119

186 정답 (1) 3 (2) 6

(1) x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+p=0$의 한 근이 3이므로

$x=3$을 대입하면 $3^2-4\cdot 3+p=0$

$\therefore\ p=3$

$p=3$을 주어진 방정식에 대입하면 $x^2-4x+3=0$이므로

$(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $q=1$이므로 $pq=3\cdot 1=3$

(2) 이차방정식 $x^2+4x+1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이면

$\alpha^2+4\alpha+1=0$이고 $\beta^2+4\beta+1=0$이므로

$\alpha^2+4\alpha+4=3$이고 $\beta^2+4\beta+4=3$

$\therefore\ (\alpha+2)^2+(\beta+2)^2=(\alpha^2+4\alpha+4)+(\beta^2+4\beta+4)$
$\quad=3+3=6$

187 정답 -1

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega^3-1=0 \qquad \therefore\ \omega^3=1$

$\therefore\ \omega^7+\omega^{14}=(\omega^3)^2\cdot\omega+(\omega^3)^4\cdot\omega^2$
$\quad=\omega+\omega^2=-1$ ($\because$ ㉠에서 $\omega^2+\omega=-1$)

188 정답 (1) $x=-\frac{5}{6}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

(2) $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$

(1) $\frac{6}{5}x^2-\frac{4}{5}x-\frac{3}{2}=0$의 양변에 10을 곱하면

$12x^2-8x-15=0$

$(6x+5)(2x-3)=0$

$\therefore\ x=-\frac{5}{6}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

$$\begin{array}{ccccc} 6x & \times & 5 & \rightarrow & 10x \\ 2x & & -3 & \rightarrow & -18x \\ \hline & & & & -8x \end{array}$$

(2) 이차항의 계수를 유리수로 고치기 위하여 양변에 $\sqrt{3}-1$을 곱하면

$(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)x^2+(\sqrt{3}-1)(5+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}-1)2\sqrt{3}=0$

$2x^2+2(2\sqrt{3}-1)x+2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=0$이므로

$x^2+(2\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=0$

$(x+\sqrt{3})(x+\sqrt{3}-1)=0$

$\therefore\ x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$

$$\begin{array}{ccccc} x & \times & \sqrt{3} & \rightarrow & \sqrt{3}x \\ x & & \sqrt{3}-1 & \rightarrow & (\sqrt{3}-1)x \\ \hline & & & & (2\sqrt{3}-1)x \end{array}$$

189 정답 (1) $x=0$ 또는 $x=2$

(2) $x=-5$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

(1) 절댓값 기호 안이 0이 되는 x의 값은 $x-2=0$에서 $x=2$ 이므로 2를 기준으로 x의 값의 범위를 나누면

(i) $x<2$일 때, $|x-2|=-x+2$이므로

$x^2-2x+4=4$, $x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

그런데 $x<2$이므로 $x=0$

(ii) $x\ge 2$일 때, $|x-2|=x-2$이므로

$x^2+2x-4=4$

$x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

그런데 $x\ge 2$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=0$ 또는 $x=2$

(2) $|x^2+2x-9|=6$에서

$x^2+2x-9=6$ 또는 $x^2+2x-9=-6$

(i) $x^2+2x-9=6$일 때,

$x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=3$

(ii) $x^2+2x-9=-6$일 때,

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서

$x=-5$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

190 정답 $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=6$

(i) $x<5$일 때, $|x-5|=-x+5$이므로

$-x^2+5x=6$

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

$x<5$이므로 모두 성립한다.

(ii) $x\ge 5$일 때, $|x-5|=x-5$이므로

$x^2-5x=6$

$x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

그런데 $x\ge 5$이므로 $x=6$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=6$

191 정답 (1) $k<\frac{1}{2}$ (2) $k=\frac{1}{2}$ (3) $k>\frac{1}{2}$

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=k^2-2k+1-k^2=-2k+1$$

(1) 서로 다른 두 실근을 가질 때, $\frac{D}{4}>0$이므로

$-2k+1>0$

$-2k>-1$ $\quad\therefore k<\frac{1}{2}$

(2) 중근을 가질 때, $\frac{D}{4}=0$이므로

$-2k+1=0$ $\quad\therefore k=\frac{1}{2}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가질 때, $\frac{D}{4}<0$이므로

$-2k+1<0$

$-2k<-1$ $\quad\therefore k>\frac{1}{2}$

192 정답 1

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k+1)x+k^2-3=0$의 판별식을 D_1라 할 때, 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$\frac{D_1}{4}=(k+1)^2-(k^2-3)=k^2+2k+1-k^2+3$$
$$=2k+4>0$$

$\therefore k>-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$4x^2+2(k+1)x+1=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 할 때,

$$\frac{D_2}{4}=(k+1)^2-4=k^2+2k-3=(k+3)(k-1)=0$$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

㉠에서 $k>-2$이므로 $k=1$

193 정답 -2

x에 대한 이차방정식 $(m-1)x^2+2(m-1)x-3=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 방정식이 중근을 가지면

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2+3(m-1)=0$$

$m^2-2m+1+3m-3=0$

$m^2+m-2=0$, $(m+2)(m-1)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=1$

그런데 주어진 방정식이 이차방정식이 되려면 $m\neq 1$이어야 하므로 구하는 실수 m의 값은 $m=-2$이다.

194 정답 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+a)x+k^2-k+b=0$의 판별

식을 D라 할 때, 이 방정식이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2-k+b)=0$$

$$(2a+1)k+a^2-b=0$$

이 등식이 k의 값에 관계없이 성립하려면

$2a+1=0$이고 $a^2-b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$

195 정답 -3, 2

x에 대한 이차식 $x^2+2(a-1)x+7-a$가 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2+2(a-1)x+7-a=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때.

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(7-a)=0$$

$$a^2-a-6=0,\ (a+3)(a-2)=0$$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=2$

196 정답 2

x에 대한 이차식 $(m+1)x^2+2(m+1)x+2m-1$이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$(m+1)x^2+2(m+1)x+2m-1=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(m+1)^2-(m+1)(2m-1)=0$$

$$(m+1)(-m+2)=0$$

$\therefore\ m=-1$ 또는 $m=2$

이때 $m=-1$이면 주어진 다항식이 이차식이 아니므로 성립하지 않는다.

따라서 $m=2$이다.

197 정답 $2\sqrt{3}$

a, b가 유리수이고 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

따라서 두 근의 차는

$$|2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})|=2\sqrt{3}$$

198 정답 0

a, b가 실수이고 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-i$이면 다른 한 근은 $1+i$이다.

$\therefore\ f(1+i)=0$

199 정답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ (2) $x=1$ 또는 $x=5$ (3) 4

(1) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 2, 5이므로

$$f(2)=0,\ f(5)=0$$

그러므로 $f(3x-1)=0$이려면 $3x-1=2$, $3x-1=5$이어야 한다.

$3x-1=2$에서 $x=1$, $3x-1=5$에서 $x=2$

따라서 $f(3x-1)=0$의 두 근은

$x=1$ 또는 $x=2$

(2) 이차방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근이 1, 3이므로 x에 1, 3을 대입하면 등호가 성립한다.

$$f(2\cdot1-1)=f(1)=0,\ f(2\cdot3-1)=f(5)=0$$

$f(1)=0$, $f(5)=0$에서 방정식 $f(x)=0$의 두 근은

$x=1$ 또는 $x=5$

(3) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=4$$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x-4)=0$이려면

$3x-4=\alpha$ 또는 $3x-4=\beta$

$x=\frac{\alpha+4}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+4}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x-4)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+4}{3}+\frac{\beta+4}{3}=\frac{(\alpha+\beta)+8}{3}=\frac{4+8}{3}=4$$

연습문제 I

pp.120~122

200 정답 2

이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이 α, β이면

$\alpha^2-4\alpha+1=0$, $\beta^2-4\beta+1=0$이므로

$$\alpha^2-3\alpha+1=\alpha,\ \beta^2-3\beta+1=\beta$$

$$\therefore\ \frac{\alpha}{\alpha^2-3\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta^2-3\beta+1}=\frac{\alpha}{\alpha}+\frac{\beta}{\beta}=1+1=2$$

201 정답 5

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이면

$\alpha^2-3\alpha+1=0$이고 $\beta^2-3\beta+1=0$이므로

$$2\alpha^2-6\alpha+7=2(\alpha^2-3\alpha+1)+5=0+5=5$$

$$\beta^2-3\beta+2=(\beta^2-3\beta+1)+1=0+1=1$$

$$\therefore\ \frac{2\alpha^2-6\alpha+7}{\beta^2-3\beta+2}=\frac{5}{1}=5$$

202 정답 5

x에 대한 이차방정식 $x^2-mx+n=0$의 한 근이 2이므로 $x=2$를 대입하면

$$2^2-2m+n=0$$

$$2m-n=4 \quad \cdots\cdots\ ㉠$$

한편, $f(x)=x^2-mx+n$에 대하여 $f(1)=0$이므로

$1-m+n=0$

$m-n=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=3$, $n=2$

$\therefore m+n=3+2=5$

203 정답 (1) $x=-4$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

(2) $x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$ (3) $x=-3\pm\sqrt{17}$

(4) $x=1$ 또는 $x=2+2\sqrt{2}$

(1) $3x^2+10x-8=0$에서 $(x+4)(3x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

(2) 이차방정식의 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times3}}{2\times1}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

(3) $\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-2=0$에서

양변에 4를 곱하면 $x^2+6x-8=0$

이차방정식의 짝수 계수의 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{(-3)^2-1\times(-8)}}{1}=-3\pm\sqrt{17}$$

(4) 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}+1)^2x+2(\sqrt{2}+1)=0$

$x^2-(3+2\sqrt{2})x+2\sqrt{2}+2=0$

$(x-1)\{x-(2+2\sqrt{2})\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2+2\sqrt{2}$

$$\begin{array}{ccccc} x & \searrow\!\!\!\!\nearrow & -1 & \rightarrow & -x \\ x & & -(2+2\sqrt{2}) & \rightarrow & \underline{-(2+2\sqrt{2})x} \\ & & & & -(3+2\sqrt{2})x \end{array}$$

204 정답 (1) $x=2$ 또는 $x=1-\sqrt{7}$ (2) $x=2$

(1) 절댓값 기호 안이 0이 되는 $x=\frac{1}{2}$을 기준으로 x의 값의 범위를 나누면

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $x^2-2x+1=7$

$(x-1)^2=7$

$x-1=\pm\sqrt{7}$

$\therefore x=1+\sqrt{7}$ 또는 $x=1-\sqrt{7}$

그런데 $x<\frac{1}{2}$이므로 $x=1-\sqrt{7}$

(ii) $x\geq\frac{1}{2}$일 때, $x^2+2x-1=7$

$x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq\frac{1}{2}$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=2$ 또는 $x=1-\sqrt{7}$

(2) 절댓값 기호 안이 0이 되는 $x=2$를 기준으로 x의 값의 범위를 나누면

(i) $x<2$일 때, $-x^2+2x+3x=6$

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

그런데 $x<2$이므로 해가 없다.

(ii) $x\geq2$일 때, $x^2-2x+3x=6$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq2$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=2$

205 정답 (1) $k<3$ (2) $k=3$ (3) $k>3$

x에 대한 이차방정식 $x^2+4x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot(k+1)=3-k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$3-k>0$ $\therefore k<3$

(2) 중근을 가지려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$3-k=0$ $\therefore k=3$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$3-k<0$ $\therefore k>3$

206 정답 6

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-3)x+a^2-5a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2-(a^2-5a+2)>0$

$-a+7>0$ $\therefore a<7$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

207 정답 3

x에 대한 이차방정식 $x^2-kx+k-1=0$이 중근을 가지므로 위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(k-1)=0$

$k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0$

$\therefore k=2$

$k=2$를 $x^2-kx+k-1=0$에 대입하면

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

따라서 $a=1$이므로

$k+a=3$

다른 풀이1

문자를 여러 개 포함한 식은 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 정리한 후 인수분해하면 편리하다.

그러므로 $x^2-kx+k-1=0$을 k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$-k(x-1)+x^2-1=0$

$-k(x-1)+(x+1)(x-1)=0$

$(x-1)\{-k+(x+1)\}=0$

$(x-1)(x+1-k)=0$

이 이차방정식은 중근을 갖고 두 근이 $x=1$, $x=k-1$이므로

$1=k-1 \qquad \therefore k=2$

따라서 $k=2$, $a=1$이므로

$k+a=2+1=3$

다른 풀이2

주어진 x에 대한 이차방정식의 중근이 a이므로

$x^2-kx+k-1=(x-a)^2$으로 인수분해 된다.

그러므로 $x^2-kx+k-1=x^2-2ax+a^2$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$k=2a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$k-1=a^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a-1=a^2$

$a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0 \qquad \therefore a=1$

㉠에 $a=1$을 대입하면 $k=2$이므로

$k+a=2+1=3$

208 정답 -7

x에 대한 이차방정식 $x^2-5x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot(-k)<0$

$4k+25<0$

$k<-\dfrac{25}{4}=-6.25$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 -7이다.

209 정답 $a<-1$ 또는 $-1<a\le1$

주어진 x에 대한 방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$이 이차방정식이므로 $a\neq-1$이다.

이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-2(a+1)\ge0$

$2-2a\ge0 \qquad \therefore a\le1$

이때 $a\neq-1$이므로 구하는 a의 값의 범위는

$a<-1$ 또는 $-1<a\le1$

210 정답 6

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k+a)x+k^2+a^2+bk+b-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+a^2+bk+b-4)=0$

$2ak-bk-b+4=0$

$(2a-b)k-(b-4)=0$

위의 등식이 k의 값에 관계없이 성립하여야 하므로

$2a-b=0$, $b-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$

$\therefore a+b=2+4=6$

211 정답 -3

x에 대한 이차식 $x^2+2ax-3a$가 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2+2ax-3a=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=a^2+3a=0$에서 $a(a+3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-3$

따라서 x에 대한 이차식 $x^2+2ax-3a$가 완전제곱식이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은 -3이다.

212 정답 $-\sqrt{3}-1$, -2

a, b가 유리수이면 나머지 한 근은 $\sqrt{3}-1$의 켤레인 $-\sqrt{3}-1$이고 두 근의 합은

$(\sqrt{3}-1)+(-\sqrt{3}-1)=-2$

213 정답 -3

x에 대한 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $1-2i$이므로 $x=1-2i$를 대입하면

$(1-2i)^2-a(1-2i)+b=0$

$1-4i+4i^2-a+2ai+b=0$

$-(3+a-b)-(4-2a)i=0$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3+a-b=0$, $4-2a=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=5$

$\therefore a-b=-3$

다른 풀이

a, b가 실수이고 x에 대한 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $1-2i$이면 다른 한 근은 $1+2i$이다.

따라서 주어진 이차방정식은

$(x-1+2i)(x-1-2i)=0$이므로 전개하여 정리하면

$$x^2-2x+5=0$$

따라서 $a=2$, $b=5$이므로 $a-b=-3$

214 정답 4

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 한 근이 $1+i$이므로 $(1+i)^2+a(1+i)-b=0$이다.

$$(a-b)+(a+2)i=0$$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a-b=0,\ a+2=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-2$

$$\therefore ab=4$$

215 정답 1

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=1$$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x-1)=0$이려면

$$3x-1=\alpha \text{ 또는 } 3x-1=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+1}{3}$$

따라서 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+1}{3}+\frac{\beta+1}{3}=\frac{\alpha+\beta+2}{3}=\frac{1+2}{3}=\frac{3}{3}=1$$

216 정답 2

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta=8$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x)=0$이려면

$$2x=\alpha \text{ 또는 } 2x=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha\beta}{4}=\frac{8}{4}=2$$

연습문제 Ⅱ p.123

217 정답 (1) 풀이 참조 (2) -1

(1) 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이 α이므로 $x=\alpha$를 대입하면

$$\alpha^2-\alpha+1=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\alpha+1$을 곱하면

$$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$$

$$\alpha^3+1=0$$

$$\therefore \alpha^3=-1$$

(2) $\alpha^{20}+\alpha^{10}=(\alpha^3)^6\cdot\alpha^2+(\alpha^3)^3\cdot\alpha$

$$=(-1)^6\cdot\alpha^2+(-1)^3\cdot\alpha$$

$$=\alpha^2-\alpha=-1 \ (\because ㉠에서\ \alpha^2-\alpha=-1)$$

218 정답 41

$f(\alpha)=1$, $f(\beta)=1$이면 $f(\alpha)-1=0$, $f(\beta)-1=0$이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)-1=0$의 두 근이다.

$$\begin{aligned} f(x)-1&=x^2-7x+11-1\\ &=x^2-7x+10\\ &=(x-2)(x-5)\end{aligned}$$

이므로 이차방정식 $f(x)-1=0$, 즉 $f(x)=1$의 두 근은 $x=2$ 또는 $x=5$이다.

$$\therefore \alpha\beta=2\cdot5=10$$

따라서 $f(\alpha\beta)$의 값은

$$f(10)=10^2-7\cdot10+11=41$$

219 정답 4

주어진 이차방정식의 실근을 $x=\alpha$라 하면

$$(\alpha+2)^2+(2\alpha+a)^2=0$$

이때 $\alpha+2$, $2\alpha+a$는 모두 실수이고 (실수)$^2\ge0$이므로

$$\alpha+2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$2\alpha+a=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $\alpha=-2$이므로 ㉡에 대입하면 $-4+a=0$

$$\therefore a=4$$

다른 풀이

주어진 이차방정식을 전개하여 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2+4x+4+4x^2+4ax+a^2=0$$

$$5x^2+4(1+a)x+4+a^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4(1+a)^2-5(4+a^2)\ge0$$

$$4+8a+4a^2-20-5a^2\ge0$$

$$-a^2+8a-16\ge0$$

$$a^2-8a+16\le0$$

$$(a-4)^2\le0$$

a는 실수이므로 (실수)$^2\ge0$이어야 한다.

$$\therefore a=4$$

220 정답 1

x에 대한 이차방정식 $(m-2)x^2+2(m-3)x+m=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$$\frac{D}{4}=(m-3)^2-m(m-2)=-4m+9\ge0$$

$$\therefore m\le\frac{9}{4} \quad \cdots ①$$

이므로 자연수 m은 1, 2이다.

그런데 주어진 방정식이 이차방정식이면 $m\neq2$이므로 구하는 자연수 $m=1$이다. … ②

따라서 자연수 m의 개수는 1이다. … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	이차방정식이 실수인 근을 가질 조건을 이해하기	30%
②	이차방정식이 되는 자연수 m의 값을 구하기	50%
③	자연수 m의 개수를 구하기	20%

8. 이차방정식의 근과 계수의 관계

확인문제 pp.129~133

221

정답 (1) -4 (2) 16 (3) -12 (4) -1

이차방정식 $x^2+2x+4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=4$$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot4=-4$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=(-2)^3-3\cdot4\cdot(-2)=16$$

(3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-2)^2-4\cdot4=-12$

(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\dfrac{-4}{4}=-1$

222

정답 -2

α, β가 이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이면

$$x=\alpha,\ x=\beta$$

를 각각 대입할 때, 등호가 성립하므로

$$\alpha^2+7\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha^2+7\alpha=-1$$

$$\beta^2+7\beta+1=0 \Rightarrow \beta^2+7\beta=-1$$

$$\therefore\ (\alpha^2+\beta^2)+7(\alpha+\beta)=(\alpha^2+7\alpha)+(\beta^2+7\beta)$$
$$=-1+(-1)$$
$$=-2$$

다른 풀이

근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=-7$, $\alpha\beta=1$이므로

$$(\alpha^2+\beta^2)+7(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+7(\alpha+\beta)$$
$$=(-7)^2-2\cdot1+7\cdot(-7)$$
$$=49-2-49$$
$$=-2$$

223

정답 $\dfrac{9}{2}$

이차방정식 $x^2-kx+k-1=0$의 두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 α, 2α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\alpha+2\alpha=3\alpha=k$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{k}{3}$ …… ㉠

(두 근의 곱)$=\alpha\cdot2\alpha=2\alpha^2=k-1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$2k^2-9k+9=0$$

$$(2k-3)(k-3)=0$$

$$\therefore\ k=\frac{3}{2}\ \text{또는}\ k=3$$

따라서 실수 k의 값의 합은 $\dfrac{9}{2}$이다.

08강

224 정답 **0, 1**

두 근의 차가 3이므로 두 근을 α, $\alpha+3$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\alpha+(\alpha+3)=2k-1$

$\therefore k=\alpha+2$ $\cdots\cdots$ ㉠

(두 근의 곱)$=\alpha(\alpha+3)=-2$

$\alpha^2+3\alpha+2=0$

$(\alpha+2)(\alpha+1)=0$

$\therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=-1$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 $k=0$ 또는 $k=1$

225 정답 (1) $\boldsymbol{x^2-7x+12=0}$
(2) $\boldsymbol{x^2-3x+18=0}$
(3) $\boldsymbol{4x^2-x+4=0}$

α, β는 $x^2-3x+4=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$

(1) $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 가지는 이차방정식은

(두 근의 합)$=(\alpha+\beta)+\alpha\beta=3+4=7$

(두 근의 곱)$=(\alpha+\beta)\times\alpha\beta=3\times4=12$

$\therefore x^2-7x+12=0$

(2) $2\alpha-\beta$, $2\beta-\alpha$를 두 근으로 가지는 이차방정식은

(두 근의 합)$=(2\alpha-\beta)+(2\beta-\alpha)=\alpha+\beta=3$

(두 근의 곱)$=(2\alpha-\beta)(2\beta-\alpha)$

$=5\alpha\beta-2(\alpha^2+\beta^2)$

$=5\alpha\beta-2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$

$=9\alpha\beta-2(\alpha+\beta)^2$

$=9\cdot4-2\cdot3^2$

$=18$

$\therefore x^2-3x+18=0$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$를 두 근으로 가지는 이차방정식은

(두 근의 합)$=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{9-2\cdot4}{4}=\dfrac{1}{4}$

(두 근의 곱)$=\dfrac{\beta}{\alpha}\times\dfrac{\alpha}{\beta}=1$

$\therefore x^2-\dfrac{1}{4}x+1=0$ $\quad\therefore 4x^2-x+4=0$

226 정답 $\boldsymbol{4x^2+2x+1=0}$

방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에서 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$을 두 근으로 가지는 이차방정식은

$x^2+2x+4=0$의 각 계수가 거꾸로 배열된 이차방정식이다.

$\therefore 4x^2+2x+1=0$

다른 풀이

(두 근의 합)$=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

(두 근의 곱)$=\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}=0$

양변에 4를 곱하면 $4x^2+2x+1=0$

227 정답 (1) $\boldsymbol{(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})}$
(2) $\boldsymbol{\left(x+\dfrac{3-\sqrt{19}i}{2}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{19}i}{2}\right)}$

(1) 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구하면

$x=2\pm\sqrt{2}$

$\therefore x^2-4x+2=(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$

(2) 이차방정식 $x^2+3x+7=0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구하면

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{19}i}{2}$

$\therefore x^2+3x+7=\left(x+\dfrac{3-\sqrt{19}i}{2}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{19}i}{2}\right)$

228 정답 **-2, 6**

주어진 이차식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2-2x-(y^2+ky+k+2)$

이때 x에 대한 이차방정식

$x^2-2x-(y^2+ky+k+2)=0$

의 두 근은 짝수 계수의 근의 공식에서

$x=1\pm\sqrt{1^2+(y^2+ky+k+2)}$

$=1\pm\sqrt{y^2+ky+k+3}$

이때 두 근이 y의 일차식이 되려면 $\sqrt{y^2+ky+k+3}$의 근호가 벗겨져야 한다.

즉, 근호 안의 식 $y^2+ky+k+3$이 완전제곱식이 되어야 한다.

y에 대한 이차식 $y^2+ky+k+3$이 완전제곱식일 조건은 이차방정식 $y^2+ky+k+3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=k^2-4(k+3)=0$에서

$k^2-4k-12=0$, $(k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=6$

연습문제 I pp.134~136

229 정답 (1) $\boldsymbol{-\dfrac{3}{5}}$ (2) $\boldsymbol{-1}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{-3}{1}=3$, $\alpha\beta=\dfrac{-5}{1}=-5$

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{-5}=-\frac{3}{5}$

(2) $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-5+3+1=-1$

230 정답 (1) -32 (2) 5 (3) -5 (4) 4

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-4$

(1) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-2)^3-3\cdot(-4)\cdot(-2)=-32$

(2) $(\alpha^2-1)(\beta^2-1)=\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)+1$

$=(\alpha\beta)^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+1$

$=(-4)^2-\{(-2)^2-2\cdot(-4)\}+1$

$=5$

(3) $\alpha^2+2\alpha-4=0,\ \beta^2+2\beta-4=0$이므로

$\alpha^2+3\alpha-3=(\alpha^2+2\alpha-4)+\alpha+1=\alpha+1$

$\beta^2+3\beta-3=(\beta^2+2\beta-4)+\beta+1=\beta+1$

$\therefore\ (\alpha^2+3\alpha-3)(\beta^2+3\beta-3)$

$=(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$=(-4)+(-2)+1=-5$

(4) $\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}=\frac{\beta-1+\alpha-1}{(\alpha-1)(\beta-1)}$

$=\frac{\alpha+\beta-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\frac{-2-2}{-4-(-2)+1}=4$

231 정답 $x=-1$ 또는 $x=4$

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서

(두 근의 합)$=1+2=-a\qquad\therefore\ a=-3$

x에 대한 이차방정식 $x^2+cx+d=0$에서

(두 근의 곱)$=1\times(-4)=d$

$\therefore\ d=-4$

따라서 $x^2+ax+d=0$은 $x^2-3x-4=0$이므로

$(x+1)(x-4)=0\qquad\therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$

232 정답 -1

x에 대한 이차방정식 $x^2-3ax+2a-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3a,\ \alpha\beta=2a-3$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3a}{2a-3}=\frac{3}{5}$에서

$15a=6a-9,\ 9a=-9\qquad\therefore\ a=-1$

233 정답 $a=4,\ b=3$

x에 대한 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 $a-1,\ b-2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=(a-1)+(b-2)=a$에서 $b=3$

(두 근의 곱)$=(a-1)(b-2)=b$이므로 $b=3$을 대입하면

$a-1=3$에서 $a=4$

$\therefore\ a=4,\ b=3$

234 정답 $a=2,\ b=4$

x에 대한 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=a\qquad\cdots\cdots$ ㉠

x에 대한 이차방정식 $x^2-bx+4=0$의 두 근이 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\alpha\beta=b,\ \alpha\beta(\alpha+\beta)=4\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2+a=b,\ 2a=4$

$\therefore\ a=2,\ b=4$

235 정답 6

두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 $2k,\ 3k$(k는 실수)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=2k+3k=m-1$

$\therefore\ 5k=m-1\qquad\cdots\cdots$ ㉠

(두 근의 곱)$=2k\times3k=6$

$k^2=1\qquad\therefore\ k=-1$ 또는 $k=1$

이것을 ㉠에 각각 대입하면

$m=-4$ 또는 $m=6$

이때 $m>0$이므로 $m=6$

236 정답 3

두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로 한 근을 α라 하면 다른 한 근은 $-\alpha$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\alpha+(-\alpha)=a^2-2a-3$에서

$a^2-2a-3=0,\ (a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때

$x^2-8=0$에서 $x=\pm2\sqrt{2}$

두 근이 정수가 아니므로 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $a=3$일 때

$x^2-4=0$에서 $x=\pm2$

두 근이 모두 정수이므로 조건을 만족한다.

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 3이다.

237 정답 5

이차방정식 $x^2-kx+k+1=0$의 두 근을 $n,\ n+1$(n은 자연수)로 놓으면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=n+(n+1)=k$ ······ ㉠

(두 근의 곱)$=n(n+1)=k+1$ ······ ㉡

㉠에서 $k=2n+1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$n^2+n=2n+2$

$n^2-n-2=0$, $(n+1)(n-2)=0$

$\therefore n=-1$ 또는 $n=2$

그런데 n은 자연수이므로 $n=2$이고 이것을 ㉠에 대입하면 $k=5$이다.

238 정답 $x=1$ 또는 $x=2$

하림이는 a, c를 옳게 보고 풀었으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 곱)$=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\cdot 4=2$

$\therefore c=2a$ ······ ㉠

준아는 a, b를 옳게 보고 풀었으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-\frac{b}{a}=-1+4=3$

$\therefore b=-3a$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-3ax+2a=0$

$a\neq 0$이므로 양변을 a로 나누면

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

따라서 옳은 근은 $x=1$ 또는 $x=2$이다.

239 정답 (1) $x^2+2x-2=0$ (2) $x^2-10x+28=0$

(1) (두 근의 합)$=(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})=-2$

(두 근의 곱)$=(-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})=(-1)^2-(\sqrt{3})^2$
$=-2$

$\therefore x^2+2x-2=0$

(2) (두 근의 합)$=(5+\sqrt{3}i)+(5-\sqrt{3}i)=10$

(두 근의 곱)$=(5+\sqrt{3}i)(5-\sqrt{3}i)=5^2-(\sqrt{3}i)^2=28$

$\therefore x^2-10x+28=0$

240 정답 (1) $x^2-4x+1=0$ (2) $x^2-4x+5=0$

(1) 계수가 유리수이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이므로 구하는 이차방정식은

$x^2-\{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\}x+(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=0$

$\therefore x^2-4x+1=0$

(2) 계수가 실수이면 다른 한 근은 $2-i$이므로 구하는 이차방정식은

$x^2-\{(2+i)+(2-i)\}x+(2+i)(2-i)=0$

$\therefore x^2-4x+5=0$

241 정답 (1) $\begin{cases}\alpha=-2+\sqrt{2}\\ \beta=-2-\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=-2-\sqrt{2}\\ \beta=-2+\sqrt{2}\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\\ \beta=\frac{1}{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=\frac{1}{2}\\ \beta=\frac{1}{3}\end{cases}$

(1) $\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=2$일 때, α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+4x+2=0$

위의 이차방정식의 두 근을 근의 공식을 이용하여 구하면

$x=-2\pm\sqrt{2}$

$\therefore \begin{cases}\alpha=-2+\sqrt{2}\\ \beta=-2-\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=-2-\sqrt{2}\\ \beta=-2+\sqrt{2}\end{cases}$

(2) $\alpha+\beta=\frac{5}{6}$, $\alpha\beta=\frac{1}{6}$일 때, α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$

양변에 6을 곱하여 풀면

$6x^2-5x+1=0$, $(3x-1)(2x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore \begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\\ \beta=\frac{1}{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=\frac{1}{2}\\ \beta=\frac{1}{3}\end{cases}$

242 정답 $3x^2+2x+1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{3}$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=0$

그런데 x^2의 계수가 3인 이차방정식을 구하므로 양변에 3을 곱하면

$3x^2+2x+1=0$

다른 풀이

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 역수를 근으로 하는 이차방정식은 계수의 배열이 역순이 되므로 $cx^2+bx+a=0$이 된다. 즉, $x^2+2x+3=0$의 근의 역수를 근으로 하는 이차방정식은 $3x^2+2x+1=0$이다.

243 정답 (1) $(x^2+1)(x^2-2)$
(2) $(x^2+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$
(3) $(x+i)(x-i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$x^2=X$로 놓으면

x^4-x^2-2
$=X^2-X-2=(X+1)(X-2)$
$=(x^2+1)(x^2-2)$ ⇦ (1) 유리수 범위
$=(x^2+1)\{(x^2-(\sqrt{2})^2\}$
$=(x^2+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ ⇦ (2) 실수 범위
$=(x^2-i^2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$
$=(x+i)(x-i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ ⇦ (3) 복소수 범위

244 정답 2

주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2+(y-3)x-(2y^2-k)$$

이때 x에 대한 이차방정식

$$x^2+(y-3)x-(2y^2-k)=0$$

의 두 근을 근의 공식을 이용하여 구하면

$$x=\frac{-(y-3)\pm\sqrt{(y-3)^2+4(2y^2-k)}}{2}$$
$$=\frac{-(y-3)\pm\sqrt{9y^2-6y+9-4k}}{2}$$

이때 두 근이 y의 일차식이 되려면 $\sqrt{9y^2-6y+9-4k}$의 근호가 벗겨져야 한다.

즉, 근호 안의 식 $9y^2-6y+9-4k$가 완전제곱식이 되어야 하므로 y에 대한 이차식 $9y^2-6y+9-4k$가 완전제곱식일 조건을 구한다. $9y^2-6y+9-4k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=3^2-9(9-4k)=0 \qquad \therefore k=2$$

개념 보충

x, y에 대한 이차식 $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$를 x에 대한 내림차순으로 정리하면

⇨ $ax^2+(cy+d)x+by^2+ey+f$

⇨ 근의 공식으로 근을 구하면

$$x=\frac{-(cy+d)\pm\sqrt{D}}{2a}$$

⇨ $\sqrt{\ }$가 벗겨지려면 D가 완전제곱식이 되어야 한다.

⇨ D의 $D=0$

⇨ $x=(y$의 일차식$)$

⇨ $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$가 두 일차식의 곱으로 인수분해

실제로 **244**번의 이차식은 $k=2$일 때,

$$(x+2y-1)(x-y-1)$$

로 인수분해된다.

연습문제 Ⅱ

p.137

245 정답 9

이차방정식 $x^2+(p-3)x+1=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-(p-3)=3-p,\ \alpha\beta=1$$

한편 α, β가 이차방정식 $x^2+(p-3)x+1=0$의 근이므로 대입하면 등호가 성립한다.

$\alpha^2+(p-3)\alpha+1=0$ …… ㉠
$\beta^2+(p-3)\beta+1=0$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha^2+p\alpha+1=3\alpha$
㉡에서 $\beta^2+p\beta+1=3\beta$

$$\therefore (1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)=3\alpha\cdot3\beta$$
$$=9\alpha\beta=9\cdot1$$
$$=9$$

246 정답 10

x에 대한 이차방정식 $x^2+(1-3m)x+2m^2+m-5=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3m-1,\ \alpha\beta=2m^2+m-5$$

두 근의 차가 4이면 $|\alpha-\beta|=4$이므로

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=(3m-1)^2-4(2m^2+m-5)=16$$
$$\therefore m^2-10m+5=0$$

이때, $m^2-10m+5=0$의 두 근은 실수이므로 모든 실수 m의 값의 합은 근과 계수의 관계에서

(두 근의 합)$=10$

247 정답 ④

ㄱ. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 이차방정식 $cx^2+2bx+a=0$의 두 근을 α', β'라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=\frac{c}{a},\ \alpha'\beta'=\frac{a}{c}$$

이므로 $\alpha\beta=\alpha'\beta'$이라고 할 수 없다. (거짓)

ㄴ. $ac<0$이면 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 b^2-4ac에서 $b^2\ge0$이고 $-4ac>0$이므로

$b^2-4ac>0$

따라서 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
마찬가지로 $cx^2+2bx+a=0$의 판별식은 $4b^2-4ac>0$이 되어 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $cx^2+2bx+a=0$이 허근을 가지면 판별식 $4b^2-4ac<0$이므로 $ax^2+bx+c=0$의 판별식

$$b^2-4ac\le4b^2-4ac<0$$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$도 허근을 가진다. (참)

따라서 〔보기〕에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄷ. $cx^2+2bx+a=0$이 허근을 가지면 $\frac{D}{4}=b^2-ac<0$이므로

$b^2<ac \qquad \therefore ac>0 \ (\because b^2 \ge 0)$

$ax^2+bx+c=0$의 판별식은

$b^2-4ac=(b^2-ac)-3ac<0$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$도 허근을 가진다.(참)

248 정답 5 서술형

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a, \ \alpha\beta=-2a$ … ①

$a>0$이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta<0$에서 α와 β의 부호가 다르다.

그러므로 $\alpha<0<\beta$라 하자. … ②

$(|\alpha|+|\beta|)^2=(-\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=a^2+8a=9$

즉, $a^2+8a-9=0$이므로 $(a+9)(a-1)=0$

$\therefore a=-9$ 또는 $a=1$

그런데 $a>0$이므로 $a=1$이다. … ③

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2+4a=5$ … ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하기	20%
②	α와 β의 부호를 알아내기	20%
③	$\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert=3$이 되는 a의 값을 구하기	40%
④	$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하기	20%

9. 이차방정식과 이차함수

확인문제 pp.142~151

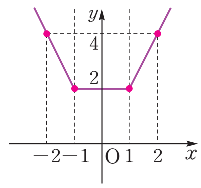
249 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $y=|x+1|+|x-1|$의 절댓값 안이 0이 되는 x의 값은 -1, 1이고 그때의 y의 값은 모두 2이므로 꺾인 점은 $(-1, 2)$, $(1, 2)$이다.

$x=-2$일 때 $y=4$이므로 점 $(-2, 4)$를 지나고,

$x=2$일 때 $y=4$이므로 점 $(2, 4)$를 지난다.

각 구간에서는 일차식이므로 직선이 되고 각 점을 이으면 그래프는 아래와 같다.

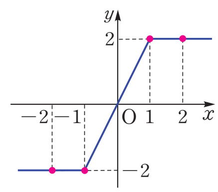


(2) $y=|x+1|-|x-1|$의 절댓값 안이 0이 되는 x의 값은 -1, 1이고 그때의 y의 값은 각각 -2, 2이므로 꺾인 점은 $(-1, -2)$, $(1, 2)$이다.

$x=-2$일 때 $y=-2$이므로 점 $(-2, -2)$를 지나고,

$x=2$일 때 $y=2$이므로 점 $(2, 2)$를 지난다.

각 구간에서는 일차식이므로 직선이 되고 각 점을 이으면 그래프는 아래와 같다.



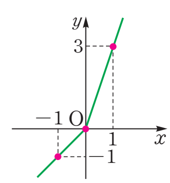
250 정답 풀이 참조

$y=|x|+2x$는 $x=0$일 때 절댓값이 0이 되고 그때의 y의 값은 0이므로 점 $(0, 0)$이 꺾인 점이다.

$x=1$일 때 $y=3$이므로 점 $(1, 3)$을 지나고,

$x=-1$일 때 $y=-1$이므로 점 $(-1, -1)$을 지난다.

각 구간에서는 일차식이므로 직선이 되고 꺾인 점과 두 점을 이으면 그래프는 아래와 같다.



251 정답 (1) $y=-3(x-1)^2-1$ 또는 $y=-3x^2+6x-4$

(2) $y=-2(x-1)^2+8$ 또는 $y=-2x^2+4x+6$

(3) $y=3x^2-4x+2$

(1) 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -1)$이므로 구하는 함수를

$y=a(x-1)^2-1\ (a\neq0)$로 두고 점 $(0,\ -4)$를 대입하면

$-4=a-1$에서 $a=-3$

$\therefore\ y=-3(x-1)^2-1$

(2) 축의 방정식이 $x=1$이므로 구하는 함수를

$y=a(x-1)^2+b\ (a\neq0)$라 두고 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 6)$을 각각 대입하면

$4a+b=0,\ a+b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=8$

$\therefore\ y=-2(x-1)^2+8$

(3) 구하는 함수를 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$라 두고 세 점 $(-1,\ 9)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 2)$를 지나므로 각각 대입하면

$9=a-b+c,\ 1=a+b+c,\ 2=c$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-4,\ c=2$

$\therefore\ y=3x^2-4x+2$

252 정답 $y=(x-1)^2+3$

이차함수 $y=x^2$의 그래프를 평행이동시킨 것이므로 구하는 이차함수의 식을 직선 $y=(x-a)^2+b$ (단, a, b는 상수)라 놓을 수 있다.

이때 꼭짓점 $(a,\ b)$는 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로 대입하면

$b=2a+1$ …… ㉠

이 함수의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로 대입하면

$4=(2-a)^2+b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$4=(2-a)^2+2a+1,\ a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0\qquad \therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

따라서 구하는 이차함수는 $y=(x-1)^2+3$

253 정답 (1) $>$ (2) $>$ (3) $=$ (4) $<$

$y=f(x)=ax^2-bx+c$라 하면 그 그래프는 아래로 볼록하고 y절편이 -1과 0 사이이므로

$a>0,\ -1<c<0$

(1) 대칭축이 $x=\dfrac{b}{2a}>0$에서 $b>0$

(2) $f(-1)=a+b+c>0$ ← $x=-1$에서의 함숫값

(3) $f(1)=a-b+c=0$ ← $x=1$에서의 함숫값

(4) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}a-\dfrac{b}{2}+c=\dfrac{1}{4}(a-2b+4c)<0$ ← $x=\dfrac{1}{2}$에서의 함숫값

$\therefore\ a-2b+4c<0$

다른 풀이

(1) 대칭축이 y축의 오른쪽에 있으면 a와 $-b$의 부호가 다르므로(우이)

$-b<0\qquad \therefore\ b>0$

254 정답 $x=-3$ 또는 $x=1$

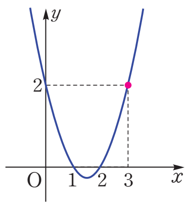
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 대칭축의 왼쪽에서 x축과 만나는 점의 x좌표를 α라 하면 대칭축이 $x=-1$이므로 대칭성에 의하여

$\dfrac{\alpha+1}{2}=-1\qquad \therefore\ \alpha=-3$

이차방정식 $f(x)=0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표이므로

$x=-3$ 또는 $x=1$

255 정답 $y=(x-1)(x-2)$



x축과 $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을

$y=a(x-1)(x-2)\ (a\neq0)$

라 둘 수 있다.

이때 점 $(3,\ 2)$를 지나므로 $x=3$, $y=2$를 대입하면

$2=a(3-1)(3-2)$에서 $a=1$

$\therefore\ y=(x-1)(x-2)$

256 정답 (1) $n>-4$ (2) $n<-4$

$y=x^2$과 $y=4x+n$에서 y를 소거하면

$x^2=4x+n\qquad \therefore\ x^2-4x-n=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2+n=4+n$

두 함수의 그래프의 교점의 개수는 방정식 ㉠의 실근의 개수와 같으므로

(1) 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$\dfrac{D}{4}=4+n>0\qquad \therefore\ n>-4$

(2) 두 그래프가 만나지 않으려면 이차방정식 ㉠이 실근을 갖지 않아야 하므로

$\dfrac{D}{4}=4+n<0\qquad \therefore\ n<-4$

257 정답 1

$y=x^2+n$과 $y=2x$에서 y를 소거하면

$x^2+n=2x\qquad \therefore\ x^2-2x+n=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-n=1-n$

두 함수의 그래프의 교점의 개수는 방정식 ㉠의 실근의 개수와 같으므로 두 그래프가 접하려면 중근을 가져야 한다.

$\dfrac{D}{4}=1-n=0\qquad \therefore\ n=1$

258 정답 (1) $a=4,\ b=0$ (2) $m=1,\ n=0$

(1) 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=3x+2$의 교점의 x좌표는 y를 소거한 이차방정식

$x^2+ax+b=3x+2$

$x^2+(a-3)x+(b-2)=0$ …… ㉠

㉠의 실근이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은

$x=-2$ 또는 $x=1$

이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=(-2)+1=-(a-3)$ $\therefore a=4$

(두 근의 곱)$=(-2)\cdot 1=b-2$ $\therefore b=0$

다른 풀이

$x^2+(a-3)x+(b-2)=0$의 두 근이 $x=-2$ 또는 $x=1$이므로 근을 대입하면 등식이 성립한다.

$x=-2$를 대입하면 $4-2a+6+b-2=0$

$-2a+b=-8$ …… ㉠

$x=1$을 대입하면

$1+a-3+b-2=0$

$a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=0$

(2) 이차함수 $y=x^2-x-2$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 만나는 두 점의 x좌표는 y를 소거한 이차방정식

$x^2-x-2=mx+n$

$x^2-(m+1)x-(n+2)=0$ …… ㉡

의 두 실근과 같다.

이때 한 교점의 x좌표가 $1+\sqrt{3}$이므로 방정식 ㉡의 한 근은 $1+\sqrt{3}$이다.

한편 $m,\ n$이 유리수이므로 방정식 ㉡의 한 근이 $1+\sqrt{3}$이면 켤레근의 성질에 의하여 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=m+1=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$

(두 근의 곱)$=-n-2=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2$

$\therefore m=1,\ n=0$

259 정답 (1) 3 (2) 5

(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축과 만나는 점의 x좌표와 같으므로 주어진 그림에서

$x=-2$ 또는 $x=5$

따라서 구하는 두 근의 합은

$(-2)+5=3$

(2) $ax^2+(b-m)x+c-n=0$에서

$ax^2+bx+c=mx+n$

위의 방정식의 두 근은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 만나는 점의 x좌표와 같으므로 주어진 그림에서

$x=-2$ 또는 $x=7$

따라서 구하는 두 근의 합은

$(-2)+7=5$

연습문제 I

pp.152~153

260 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

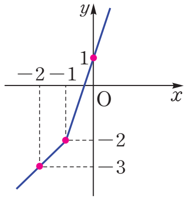
(1) $y=2x+|x+1|$은 $x=-1$일 때 절댓값 안이 0이 되고 그때의 y의 값은 -2이므로

점 $(-1,\ -2)$가 꺾인 점이다.

$x=0$일 때 $y=1$이므로 점 $(0,\ 1)$을 지나고,

$x=-2$일 때 $y=-3$이므로 점 $(-2,\ -3)$을 지난다.

각 구간에서는 일차식이므로 직선이 되고 꺾인 점과 두 점을 이으면 그래프는 아래와 같다.



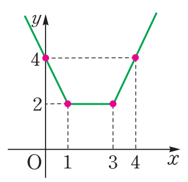
(2) $y=|x-1|+|x-3|$의 절댓값 안이 0이 되는 x의 값은 1, 3이고 그때의 y의 값은 모두 2이므로

꺾인 점은 $(1,\ 2)$, $(3,\ 2)$이다.

$x=0$일 때 $y=4$이므로 점 $(0,\ 4)$를 지나고,

$x=4$일 때 $y=4$이므로 점 $(4,\ 4)$를 지난다.

각 구간에서는 일차식이므로 직선이 되고 각 점을 이으면 그래프는 아래와 같다.



261 정답 (1) $y=-(x-1)^2$ 또는 $y=-x^2+2x-1$

(2) $y=\frac{1}{3}(x+1)^2+2$ 또는 $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$

(3) $y=-(x-1)(x-3)$

또는 $y=-x^2+4x-3$

(4) $y=-x^2-4x+5$

(1) $x=1$에서 x축에 접하므로 이차함수의 식을

$y=a(x-1)^2\ (a\neq 0)$이라 두고

점 $(-1,\ -4)$를 지나므로 대입하면

$-4=a(-1-1)^2$에서 $a=-1$

$\therefore y=-(x-1)^2$

(2) 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 2)$이므로

$y=a(x+1)^2+2\,(a\neq0)$라 두자.

점 $(2, 5)$를 지나므로 대입하면

$5=a(2+1)^2+2$에서 $a=\frac{1}{3}$

$\therefore y=\frac{1}{3}(x+1)^2+2$

(3) x축과 $(1, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을

$y=a(x-1)(x-3)\,(a\neq0)$이라 두자.

점 $(4, -3)$을 지나므로 대입하면

$-3=a(4-1)(4-3)$에서 $a=-1$

$\therefore y=-(x-1)(x-3)$

(4) 이차함수의 식을

$y=ax^2+bx+c$(단, a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 두자.

세 점 $(0, 5)$, $(1, 0)$, $(2, -7)$을 지나므로 각각 대입하면

$c=5$, $a+b+c=0$, $4a+2b+c=-7$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-4$, $c=5$

$\therefore y=-x^2-4x+5$

262 정답 (1) $>$ (2) $<$ (3) $<$ (4) $>$

$y=f(x)=ax^2-bx+c$라 하면 그 그래프는 위로 볼록하므로

$a<0$

y절편이 0과 2 사이이므로

$0<c<2$

(1) 축의 방정식 $x=\frac{b}{2a}<0$ ← 대칭축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $-b$와 a의 부호는 서로 같다.

이고 $a<0$이므로 $b>0$

(2) $f(1)=a-b+c<0$ ← $x=1$에서의 함숫값

(3) $f(-2)=4a+2b+c<0$ ← $x=-2$에서의 함숫값

(4) $a+2b+4c=4\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)$이고

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c>0$ ← $x=-\frac{1}{2}$에서의 함숫값

$\therefore a+2b+4c>0$

263 정답 (1) 만난다, -2, 2 (2) 만난다, -3, 1 (3) 만난다, 1 (4) 만나지 않는다.

(1) $(x+2)(x-2)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고 이때의 x좌표는 -2, 2이다.

(2) $-x^2-2x+3=0$에서 $-(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고 이때의 x좌표는 -3, 1이다.

(3) $2x^2-4x+2=0$에서 $2(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

따라서 x축과 한 점에서 만나고 이때의 x좌표는 1이다.

(4) $-3x^2+2x-2=0$에서 $3x^2-2x+2=0$

따라서 $\frac{D}{4}=1-6<0$이므로 x축과 만나지 않는다.

264 정답 $x=1$ 또는 $x=3$

방정식 $f(x)=0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표와 같으므로

$x=1$ 또는 $x=5$

즉, $f(1)=0$, $f(5)=0$이므로 $f(2x-1)=0$이 되려면

$2x-1=1$에서 $x=1$,

$2x-1=5$에서 $x=3$

따라서 방정식 $f(2x-1)=0$의 해는

$x=1$ 또는 $x=3$

다른 풀이

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 1과 5이므로

$f(x)=a(x-1)(x-5)\,(a\neq0)$

라 둘 수 있다. 이때 이차방정식 $f(2x-1)=0$은

$a(2x-1-1)(2x-1-5)=0$

$4a(x-1)(x-3)=0$

이 되므로 이차방정식 $f(2x-1)=0$의 해는

$x=1$ 또는 $x=3$

265 정답 $x=2$ 또는 $x=4$

이차함수 $y=ax^2-6ax+k$의 그래프의 축의 방정식은

$y=a(x-3)^2+k-9a$이므로 $x=3$이다.

이차방정식 $ax^2-6ax+k=0$의 두 실근은 이차함수

$y=ax^2-6ax+k$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같다.

주어진 그래프에서 이차함수 $y=ax^2-6ax+k$의 그래프는 x축과 점 $(2, 0)$에서 만난다.

이때 다른 교점의 x좌표를 α라 하면 이차함수의 그래프의 축이 $x=3$이므로 대칭성에 의하여

$\frac{\alpha+2}{2}=3 \qquad \therefore \alpha=4$

따라서 이차방정식 $ax^2-6ax+k=0$의 두 실근은 $x=2$ 또는 $x=4$이다.

다른 풀이

이차방정식 $ax^2-6ax+k=0$의 해가 $x=2$이므로 대입하면

$4a-12a+k=0 \qquad \therefore k=8a$

$k=8a$를 다시 이차방정식에 대입하면

$ax^2-6ax+8a=0$

$a\neq0$이므로 $x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

266 정답 10

이차함수 $y=x^2+(k-3)x+k$의 그래프가 x축에 접하려면 이차방정식 $x^2+(k-3)x+k=0$이 중근을 가져야 하므로

$$D=(k-3)^2-4k=0$$

$$k^2-10k+9=0,\ (k-1)(k-9)=0$$

$$\therefore\ k=1 \text{ 또는 } k=9$$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 10이다.

개념 보충

$k^2-10k+9=0$은 k에 대한 이차방정식이다.
구하는 것은 이차방정식을 만족하는 k의 값의 합이므로 근과 계수의 관계에 의해 (두 근의 합)$=\dfrac{-10}{-1}=10$으로 구할 수도 있다.

267 정답 (1) 2 (2) 1 (3) 0 (4) 2

(1) $y=-x^2+6x-4$에 $y=x$를 대입하여 정리하면

$$x^2-5x+4=0$$

$D=25-16>0$이므로 교점의 개수는 2개이다.

(2) $y=x^2+3x+1$에 $y=x$를 대입하여 정리하면

$$x^2+2x+1=0$$

$D=4-4=0$이므로 교점의 개수는 1개이다.

(3) $y=x^2-2x+4$에 $y=x$를 대입하여 정리하면

$$x^2-3x+4=0$$

$D=9-16<0$이므로 교점의 개수는 0개이다.

(4) $y=2x^2-4x+2$에 $y=x$를 대입하여 정리하면

$$2x^2-5x+2=0$$

$D=25-16>0$이므로 교점의 개수는 2개이다.

268 정답 (1) $k>-2$ (2) $k=-2$ (3) $k<-2$

$y=x^2-2x+2$에 $y=2x+k$를 대입한 후 x에 대하여 정리하면

$$x^2-4x+2-k=0$$

위의 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$D=4^2-4\cdot1\cdot(2-k)=8+4k$$

(1) $D=8+4k>0$이므로 $k>-2$

(2) $D=8+4k=0$이므로 $k=-2$

(3) $D=8+4k<0$이므로 $k<-2$

269 정답 $y=2x+5$

직선 $2x-y+1=0$과 평행한 직선의 방정식을 $y=2x+k\,(k\neq1)$로 놓으면 이 직선이 이차함수 $y=x^2-2x+9$의 그래프에 접하므로

$$x^2-2x+9=2x+k$$

$$x^2-4x+9-k=0$$

위의 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$$\frac{D}{4}=4-(9-k)=0 \qquad \therefore\ k=5$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x+5$이다.

270 정답 1

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=3x+1$이 만나는 한 점의 x좌표는 $2-\sqrt{3}$이고 이 값은 이차방정식

$$x^2+ax+b=3x+1 \Rightarrow x^2+(a-3)x+b-1=0$$

의 한 실근이다.

이때 a, b가 유리수이고 한 근이 $2-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 합})=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a+3$$

에서 $a=-1$

$$(\text{두 근의 곱})=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b-1$$

에서 $b=2$

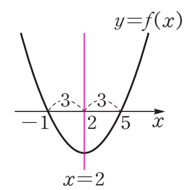
$$\therefore\ a+b=(-1)+2=1$$

연습문제 Ⅱ p.154

271 정답 -5

이차함수 $f(x)=x^2-4x+a$의 그래프의 축의 방정식은 $f(x)=(x-2)^2+a-4$이므로 $x=2$이다.

이 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 6이면 이차함수의 그래프의 대칭성에 의하여 두 교점의 x좌표는



$$2-3=-1,\ 2+3=5$$

따라서 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 두 근이 $x=-1$ 또는 $x=5$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 곱})=(-1)\cdot5=a$$

$$\therefore\ a=-5$$

다른 풀이

그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, $\alpha+6$이라 하면 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(\alpha+6)=4,\ 2\alpha+6=4 \qquad \therefore\ \alpha=-1$$

이때 (두 근의 곱)$=\alpha(\alpha+6)=a$이므로 $-1\cdot5=a$

$$a=-5$$

272 정답 6

$y=x^2+3x-1$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동시키면

$$y=x^2+3x-1+a$$

이 이차함수의 그래프가 직선 $y=-x+1$과 접해야 하므로 연립한 이차방정식

$$x^2+3x-1+a=-x+1 \Rightarrow x^2+4x+a-2=0$$

이 중근을 가진다.

위의 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=4-(a-2)=0 \qquad \therefore a=6$$

273 정답 풀이 참조

α_1, β_1은 이차방정식

$$px^2+qx+r=ax+b \Rightarrow px^2+(q-a)x+r-b=0$$

의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_1+\beta_1=-\frac{q-a}{p} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

α_2, β_2는 이차방정식

$$px^2+qx+r=ax+d \Rightarrow px^2+(q-a)x+r-d=0$$

의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_2+\beta_2=-\frac{q-a}{p} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$이다.

274 정답 26

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=-x+4$와 접하므로 이차방정식

$$x^2+ax+b=-x+4 \Rightarrow x^2+(a+1)x+b-4=0$$

의 근이 중근이다.

따라서 위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+1)^2-4(b-4)=0,\ 4b=(a+1)^2+16 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또한, 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=5x+1$과 접하므로 이차방정식

$$x^2+ax+b=5x+1 \Rightarrow x^2+(a-5)x+b-1=0$$

의 근이 중근이므로 판별식을 D라 하면

$$D=(a-5)^2-4(b-1)=0,\ 4b=(a-5)^2+4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(a+1)^2+16=(a-5)^2+4,\ 12a=12$$

$$\therefore a=1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉠(또는 ㉡)에 대입하면 $b=5$

$$\therefore a^2+b^2=1+25=26$$

275 정답 1 .... 서술형

이차함수 $y=x^2-2ax-3$의 y절편이 -3이므로 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(0,\ -3)$이다.

$\triangle$ABC의 넓이가 6이고 $\overline{\mathrm{OC}}=3$이므로

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{OC}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{AB}}=6 \qquad \therefore \overline{\mathrm{AB}}=4 \qquad \cdots ①$$

여기서 $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$, $\mathrm{B}(\beta,\ 0)$이라 놓으면 α, β는 이차방정식 $x^2-2ax-3=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=-3$$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\beta-\alpha=4$이므로

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=(2a)^2-4\cdot(-3)\\&=4a^2+12=16\end{aligned} \qquad \cdots ②$$

따라서 $a^2=1$에서 $a>0$이므로 $a=1$이다. $\cdots$ ③

[채점 기준표]

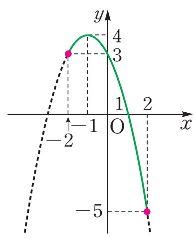
단계	채점 요소	배점
①	$\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구하기	30 %
②	$\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 a에 관한 식으로 나타내기	50 %
③	a의 값을 구하기	20 %

10. 이차함수의 최대 · 최소

확인문제 .... pp.158~165

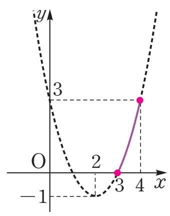
276 정답 (1) **최댓값 : 4, 최솟값 : -5**
(2) **최댓값 : 3, 최솟값 : 0**

(1) $y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$
이므로 꼭짓점의 x좌표는 -1이다.
꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위 $-2\leq x\leq 2$에 포함되므로
(ⅰ) 주어진 범위의 양 끝점의 y좌표를 조사하면
$x=-2$일 때, $y=3$
$x=2$일 때, $y=-5$
(ⅱ) 꼭짓점의 y좌표를 조사하면
$x=-1$일 때, $y=4$



따라서 최댓값은 4이고 최솟값은 -5이다.

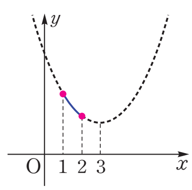
(2) $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$
이므로 꼭짓점의 x좌표는 2이다.
꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위 $3\leq x\leq 4$에 포함되지 않으므로
주어진 범위의 양 끝점의 y좌표를 조사하면
$x=3$일 때, $y=0$
$x=4$일 때, $y=3$



따라서 최댓값은 3이고 최솟값은 0이다.

277 정답 **12**

$y=ax^2-6ax+b$
$=a(x^2-6x+9)+b-9a$
$=a(x-3)^2+b-9a$
이므로 이차항의 계수 a는 양수이고 꼭짓점의 x좌표는 3이므로 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위 $1\leq x\leq 2$에 포함되지 않는다.

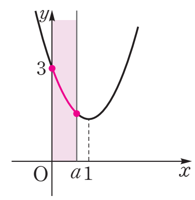


$1\leq x\leq 2$일 때, 함수 $y=ax^2-6ax+b$는 $x=1$에서 최댓값을 가지고, $x=2$에서 최솟값을 가진다.
$x=1$일 때, $y=6$이므로 $b-5a=6$ ······ ㉠
$x=2$일 때, $y=3$이므로 $b-8a=3$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=11$
$\therefore a+b=1+11=12$

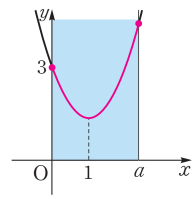
278 정답 **3**

$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$
이므로 함수 $f(x)$는 이차항의 계수가 양수이고 꼭짓점의 x좌표가 1인 이차함수이다.

(ⅰ) $0\leq a<1$일 때
오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값을 가지고 최댓값은 $f(0)=3$이므로 최댓값이 6이라는 조건에 맞지 않는다.



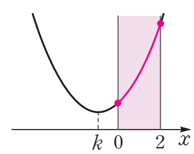
(ⅱ) $a\geq 1$일 때
오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=a$에서 최댓값을 가진다.
이때 $f(0)=3$이므로 조건에 맞지 않는다.
따라서 $x=a$에서 최댓값을 가지고 최댓값은 $f(a)=a^2-2a+3=6$이므로



$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$
이때 $a\geq 1$이므로 $a=3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=3$이다.

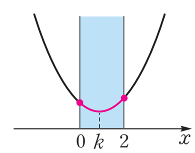
279 정답 **0**

$f(x)=x^2-2kx+k^2+k=(x-k)^2+k$
이므로 꼭짓점의 x좌표는 k이다.
(ⅰ) $k<0$일 때
오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $f(0)=k^2+k$를 가진다.
$f(0)=k^2+k=2$에서

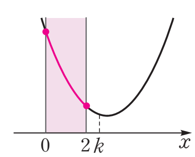


$k^2+k-2=0$
$(k+2)(k-1)=0$
$\therefore k=-2$ 또는 $k=1$
그런데 $k<0$이므로 $k=-2$

(ⅱ) $0\leq k\leq 2$일 때
함수 $f(x)$는 $x=k$에서 최솟값 $f(k)=k$를 가진다.
$f(k)=k=2$
이때 $0\leq k\leq 2$인 조건을 만족하므로
$k=2$



(ⅲ) $k>2$일 때
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $f(2)=k^2-3k+4$를 가진다.
$f(2)=k^2-3k+4=2$이면



$k^2-3k+2=0$, $(k-1)(k-2)=0$
$\therefore k=1$ 또는 $k=2$
그런데 $k=1$ 또는 $k=2$는 $k>2$인 조건을 만족하지 않는다.
(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 모든 k의 값의 합은
$(-2)+2=0$

280 정답 3

$x^2+2=t$로 놓으면 $x^2\geq 0$이므로

$t=x^2+2\geq 2 \qquad \therefore t\geq 2$

따라서 주어진 함수는

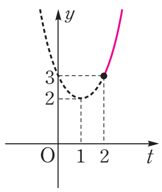
$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2\ (t\geq 2)$

이므로 $t=2$, 즉 $x=0$일 때,

최솟값 $(2-1)^2+2=3$을 가진다.

$\therefore a=0,\ b=3$

$\therefore a+b=0+3=3$



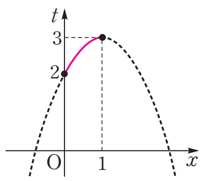
281 정답 최댓값 : 6, 최솟값 : 3

$t=2+2x-x^2$이라 놓으면

$t=-(x^2-2x)+2$

$\ =-(x-1)^2+3$

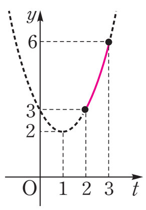
$0\leq x\leq 1$이면 오른쪽 그림에서 t의 값의 범위는 $2\leq t\leq 3$이다.



따라서 주어진 함수는

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2\ (2\leq t\leq 3)$

이고 이차항의 계수가 양수, 축의 방정식이 $t=1$이므로 함수 y는 $t=2$일 때 최솟값 3, $t=3$일 때 최댓값 6을 가진다.



282 정답 (1) -4 (2) 2

(1) $2x+y=4$에서 $y=4-2x$이므로

$x^2-2y=x^2-2(4-2x)$

$=x^2+4x-8$

$=(x+2)^2-12$

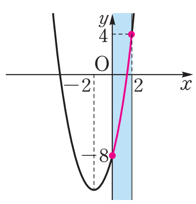
이때 x, y가 음이 아닌 실수이므로 $x\geq 0$, $y\geq 0$에서

$4-2x\geq 0 \qquad \therefore 0\leq x\leq 2$

따라서 x^2-2y는 $x=0$일 때, 최솟값 -8, $x=2$일 때, 최댓값 4를 가진다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$(-8)+4=-4$



(2) $x^2+2y=3$에서 $x^2=3-2y$이므로

$x^2+y^2=(3-2y)+y^2$

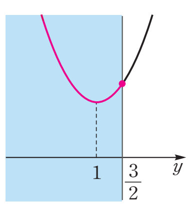
$=y^2-2y+3$

$=(y-1)^2+2$

한편, $x^2\geq 0$이므로 $3-2y\geq 0$

$\therefore y\leq \frac{3}{2}$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 $y=1$일 때, 2이다.



283 정답 25 cm^2

(i) 변수 정하기

직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y, 넓이를 S라고 두자.

(iii) 변수 x의 범위 구하기

둘레의 길이가 20 cm이므로

$2x+2y=20$, $x+y=10$에서

$y=10-x$

이때 $x>0$, $y>0$에서 $x>0$, $10-x>0$이므로

$0<x<10$

(ii) 함수식 세우기

직사각형의 넓이는

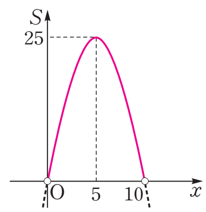
$S=xy=x(10-x)=-x^2+10x$

$=-(x-5)^2+25$

(iv) 답 구하기

$0<x<10$에서 $x=5$일 때 넓이 S는 최댓값 25를 갖는다.

따라서 넓이가 가장 큰 직사각형의 넓이는 25 cm^2이다.



284 정답 9

주어진 다항식을 x에 대한 내림차순으로 정리하여 완전제곱식의 꼴로 고치면

$x^2+2y^2-4x+4y+k=x^2-4x+2y^2+4y+k$

$=(x-2)^2+2(y+1)^2+k-6$

이고 x, y는 실수이므로 $(x-2)^2+2(y+1)^2\geq 0$이다.

$\therefore x^2+2y^2-4x+4y+k$

$=(x-2)^2+2(y+1)^2+k-6\geq k-6$

이므로 다항식 $x^2+2y^2-4x+4y+k$는

$x-2=0$, $y+1=0$, 즉 $x=2$, $y=-1$

일 때, 최소이고 최솟값은 $k-6$이다.

$k-6=3$에서 $k=9$

285 정답 4

주어진 다항식을 y에 대한 내림차순으로 정리하여 완전제곱식의 꼴로 고치면

$2x^2+y^2-2xy-2x+5=y^2-2xy+2x^2-2x+5$

$=(y-x)^2+x^2-2x+5$

$=(y-x)^2+(x-1)^2+4$

이고 x, y는 실수이므로 $(y-x)^2+(x-1)^2\geq 0$이다.

$\therefore 2x^2+y^2-2xy-2x+5=(y-x)^2+(x-1)^2+4\geq 4$

따라서 다항식 $2x^2+y^2-2xy-2x+5$는

$y-x=0$, $x-1=0$, 즉 $x=1$, $y=1$

일 때, 최소이고 최솟값은 4이다.

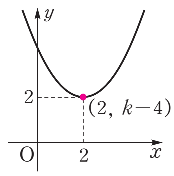
286 정답 6

$f(x)=x^2-4x+k$

$\quad=(x-2)^2+k-4$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때, 최소이고 최솟값은 $k-4$이다.

$\quad k-4=2 \qquad \therefore k=6$



287 정답 0

주어진 이차함수가 $x=1$에서 최솟값 -1을 가지므로 주어진 이차함수는 양수 a에 대하여

$\quad y=a(x-1)^2-1$

이 함수의 그래프가 점 (2, 0)을 지나므로 $x=2$, $y=0$을 대입하면

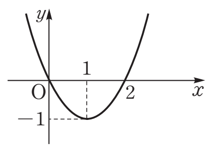
$\quad 0=a(2-1)^2-1 \qquad \therefore a=1$

따라서 주어진 이차함수는

$y=x^2-2x$이므로

$\quad b=-2,\ c=0$

$\quad \therefore 2a+b+c=2-2+0=0$



288 정답 3

$y=x^2-2ax+a$

$\quad=(x-a)^2-a^2+a$

이 이차함수의 최솟값이 -6이므로

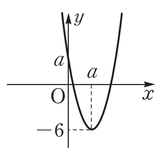
$\quad -a^2+a=-6$

$\quad a^2-a-6=0$

$\quad (a+2)(a-3)=0$

$\quad \therefore a=-2$ 또는 $a=3$

$a>0$이므로 $a=3$



289 정답 최댓값 : $\frac{3}{2}$

$y=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$

에서 x^2항의 계수가 양수이고 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ a-1)$이므로 $x=1$일 때, 최솟값이 $a-1$이다.

즉, $a-1=-3 \qquad \therefore a=-2$

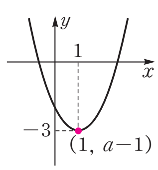
이므로 이차함수 $y=ax^2-2x+1$은

$\quad y=-2x^2-2x+1$

$\quad\ =-2(x^2+x)+1$

$\quad\ =-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$

따라서 $x=-\frac{1}{2}$일 때, 최대이고 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다.



290 정답 −7

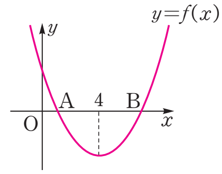
$f(x)=x^2-ax+9=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+9$

선분 AB의 중점의 x좌표는 함수 $f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표와 일치하므로

$\quad \frac{a}{2}=4 \qquad \therefore a=8$

$\quad \therefore f(x)=x^2-8x+9=(x-4)^2-7$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -7이다.



291 정답 (1) 최댓값 : 2, 최솟값 : −2

(2) 최댓값 : 4, 최솟값 : −8

(3) 최댓값 : 13, 최솟값 : −2

(4) 최댓값 : 0, 최솟값 : −3

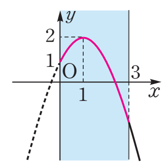
(1) $f(x)=-x^2+2x+1$

$\quad=-(x-1)^2+2$

이므로 $0\le x\le 3$에서

$\quad f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(3)=-2$

따라서 최댓값은 $x=1$일 때 2, 최솟값은 $x=3$일 때 -2이다.



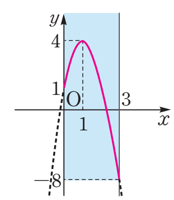
(2) $f(x)=-3x^2+6x+1$

$\quad=-3(x-1)^2+4$

이므로 $0\le x\le 3$에서

$\quad f(0)=1,\ f(1)=4,\ f(3)=-8$

따라서 최댓값은 $x=1$일 때 4, 최솟값은 $x=3$일 때 -8이다.



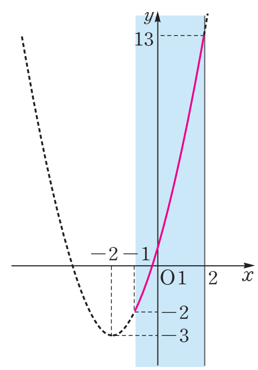
(3) $f(x)=x^2+4x+1$

$\quad=(x+2)^2-3$

에서 x^2항의 계수가 양수이고, 축의 방정식이 $x=-2$이므로 $-1\le x\le 2$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=2$일 때, 최댓값을 가지고 $x=-1$일 때, 최솟값을 가진다.

$\quad f(-1)=-2,\ f(2)=13$

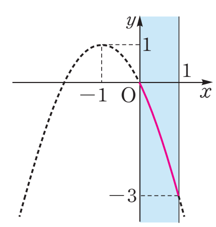
따라서 최댓값은 13, 최솟값은 -2이다.



(4) $f(x)=-x^2-2x$

$\quad=-(x+1)^2+1$

에서 x^2항의 계수가 음수이고, 축의 방정식이 $x=-1$이므로 $0\le x\le 1$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=0$일 때, 최댓값을 가지고 $x=1$일 때, 최솟값을 가진다.



$f(0)=0$, $f(1)=-3$

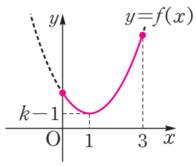
따라서 최댓값은 $x=0$일 때 0, 최솟값은 $x=1$일 때 -3이다.

292 정답 8

$f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$

이므로 함수 $y=f(x)$의 x^2항의 계수가 양수이고 꼭짓점의 x좌표는 1이다.

꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위 $0\le x\le 3$에 포함되므로 함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서 최솟값, $x=3$에서 최댓값을 가진다.



함수 $y=f(x)$의 최솟값이 4이므로

$f(1)=k-1=4 \qquad \therefore k=5$

따라서 $f(x)=x^2-2x+5$이고 최댓값은

$f(3)=3^2-2\times3+5=8$

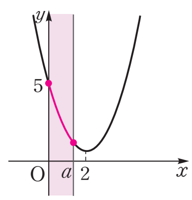
293 정답 1

$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

이므로 함수 $f(x)$는 이차항의 계수가 양수이고, 꼭짓점의 x좌표가 2인 이차함수이다.

(i) $0\le a<2$일 때

오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최솟값을 가지므로



$f(a)=a^2-4a+5=2$

$a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

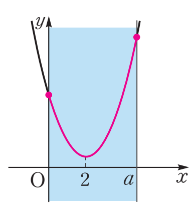
$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

그런데 $0\le a<2$이므로 $a=1$

(ii) $a\ge 2$일 때

오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값을 가진다.

이때 $f(2)=1\ne 2$이므로 조건에 맞지 않는다.



(i), (ii)에서 $a=1$이다.

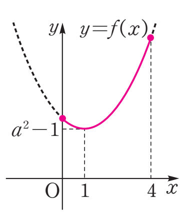
294 정답 −2

$f(x)=x^2-2x+a^2$

$=(x-1)^2+a^2-1\ (0\le x\le 4)$

에서 x^2항의 계수가 양수이고

축의 방정식이 $x=1$이므로 $x=1$에서 최솟값 3을 가진다.



$f(1)=a^2-1=3$, $a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때

$g(x)=-x^2-2x+4$

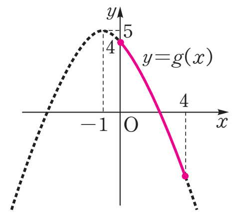
$=-(x+1)^2+5\ (0\le x\le 4)$

에서 x^2항의 계수가 음수이고,

축의 방정식이 $x=-1$이므로

$g(x)$는 $x=0$에서 최댓값

$g(0)=4$를 가진다.



이것은 주어진 조건을 만족한다.

따라서 상수 a의 값은 $a=-2$이다.

(ii) $a=2$일 때

$g(x)=-x^2+2x+4$

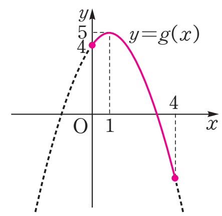
$=-(x-1)^2+5\ (0\le x\le 4)$

에서 x^2항의 계수가 음수이고,

축의 방정식이 $x=1$이므로

$g(x)$는 $x=1$에서 최댓값

$g(1)=5$를 가진다.



이것은 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-2$이다.

295 정답 −2, 2

$f(x)=-x^2+2ax-a$

$=-(x-a)^2+a^2-a$

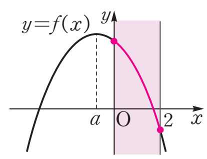
에서 이차항의 계수는 음수이고 꼭짓점의 x좌표는 $x=a$이므로

(i) $a\le 0$일 때

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값을 가지므로

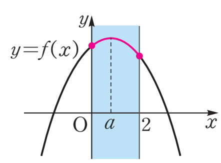
$f(0)=-a=2$에서 $a=-2$

이것은 $a\le 0$이라는 조건을 만족한다.



(ii) $0<a<2$일 때

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 가지므로



$f(a)=a^2-a=2$에서

$a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

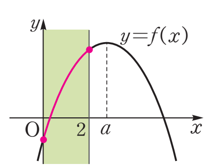
그런데 $0<a<2$이므로 조건을 만족하지 않는다.

(iii) $a\ge 2$일 때

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지고

$f(2)=-4+3a=2$에서

$a=2$



이것은 $a\ge 2$라는 조건을 만족한다.

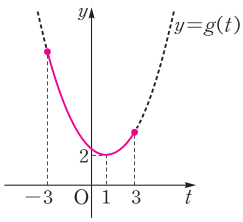
(i), (ii), (iii)에서 a의 값은 -2 또는 2이다.

296 정답 17

$f(x)=(2x-1)^2-2(2x-1)+3\ (-1\le x\le 2)$에서

$2x-1=t$로 놓으면 $-3\le t\le 3$

$g(t)=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$라 하면 $g(t)$는 $t=-3$일 때, 최대이므로



$t=2x-1=-3$에서 $x=-1$

즉, $f(x)$는 $x=-1$일 때, 최대이고 최댓값은 $f(-1)$이므로

$$a=-1,\ b=f(-1)=18$$

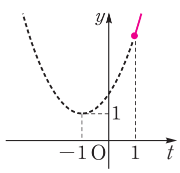
$$\therefore\ a+b=17$$

297 정답 4

$x^2+2x+2=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2+1\ge 1$이므로 $t\ge 1$

따라서 주어진 함수는



$$y=t^2+2t+2$$
$$=(t+1)^2+1\ (t\ge 1)$$

이므로 $t=1$일 때, 최소이다.

$t=1$이면 $x^2+2x+2=1$이므로

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$, 즉

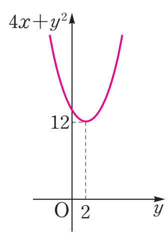
$x=-1$일 때 최소이고 최솟값은 $(1+1)^2+1=5$이다.

$$\therefore\ a=-1,\ b=5$$

$$\therefore\ a+b=-1+5=4$$

298 정답 (1) 12 (2) 1

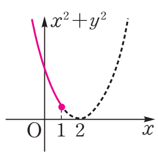
(1) $x+y=4$에서 $x=4-y$이므로



$$4x+y^2=4(4-y)+y^2$$
$$=y^2-4y+16$$
$$=(y-2)^2+12$$

따라서 $y=2$일 때, 최소이고 최솟값은 12이다.

(2) $4x+y^2=4$에서 $y^2=4-4x$이므로



$$x^2+y^2=x^2+4-4x$$
$$=(x-2)^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $y^2=4-4x$에서 $y^2\ge 0$이므로

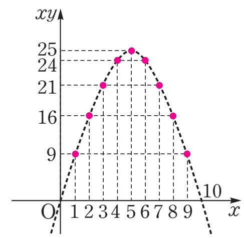
$$4-4x\ge 0 \qquad \therefore\ x\le 1$$

따라서 $x\le 1$의 범위에서 ㉠은 $x=1$일 때, 최소이고 최솟값은 $(1-2)^2=1$이다.

299 정답 최댓값 : 25, 최솟값 : 9

$x+y=10$이므로 $y=10-x$

$$xy=x(10-x)$$
$$=-x^2+10x$$
$$=-(x-5)^2+25$$



x, y는 자연수이므로

$$x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$$

따라서 xy의 최댓값은 $x=5$일 때 25이고, 최솟값은 $x=1$ 또는 $x=9$일 때 9이다.

300 정답 10

직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면

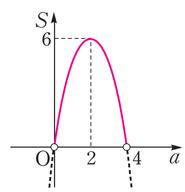
$$a>0,\ b>0$$

점 $P(a,\ b)$는 직선 $y=-\frac{3}{2}x+6$ 위의 점이므로

$b=6-\frac{3}{2}a>0$에서 $a<4$

$$\therefore\ 0<a<4$$

직사각형의 넓이를 S라 하면



$$S=ab=a\left(6-\frac{3}{2}a\right)$$
$$=-\frac{3}{2}a^2+6a=-\frac{3}{2}(a^2-4a)$$
$$=-\frac{3}{2}(a-2)^2+6\ (\text{단, } 0<a<4)$$

S는 $a=2$일 때, 최대이고 최댓값은 6이다.

또한 $b=6-\frac{3}{2}\cdot 2=3$이다.

따라서 넓이가 최대인 직사각형의 네 변의 길이의 합은

$$2(a+b)=2(2+3)=10$$

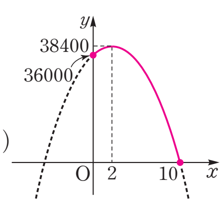
301 정답 800원

한 개당 이익금을 $100x$원씩 줄인다고 하면 한 개당 이익금은 $(1000-100x)$원이고 $0\le x\le 10$이다.

하루에 팔리는 아이스크림의 개수는 $36+6x$(개)이므로

하루 동안의 이익금 y원은

$$y=(1000-100x)(36+6x)$$
$$=-600(x-10)(x+6)$$
$$=-600(x-2)^2+38400$$
$$(0\le x\le 10)$$



따라서 $x=2$일 때, y가 최대이므로 한 개당

$$1000-100\times 2=800(\text{원})$$

의 이익금을 남기고 팔아야 하루의 이익금이 최대가 된다.

302 정답 19

$x^2+2y^2+2xy-6y+10$

$=(x^2+2xy+y^2)+(y^2-6y+9)+1$

$=(x+y)^2+(y-3)^2+1$

이때 $(x+y)^2\geq 0$, $(y-3)^2\geq 0$이므로

주어진 다항식은 $x+y=0$, $y-3=0$일 때, 즉 $x=-3$, $y=3$일 때, 최소이고 최솟값 1을 가진다.

따라서 $a=-3$, $b=3$, $c=1$이므로

$$a^2+b^2+c^2=(-3)^2+3^2+1^2=19$$

연습문제 Ⅱ p.169

303 정답 (1) $-m^2+2m+2$ (2) 3

(1) $f(x)=2(x^2-2mx)+m^2+2m+2$

$\quad=2(x-m)^2-m^2+2m+2$

에서 $f(x)$는 $x=m$일 때, 최소이고 최솟값 $-m^2+2m+2$를 가진다.

(2) $g(m)=-m^2+2m+2$로 놓으면

$$g(m)=-(m^2-2m)+2=-(m-1)^2+3$$

이므로 $g(m)$은 $m=1$일 때, 최대이고 최댓값 3을 가진다.

304 정답 4

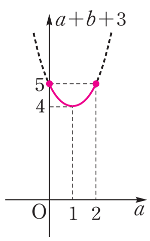
점 $\mathrm{P}(a, b)$는 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점이므로 $b=a^2-3a+2$이다.

$\mathrm{A}(0, 2)$, $\mathrm{B}(1, 0)$, $\mathrm{C}(2, 0)$이므로 $0\leq a\leq 2$이다.

$a+b+3=a+(a^2-3a+2)+3$

$\quad=a^2-2a+5$

$\quad=(a-1)^2+4\ (0\leq a\leq 2)$



따라서 $a+b+3$은 $a=1$일 때, 최소이고 최솟값은 4이다.

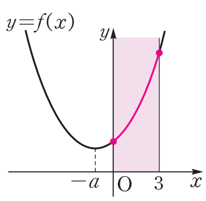
305 정답 3

$f(x)=(x+a)^2+1-a^2\ (0\leq x\leq 3)$

에서 이차항의 계수가 양수이고 꼭짓점의 x좌표가 $-a$이므로

(i) $-a\leq 0$, 즉 $a\geq 0$일 때

$f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 가지므로 $f(0)=1\neq 0$이 되어 성립하지 않는다.

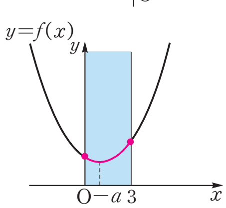


(ii) $0<-a<3$, 즉 $-3<a<0$일 때

$f(x)$는 $x=-a$에서 최솟값을 가지므로

$f(-a)=1-a^2=0$

에서 $a=\pm 1$



그런데 $-3<a<0$이므로

$a=-1$

이때 $f(0)=1$, $f(3)=4$이므로

최댓값 $M=4$

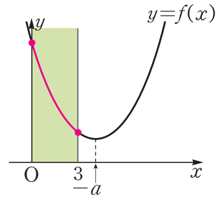
(iii) $-a\geq 3$, 즉 $a\leq -3$일 때

$f(x)$는 $x=3$에서 최솟값을 가지므로

$f(3)=10+6a=0$

에서 $a=-\dfrac{5}{3}$

그런데 $a\leq -3$이므로 조건을 만족하지 못한다.



(i), (ii), (iii)에서 $a+M=-1+4=3$

306 정답 (1) $x^2-x+2\,(0\leq x\leq 2)$ (2) $\frac{1}{2}$

(1) $0\leq\overline{\mathrm{AP}}\leq 2$이므로 $0\leq x\leq 2$

$0\leq\overline{\mathrm{BQ}}\leq 2$이므로 $0\leq 2x\leq 2$ $\quad\therefore 0\leq x\leq 1$

따라서 $0\leq x\leq 1$이다. … ①

$\triangle\mathrm{DPQ}=\square\mathrm{ABCD}-\triangle\mathrm{APD}-\triangle\mathrm{BQP}-\triangle\mathrm{CDQ}$이고

$$\triangle\mathrm{APD}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AD}}\cdot\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x=x$$

$$\triangle\mathrm{BQP}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(2-x)=2x-x^2$$

$$\triangle\mathrm{CDQ}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{CQ}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\cdot(2-2x)\cdot 2=2-2x$$

$\therefore\ \triangle\mathrm{DPQ}=4-x-(2x-x^2)-(2-2x)$

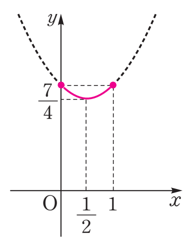
$\quad=x^2-x+2\,($단, $0\leq x\leq 1)$ … ②

(2) $\triangle\mathrm{DPQ}$의 넓이를 y라 하면

$y=x^2-x+2$

$\quad=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\,($단, $0\leq x\leq 1)$

따라서 $\triangle\mathrm{DPQ}$의 넓이는 $x=\dfrac{1}{2}$일 때, 최소이고 최솟값은 $\dfrac{7}{4}$이다.



$\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	x의 값의 범위를 구하기	20%
②	$\triangle\mathrm{DPQ}$의 넓이를 x에 관한 식으로 나타내기	50%
③	$\triangle\mathrm{DPQ}$의 넓이가 최소가 되는 x의 값을 구하기	30%

11. 삼차방정식과 사차방정식

확인문제 pp.175~183

307 정답 (1) $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

(2) $x=-1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-3$

(3) $x=1$(중근) 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

(1) $f(x)=x^3+x+2$로 놓으면 $f(-1)$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ & & -1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x+1)(x^2-x+2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

(2) $f(x)=x^3+6x^2+11x+6$으로 놓으면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ & & -1 & -5 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x+1)(x^2+5x+6)=0$

$(x+1)(x+2)(x+3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-3$

(3) $f(x)=x^4-4x+3$으로 놓으면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ & & 1 & 1 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x-1)^2(x^2+2x+3)=0$

$\therefore$ $x=1$(중근) 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

308 정답 $1,\ -3$

$x^3+(k-2)x^2-(3k+1)x+6=0$에 $x=2$를 대입하면

$8+4(k-2)-2(3k+1)+6=0$

$-2k+4=0$ $\quad\therefore$ $k=2$

이므로 주어진 방정식은 $x^3-7x+6=0$이다.

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-2)(x^2+2x-3)=0$

$(x-2)(x+3)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 2 이외의 다른 두 근은 $1,\ -3$이다.

309 정답 (1) $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

(2) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

(1) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$에서 $x^2+x=X$라 하면

$X^2-8X+12=0,\ (X-2)(X-6)=0$

$\therefore$ $X=2$ 또는 $X=6$

(i) $X=2$일 때, $x^2+x=2$에서

$x^2+x-2=0,\ (x+2)(x-1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $X=6$일 때, $x^2+x=6$에서

$x^2+x-6=0,\ (x+3)(x-2)=0$

$x=-3$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

(2) 주어진 방정식을 다음과 같이 묶어서 전개하면

$(x-2)(x+1)\cdot(x-3)(x+2)+3=0$

$(x^2-x-2)(x^2-x-6)+3=0$

여기서 $x^2-x=X$로 놓으면

$(X-2)(X-6)+3=0$

$X^2-8X+15=0,\ (X-3)(X-5)=0$

$\therefore$ $X=3$ 또는 $X=5$

(i) $X=3$일 때, $x^2-x=3$에서

$x^2-x-3=0$

$\therefore$ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

(ii) $X=5$일 때, $x^2-x=5$에서

$x^2-x-5=0$

$\therefore$ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

310 정답 (1) $x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(2) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

(1) $x^4+2x^2-15=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2+2X-15=0,\ (X+5)(X-3)=0$

$\therefore$ $X=-5$ 또는 $X=3$

(i) $X=-5$일 때, $x^2=-5$에서 $x=\pm\sqrt{5}i$

(ii) $X=3$일 때, $x^2=3$에서 $x=\pm\sqrt{3}$

따라서 구하는 근은 $x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(2) $x^4-11x^2+1=0$의 상수항이 제곱수이므로

$A^2-B^2=0$의 꼴로 변형하면

$$(x^4-2x^2+1)-9x^2=0$$
$$(x^2-1)^2-(3x)^2=0$$
$$(x^2-1+3x)(x^2-1-3x)=0$$
$$x^2+3x-1=0 \text{ 또는 } x^2-3x-1=0$$
$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

311 정답 $k\le\frac{1}{4}$

$f(x)=x^3-3x^2+(k+2)x-2k$로 놓으면

$$f(2)=8-12+2(k+2)-2k=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	-3	$k+2$	$-2k$
		2	-2	$2k$
	1	-1	k	0

$$\therefore f(x)=(x-2)(x^2-x+k)$$

이때 방정식 $f(x)=0$의 모든 근이 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-x+k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$D=1-4k\ge0 \qquad \therefore k\le\frac{1}{4}$$

312 정답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) -4 (3) -3

삼차방정식 $x^3+2x-3=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=3$$

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{3}$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$\qquad=0-2\cdot2=-4$

(3) $\alpha+\beta+\gamma=0$에서 $\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\gamma+\alpha=-\beta$

$$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)(-\alpha)(-\beta)$$
$$=-\alpha\beta\gamma=-3$$

313 정답 $x^3-bx^2+acx-c^2=0$

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=-c$$

세 수 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 근으로 가지고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은

세 근의 합 : $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$

두 근끼리의 곱의 합 : $\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta$

$$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=(-c)(-a)$$
$$=ac$$

세 근의 곱 : $\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=c^2$

$$\therefore x^3-bx^2+acx-c^2=0$$

314 정답 10

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1+2i$이면 $1-2i$도 근이므로 나머지 한 근을 α라 하자.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

세 근의 합 : $\alpha+(1+2i)+(1-2i)=0$

$\therefore \alpha+2=0$ …… ㉠

두 근끼리의 곱의 합 :

$\alpha(1+2i)+(1+2i)(1-2i)+\alpha(1-2i)=a$

$\therefore 2\alpha+5=a$ …… ㉡

세 근의 곱 : $\alpha(1+2i)(1-2i)=-b$

$\therefore 5\alpha=-b$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha=-2$, $a=1$, $b=10$

$\therefore ab=1\cdot10=10$

315 정답 (1) -1 (2) -2

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로

$$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$$

(1) $\omega^4=\omega^3\cdot\omega=\omega$, $\omega^6=(\omega^3)^2=1$, $\omega^8=(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega^2$,

$\omega^{10}=(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega$이므로

$$\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\omega^{10}=\omega^2+\omega+1+\omega^2+\omega$$
$$=0+\omega^2+\omega$$
$$=-1$$

(2) $\omega^2+\omega+1=0$에서 $1+\omega=-\omega^2$이므로

$$\frac{\omega+1}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{\omega+1}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1-1=-2$$

연습문제 I …… pp.184~185

316 정답 (1) $x=\pm1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

(2) $x=-1$ 또는 $x=\pm2$

(1) $2x^3-x^2-2x+1=0$의 좌변을 인수분해하면

$$x^2(2x-1)-(2x-1)=0,\ (2x-1)(x^2-1)=0$$
$$(2x-1)(x+1)(x-1)=0$$
$$\therefore x=\pm1 \text{ 또는 } x=\frac{1}{2}$$

다른 풀이

$f(x)=2x^3-x^2-2x+1$로 놓으면 $f(1)=0$이므로

조립제법에 의하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ & & 2 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$2x^3-x^2-2x+1=0$은

$(x-1)(2x^2+x-1)=0$

$(x-1)(x+1)(2x-1)=0$

$\therefore\ x=\pm1$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

(2) $x^3+x^2-4x-4=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^2(x+1)-4(x+1)=0,\ (x+1)(x^2-4)=0$

$(x+1)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\pm2$

317

정답 (1) $\boldsymbol{x=1}$**(중근) 또는** $\boldsymbol{x=-2}$

(2) $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1\pm i}$

(3) $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm 2i}$

(1) $f(x)=x^3-3x+2$로 놓으면 $f(1)=0$이므로

조립제법에 의하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$x^3-3x+2=0$은

$(x-1)(x^2+x-2)=0$

$(x-1)(x+2)(x-1)=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore\ x=1$(중근) 또는 $x=-2$

(2) $f(x)=x^3-2x-4$로 놓으면 $f(2)=0$이므로

조립제법에 의하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$x^3-2x-4=0$은

$(x-2)(x^2+2x+2)=0$

$x^2+2x+2=0$에서

$x=-1\pm i$이므로

$x=2$ 또는 $x=-1\pm i$

(3) $f(x)=x^3-4x^2+9x-10$으로 놓으면 $f(2)=0$이므로

조립제법에 의하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 9 & -10 \\ & & 2 & -4 & 10 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

$x^3-4x^2+9x-10=0$은

$(x-2)(x^2-2x+5)=0$

$x^2-2x+5=0$에서

$x=1\pm 2i$이므로

$x=2$ 또는 $x=1\pm 2i$

318

정답 (1) **7** (2) **5**

(1) $x=2$가 근이므로 주어진 방정식에 $x=2$를 대입하면

$8-4m+6+2m=0$에서 $m=7$

(2) 주어진 방정식은 $x^3-7x^2+3x+14=0$이고

$f(x)=x^3-7x^2+3x+14$로 놓으면

$f(2)=0$이므로

조립제법에 의하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -7 & 3 & 14 \\ & & 2 & -10 & -14 \\ \hline & 1 & -5 & -7 & 0 \end{array}$$

$(x-2)(x^2-5x-7)=0$

따라서 나머지 두 근은

$x^2-5x-7=0$의 근이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 5이다.

319

정답 **3**

$x^3-(k+1)x^2+6x-3k=0$에 $x=3$을 대입하면

$27-9(k+1)+18-3k=0$

$36-12k=0\qquad \therefore\ k=3$

이므로 주어진 방정식은 $x^3-4x^2+6x-9=0$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -4 & 6 & -9 \\ & & 3 & -3 & 9 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x-3)(x^2-x+3)=0$

따라서 나머지 두 근은

$x^2-x+3=0$의 근이고 이차방정식의

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 3이다.

320

정답 (1) $\boldsymbol{x=\pm1}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

(2) $\boldsymbol{x=\pm1}$ **또는** $\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$

(1) $f(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$으로 놓으면

$f(1)=0$이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법에 의하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^3-4x^2+x+6)$

$g(x)=x^3-4x^2+x+6$으로 놓으면 $g(-1)=0$이므로

$x+1$은 $g(x)$의 인수이다.

조립제법에 의하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$g(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x+1)(x-2)(x-3)$

그러므로 사차방정식 $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=\pm1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(2) $f(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$으로 놓으면

$f(1)=0,\ f(-1)=0$이므로 조립제법에 의하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\ & & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline -1 & 1 & 2 & -5 & -6 & \boxed{0} \\ & & -1 & -1 & 6 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x-1)(x+1)(x^2+x-6)=0$

$(x-1)(x+1)(x+3)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=\pm1$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=2$

321 정답 (1) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$ (2) $x=-4\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=-6$ 또는 $x=-2$

(1) $x^2+1=t$로 치환하면 주어진 사차방정식은

$t^2-6t+8=0$, $(t-2)(t-4)=0$

$t=x^2+1$을 다시 대입하면

$(x^2+1-2)(x^2+1-4)=0$

$(x^2-1)(x^2-3)=0$

$(x+1)(x-1)(x^2-3)=0$

이때 $x^2-3=0$에서 $x=\pm\sqrt{3}$이므로

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(2) 주어진 사차방정식에서 상수항의 합이 같아지도록 괄호를 두 개씩 묶어서 전개하면

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$

$(x+1)(x+7)\cdot(x+3)(x+5)+15=0$

$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$

$x^2+8x+7=t$로 치환하면

$t(t+8)+15=0$

$t^2+8t+15=0$, $(t+3)(t+5)=0$

$t=x^2+8x+7$을 다시 대입하면

$(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)=0$

이때 $x^2+8x+10=0$에서 $x=-4\pm\sqrt{6}$

$x^2+8x+12=0$에서 $(x+6)(x+2)=0$

$\therefore$ $x=-6$ 또는 $x=-2$

따라서 구하는 근은

$x=-4\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=-6$ 또는 $x=-2$

322 정답 (1) $x=\pm2i$ 또는 $x=\pm1$ (2) $x=-2\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{2}$

(1) 상수항이 -4로 제곱수가 아니므로 $x^2=X$로 치환하면

$X^2+3X-4=0$, $(X+4)(X-1)=0$

$X=-4$에서 $x^2=-4$ $\quad\therefore$ $x=\pm2i$

$X=1$에서 $x^2=1$ $\quad\therefore$ $x=\pm1$

따라서 $x=\pm2i$ 또는 $x=\pm1$

(2) 상수항이 제곱수이므로 $A^2-B^2=0$의 꼴로 변형하면

$x^4-12x^2+4=(x^4+4x^2+4)-16x^2$

$=(x^2+2)^2-(4x)^2$

$=(x^2+4x+2)(x^2-4x+2)=0$

따라서 $x^2+4x+2=0$ 또는 $x^2-4x+2=0$이므로

$x=-2\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{2}$

323 정답 1

$f(x)=x^3-x^2+(k-2)x+k$로 놓으면

$f(-1)=-1-1-(k-2)+k=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & k-2 & k \\ & & -1 & 2 & -k \\ \hline & 1 & -2 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-2x+k)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 모든 근이 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 실근을 가져야 한다.

$x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-k\geq0$ $\quad\therefore$ $k\leq1$

따라서 실수 k의 최댓값은 1이다.

324 정답 (1) $\frac{3}{4}$ (2) 10 (3) -2

$x^3-2x^2-3x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=-4$

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=2^2-2\cdot(-3)=10$

(3) $\alpha+\beta+\gamma=2$에서

$\alpha+\beta=2-\gamma$, $\beta+\gamma=2-\alpha$, $\gamma+\alpha=2-\beta$이므로

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

$=2^3-(\alpha+\beta+\gamma)\cdot2^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)\cdot2-\alpha\beta\gamma$

$=2^3-2\cdot2^2+(-3)\cdot2-(-4)=-2$

325 정답 $cx^3+bx^2+ax+1=0$

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$

따라서 세 수 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 근으로 가지고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은

세 근의 합 : $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{b}{c}$

두 근끼리의 곱의 합 : $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-a}{-c}=\frac{a}{c}$

세 근의 곱 : $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{1}{c}$

이므로 $x^3-\left(-\frac{b}{c}\right)x^2+\frac{a}{c}x-\left(-\frac{1}{c}\right)=0$이다.

양변에 c를 곱하여 정리하면

$$cx^3+bx^2+ax+1=0$$

다른 풀이

$x^3+ax^2+bx+c=0\ (c\neq0)$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$일 때, 역수인 $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 가지는 삼차방정식은 계수의 순서가 거꾸로이므로

$$cx^3+bx^2+ax+1=0$$

326 정답 (1) $-2i-1,\ 1$ (2) -15

(1) 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $2i-1$이면 켤레복소수 $-2i-1$도 근이다.

나머지 한 근을 α로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{세 근의 합})=\alpha+(2i-1)+(-2i-1)=-1$$

이므로 $\alpha-2=-1$ $\quad\therefore\ \alpha=1$

따라서 $2i-1$ 이외의 나머지 두 근은 $-2i-1,\ 1$이다.

(2) 주어진 삼차방정식의 세 근이 $1,\ -1+2i,\ -1-2i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{세 근의 곱})=1\cdot(-1+2i)\cdot(-1-2i)=-b$$

$$\therefore\ 5=-b$$

(두 근끼리의 곱의 합)

$$=1\cdot(-1+2i)+(-1+2i)\cdot(-1-2i)+(-1-2i)\cdot1=a$$

$$\therefore\ 3=a$$

따라서 $a=3,\ b=-5$이므로

$$ab=3\cdot(-5)=-15$$

327 정답 (1) 0 (2) 0 (3) -2

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로 $\overline{\omega}$도 한 근이다.

$$\therefore\ \omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0,\ \overline{\omega}^3=1$$

(1) $\omega^{11}=(\omega^3)^3\cdot\omega^2=\omega^2,\ \omega^{22}=(\omega^3)^7\cdot\omega=\omega,$

$\omega^{33}=(\omega^3)^{11}=1$이므로

$\omega^{11}+\omega^{22}+\omega^{33}=\omega^2+\omega+1=0$

(2) $\omega^2=\omega^5,\ \omega^3=\omega^6=1,\ \omega^4=\omega^7$이므로

$$\begin{aligned}&\omega^2-\omega^3+\omega^4-\omega^5+\omega^6-\omega^7\\&=(\omega^2-\omega^5)-(\omega^3-\omega^6)+(\omega^4-\omega^7)\\&=0\end{aligned}$$

(3) $\overline{\omega}=\omega^2$이므로 $\overline{\omega}+1=\omega^2+1=-\omega$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{\omega+1}{\overline{\omega}}+\frac{\omega}{\overline{\omega}+1}&=\frac{\omega+1}{\omega^2}+\frac{\omega}{-\omega}\\&=\frac{-\omega^2}{\omega^2}+\frac{\omega}{-\omega}\\&=-1+(-1)\\&=-2\end{aligned}$$

연습문제 Ⅱ

p.186

328 정답 (1) 1 (2) $x^3+2x^2+3x-1=0$

(1) 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x+k=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로 인수정리에 의하여

$$x^3+3x^2-2x+k=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

이 식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$$2^3+3\cdot2^2-2\cdot2+k=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$$

$$16+k=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$$

이때 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=17$이므로

$$16+k=17\qquad\therefore\ k=1$$

(2) 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-1$$

세 수 $\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\alpha$를 근으로 가지고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은

세 근의 합 : $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

두 근끼리의 곱의 합 : $\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta$
$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$
$=(-1)\cdot(-3)=3$

세 근의 곱 : $\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=(-1)^2=1$

이므로 $x^3+2x^2+3x-1=0$

329 정답 $x=1$(중근) 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{aligned}&x^4-3x^3+4x^2-3x+1\\&=x^2\left(x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right\}\quad\leftarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\\&=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2\right\}\\&=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\}\\&=x\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right\}\cdot x\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\}\\&=(x^2+1-2x)(x^2+1-x)\\&=(x^2-2x+1)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

이므로 주어진 사차방정식은

$$(x^2-2x+1)(x^2-x+1)=0$$

$x^2-2x+1=0$에서 $(x-1)^2=0$ $\qquad\therefore\ x=1$(중근)

$x^2-x+1=0$에서 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

다른 풀이

$f(x)=x^4-3x^3+4x^2-3x+1$로 놓으면 $f(1)=0$이므로

조립제법에 의하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -3 & 4 & -3 & 1 \\ & & 1 & -2 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 2 & -1 & \boxed{0} \\ & & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$x^4-3x^3+4x^2-3x+1=(x-1)^2(x^2-x+1)$$

따라서 주어진 방정식의 해는

$$x=1 \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

개념 보충

사차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$처럼 계수가 x^2항을 기준으로 대칭일 때의 풀이 방법을 알아보자.

(i) 양변을 x^2으로 나누면

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

(ii) $x+\dfrac{1}{x}=X$로 치환하면 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=X^2-2$이므로

$$\Rightarrow a(X^2-2)+bX+c=0 \quad \leftarrow X\text{의 이차방정식}$$

(iii) 이차방정식을 풀어서 X의 값을 구한다.

(iv) $X=\alpha$ 또는 $X=\beta$이면

(i) $x+\dfrac{1}{x}=\alpha \Rightarrow x^2-\alpha x+1=0$을 푼다.

(ii) $x+\dfrac{1}{x}=\beta \Rightarrow x^2-\beta x+1=0$을 푼다.

330 정답 0

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로

허근 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이다.

$$\omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$$

한편, 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 나머지 한 근은 $\overline{\omega}$이므로

$\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=\omega$, $\overline{\omega}^2+1=\overline{\omega}$

$$\therefore \frac{\omega^2+1}{\overline{\omega}}-\frac{\omega}{\overline{\omega}^2+1}=\frac{\omega}{\overline{\omega}}-\frac{\omega}{\overline{\omega}}=0$$

331 정답 3 ········ 서술형

삼차방정식 $f(2x-1)=x^3-3x^2+3x-2=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$f(2\alpha-1)=0,\ f(2\beta-1)=0,\ f(2\gamma-1)=0$$

따라서 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근은

$$2\alpha-1,\ 2\beta-1,\ 2\gamma-1 \quad \cdots ①$$

이므로 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근의 합은

$(2\alpha-1)+(2\beta-1)+(2\gamma-1)=2(\alpha+\beta+\gamma)-3$ ······ ㉠

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=3 \quad \cdots ②$$

이 값을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}(2\alpha-1)+(2\beta-1)+(2\gamma-1)&=2(\alpha+\beta+\gamma)-3\\&=2\cdot3-3\\&=3\end{aligned}$$

따라서 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근의 합은 3이다. ··· ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	방정식 $f(x)=0$의 세 근을 구하기	40%
②	$\alpha+\beta+\gamma$의 값을 구하기	30%
③	삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근의 합을 구하기	30%

12. 연립방정식

확인문제 .... pp.190~195

332 정답 (1) $x=1,\ y=1$

(2) $x=k,\ y=-3k-2$ (k는 임의의 실수) 꼴의 모든 수

(3) 해는 없다.

(1) $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1}$이므로 한 쌍의 해를 가진다.

$$\begin{cases} x+2y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

$3\times$㉠$-$㉡을 하면 $7y=7 \qquad \therefore y=1$

$\therefore x=1,\ y=1$

(2) $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$이므로 두 일차방정식의 그래프인 두 직선은 일치한다.

그러므로 주어진 연립일차방정식의 해는 $3x+y+2=0$을 만족하는 모든 x, y의 값이다.

여기서 $x=k$(k는 임의의 실수)로 놓으면 $y=-3k-2$이므로 주어진 연립방정식의 해는

$x=k,\ y=-3k-2$(k는 임의의 실수) 꼴의 모든 수이다.

(3) $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{3}{5}$이므로 두 일차방정식의 그래프인 두 직선은 서로 평행하다.

따라서 두 직선의 교점이 없으므로 연립방정식의 해는 없다.

개념 보충

(2)와 같이 연립방정식의 해가 무수히 많을 경우, 해의 개수를 구하라고 하면 '해가 무수히 많다.'고 답할 수 있지만, 해를 구하라고 하면 풀이와 같이

'$x=k,\ y=ak+b$(k는 임의의 실수) 꼴의 모든 수'

로 답해야 한다.

333 정답 $-1,\ 1$

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+ay=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해가 무수히 많으려면 두 방정식이 나타내는 그래프가 일치해야 한다.

그런데 두 방정식이 나타내는 직선의 그래프는 모두 원점을 지나므로 y절편은 같다.

따라서 기울기가 같으면 일치하므로

$\frac{a}{1}=\frac{1}{a}$에서 $a^2=1 \qquad \therefore a=\pm1$

다른 풀이

㉠$\times a-$㉡에서 $(a^2-1)x+0\cdot y=0$

해가 무수히 많으려면 $a^2-1=0$이어야 하므로 $a=\pm1$

334 정답 (1) $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=-\frac{1}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} 2x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$이라 하자.

㉠에서 $y=-2x+2 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-2x+2)=1,\ x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이 값을 ㉢에 대입하여 해를 구하면

구하는 해는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-2xy+y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$이라 하자.

㉠에서 $y=3x-2 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$2x^2-2x(3x-2)+(3x-2)^2=1$

$5x^2-8x+3=0,\ (5x-3)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{3}{5}$ 또는 $x=1$

이 값을 ㉢에 대입하여 해를 구하면

구하는 해는 $\begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=-\frac{1}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

335 정답 (1) $\begin{cases} x=\pm1 \\ y=\pm1 \end{cases}$(복부호 동순)

또는 $\begin{cases} x=\pm4 \\ y=\pm2 \end{cases}$(복부호 동순)

(2) $\begin{cases} x=\pm\sqrt{5} \\ y=\mp\sqrt{5} \end{cases}$(복부호 동순)

또는 $\begin{cases} x=\pm2\sqrt{2} \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases}$(복부호 동순)

(1) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-5y^2=-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$이라 하자.

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$-4y^2=-4,\ y^2=1 \qquad \therefore y=\pm1$

$\therefore x=\pm1,\ y=\pm1$ (복부호 동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$-y^2=-4,\ y^2=4 \qquad \therefore y=\pm2$

$\therefore x=\pm 4,\ y=\pm 2$ (복부호 동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 1 \end{cases}$(복부호 동순) 또는 $\begin{cases} x=\pm 4 \\ y=\pm 2 \end{cases}$(복부호 동순)

(2) $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$이라 하자.

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$

(ⅰ) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$2y^2=10,\ y^2=5 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{5}$

$\therefore x=\mp\sqrt{5},\ y=\pm\sqrt{5}$ (복부호 동순)

(ⅱ) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$5y^2=10,\ y^2=2 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{2}$

$\therefore x=\pm 2\sqrt{2},\ y=\pm\sqrt{2}$ (복부호 동순)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\pm\sqrt{5} \\ y=\mp\sqrt{5} \end{cases}$(복부호 동순)

또는 $\begin{cases} x=\pm 2\sqrt{2} \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases}$(복부호 동순)

336 정답 (1) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{cases}$(복부호 동순)

또는 $\begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 1 \end{cases}$(복부호 동순)

(1) $\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+y)^2-xy=19 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$이라 하자.

㉠을 ㉡에 대입하면

$25-xy=19 \qquad \therefore xy=6 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉢에서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이다.

$(t-2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=3$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$이라 하자.

㉠에서 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉡을 ㉢에 대입하면

$5=(x+y)^2-4,\ (x+y)^2=9$

$\therefore x+y=3$ 또는 $x+y=-3$

(ⅰ) $x+y=3$일 때

㉡에서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-3t+2=0$의 두 근이다.

$(t-1)(t-2)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

(ⅱ) $x+y=-3$일 때

㉡에서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+3t+2=0$의 두 근이다.

$(t+1)(t+2)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=-2$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{cases}$(복부호 동순) 또는 $\begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 1 \end{cases}$(복부호 동순)

337 정답 **2500원**

가격을 인하하기 전의 커피의 1잔당 판매 가격을 x원, 커피의 하루 평균 판매량을 y잔이라 하면

	1잔당 판매 가격 (원)	하루 평균 판매량 (잔)	하루 평균 매출액 (원)
가격을 인하하기 전	x	y	250000
가격을 인하한 후	$x-500$	$y+50$	300000

(매출액)=(판매 가격)×(판매량)이므로 가격을 인하하기 전과 가격을 500원 인하한 후의 매출액을 각각 구하면

$\begin{cases} xy=250000 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-500)(y+50)=300000 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 전개하여 정리하면

$xy+50x-500y=325000 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉠을 ㉢에 대입하여 x에 관하여 풀면

$x=10y+1500$

이 식을 ㉠에 대입하면

$y(10y+1500)=250000,\ y^2+150y-25000=0$

$(y+250)(y-100)=0 \qquad \therefore y=-250$ 또는 $y=100$

이때 $y>0$이므로 $y=100$

㉠에서 $x=2500$

따라서 가격을 인하하기 전의 커피의 1잔당 판매 가격은 2500원이다.

338 정답 **46, 64**

두 자리의 자연수의 십의 자리의 숫자를 a, 일의 자리의 숫자를 b라 하면

$\begin{cases} a+b=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ a^2+b^2=52 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $b=10-a$를 ㉡에 대입하면

$a^2+(10-a)^2=52$, $a^2-10a+24=0$

$(a-4)(a-6)=0$ $\quad\therefore a=4$ 또는 $a=6$

따라서 $\begin{cases} a=4 \\ b=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=6 \\ b=4 \end{cases}$이므로 구하는 수는 46, 64이다.

연습문제 I .... pp.196~197

339 정답 -2

$a=0$이면 주어진 연립방정식은 $y=2$, $x=-\frac{1}{2}$의 오직 한 쌍의 해를 가지므로 $a\neq 0$이다.

해를 갖지 않을 조건은

$\frac{a^2}{4}=\frac{1}{1}\neq\frac{2}{a}$에서 $a^2=4$이고 $a\neq 2$

$a^2=4$에서 $a=2$ 또는 $a=-2$

그런데 $a\neq 2$이므로 $a=-2$

다른 풀이

$\begin{cases} a^2x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+y=a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

$(a^2-4)x=2-a$

$(a+2)(a-2)x=-(a-2)$

$a=2$이면 $0\cdot x=0$이므로 해가 무수히 많다.

$a=-2$이면 $0\cdot x=4$이므로 해가 없다.

340 정답 14

$\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2x+y^2=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$이라 하자.

㉠에서 $y=3-x$

이것을 ㉡에 대입하면 $x^2-2x+(3-x)^2=3$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$x=1$일 때 $y=2$, $x=3$일 때 $y=0$

따라서 근이 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$이므로

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=1^2+2^2+3^2+0^2=14$

341 정답 1

두 연립방정식이 같은 해를 가지므로 그 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$도 만족한다.

㉡에서 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

㉠을 $(x+y)^2-2xy=25$에 대입하면

$1^2-2xy=25$ $\quad\therefore xy=-12$ $\quad\cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉢에서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-t-12=0$의 두 근이다.

$(t+3)(t-4)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=4$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$

(i) $x=-3$, $y=4$일 때

$\begin{cases} ax-y=7 \\ 2x+ay=5 \end{cases}$에 대입하면 $\begin{cases} -3a-4=7 \\ -6+4a=5 \end{cases}$

이므로 만족하는 a의 값이 없다.

(ii) $x=4$, $y=-3$일 때

$\begin{cases} ax-y=7 \\ 2x+ay=5 \end{cases}$에 대입하면 $\begin{cases} 4a+3=7 \\ 8-3a=5 \end{cases}$이므로 $a=1$

(i), (ii)에서 $a=1$

342 정답 $a=2$, $b=2$

두 연립방정식이 같은 해를 가지므로 그 해는 연립방정식

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=34 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$도 만족한다.

㉠에서 $y=x-2$ $\quad\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면 $2x^2-4x-30=0$

$x^2-2x-15=0$, $(x+3)(x-5)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=-3$일 때 $y=-5$, $x=5$일 때 $y=3$

그런데 $x>y>0$이므로 $x=5$, $y=3$

이것을 $ax-2y=4$, $x-by=-1$에 각각 대입하면

$5a-6=4$, $5-3b=-1$

$\therefore a=2$, $b=2$

343 정답 (1) $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=-4 \\ y=-8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-18 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=18 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-5y^2=-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$이라 하자.

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x+2y)(x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$(-2y)^2-5y^2=-4$에서 $y^2=4$ $\quad\therefore y=\pm2$

따라서 $y=2$일 때 $x=-4$, $y=-2$일 때 $x=4$

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-5y^2=-4$에서 $y^2=1$ $\quad\therefore y=\pm1$

따라서 $y=-1$일 때 $x=-1$, $y=1$일 때 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2+10xy-3y^2=144 & \cdots\cdots ㉠\\6x^2-5xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$이라 하자.

㉡의 좌변을 인수분해하면 $(2x-y)(3x-y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=3x$

(i) $y=2x$를 ㉠에 대입하면

$x^2+10x\cdot2x-3(2x)^2=144$, $9x^2=144$, $x^2=16$

$\therefore x=\pm4$

따라서 $x=-4$일 때 $y=-8$, $x=4$일 때 $y=8$

(ii) $y=3x$를 ㉠에 대입하면

$x^2+10x\cdot3x-3(3x)^2=144$, $4x^2=144$, $x^2=36$

$\therefore x=\pm6$

따라서 $x=-6$일 때 $y=-18$, $x=6$일 때 $y=18$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-4\\y=-8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-6\\y=-18\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=6\\y=18\end{cases}$

344 정답 9

$\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+2xy+y^2=36 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$이라 하자.

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(2x-y)(x-y)=0$ $\quad\therefore y=2x$ 또는 $y=x$

(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하여 정리하면

$9x^2=36$, $x^2=4$ $\quad\therefore x=\pm2$

따라서 $x=-2$일 때 $y=-4$, $x=2$일 때 $y=4$

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하여 정리하면

$4x^2=36$, $x^2=9$ $\quad\therefore x=\pm3$

따라서 $x=-3$일 때 $y=-3$, $x=3$일 때 $y=3$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-2\\y=-4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-3\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$

따라서 xy의 최댓값은 9이다.

345 정답 35

$\begin{cases}x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2-3xy+3y^2=7 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$이라 하자.

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$(-y)^2-3\cdot(-y)\cdot y+3y^2=7$, $7y^2=7$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$

이를 $x=-y$에 대입하면 $x=\mp1$ (복부호 동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2-3y\cdot2y+3y^2=7$, $y^2=7$

$\therefore y=\pm\sqrt{7}$

이를 $x=2y$에 대입하면 $x=\pm2\sqrt{7}$ (복부호 동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=2\sqrt{7}\\y=\sqrt{7}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\sqrt{7}\\y=-\sqrt{7}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

따라서 x^2+y^2의 최댓값은 $\begin{cases}x=2\sqrt{7}\\y=\sqrt{7}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\sqrt{7}\\y=-\sqrt{7}\end{cases}$일 때,

$(\pm2\sqrt{7})^2+(\pm\sqrt{7})^2=28+7=35$

346 정답 (1) $\begin{cases}x=\pm1\\y=\pm2\end{cases}$(복부호 동순) 또는 $\begin{cases}x=\pm2\\y=\pm1\end{cases}$(복부호 동순)

(2) $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}\\y=\frac{-3-\sqrt{7}i}{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\frac{-3-\sqrt{7}i}{2}\\y=\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}\end{cases}$

(1) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉠\\xy=2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$이라 하자.

㉠에서 $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$이므로

$(x+y)^2-3xy=3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$(x+y)^2-6=3$, $(x+y)^2=9$

$\therefore x+y=3$ 또는 $x+y=-3$

(i) $x+y=3$일 때

㉡에서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-3t+2=0$의 두 근이다.

$(t-1)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

(ii) $x+y=-3$일 때

㉡에서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+3t+2=0$의 두 근이다.

$(t+2)(t+1)=0$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=-1$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\pm1 \\ y=\pm2 \end{cases}$(복부호 동순) 또는 $\begin{cases} x=\pm2 \\ y=\pm1 \end{cases}$(복부호 동순)

(2) 주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} xy+x+y=1 \\ (x+y)^2-2xy=1 \end{cases}$$

이므로 $x+y=u$, $xy=v$라 하면

$\begin{cases} u+v=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-2v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$이라 할 수 있다.

㉠에서 $v=1-u$를 ㉡에 대입하면

$u^2-2(1-u)=1$, $u^2+2u-3=0$

$(u+3)(u-1)=0$

$\therefore u=-3$ 또는 $u=1$

이 값을 ㉠에 대입하면 각각 $v=4$ 또는 $v=0$이다.

(ⅰ) $u=-3$, $v=4$인 경우

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식

$t^2-(x+y)t+xy=0$에서

$t^2+3t+4=0 \qquad \therefore t=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2} \\ y=\dfrac{-3-\sqrt{7}i}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{-3-\sqrt{7}i}{2} \\ y=\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2} \end{cases}$

(ⅱ) $u=1$, $v=0$인 경우

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-(x+y)t+xy=0$이므로

$t^2-t=0$, $t(t-1)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=1$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2} \\ y=\dfrac{-3-\sqrt{7}i}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{-3-\sqrt{7}i}{2} \\ y=\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2} \end{cases}$

347 정답 $x=8$, $y=6$

$\begin{cases} \text{대각선의 길이} \Rightarrow x^2+y^2=10^2 \\ \text{밭의 넓이} \Rightarrow (x-2)(y+2)=xy \end{cases}$ 이므로

$\begin{cases} x^2+y^2=100 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$이라 하자.

㉡에서 $x=y+2$를 ㉠에 대입하면

$2y^2+4y-96=0$, $y^2+2y-48=0$, $(y+8)(y-6)=0$

$y>0$이므로 $y=6$, $x=y+2$에 대입하면 $x=8$

$\therefore x=8$, $y=6$

348 정답 $3\sqrt{2}$

두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x, y (단, $x\ge y>0$)라 두면 넓이의 합이 10이므로

$x^2+y^2=10 \qquad \cdots\cdots ㉠$

둘레의 길이의 합이 16이므로

$4(x+y)=16 \qquad \therefore x+y=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡에서 $y=4-x$이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$x^2+(4-x)^2=10$, $2x^2-8x+6=0$, $2(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

㉡에서 $x=1$일 때 $y=3$, $x=3$일 때 $y=1$

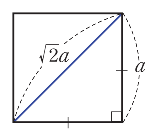
그런데 $x\ge y$이므로 $x=3$

따라서 큰 정사각형의 한 변의 길이는 3이므로 대각선의 길이는 $3\sqrt{2}$이다.

개념 보충

한 변의 길이가 a인 정사각형의 대각선의 길이는 피타고라스 정리에서

$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$



연습문제 Ⅱ

p.198

349 정답 $2\sqrt{5}$

㉠에서 $y=5-2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(5-2x)^2=10$, $5x^2-20x+15=0$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

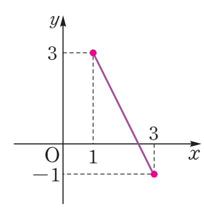
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이를 ㉠에 대입하면 각각 $y=3$ 또는 $y=-1$이다.

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

따라서 주어진 연립방정식을 만족하는 순서쌍 (x, y)는 $(1, 3)$, $(3, -1)$이고 이 두 점을 양 끝점으로 하는 선분의 길이는

$\sqrt{(1-3)^2+(3+1)^2}=2\sqrt{5}$



개념 보충

좌표평면 위에 두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$를 양 끝점으로 하는 선분의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

350 정답 $a\ge 2$

$xy=\dfrac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=\dfrac{4^2-(2a+4)}{2}=6-a$

이므로 x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-4t+6-a=0$

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(6-a)\ge 0,\ -2+a\ge 0$

$\therefore a\ge 2$

다른 풀이

$\begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=2a+4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자.

㉠에서 $y=4-x$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(4-x)^2=2a+4,\ 2x^2-8x+12-2a=0$

$x^2-4x+6-a=0$

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(6-a)\ge 0 \qquad \therefore a\ge 2$

351 정답 ± 6

$\begin{cases} x^2-y^2=-12 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자.

㉡에서 $x=k+2y$

㉠에 대입하면 $(k+2y)^2-y^2=-12$

$3y^2+4ky+k^2+12=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

이때 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지면 y에 대한 이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때

$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-3(k^2+12)=0,\ k^2-36=0$

$k^2=36 \qquad \therefore k=\pm 6$

352 정답 공통인 근은 1, $k=-1$

두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면 다음이 성립한다.

$\begin{cases} \alpha^2-2\alpha-k=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2-k\alpha-2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

$(k-2)\alpha-(k-2)=0,\ (k-2)(\alpha-1)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $\alpha=1$

(i) $k=2$이면

두 이차방정식이 $x^2-2x-2=0$으로 일치하므로 공통인 근은 2개가 되어 성립하지 않는다.

(ii) $\alpha=1$이면 ㉠에서

$1-2-k=0 \qquad \therefore k=-1$

따라서 $k=-1$이고 이때의 공통인 근은 $x=1$이다.

개념 보충

두 이차방정식 $x^2-2x+1=0$, $x^2+x-2=0$의 공통인 근을 구해보자.

$x^2-2x+1=0$에서 $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$ (중근)

$x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 두 방정식의 공통인 근은 $x=1$이다.

이처럼 두 방정식의 근 중에서 공통인 근을 구하는 문제는 다음 두 가지 유형이 있다.

(1) 한 방정식의 근을 구할 수 있으면

⇨ 그 근을 다른 방정식에 대입하여 근이 되면 공통인 근이다.

(2) 두 방정식에 미정계수가 있어서 근을 구할 수 없으면

⇨ 공통근을 α라 하고 두 방정식에 대입하여 연립방정식을 푼다.

12강

353 정답 26 서술형

㉡의 좌변을 인수분해하면

$(2x+3y)(3x-2y)=0$

$\therefore x=-\dfrac{3}{2}y$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}y$ $\cdots$ ①

(i) $x=-\dfrac{3}{2}y$를 ㉠에 대입하면

$\left(-\dfrac{3}{2}y\right)^2+y^2=13$

$13y^2=52,\ y^2=4$

$\therefore y=\pm 2$

이를 $x=-\dfrac{3}{2}y$에 대입하면

$x=\mp 3$ (복부호 동순)

(ii) $x=\dfrac{2}{3}y$를 ㉠에 대입하면

$\left(\dfrac{2}{3}y\right)^2+y^2=13$

$13y^2=117$

$y^2=9 \qquad \therefore y=\pm 3$

이를 $x=\dfrac{2}{3}y$에 대입하면

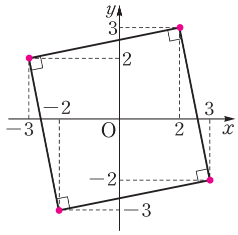
$x=\pm 2$ (복부호 동순)

(i), (ii)에서 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$

따라서 주어진 연립방정식을 만족하는 x, y의 네 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(3,\ -2)$, $(-3,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(-2,\ -3)$이다.

$\cdots$ ②



위의 그림과 같이 이웃한 두 꼭짓점 사이의 거리를 구하면

$$\sqrt{(3-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{26}$$

이므로 이 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 한 변의 길이가 $\sqrt{26}$인 정사각형이다.

따라서 넓이는 $(\sqrt{26})^2=26$이다. … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	일차방정식 2개를 구하기	20%
②	연립방정식의 해를 구하기	40%
③	사각형의 넓이를 구하기	40%

13. 부등식의 성질

확인문제 pp.202~212

354 정답 **풀이 참조**

(1) $a>0$, $b>0$이므로 $ab>0$이다.

$0<a<b$의 각 변을 ab로 나누면

$$0<\frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}$$ ← 기본 성질 (3)

$$\therefore\ 0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$$

(2) $a<0$, $b<0$이므로 $ab>0$이다.

$a<b<0$의 각 변을 ab로 나누면

$$\frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}<0$$ ← 기본 성질 (3)

$$\therefore\ 0>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$

355 정답 **풀이 참조**

$a>b>0$에서 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

양변에 1을 더하면 $\frac{1}{a}+1<\frac{1}{b}+1$

$$\therefore\ \frac{a+1}{a}<\frac{b+1}{b}$$

양변의 역수를 취하면 $\frac{a}{1+a}>\frac{b}{1+b}$

356 정답 (1) $\boldsymbol{-1<3x+2\le 14}$

(2) $\boldsymbol{\frac{1}{6}\le\frac{1}{x+2}<1}$

(3) $\boldsymbol{-1<\frac{x}{x+2}\le\frac{2}{3}}$

$-2<x-1\le 3$에서 $-1<x\le 4$ …… ㉠

(1) ㉠의 각 변에 3을 곱하면 $-3<3x\le 12$

각 변에 2를 더하면 $-1<3x+2\le 14$

$$\therefore\ -1<3x+2\le 14$$

(2) ㉠의 각 변에 2를 더하면 $1<x+2\le 6$

각 변의 역수를 취하면

$$\frac{1}{6}\le\frac{1}{x+2}<1$$ …… ㉡

(3) $\frac{x}{x+2}=\frac{(x+2)-2}{x+2}=1-\frac{2}{x+2}$이므로

㉡에서 $\frac{1}{6}\le\frac{1}{x+2}<1$

각 변에 -2를 곱하면 $-2<-\frac{2}{x+2}\le-\frac{2}{6}$

각 변에 1을 더하면 $-1<1-\frac{2}{x+2}\le\frac{4}{6}$

$$\therefore\ -1<\frac{x}{x+2}\le\frac{2}{3}$$

357 정답 $\boldsymbol{-4<A<1,\ -1<B<2}$

(ⅰ) $-3\le -y<-1$이므로 $A=x+(-y)$에서

$$\begin{array}{rrcccl} & -1 & < & x & \le & 2 \\ +) & -3 & \le & -y & < & -1 \\ \hline & -1-3 & < & x-y & < & 2-1 \end{array}$$

$\therefore -4<A<1$

(ⅱ) $(-1)\div1$, $(-1)\div3$, $2\div1$, $2\div3$ 중에서 가장 작은 값은 $(-1)\div1$, 가장 큰 값은 $2\div1$이므로

$$\begin{array}{rrcccl} & -1 & < & x & \le & 2 \\ \div) & 1 & < & y & \le & 3 \\ \hline & (-1)\div1 & < & \dfrac{x}{y} & < & 2\div1 \end{array}$$

$\therefore -1<B<2$

358 정답 (1) $\boldsymbol{a>1}$**이면** $\boldsymbol{x>a+1}$

$\boldsymbol{a<1}$**이면** $\boldsymbol{x<a+1}$

$\boldsymbol{a=1}$**이면 해가 없다.**

(2) $\boldsymbol{a>1}$**이면** $\boldsymbol{x\ge a+1}$

$\boldsymbol{a<1}$**이면** $\boldsymbol{x\le a+1}$

$\boldsymbol{a=1}$**이면 해는 모든 실수**

(1) $ax+1>x+a^2$이면

$(a-1)x>a^2-1$

$(a-1)x>(a-1)(a+1)$

(ⅰ) $a-1>0$, 즉 $a>1$이면 $x>a+1$

(ⅱ) $a-1<0$, 즉 $a<1$이면 $x<a+1$

(ⅲ) $a-1=0$, 즉 $a=1$이면 $0\cdot x>0$ $\quad\therefore$ 해가 없다.

(2) $ax+1\ge x+a^2$이면

$(a-1)x\ge a^2-1$

$(a-1)x\ge(a-1)(a+1)$

(ⅰ) $a-1>0$, 즉 $a>1$이면 $x\ge a+1$

(ⅱ) $a-1<0$, 즉 $a<1$이면 $x\le a+1$

(ⅲ) $a-1=0$, 즉 $a=1$이면 $0\cdot x\ge0$ $\quad\therefore$ 해는 모든 실수

359 정답 (1) $\boldsymbol{x<-1}$ **또는** $\boldsymbol{x>4}$

(2) $\boldsymbol{-1<x<1}$ **또는** $\boldsymbol{3<x<5}$

(3) $\boldsymbol{x<-3}$ **또는** $\boldsymbol{x>2}$

(1) $|3-2x|>5$이면 $|2x-3|>5$이므로

$2x-3<-5$ 또는 $2x-3>5$

$2x<-2$ 또는 $2x>8$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>4$

(2) $1<|x-2|<3$이면

$-3<x-2<-1$ 또는 $1<x-2<3$

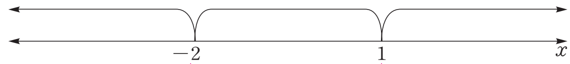
$\therefore -1<x<1$ 또는 $3<x<5$

(3) $|x+2|+|x-1|>5$에서

절댓값 안을 0이 되게 하는 x의 값 -2, 1을 기준으로

$x<-2$, $-2\le x<1$, $x\ge1$

의 세 범위로 나누어서 풀면



(ⅰ) $x<-2$일 때

$-(x+2)-(x-1)>5$

$-2x>6$

$\therefore x<-3$

(ⅱ) $-2\le x<1$일 때

$(x+2)-(x-1)>5$

$0\cdot x>2$

$\therefore$ 해가 없다.

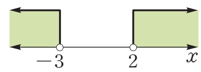
(ⅲ) $x\ge1$일 때

$(x+2)+(x-1)>5$

$2x>4$

$\therefore x>2$

각 범위에서의 해를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 해는 $x<-3$ 또는 $x>2$

360 정답 $\boldsymbol{x<2}$

부등식 $(a+2b)x>3a+b$의 해가 $x<1$이므로

$a+2b<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이고 주어진 부등식을 풀면 $x<\dfrac{3a+b}{a+2b}$이므로

$\dfrac{3a+b}{a+2b}=1$ $\quad\therefore b=2a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a<0$, $b<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

부등식 $(2a+b)x>2a+3b$에 ㉡을 대입하면

$4ax>8a$ $\quad\therefore x<2$ ($\because$ ㉢에서 $a<0$)

361 정답 $\boldsymbol{-1}$

$a^2x+2>4x+a$에서 $(a^2-4)x>a-2$

$(a-2)(a+2)x>a-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

부등식 ㉠의 해가 $x<1$이므로 $(a-2)(a+2)<0$이다.

㉠의 양변을 $(a-2)(a+2)$로 나누면

$x<\dfrac{1}{a+2}$

따라서 $\dfrac{1}{a+2}=1$, $a+2=1$이므로 $a=-1$

이때 이 값은 $(a-2)(a+2)<0$을 만족한다.

따라서 구하는 상수 a의 값은 -1이다.

362 정답 (1) $\boldsymbol{x\le3}$ (2) **해가 없다.**

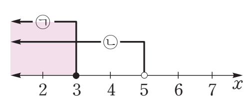
(1) $2x-1\le5$를 풀면

$2x\le6$ $\quad\therefore x\le3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x+2>2x-3$을 풀면

$-x>-5$ $\quad\therefore x<5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 해는 $x\le3$

13강

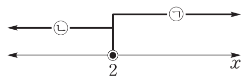
(2) (i) $\frac{x-1}{2}>\frac{x}{3}-\frac{1}{6}$의 양변에 6을 곱하면

$3x-3>2x-1$

이 부등식을 풀면 $x>2$ ...... ㉠

(ii) $4x+5\geq 9x-5$에서 $-5x\geq -10$이므로

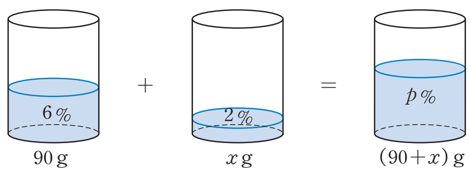
$x\leq 2$ ...... ㉡



㉠과 ㉡의 공통부분이 없으므로 해가 없다.

363 정답 $30\leq x\leq 90$

6 %의 소금물 90 g과 2 %의 소금물 x g을 섞은 소금물의 농도를 p %라 하면



$6\times 90+2\times x=p\times(90+x)$

$p=\frac{540+2x}{90+x}$

이때 섞은 소금물의 농도가 4 % 이상 5 % 이하이므로

$4\leq\frac{540+2x}{90+x}\leq 5$

양변에 $90+x$를 곱하면

$4(90+x)\leq 540+2x\leq 5(90+x)$이므로

$\begin{cases} 4(90+x)\leq 540+2x & \cdots\cdots ㉠ \\ 540+2x\leq 5(90+x) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$로 변형하여 풀자.

㉠을 풀면 $2x\leq 180$에서 $x\leq 90$

㉡을 풀면 $-3x\leq -90$에서 $x\geq 30$

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$30\leq x\leq 90$

연습문제 I .... pp.213~214

364 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $b<a<0$이면 $a<0$, $b<0$이므로

$b<a$의 양변에 a를 곱하면 $ab>a^2$ ← 기본 성질 ④

$b<a$의 양변에 b를 곱하면 $b^2>ab$ ← 기본 성질 ④

따라서 $b^2>ab$, $ab>a^2$이므로 $b^2>a^2$이다. ← 기본 성질 ①

(2) $\frac{b}{a}>0$이면 분모 a는 0이 아닌 실수이므로 $a^2>0$이다.

$\frac{b}{a}>0$의 양변에 a^2을 곱하면

$\frac{b}{a}\times a^2>0\times a^2$ $\therefore ab>0$ ← 기본 성질 ③

365 정답 ㄴ

ㄱ. $a=2$, $b=-1$, $c=-1$, $d=-4$이면

$a>b$, $c>d$이지만 $ac<bd$ (거짓)

ㄴ. $(ac+bd)-(ad+bc)$

$=a(c-d)+b(d-c)$

$=(c-d)(a-b)>0$

$\therefore ac+bd>ad+bc$ (참)

ㄷ. $a=2$, $b=-1$, $c=-1$, $d=-4$이면

$a>b$, $c>d$이지만 $a^2+c^2<b^2+d^2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

366 정답 (1) $-1\leq 2-3x<8$

(2) $\frac{1}{2}\leq\frac{2}{x+3}<2$

(3) $-1<\frac{x}{x+3}\leq\frac{1}{2}$

$-3<2x+1\leq 3$이면 $-4<2x\leq 2$

$\therefore -2<x\leq 1$ ...... ㉠

(1) ㉠의 각 변에 -3을 곱하면

$-3\leq -3x<6$

위의 부등식의 각 변에 2를 더하면

$-1\leq 2-3x<8$

(2) ㉠의 각 변에 3을 더하면 $1<x+3\leq 4$

각 변의 역수를 취하면 $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{x+3}<1$

위의 부등식의 각 변에 2를 곱하면

$\frac{1}{2}\leq\frac{2}{x+3}<2$ ...... ㉡

(3) $\frac{x+1}{x+3}=\frac{(x+3)-2}{x+3}=1-\frac{2}{x+3}$이므로

㉡에서 $\frac{1}{2}\leq\frac{2}{x+3}<2$

각 변에 -1을 곱하면 $-2<-\frac{2}{x+3}\leq -\frac{1}{2}$

각 변에 1을 더하면 $-1<1-\frac{2}{x+3}\leq\frac{1}{2}$

$\therefore -1<\frac{x+1}{x+3}\leq\frac{1}{2}$

367 정답 (1) $1\leq y-x<8$ (2) $-2\leq 2x+y<8$

(3) $-12<xy<6$ (4) $-1\leq\frac{x}{y}\leq\frac{1}{2}$

(1) $-1\leq -x\leq 2$이므로

$y-x=y+(-x)$에서

$$\begin{array}{rccccc} & 2 & \leq & y & < & 6 \\ +) & -1 & \leq & -x & \leq & 2 \\ \hline & \multicolumn{5}{c}{2-1\leq y-x<6+2} \end{array}$$

$\therefore 1\leq y-x<8$

(2) $-4\le 2x\le 2$이므로

$$\begin{array}{rrcccl} & -4 & \le & 2x & \le & 2 \\ +) & 2 & \le & y & < & 6 \\ \hline & \multicolumn{5}{c}{-4+2\le 2x+y<2+6} \end{array}$$

$\therefore\ -2\le 2x+y<8$

(3) $(-2)\times 2$, $(-2)\times 6$, 1×2, 1×6 중에서 가장 작은 값은 $(-2)\times 6$, 가장 큰 값은 1×6이므로

$$\begin{array}{rrcccl} & -2 & \le & x & \le & 1 \\ \times) & 2 & \le & y & < & 6 \\ \hline & \multicolumn{5}{c}{(-2)\times 6<xy<1\times 6} \end{array}$$

$\therefore\ -12<xy<6$

(4) $\dfrac{x}{y}=x\div y$이므로 $(-2)\div 2$, $1\div 2$, $(-2)\div 6$, $1\div 6$ 중에서 가장 작은 값은 $(-2)\div 2$, 가장 큰 값은 $1\div 2$이므로

$$\begin{array}{rrcccl} & -2 & \le & x & \le & 1 \\ \div) & 2 & \le & y & < & 6 \\ \hline & \multicolumn{5}{c}{(-2)\div 2\le \dfrac{x}{y}\le 1\div 2} \end{array}$$

$\therefore\ -1\le \dfrac{x}{y}\le \dfrac{1}{2}$

368

정답 (1) **$a>2$이면 $x\le \dfrac{2}{a-2}$**

$a<2$이면 $x\ge \dfrac{2}{a-2}$

$a=2$이면 해는 모든 실수이다.

(2) **$a>b$이면 $x>1$**

$a<b$이면 $x<1$

$a=b$이면 해는 없다.

(1) $ax+3\le 2x+5$를 정리하면 $(a-2)x\le 2$

(i) $a-2>0$, 즉 $a>2$이면 $x\le \dfrac{2}{a-2}$

(ii) $a-2<0$, 즉 $a<2$이면 $x\ge \dfrac{2}{a-2}$

(iii) $a-2=0$, 즉 $a=2$이면 $0\cdot x\le 2$

따라서 해는 모든 실수이다.

(2) $ax+b>bx+a$를 정리하면 $(a-b)x>(a-b)$

(i) $a-b>0$, 즉 $a>b$이면 $x>1$

(ii) $a-b<0$, 즉 $a<b$이면 $x<1$

(iii) $a-b=0$, 즉 $a=b$이면 $0\cdot x>0$

따라서 해는 없다.

369

정답 **$x>-\dfrac{4}{3}$**

$(a+2b)x+a-b<0$에서 $(a+2b)x<b-a$ ...... ㉠

주어진 부등식의 해가 $x>1$이므로

$a+2b<0$ ...... ㉡

㉠의 양변을 $a+2b$로 나누면 $x>\dfrac{b-a}{a+2b}$

따라서 $\dfrac{b-a}{a+2b}=1$, $b-a=a+2b$이므로

$b=-2a$

이 값을 ㉡에 대입하면

$a-4a<0$ $\quad\therefore\ a>0$

부등식 $(a-b)x+2a-b>0$에 $b=-2a$를 대입하면

$3ax+4a>0$, $3ax>-4a$

$a>0$이므로 양변을 $3a$로 나누면

$x>-\dfrac{4}{3}$

370

정답 (1) **$x\le 4$ 또는 $x\ge 8$**

(2) **$0<x\le 1$ 또는 $2\le x<3$**

(3) **$-1<x<5$**

(1) $\left|\dfrac{x}{2}-3\right|\ge 1$이면 $\dfrac{|x-6|}{2}\ge 1$

양변에 2를 곱하면 $|x-6|\ge 2$

$x-6\ge 2$ 또는 $x-6\le -2$

(i) $x-6\ge 2$에서 $x\ge 8$

(ii) $x-6\le -2$에서 $x\le 4$

(i), (ii)에서 구한 범위를 합하면

$x\le 4$ 또는 $x\ge 8$

(2) $1\le |2x-3|<3$이면

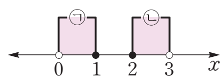
$-3<2x-3\le -1$ 또는 $1\le 2x-3<3$

(i) $-3<2x-3\le -1$에서 $0<2x\le 2$

$\therefore\ 0<x\le 1$ ...... ㉠

(ii) $1\le 2x-3<3$에서 $4\le 2x<6$

$\therefore\ 2\le x<3$ ...... ㉡



따라서 구하는 해는 ㉠, ㉡의 범위를 합하면

$0<x\le 1$ 또는 $2\le x<3$

(3) 절댓값 기호 안이 0이 되는 값 $x=1$, $x=3$을 기준으로 범위를 나누어서 풀자.

주어진 부등식은 $|x-1|+|x-3|<6$과 같으므로

(i) $x\ge 3$일 때

$x-1+x-3<6$에서 $2x<10$, $x<5$

그런데 $x\ge 3$이므로 $3\le x<5$

(ii) $1\le x<3$일 때

$x-1-(x-3)<6$에서 $2<6$이므로 항상 성립한다.

$\therefore\ 1\le x<3$

(iii) $x<1$일 때

$-(x-1)-(x-3)<6$에서 $-2x<2$, $x>-1$

그런데 $x<1$이므로 $-1<x<1$

(i), (ii), (iii)에서 구한 범위를 합하면

$-1<x<5$

13강

371 정답 $k<1$

$|3x-2|+1>k$이면 $|3x-2|>k-1$

이때 좌변은 항상 0 이상이므로 $k-1<0$이면 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$\therefore k<1$

372 정답 6

$|2x-a|<6$이면

$-6<2x-a<6,\ a-6<2x<a+6$

$\therefore \dfrac{a-6}{2}<x<\dfrac{a+6}{2}$

그런데 해가 $-2<x<b$이므로

$\dfrac{a-6}{2}=-2 \qquad \therefore a=2$

$\dfrac{a+6}{2}=\dfrac{2+6}{2}=b \qquad \therefore b=4$

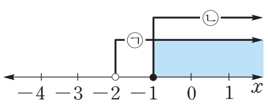
$\therefore a+b=6$

373 정답 (1) $x\geq-1$ (2) $-2<x<3$

(1) 주어진 부등식은 $\begin{cases} 5x-4<7x & \cdots\cdots ㉠ \\ 7x\leq 10x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$으로 나타낼 수 있다.

㉠을 풀면 $-2x<4 \qquad \therefore x>-2$

㉡을 풀면 $-3x\leq 3 \qquad \therefore x\geq-1$



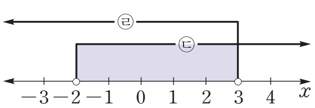
따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$x\geq-1$

(2) $\begin{cases} x-2<3x+2 & \cdots\cdots ㉢ \\ 3x+2<2x+5 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$이라 하자.

㉢을 풀면 $-2x<4 \qquad \therefore x>-2$

㉣을 풀면 $x<3$



부등식 ㉢, ㉣을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$-2<x<3$

374 정답 -22

$2x-1>-5$를 풀면

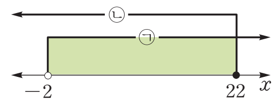
$2x>-4 \qquad \therefore x>-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\dfrac{x-5}{2}\leq\dfrac{x}{4}+3$을 풀면

$2x-10\leq x+12 \qquad \therefore x\leq 22 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2<x\leq 22$

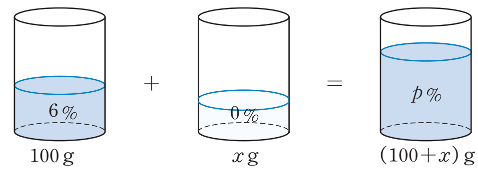


따라서 정수 x의 최댓값은 22이고 최솟값은 -1이므로

$a=22,\ b=-1 \qquad \therefore ab=-22$

375 정답 $20\leq x\leq 50$

6 %의 소금물 100 g과 물 x g을 섞은 소금물의 농도를 p %라 하면



$6\times100+0\times x=p\times(100+x)$

$p=\dfrac{600}{100+x}$

이때 섞은 소금물의 농도가 4 % 이상 5 % 이하이므로

$4\leq\dfrac{600}{100+x}\leq 5$

각 변에 $100+x$를 곱하면

$4(100+x)\leq 600\leq 5(100+x)$

이므로 $\begin{cases} 4(100+x)\leq 600 & \cdots\cdots ㉠ \\ 600\leq 5(100+x) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$로 바꾸어서 풀 수 있다.

㉠을 풀면 $4x\leq 200$에서 $x\leq 50$

㉡을 풀면 $-5x\leq -100$에서 $x\geq 20$

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$20\leq x\leq 50$

연습문제 Ⅱ p.215

376 정답 6

$|3x-2|\leq x+4$이면

$-x-4\leq 3x-2\leq x+4$이므로

(i) $-x-4\leq 3x-2$에서 $-2\leq 4x \qquad \therefore -\dfrac{1}{2}\leq x \qquad \cdots\cdots ㉠$

(ii) $3x-2\leq x+4$에서 $2x\leq 6 \qquad \therefore x\leq 3 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-\dfrac{1}{2}\leq x\leq 3$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, 3이고 그 합은

$0+1+2+3=6$

다른 풀이

(i) $x\geq\dfrac{2}{3}$일 때

$3x-2-x\leq 4,\ 2x\leq 6 \qquad \therefore x\leq 3$

$\therefore \dfrac{2}{3}\leq x\leq 3$

(ii) $x<\frac{2}{3}$일 때

$-(3x-2)-x\le 4,\ -4x\le 2 \qquad \therefore\ x\ge -\frac{1}{2}$

$\therefore\ -\frac{1}{2}\le x<\frac{2}{3}$

(i), (ii)의 범위를 합하면

$-\frac{1}{2}\le x\le 3$

377 정답 $a=-1,\ b=5$

$b\le 0$이면 부등식 $|ax-4|<b$의 해가 없으므로 $b>0$이다.

$|ax-4|<b$에서 $-b<ax-4<b$

$\therefore\ -b+4<ax<b+4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(i) $a>0$일 때

㉠의 해는 $\frac{-b+4}{a}<x<\frac{b+4}{a}$이고

주어진 부등식의 해가 $-9<x<1$이므로

$\frac{-b+4}{a}=-9,\ \frac{b+4}{a}=1$

$\therefore\ 9a-b=-4,\ a-b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-5$

이 값은 $b>0$을 만족하지 않으므로 성립하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

㉠의 해는 $\frac{b+4}{a}<x<\frac{-b+4}{a}$이고

주어진 부등식의 해가 $-9<x<1$이므로

$\frac{b+4}{a}=-9,\ \frac{-b+4}{a}=1$

$\therefore\ 9a+b=-4,\ a+b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=5$

이 값은 $a<0,\ b>0$을 모두 만족하므로 성립한다.

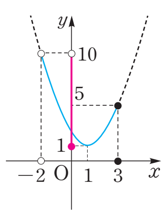
(i), (ii)에서 $a=-1,\ b=5$

378 정답 $\frac{1}{10}<\frac{1}{x^2-2x+2}\le 1$

$y=x^2-2x+2$로 놓으면

$y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

에서 함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=-2$일 때, $y=10$

$x=1$일 때, $y=1$

이므로 $-2<x\le 3$에서 y의 값의 범위는

$1\le y<10$

$1\le x^2-2x+2<10$

$\therefore\ \frac{1}{10}<\frac{1}{x^2-2x+2}\le 1$

379 정답 37

학생의 수를 x명이라 하면 연필의 개수는

$(4x+13)$자루 $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

연필을 7자루씩 주면 $(x-1)$명은 7자루씩 받고 마지막 한 학생만 1자루 이상 4자루 이하를 받으므로

$7(x-1)+1\le 4x+13\le 7(x-1)+4$

$7x-6\le 4x+13\le 7x-3$

(i) $7x-6\le 4x+13$을 풀면

$3x\le 19$이므로 $x\le\frac{19}{3}$

(ii) $4x+13\le 7x-3$을 풀면

$16\le 3x$이므로 $x\ge\frac{16}{3}$

(i), (ii)에서 공통범위를 구하면 $\frac{16}{3}\le x\le\frac{19}{3}$

이때 x는 자연수이므로 $x=6$

따라서 연필의 개수는 ㉠에서

$4\times 6+13=37$(자루)

380 정답 75 서술형

4월까지 가입한 남녀 회원의 수의 비가 $2:3$이므로 4월까지 가입한 남녀 회원의 수를 각각 $2a$, $3a$라 놓고

5월에 가입한 남녀 회원의 수를 각각 x, $2x$로 놓으면 $\cdots$ ①

$\begin{cases} \text{4월까지 가입한 회원의 수} : 2a+3a<255 & \cdots\cdots ㉠ \\ \text{5월까지 가입한 회원의 수} : 5a+3x>320 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ $\cdots$ ②

5월까지 가입한 남녀 회원의 수의 비가 $5:8$이므로

$(2a+x):(3a+2x)=5:8$

$5(3a+2x)=8(2a+x),\ 15a+10x=16a+8x$

$\therefore\ a=2x$

이를 ㉠, ㉡에 대입하면

$4x+6x<255,\ 10x<255 \qquad \therefore\ x<25.5$

$10x+3x>320,\ 13x>320 \qquad \therefore\ x>24.6\cdots$

$\therefore\ 24.6\cdots<x<25.5$

그런데 x는 정수이므로 $x=25$ $\cdots$ ③

따라서 5월에 가입한 회원의 수는

$x+2x=3x=3\times 25=75$(명) $\cdots$ ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	4월까지 가입한 회원의 수와 5월에 가입한 회원의 수를 문자로 놓기	20 %
②	연립부등식을 세우기	20 %
③	연립부등식을 풀기	40 %
④	5월에 가입한 회원의 수를 구하기	20 %

개념 보충

인원 수가 비로 정해지는 문제를 풀 때는 표로 나타내면 식을 세우기가 편리하다.

	남자(명)	여자(명)	합계
4월	$2a$	$3a$	255명 미만
5월	x	$2x$	
합계	$2a+x$	$3a+2x$	320명 초과

14. 이차부등식과 이차함수

확인문제 pp.222~227

381 정답 (1) $\frac{1}{2}<x<2$ (2) $x<\frac{2}{3}$ 또는 $x>1$

(3) $-1-\sqrt{7}\le x\le -1+\sqrt{7}$

(1) 좌변을 인수분해하면 $(2x-1)(x-2)<0$

$\therefore\ \frac{1}{2}<x<2$

(2) 양변에 -1을 곱하여 x^2항의 계수를 양수로 고치면

$3x^2-5x+2>0$, $(3x-2)(x-1)>0$

$\therefore\ x<\frac{2}{3}$ 또는 $x>1$

(3) $(x+3)(x-1)\le 3$에서 $x^2+2x-3\le 3$, $x^2+2x-6\le 0$

이차방정식 $x^2+2x-6=0$의 근은 근의 공식에서

$x=-1\pm\sqrt{7}$이므로

$x^2+2x-6\le 0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+1+\sqrt{7})(x+1-\sqrt{7})\le 0$

$\therefore\ -1-\sqrt{7}\le x\le -1+\sqrt{7}$

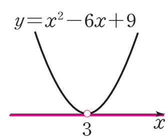
382 정답 (1) $x\ne 3$인 모든 실수 (2) $x=5$

(3) 해는 없다.

(1) 양변에 -1을 곱하여 x^2항의 계수를 양수로 고치면

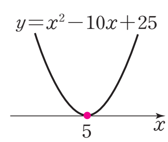
$x^2-6x+9>0$

이차함수 $y=x^2-6x+9=(x-3)^2$의 그래프는 오른쪽과 같고 부등식 $x^2-6x+9>0$의 해는 그래프가 x축보다 위에 있는 x의 값의 범위이다.



따라서 구하는 해는 $x\ne 3$인 모든 실수이다.

(2) 이차함수 $y=x^2-10x+25=(x-5)^2$의 그래프는 오른쪽과 같고 부등식 $x^2-10x+25\le 0$의 해는 오른쪽 그래프에서 $y=0$ 또는 $y<0$인 부분의 x의 값 또는 범위이다.



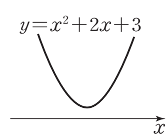
$y<0$인 부분은 없고, $y=0$일 때 $x=5$이다.

따라서 구하는 해는 $x=5$이다.

(3) 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot 3=-2<0$

이차함수 $y=x^2+2x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 만나지 않는다. 부등식 $x^2+2x+3<0$의 해는 오른쪽 그림에서 그래프가 x축보다 아래에 있는 x의 값의 범위이다.



따라서 부등식 $x^2+2x+3<0$의 해는 없다.

383 정답 (1) $\begin{cases} a>0\text{일 때, } -a<x<a \\ a<0\text{일 때, } a<x<-a \\ a=0\text{일 때, 해가 없다} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a>0\text{일 때, } x<-1 \text{ 또는 } x>1 \\ a<0\text{일 때, } -1<x<1 \\ a=0\text{일 때, 해는 없다.} \end{cases}$

(1) 부등식 $x^2-a^2<0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+a)(x-a)<0$

(i) $-a<a$일 때, 즉 $a>0$일 때, $-a<x<a$

(ii) $-a>a$일 때, 즉 $a<0$일 때, $a<x<-a$

(iii) $a=0$일 때, $x^2<0$이므로 해가 없다.

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} a>0\text{일 때, } -a<x<a \\ a<0\text{일 때, } a<x<-a \\ a=0\text{일 때, 해가 없다.} \end{cases}$

(2) $ax^2-a>0$에서 $a(x+1)(x-1)>0$ …… ㉠

(i) $a>0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면

$(x+1)(x-1)>0$ $\therefore x<-1$ 또는 $x>1$

(ii) $a<0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면

$(x+1)(x-1)<0$ $\therefore -1<x<1$

(iii) $a=0$일 때, ㉠에 $a=0$을 대입하면

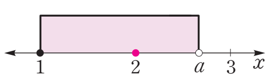
$0\cdot(x+1)(x-1)>0$

이 되어 어떤 실수 x에 대해서도 성립하지 않으므로 해는 없다.

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} a>0\text{일 때, } x<-1 \text{ 또는 } x>1 \\ a<0\text{일 때, } -1<x<1 \\ a=0\text{일 때, 해는 없다.} \end{cases}$

384 정답 (1) $2<a\le 3$ (2) $3\le a<4$

(1) 아래 수직선에서 a는 2와 3 사이에 있어야 한다.

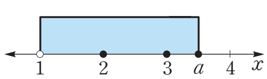


(i) $a=2$이면 $1\le x<2$가 되어 정수 x는 1밖에 없으므로 성립하지 않는다.

(ii) $a=3$이면 $1\le x<3$이 되어 정수 x는 1, 2의 두 개가 있으므로 성립한다.

따라서 a의 값의 범위는 $2<a\le 3$이다.

(2) 아래 수직선에서 a는 3과 4 사이에 있어야 한다.



(i) $a=3$이면 $1<x\le 3$이 되어 정수 x는 2, 3의 두 개가 있으므로 성립한다.

(ii) $a=4$이면 $1<x\le 4$가 되어 정수 x는 2, 3, 4의 세 개가 있으므로 성립하지 않는다.

따라서 a의 값의 범위는 $3\le a<4$이다.

385 정답 (1) $-2<x<4$ (2) $-4\le x\le 4$

(1) (i) $x\ge 1$일 때

$x^2-2x-5<x-1$, $x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x<4$

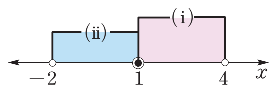
(ii) $x<1$일 때

$x^2-2x-5<-x+1$, $x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

그런데 $x<1$이므로 $-2<x<1$



(i), (ii)에서 구하는 해는 $-2<x<4$

(2) (i) $x\ge 0$일 때

$x^2-2x-8\le 0$, $(x+2)(x-4)\le 0$

$\therefore -2\le x\le 4$

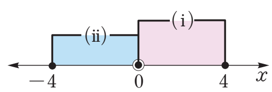
그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x\le 4$

(ii) $x<0$일 때

$x^2+2x-8\le 0$, $(x+4)(x-2)\le 0$

$\therefore -4\le x\le 2$

그런데 $x<0$이므로 $-4\le x<0$



(i), (ii)에서 구하는 해는 $-4\le x\le 4$

다른 풀이

$x^2=|x|^2$으로 주어진 부등식은

$|x|^2-2|x|-8\le 0$

$(|x|+2)(|x|-4)\le 0$

$|x|+2>0$이므로 $|x|-4\le 0$

$|x|\le 4$이므로 $-4\le x\le 4$

386 정답 $5\le x\le 10$

상품 A의 가격을 $100x$원 인상하면

판매 가격은 $(1000+100x)$원, 하루 판매량은 $(100-4x)$개가 되므로 하루 판매 금액은

$(1000+100x)(100-4x)$원

이 상품의 하루 판매 금액이 120000원 이상이 되어야 하므로

$(1000+100x)(100-4x)\ge 120000$

$(10+x)(25-x)\ge 300$

$x^2-15x+50\le 0$

$(x-5)(x-10)\le 0$

$\therefore 5\le x\le 10$

연습문제 I pp.228~230

387 정답 5

$(x+1)(x-3)\le 0$에서 $-1\le x\le 3$

x는 정수이므로 $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

따라서 정수 x의 총합은 $-1+0+1+2+3=5$이다.

388 정답 -3

이차부등식 $x^2-2x-4<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로

이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-4$이므로

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{2^2-2\cdot(-4)}{-4}=-3$$

389 정답 (1) $x=-3$ 또는 $x=2$ (2) $-3<x<2$ (3) $x<-3$ 또는 $x>2$ (4) $-3\le x\le 2$

(1) 그래프와 x축$(y=0)$의 교점의 x좌표이므로
$x=-3$ 또는 $x=2$

(2) 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $-3<x<2$

(3) 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $x<-3$ 또는 $x>2$

(4) $y=0$ 또는 $y>0$인 x의 값의 범위이므로 $-3\le x\le 2$

390 정답 ⑤

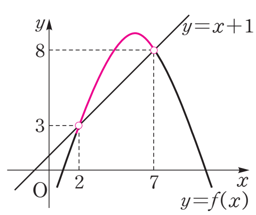
① $x^2<x+2$ ② $x^2-2<x$ ③ $x^2-x<2$ ④ $x^2-x-2<0$

즉, ①~④는 모두 부등식 $x^2-x-2<0$을 만족하는 x의 값의 범위이고 ⑤는 부등식 $x^2-x<-2$, 즉 $x^2-x+2<0$을 만족하는 x의 값의 범위이다.

따라서 x의 값의 범위가 나머지와 다른 것은 ⑤이다.

391 정답 18

직선 $y=x+1$에서 $y=3$일 때 $x=2$, $y=8$일 때 $x=7$이므로 직선 $y=x+1$과 이차항의 계수가 음수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(2,\ 3)$과 $(7,\ 8)$에서 만난다.



이때 이차부등식 $f(x)>x+1$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x+1$보다 위쪽에 있을 때, x의 값의 범위와 같으므로 $2<x<7$이다.

따라서 이차부등식 $f(x)>x+1$을 만족시키는 정수 x는 3, 4, 5, 6이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$3+4+5+6=18$

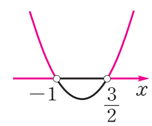
392 정답 (1) $0<x<1$ (2) $3<x<7$

(1) 이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $1<x<3$이므로
부등식 $f(2x+1)<0$의 해는
$1<2x+1<3,\ 0<2x<2$
$\therefore\ 0<x<1$

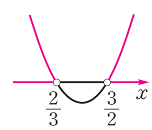
(2) 이차부등식 $f(2x+1)<0$의 해가 $1<x<3$이므로
$2<2x<6\quad \therefore\ 3<2x+1<7$
즉, 부등식 $f(2x+1)<0$의 해가 $3<2x+1<7$이므로
부등식 $f(x)<0$의 해는 $3<x<7$이다.

393 정답 (1) $x<-1$ 또는 $x>\frac{3}{2}$ (2) $x<\frac{2}{3}$ 또는 $x>\frac{3}{2}$ (3) $x\ne 2$인 모든 실수 (4) $x=3$ (5) 해가 없다. (6) 모든 실수

(1) $(x+1)(2x-3)>0$
$\therefore\ x<-1$ 또는 $x>\frac{3}{2}$



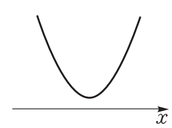
(2) x^2항의 계수를 양수로 고치면
$6x^2-13x+6>0$
$(3x-2)(2x-3)>0$
$\therefore\ x<\frac{2}{3}$ 또는 $x>\frac{3}{2}$



(3) $(x-2)^2>0\quad \therefore\ x\ne 2$인 모든 실수

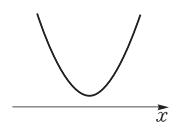
(4) $(x-3)^2\le 0\quad \therefore\ x=3$

(5) 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=-3<0$



따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1>0$이므로
이차부등식 $x^2+x+1<0$의 해는 없다.

(6) 이차방정식 $3x^2-6x+8=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=-15<0$



따라서 모든 실수 x에 대하여 $3x^2-6x+8>0$이므로
이차부등식 $3x^2-6x+8\ge 0$의 해는 모든 실수이다.

394 정답 ⑤

① 이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근을 근의 공식을 이용하여 구하면 $x=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$이므로 주어진 이차부등식은

$$2\left(x-\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)\le 0$$

$$\therefore \frac{3-\sqrt{7}}{2}\le x\le \frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

② $(x+1)(x-3)<0 \qquad \therefore -1<x<3$

③ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 x는 모든 실수

④ $(x-3)^2>0$이므로 $x\ne 3$인 모든 실수

⑤ $(2x-1)^2<0$이므로 해는 없다.

따라서 해가 존재하지 않는 것은 ⑤이다.

395 정답 (1) $x\ne 2$인 모든 실수 (2) $x=3$

(1) 좌변을 인수분해하면 $4(x-2)^2>0$

따라서 해는 $x\ne 2$인 모든 실수이다.

(2) $6x-9\ge x^2$에서 $-x^2+6x-9\ge 0$

양변에 -1을 곱하면 $x^2-6x+9\le 0$

좌변을 인수분해하면 $(x-3)^2\le 0$

$\therefore x=3$

396 정답 (1) 해는 모든 실수 (2) 해가 없다.

(1) 이차방정식 $x^2+3x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times1\times4=-7<0$

이고 x^2의 계수는 $1>0$이므로 해는 모든 실수이다.

(2) 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times3=-11<0$

이고 x^2의 계수는 $1>0$이므로 해가 없다.

397 정답 (1) $\begin{cases} a<2\text{일 때, } a<x<2 \\ a>2\text{일 때, } 2<x<a \\ a=2\text{일 때, 해가 없다.} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} a>0\text{일 때, } x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 4 \\ a<0\text{일 때, } 0\le x\le 4 \\ a=0\text{일 때, 모든 실수} \end{cases}$

(1) $x^2-(a+2)x+2a<0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-a)(x-2)<0$

(i) $a<2$일 때, $a<x<2$

(ii) $a>2$일 때, $2<x<a$

(iii) $a=2$일 때, $(x-2)^2<0$이므로 해가 없다.

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} a<2\text{일 때, } a<x<2 \\ a>2\text{일 때, } 2<x<a \\ a=2\text{일 때, 해가 없다.} \end{cases}$

(2) $ax^2-4ax\ge 0$에서 $ax(x-4)\ge 0$ …… ㉠

(i) $a>0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면

$x(x-4)\ge 0 \qquad \therefore x\le 0$ 또는 $x\ge 4$

(ii) $a<0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면

$x(x-4)\le 0 \qquad \therefore 0\le x\le 4$

(iii) $a=0$일 때, ㉠에 $a=0$을 대입하면

$0\cdot x(x-4)\ge 0$

이 되어 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 해는 모든 실수이다.

따라서 구하는 해는 $\begin{cases} a>0\text{일 때, } x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 4 \\ a<0\text{일 때, } 0\le x\le 4 \\ a=0\text{일 때, 모든 실수} \end{cases}$

398 정답 $6a<x<-a$

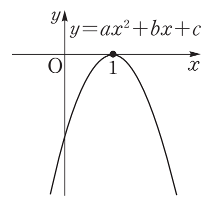
$a<0$이므로 부등식의 양변을 a로 나누면

$x^2-5ax-6a^2<0,\ (x+a)(x-6a)<0$

$a<0$이면 $6a<-a$이므로 주어진 이차부등식의 해는

$6a<x<-a$

399 정답 2



x에 대한 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$의 해가 오직 $x=1$뿐이므로 $a<0$이고 주어진 부등식은 $a(x-1)^2\ge 0$가 되어야 한다.

$ax^2+bx+c=a(x-1)^2$

$=ax^2-2ax+a$

$\therefore b=-2a,\ c=a$

$bx^2+3cx+2a=-2ax^2+3ax+2a$

$=-a(2x^2-3x-2)$

$=-a(2x+1)(x-2)<0$

$-a>0$이므로 위의 부등식의 해는 부등식 $(2x+1)(x-2)<0$의 해와 같다.

$\therefore -\frac{1}{2}<x<2$

따라서 정수 x는 0과 1이므로 그 개수는 2이다.

400 정답 $-4<a\le -3$ 또는 $1\le a<2$

$x^2-(a-1)x-a\le 0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-a)(x+1)\le 0$

(i) $a<-1$이면 해는 $a\le x\le -1$

이때 $a\le x\le -1$인 정수 x의 개수가 세 개가 되도록 하는 실수 a는 아래 수직선에서 -4와 -3 사이에 있어야 한다.

i) $a=-4$이면 해가 $-4\le x\le -1$이므로 정수 x는 -4, -3, -2, -1의 네 개가 되어 성립하지 않는다.

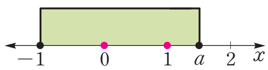
ii) $a=-3$이면 해가 $-3\le x\le -1$이므로 정수 x는 -3, -2, -1의 세 개가 되어 성립한다.

따라서 a의 값의 범위는 $-4<a\le -3$

(ii) $a=-1$이면 주어진 부등식은 $(x+1)^2\le 0$이 되어 해가 $x=-1$ 하나밖에 없으므로 성립하지 않는다.

(iii) $a>-1$이면 해는 $-1\le x\le a$

이때 $-1\le x\le a$인 정수 x의 개수가 세 개가 되도록 하는 실수 a는 아래 수직선에서 1과 2 사이에 있어야 한다.



i) $a=1$이면

해가 $-1\le x\le 1$이 되어 정수 x는 -1, 0, 1의 세 개가 있으므로 성립한다.

ii) $a=2$이면

해가 $-1\le x\le 2$가 되어 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 네 개가 되어 성립하지 않는다.

따라서 a의 값의 범위는 $1\le a<2$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$-4<a\le -3$ 또는 $1\le a<2$

401 정답 (1) $-4\le x\le 0$ (2) $-4\le x\le 4$

(1) (i) $x\ge -2$일 때

$x^2+4x+2\le x+2$

$x^2+3x\le 0$, $x(x+3)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 0$

그런데 $x\ge -2$이므로 $-2\le x\le 0$

(ii) $x<-2$일 때

$x^2+4x+2\le -x-2$, $x^2+5x+4\le 0$

$(x+4)(x+1)\le 0$

$\therefore -4\le x\le -1$

그런데 $x<-2$이므로 $-4\le x<-2$

(i), (ii)의 범위를 합하면 구하는 해는

$-4\le x\le 0$

(2) (i) $x\ge 0$일 때

$x^2-3x-4\le 0$, $(x+1)(x-4)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 4$

그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x\le 4$

(ii) $x<0$일 때

$x^2+3x-4\le 0$, $(x+4)(x-1)\le 0$

$\therefore -4\le x\le 1$

그런데 $x<0$이므로 $-4\le x<0$

(i), (ii)의 범위를 합하면 구하는 해는

$-4\le x\le 4$

다른 풀이

$x^2=|x|^2$이므로 주어진 부등식은

$|x|^2-3|x|-4\le 0$, $(|x|+1)(|x|-4)\le 0$

이때 $|x|+1>0$이므로

$|x|-4\le 0$, $|x|\le 4$

$\therefore -4\le x\le 4$

연습문제 Ⅱ p.231

402 정답 5

$a^2<b<3a$ ······ ㉠

$a^2<3a$에서 $a(a-3)<0$ $\therefore 0<a<3$

a는 정수이므로 만족하는 a의 값은 1 또는 2이다.

(i) $a=1$일 때, ㉠에서 $1<b<3$ $\therefore b=2$

(ii) $a=2$일 때, ㉠에서 $4<b<6$ $\therefore b=5$

(i), (ii)로부터 b의 최댓값은 5이다.

403 정답 $-2<x<1$

$y=ax^2+bx$의 그래프에서 $a>0$이고 x축과의 교점의 x좌표가 0, 2이므로

$y=ax^2+bx=ax(x-2)=ax^2-2ax$에서

$b=-2a$ ······ ㉠

한편, 포물선 $y=ax^2+bx$와 직선 $y=cx$의 교점의 x좌표가 0, 3이므로 이차방정식 $ax^2+bx=cx$, 즉

$ax^2-2ax=cx$ ······ ㉡

의 해는 $x=0$ 또는 $x=3$이다.

$x=3$을 ㉡에 대입하면 $9a-6a=3c$

$\therefore c=a$ ······ ㉢

이때 ㉠, ㉢을 부등식 $ax^2+cx+b<0$에 대입하면

$ax^2+ax-2a<0$, $a(x+2)(x-1)<0$

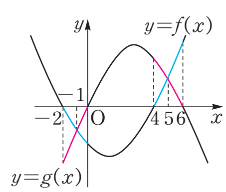
$a>0$이므로 구하는 해는

$-2<x<1$

404 정답 $-2<x<0$ 또는 $4<x<6$

$f(x)g(x)>0$이면 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$이 성립하므로

좌표평면에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 x축보다 위에 있거나 모두 x축보다 아래에 있어야 한다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 x축보다 위에 있는 x의 값의 범위는

$4<x<6$ ······ ㉠

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 x축보다 아래에 있는 x의 값의 범위는

$-2<x<0$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 범위를 합하면

$-2<x<0$ 또는 $4<x<6$

405 **30초** 서술형

이 스카이다이버가 낙하산을 펴야 하는 최저 높이가 400 m이므로 낙하산을 펴지 않은 상태로 낙하하는 높이 h의 범위는

$400 \le h \le 4900$ … ①

한편 스카이다이버가 뛰어내린 후 t초에서의 지면으로부터의 높이 h는

$h=4900-5t^2$ … ②

이므로 낙하산을 펴지 않은 상태에 있을 동안은

$400 \le 4900-5t^2 \le 4900$

$-4500 \le -5t^2 \le 0$

$0 \le t^2 \le 900$

$\therefore -30 \le t \le 30$ … ③

이때 $t>0$이므로 $0<t\le 30$

따라서 이 스카이다이버가 낙하산을 펴지 않은 상태로 낙하할 수 있는 최대 시간은 30초이다. … ④

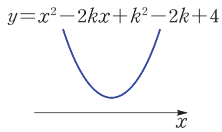
[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	낙하산을 펴지 않은 상태에 있을 동안의 h의 값의 범위를 구하기	20%
②	h의 식을 구하기	30%
③	이차부등식을 풀기	30%
④	낙하산을 펴지 않고 낙하할 수 있는 최대 시간을 구하기	20%

15. 이차부등식의 활용

확인문제 pp.236~246

406 정답 $k<2$



모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2kx+k^2-2k+4>0$이 성립하므로 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-2k+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k^2-2k+4)<0$

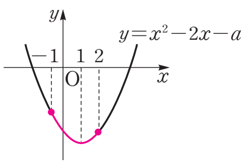
$2k-4<0 \qquad \therefore k<2$

407 정답 (1) $a>3$ (2) $a>3$

(1) 부등식 $-x^2+2x+a>0$의 양변에 -1을 곱하면

$x^2-2x-a<0$

$-1\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2x-a<0$이 성립하려면



위의 그림과 같이 이차함수 $f(x)=x^2-2x-a$의 그래프가 $-1\le x\le 2$에서 항상 x축보다 아래쪽에 있어야 하므로 $-1\le x\le 2$에서 이차함수 $f(x)=x^2-2x-a$의 최댓값이 0보다 작으면 된다.

$f(x)=x^2-2x-a=(x-1)^2-a-1$

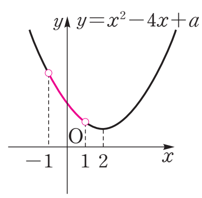
의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이므로 $f(x)$는 $x=-1$일 때, 최대이다.

따라서 최댓값은

$f(-1)=3-a<0$

$\therefore a>3$

(2) 아래 그림과 같이 이차함수 $f(x)=x^2-4x+a$의 그래프가 $-1<x<1$에서 항상 x축보다 위쪽에 있어야 한다.



$f(x)=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$

의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이므로

$f(1)=a-3>0$

$\therefore a>3$

15강

408 정답 (1) $x^2-x-6>0$ (2) $a=-3$, $b=18$

(1) 해가 $x<-2$ 또는 $x>3$이고 이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)>0$ $\therefore x^2-x-6>0$

(2) 해가 $x<-2$ 또는 $x>3$이고 이차항의 계수가 1인 이차부등식은 (1)에서

$x^2-x-6>0$ …… ㉠

㉠과 주어진 부등식 $ax^2+3x+b<0$의 부등호의 방향이 서로 다르므로

$a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-ax-6a<0$ ($\because a<0$)

이 부등식이 $ax^2+3x+b<0$과 같아야 하므로 계수를 비교하면

$-a=3$, $-6a=b$

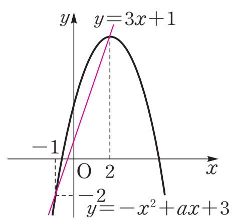
$\therefore a=-3$, $b=18$

409 정답 (1) 4 (2) $k>\frac{1}{3}$

(1) $-x^2+ax+3>3x+1$, 즉

$x^2+(3-a)x-2<0$ …… ㉠

의 해가 $-1<x<2$이다.



한편, 해가 $-1<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-2)<0$

$\therefore x^2-x-2<0$

이 부등식이 ㉠과 같으므로 계수를 비교하면

$3-a=-1$ $\therefore a=4$

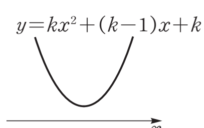
(2) 이차함수 $y=kx^2-x+k+1$의 그래프가 직선 $y=1-kx$보다 항상 위쪽에 있으므로

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$kx^2-x+k+1>1-kx$, 즉 $kx^2+(k-1)x+k>0$

이 성립한다.

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로



이차함수 $y=kx^2+(k-1)x+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 아래로 볼록이면서 x축보다 위쪽에 있어야 한다.

따라서 $k>0$이고 이차방정식 $kx^2+(k-1)x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2-4k^2<0$

$-3k^2-2k+1<0$, $3k^2+2k-1>0$

$(k+1)(3k-1)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>\frac{1}{3}$

그런데 $k>0$이므로 구하는 k의 값의 범위는 $k>\frac{1}{3}$

410 정답 (1) $-3\le x<-2$ 또는 $4<x\le 6$

(2) $-5\le x<-4$ 또는 $2<x\le 3$

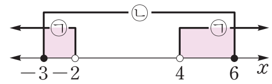
(3) $0\le x<3$

(1) $x^2-2x>8$에서 $(x+2)(x-4)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>4$ …… ㉠

$x^2-x\le 2x+18$에서 $x^2-3x-18\le 0$, $(x+3)(x-6)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 6$ …… ㉡



따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$-3\le x<-2$ 또는 $4<x\le 6$

(2) 주어진 연립부등식은 $\begin{cases} -2x-7<x^2-15 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-15\le -2x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

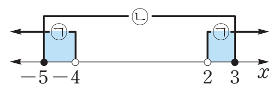
와 같이 나타낼 수 있다.

㉠에서 $x^2+2x-8>0$, $(x+4)(x-2)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>2$

㉡에서 $x^2+2x-15\le 0$, $(x+5)(x-3)\le 0$

$\therefore -5\le x\le 3$



따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

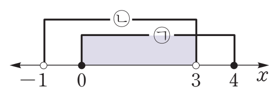
$-5\le x<-4$ 또는 $2<x\le 3$

(3) $|x-2|\le 2$에서 $-2\le x-2\le 2$

$\therefore 0\le x\le 4$ …… ㉠

$x^2-2x-3<0$에서 $(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$ …… ㉡



따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$0\le x<3$

411 정답 18

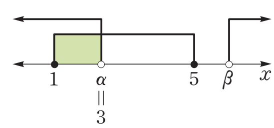
$x^2-6x+5\le 0$에서 $(x-1)(x-5)\le 0$

$\therefore 1\le x\le 5$

한편, 이차방정식 $x^2-9x+a=0$ …… ㉠의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 부등식 $x^2-9x+a>0$의 해는

$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

연립부등식의 해가 $1\le x<3$이 되도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \alpha=3$

이 값을 ㉠에 대입하면

$9-27+a=0$ $\therefore a=18$

다른 풀이

연립부등식의 해가 $1\le x<3$이면 이차방정식 $x^2-9x+a=0$의 한 근이 $x=3$이므로 대입하면

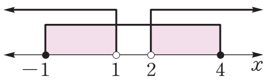
$9-27+a=0 \qquad \therefore a=18$

412 정답 $a=-3,\ b=2$

$x^2-3x-4\le 0$을 풀면

$(x+1)(x-4)\le 0 \qquad \therefore -1\le x\le 4$

연립부등식의 해가 $-1\le x<1$ 또는 $2<x\le 4$가 되도록 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 부등식 $x^2+ax+b>0$의 해는 $x<1$ 또는 $x>2$이어야 한다.

해가 $x<1$ 또는 $x>2$이고 x^2항의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-2)>0 \qquad \therefore x^2-3x+2>0$

이 부등식이 $x^2+ax+b>0$와 같으므로 계수를 비교하면

$a=-3,\ b=2$

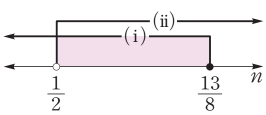
413 정답 1

이차방정식 $x^2-3x+2n-1=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 하면 $D\ge 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$을 만족하여야 한다.

(i) $D=9-4(2n-1)\ge 0 \qquad \therefore n\le \frac{13}{8}$

(ii) $\alpha+\beta=3>0$은 항상 성립한다.

(iii) $\alpha\beta=2n-1>0 \qquad \therefore n>\frac{1}{2}$



(i), (iii)을 모두 만족하는 n의 값의 범위를 구하면

$\frac{1}{2}<n\le \frac{13}{8}$

따라서 자연수 n의 값은 1이다.

414 정답 $2<a<3$

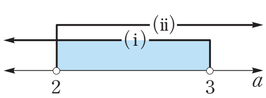
$x^2+(a-3)x-a+2=0$에서

두 근의 합이 양수일 조건은 $\alpha+\beta>0$이고

두 근의 부호가 서로 다를 조건은 $\alpha\beta<0$이므로

(i) $\alpha+\beta=-(a-3)>0 \qquad \therefore a<3$

(ii) $\alpha\beta=-a+2<0 \qquad \therefore a>2$



(i), (ii)를 모두 만족하는 a의 값의 범위를 구하면

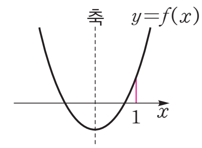
$2<a<3$

415 정답 (1) $-\frac{3}{2}<k\le \frac{1}{2}$

(2) $k<-\frac{3}{2}$

$f(x)=x^2+2x+2k$라 하고 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하자.

(1) 두 근이 모두 1보다 작기 위해서는



(i) 함 : $f(1)=2k+3>0$에서

$k>-\frac{3}{2}$

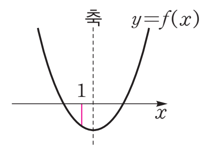
(ii) 판 : $\frac{D}{4}=1-2k\ge 0$에서 $k\le \frac{1}{2}$

(iii) 축 : 대칭축 $x=-1<1$ ←항상 성립

(i), (ii)를 모두 만족하는 k의 값의 범위를 구하면

$-\frac{3}{2}<k\le \frac{1}{2}$

(2) 한 근은 1보다 크고 다른 한 근은 1보다 작기 위해서는 이차항의 계수가 양수이므로 $f(1)=2k+3<0$이면 된다.



$\therefore k<-\frac{3}{2}$

연습문제 I ········ pp.247~249

416 정답 (1) $-1<x\le 4$

(2) $3<x\le 4$

(3) $-1\le x<2$

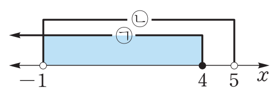
(1) $2x\le x+4$에서 $x\le 4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2-x<3x+5$에서

$x^2-4x-5<0,\ (x+1)(x-5)<0$

$\therefore -1<x<5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위를 구하면



$-1<x\le 4$

(2) 주어진 연립부등식을

$\begin{cases} -x+3<x^2-9 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-9\le x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$으로 변형하여 풀면

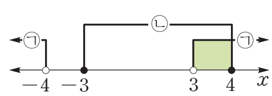
㉠에서 $x^2+x-12>0,\ (x+4)(x-3)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>3$

㉡에서 $x^2-x-12\le 0,\ (x+3)(x-4)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 4$

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위를 구하면



$3<x\le 4$

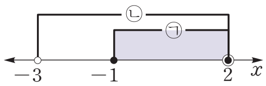
(3) $|2x-1|\le3$에서 $-3\le2x-1\le3$, $-2\le2x\le4$

$\therefore -1\le x\le2$ ...... ㉠

$x^2+x-6<0$에서 $(x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$ ...... ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위를 구하면



$-1\le x<2$

417 정답 $1<k<3$

이차방정식 $x^2+(m-4)x+3-mk=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=(m-4)^2-4(3-mk)$

$=m^2+4(k-2)m+4>0$ ...... ㉠

부등식 ㉠이 실수 m의 값에 관계없이 항상 성립하여야 하므로 이차방정식 $m^2+4(k-2)m+4=0$의 판별식을 D'라 할 때,

$\frac{D'}{4}=4(k-2)^2-4<0$, $4(k-1)(k-3)<0$

$\therefore 1<k<3$

418 정답 $a\le-\frac{1}{3}$ 또는 $a\ge1$

$\sqrt{x^2-2(a+1)x+4a^2}$이 실수가 되려면 근호 안의 식의 값이 0 이상이어야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2(a+1)x+4a^2\ge0$이 성립하여야 하므로 이차방정식 $x^2-2(a+1)x+4a^2=0$의 판별식을 D라 할 때,

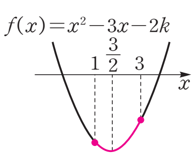
$\frac{D}{4}=(a+1)^2-4a^2\le0$

$3a^2-2a-1\ge0$, $(3a+1)(a-1)\ge0$

$\therefore a\le-\frac{1}{3}$ 또는 $a\ge1$

419 정답 0

$1\le x\le3$인 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-3x-2k\le0$이 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $f(x)=x^2-3x-2k$의 그래프가 $1\le x\le3$에서 항상 x축 또는 x축보다 아래쪽에 있어야 하므로 (최댓값)≤0이면 된다.



$f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2k-\frac{9}{4}$

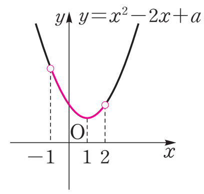
이므로 축의 방정식은 $x=\frac{3}{2}$이고 $x=3$에서 최대이다.

$f(3)=9-9-2k\le0$ $\therefore k\ge0$

따라서 k의 최솟값은 0이다.

420 정답 $a>1$

$-1<x<2$인 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2x+a>0$이 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-2x+a$의 그래프가 $-1<x<2$에서 항상 x축보다 위쪽에 있어야 하므로 $-1<x<2$에서 이차함수 $f(x)=x^2-2x+a$의 최솟값이 0보다 크면 된다.



$f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$

이고 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 가지므로

최솟값 : $f(1)=a-1>0$

$\therefore a>1$

421 정답 $x<-5$ 또는 $x>1$

해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)<0$ $\therefore x^2-4x+3<0$

$x^2-ax+b<0$과 계수를 비교하면 $a=4$, $b=3$ ...... ㉠

㉠을 $bx^2+3ax-15>0$에 대입하면

$3x^2+12x-15>0$, $x^2+4x-5>0$, $(x+5)(x-1)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>1$

422 정답 $a=-2$, $b=4$

해가 $-1<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-2)<0$ $\therefore x^2-x-2<0$ ...... ㉠

㉠과 주어진 부등식 $ax^2+2x+b>0$의 부등호의 방향이 서로 다르므로

$a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$ax^2-ax-2a>0$ ($\because a<0$)

이 부등식이 $ax^2+2x+b>0$과 같아야 하므로 계수를 비교하면

$-a=2$, $-2a=b$

$\therefore a=-2$, $b=4$

423 정답 3

$-1<x<1$에서 부등식 $-x^2+ax+2>2x+b$가 성립하므로

$x^2-(a-2)x+b-2<0$ ...... ㉠

의 해가 $-1<x<1$이다.

한편, 해가 $-1<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-1)<0$ $\therefore x^2-1<0$

이 부등식이 ㉠과 같으므로 계수를 비교하면

$a-2=0$, $b-2=-1$ $\therefore a=2$, $b=1$

따라서 $a+b=2+1=3$

424 정답 $-2\le m<2$

함수 $y=mx^2-4x+1$의 그래프가 항상 함수 $y=-2x^2+2mx-3$의 그래프보다 위쪽에 있기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 부등식

$mx^2-4x+1>-2x^2+2mx-3$

$(m+2)x^2-2(m+2)x+4>0$

이 항상 성립하여야 한다.

(i) $m=-2$일 때, $4>0$이므로 항상 부등식이 성립한다.

(ii) $m>-2$일 때,

$\frac{D}{4}=(m+2)^2-4(m+2)<0$

$(m+2)(m-2)<0$

$\therefore\ -2<m<2$

(i), (ii)의 m의 값의 범위를 합하면

$-2\le m<2$

425 정답 $1\le a<3$

$x^2-4x+3\ge0$에서

$(x-1)(x-3)\ge0$

$\therefore\ x\le1$ 또는 $x\ge3$

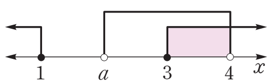
$(x-a)(x-4)<0$에서

$a>4$이면 $4<x<a$

$a=4$이면 해가 없다.

$a<4$이면 $a<x<4$

따라서 연립부등식의 해가 $3\le x<4$가 되도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, a의 값의 범위는

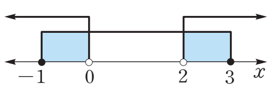
$1\le a<3$

426 정답 13

$x^2-2x>0$에서 $x(x-2)>0$

$\therefore\ x<0$ 또는 $x>2$

연립부등식의 해가 $-1\le x<0$ 또는 $2<x\le3$이 되도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 부등식 $x^2+ax+b\le0$의 해는 $-1\le x\le3$이다.

해가 $-1\le x\le3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-3)\le0$

$\therefore\ x^2-2x-3\le0$

이 부등식이 부등식 $x^2+ax+b\le0$과 같으므로 계수를 비교하면

$a=-2,\ b=-3$

$\therefore\ a^2+b^2=(-2)^2+(-3)^2=13$

427 정답 4

이차방정식 $x^2+4x+3-k=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=2^2-1\cdot(3-k)\ge0,\ 1+k\ge0 \qquad \therefore\ k\ge-1$

(ii) $\alpha+\beta=-4<0$이므로 항상 성립한다

(iii) $\alpha\beta=3-k>0 \qquad \therefore\ k<3$

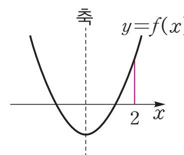
(i), (ii), (iii)을 모두 만족하는 k의 값의 범위를 구하면

$-1\le k<3$

따라서 구하는 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$의 4개이다.

428 정답 0

두 근이 모두 2보다 작으려면 함수 $f(x)=x^2-mx+m$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



이차방정식 $x^2-mx+m=0$의 판별식을 D라 할 때,

(i) 함 : $f(2)=4-m>0$에서 $m<4$

(ii) 판 : $D=m^2-4m\ge0,\ m(m-4)\ge0$

$\therefore\ m\le0$ 또는 $m\ge4$

(iii) 축 : $x=\frac{m}{2}<2 \qquad \therefore\ m<4$

(i), (ii), (iii)을 모두 만족하는 m의 값의 범위를 구하면

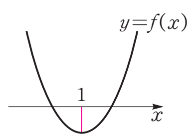
$m\le0$

따라서 실수 m의 최댓값은 0이다.

429 정답 $-2<a<0$

이차함수 $f(x)=ax^2+(2a-1)x+7$이라 하자.

(i) $a>0$일 때

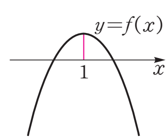


$f(1)<0$이어야 하므로

$f(1)=3a+6<0,\ a<-2$

그런데 $a>0$이므로 성립하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때



$f(1)>0$이어야 하므로

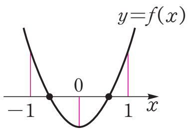
$f(1)=3a+6>0,\ a>-2$

그런데 $a<0$이므로 $-2<a<0$

(i), (ii)의 범위를 합하면

$-2<a<0$

430 정답 $-2<a<2$



$f(x)=3x^2-ax-1$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.

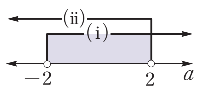
(ⅰ) $f(-1)=3+a-1>0$

$\therefore a>-2$

(ⅱ) $f(0)=-1<0$이므로 항상 성립한다.

(ⅲ) $f(1)=3-a-1>0$

$\therefore a<2$

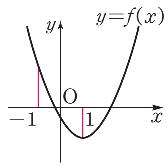


(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)을 모두 만족하는 a의 값의 범위를 구하면

$-2<a<2$

431 정답 $-3<p<-1$

$f(x)=x^2+px+2p+2$라 하면 한 근은 -1과 1 사이에 있고, 다른 한 근은 1보다 크므로 그림과 같이



$f(-1)=p+3>0$ $\quad\therefore p>-3$

$f(1)=3p+3<0$ $\quad\therefore p<-1$

$\therefore -3<p<-1$

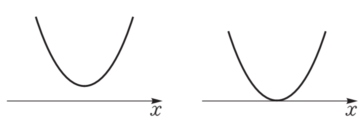
연습문제 Ⅱ p.250

432 정답 $a\geq3$

이차부등식이므로 $a\neq0$이고 모든 실수 x에 대하여

$ax^2-2ax+2a-3\geq0$이 성립하므로

이차함수 $y=ax^2-2ax+2a-3$의 그래프는 그림과 같이 아래로 볼록이면서 x축보다 위쪽에 있거나 x축과 접해야 한다.



따라서 $a>0$이고 이차방정식 $ax^2-2ax+2a-3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=a^2-a(2a-3)\leq0$

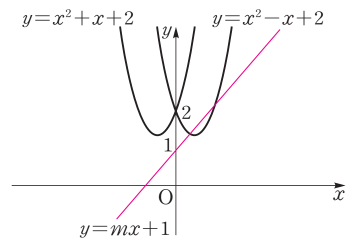
$-a^2+3a\leq0$, $a^2-3a\geq0$

$a(a-3)\geq0$

$\therefore a\leq0$ 또는 $a\geq3$

그런데 $a>0$이므로 실수 a의 값의 범위는 $a\geq3$

433 정답 $1<m<3$



직선 $y=mx+1$이 이차함수 $y=x^2-x+2$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나므로 두 식을 연립한 이차방정식

$mx+1=x^2-x+2$, 즉 $x^2-(m+1)x+1=0$

의 판별식을 D라 할 때,

$D=(m+1)^2-4>0$

$(m+3)(m-1)>0$

$\therefore m<-3$ 또는 $m>1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 $y=mx+1$이 이차함수 $y=x^2+x+2$의 그래프와 만나지 않으므로 두 식을 연립한 이차방정식

$mx+1=x^2+x+2$, 즉 $x^2-(m-1)x+1=0$

의 판별식을 D'라 할 때,

$D'=(m-1)^2-4<0$

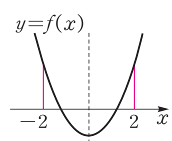
$(m+1)(m-3)<0$

$\therefore -1<m<3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족하는 m의 값의 범위를 구하면

$1<m<3$

434 정답 -1



$f(x)=2x^2-2(m-1)x+m+3$으로 놓으면 이차방정식

$2x^2-2(m-1)x+m+3=0$의 판별식을 D라 할 때

(ⅰ) 합 : $f(-2)=8+4(m-1)+m+3>0$

$5m+7>0$

$\therefore m>-\frac{7}{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=8-4(m-1)+m+3>0$

$-3m+15>0$

$\therefore m<5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-\frac{7}{5}<m<5$

(ii) 축 : $-2<\frac{1}{2}(m-1)<2$

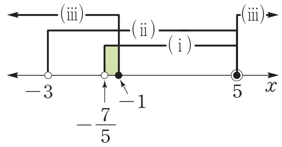
$\therefore\ -3<m<5$

(iii) 판 : $\frac{D}{4}=(m-1)^2-2(m+3)\geq 0$

$m^2-4m-5\geq 0$

$(m+1)(m-5)\geq 0$

$\therefore\ m\leq -1$ 또는 $m\geq 5$



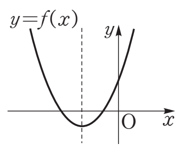
(i), (ii), (iii)을 모두 만족시키는 m의 값의 범위를 구하면

$-\frac{7}{5}<m\leq -1$

따라서 정수 m은 -1이다.

435 정답 -2 서술형

먼저 두 실근이 모두 0 이하가 되는 경우의 m의 값을 구한 후 제외하면 된다.



$f(x)=x^2-2mx-2m-6$이라 두면

이차방정식 $x^2-2mx-2m-6=0$의 판별식을 D라 할 때

(i) 함 : $f(0)=-2m-6\geq 0$에서

$m\leq -3$

(ii) 판 : $\frac{D}{4}=m^2+2m+6=(m+1)^2+5>0$이므로

항상 서로 다른 두 실근을 가진다.

(iii) 축 : 축의 방정식은 $x=m$이므로

$m\leq 0$

(i), (iii)을 모두 만족하는 m의 값의 범위는

$m\leq -3$ … ①

따라서 두 근 중 적어도 하나가 양의 실수가 되는 m의 값의 범위는

$m>-3$ … ②

따라서 정수 m의 최솟값은 -2이다. … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	두 실근이 모두 0 이하가 되는 조건을 구하기	50%
②	두 근 중 적어도 하나가 양의 실수가 되는 조건을 구하기	30%
③	정수 m의 최솟값을 구하기	20%

개념 보충

두 근 중 적어도 하나가 양수 또는 두 근 중 적어도 하나가 음수인 문제를 위의 풀이처럼 풀 때 주의할 점이 있다.

위의 문제에서는 (판별식)≥ 0이 항상 성립하는 경우이므로 반대의 경우를 구하여 제외하더라도 (판별식)≥ 0은 여전히 성립한다. 그런데 만약 (판별식)≥ 0의 조건을 구하였을 때, m의 값의 범위가 생겼다면 반대의 경우를 구할 때, (판별식)<0의 범위가 생기게 되어 허근을 갖는 경우를 계산하는 오답이 나온다.

즉, (판별식)≥ 0이 되는 조건은 그대로 두고 함숫값과 대칭축의 조건만 반대의 경우를 구하도록 한다.

15강

Ⅲ 도형의 방정식

16. 평면좌표

확인문제 .... pp.260~271

436 정답 (1) 1 (2) 1

(1) $\overline{OA}=|a|$, $\overline{AB}=|a-2|$이고

$\overline{OA}=\overline{AB}$이므로

$|a|=|a-2|$

양변을 제곱하면

$a^2=(a-2)^2$, $a^2=a^2-4a+4$, $4a=4$

$\therefore a=1$

(2) $\overline{OA}=\sqrt{3^2+a^2}$, $\overline{OB}=\sqrt{(a-2)^2+3^2}$

$\overline{OA}=\overline{OB}$이므로

$\sqrt{3^2+a^2}=\sqrt{(a-2)^2+3^2}$

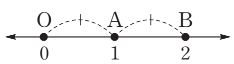
양변을 제곱하면

$a^2+9=a^2-4a+13$, $4a=4$

$\therefore a=1$

다른 풀이

수직선을 그려서 풀어보자.

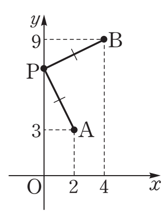


(1) 점 A는 $\overline{OB}$의 중점이므로

$$a=\frac{0+2}{2}=1$$

437 정답 (1) P(0, 7) (2) Q(3, 3)

(1) 점 P는 y축 위의 점이므로 실수 a에 대하여 그 좌표를 $P(0, a)$라 하면



$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$

$(0-2)^2+(a-3)^2$

$=(0-4)^2+(a-9)^2$

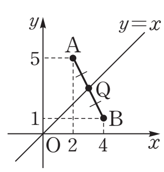
$a^2-6a+13=a^2-18a+97$

$12a=84$

$\therefore a=7$

따라서 점 P의 좌표는 P(0, 7)

(2) 점 Q가 직선 $y=x$ 위에 있으므로 실수 a에 대하여 점 Q의 좌표를 $Q(a, a)$라 하면



$\overline{QA}=\overline{QB}$에서 $\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$

$(a-2)^2+(a-5)^2$

$=(a-4)^2+(a-1)^2$

$2a^2-14a+29=2a^2-10a+17$

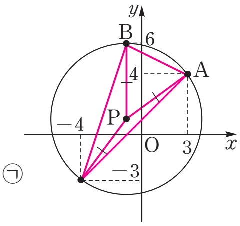
$-4a=-12$

$\therefore a=3$

따라서 점 Q의 좌표는 Q(3, 3)

438 정답 (−1, 1)

△ABC의 외심의 좌표를 $P(a, b)$라 하면



$\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$

$(a-3)^2+(b-4)^2$

$=(a+1)^2+(b-6)^2$

$-8a+4b=12$

$-2a+b=3$ …… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$이므로 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$

$(a-3)^2+(b-4)^2=(a+4)^2+(b+3)^2$

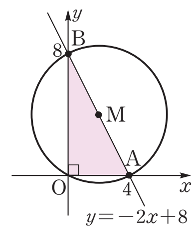
$-14a-14b=0$, $a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

따라서 △ABC의 외심의 좌표는 $P(-1, 1)$

439 정답 $2\sqrt{5}$

직선 $y=-2x+8$에서 $y=0$일 때 $x=4$이고, $x=0$일 때 $y=8$이므로 직선이 x축 및 y축과 만나는 점의 좌표는 A(4, 0), B(0, 8)이다.



이때 △OAB는 ∠AOB=90°인 직각삼각형이므로 △OAB의 외심은 변 AB의 중점이다.

변 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

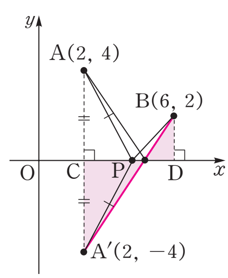
$$M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+8}{2}\right) \qquad \therefore M(2, 4)$$

따라서 △OAB의 외접원의 반지름의 길이는

$\overline{OM}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

440 정답 (1) $2\sqrt{13}$ (2) $P\left(\frac{14}{3}, 0\right)$

(1) 점 A를 x축에 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′(2, −4)이고



$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$

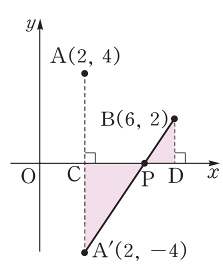
$\overline{A'B}=\sqrt{(6-2)^2+\{2-(-4)\}^2}$

$=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $2\sqrt{13}$이다.

(2) 두 점 A′, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면

$\overline{A'C}=4$, $\overline{BD}=2$



△A′CP∽△BDP이므로

$\overline{CP}:\overline{DP}=\overline{A'C}:\overline{BD}$

$=4:2=2:1$

$\overline{CD}=6-2=4$

$\therefore \overline{CP}=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

따라서 점 P의 x좌표는 $2+\frac{8}{3}=\frac{14}{3}$이므로 $P\left(\frac{14}{3}, 0\right)$

다른 풀이

$A'(2,\ -4)$, $P(a,\ 0)$, $B(6,\ 2)$가 한 직선 위에 있으므로

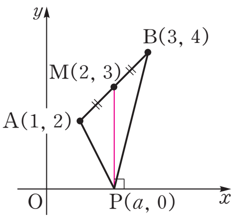
$(\overline{A'P}$의 기울기$)=(\overline{A'B}$의 기울기$)$

$$\frac{0-(-4)}{a-2}=\frac{2-(-4)}{6-2},\ \frac{4}{a-2}=\frac{6}{4}$$

$$\therefore a=\frac{14}{3}$$

441 정답 22

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 꼴의 식의 값이므로 먼저 중선정리를 생각하자.



선분 AB의 중점을 M이라 하면 중점 M의 좌표는 $M(2,\ 3)$이므로

$$\overline{AM}^2=(2-1)^2+(3-2)^2=2$$

$\triangle PAB$에서 중선정리에 의하여

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{PM}^2)=2(2+\overline{PM}^2)$$

이므로 $\overline{PM}^2$의 값이 최소일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소가 된다.

점 P가 중점 M에서 x축에 내린 수선의 발일 때, $\overline{PM}$의 길이는 최소이고 최솟값은 3이다.

$$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(2+\overline{PM}^2)\ge 2(2+3^2)=22$$

따라서 $P(2,\ 0)$일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$은 최소이고 최솟값은 22이다.

442 정답 21

선분 $A(-3)B(6)$을 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

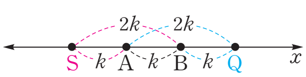
$$\frac{2\times6+1\times(-3)}{2+1}=3 \qquad \therefore P(3)$$

선분 $A(-3)B(6)$을 $3:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\frac{3\times6-2\times(-3)}{3-2}=24 \qquad \therefore Q(24)$$

$$\therefore \overline{PQ}=|24-3|=21$$

443 정답 15



선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이 Q이므로 $\overline{AQ}=2k$라 두면

$\overline{BQ}=k$

$\overline{AB}=\overline{AQ}-\overline{BQ}=2k-k=k$

선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점이 S이므로 마찬가지로

$\overline{AS}=k$

$\therefore \overline{QS}=\overline{SA}+\overline{AB}+\overline{BQ}=3k$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(1-4)^2}=5$이므로 $k=5$

따라서 $\overline{QS}=3k=15$

다른 풀이

선분 $A(0,\ 4)B(4,\ 1)$을 $2:1$로 외분하는 점은

$$Q\left(\frac{2\times4-1\times0}{2-1},\ \frac{2\times1-1\times4}{2-1}\right) \qquad \therefore Q(8,\ -2)$$

선분 $A(0,\ 4)B(4,\ 1)$을 $1:2$로 외분하는 점은

$$S\left(\frac{1\times4-2\times0}{1-2},\ \frac{1\times1-2\times4}{1-2}\right) \qquad \therefore S(-4,\ 7)$$

$$\therefore \overline{QS}=\sqrt{(-4-8)^2+(7+2)^2}=15$$

444 정답 (1) 7 (2) $a=3,\ b=4$

(1) 평행사변형의 두 대각선 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$\frac{1+6}{2}=\frac{a+3}{2}$에서 $a=4$, $\frac{1+b}{2}=\frac{0+4}{2}$에서 $b=3$

$\therefore a+b=4+3=7$

(2) 마름모의 두 대각선 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$\frac{a+7}{2}=\frac{6+b}{2}$에서 $b=a+1$ …… ㉠

한편 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$

$(6-a)^2+(3-2)^2=(7-6)^2+(6-3)^2$

$a^2-12a+27=0,\ (a-3)(a-9)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=9$

그런데 $a<6$이므로 $a=3$, 이 값을 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore a=3,\ b=4$

445 정답 8

$\triangle ABC$의 무게중심의 좌표가 $(2,\ b)$이므로

$\frac{a+2+1}{3}=2$에서 $a=3$, $\frac{10+2+3}{3}=b$에서 $b=5$

$\therefore a+b=3+5=8$

446 정답 (5, 2)

$\overline{BC}$의 중점을 $M(x,\ y)$라 하면 $\triangle ABC$의 무게중심 G는 중선 AM을 $2:1$로 내분하는 내분점이므로

$G(4,\ 3)$은 $G\left(\frac{2\times x+1\times2}{2+1},\ \frac{2\times y+1\times5}{2+1}\right)$와 일치한다.

$$4=\frac{2x+2}{3},\ 3=\frac{2y+5}{3} \qquad \therefore x=5,\ y=2$$

따라서 $\overline{BC}$의 중점 M의 좌표는 $M(5,\ 2)$

다른 풀이

$\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{2+a+c}{3},\ \frac{5+b+d}{3}\right)$이므로

$\frac{2+a+c}{3}=4$에서 $a+c=10$, $\frac{5+b+d}{3}=3$에서 $b+d=4$

따라서 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right) \qquad \therefore (5,\ 2)$$

연습문제 I .... pp.272~274

447 정답 6

두 점 $A(a+1,\ 2)$, $B(5,\ a)$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\overline{AB}^2=(a-4)^2+(2-a)^2=10$

$2a^2-12a+10=0$

$\therefore\ a^2-6a+5=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 6이다.

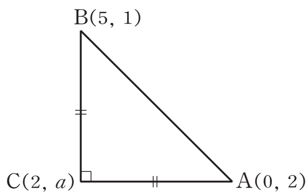
448 정답 −1

$\triangle ABC$의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(5-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{26}$

$\overline{BC}=\sqrt{(2-5)^2+(a-1)^2}=\sqrt{9+(a-1)^2}$

$\overline{CA}=\sqrt{(2-0)^2+(a-2)^2}=\sqrt{4+(a-2)^2}$



$\angle C=90^\circ$이면 피타고라스 정리에서

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$이어야 하므로

$26=9+(a-1)^2+4+(a-2)^2$

$a^2-3a-4=0,\ (a+1)(a-4)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=4$ ...... ㉠

$\angle C=90^\circ$인 직각이등변삼각형이면 $\overline{CA}=\overline{BC}$이어야 하므로

$\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$

$4+(a-2)^2=9+(a-1)^2$

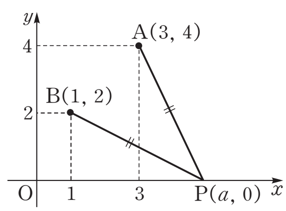
$2a=-2 \qquad \therefore\ a=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족하는 a의 값을 구하면

$a=-1$

449 정답 $5\sqrt{2}$

점 P는 x축 위의 점이므로 구하는 점의 좌표를 $P(a,\ 0)$이라 하면



$\overline{PA}=\sqrt{(a-3)^2+(0-4)^2}$

$\overline{PB}=\sqrt{(a-1)^2+(0-2)^2}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$, 즉 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

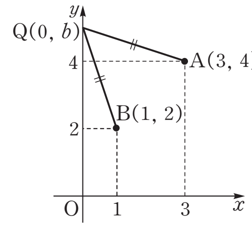
$(a-3)^2+(-4)^2=(a-1)^2+(-2)^2$

$a^2-6a+9+16=a^2-2a+1+4$

$4a=20,\ a=5$

$\therefore\ P(5,\ 0)$

점 Q는 y축 위의 점이므로 구하는 점의 좌표를 $Q(0,\ b)$라 하면



$\overline{QA}=\sqrt{(0-3)^2+(b-4)^2}$

$\overline{QB}=\sqrt{(0-1)^2+(b-2)^2}$

$\overline{QA}=\overline{QB}$, 즉 $\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$이므로

$(0-3)^2+(b-4)^2=(0-1)^2+(b-2)^2$

$b^2-8b+25=b^2-4b+5,\ 4b=20$

$\therefore\ b=5 \qquad \therefore\ Q(0,\ 5)$

$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{(0-5)^2+(5-0)^2}=5\sqrt{2}$

450 정답 6

점 $P(a,\ b)$가 직선 $x+3y=12$ 위의 점이므로

$a+3b=12$ ...... ㉠

$\overline{PA}=\overline{PB}$이면 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-4)^2+b^2=a^2+(b-2)^2$

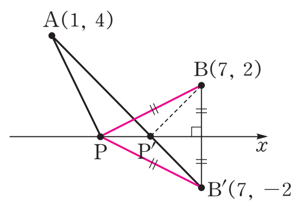
$2a-b=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=3$

$\therefore\ a+b=6$

451 정답 (1) $6\sqrt{2}$ (2) $P(5,\ 0)$

(1)



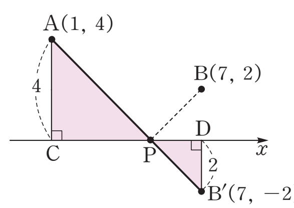
점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′라 하면 $B'(7,\ -2)$이고

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\ge\overline{AB'}$

이때 $\overline{AB'}=\sqrt{(7-1)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

(2)



두 점 A, B′에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면 $C(1,\ 0)$, $D(7,\ 0)$이고

$\overline{AC}=4,\ \overline{B'D}=2$

이때 $\triangle ACP\backsim\triangle B'DP$에서

$\overline{CP}:\overline{DP}=\overline{AC}:\overline{B'D}=4:2=2:1$

이므로 점 P는 선분 CD를 $2:1$로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 x좌표는 $\dfrac{2\times7+1\times1}{2+1}=5$이므로 $P(5,\ 0)$

다른 풀이1

점 P는 선분 CD를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overline{CP}=\frac{2}{3}\overline{CD}=\frac{2}{3}\times(7-1)=4$$

따라서 점 P의 x좌표는

$$1+\overline{CP}=1+4=5$$

이므로 P(5, 0)이다.

다른 풀이2

A(1, 4), P(a, 0), B′(7, -2)가 한 직선 위의 점이므로

($\overline{AP}$의 기울기)$=$($\overline{AB'}$의 기울기)

$$\frac{0-4}{a-1}=\frac{-2-4}{7-1},\ \frac{-4}{a-1}=-1 \qquad \therefore a=5$$

452 정답 (1) M(4, 5) (2) P(4, 0) (3) 66

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 꼴의 식의 값이므로 중선정리를 적용하자.

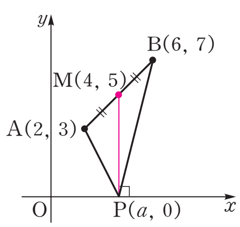
(1) 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$\mathrm{M}\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$에서 M(4, 5)이다.

(2) △PAB에서 중선정리에 의하여

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{PM}^2)$$
$$=2(8+\overline{PM}^2)$$

이므로 $\overline{PM}$의 길이가 최소일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소가 된다.



점 P가 중점 M에서 x축에 내린 수선의 발일 때, $\overline{PM}$의 길이는 최솟값 5를 가진다.

따라서 점 P의 좌표는 P(4, 0)이다.

(3) $\overline{AM}^2=(4-2)^2+(5-3)^2=8$

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{PM}^2)$$
$$=2(8+\overline{PM}^2)\geq 2(8+5^2)=66$$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은 66이다.

453 정답 (1) P(5, 4) (2) G(5, 4) (3) 일치한다.

(1) 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\overline{AP}^2=(x-1)^2+(y-5)^2,\ \overline{BP}^2=(x-5)^2+(y-3)^2$$
$$\overline{CP}^2=(x-9)^2+(y-4)^2$$

이므로

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=3x^2-30x+3y^2-24y+157$$
$$=3(x-5)^2+3(y-4)^2+34$$

즉, $x=5$, $y=4$일 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 최솟값 34를 가진다.

따라서 구하는 점 P의 좌표는 P(5, 4)이다.

(2) △ABC의 무게중심의 좌표를 G(a, b)라 하면

$$a=\frac{1+5+9}{3}=5,\ b=\frac{5+3+4}{3}=4$$

$\therefore$ G(5, 4)

(3) $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$을 최소가 되게 하는 점 P와 △ABC의 무게중심 G는 일치한다.

454 정답 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\overline{BM}=\overline{CM}$이므로 중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

$8^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$, $40=\overline{AM}^2+16$, $\overline{AM}^2=24$

$\therefore \overline{AM}=2\sqrt{6}$ ($\because \overline{AM}>0$)

한편, 점 G는 △ABC의 무게중심이므로

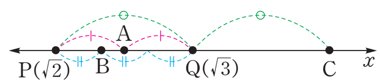
$$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{AM}=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

455 정답 B, A, C

점 A는 선분 PQ의 중점이다.

점 B는 선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점이다.

점 C는 선분 PQ를 2 : 1로 외분하는 점이다.



따라서 세 점의 위치를 왼쪽부터 순서대로 나열하면 B, A, C이다.

456 정답 1

선분 AB를 3 : b로 내분하는 점의 좌표가 (2, 1)이므로

$$\frac{3\times 10+b\times(-4)}{3+b}=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{3\times a+b\times 4}{3+b}=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $30-4b=6+2b$ $\qquad \therefore b=4$

㉡에서 $3a+4b=3+b$ $\qquad \therefore a=-3$

따라서 $a+b=-3+4=1$

457 정답 $\frac{4}{3}<k<4$

선분 AB를 1 : k로 내분하는 점은

$$\left(\frac{1\cdot 8+k\cdot(-2)}{1+k}, \frac{1\cdot(-4)+k\cdot 3}{1+k}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{8-2k}{1+k}, \frac{3k-4}{1+k}\right)$$

이고 이 점이 제1사분면에 위에 있으므로

$$\frac{8-2k}{1+k}>0,\ \frac{3k-4}{1+k}>0$$

$k>0$이므로

$\frac{8-2k}{1+k}>0$에서 $8-2k>0$

$\therefore k<4 \qquad \cdots\cdots ㉠$

16강

$\dfrac{3k-4}{1+k}>0$에서 $3k-4>0$　　$\therefore k>\dfrac{4}{3}$　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족하는 k의 값의 범위를 구하면

$$\frac{4}{3}<k<4$$

458 정답 $\mathbf{D(-8,\ -5)}$

구하는 점 D의 좌표를 $D(x,\ y)$라 하면

평행사변형의 두 대각선 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$\dfrac{-2-1}{2}=\dfrac{5+x}{2}$에서 $x=-8$

$\dfrac{-5+1}{2}=\dfrac{1+y}{2}$에서 $y=-5$

따라서 구하는 점 D의 좌표는 $D(-8,\ -5)$

459 정답 63

삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{AC}:\overline{CB}=\overline{OA}:\overline{OB}$$

이고 $\overline{OA}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{OB}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$이므로

점 C는 선분 AB를 $5:13$으로 내분하는 점이다.

$$\begin{cases} a=\dfrac{5\times(-5)+13\times3}{5+13}=\dfrac{14}{18}=\dfrac{7}{9} \\ b=\dfrac{5\times12+13\times4}{5+13}=\dfrac{112}{18}=\dfrac{56}{9} \end{cases}$$

$\therefore 9(a+b)=7+56=63$

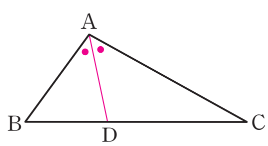
개념 보충

각의 이등분선의 성질

$\overline{AD}$가 $\angle BAC$의 이등분선

⇨ $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

⇨ 점 D는 $\overline{BC}$를 $\overline{AB}:\overline{AC}$로 내분하는 점이다.

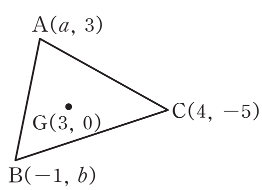


460 정답 8

$\dfrac{a-1+4}{3}=3$이므로 $a=6$

$\dfrac{3+b-5}{3}=0$이므로 $b=2$

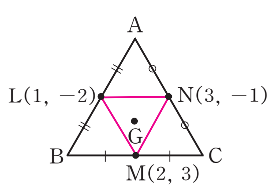
$\therefore a+b=6+2=8$



461 정답 $\mathbf{G(2,\ 0)}$

△ABC의 무게중심과 세 변의 중점을 연결한 △LMN의 무게중심은 일치하므로 $G(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{1+2+3}{3}=2$$



$$b=\frac{-2+3+(-1)}{3}=0$$

$\therefore G(2,\ 0)$

연습문제 Ⅱ p.275

462 정답 $\mathbf{2\sqrt{5}}$

이차함수 $f(x)=x^2-ax$의 그래프와 직선 $y=2x+1$의 서로 다른 두 교점의 좌표를 $P(\alpha,\ 2\alpha+1)$, $Q(\beta,\ 2\beta+1)$이라 하면

$x^2-ax=2x+1$에서 $x^2-(a+2)x-1=0$

α, β는 이차방정식 $x^2-(a+2)x-1=0$의 서로 다른 두 실근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=a+2$, $\alpha\beta=-1$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(2\beta+1-2\alpha-1)^2}\\&=\sqrt{5(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}\\&=\sqrt{5(a+2)^2+20}\geq\sqrt{20}=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

따라서 $a=-2$일 때, 두 교점 사이의 거리의 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

다른 풀이

이차함수의 식과 직선의 식을 연립하면

$x^2-ax=2x+1$, $x^2-(a+2)x-1=0$　　$\cdots\cdots$ ㉠

a가 실수이므로 이차방정식의 근의 공식으로 두 근을 구하면

$$x=\frac{a+2\pm\sqrt{(a+2)^2+4}}{2}=\frac{a+2\pm\sqrt{a^2+4a+8}}{2}$$

두 교점 사이의 거리가 최소이려면 두 근의 차가 최소일 때이므로

(두 근의 차)$=\sqrt{a^2+4a+8}=\sqrt{(a+2)^2+4}$

따라서 $a=-2$일 때 두 근의 차는 최소이고 ㉠에 대입하면

$x^2-1=0$, $(x+1)(x-1)=0$　　$\therefore x=\pm1$

두 교점의 좌표는 $(1,\ 3)$, $(-1,\ -1)$이므로 두 교점 사이의 거리의 최솟값은

$$\sqrt{(1+1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

463 정답 4

두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(a)$, $B(b)$라 하면

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2b+a}{2+1}\right)\qquad\therefore P\left(\frac{2b+a}{3}\right)$$

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{2b-a}{2-1}\right)\qquad\therefore Q(2b-a)$$

따라서 선분 PQ의 중점 R의 좌표는

$$R\left(\frac{\frac{2b+a}{3}+2b-a}{2}\right)\qquad\therefore R\left(\frac{4b-a}{3}\right)$$

이때 $\dfrac{4b-a}{3}=\dfrac{4b-a}{4-1}$이므로 점 R는 선분 AB를 $4:1$로 외

분하는 점이다.

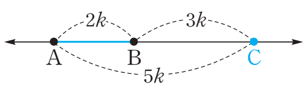
$\therefore k=4$

464 정답 (9, 13) 또는 (−3, −5)

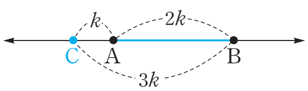
점 C의 좌표를 $C(a, b)$라 하면

$3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB} : \overline{BC}=2 : 3$

이므로 이 조건을 만족하는 점 C는 아래 그림과 같이 두 경우가 있다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 $C(a, b)$는 $\overline{AB}$를 $5 : 3$으로 외분하는 점이다.

$$a=\frac{5\times3-3\times(-1)}{5-3}=9,\ b=\frac{5\times4-3\times(-2)}{5-3}=13$$

$\therefore C(9, 13)$

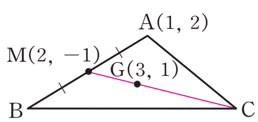
[그림 2]에서 $C(a, b)$는 $\overline{AB}$를 $1 : 3$으로 외분하는 점이다.

$$a=\frac{1\times3-3\times(-1)}{1-3}=-3,\ b=\frac{1\times4-3\times(-2)}{1-3}=-5$$

$\therefore C(-3, -5)$

따라서 구하는 점 C의 좌표는 $(9, 13)$ 또는 $(-3, -5)$이다.

465 정답 5



$\triangle ABC$의 무게중심 G는 중선 CM을 $2 : 1$로 내분한다.

꼭짓점 C의 좌표를 (a, b)라 하면 $C(a, b)$, $M(2, -1)$일 때, $\overline{CM}$의 $2 : 1$ 내분점을 구하면

$$G\left(\frac{2\times2+1\times a}{2+1}, \frac{2\times(-1)+1\times b}{2+1}\right)$$

$G\left(\frac{4+a}{3}, \frac{-2+b}{3}\right)$이고 $G(3, 1)$이므로

$$\frac{4+a}{3}=3,\ \frac{-2+b}{3}=1$$

$\therefore a=5, b=5$

따라서 꼭짓점 C의 좌표는 $C(5, 5)$이다.

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}=5$

다른 풀이

점 C는 선분 MG를 $3 : 2$로 외분하는 외분점이므로

$$C\left(\frac{3\times3-2\times2}{3-2}, \frac{3\times1-2\times(-1)}{3-2}\right)$$

$\therefore C(5, 5)$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}=5$

466 정답 13 ······ 서술형

실수 a, b에 대하여 $A\left(a, \frac{1}{2}a\right)$, $B(b, 3b)$라 놓으면 $\triangle OAB$의 무게중심이 $G(3, 4)$이므로

$\frac{a+b}{3}=3$에서 $a+b=9$ ······ ㉠

$\frac{\frac{1}{2}a+3b}{3}=4$에서 $a+6b=24$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=3$

$\therefore A(6, 3), B(3, 9)$ ··· ①

두 점 A, B는 직선 $y=mx+n$ 위의 점이므로 각각 대입하면

$3=6m+n$, $9=3m+n$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=-2$, $n=15$ ··· ②

$\therefore m+n=-2+15=13$ ··· ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	두 점 A, B의 좌표를 구하기	50 %
②	두 실수 m, n의 값을 구하기	30 %
③	$m+n$의 값을 구하기	20 %

17. 직선의 방정식 (1)

확인문제 .... pp.280~288

467 정답 (1) 2 (2) $2\sqrt{5}$

(1) 두 점 $(m,\ 4)$, $(1,\ m)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{m-4}{1-m}=m,\ m-4=m(1-m)$$

$$m^2-4=0,\ (m+2)(m-2)=0$$

$\therefore m=2$ ($\because$ m은 양수)

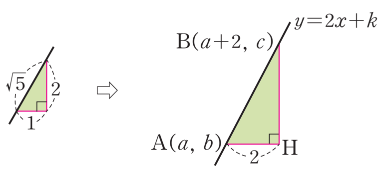
(2) 직선 $y=2x+k$의 기울기가 2이므로

$$\frac{c-b}{(a+2)-a}=2,\ \frac{c-b}{2}=2 \qquad \therefore c-b=4$$

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(a+2-a)^2+(c-b)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$$

다른 풀이

직선의 기울기가 2이므로 직선 위의 두 점을 두 꼭짓점으로 가지고 두 변이 좌표축과 평행한 직각삼각형의 세 변의 길이의 비는 $1:2:\sqrt{5}$이다.



위의 그림의 $\triangle BAH$에서 $\overline{AH}=(a+2)-a=2$이므로

$$\overline{AB}:\overline{AH}=\sqrt{5}:1 \qquad \therefore \overline{AB}=\sqrt{5}\times\overline{AH}=2\sqrt{5}$$

따라서 선분 AB의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.

468 정답 (1) $y=2x-3$ (2) $x+y=a+1$ (3) $y=1$

(1) 직선 $2x-y+1=0$, 즉 $y=2x+1$과 기울기가 같으므로 구하는 직선의 기울기는 2이다.
따라서 기울기가 2이고 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=2(x-2) \qquad \therefore y=2x-3$$

(2) 두 점 $(a,\ 1)$, $(a+2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{(-1)-1}{(a+2)-a}(x-a),\ y-1=-(x-a)$$

$$\therefore x+y=a+1$$

(3) 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 1)$의 y좌표가 서로 같으므로 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 1)$을 지나는 직선은 x축에 평행하고 직선 위의 모든 점에 대하여 y좌표는 항상 1이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=1$

469 정답 13

세 점 $A(1,\ 1)$, $B(4,\ 5)$, $C(10,\ a)$가 한 직선 위에 있으면
(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이다.

$$(\text{직선 AB의 기울기})=\frac{5-1}{4-1}=\frac{4}{3}$$

$$(\text{직선 AC의 기울기})=\frac{a-1}{10-1}=\frac{a-1}{9}$$

이므로 $\frac{4}{3}=\frac{a-1}{9} \qquad \therefore a=13$

470 정답 $y=x-2$

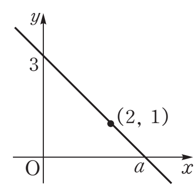
세 점 $A(3,\ 1)$, $B(7,\ a)$, $C(1,\ -1)$이 한 직선 위에 있으므로 직선 AB와 직선 AC는 같은 직선이다.
따라서 두 점 $A(3,\ 1)$, $C(1,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$y-1=\frac{-1-1}{1-3}(x-3),\ y-1=x-3$$

$$\therefore y=x-2$$

471 정답 (1) $x+y=3$ (2) 11

(1) 구하는 직선의 x절편을 a라 하면 y절편이 3이므로 직선의 방정식은



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{3}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

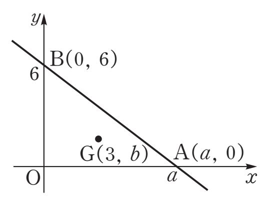
이 직선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로
$x=2$, $y=1$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{3}=1 \qquad \therefore a=3$$

이 값을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x+y=3$$

(2) 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{6}=1$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B의 좌표는 $A(a,\ 0)$, $B(0,\ 6)$이다.
$\triangle OAB$의 무게중심 G의 좌표가 $(3,\ b)$이므로



$\left(\frac{0+a+0}{3},\ \frac{0+0+6}{3}\right)$은 $(3,\ b)$와 일치한다.

$$\therefore a=9,\ b=2$$

따라서 $a+b=9+2=11$

472 정답 $ab>0$, $bc>0$, $ac>0$

주어진 그림에서 x절편, y절편, 기울기가 모두 음수이다.
직선 $ax+by+c=0$에서

(i) $y=0$일 때, $x=-\frac{c}{a}$이므로

x절편 : $-\frac{c}{a}<0$, 즉 $\frac{c}{a}>0 \qquad \therefore ac>0$

(ii) $x=0$일 때, $y=-\frac{c}{b}$이므로

y절편 : $-\frac{c}{b}<0$, 즉 $\frac{c}{b}>0 \qquad \therefore bc>0$

(iii) 표준형으로 고치면 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$에서

기울기 : $-\frac{a}{b}<0$, 즉 $\frac{a}{b}>0$ $\quad \therefore ab>0$

따라서 ab, bc, ac의 부호는 모두 양이다.

다른 풀이

$ac>0$, $bc>0$에서 같은 변끼리 곱하면

$abc^2>0 \quad \therefore ab>0 \ (\because c^2>0)$

473 정답 (1) $y=-\frac{1}{2}x+1$ (2) $y=-\frac{1}{3}x+3$

(1) 직선의 방정식 $2x+4y+1=0$을 표준형으로 고치면

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$에서 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 이에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고

점 $(-2, 2)$를 지나므로 그 방정식은

$y-2=-\frac{1}{2}(x+2) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+1$

다른 풀이

직선 $2x+4y+1=0$에 평행한 직선의 방정식을

$2x+4y+c=0$이라 하고 $(-2, 2)$를 대입하면

$2\cdot(-2)+4\cdot2+c=0 \quad \therefore c=-4$

따라서 $2x+4y-4=0$이므로 $x+2y-2=0$이다.

(2) 직선 $y=3x-1$의 기울기는 3이므로 이에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 구하는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이고 점 $(3, 2)$를 지나므로 그 방정식은

$y-2=-\frac{1}{3}(x-3) \quad \therefore y=-\frac{1}{3}x+3$

개념 보충

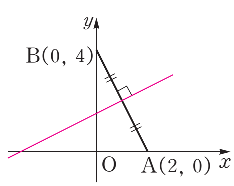
직선 $ax+by+c=0$에 평행한 직선의 방정식은

⇨ $ax+by+c'=0$

직선 $ax+by+c=0$에 수직인 직선의 방정식은

⇨ $bx-ay+c'=0$

474 정답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$



선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$

즉 $(1, 2)$이고

선분 AB의 기울기는

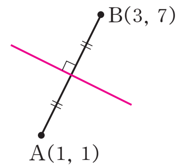
$\frac{0-4}{2-0}=-2$

따라서 이에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이고 점 $(1, 2)$를 지나므로 그 방정식은

$y-2=\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

475 정답 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$

(i) [수직 조건]



선분 AB의 기울기는 $\frac{7-1}{3-1}=3$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

(ii) [중점 조건]

선분 AB의 중점을 M이라 하면 중점 M의 좌표는

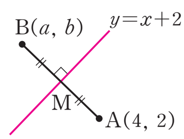
$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+7}{2}\right) \quad \therefore M(2, 4)$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{1}{3}$이고 점 $M(2, 4)$를 지나는 직선이므로

$y-4=-\frac{1}{3}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$

476 정답 $B(0, 6)$



점 B의 좌표를 $B(a, b)$라 하면 직선 $y=x+2$는 선분 AB의 수직이등분선이다.

(i) [수직 조건]

직선 $y=x+2$의 기울기는 1이므로

선분 AB의 기울기는

$\frac{b-2}{a-4}=-1 \quad \therefore a+b=6 \quad \cdots\cdots ㉠$

(ii) [중점 조건]

선분 AB의 중점을 M이라 하면

중점 M의 좌표는 $M\left(\frac{4+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$이고 중점 M은 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로

$\frac{2+b}{2}=\frac{4+a}{2}+2 \quad \therefore a-b=-6 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=6$

$\therefore B(0, 6)$

연습문제 I

pp.289~291

477 정답 (1) $y=-2x+1$ (2) $y=-x+3$ (3) $x=1$ (4) $x-y=-3$ (5) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(1) 점 $(-1, 3)$을 지나고 기울기가 -2이므로

$y-3=-2\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-2x+1$

(2) 두 점 $(1, 2)$, $(2, 1)$을 지나므로

$$y-2=\frac{1-2}{2-1}(x-1) \qquad \therefore y=-x+3$$

(3) y축에 평행하므로 $x=1$

(4) y절편이 3이므로 x절편을 p라 하면 직선의 방정식은

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{3}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 점 $(-2, 1)$을 지나므로 $x=-2$, $y=1$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{-2}{p}+\frac{1}{3}=1$$

$$\therefore p=-3$$

이 값을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x-y=-3$$

(5) x절편이 -2이면 점 $(-2, 0)$을 지나고 x축의 양의 방향과 30°의 각을 이루면 기울기가 $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$$

$$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

478 정답 $y=x+4$

선분 AB를 $3 : 2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times(-2)+2\times3}{3+2}, \frac{3\times8+2\times(-2)}{3+2}\right) \qquad \therefore (0, 4)$$

따라서 두 점 $(0, 4)$, $(2, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{6-4}{2-0}(x-0) \qquad \therefore y=x+4$$

479 정답 -5, 2

직선 AB와 직선 AC의 기울기는 같으므로

$$\frac{(a-3)-1}{1-(-2)}=\frac{-5-1}{(a+5)-(-2)}$$

$$a^2+3a-10=0,\ (a+5)(a-2)=0$$

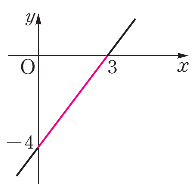
$$\therefore a=-5 \text{ 또는 } a=2$$

480 정답 (1) 5 (2) 2

(1) 직선 $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$

의 x절편은 3, y절편은 -4이므로 두 좌표축에 의하여 잘려진 선분의 길이는

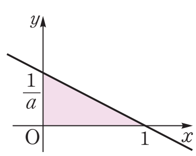
$$\sqrt{3^2+4^2}=5$$



(2) 주어진 직선은 $x+\frac{y}{\frac{1}{a}}=1$이므로

x절편은 1, y절편은 $\frac{1}{a}$이다.

따라서 주어진 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는



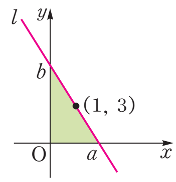
$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}\text{이므로}$$

$$\frac{1}{2a}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore a=2$$

481 정답 $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$

직선 l의 x절편을 a, y절편을 b라 하면 직선 l의 방정식은



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

이 직선이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=1\text{에서 } b+3a=ab \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 좌표축과 직선이 이루는 삼각형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}ab=6\text{에서 } ab=12 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$b=\frac{12}{a}$를 ㉠에 대입하면

$$\frac{12}{a}+3a=12,\ 3a^2-12a+12=0$$

$$3(a-2)^2=0 \qquad \therefore a=2$$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=6$

따라서 구하는 직선 l의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$$

482 정답 (1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) 2

(1) 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 기울기가 $\frac{3}{4}$이므로

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{AP}}=\frac{3}{4}$$

(2) 직선 $y=\frac{2}{3}x$의 기울기가 $\frac{2}{3}$이므로

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\frac{2}{3}$$

(3) $\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{DP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}=2$

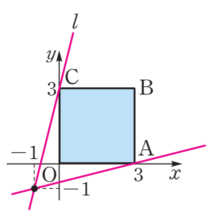
483 정답 $\frac{1}{4}\le m\le4$

(i) 직선 l이 점 $(0, 3)$을 지날 때

$$m=\frac{3-(-1)}{0-(-1)}=4$$

(ii) 직선 l이 점 $(3, 0)$을 지날 때,

$$m=\frac{0-(-1)}{3-(-1)}=\frac{1}{4}$$

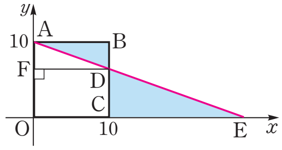


(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$$\frac{1}{4}\le m\le4$$

484 정답 $-\frac{1}{3}$

점 D를 지나 x축에 평행한 직선을 그어 y축과 만나는 점을 F라 하면



$\triangle ADB = \triangle AFD$

이므로 직사각형 OCDF와 $\triangle CED$의 넓이는 같다.

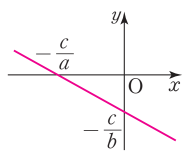
$10 \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CE} \cdot \overline{CD}$ $\quad \therefore \overline{CE} = 20$

따라서 E$(30, 0)$이므로 직선 AD의 기울기는

$\frac{0-10}{30-0} = -\frac{1}{3}$

485 정답 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면

직선 $ax+by+c=0$의



x절편 : $-\frac{c}{a} < 0$ ($\because ac > 0$)

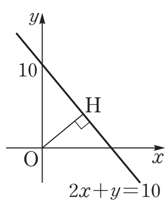
y절편 : $-\frac{c}{b} < 0$ ($\because bc > 0$)

이므로 직선 $ax+by+c=0$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 직선이 지나는 사분면은 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면이다.

486 정답 $(4, 2)$

H(a, b)라 두자.



(i) 선분 OH는 직선 l과 수직이고, 직선 $2x+y=10$, 즉 $y=-2x+10$의 기울기는 -2이므로 선분 OH의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

$\therefore \frac{b-0}{a-0} = \frac{1}{2}$, $a=2b$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 점 H(a, b)는 직선 l : $2x+y=10$ 위의 점이므로

$2a+b=10$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=2$

따라서 점 H의 좌표는 $(4, 2)$이다.

487 정답 (1) $k=-1$ 또는 $k=3$ (2) $k=\frac{1}{2}$

일반형인 직선을 표준형으로 고치면

$y = -\frac{k-2}{3}x + \frac{1}{3}$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$y = kx+3$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

(1) 두 직선이 서로 수직이면 (기울기의 곱)$=-1$이므로

$-\frac{k-2}{3} \cdot k = -1$, $k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0$ $\quad \therefore k=-1$ 또는 $k=3$

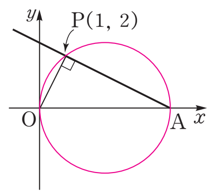
(2) 두 직선이 서로 평행이면 기울기는 같고 y절편이 다르므로

$-\frac{k-2}{3} = k$, $-k+2=3k$

$\therefore k = \frac{1}{2}$

488 정답 $x+2y-5=0$

반원의 원주각의 크기는 $90°$이므로



$\angle OPA = 90°$

즉, 직선 PO와 직선 PA의 기울기의 곱은 -1이다.

이때 직선 PO의 기울기가 2이므로

(직선 PA의 기울기)$=-\frac{1}{2}$

따라서 직선 PA의 방정식은

$y-2 = -\frac{1}{2}(x-1)$

$\therefore x+2y-5=0$

489 정답 81

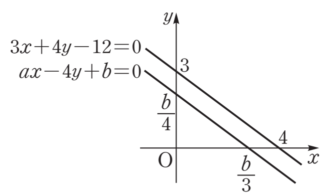
두 직선 $3x+4y-12=0$, $ax-4y+b=0$을 각각 표준형으로 고치면

$y = -\frac{3}{4}x+3$, $y = \frac{a}{4}x + \frac{b}{4}$

이 두 직선이 평행하므로

$-\frac{3}{4} = \frac{a}{4}$, $3 \neq \frac{b}{4}$

$\therefore a=-3$, $b \neq 12$



직선 $y = -\frac{3}{4}x+3$의 x절편이 4, y절편이 3이므로 직선 $3x+4y-12=0$과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

직선 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{b}{4}$의 x절편이 $\frac{b}{3}$, y절편이 $\frac{b}{4}$이므로 직선 $ax-4y+b=0$과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{b}{4} = \frac{b^2}{24}$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

삼각형 ㉠의 넓이가 삼각형 ㉡의 넓이의 2배므로

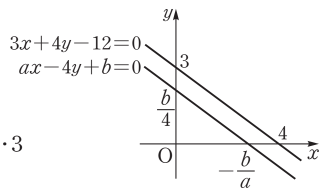
$6 = 2 \cdot \frac{b^2}{24}$

$b^2 = 72$

$\therefore a^2+b^2 = (-3)^2+72 = 81$

다른 풀이

두 삼각형은 닮음이고 넓이의 비가 1 : 2이면 닮음비는 $1:\sqrt{2}$이므로



$$-\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 4,\ \frac{b}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 3$$

$$\therefore\ b=6\sqrt{2},\ a=-3$$

따라서 $a^2+b^2=(-3)^2+(6\sqrt{2})^2=81$이다.

490 정답 $y=\frac{2}{3}x+3$

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-2)}{2},\ \frac{0+6}{2}\right)\qquad \therefore\ (0,\ 3)$$

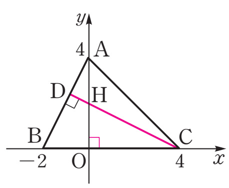
직선 AB의 기울기는 $\frac{6-0}{-2-2}=-\frac{3}{2}$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{2}{3}$이다.

구하는 직선은 기울기가 $\frac{2}{3}$이고 중점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$$y-3=\frac{2}{3}(x-0)\qquad \therefore\ y=\frac{2}{3}x+3$$

491 정답 (0, 2)

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 D라 하면 점 A에서 변 BC에 내린 수선은 y축이므로 직선 CD와 y축이 만나는 점 H가 △ABC의 수심이다.



직선 AB의 기울기가 $\frac{4-0}{0-(-2)}=2$이므로 직선 CD의 기울기는 $-\frac{1}{2}$

따라서 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 C$(4,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}(x-4)$$

$$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+2$$

이 직선의 y절편은 2이므로 H$(0,\ 2)$

연습문제 Ⅱ

p.292

492 정답 3

직선 $y=f(x)$의 기울기를 $a(a\neq 0)$라 하면 직선 $y=g(x)$의 기울기는 $-\frac{1}{a}$이다.

두 직선이 모두 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$$f(x)=a(x-3)+2$$

$$g(x)=-\frac{1}{a}(x-3)+2$$

로 놓을 수 있다.

$f(1)=g(5)$에서

$$-2a+2=-\frac{2}{a}+2,\ a=\frac{1}{a},\ a^2=1$$

$$\therefore\ a=\pm 1$$

$$\therefore\ \begin{cases} f(x)=x-1 \\ g(x)=-x+5 \end{cases}\ \text{또는}\ \begin{cases} f(x)=-x+5 \\ g(x)=x-1 \end{cases}$$

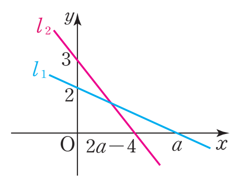
따라서 $f(2)=1,\ g(2)=3$ 또는 $f(2)=3,\ g(2)=1$이므로

$$f(2)\times g(2)=3$$

493 정답 3

$l_1:\frac{x}{a}+\frac{y}{2}=1,\ l_2:\frac{x}{2a-4}+\frac{y}{3}=1$이라 두자.

직선 l_1의 y절편은 2, 직선 l_2의 y절편은 3이므로 두 직선이 제1사분면에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 원점과 직선 l_1의 x절편 사이에 직선 l_2의 x절편이 있어야 한다.



직선 l_1의 x절편은 a, l_2의 x절편은 $2a-4$이므로

$$0<2a-4<a$$

$0<2a-4$에서 $a>2$ …… ㉠

$2a-4<a$에서 $a<4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족하는 a의 값의 범위를 구하면

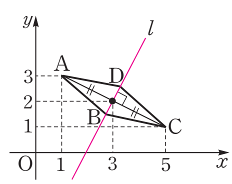
$$2<a<4$$

따라서 자연수 a의 값은 $a=3$

494 정답 4

$\overline{AC}\perp\overline{BD}$이고 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$는 서로를 이등분한다.

즉, 직선 l은 대각선 AC의 수직이등분선이다.



$$(\text{직선 AC의 기울기})=\frac{3-1}{1-5}=-\frac{1}{2}$$

이므로 이에 수직선 직선 l은 기울기가 2이고 $\overline{AC}$의 중점인 점 $(3,\ 2)$를 지난다.

따라서 직선 l의 방정식은

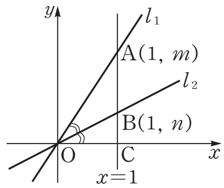
$$y=2(x-3)+2\qquad \therefore\ 2x-y-4=0$$

이것을 $2x+ay+b=0$과 비교하면 $a=-1,\ b=-4$

따라서 $ab=4$

495 정답 2 서술형

직선 $x=1$과 두 직선 l_1, l_2와 x축과의 교점을 각각 A, B, C라 하면 A$(1, m)$, B$(1, n)$, C$(1, 0)$이다.



직선 l_2는 $\angle$AOC의 이등분선이므로 각의 이등분선의 정리에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\overline{\mathrm{AO}}}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \qquad \cdots ①$$

이때 $\overline{\mathrm{AO}}=\sqrt{1+m^2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=n$, $\overline{\mathrm{AB}}=m-n$, $\overline{\mathrm{OC}}=1$이므로

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{n}{m-n} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, l_1의 기울기는 l_2의 기울기의 4배이므로

$$m=4n \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{n}{4n-n}=\frac{1}{3},\ m^2+1=9,\ m^2=8$$

m, n은 모두 양수이므로 $m=2\sqrt{2}$, $n=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cdots$ ②

$\therefore mn=2$ $\cdots$ ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$\overline{\mathrm{AO}}$, $\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$의 관계식을 구하기	30%
②	두 실수 m, n의 값을 구하기	50%
③	mn의 값을 구하기	20%

18. 직선의 방정식 (2)

확인문제 pp.295~304

496 정답 $a\neq-1$이고 $a\neq4$ (2) -1

(1) 두 직선 $(a-1)x+3y+1=0$, $2x+(a-2)y-1=0$이 오직 한 점에서 만나면 두 직선의 기울기가 서로 다르므로

$\frac{a-1}{2}\neq\frac{3}{a-2}$에서 $(a-1)(a-2)\neq6$, $a^2-3a-4\neq0$

$(a+1)(a-4)\neq0$ $\quad\therefore a\neq-1$이고 $a\neq4$

따라서 a는 $a\neq-1$, $a\neq4$인 모든 실수이다.

(2) 연립방정식 $(a-1)x+3y+1=0$, $2x+(a-2)y-1=0$의 해가 무수히 많은 경우는

두 직선 $(a-1)x+3y+1=0$, $2x+(a-2)y-1=0$이 서로 일치할 때이므로

$$\frac{a-1}{2}=\frac{3}{a-2}=\frac{1}{-1}$$

(i) $\frac{a-1}{2}=\frac{3}{a-2}$이면

$(a-1)(a-2)=6$, $a^2-3a+2=6$

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

(ii) $\frac{3}{a-2}=\frac{1}{-1}$이면 $a-2=-3$ $\quad\therefore a=-1$

(i), (ii)에서 $a=-1$

497 정답 P(3, 4)

주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리하면

$$(2x+y-10)+k(3x-y-5)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 두 직선

$$2x+y-10=0,\ 3x-y-5=0$$

의 교점을 지나므로 두 식을 연립하여 풀면

$$x=3,\ y=4$$

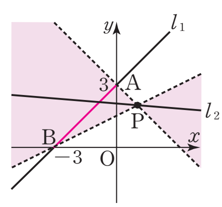
즉, 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 P$(3, 4)$를 지난다.

498 정답 (1) $(1, 2)$ (2) $-1<m<\frac{1}{2}$

(1) 직선 l_2 : $mx-y-m+2=0$을 m에 대하여 정리하면 $m(x-1)-y+2=0$이므로 직선 l_2는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 2)$를 지난다.

(2) 직선 l_1 : $x-y+3=0$의 그래프가 y축, x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 A$(0, 3)$, B$(-3, 0)$이다.

이때 두 직선 l_1, l_2가 제2사분면에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 l_2가 선분 AB와 양 끝점



18강

A, B를 제외한 부분에서 만나야 한다.

P(1, 2)라 하면 직선 l_2의 기울기가 직선 PA의 기울기보다 크고 직선 PB의 기울기보다 작아야 한다.

(i) 직선 l_2가 점 A(0, 3)을 지날 때

직선 l_2에 $x=0$, $y=3$을 대입하면

$m\cdot 0-3-m+2=0 \qquad \therefore m=-1$

(ii) 직선 l_2가 점 B(−3, 0)을 지날 때

직선 l_2에 $x=-3$, $y=0$을 대입하면

$m\cdot(-3)-0-m+2=0 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$

직선 l_2의 기울기가 (i), (ii)의 사이에 있어야 하므로

$-1<m<\frac{1}{2}$

499 정답 $x-5y-2=0$

두 직선 $3x-y+4=0$, $x+2y+3=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 어떤 실수 m에 대하여

$(3x-y+4)+m(x+2y+3)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

으로 나타낼 수 있다. 이 직선이 점 (2, 0)을 지나므로 ㉠에 $x=2$, $y=0$을 대입하면

$10+5m=0 \qquad \therefore m=-2$

$m=-2$를 ㉠에 대입하면

$(3x-y+4)-2(x+2y+3)=0$

$\therefore x-5y-2=0$

500 정답 (1) $x-2y=0$ (2) $x+y-3=0$

두 직선 $2x-y-3=0$, $x+y-3=0$의 교점을 지나는 직선은

$(2x-y-3)+m(x+y-3)=0$ (m은 실수) $\cdots\cdots$ ㉠

으로 나타낼 수 있다.

(1) 직선 ㉠이 점 (0, 0)을 지나므로 ㉠에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$-3-3m=0 \qquad \therefore m=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면

$(2x-y-3)-(x+y-3)=0$

$\therefore x-2y=0$

(2) 직선 ㉠이 점 (1, 2)를 지나므로 ㉠에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$-3+m\cdot 0=0$

즉, $0\cdot m=3$이 되어 이를 만족하는 m의 값은 없으므로 점 (1, 2)를 지나는 직선은 ㉠의 꼴로 나타내어지지 않는다.

두 직선 $2x-y-3=0$, $x+y-3=0$의 교점을 지나는 직선을

$m(2x-y-3)+(x+y-3)=0$ (m은 실수) $\cdots\cdots$ ㉡

으로 나타내어 보면 직선 ㉡이 점 (1, 2)를 지나므로 ㉡에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$-3m-0=0 \qquad \therefore m=0$

이 값을 ㉡에 대입하면 $x+y-3=0$

501 정답 $y=-x+1$

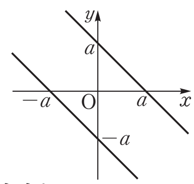
두 직선 $y=2x+3$, $y=-4x-1$을 일반형으로 고치면 $2x-y+3=0$, $4x+y+1=0$이므로 두 직선의 교점을 지나는 직선은

$(2x-y+3)+m(4x+y+1)=0$ (m은 실수)

$(2+4m)x-(1-m)y+(3+m)=0$

$\therefore y=\frac{2+4m}{1-m}x+\frac{3+m}{1-m} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

오른쪽 그림과 같이 x절편과 y절편이 같으면 직선의 기울기는 −1이므로



$\frac{2+4m}{1-m}=-1$

$2+4m=-1+m \qquad \therefore m=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$y=-x+1$

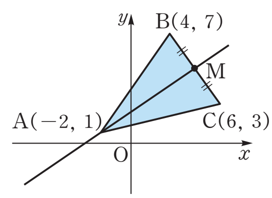
502 정답 $\frac{4}{7}$

직선의 방정식 $y=mx+2m+1$을 m에 대하여 정리하면

$m(x+2)+(1-y)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이므로 이 직선은 m의 값에 관계없이 항상 점 (−2, 1), 즉 점 A를 지난다.

따라서 이 직선이 △ABC의 넓이를 이등분하려면 변 BC의 중점 M(5, 5)를 지나야 한다.



$x=5$, $y=5$를 ㉠에 대입하면

$7m-4=0 \qquad \therefore m=\frac{4}{7}$

503 정답 $3x-y+9=0$ 또는 $3x-y-11=0$

직선 $3x-y+2=0$과 평행하므로 구하는 직선을

$3x-y+a=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이라 두면 이 직선과 점 (1, 2) 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|3\times1-1\times2+a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}, \quad |a+1|=10$

$a+1=\pm10 \qquad \therefore a=9$ 또는 $a=-11$

이 값을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$3x-y+9=0$ 또는 $3x-y-11=0$

504 정답 $y=1$ 또는 $4x-3y-5=0$

두 직선 $x+y-3=0$, $x-y-1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(x+y-3)+m(x-y-1)=0$ (m은 실수)

라 두고 직선의 방정식의 일반형으로 나타내면

$(1+m)x+(1-m)y-(3+m)=0$ ⋯⋯ ㉠

원점과 직선 ㉠ 사이의 거리가 1이므로

$\dfrac{|-3-m|}{\sqrt{(1+m)^2+(1-m)^2}}=1$, $|3+m|=\sqrt{2m^2+2}$

양변을 제곱하면

$9+6m+m^2=2m^2+2$, $m^2-6m-7=0$

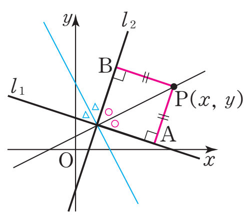
$(m+1)(m-7)=0$ $\quad\therefore m=-1$ 또는 $m=7$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=1$ 또는 $4x-3y-5=0$

505 정답 $x-3y+2=0$ 또는 $3x+y-4=0$

두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 이등분선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하고 점 P에서 두 직선 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이다.



$\overline{\mathrm{PA}}=\dfrac{|x+2y-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|x+2y-3|}{\sqrt{5}}$

$\overline{\mathrm{PB}}=\dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}}$

이므로 $\dfrac{|x+2y-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}}$

$|x+2y-3|=|2x-y-1|$

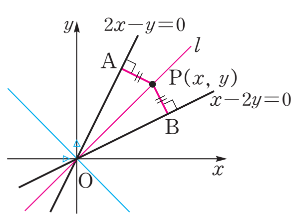
$\therefore x+2y-3=2x-y-1$ 또는 $x+2y-3=-(2x-y-1)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x-3y+2=0$ 또는 $3x+y-4=0$

506 정답 $y=-x$ 또는 $y=x$

직선 l 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하고 점 P에서 두 직선 $2x-y=0$, $x-2y=0$에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면



$\overline{\mathrm{PA}}=\dfrac{|2x-y|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2x-y|}{\sqrt{5}}$

$\overline{\mathrm{PB}}=\dfrac{|x-2y|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|x-2y|}{\sqrt{5}}$

이므로 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서

$\dfrac{|2x-y|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|x-2y|}{\sqrt{5}}$, $|2x-y|=|x-2y|$

$\therefore 2x-y=x-2y$ 또는 $2x-y=-(x-2y)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-x$ 또는 $y=x$

507 정답 (1) $\dfrac{9}{2}$ (2) 5

(1) $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{array}\right|=\dfrac{1}{2}|1-(-8)|=\dfrac{9}{2}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{cccc} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right|$

$=\dfrac{1}{2}|(-2-3+0)-(0+4+1)|$

$=\dfrac{1}{2}|-5-5|=5$

다른 풀이

(1) 직선 AB의 방정식은

$y=\dfrac{-1-(-2)}{4-(-1)}(x-4)-1$ $\quad\therefore y=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{9}{5}$

일반형으로 고치면 $x-5y-9=0$ ⋯⋯ ㉠

원점 $\mathrm{O}(0, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리 h를 구하면

$h=\dfrac{|-9|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{26}}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{4-(-1)\}^2+\{-1-(-2)\}^2}=\sqrt{26}$

$\therefore \triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\dfrac{9}{\sqrt{26}}=\dfrac{9}{2}$

(2) 직선 BC의 방정식은

$y=\dfrac{-1-2}{2-3}(x-3)+2$ $\quad\therefore y=3x-7$

일반형으로 고치면 $3x-y-7=0$ ⋯⋯ ㉡

점 $\mathrm{A}(-1, 0)$과 직선 ㉡ 사이의 거리 h를 구하면

$h=\dfrac{|3\cdot(-1)-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(3-2)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{10}$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\cdot h$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=5$

연습문제 I ⋯⋯ pp.305~307

508 정답 5

세 직선을

$l_1: x+ay+1=0$, $l_2: 2x-by+1=0$,

$l_3: x-(b-3)y-1=0$

이라 하자.

$l_1\perp l_2$이므로 $1\cdot2+a\cdot(-b)=0$

$\therefore ab=2$

$l_1 /\!/ l_3$이므로 $\dfrac{1}{1}=\dfrac{a}{-b+3}$

$\therefore a+b=3$

따라서 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=9-4=5$이다.

18강

509 정답 2

연립방정식 $\begin{cases} kx+2y=4 \\ 3x+(k+1)y=-4 \end{cases}$가 해를 갖지 않는 경우는

두 직선 $\begin{cases} l_1 : kx+2y=4 \\ l_2 : 3x+(k+1)y=-4 \end{cases}$가 만나지 않을 때, 즉 서로 평행할 때이므로 두 직선 l_1, l_2의 기울기는 같고 y절편은 서로 다르다.

$$\frac{k}{3}=\frac{2}{k+1}\neq\frac{4}{-4}$$

(i) $\frac{k}{3}=\frac{2}{k+1}$에서

$k^2+k-6=0$, $(k+3)(k-2)=0$

$\therefore$ $k=-3$ 또는 $k=2$

(ii) $\frac{k}{3}\neq\frac{4}{-4}$에서 $k\neq-3$

(i), (ii)를 모두 만족하는 k의 값을 구하면 $k=2$

510 정답 P$(-1,\ -3)$

주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리하면

$2x-y-1+k(x+y+4)=0$

따라서 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+y+4=0$의 교점을 지난다.

연립방정식 $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+y+4=0 \end{cases}$을 풀면 $x=-1$, $y=-3$

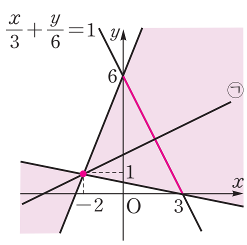
따라서 k의 값에 관계없이 항상 점 P$(-1,\ -3)$을 지난다.

511 정답 $-\frac{5}{2}<k<\frac{1}{5}$

방정식 $kx+y+2k-1=0$을 k에 대하여 정리하면

$k(x+2)+(y-1)=0$ …… ㉠

직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 1)$을 지난다.



위의 그림과 같이 직선 ㉠이 직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$과 제1사분면에서 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 $(3,\ 0)$을 지날 때

$5k-1=0$ $\quad\therefore$ $k=\frac{1}{5}$

(ii) 직선이 점 $(0,\ 6)$을 지날 때

$2k+5=0$ $\quad\therefore$ $k=-\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 직선 ㉠과 직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$이 제1사분면에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 (i)과 (ii)의 사이의 부분이므로

$-\frac{5}{2}<k<\frac{1}{5}$

다른 풀이

두 직선 $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ kx+y+2k-1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 교점을 구하자.

㉠×6에서 $2x+y=6$ …… ㉢

㉡−㉢을 하면

$(k-2)x=-5-2k$ $\quad\therefore$ $x=-\frac{2k+5}{k-2}$

이것을 ㉢에 대입하면

$y=6+2\cdot\frac{2k+5}{k-2}=\frac{10k-2}{k-2}$

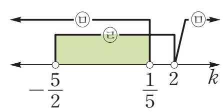
교점이 제1사분면에 있으면

$x=-\frac{2k+5}{k-2}>0$, $y=\frac{10k-2}{k-2}>0$

이므로

$(2k+5)(k-2)<0$에서 $-\frac{5}{2}<k<2$ …… ㉣

$(10k-2)(k-2)>0$에서 $k<\frac{1}{5}$ 또는 $k>2$ …… ㉤



$\therefore$ $-\frac{5}{2}<k<\frac{1}{5}$

512 정답 $2x-y=0$ (또는 $y=2x$)

두 직선 $3x-4y+3=0$, $x+2y-3=0$의 교점을 지나는 직선은

$(3x-4y+3)+m(x+2y-3)=0$ (m은 실수) …… ㉠

으로 나타낼 수 있다.

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$3-3m=0$ $\quad\therefore$ $m=1$

이 값을 식 ㉠에 대입하면 $4x-2y=0$

$\therefore$ $2x-y=0$

513 정답 (1) $(-3,\ -2)$ (2) $(5,\ 7)$ (3) $9x-8y+11=0$

(1) 정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 두 대각선의 중점이므로

$\left(\frac{-4+(-2)}{2},\ \frac{-1+(-3)}{2}\right)$ $\quad\therefore$ $(-3,\ -2)$

(2) 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 두 대각선의 중점이므로

$\left(\frac{3+7}{2},\ \frac{6+8}{2}\right)$ $\quad\therefore$ $(5,\ 7)$

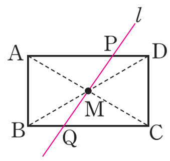
(3) 정사각형과의 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 항상 두 대각선의 중점을 지난다.
따라서 두 점 $(-3,\ -2)$, $(5,\ 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-7=\frac{7-(-2)}{5-(-3)}(x-5)$$

$$\therefore\ 9x-8y+11=0$$

개념 보충

직사각형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 M이라 하고 점 M을 지나는 임의의 직선 l이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q라 하면 직선 l의 기울기에 관계없이



$$\triangle BMQ\equiv\triangle DMP$$

이므로 점 M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.

514 정답 $y=x-2$ (또는 $x-y-2=0$)

두 직선 $2x-y-1=0$, $x+y+4=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 어떤 실수 m에 대하여

$$(2x-y-1)+m(x+y+4)=0$$

으로 나타낼 수 있다.
이 식을 x, y에 대하여 정리하면

$$(2+m)x-(1-m)y-(1-4m)=0$$

$$(1-m)y=(2+m)x-(1-4m)$$

$$\therefore\ y=\frac{2+m}{1-m}x-\frac{1-4m}{1-m}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

이 직선의 기울기가 1이므로

$$\frac{2+m}{1-m}=1\qquad\therefore\ m=-\frac{1}{2}$$

$m=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$y=x-2$$

다른 풀이

두 직선 $2x-y-1=0$, $x+y+4=0$의 교점은 $(-1,\ -3)$이므로 기울기가 1이고 점 $(-1,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$y=1\cdot\{x-(-1)\}-3\qquad\therefore\ y=x-2$$

515 정답 $10x+5y-32=0$ $\left(\text{또는 } y=-2x+\frac{32}{5}\right)$

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은 어떤 실수 k에 대하여

$$3x-2y-4+k(x+y-4)=0$$

으로 나타낼 수 있다. 이 등식을 x, y에 대하여 정리하면

$$(k+3)x+(k-2)y-(4k+4)=0\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

직선 ㉠이 직선 $2x+y+1=0$과 평행하므로

$$\frac{k+3}{2}=\frac{k-2}{1}\neq\frac{-4k-4}{1}$$

$\frac{k+3}{2}=\frac{k-2}{1}$에서 $k+3=2(k-2)$

$$\therefore\ k=7$$

$\frac{k-2}{1}\neq\frac{-4k-4}{1}$에서 $k-2\neq-4k-4$

$$\therefore\ k\neq-\frac{2}{5}$$

따라서 $k=7$이므로 ㉠에 대입하면

$$10x+5y-32=0$$

다른 풀이

두 직선 $3x-2y-4=0$, $x+y-4=0$의 교점은 $\left(\frac{12}{5},\ \frac{8}{5}\right)$이고
직선 $2x+y+1=0$, 즉 $y=-2x-1$에 평행한 직선은 기울기가 -2이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y=-2\left(x-\frac{12}{5}\right)+\frac{8}{5}$$

$$\therefore\ y=-2x+\frac{32}{5}$$

이것을 일반형으로 나타내면

$$10x+5y-32=0$$

516 정답 (1) $\frac{3}{4}$ (2) 8

(1) 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$과 점 $(2,\ 1)$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|2m-1+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$(2m+1)^2=4(m^2+1),\ 4m=3$$

$$\therefore\ m=\frac{3}{4}$$

(2) 점 $(n,\ 1)$과 직선 $4x-3y+1=0$ 사이의 거리가 6이므로

$$\frac{|4n-3+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=6$$

$$|4n-2|=30,\ 4n-2=\pm30$$

$$\therefore\ n=8\ \text{또는}\ n=-7$$

그런데 n은 자연수이므로 $n=8$

517 정답 $2\sqrt{2}$

주어진 직선의 방정식을 x, y에 대하여 정리하면

$$(k+1)x+(k-1)y+4=0$$

원점과 직선 $(k+1)x+(k-1)y+4=0$ 사이의 거리 $f(k)$는

$$f(k)=\frac{4}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2k^2+2}}$$

$k=0$일 때, 분모가 최소가 되므로 $f(k)$는 최대가 된다.
따라서 $f(k)$의 최댓값은 $\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$이다.

518 정답 1

원점 $(0, 0)$과 직선 $(k+1)x+(k-3)y+4=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라 하면

$$f(k)=\frac{4}{\sqrt{(k+1)^2+(k-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{2(k-1)^2+8}}$$

이때 $2(k-1)^2+8$은 $k=1$일 때, 최소가 되고 최솟값이 8이므로 $f(k)$는 $k=1$일 때, 최대가 되고 최댓값은

$$f(1)=\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$$
$$\therefore k=1$$

519 정답 $y=3$ 또는 $12x-5y-9=0$

점 $(2, 3)$을 지나고 y축과 평행한 직선 $x=2$는 문제의 조건을 만족시키지 않으므로 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면 구하는 직선의 방정식은

$$y-3=m(x-2) \qquad \therefore mx-y+3-2m=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(-1, 1)$에서 직선 ㉠까지의 거리가 2이므로

$$\frac{|-m-1+3-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=2,\ |-3m+2|=2\sqrt{m^2+1}$$
$$|-3m+2|^2=4(m^2+1),\ 5m^2-12m=0$$
$$m(5m-12)=0$$
$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{12}{5}$$

이 값을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$y=3 \text{ 또는 } 12x-5y-9=0$$

520 정답 $x-2y+10=0$ 또는 $x-2y-10=0$

구하는 직선의 방정식을 $x-2y+n=0$이라 하면
원점 $(0, 0)$과 이 직선 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5},\ |n|=10$$
$$\therefore n=\pm10$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$x-2y+10=0 \text{ 또는 } x-2y-10=0$$

개념 보충

직선 $ax+by+c=0$과
평행한 직선의 방정식은 → $ax+by+c'=0$
수직인 직선의 방정식은 → $bx-ay+c'=0$
으로 놓을 수 있다.

521 정답 $3x-4y+5=0$

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은 어떤 상수 k에 대하여

$$(x-3y+3)+k(x+2y-1)=0$$
$$(k+1)x+(2k-3)y+(3-k)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

원점으로부터의 거리가 1이므로

$$\frac{|3-k|}{\sqrt{(k+1)^2+(2k-3)^2}}=1$$
$$|3-k|=\sqrt{(k+1)^2+(2k-3)^2}$$

양변을 제곱하면

$$(3-k)^2=(k+1)^2+(2k-3)^2$$
$$4k^2-4k+1=0,\ (2k-1)^2=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$$

$k=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$3x-4y+5=0$$

다른 풀이

두 직선 $x-3y+3=0$, $x+2y-1=0$의 교점은 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$이므로 기울기가 m이고 점 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=m\left(x+\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}$라 하면

$$5mx-5y+3m+4=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

원점 $(0, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3m+4|}{\sqrt{(5m)^2+(-5)^2}}=1$$
$$16m^2-24m+9=0$$
$$(4m-3)^2=0 \qquad \therefore m=\frac{3}{4}$$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$3x-4y+5=0$$

522 정답 $x+y-2=0$ 또는 $x-y=0$

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 점 P와 두 직선 사이의 거리가 서로 같으므로

$$\frac{|2x-3y+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|3x-2y-1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$$
$$|2x-3y+1|=|3x-2y-1|$$
$$2x-3y+1=\pm(3x-2y-1)$$
$$\therefore x+y-2=0 \text{ 또는 } x-y=0$$

523 정답 4

$\triangle$OAB의 넓이 S는 빗금 공식에 의하여

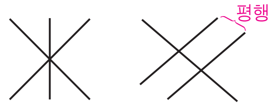
$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}2 & 6\\ a & 2\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}|4-6a|=|2-3a|=|3a-2|=10$$
$$\ominus \qquad \oplus$$

$$3a-2=10 \text{ 또는 } 3a-2=-10$$
$$\therefore a=4 \text{ 또는 } a=-\frac{8}{3}$$

그런데 a는 자연수이므로 $a=4$

524 정답 5

세 직선이 한 점에서 만나거나 적어도 두 직선이 평행하면 삼각형이 만들어지지 않는다.



(ⅰ) 직선 n이 두 직선 l, m의 교점을 지날 때

두 직선 l, m의 교점은 점 $(-1, 1)$이므로 점 $(-1, 1)$을 직선 n에 대입하면

$$-a-1+3=0 \qquad \therefore a=2$$

(ⅱ) 두 직선 l, n이 평행할 때

$$\frac{a}{5}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{3}{7} \qquad \therefore a=\frac{5}{2}$$

(ⅲ) 두 직선 m, n이 평행할 때

$$\frac{a}{1}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{3}{2} \qquad \therefore a=1$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 모든 상수 a의 값의 곱은

$$2\times\frac{5}{2}\times1=5$$

525 정답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 직선 l은 k의 값에 관계없이 두 직선

$$3x-y-3=0,\ x-2y+4=0$$

의 교점 $(2, 3)$을 지난다. (참)

ㄴ. 두 점 $A(-1, 6)$, $B(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{2-6}{1-(-1)}(x-1),\text{ 즉 } 2x+y-4=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 l을 x, y에 대하여 정리하면

$$(3+k)x-(1+2k)y+4k-3=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡이 평행할 조건은 $\frac{3+k}{2}=\frac{-1-2k}{1}$이므로

$$k=-1$$

따라서 $k=-1$이면 직선 l은 $2x+y-7=0$이 되어 직선 AB와 평행하게 되어 교점을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. ㉠, ㉡이 수직일 조건은

$$2(3+k)-(1+2k)=0,\ 0\cdot k=-5$$

이므로 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

따라서 직선 AB와 직선 l은 수직으로 만날 수 없다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

526 정답 C(0, 0) 또는 C(5, 5)

실수 a에 대하여 점 C의 좌표를 $C(a, a)$라 두면 △ABC의 넓이 S는 빗금 공식에 의하여

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}1 & 3 & a & 1\\ 4 & 2 & a & 4\end{matrix}\right|$$

⊖ ⊕

$$=\frac{1}{2}|(2+3a+4a)-(12+2a+a)|$$

$$=\frac{1}{2}|4a-10|$$

$$=|2a-5|=5$$

에서 $2a-5=5$ 또는 $2a-5=-5$

$$\therefore a=5 \text{ 또는 } a=0$$

따라서 $C(0, 0)$ 또는 $C(5, 5)$이다.

다른 풀이

$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2}$

점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발까지의 거리를 h라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h$이므로

$$5=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot h \qquad \therefore h=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

직선 AB의 방정식은

$$y=\frac{2-4}{3-1}(x-1)+4$$

$$y=-x+5 \qquad \therefore x+y-5=0$$

실수 a에 대하여 $C(a, a)$라 하면 직선 AB와 점 C 사이의 거리가 $\frac{5}{\sqrt{2}}$이므로

$$\frac{|a+a-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$|2a-5|=5$$

$$2a-5=\pm5$$

$$\therefore a=5 \text{ 또는 } a=0$$

따라서 $C(0, 0)$ 또는 $C(5, 5)$이다.

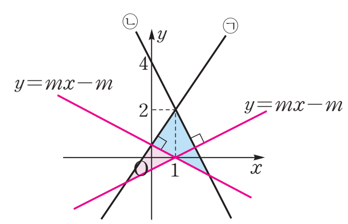
527 정답 $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ .... 서술형

$3x-2y+1=0$에서 $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2x+y-4=0$에서 $y=-2x+4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

두 직선 ㉠, ㉡의 교점은 $(1, 2)$이고 직선 $y=mx-m$은 $m(x-1)-y=0$이므로 모든 실수 m의 값에 대하여 점 $(1, 2)$를 지나지 않으므로 세 직선은 삼각형을 이룬다.

또한, 두 직선 ㉠, ㉡은 수직이 아니므로 세 직선이 직각삼각형을 만들려면 두 직선 ㉠, ㉡ 중 어느 하나는 직선 $y=mx-m$과 수직이어야 한다. $\cdots$ ①



(ⅰ) 직선 $y=mx-m$이 직선 ㉠과 수직일 때

$\frac{3}{2}\times m=-1$에서 $m=-\frac{2}{3}$ $\cdots$ ②

(ii) 직선 $y=mx-m$이 직선 ㉡과 수직일 때

$$(-2)\times m=-1\text{에서 } m=\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 $m=-\frac{2}{3}$ 또는 $m=\frac{1}{2}$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	세 직선의 위치 관계를 파악하기	40%
②	직선 $y=mx-m$이 직선 $3x-2y+1=0$과 수직일 때, m의 값을 구하기	30%
③	직선 $y=mx-m$이 직선 $2x+y-4=0$과 수직일 때, m의 값을 구하기	30%

19. 원의 방정식

확인문제 pp.312~320

528 정답 (1) $(x+2)^2+(y-1)^2=8$ (2) $(x-1)^2+(y-3)^2=13$

(1) 반지름의 길이를 r라 두면 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-1)^2=r^2$$

이 원이 원 $x^2+(y+1)^2=3$의 중심 $(0,\ -1)$을 지나므로

$$(0+2)^2+(-1-1)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=8$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-1)^2=8$$

(2) 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 중심을 C$(a,\ b)$라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$a=\frac{-2+4}{2}=1,\ b=\frac{5+1}{2}=3 \qquad \therefore \mathrm{C}(1,\ 3)$$

원의 반지름의 길이는

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(1+2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-3)^2=13$$

529 정답 (1) 2 (2) $x^2+y^2-4x-4y+3=0$

(1) $x^2+y^2+4x-2ky+k^2=0$을 표준형으로 변형하면

$$(x^2+4x+4)-4+(y^2-2ky+k^2)=0$$
$$(x+2)^2+(y-k)^2=2^2$$

따라서 반지름의 길이는 2이다.

(2) 구하는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

이라 두고 세 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$을 지나므로 각 점을 대입하면

$$\begin{cases} 1+B+C=0 \\ 1+A+C=0 \\ 9+3A+C=0 \end{cases}$$

위의 연립방정식을 풀면 $A=-4$, $B=-4$, $C=3$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-4x-4y+3=0$$

530 정답 $-1<k<2$

$x^2+y^2-4x+2ky+2k^2-k+2=0$을 표준형으로 변형하면

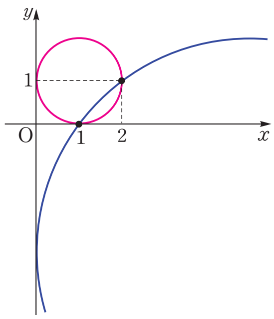
$$(x^2-4x+4)-4+(y^2+2ky+k^2)-k^2+2k^2-k+2=0$$
$$(x-2)^2+(y+k)^2=-k^2+k+2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠이 원을 나타내려면 반지름의 길이는 양수이므로

$$-k^2+k+2>0,\ k^2-k-2<0,\ (k+1)(k-2)<0$$
$$\therefore -1<k<2$$

531 정답 (1) $(x-5)^2+(y+3)^2=25$
또는 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$
(2) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

(1) 구하는 원의 중심을 $(a,\ b)$라 두면 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a|$이다.



$\therefore\ (x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ …… ㉠

두 점 $(1,\ 0)$, $(2,\ 1)$이 원 위의 점이므로

$(1-a)^2+(0-b)^2=a^2$

$\therefore\ b^2-2a+1=0$ …… ㉡

$(2-a)^2+(1-b)^2=a^2$

$\therefore\ b^2-4a-2b+5=0$ …… ㉢

$2\times$㉡$-$㉢에서

$b^2+2b-3=0,\ (b+3)(b-1)=0$

$\therefore\ b=-3$ 또는 $b=1$

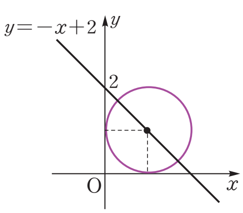
이 값을 ㉡에 대입하면

$a=5,\ b=-3$ 또는 $a=1,\ b=1$

따라서 구하는 원의 방정식은 ㉠에서

$(x-5)^2+(y+3)^2=25$ 또는 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

(2) 중심이 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로 구하는 원의 중심을 $(a,\ 2-a)$, 반지름의 길이를 r라 두자. 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로



$r=|a|=|2-a|$

$|a|^2=|2-a|^2$에서 $4a-4=0$ $\therefore\ a=1$

따라서 중심의 좌표는 $(1,\ 1)$, 반지름의 길이는 1이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

다른 풀이

x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있으므로

(i) $y=-x+2$와 $y=x$를 연립하여 풀면 $x=1,\ y=1$

(ii) $y=-x+2$와 $y=-x$를 연립하여 풀면 해가 없다.

(i), (ii)에서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 1)$이고 반지름의 길이는 1이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

532 정답 $(x+5)^2+y^2=16$

$\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$에서

$2\overline{PA}=\overline{PB}$

양변을 제곱하면 $4\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$

이때 점 P의 좌표를 $P(x,\ y)$라 하면

$\overline{PA}^2=(x+3)^2+y^2$,

$\overline{PB}^2=(x-3)^2+y^2$

이므로

$4\{(x+3)^2+y^2\}=(x-3)^2+y^2$

$\therefore\ (x+5)^2+y^2=16$

다른 풀이

점 P가 그리는 도형은 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점과 $\overline{AB}$를 $1:2$로 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원이다.

$\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점은

$\left(\frac{1\cdot3+2\cdot(-3)}{1+2},\ \frac{1\cdot0+2\cdot0}{1+2}\right)$ $\therefore\ (-1,\ 0)$

$\overline{AB}$를 $1:2$로 외분하는 점은

$\left(\frac{1\cdot3-2\cdot(-3)}{1-2},\ \frac{1\cdot0-2\cdot0}{1-2}\right)$ $\therefore\ (-9,\ 0)$

원의 중심은

$\left(\frac{-1+(-9)}{2},\ \frac{0+0}{2}\right)$ $\therefore\ (-5,\ 0)$

원의 반지름의 길이는 $|-5-(-1)|=4$

$\therefore\ (x+5)^2+y^2=16$

533 정답 $x^2+y^2-2x-2y=0$

두 원 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-4x-4y+4=0$의 교점을 지나는 원의 방정식은 어떤 실수 m에 대하여

$(x^2+y^2-4)+m(x^2+y^2-4x-4y+4)=0$ …… ㉠

으로 나타낼 수 있다.

이 원이 원점을 지나므로 $x=0,\ y=0$을 ㉠에 대입하면

$-4+4m=0$ $\therefore\ m=1$

이 값을 ㉠에 대입하면

$(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-4x-4y+4)=0$

$x^2+y^2-2x-2y=0$

따라서 $\triangle OAB$의 외접원의 방정식은

$x^2+y^2-2x-2y=0$

534 정답 2

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2+2x-6y+1)-\{(x-1)^2+(y-a)^2-9\}=0$

$\therefore\ 4x+(2a-6)y-a^2+9=0$

이 직선이 직선 $x+2y+1=0$과 수직이므로

$4\cdot1+(2a-6)\cdot2=0$

$4a-8=0$ $\therefore\ a=2$

19강

개념 보충

두 직선 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b} \\ y=-\dfrac{a'}{b'}x-\dfrac{c'}{b'} \end{cases}$ 이 수직

이면 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

$$\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1,\ aa'=-bb'$$

$$\therefore aa'+bb'=0$$

연습문제 I .... pp.321~323

535 정답 (1) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

(2) $x^2+y^2-3x-4=0$

(3) $(x-2)^2+(y+3)^2=8$

(1) 원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

중심 $\mathrm{C}(3,\ 4)$에서 점 P까지의 거리 $\overline{\mathrm{CP}}=5$이므로

$\overline{\mathrm{CP}}^2=5^2$에서

$$(x-3)^2+(y-4)^2=25$$

(2) 구하는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

이라 하면 이 원이 세 점 $(-1,\ 0)$, $(4,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나므로

$$\begin{cases} 1-A+C=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 16+4A+C=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ 4+2B+C=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$A=-3,\ C=-4$$

이 값을 ㉢에 대입하면

$$B=0$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-3x-4=0$$

(3) 원 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=16$

이므로 구하는 원의 중심은 $(2,\ -3)$이다.

이때 반지름의 길이를 r라 하면 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$$

이라 할 수 있다. 이 원이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$$(0-2)^2+(-1+3)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=8$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+3)^2=8$$

536 정답 $(x-1)^2+(y-3)^2=13$

두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ b)$라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$a=\frac{-2+4}{2}=1,\ b=\frac{1+5}{2}=3$$

$$\therefore \mathrm{C}(1,\ 3)$$

또 원의 반지름의 길이는

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(1+2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-3)^2=13$$

537 정답 4π

원의 중심을 $(0,\ b)$라 하고 반지름의 길이를 r라 하면

원의 방정식은 $x^2+(y-b)^2=r^2$

원이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 $x=2$, $y=1$을 대입하면

$$2^2+(1-b)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 $x=0$, $y=-1$을 대입하면

$$0^2+(-1-b)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$b=1,\ r^2=4$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi r^2=4\pi$$

538 정답 3

$x-y-1=0$에서 $y=x-1$이므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a-1)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a+1)^2=r^2$$

원이 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 4)$를 지나므로

$x=-1$, $y=1$을 대입하면

$$(-1-a)^2+(2-a)^2=r^2$$

$$2a^2-2a+5=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=2$, $y=4$를 대입하면

$$(2-a)^2+(5-a)^2=r^2$$

$$2a^2-14a+29=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면

$$12a-24=0 \qquad \therefore a=2$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$r^2=9 \qquad \therefore r=3$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 3이다.

539 정답 (1) 중심의 좌표는 $(1,\ -2)$, 반지름의 길이는 3

(2) 중심의 좌표는 $(2,\ 0)$, 반지름의 길이는 2

(1) $(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=9$이므로

$$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$$

따라서 중심의 좌표는 $(1,\ -2)$, 반지름의 길이는 3

(2) $(x^2-4x+4)+y^2=4$이므로

$$(x-2)^2+y^2=2^2$$

따라서 중심의 좌표는 $(2,\ 0)$, 반지름의 길이는 2

540 정답 2

중심 $(-3,\ 2)$와 원점 사이의 거리가 반지름의 길이이므로

$$(\text{반지름의 길이})=\sqrt{(-3-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{13}$$

이므로 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-2)^2=13$$

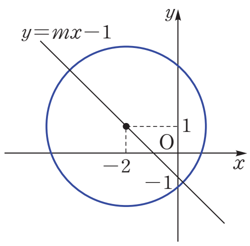
일반형으로 바꾸면 $x^2+y^2+6x-4y=0$이고

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$과 비교하면

$$A=6,\ B=-4,\ C=0$$

$$\therefore\ A+B+C=2$$

541 정답 -1



주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면

$$(x+2)^2+(y-1)^2=10$$

이고 직선 $y=mx-1$이 원의 중심 $(-2,\ 1)$을 지나야 하므로

$$1=-2m-1 \qquad \therefore\ m=-1$$

542 정답 $-3<m<1$

$x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$에서

$$\{x+(m-1)\}^2+(y-m)^2=-m^2-2m+3 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

방정식 ㉠이 원을 나타내려면 반지름의 길이는 양수이므로

$$-m^2-2m+3>0,\ m^2+2m-3<0,\ (m+3)(m-1)<0$$

$$\therefore\ -3<m<1$$

543 정답 33

x^2과 y^2의 항의 계수가 같아야 하므로 $a=-1$

이 값을 주어진 원의 방정식에 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2+2x+by=0$$

표준형으로 고치면

$$(x+1)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=1+\frac{b^2}{4}$$

이므로 $1+\dfrac{b^2}{4}=3^2 \qquad \therefore\ b^2=32$

$$\therefore\ a^2+b^2=(-1)^2+32=33$$

544 정답 (1) $b=\pm2$ (2) $a=\pm2$ (3) $(2,\ 2),\ (2,\ -2),\ (-2,\ 2),\ (-2,\ -2)$

(1) 이 원이 x축에 접하면 중심의 y좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같으므로

$$|b|=2 \qquad \therefore\ b=\pm2$$

(2) 이 원이 y축에 접하면 중심의 x좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같으므로

$$|a|=2 \qquad \therefore\ a=\pm2$$

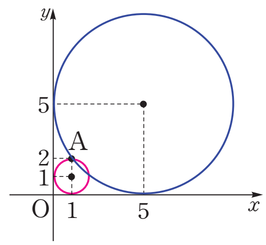
(3) 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하면 중심의 x좌표 및 y좌표의 절댓값이 모두 반지름의 길이와 같으므로

$$|a|=2,\ |b|=2 \qquad \therefore\ a=\pm2,\ b=\pm2$$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는

$$(2,\ 2),\ (2,\ -2),\ (-2,\ 2),\ (-2,\ -2)$$

545 정답 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$



점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$가 제1사분면 위의 점이므로 주어진 원도 제1사분면 위에 있다.

원의 방정식을

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$$

으로 놓으면 이 원이 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 지나므로 $x=1,\ y=2$를 대입한다.

$$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2,\ r^2-6r+5=0$$

$$(r-1)(r-5)=0 \qquad \therefore\ r=1 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1 \text{ 또는 } (x-5)^2+(y-5)^2=25$$

546 정답 12π

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:3$에서 $3\overline{\mathrm{PA}}=2\overline{\mathrm{PB}}$

양변을 제곱하면 $9\overline{\mathrm{PA}}^2=4\overline{\mathrm{PB}}^2 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$$\overline{\mathrm{PA}}^2=(x+3)^2+(y-1)^2,\ \overline{\mathrm{PB}}^2=(x-2)^2+(y-1)^2$$

이므로 ㉠에 대입하면

$$9\{(x+3)^2+(y-1)^2\}=4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}$$

$$(x+7)^2+(y-1)^2=36$$

즉, 점 P가 그리는 도형은 중심이 $(-7,\ 1)$이고 반지름의 길이가 6인 원이다.

따라서 원의 둘레의 길이는 $2\pi\times6=12\pi$

다른 풀이

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot2+3\cdot(-3)}{2+3},\ \frac{2\cdot1+3\cdot1}{2+3}\right) \qquad \therefore\ (-1,\ 1)$$

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot2-3\cdot(-3)}{2-3},\ \frac{2\cdot1-3\cdot1}{2-3}\right) \qquad \therefore\ (-13,\ 1)$$

두 점 $(-1,\ 1)$과 $(-13,\ 1)$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+(-13)}{2},\ \frac{1+1}{2}\right) \qquad \therefore\ (-7,\ 1)$$

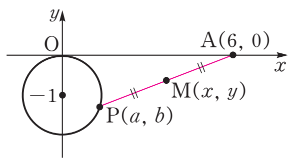
점 $(-7,\ 1)$과 점 $(-1,\ 1)$의 사이의 거리는

$$\sqrt{\{-1-(-7)\}^2+(1-1)^2}=6$$

따라서 구하는 원의 방정식은 $(x+7)^2+(y-1)^2=6^2$이므로

원의 둘레의 길이는 $2\pi\times 6=12\pi$

547 정답 $(x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$



원 $x^2+y^2+2y=0$은 $x^2+(y+1)^2=1$이므로 원 위의 점을 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면

$$a^2+(b+1)^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

여기서 선분 AP의 중점을 $\mathrm{M}(x, y)$라 두면

$$x=\frac{6+a}{2},\ y=\frac{b+0}{2}$$

$$\therefore a=2x-6,\ b=2y$$

이 값을 ㉠에 대입하면

$$(2x-6)^2+(2y+1)^2=1$$

$$\therefore (x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

548 정답 -2

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$(x^2+y^2-6x+4y+8)+k(x^2+y^2+2y)=0\ (k\neq-1)$$

이라 하면 이 원이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$$3+k=0 \qquad \therefore k=-3$$

따라서 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2+y^2-6x+4y+8)-3(x^2+y^2+2y)=0$$

$$-2x^2-2y^2-6x-2y+8=0$$

$$x^2+y^2+3x+y-4=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$$

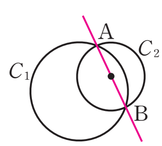
따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$$a+b=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$$

549 정답 3

두 원을 $C_1 : x^2+y^2=r^2$, $C_2 : (x+1)^2+(y-2)^2=4$라 두자.

원 C_1과 원 C_2의 교점을 A, B라 하면 선분 AB가 원 C_2의 지름일 때, 즉 직선 AB가 원 C_2의 중심 $(-1, 2)$를 지날 때, 원 C_1이 원 C_2의 둘레의 길이를 이등분한다.



따라서 두 원의 교점을 지나는 직선 AB의 방정식은 두 원

$$C_1 : x^2+y^2-r^2=0,\ C_2 : (x+1)^2+(y-2)^2-4=0$$

의 교점을 지나는 직선의 방정식이므로

$$\{(x+1)^2+(y-2)^2-4\}-(x^2+y^2-r^2)=0$$

$$2x-4y+1+r^2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이고 이 직선이 점 $(-1, 2)$를 지나므로 $x=-1$, $y=2$를 대입하면

$$-2-8+1+r^2=0,\ r^2=9$$

$$\therefore r=3\ (\because r>0)$$

연습문제 Ⅱ p.324

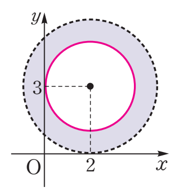
550 정답 5

$x^2+y^2-4x-6y+c=0$을 표준형으로 바꾸면

$$(x-2)^2+(y-3)^2=13-c$$

이므로 중심의 좌표가 $(2, 3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{13-c}$인 원이다.

오른쪽 그림과 같이 y축과는 만나고 x축과는 만나지 않으므로



$$2\leq\sqrt{13-c}<3$$

$$4\leq 13-c<9 \qquad \therefore 4<c\leq 9$$

따라서 정수 c의 개수는 5, 6, 7, 8, 9의 5개이다.

551 정답 2

원의 중심의 좌표를 $\mathrm{C}(a, a+1)$이라 하면 원의 반지름의 길이는 $|a|$이므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2+\{y-(a+1)\}^2=a^2$$

이 원이 점 $\mathrm{A}(2, 1)$을 지나므로

$$(2-a)^2+(-a)^2=a^2$$

$$(a-2)^2=0 \qquad \therefore a=2$$

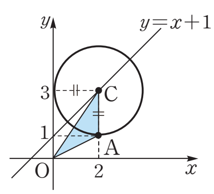
따라서 $\mathrm{C}(2, 3)$이므로 빗금 공식에 의하여

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}|6-2|=2$$

⊖ ⊕

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 원의 중심은 $(2, 3)$이므로



$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$$

552 정답 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면 점 P가 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=9 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\triangle$PAB의 무게중심을 $\mathrm{G}(x, y)$라 두면

$x=\frac{a+6+0}{3}$, $y=\frac{b+0+6}{3}$에서

$a=3x-6$, $b=3y-6$

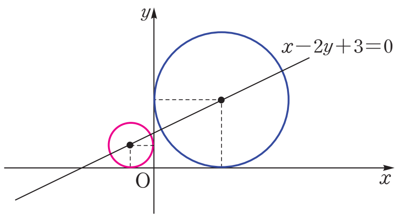
이 식을 ㉠에 대입하면

$(3x-6)^2+(3y-6)^2=9$

$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=1$

553 정답 4

x축과 y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 직선 $x-2y+3=0$이 제1, 2, 3사분면을 지나므로 구하는 원의 중심은 제1, 2, 3사분면에 있을 수 있다.



(i) 원의 중심이 제1사분면에 있을 때

중심이 (r, r)이므로 직선 $x-2y+3=0$에 대입하면

$r-2r+3=0$, $r=3$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-3)^2=9$

(ii) 원의 중심이 제2사분면에 있을 때

중심이 $(-r, r)$이므로 직선 $x-2y+3=0$에 대입하면

$-r-2r+3=0$, $r=1$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

(iii) 원의 중심이 제3사분면에 있을 때

중심이 $(-r, -r)$이므로 직선 $x-2y+3=0$에 대입하면

$-r+2r+3=0$, $r=-3$

그런데 $r>0$이므로 구하는 원은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 두 원의 반지름의 길이의 합은

$1+3=4$

다른 풀이

직선 $x-2y+3=0$과 직선 $y=x$, $y=-x$와의 교점의 좌표가 원의 중심이다.

(i) $x-2y+3=0$과 $y=x$를 연립하여 풀면

$x-2x+3=0 \qquad \therefore x=3, y=3$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-3)^2=9$

(ii) $x-2y+3=0$과 $y=-x$를 연립하여 풀면

$x-2(-x)+3=0 \qquad \therefore x=-1, y=1$

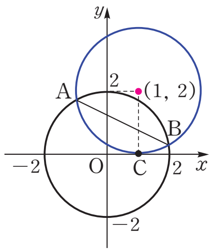
따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

(i), (ii)에서 두 원의 반지름의 길이의 합은 $3+1=4$

554 정답 $2x+4y=5$ 서술형

접은 호 AB를 포함하는 원을 그리면 오른쪽과 같다.



(i) 점 C(1, 0)에서 x축에 접하므로 원의 중심은 직선 $x=1$ 위에 있다. 즉, 원의 중심의 x좌표는 1이다.

(ii) 반지름의 길이는 원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이와 같으므로 2이고 원의 중심의 y좌표는 2이다.

따라서 접은 호 AB를 포함하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ … ①

이때 직선 AB는 두 원 $x^2+y^2=4$와 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$의 교점을 지나는 직선(공통인 현)이므로

$\{x^2+y^2-4\}-\{(x-1)^2+(y-2)^2-4\}=0$

$\therefore 2x+4y=5$ … ②

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	접은 호를 포함하는 원의 방정식을 구하기	60 %
②	현 AB를 포함하는 직선의 방정식을 구하기	40 %

20. 원과 직선의 위치 관계

확인문제 .... pp.328~336

555 정답 (1) $\pm\sqrt{2}$ (2) $k<-3$ 또는 $k>1$

(1) 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=x+n$이 접하려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y+n=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이와 같아야 하므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1,\ |n|=\sqrt{2}$$

$\therefore\ n=\pm\sqrt{2}$

(2) 직선 $x+y+k=0$과 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=2$가 만나지 않으려면 원의 중심 $(-1,\ 2)$와 직선 사이의 거리가 반지름의 길이보다 길어야 하므로

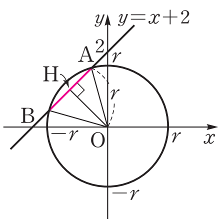
$$\frac{|-1+2+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}>\sqrt{2},\ |k+1|>2$$

$k+1<-2$ 또는 $k+1>2$

$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>1$

556 정답 (1) $\sqrt{3}$ (2) ±2

(1) 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $y=x+2$의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 직선에 내린 수선의 발을 H라 하자.



원의 중심 O와 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리를 구하면

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=1$$

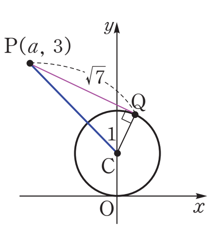
$\triangle$OAH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OH}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$$

$\therefore\ r=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}$

(2) 원 $x^2+(y-1)^2=1$의 중심을 C$(0,\ 1)$이라 하면

$$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(0-a)^2+(1-3)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+4} \quad \cdots\cdots\ ㉠$$



점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 Q라 하면

$$\overline{\mathrm{CQ}}=1,\ \overline{\mathrm{CQ}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$$

이므로 $\triangle$CPQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{CQ}}^2=7+1=8 \quad \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a^2+4=8$, $a^2=4$

$\therefore\ a=\pm2$

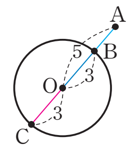
557 정답 (1) 8 (2) 3

(1) 원 $x^2+y^2=9$의 중심은 O$(0,\ 0)$이므로

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

이고 원의 반지름의 길이는 3이므로 점 A는 원 밖의 점이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 OA와 원이 만나는 두 점을 B, C라 하면 원 밖의 점 A에서 원 위의 점 사이의 거리는 점 P가 C의 위치에 있을 때, 최대이다.



따라서 원 위의 점 P에서 점 A까지의 거리의 최댓값은

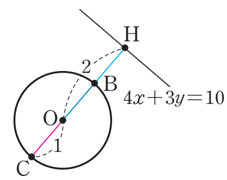
$$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OC}}=5+3=8$$

(2) 원의 중심 O$(0,\ 0)$에서 직선 $4x+3y=10$에 내린 수선의 발을 H라 하면 중심 O와 직선 $4x+3y=10$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

이고 원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

오른쪽 그림과 같이 원 위의 임의의 점 P에 대하여 직선 OH와 원이 만나는 두 점을 B, C라 하면 점 P가 C의 위치에 있을 때, 점 P에서 직선까지의 거리가 최대이다.



따라서 원 위의 점 P에서 직선까지의 거리의 최댓값은

$$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{OC}}=2+1=3$$

558 정답 $y=3x\pm2\sqrt{5}$

구하는 직선의 기울기가 3이므로 y절편을 n이라 하면 직선의 방정식은

$$y=3x+n \quad \cdots\cdots\ ㉠$$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 접선 ㉠ 사이의 거리는 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같으므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{2},\ |n|=2\sqrt{5} \qquad \therefore\ n=\pm2\sqrt{5}$$

이 값을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$y=3x\pm2\sqrt{5}$$

다른 풀이

공식을 이용하면

$$y=3x\pm\sqrt{2}\sqrt{3^2+1}=3x\pm2\sqrt{5}$$

559 정답 $x+2y=0$ 또는 $x+2y-10=0$

직선 $x+2y=1$에 평행한 직선은 상수 n에 대하여

$$x+2y=n \qquad \therefore\ x+2y-n=0 \quad \cdots\cdots\ ㉠$$

이라 놓을 수 있다.

직선 ㉠이 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$에 접하므로 원의 중심 $(1,\ 2)$와 접선 ㉠ 사이의 거리는 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같다.

$$\frac{|1+2\cdot2-n|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5},\ |5-n|=5$$

$\therefore\ n=0$ 또는 $n=10$

이 값을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$x+2y=0$ 또는 $x+2y-10=0$

개념 보충

직선 $ax+by+c=0$에 평행한 직선의 방정식은
$ax+by+c'=0$으로 놓을 수 있다.

560 정답 (1) $4x+3y-7=0$ (2) $\frac{25}{4}$

(1) 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(3,\ -4)$에서의 접선의 방정식은

$3\cdot x+(-4)\cdot y=25 \qquad \therefore\ y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이므로 점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

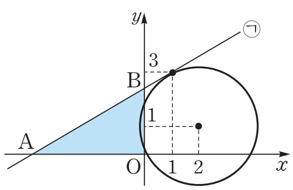
$y-1=-\frac{4}{3}(x-1)$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $4x+3y-7=0$

(2) 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$(1-2)(x-2)+(3-1)(y-1)=5$

$\therefore\ x-2y=-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠



직선 ㉠이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$y=0$일 때 $x=-5$에서 $A(-5,\ 0)$,

$x=0$일 때 $y=\frac{5}{2}$에서 $B\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$이므로

$$\triangle AOB=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$$

561 정답 (1) $x-\sqrt{3}y=-2$ 또는 $x+\sqrt{3}y=-2$ (2) $3x-4y=10$ 또는 $x=2$

(1) 점 $(-2,\ 0)$은 원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,\ 0)$과의 거리가 2이므로 원 밖의 점이다.

[방법 1]

구하는 접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(-2,\ 0)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m\{x-(-2)\} \qquad \therefore\ y=mx+2m \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 원 $x^2+y^2=1$에 대입하여 정리하면

$(m^2+1)x^2+4m^2x+4m^2-1=0$

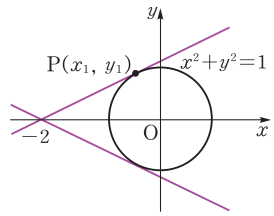
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2m^2)^2-(m^2+1)(4m^2-1)=0,\ m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 접선의 방정식은

$x-\sqrt{3}y=-2$ 또는 $x+\sqrt{3}y=-2$

[방법 2]



접점을 $P(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 P에서 그은 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 접선이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$-2x_1=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

한편 접점 $P(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x_1=-\frac{1}{2},\ y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $x_1=-\frac{1}{2},\ y_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

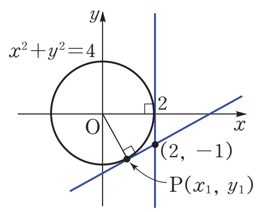
이것을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 접선의 방정식은

$x-\sqrt{3}y=-2$ 또는 $x+\sqrt{3}y=-2$

(2) 점 $(2,\ -1)$은 원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0,\ 0)$과의 거리가 $\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$이므로 원 밖의 점이다.

접점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠



직선 ㉠은 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$2x_1-y_1=4,\ y_1=2x_1-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

또 점 $P(x_1,\ y_1)$은 원 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

${x_1}^2+(2x_1-4)^2=4,\ 5{x_1}^2-16x_1+12=0$

$(5x_1-6)(x_1-2)=0$

$x_1=\frac{6}{5}$ 또는 $x_1=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉣

㉣을 ㉡에 대입하면

$\therefore\ x_1=\frac{6}{5},\ y_1=-\frac{8}{5}$ 또는 $x_1=2,\ y_1=0$

따라서 $x_1,\ y_1$의 값을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 접선의 방정식은

$3x-4y=10$ 또는 $x=2$

연습문제 I ······ pp.337~339

562 정답 (1) **서로 다른 두 점에서 만난다.**

(2) **한 점에서 만난다.(접한다.)**

(1) $y=-x+2$를 $x^2+y^2-2y=8$에 대입하여 정리하면

$$x^2+(-x+2)^2-2(-x+2)=8$$

$$x^2-x-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4\cdot(-4)=17>0$$

이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

다른 풀이1

원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$x^2+(y-1)^2=9$$

원의 중심 $(0,\ 1)$과 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리

$$d=\frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore d<r=3$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $y=2x-1$을 $x^2+y^2-6x+4=0$에 대입하여 정리하면

$$x^2+(2x-1)^2-6x+4=0$$

$$5(x^2-2x+1)=0$$

$$\therefore x^2-2x+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-1=0$$

이므로 원과 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

다른 풀이2

원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$(x-3)^2+y^2=5$$

원의 중심 $(3,\ 0)$과 직선 $2x-y-1=0$ 사이의 거리

$$d=\frac{|6-0-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$\therefore d=r=\sqrt{5}$$

따라서 원과 직선은 한 점에서 만난다.

563 정답 $\boldsymbol{k<-2\sqrt{2}}$ **또는** $\boldsymbol{k>2\sqrt{2}}$

두 식에서 y를 소거하면

$$x^2+(-x+k)^2=4$$

$$2x^2-2kx+k^2-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-4)=-k^2+8$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\dfrac{D}{4}<0$이어야 하므로

$$-k^2+8<0$$

$$(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})>0$$

$$\therefore k<-2\sqrt{2} \text{ 또는 } k>2\sqrt{2}$$

564 정답 $\boldsymbol{k=1}$ **또는** $\boldsymbol{k=-9}$

원의 중심인 점 $(3,\ 2)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

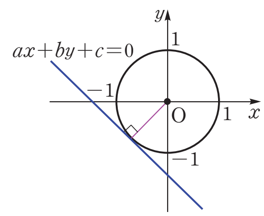
$$d=\frac{|2\cdot3-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}$$

주어진 원과 직선이 한 점에서 만나려면 $d=\sqrt{5}$이어야 하므로

$$\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5},\ |k+4|=5,\ k+4=\pm5$$

$$\therefore k=1 \text{ 또는 } k=-9$$

565 정답 **빗변의 길이가 $\boldsymbol{c}$인 직각삼각형**



원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

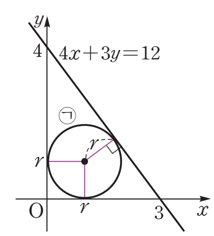
$$d=\frac{|a\times0+b\times0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

$$\sqrt{a^2+b^2}=|c| \qquad \therefore a^2+b^2=c^2$$

따라서 $a,\ b,\ c$를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

566 정답 $\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2=1}$



구하는 원은 x축, y축에 동시에 접하고 중심이 제1사분면에 위치하므로 원의 방정식을

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이라 두자. 원 ㉠과 직선 $4x+3y-12=0$이 접하므로 원의 중심 $(r,\ r)$과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|4r+3r-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=r,\ |7r-12|=5r,\ 7r-12=\pm5r$$

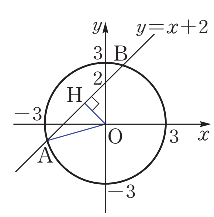
$$\therefore r=1 \text{ 또는 } r=6$$

그런데 r는 직선의 x절편 3보다 작으므로 $r=1$

따라서 구하는 내접원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1$$

567 정답 $\boldsymbol{2\sqrt{7}}$



그림과 같이 원과 직선이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자.

원의 중심 O에서 직선 $x-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 중심 O와 직선 사이의 거리는

$$\overline{OH}=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$\overline{OA}=3$이므로 $\triangle AOH$에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AH}^2=\overline{OA}^2-\overline{OH}^2=9-(\sqrt{2})^2=7 \qquad \therefore \overline{AH}=\sqrt{7}$$

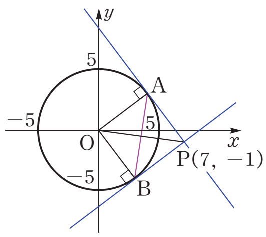
$$\therefore \overline{AB}=2\times\overline{AH}=2\sqrt{7}$$

568 정답 $5\sqrt{2}$

점 P에서 원에 그은 두 접선과 원의 접점을 A, B라 하면

$$\overline{OP}=\sqrt{7^2+(-1)^2}=5\sqrt{2}$$

$$\overline{OA}=5$$



$\triangle AOP$에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{50-25}=5$$

따라서 사각형 OBPA는 한 변의 길이가 5인 정사각형이므로

$$\overline{AB}=5\sqrt{2}$$

569 정답 (1) $3x-4y+5=0$ (2) 1 (3) $2\sqrt{3}$

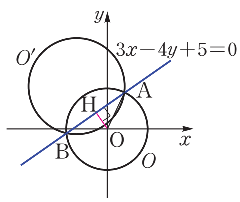
(1) 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-4-(x^2+y^2+3x-4y+1)=0$$

$$\therefore 3x-4y+5=0$$

(2) 원 O의 중심 (0, 0)에서 직선 $3x-4y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

원 O의 중심과 직선 AB 사이의 거리는



$$\overline{OH}=\frac{|5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$$

(3) $\triangle OAH$에서 $\overline{OA}=2$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AH}^2=\overline{OA}^2-\overline{OH}^2=2^2-1^2=3$$

$$\therefore \overline{AH}=\sqrt{3}$$

따라서 $\overline{AB}=2\times\overline{AH}=2\sqrt{3}$

570 정답 3

원 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$을 표준형으로 변형하면

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4$$

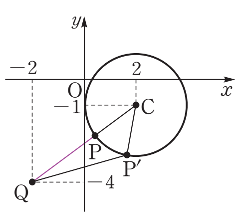
이고 이 원의 중심을 C라 하면 C(2, −1)이고 반지름의 길이는 2이다.

그림과 같이 선분 CQ와 원의 교점을 P라 하면 원 위의 임의의 점 P′에 대하여 $\overline{CP}=\overline{CP'}=2$이고

$$\overline{CQ}=\overline{CP}+\overline{PQ}\le\overline{CP'}+\overline{P'Q}$$

이므로

$$\overline{PQ}\le\overline{P'Q}$$



따라서 점 P가 선분 CQ와 원의 교점일 때, $\overline{PQ}$의 길이가 최소가 된다.

이때 중심 C(2, −1)과 점 Q(−2, −4) 사이의 거리는

$$\overline{CQ}=\sqrt{(2+2)^2+(-1+4)^2}=5$$

따라서 $\overline{PQ}$의 최솟값은

$$\overline{CQ}-\overline{CP}=5-2=3$$

571 정답 (1) 9 (2) 16

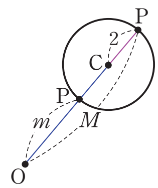
원 $x^2+y^2-4x+6y+9=0$을 표준형으로 변형하면

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4$$

원의 중심을 C라 하면 C(2, −3)이고 반지름의 길이는 2이다.

(1) $\overline{OC}=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$이므로 점 O는 원 외부의 점이다.

$\overline{OP}$의 길이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 오른쪽 그림에서



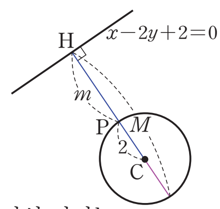
$$M=\overline{OC}+2=\sqrt{13}+2,$$

$$m=\overline{OC}-2=\sqrt{13}-2$$

$$\therefore M\times m=(\sqrt{13}+2)(\sqrt{13}-2)=13-4=9$$

(2) 점 P와 직선 $x-2y+2=0$ 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

원의 중심 C(2, −3)에서 직선 $x-2y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 $x-2y+2=0$ 사이의 거리는



$$\overline{CH}=\frac{|2-2\cdot(-3)+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

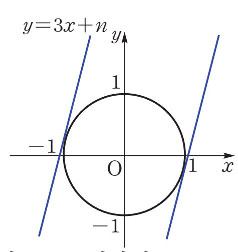
이므로 $M=\overline{CH}+2=2\sqrt{5}+2$, $m=\overline{CH}-2=2\sqrt{5}-2$

$$\therefore M\times m=(2\sqrt{5}+2)(2\sqrt{5}-2)=20-4=16$$

572 정답 (1) $y=3x\pm\sqrt{10}$ (2) $y=-2x\pm2\sqrt{5}$ (3) $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x+6$

(1) 직선 $3x-y+5=0$, 즉 $y=3x+5$의 기울기는 3이므로 구하는 접선의 기울기가 3이고 y절편을 n이라 하면 접선의 방정식은

$$y=3x+n$$



$y=3x+n$을 $x^2+y^2=1$에 대입하여 y를 소거하면

$$x^2+(3x+n)^2=1,\ 10x^2+6nx+(n^2-1)=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(3n)^2-10(n^2-1)=-n^2+10$$

원과 직선이 접하려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-n^2+10=0$, $n=\pm\sqrt{10}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3x\pm\sqrt{10}$

(2) 직선 $x-2y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 이에 수직인 접선의 기울기는 -2이다.

구하는 접선의 y절편을 n이라 하면 접선의 방정식은

$y=-2x+n$

$y=-2x+n$을 $x^2+y^2=4$에 대입하여 y를 소거하면

$x^2+(-2x+n)^2=4$, $5x^2-4nx+(n^2-4)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2n)^2-5(n^2-4)=-n^2+20$

원과 직선이 접하려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-n^2+20=0$, $n=\pm2\sqrt{5}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-2x\pm2\sqrt{5}$

(3) 구하는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx+6$

$y=mx+6$을 $x^2+y^2=16$에 대입하여 y를 소거하면

$x^2+(mx+6)^2=16$, $(m^2+1)x^2+12mx+20=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(6m)^2-20(m^2+1)=16m^2-20$

원과 직선이 접하려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$16m^2-20=0$, $m=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x+6$

573 정답 (1) $3x-2y=-13$ (2) $3x+4y=27$

(1) 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(-3, 2)$에서의 접선의 방정식은

$-3\cdot x+2\cdot y=13$ $\therefore 3x-2y=-13$

(2) 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ 위의 점 $(5, 3)$에서의 접선의 방정식은

$(5-2)(x-2)+(3+1)(y+1)=25$

$3(x-2)+4(y+1)=25$

$\therefore 3x+4y=27$

574 정답 $x+2y=5$, $2x-y=5$

접점 P의 좌표를 $P(x_1, y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$ …… ㉠

이 접선이 점 $(3, 1)$을 지나므로

$3x_1+y_1=5$ …… ㉡

또, (x_1, y_1)은 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=5$ …… ㉢

㉡에서 $y_1=5-3x_1$을 ㉢에 대입하면

${x_1}^2+(5-3x_1)^2-5=0$, $10{x_1}^2-30x_1+20=0$

${x_1}^2-3x_1+2=0$

$(x_1-1)(x_1-2)=0$

$\therefore x_1=1$ 또는 $x_1=2$

$x_1=1$이면 $y_1=2$, $x_1=2$이면 $y_1=-1$

따라서 접점 P의 좌표는 $(1, 2)$, $(2, -1)$이고 그때의 두 접선의 방정식은

$x+2y=5$, $2x-y=5$

575 정답 12

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선에 대하여 그 접점까지의 거리는 같다.

$\therefore \overline{PB}=\overline{PD}$, $\overline{QC}=\overline{QD}$, $\overline{AB}=\overline{AC}$

($\triangle$APQ의 둘레의 길이)

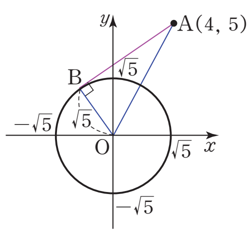
$=\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{AQ}$ $\leftarrow \overline{PQ}=\overline{PD}+\overline{QD}$

$=\overline{AP}+\overline{PD}+\overline{QD}+\overline{AQ}$ $\leftarrow \overline{PB}=\overline{PD}$, $\overline{QC}=\overline{QD}$

$=\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{QC}+\overline{AQ}$

$=\overline{AB}+\overline{AC}$ $\leftarrow \overline{AB}=\overline{AC}$

$=2\overline{AB}$



한편, $\overline{AO}^2=4^2+5^2=41$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{BO}^2}=\sqrt{41-5}=\sqrt{36}=6$

$\therefore$ ($\triangle$APQ의 둘레의 길이)$=2\overline{AB}=2\times6=12$

576 정답 $x=2$ 또는 $4x-3y=-1$

접점을 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$(x_1-1)(x-1)+y_1y=1$ …… ㉠

점 $(2, 3)$은 직선 ㉠ 위의 점이므로

$(2-1)(x_1-1)+3y_1=1$, $x_1+3y_1=2$ …… ㉡

한편, (x_1, y_1)은 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$(x_1-1)^2+{y_1}^2=1$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하여 x_1을 소거하면

$(1-3y_1)^2+{y_1}^2=1$, $10{y_1}^2-6y_1=0$

$2y_1(5y_1-3)=0$

$\therefore y_1=0$ 또는 $y_1=\frac{3}{5}$

(i) $y_1=0$일 때

이 값을 ㉡에 대입하면 $x_1=2$

㉠에서 $x-1=1$ $\quad\therefore x=2$

(ii) $y_1=\frac{3}{5}$일 때

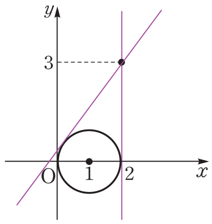
이 값을 ㉡에 대입하면 $x_1=\frac{1}{5}$

㉠에서 $-\frac{4}{5}(x-1)+\frac{3}{5}y=1$

$\therefore 4x-3y=-1$

(i), (ii)에서 구하는 접선의 방정식은

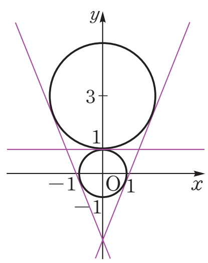
$x=2$ 또는 $4x-3y=-1$



연습문제 Ⅱ ······ p.340

577 정답 $y=1$ **또는** $y=\pm 2\sqrt{2}x-3$

구하는 접선을 $y=ax+b$,
즉 $ax-y+b=0$이라 두면 원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,\ 0)$과 접선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로



$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=1, |b|=\sqrt{a^2+1}$

$b^2=a^2+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

마찬가지로 원 $x^2+(y-3)^2=4$의 중심 $(0,\ 3)$과 접선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$\frac{|0-3+b|}{\sqrt{a^2+1}}=2,\ (b-3)^2=4(a^2+1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 a^2을 소거하면

$(b-3)^2=4b^2,\ 3b^2+6b-9=0,\ 3(b+3)(b-1)=0$

$\therefore b=-3$ 또는 $b=1$

(i) $b=-3$이면

㉠에서 $a^2=8$ $\quad\therefore a=\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore y=\pm 2\sqrt{2}x-3$

(ii) $b=1$이면

㉠에서 $a^2=0$ $\quad\therefore a=0$

$\therefore y=1$

(i), (ii)에서 구하는 접선의 방정식은

$y=1$ 또는 $y=\pm 2\sqrt{2}x-3$

578 정답 **1**

직선 $y=mx$가 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$에 접하려면 두 식을 연립한 이차방정식

$(x-1)^2+(mx-3)^2=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 중근을 가져야 한다. ㉠을 정리하면

$(m^2+1)x^2-2(3m+1)x+8=0$

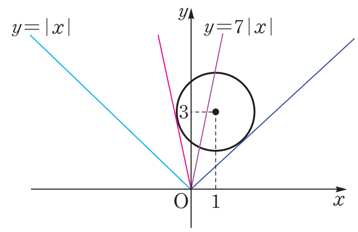
위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3m+1)^2-8(m^2+1)=0$

$m^2+6m-7=0,\ (m+7)(m-1)=0$

$\therefore m=-7$ 또는 $m=1$

따라서 즉, $y=-7x$와 $y=x$가 원과 접하므로
$y=|x|$, $y=7|x|$의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



위의 그림과 같이

(i) $y=|x|$이면

원 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$와 오직 한 점에서 만난다.

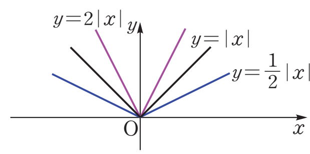
(ii) $y=7|x|$이면

원 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$와 세 점에서 만난다.

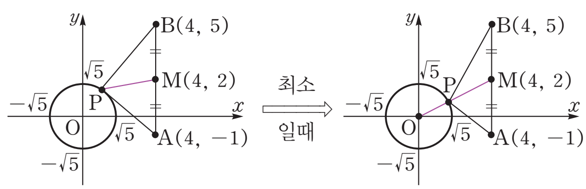
(i), (ii)에서 $m=1$

개념 보충

함수 $y=m|x|$(단, $m>0$)의 그래프



579 정답 **28**



위의 그림과 같이 선분 AB의 중점을 M이라 하면 M(4, 2)

$\overline{AB}=6$이므로 $\overline{AM}=3$

삼각형의 중선정리에 의하여

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)=2(\overline{PM}^2+9)$

이때 직선 OM과 원 $x^2+y^2=5$의 교점에 점 P가 위치할 때, $\overline{PM}$은 최소이다.

$\overline{OM}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$이고 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$\overline{PM}$의 최솟값은

$\overline{OM}-\overline{OP}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은

$2(\overline{PM}^2+9)=2\{(\sqrt{5}\,)^2+9\}=28$

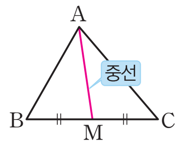
개념 보충

삼각형의 중선정리(파포스의 중선정리)

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}$의 중점 M에 대하여

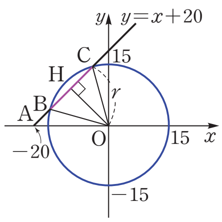
$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

이 성립한다.



580 정답 **2시간** 서술형

감시 레이더의 위치와 배의 처음 위치를 각각 O(0, 0), A(−20, 0)이라 하자. ··· ①



배의 진행 경로를 나타내는 직선의 방정식은

$y=x+20(x\geq-20)$ ··· ②

위의 그림에서 배가 두 지점 B, C의 사이에 있을 때, 감시 화면에 나타나므로 $\overline{BC}$의 길이를 구하자.

O(0, 0)에서 직선 $x-y+20=0$에 이르는 거리를 구하면

$$\overline{OH}=\frac{|20|}{\sqrt{1^2+1^2}}=10\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BC}=2\overline{BH}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OH}^2}$$

$$=2\sqrt{15^2-(10\sqrt{2})^2}=10(\text{km})$$ ··· ③

이때 배의 속력이 5 km/시이므로 이 배가 감시 화면에 나타나는 시간은

$$(\text{시간})=\frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}=\frac{10}{5}=2(\text{시간})$$

동안이다. ··· ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	감시 레이더, 배의 위치를 좌표평면에 나타내기	20%
②	배의 진행 경로를 직선의 방정식으로 나타내기	20%
③	배가 감시 화면에 나타나는 거리를 구하기	30%
④	배가 감시 화면에 나타나는 시간을 구하기	30%

21. 도형의 이동

확인문제 pp.344~355

581 정답 $a=1,\ b=3$

점 $(a,\ b)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 −2만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(b,\ 2-a)$이므로

$a+2=b,\ b-2=2-a$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=3$

582 정답 $-3,\ -1$

평행이동 $(x,\ y)\longrightarrow(x+2,\ y-2)$는 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 −2만큼 평행이동하는 것이다.

따라서 점 $(a,\ 2)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 −2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+2,\ 2-2)$ $\therefore (a+2,\ 0)$

이 점이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$(a+2)^2+0^2=1,\ a^2+4a+3=0,\ (a+3)(a+1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=-1$

583 정답 $a=3,\ b=2,\ c=1$

원 $x^2+y^2+2x+2y-2=0$을 표준형으로 변형하면

$(x+1)^2+(y+1)^2=4$ ······ ㉠

원 $x^2+y^2-4x-2y+c=0$을 표준형으로 변형하면

$(x-2)^2+(y-1)^2=5-c$ ······ ㉡

즉, 중심 $(-1,\ -1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하여 중심 $(2,\ 1)$이 되었으므로

$-1+a=2,\ -1+b=1$

$\therefore a=3,\ b=2$

평행이동을 해도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$4=5-c$ $\therefore c=1$

584 정답 (1) 4 (2) 13

(1) 점 $A(2,\ a+2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$A'(2,\ -a-2)$

A′이 직선 $ax+y=2$ 위의 점이므로 $x=2,\ y=-a-2$를 대입하면

$2a+(-a-2)=2$ $\therefore a=4$

(2) 점 $A(3,\ -2)$를

x축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는

$P(3,\ 2)$

y축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$$Q(-3,\ -2)$$

직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는

$$R(-2,\ 3)$$

따라서 △PQR의 넓이 S를 빗금 공식을 써서 구하면

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 3 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \end{matrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}|3\cdot(-2)+(-3)\cdot3+(-2)\cdot2-(-3)\cdot2-(-2)\cdot(-2)-3\cdot3|$$

$$=\frac{1}{2}|-6-9-4+6-4-9|$$

$$=\frac{26}{2}=13$$

개념 보충

빗금 공식

서로 다른 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 △ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|$$

585 정답 2

직선 $y=2x+4$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선 l은

$y=2(x-a)+4 \qquad \therefore\ l : y=2x-2a+4$

l을 x축에 대하여 대칭이동한 직선 m은

$-y=2x-2a+4 \qquad \therefore\ m : y=-2x+2a-4$

m을 y축에 대하여 대칭이동한 직선 n은

$y=-2(-x)+2a-4 \qquad \therefore\ n : y=2x+2a-4$

두 직선 l과 n이 일치하려면

$-2a+4=2a-4 \qquad \therefore\ a=2$

586 정답 $m=0$ 또는 $m=-\frac{12}{5}$

원 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동하면

$(-x)^2+y^2-6(-x)-4y+9=0$

$x^2+y^2+6x-4y+9=0$

$\therefore\ (x+3)^2+(y-2)^2=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 원 ㉠이 직선 $mx-y=0$에 접하면 원의 중심 $(-3,\ 2)$와 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리는 2이므로

$$\frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

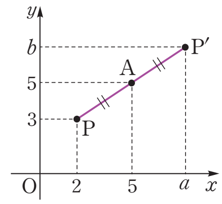
$9m^2+12m+4=4m^2+4$

$5m^2+12m=0,\ m(5m+12)=0$

$\therefore\ m=0$ 또는 $m=-\frac{12}{5}$

587 정답 (1) $P'(8,\ 7)$ (2) $Q'(-3,\ 4)$

(1)



점 $P'(a,\ b)$라 하면 선분 PP'의 중점이 점 $A(5,\ 5)$이므로

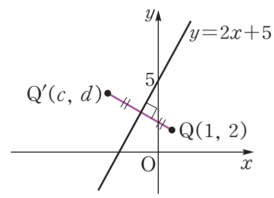
$$\frac{2+a}{2}=5,\ \frac{3+b}{2}=5$$

$\therefore\ a=8,\ b=7$

따라서 $P'(8,\ 7)$이다.

(2) 직선 $y=2x+5$는 선분 QQ'의 수직이등분선이다.

점 $Q'(c,\ d)$라 하면



(i) [수직 조건]

직선 $y=2x+5$의 기울기가 2이므로 선분 QQ'의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

$$\frac{d-2}{c-1}=-\frac{1}{2}\text{에서}$$

$c+2d=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) [중점 조건]

선분 QQ'의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+c}{2},\ \frac{2+d}{2}\right)$이고 이 점이 직선 $y=2x+5$ 위의 점이므로

$$\frac{2+d}{2}=2\cdot\frac{1+c}{2}+5\text{에서}$$

$2c-d=-10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $c=-3,\ d=4$

$\therefore\ Q'(-3,\ 4)$

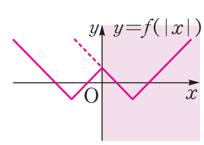
588 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 풀이 참조

(1) 방정식 $y=f(|x|)$에서 x 대신 $-x$를 대입하면

$y=f(|-x|)$, 즉 $y=f(|x|)$

로 자기 자신이 된다.

따라서 도형 $y=f(|x|)$는 y축에 대하여 대칭인 도형이므로 $x>0$인 범위 (제1, 4사분면)만을 그린 후 y축에 대하여 대칭시키면 된다.



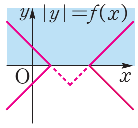
21강

(2) 방정식 $|y|=f(x)$에서 y 대신 $-y$를 대입하면

$|-y|=f(x)$, 즉 $|y|=f(x)$

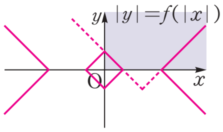
로 자기 자신이 된다.

따라서 도형 $|y|=f(x)$는 x축에 대하여 대칭인 도형이므로 $y>0$인 범위 (제1, 2사분면)만을 그린 후 x축에 대하여 대칭시키면 된다.



(3) 방정식 $|y|=f(|x|)$에서

x 대신 $-x$를, y 대신 $-y$를, 둘 다 부호를 바꾸어 대입해도 모두 $|y|=f(|x|)$로 자기 자신이 된다.

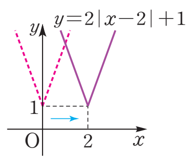


따라서 도형 $|y|=f(|x|)$는 x축, y축, 원점에 대하여 모두 대칭인 도형이므로 $x>0$, $y>0$인 범위 (제1사분면)만을 그린 후 x축, y축, 원점에 대하여 대칭시키면 된다.

589 정답 **(1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 풀이 참조**

(1) $y=2|x-2|+1$의 그래프는 $y=2|x|+1$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

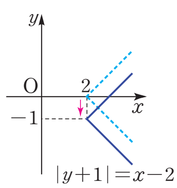
또 $y=2|x|+1$에 x 대신 $-x$를 대입하여도 같은 식이 되어 y축에 대하여 대칭인 도형이므로 그 그래프는 오른쪽 그림의 점선과 같다.



따라서 $y=2|x-2|+1$의 그래프는 그림의 실선과 같다.

(2) $|y+1|=x-2$의 그래프는 $|y|=x-2$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

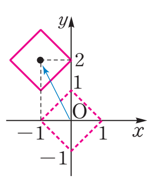
또 $|y|=x-2$에 y 대신 $-y$를 대입하여도 같은 식이 되어 x축에 대하여 대칭인 도형이므로 그 그래프는 오른쪽 그림의 점선과 같다.



따라서 $|y+1|=x-2$의 그래프는 그림의 실선과 같다.

(3) $|x+1|+|y-2|=1$의 그래프는 $|x|+|y|=1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또 $|x|+|y|=1$에 x 대신 $-x$를, y 대신 $-y$를 대입하여도 같은 식이 되어 x축, y축, 원점에 대하여 모두 대칭인 도형이므로 그 그래프는 오른쪽 그림의 점선과 같다.



따라서 $|x+1|+|y-2|=1$의 그래프는 그림의 실선과 같다.

연습문제 I .... pp.356~359

590 정답 (1) $(6,\ -2)$ (2) $(x+3,\ y-1)$ (3) $(x+2,\ y+1)$ (4) $(4-y,\ x+1)$

(1) 평행이동한 점을 $(x',\ y')$이라 하면

$x'=3+3=6$, $y'=-1+(-1)=-2$

$\therefore (6,\ -2)$

(2) 평행이동한 점을 $(x',\ y')$이라 하면

$x'=x+3$, $y'=y+(-1)=y-1$

$\therefore (x+3,\ y-1)$

(3) 평행이동한 점을 $(x',\ y')$이라 하면

$x'=(x-1)+3=x+2$, $y'=(y+2)+(-1)=y+1$

$\therefore (x+2,\ y+1)$

(4) 평행이동한 점을 $(x',\ y')$이라 하면

$x'=(1-y)+3=4-y$, $y'=(x+2)+(-1)=x+1$

$\therefore (4-y,\ x+1)$

591 정답 $a=-1$, $b=1$

점 $(a,\ 5)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+3,\ 5-4)$ $\quad\therefore (a+3,\ 1)$

이 점이 $(2,\ b)$와 일치하므로

$a+3=2$, $1=b$ $\quad\therefore a=-1$, $b=1$

592 정답 $(-2,\ 4)$

점 $(3,\ m)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(n,\ 3)$이라 하면

$3+a=n$, $m+b=3$ $\quad\therefore a=n-3$, $b=3-m$

따라서 점 $(1-n,\ 1+m)$을 x축의 방향으로 $n-3$만큼, y축의 방향으로 $3-m$만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(1-n+n-3,\ 1+m+3-m)$ $\quad\therefore (-2,\ 4)$

593 정답 (1) $2x-5y-5=0$ (2) $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ (3) $f(x-4,\ y+3)=0$ (4) $f(-y,\ x-1)=0$

(1) $2x-5y+6=0$에서

x 대신 $x-3$을, y 대신 $y+1$을 대입하면

$2(x-3)-5(y+1)+6=0$

$\therefore 2x-5y-5=0$

(2) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$에서

x 대신 $x-3$을, y 대신 $y+1$을 대입하면

$\{(x-3)+1\}^2+\{(y+1)-2\}^2=1$

$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=1$

(3) $f(x-1,\ y+2)=0$에서

x 대신 $x-3$을, y 대신 $y+1$을 대입하면

$$f((x-3)-1,\ (y+1)+2)=0$$
$$\therefore f(x-4,\ y+3)=0$$

(4) $f(1-y,\ x+2)=0$에서

x 대신 $x-3$을, y 대신 $y+1$을 대입하면

$$f(1-(y+1),\ (x-3)+2)=0$$
$$\therefore f(-y,\ x-1)=0$$

594 정답 2

직선 $2x-y+1=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a+4$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x-a)-(y-a-4)+1=0$$
$$\therefore 2x-y-a+5=0$$

이 직선이 $2x-y+3=0$과 일치하므로

$$-a+5=3 \qquad \therefore a=2$$

595 정답 12

원 $x^2+y^2-6x+4y+11=0$을 표준형으로 변형하면

$$(x-3)^2+(y+2)^2=2$$

이므로 원의 중심의 좌표는 $(3,\ -2)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

이 원을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 중심의 좌표는 $(3+1,\ -2+a)$, 즉 $(4,\ a-2)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$인 원이 된다.

이 원이 직선 $y=x$에 접하면 원의 중심 $(4,\ a-2)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|4-(a-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2},\ |a-6|=2,\ a-6=\pm 2$$
$$\therefore a=8 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$$8+4=12$$

596 정답 −1

포물선 $y=2x^2$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-n=2(x-m)^2$$
$$\therefore y=2x^2-4mx+2m^2+n$$

이 포물선이 $y=2x^2-12x+15$와 일치하므로

$$m=3,\ n=-3$$

직선 $x-ky=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$(x-3)-k(y+3)=0 \qquad \therefore x-ky-3k-3=0$$

이 직선이 $x-ky=0$와 같으므로

$$-3k-3=0 \qquad \therefore k=-1$$

597 정답 $x-2y=0$

원 O의 반지름의 길이를 r라 두면 원 O의 방정식은

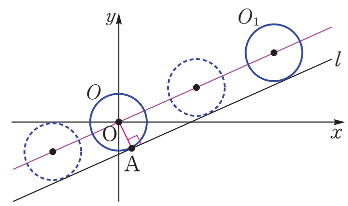
$$x^2+y^2=r^2$$

원 O가 점 A$(1,\ -2)$를 지나므로 $x=1$, $y=-2$를 대입하면

$$1^2+(-2)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=5$$

원 O의 방정식은 $x^2+y^2=5$이고 원 위의 점 A$(1,\ -2)$에서의 접선 l의 방정식은

$$l : x-2y=5$$



이때 원 O를 굴려서 생긴 임의의 원 O_1의 중심이 그리는 도형은 점 A$(1,\ -2)$를 원점 $(0,\ 0)$으로 옮기는, 즉 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하는 평행이동에 의하여 접선 l을 평행이동한 직선과 같으므로

$$(x+1)-2(y-2)=5 \qquad \therefore x-2y=0$$

다른 풀이

$\overline{OA}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$이므로 원 O의 방정식은

$$x^2+y^2=5$$

점 A$(1,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$$1\cdot x-2\cdot y=5$$

구하는 직선은 직선 l과 평행하고 원점을 지나므로

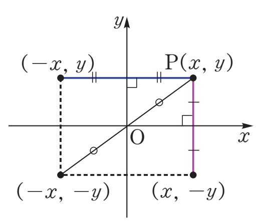
$$x-2y=0$$

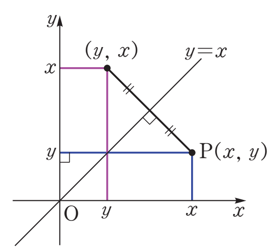
598 정답 (1) $(3,\ 1)$, $(1-y,\ -x-2)$

(2) $(-3,\ -1)$, $(y-1,\ x+2)$

(3) $(-3,\ 1)$, $(y-1,\ -x-2)$

(4) $(-1,\ 3)$, $(x+2,\ 1-y)$





두 점 P, Q를 주어진 직선 또는 점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 각각 P′, Q′이라 하면

(1) x축에 대하여 대칭이동하면 y좌표의 부호가 바뀌므로

P′$(3,\ 1)$, Q′$(1-y,\ -x-2)$

(2) y축에 대하여 대칭이동하면 x좌표의 부호가 바뀌므로

P′$(-3,\ -1)$, Q′$(y-1,\ x+2)$

(3) 원점에 대하여 대칭이동하면 x좌표와 y좌표의 부호가 모

두 바뀌므로

$P'(-3,\ 1),\ Q'(y-1,\ -x-2)$

(4) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 x좌표와 y좌표가 서로 바뀌므로

$P'(-1,\ 3),\ Q'(x+2,\ 1-y)$

599 정답 7

점 $(a,\ b)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a,\ -b)$

점 $(-a,\ -b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a,\ b)$

이 점이 점 $(-3,\ 4)$와 일치하므로 $a=3,\ b=4$

$\therefore a+b=3+4=7$

600 정답 $y=-2x+3$

직선 l이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로 직선 l의 방정식을 상수 m에 대하여

$y+1=m(x-2)$ ······ ㉠

로 놓고 직선 l을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구하면

$-y+1=m(x-2)$

이고 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

$-3+1=m(3-2)$ $\therefore m=-2$

따라서 직선 l의 방정식은 ㉠에서

$y+1=-2(x-2)$ $\therefore y=-2x+3$

601 정답 8

점 $A(1,\ 3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(1+a,\ 3+b)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $(3+b,\ 1+a)$

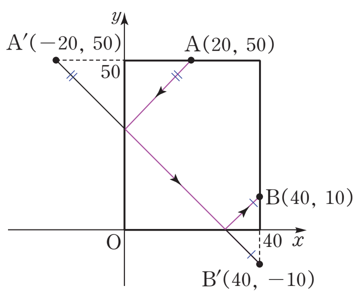
이 점이 점 $A(1,\ 3)$과 일치하므로

$3+b=1,\ 1+a=3$ $\therefore a=2,\ b=-2$

$\therefore a^2+b^2=2^2+(-2)^2=8$

602 정답 $60\sqrt{2}$

직사각형을 좌표평면 위에 놓으면 $A(20,\ 50),\ B(40,\ 10)$이다.



점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$A'(-20,\ 50)$

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$B'(40,\ -10)$

점 A에서 y축과 x축의 위의 점을 지나서 B까지 가는 거리의 최솟값은 선분 A′B′의 길이와 같으므로

$\overline{A'B'}=\sqrt{(40+20)^2+(-10-50)^2}=60\sqrt{2}$

따라서 움직인 거리의 최솟값은 $60\sqrt{2}$이다.

603 정답 (1) $(x+1)^2+(y+2)^2=1,\ f(y+1,\ x+2)=0$

(2) $(x-1)^2+(y-2)^2=1,\ f(1-y,\ 2-x)=0$

(3) $(x-1)^2+(y+2)^2=1,\ f(y+1,\ 2-x)=0$

(4) $(x-2)^2+(y+1)^2=1,\ f(1-x,\ y+2)=0$

(1) x축에 대하여 대칭이동하면

주어진 방정식에 y 대신 $-y$를 대입하면 되므로

$(x+1)^2+(y-2)^2=1 \Rightarrow (x+1)^2+(-y-2)^2=1$

$\therefore (x+1)^2+(y+2)^2=1$

$f(1-y,\ x+2)=0 \Rightarrow f(1-(-y),\ x+2)=0$

$\therefore f(y+1,\ x+2)=0$

(2) y축에 대하여 대칭이동하면

주어진 방정식에 x 대신 $-x$를 대입하면 되므로

$(x+1)^2+(y-2)^2=1 \Rightarrow (-x+1)^2+(y-2)^2=1$

$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=1$

$f(1-y,\ x+2)=0 \Rightarrow f(1-y,\ -x+2)=0$

$\therefore f(1-y,\ 2-x)=0$

(3) 원점에 대하여 대칭이동하면

주어진 방정식에 x 대신 $-x$를, y 대신 $-y$를 대입하면 되므로

$(x+1)^2+(y-2)^2=1 \Rightarrow (-x+1)^2+(-y-2)^2=1$

$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=1$

$f(1-y,\ x+2)=0 \Rightarrow f(1-(-y),\ -x+2)=0$

$\therefore f(y+1,\ 2-x)=0$

(4) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

주어진 방정식에 x 대신 y를, y 대신 x를 대입하면 되므로

$(x+1)^2+(y-2)^2=1 \Rightarrow (y+1)^2+(x-2)^2=1$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=1$

$f(1-y,\ x+2)=0 \Rightarrow f(1-x,\ y+2)=0$

$\therefore f(1-x,\ y+2)=0$

604 정답 2

주어진 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 x에 $-x$를 대입하면 되므로

$-ax+3y+2=0$ $\therefore y=\frac{a}{3}x-\frac{2}{3}$ ······ ㉠

직선 $3x+2y+1=0$을 표준형으로 고치면

$$y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

이고 ㉠과 수직이면 기울기의 곱은 -1이므로

$$\frac{a}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-1 \qquad \therefore a=2$$

605 정답 4

직선 $y=2x+k$를 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 y 대신 $-y$를 대입하면 되므로

$$-y=2x+k$$

$$\therefore y=-2x-k$$

원 $x^2+y^2+6x-4y+4=0$을 표준형으로 변형하면

$$(x+3)^2+(y-2)^2=9$$

직선 $y=-2x-k$가 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심인 점 $(-3,\ 2)$를 지나므로 $x=-3$, $y=2$를 대입하면

$$2=-2\times(-3)-k$$

$$\therefore k=4$$

606 정답 (0, −1)

점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$을 직선 $x+y-1=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 두면 선분 AP의 중점 $\left(\frac{2+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$가 직선 $x+y-1=0$ 위에 있어야 하므로

$$\frac{2+a}{2}+\frac{1+b}{2}-1=0$$

$$\therefore a+b+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 직선 AP는 직선 $x+y-1=0$과 수직이므로

$$\frac{b-1}{a-2}\cdot(-1)=-1$$

$$\therefore a-b-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=0,\ b=-1$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0,\ -1)$이다.

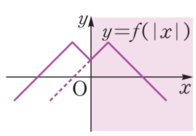
607 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 풀이 참조

(1) 방정식 $y=f(|x|)$에서 x 대신 $-x$를 대입하면

$$y=f(|-x|)$$

즉, $y=f(|x|)$로 자기 자신이 된다.

따라서 도형 $y=f(|x|)$는 y축에 대하여 대칭인 도형이므로 $x>0$인 범위 (제1, 4사분면)만을 그린 후 y축에 대하여 대칭시키면 된다.

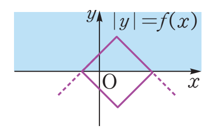


(2) 방정식 $|y|=f(x)$에서 y 대신 $-y$를 대입하면

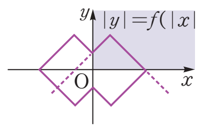
$$|-y|=f(x)$$

즉, $|y|=f(x)$로 자기 자신이 된다.

따라서 도형 $|y|=f(x)$는 x축에 대하여 대칭인 도형이므로 $y>0$인 범위 (제1, 2사분면)만을 그린 후 x축에 대하여 대칭시키면 된다.



(3) 방정식 $|y|=f(|x|)$에서 x 대신 $-x$를, y 대신 $-y$를, 둘 다 부호를 바꾸어서 대입해도 모두 $|y|=f(|x|)$로 자기 자신이 된다.



따라서 도형 $|y|=f(|x|)$는 x축, y축, 원점에 대하여 모두 대칭인 도형이므로 $x>0$, $y>0$인 범위 (제1사분면)만을 그린 후 x축, y축, 원점에 대하여 대칭시키면 된다.

연습문제 Ⅱ p.360

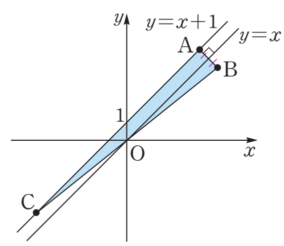
608 정답 A(4, 5)

양수 a에 대하여 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(a,\ a+1)$이라 두면 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$$\mathrm{B}(a+1,\ a)$$

점 B를 원점에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$$\mathrm{C}(-a-1,\ -a)$$



$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\{a-(-a-1)\}^2+\{a+1-(-a)\}^2}$$

$$=\sqrt{2}(2a+1)$$

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{(a+1)-a\}^2+\{a-(a+1)\}^2}$$

$$=\sqrt{2}$$

이때 점 C는 직선 $y=x+1$ 위의 점이고 선분 AB는 직선 $y=x$와 수직이므로 직선 $y=x+1$과도 수직이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}(2a+1)\cdot\sqrt{2}$$

$$=2a+1$$

$\triangle\mathrm{ABC}=9$에서

$$2a+1=9 \qquad \therefore a=4$$

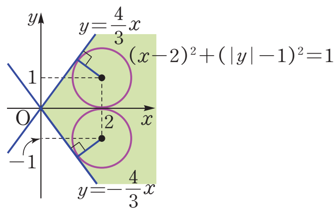
따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(4,\ 5)$이다.

609 정답 $-\frac{4}{3} \le m \le \frac{4}{3}$

방정식 $(x-2)^2+(|y|-1)^2=1$에 y 대신 $-y$를 대입해도 자기 자신이 된다.

따라서 도형 $(x-2)^2+(|y|-1)^2=1$은 x축에 대하여 대칭인 도형이다.

$y \ge 0$인 범위에서 $(x-2)^2+(|y|-1)^2=1$은 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$이므로 이 원 중에서 $y \ge 0$ (제1, 2사분면)에 있는 부분을 그린 후 x축에 대칭시키면 된다.



이때 $y \ge 0$인 범위에서 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$과 직선 $y=mx$가 서로 접하려면 원의 중심 $(2, 1)$과 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$(2m-1)^2=m^2+1,\ 3m^2-4m=0$$

$$m(3m-4)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{4}{3}$$

$$\therefore y=0(x\text{축}) \text{ 또는 } y=\frac{4}{3}x$$

따라서 위의 그림과 같이 색칠한 부분에 직선 $y=mx$가 있어야 하므로 구하는 실수 m의 값의 범위는

$$-\frac{4}{3} \le m \le \frac{4}{3}$$

610 정답 풀이 참조

$f(x, y)=0$

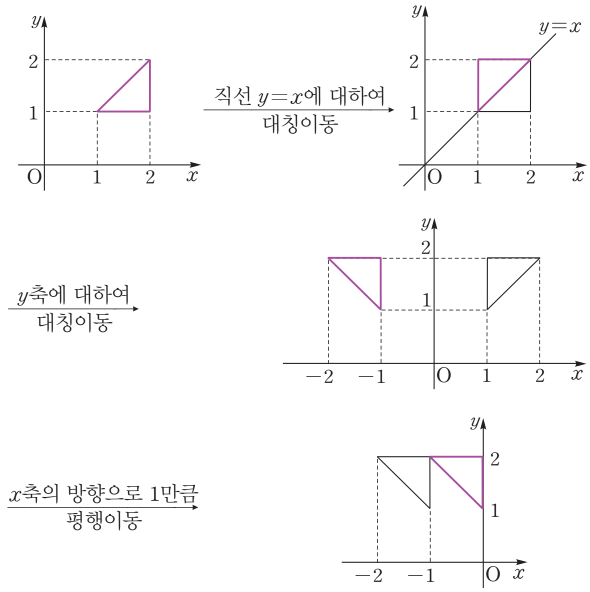
$\xrightarrow{y=x\text{ 대칭}} f(y, x)=0$ ← 먼저 x, y의 위치를 바꾼다.

$\xrightarrow{y\text{축 대칭}} f(y, -x)=0$ ← 다음 x, y의 부호를 정한다.

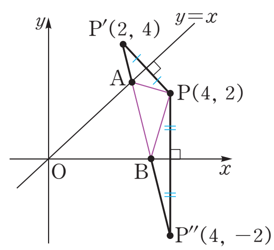
$\xrightarrow[\text{평행이동}]{x\text{축의 방향으로 1만큼}} f(y, -(x-1))=0$

$\therefore f(y, -x+1)=0$ ← 마지막에 평행이동한다.

이므로 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하고 다시 x축의 방향으로 1만큼 평행이동 시키면 된다.



611 정답 $2\sqrt{10}$ 서술형



점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면

P′(2, 4) … ①

점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P″이라 하면

P″(4, −2) … ②

$\overline{PA}=\overline{P'A}$, $\overline{PB}=\overline{P''B}$이므로 △PAB의 둘레의 길이의 최솟값은 선분 P′P″의 길이와 같으므로

$$\overline{P'P''}=\sqrt{(4-2)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{10}$$

따라서 △PAB의 둘레의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다. … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하기	30%
②	점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하기	30%
③	삼각형 PAB의 둘레의 길이의 최솟값을 구하기	40%