정답 및 해설

I. 집합과 명제

II. 함수와 그래프

III. 경우의 수

Ⅰ. 집합과 명제

1. 집합

확인문제 .... pp.11~20

001 정답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. '가깝다.'는 기준이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.

ㄴ. 반올림하면 5가 되는 수는 4.5 이상 5.5 미만의 수로 그 대상이 분명하므로 집합이다.

ㄷ. 대각선의 개수가 2인 다각형은 사각형이므로 주어진 모임은 사각형의 집합이다.

따라서 집합인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

002 정답 ④

① 1의 약수는 1의 1개이므로 $1 \notin A$

② 4의 약수는 1, 2, 4의 3개이므로 $4 \in A$

③ 9의 약수는 1, 3, 9의 3개이므로 $9 \in A$

④ 16의 약수는 1, 2, 4, 8, 16의 5개이므로 $16 \notin A$

⑤ 25의 약수는 1, 5, 25의 3개이므로 $25 \in A$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

003 정답 (1) $A=\{1, 2\}$ (2) $B=\{-1, 2\}$

(1) $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$에서

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{1, 2\}$

(2) $B=\{y \mid y=x^2-2,\ x^2-x-2=0\}$에서

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$y=x^2-2$에서 $x=-1$이면 $y=-1$, $x=2$이면 $y=2$

집합 B는 y의 집합이므로

$B=\{-1, 2\}$

004 정답 6

$C=\{x+y \mid x=1, 2$이고 $y=0, 1\}$에서

집합 C는 $x=1, 2$이고 $y=0, 1$일 때, $x+y$의 값을 원소로 가지는 집합이다.

$x=1$, $y=0$일 때, $x+y=1+0=1$

$x=1$, $y=1$일 때, $x+y=1+1=2$

$x=2$, $y=0$일 때, $x+y=2+0=2$

$x=2$, $y=1$일 때, $x+y=2+1=3$

$\therefore C=\{1, 2, 3\}$

따라서 모든 원소의 합은 $1+2+3=6$

005 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅂ

ㄱ. 집합 $A=\{\varnothing, a\}$의 원소는 $\varnothing$, a이므로 $\varnothing \in A$ (참)

ㄴ. $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$ (참)

ㄷ. $\varnothing \in A$이므로 $\{\varnothing\} \subset A$ (참)

ㄹ. $\{a\}$는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{a\} \notin A$ (거짓)

ㅁ. $\{a\} \notin A$이므로 $\{\{a\}\} \not\subset A$ (거짓)

ㅂ. $A \subset A$이므로 $\{\varnothing, a\} \subset A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅂ이다.

006 정답 6

$A \subset B$이고 $B \subset A$이어야 $A=B$이다.

즉, 집합 $A=\{a-2, a+2, 3\}$의 원소는 모두 집합 $B=\{1, 5, b\}$의 원소이어야 한다.

(i) $3 \in B$에서 $b=3$

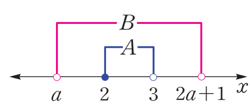
(ii) $a-2<a+2$이므로

$a-2=1$, $a+2=5$ $\quad \therefore a=3$

(i), (ii)에서 $a+b=3+3=6$

007 정답 $1 \le a < 2$

두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉, $A \subset B$이려면 $a<2$이고 $2a+1 \ge 3$이어야 한다.

$\therefore 1 \le a < 2$

008 정답 1

$A \subset B \subset C$이므로 $A \subset C$이다. 즉, 집합 A의 원소 1은 집합 C의 원소이어야 한다.

$\therefore c=1$

또한, $B \subset C$에서 집합 B의 원소 b는 집합 C의 원소이어야 하고, $b \ne -1$, $b \ne c$이므로 $b=0$

이때, $A=\{a, 1\}$, $B=\{-1, 0, 1\}$, $C=\{-1, 0, 1\}$이고

$A \subset B$에서 $a=-1$ 또는 $a=0$

따라서 $a+b+c$의 최댓값은 $0+0+1=1$

009 정답 (1) 511 (2) 31

(1) 집합 A의 원소의 개수는 9개이므로 집합 A의 모든 부분집합의 개수는 2^9(개)이다.

이 중에서 자기 자신을 제외하면 되므로

집합 A의 진부분집합의 개수는 $2^9-1=511$(개)

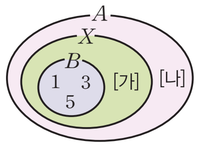
(2) 원소가 홀수로만 이루어진 집합 A의 부분집합의 개수는 집합 A에서 짝수인 원소를 제외한 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합에서 $\varnothing$을 제외한 것의 개수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는 $2^5-1=31$(개)

010 정답 8

$1 \in A$, $2 \in A$, $5 \notin A$에서 집합 A는 1, 2를 원소로 가지고 5를 원소로 가지지 않는 집합 S의 부분집합이다.
$S=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$에서 원소 1, 2, 5를 제외한 집합 $\{4,\ 10,\ 20\}$의 모든 부분집합에 1, 2를 넣으면 된다. 따라서 구하는 집합 A의 개수는 $2^{6-2-1}=2^3=8$(개)

011 정답 8

$B \subset X$이고 $X \subset A$이므로 벤 다이어그램을 그리면 오른쪽과 같다.

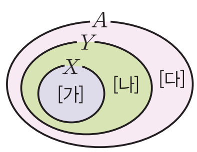


그림에서 원소 2가 들어갈 수 있는 영역의 수 ⇨ [가], [나]의 2가지
원소 4가 들어갈 수 있는 영역의 수 ⇨ [가], [나]의 2가지
원소 6이 들어갈 수 있는 영역의 수 ⇨ [가], [나]의 2가지
따라서 집합 X의 개수는 $2 \times 2 \times 2=8$(개)

다른 풀이
$X \subset A$이므로 X는 A의 부분집합이다.
또한, $B \subset X$이므로 X는 B의 원소 1, 3, 5를 반드시 원소로 가진다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^{6-3}=2^3=8$(개)

012 정답 81

$X \subset Y \subset A$이므로 벤 다이어그램을 그리면 오른쪽과 같다.



그림에서 원소 1이 들어갈 수 있는 영역의 수 ⇨ [가], [나], [다]의 3가지
원소 2가 들어갈 수 있는 영역의 수 ⇨ [가], [나], [다]의 3가지
원소 3이 들어갈 수 있는 영역의 수 ⇨ [가], [나], [다]의 3가지
원소 4가 들어갈 수 있는 영역의 수 ⇨ [가], [나], [다]의 3가지
따라서 집합 X, Y의 순서쌍 $(X,\ Y)$의 개수는
$3 \times 3 \times 3 \times 3=3^4=81$(개)

다른 풀이
(i) $Y=\varnothing$일 때, $X=\varnothing$: 1개
(ii) $Y=\{1\}$일 때, X의 개수는 $2^1=2$(개)
$Y=\{2\},\ \{3\},\ \{4\}$일 때도 마찬가지이므로 $4 \times 2=8$(개)
(iii) $Y=\{1,\ 2\}$일 때, X의 개수는 $2^2=4$(개)
$Y=\{1,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{3,\ 4\}$일 때도 마찬가지이므로 $6 \times 4=24$(개)
(iv) $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$일 때, X의 개수는 $2^3=8$(개)
$Y=\{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 4\},\ \{2,\ 3,\ 4\}$일 때도 마찬가지이므로
$4 \times 8=32$(개)
(v) $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$일 때, X의 개수는 $2^4=16$(개)
(i)~(v)에서 $1+8+24+32+16=81$(개)

연습문제 I pp.21~23

013 정답 8

ㄱ. 무한집합
ㄴ. 원소가 2 하나뿐인 집합, 즉 유한집합
ㄷ. 그 대상이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.
ㄹ. 무한집합
ㅁ. 공집합이므로 유한집합이다.
따라서 유한집합은 ㄴ, ㅁ의 2개, 무한집합은 ㄱ, ㄹ의 2개이므로 $a=2$, $b=2$
$\therefore a^2+b^2=2^2+2^2=8$

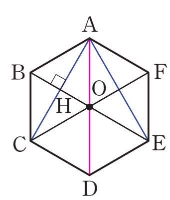
014 정답 0

$i^n+i^{n+1}=i^n(1+i)$이고 i^n은 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$일 때 $i,\ -1,\ -i,\ 1$이 반복되어 나타나므로 집합 A의 원소는
$i(1+i),\ -1\cdot(1+i),\ -i(1+i),\ 1\cdot(1+i)$,
즉 $i-1,\ -1-i,\ -i+1,\ 1+i$
가 반복되어 나타난다.
따라서 $A=\{i-1,\ -1-i,\ -i+1,\ 1+i\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은
$(i-1)+(-1-i)+(-i+1)+(1+i)=0$

다른 풀이
$n=1$이면 $z=i+i^2=i-1$
$n=2$이면 $z=i^2+i^3=-1-i$
$n=3$이면 $z=i^3+i^4=-i+1$
$n=4$이면 $z=i^4+i^5=1+i$
$n=5$이면 $z=i^5+i^6=i-1$
⋮
따라서 $A=\{i-1,\ -1-i,\ -i+1,\ 1+i\}$이므로 모든 원소의 합은 0이다.

015 정답 $X_6=\{\sqrt{3},\ 2\}$

$X_6=\{x \mid x$는 한 변의 길이가 1인 정육각형의 대각선의 길이$\}$이다.



그림에서 한 변의 길이가 1인 정육각형의 꼭짓점 A에서 그은 대각선은 $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{AD}$이고
$\overline{AD}=\overline{AO}+\overline{OD}=2$,
$\overline{AC}=2\overline{AH}=2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=\overline{AE}$
$\therefore X_6=\{\sqrt{3},\ 2\}$

개념 보충

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형은 한 변의 길이가 1인 정삼각형 6개로 나누어진다. 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선은 $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{AE}}$의 3개이고 이 중 $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AE}}$는 그 길이가 같다.
그림에서 $\overline{\mathrm{AH}}$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 높이이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, $\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{3}$임을 알 수 있다.

016 정답 4

$A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$이므로
오른쪽 표에서

$C=\{2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 C의 원소의 개수는 4이다.

+	1	2
1	2	3
2	3	4
3	4	5

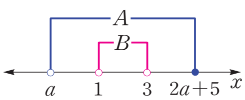
017 정답 12

원소 3과 9가 속하는 부분집합이 있으므로 집합 A에는 3과 9가 속한다.

$\therefore a+b=3+9=12$

018 정답 0

두 집합 A, B에 대하여 $B\subset A$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉, $B\subset A$이려면 $a\le1$이고 $2a+5\ge3$이어야 한다.
$2a+5\ge3$에서

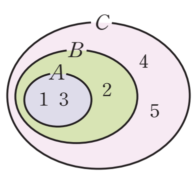
$2a\ge-2 \qquad \therefore a\ge-1$

따라서 $-1\le a\le1$을 만족하는 정수 a는 -1, 0, 1이다.

$\therefore -1+0+1=0$

019 정답 ⑤

① $A\subset B\subset C$이므로 $A\subset C$
따라서 $1\in A$이면 $1\in C$이다.
② 오른쪽 벤 다이어그램과 같이 $2\in B$라고 해서 반드시 $2\in A$라고 할 수는 없다.
③ 오른쪽 벤 다이어그램과 같이 $3\in A$가 될 수도 있다.



④ 오른쪽 벤 다이어그램과 같이 $4\notin B$일 수도 있다.
⑤ $5\notin B$일 때 $A\subset B$이므로 반드시 $5\notin A$이다.
따라서 반드시 성립하는 것은 ⑤이다.

020 정답 ①, ②, ④

① $\{1, 2\}$가 집합 A의 원소이므로 $\{1, 2\}\in A$ (참)
② $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$ (참)
③ 2는 집합 A의 원소이므로 $2\in A$ (거짓)
④ $1\in A$, $2\in A$이므로 $\{1, 2\}\subset A$ (참)
⑤ $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ①, ②, ④이다.

021 정답 ④

④ $A=B$이면 $A\subset B$이지만 $n(A)=n(B)$이다. (거짓)
⑤ 집합 A의 진부분집합은 A의 부분집합 중 A를 제외한 부분집합이다. (참)
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

022 정답 2

$A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$이다.
즉, 집합 $A=\{a^2-1, 2a-3\}$의 원소는 모두 집합 $B=\{a-1, a+1\}$의 원소이어야 한다.
(i) $a^2-1=a-1$일 때,

$a^2-a=0$
$a(a-1)=0$
$\therefore a=0$ 또는 $a=1$

ⓘ $a=0$이면 $A=\{-1, -3\}$, $B=\{-1, 1\}$이 되어 $A\neq B$
ⓘⓘ $a=1$이면 $A=\{0, -1\}$, $B=\{0, 2\}$가 되어 $A\neq B$

(ii) $a^2-1=a+1$일 때,

$a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

ⓘ $a=-1$이면 $A=\{0, -5\}$, $B=\{-2, 0\}$이 되어 $A\neq B$
ⓘⓘ $a=2$이면 $A=\{3, 1\}$, $B=\{1, 3\}$이 되어 $A=B$가 성립한다.

(i), (ii)에서 $a=2$

023 정답 1

두 집합 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{ab, bc, ca\}$에 대하여 $A=B$에서
$abc=(ab)(bc)(ca)$이므로

$abc=(abc)^2$

이때, $abc\neq0$이므로
$abc=1$

024 정답 (1) ±4 (2) 3

(1) $A=\{x\,|\,x^2+ax+4=0,\ x\in R\}$에서 $x\in R$이므로
집합 A는 방정식 $x^2+ax+4=0$의 실근을 원소로 가지는 집합이다.
이때, $n(A)=1$이려면 이차방정식 $x^2+ax+4=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때

$$D=a^2-16=0 \qquad \therefore a=\pm4$$

(2) $A=\varnothing$이 되려면 방정식 $x^2+ax+4=0$이 실근을 가지지 않아야 하므로 판별식을 D라 할 때

$$D=a^2-16<0,\ (a+4)(a-4)<0$$
$$\therefore -4<a<4$$

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다.

025 정답 (1) 4 (2) 8

(1) 집합 $\{8, 12\}$의 부분집합에 원소 1만 추가하면 되므로
그 개수는 $2^{5-2-1}=2^2=4$(개)

(2) $\{1, 2, 4, 8, 12\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$에서
집합 X는 $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$의 부분집합 중 1, 2, 4, 8, 12를 반드시 원소로 가지는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^{8-5}=2^3=8$(개)

026 정답 48

(i) 2만 포함하는 경우 : 집합 $\{1, 4, 5, 6\}$의 모든 부분집합에 2를 넣으면 된다.

$$\therefore 2^4=16(\text{개})$$

(ii) 3만 포함하는 경우 : 집합 $\{1, 4, 5, 6\}$의 모든 부분집합에 3을 넣으면 된다.

$$\therefore 2^4=16(\text{개})$$

(iii) 2와 3을 모두 포함하는 경우 : 집합 $\{1, 4, 5, 6\}$의 부분집합에 2와 3을 넣으면 된다.

$$\therefore 2^4=16(\text{개})$$

(i), (ii), (iii)에서 $16+16+16=48$(개)

027 정답 15

갑, 을이 가지고 있는 볼펜의 색상의 집합을 각각 A, B라고 하자.
을이 가지고 있는 색상은 갑이 모두 가지고 있으므로
$B\subset A$, 즉 집합 B는 집합 A의 부분집합이다.
집합 $A=\{$검정, 빨강, 파랑, 초록$\}$의 원소는 4개이므로 집합 A의 부분집합의 개수는

$$2^4=16(\text{개})$$

이때, 집합 B는 공집합이 아니므로

(을이 가지고 있는 볼펜의 색상의 경우의 수)
$=16-1=15$

연습문제 Ⅱ p.24

028 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

$A=\{1, 2, \{1, 2\}\}$이므로 A의 부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{\{1, 2\}\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, \{1, 2\}\}$, $\{2, \{1, 2\}\}$, A
이므로

$$2^A=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2, \{1, 2\}\}, A\}$$

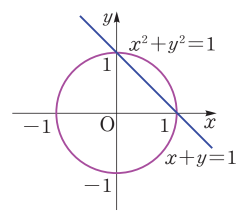
즉, ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ은 옳다.
한편, $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 ㄹ도 옳다.
그런데 ㅂ에서 A는 2^A의 부분집합이 아니라 2^A의 원소이므로 옳지 않다.

개념 보충

집합 $2^A=\{X\,|\,X\subset A\}$를 집합 A의 멱집합이라고 한다.
일반적으로 다음이 성립한다.
$S\subset A$이면 $S\in 2^A$이다.

029 정답 $P=\{(1, 0), (0, 1)\}$

$P=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2=1,\ x+y=1,\ x, y$는 실수$\}$에서
집합 P는 $x^2+y^2=1$을 만족하고 동시에 $x+y=1$을 만족하는 점 (x, y)의 집합이다.
즉, 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $x+y=1$의 교점의 집합이다.

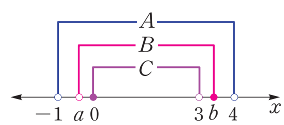


그림에서 교점의 좌표는

$(1, 0)$, $(0, 1)$
$\therefore P=\{(1, 0), (0, 1)\}$

030 정답 10

$C\subset B\subset A$가 성립하도록 세 집합을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



(i) $-1\le a<0$이어야 하므로 $a=-1$
(ii) $3\le b<4$이어야 하므로 $b=3$

$$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+3^2=10$$

031 정답 56 서술형

집합 A를 원소나열법으로 나타내면

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ … ①

집합 A의 부분집합 중 홀수인 원소를 하나도 가지지 않는 부분집합은 짝수인 원소로만 이루어진 부분집합, 즉 집합 $\{6, 12, 18\}$의 부분집합이다. … ②

구하는 부분집합의 개수는 집합 A의 모든 부분집합 중에서 집합 $\{6, 12, 18\}$의 부분집합을 제외하면 된다.

$\therefore 2^6-2^3=64-8=56$(개) … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	집합 A를 원소나열법으로 나타내기	20%
②	홀수인 원소를 하나도 가지지 않는 부분집합은 짝수인 원소로만 이루어져 있음을 알기	40%
③	홀수인 원소를 1개 이상 가지는 부분집합의 개수 구하기	40%

개념 보충

집합 A의 부분집합 중 홀수인 원소를 1개 이상 가지는 부분집합은 적어도 1개의 홀수를 가지는 부분집합을 뜻한다.
따라서 A의 모든 부분집합에서 공집합과 원소가 모두 짝수인 부분집합을 제외하면 된다.

2. 집합의 연산

확인문제 pp.28~35

032 정답 (1) $\{1, 3, 9\}$ (2) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

(1) $B\cup C=\{1, 2, 4, 8\}\cup\{3, 6, 9\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

$\therefore A\cap(B\cup C)$

$=\{1, 3, 5, 7, 9\}\cap\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

$=\{1, 3, 9\}$

(2) $B\cap C=\{1, 2, 4, 8\}\cap\{3, 6, 9\}=\varnothing$이므로

$A\cup(B\cap C)=A\cup\varnothing=A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

033 정답 15

세 집합을 원소나열법으로 나타내면

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{3, 6, 9\}$, $C=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

이므로

$A\cup B=\{2, 4, 6, 8, 10\}\cup\{3, 6, 9\}$

$=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$\therefore (A\cup B)\cap C$

$=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}\cap\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

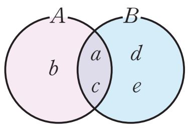
$=\{2, 3, 4, 6\}$

따라서 집합 $(A\cup B)\cap C$의 모든 원소의 합은

$2+3+4+6=15$

034 정답 $\{a, c, d, e\}$

다음 순서로 벤 다이어그램을 완성해 간다.



(i) $A\cap B=\{a, c\}$이므로 붉은색 영역에 a, c를 써넣는다.

(ii) $A=\{a, b, c\}$이므로 연두색 영역에 a, c를 제외한 나머지 b를 써넣는다.

(iii) $A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$이므로 집합 A의 원소를 제외한 나머지 원소 d, e를 파란색 영역에 써넣는다.

따라서 $B=\{a, c, d, e\}$이다.

035 정답 $\{3, 4\}$

$A=\{3, a-1, a+1\}$, $B=\{1, a, a+1\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$에서 $a\in B$이므로 $a\in A\cup B$이다.

따라서 a는 B의 원소 1을 제외한 2, 3, 4 중 하나이다.

(i) $a=2$일 때, 집합 A의 원소 $a+1$과 3이 중복되어 성립하지 않는다.

(ii) $a=3$일 때, $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 4\}$

$\therefore A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$, $A\cap B=\{3, 4\}$

(iii) $a=4$일 때, 집합 A의 원소 $a-1$과 3이 중복되어 성립하지 않는다.

따라서 (ii)에 의하여 $A\cap B=\{3, 4\}$

036 정답 {3, 5}

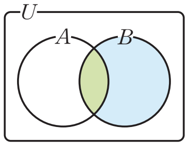
$A^C=\{2,\ 4,\ 6\}$에서 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$

$B^C=\{2,\ 3,\ 5\}$에서 $B=\{1,\ 4,\ 6\}$

$\therefore\ A-B=\{3,\ 5\}$

037 정답 {1, 2, 3, 4, 5}

오른쪽 벤 다이어그램에서



$(B-A)\cup(A\cap B)=B$이고,

$B\cap A^C=B-A$이므로

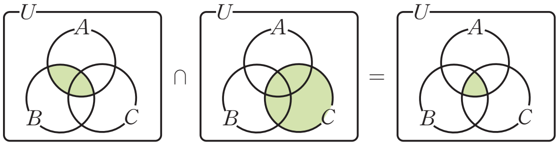
$B=(B\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$=\{2,\ 4,\ 5\}\cup\{1,\ 3\}$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

038 정답 $(A\cap B)\cap C$

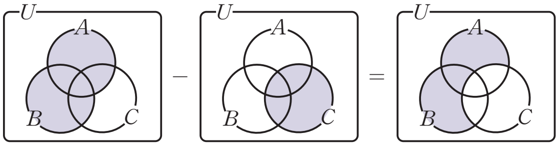
여러 가지 방법으로 나타낼 수 있으며, 그 중 하나를 들어 보면



⇦ $(A\cap B)$ $\cap$ C

039 정답 $(A\cup B)-C$

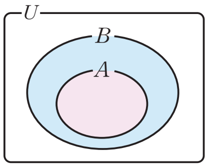
여러 가지 방법으로 나타낼 수 있으며, 그 중 하나를 들어 보면



⇦ $(A\cup B)$ $-$ C

040 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$A\subset B$이면 오른쪽 그림에서



ㄱ. $A\cap B=A$ (참)

ㄴ. $A\cup B=B$ (참)

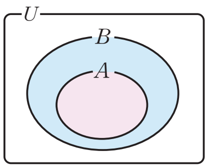
ㄷ. $A-B=\varnothing$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

041 정답 ㄱ, ㄷ

$A-B=\varnothing$이면 $A\subset B$이므로

오른쪽 그림에서



ㄱ. $A\cup B=B$ (참)

ㄴ. $A^C\not\subset B^C$ (거짓) ($B^C\subset A^C$이다.)

ㄷ. $A\cap B=A$이므로

$A-(A\cap B)=A-A=\varnothing$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

042 정답 4

$A\cap X=X$에서 $X\subset A$,

$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$이므로

$(A-B)\subset X\subset A$

이때, $A-B=\{1,\ 2,\ 3\}$이므로 집합 X는 1, 2, 3을 원소로 가지는 A의 부분집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^{5-3}=2^2=4$(개)

043 정답 8

$(A\cap X)\subset X$이므로 $(A\cap X)\cup X=X$이다.

그러므로 $(A\cap X)\cup X\subset A$에서 $X\subset A$

한편, $B\cap X=B$에서 $B\subset X$

$\therefore\ B\subset X\subset A$

즉, 집합 X는 1, 3, 5를 원소로 가지는 A의 부분집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^{6-3}=2^3=8$(개)

연습문제 I ······ pp.36~38

044 정답 (1) {3, 4, 6, 9, 12} (2) ∅

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12\}$이므로 세 집합 A, B, C를 원소나열법으로 나타내면

$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$, $B=\{4,\ 8,\ 12\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이다.

(1) $B\cap C=\{4,\ 12\}$이므로

$A\cup(B\cap C)=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}\cup\{4,\ 12\}$

$=\{3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12\}$

(2) $B-C=B-(B\cap C)=\{8\}$이므로

$A\cap(B-C)=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}\cap\{8\}=\varnothing$

045 정답 2

$A\cup B=B$이면 $A\subset B$이다.

이때, $2\in A$에서 $2\in B$이므로 $x^2-x=2$이어야 한다. 즉,

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

(i) $x=-1$일 때

$x^2+x=(-1)^2+(-1)=0$이므로 $A=\{0,\ 2\}$

이때, $A\not\subset B$이므로 성립하지 않는다.

(ii) $x=2$일 때

$x^2+x=2^2+2=6$이므로 $A=\{2,\ 6\}$

따라서 $A\subset B$를 만족한다.

(i), (ii)에 의하여 실수 x의 값은 2이다.

046 정답 3

$A\cap B=A$에서 $A\subset B$이므로 집합 A의 원소 x^2+1, 2는 모두 집합 B의 원소이다.

즉, $x^2+1\in B$, $2\in B$이다.

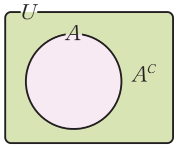
그런데 $x^2+10\neq 2$이므로 $x-1=2$

$\therefore x=3$

이때, $A=\{10, 2\}$, $B=\{2, 19, 10\}$이므로 조건을 만족한다.

047 정답 ④

오른쪽 벤 다이어그램에서



① $A\cup A^C=U$ (참)

② $U-A^C=A$ (참)

③ $A\subset(A\cup B)$이므로

$A\cap(A\cup B)=A$ (참)

④ $(A\cap B)\subset B$이므로 $B\cup(A\cap B)=B$ (거짓)

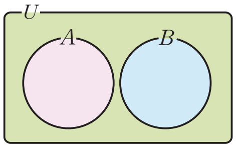
⑤ $A\cap B=B$이면 $B\subset A$이다.

$\therefore A\cup B=A$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

048 정답 ⑤

$A-B=A$이면 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



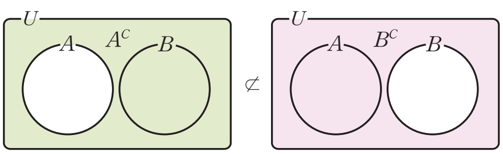
① $A\cap B=\varnothing$ (참)

② $B-A=B$ (참)

③ $A\subset B^C$ (참)

④ $B\subset A^C$ (참)

⑤ 다음 그림에서 $A^C\not\subset B^C$

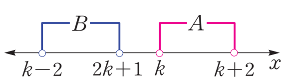


따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

049 정답 −1

두 집합 A, B가 서로소가 되려면 $A\cap B=\varnothing$이어야 한다.

$k-2<k$이므로 두 집합을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



즉, $2k+1\leq k$이어야 하므로 $k\leq -1$ …… ㉠

또, $k-2<x<2k+1$에서 $k-2<2k+1$

$\therefore k>-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-3<k\leq -1$

따라서 k의 최댓값은 -1이다.

050 정답 ㄱ

ㄱ. A와 B가 서로소이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$A\cap(A\cap B)=A\cap\varnothing=\varnothing$

따라서 A와 $A\cap B$도 서로소이다. (참)

ㄴ. $A\cap B=\varnothing$이면 $(A\cap B)\cap(A\cup B)=\varnothing\cap(A\cup B)=\varnothing$이므로 $A\cap B$와 $A\cup B$도 서로소이다. (거짓)

ㄷ. $A=\varnothing$이면 $A\subset B$이지만 $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다. (거짓)

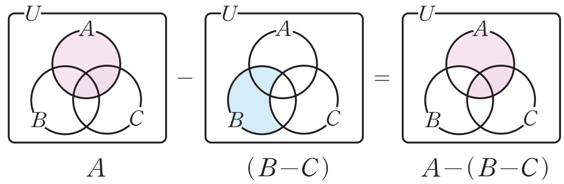
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

051 정답 풀이 참조

$A\cap(B\cap C^C)^C=A-(B\cap C^C)$

$=A-(B-C)$

이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



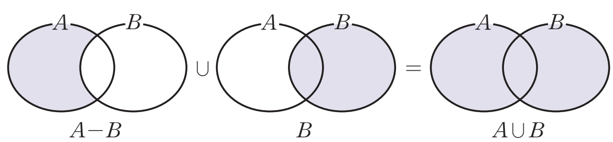
052 정답 ④

벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합은 B와 $A\cap C$를 합한 것이다.

$\therefore (A\cap C)\cup B$

053 정답 12

다음 벤 다이어그램에서 $(A-B)\cup B=A\cup B$이다.



즉, $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$이다.

$\therefore B=A\cap B=\{2, 4, 6\}$

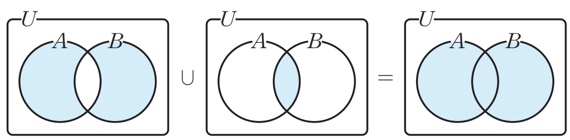
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 $2+4+6=12$

054 정답 15

$(A\cup B)\cap(A\cap B)^C=(A\cup B)-(A\cap B)$이므로

다음 벤 다이어그램에서

$\{(A\cup B)-(A\cap B)\}\cup(A\cap B)=A\cup B$



$\therefore A\cup B=\{1, 3, 5\}\cup\{6\}=\{1, 3, 5, 6\}$

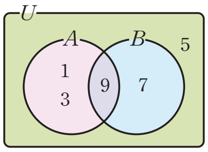
따라서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$1+3+5+6=15$

055 정답 {1, 3, 9}

$A\cap B^C=A-B=\{1,\ 3\}$, $B-A=\{7\}$,
$(A\cap B)^C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에서
$A\cap B=\{9\}$이므로
오른쪽 벤 다이어그램에서

$A=\{1,\ 3,\ 9\}$



056 정답 (1) 8 (2) 24

(1) $\{3,\ 4\}\cap X=\varnothing$이므로 집합 X는 3과 4를 모두 원소로 가지지 않는 집합 A의 부분집합이다.
$n(A)=5$이므로 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$(개)

(2) 집합 A의 부분집합 중에서 $\{3,\ 4\}\cap X=\varnothing$인 부분집합을 제외하면 되므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^5-2^3=32-8=24$(개)

057 정답 ③

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$이므로
$A\cap B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}=\{x\,|\,x$는 8의 약수$\}$

$\therefore p=8$

058 정답 32

$(A\cap B)\cup X=X$에서 $(A\cap B)\subset X$,
$(A\cup B)\cap X=X$에서 $X\subset(A\cup B)$

$\therefore (A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$

이때, $A\cap B=\{2,\ 4\}$, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$이므로 집합 X는 2, 4를 반드시 원소로 가지는 집합 $A\cup B$의 부분집합이다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^{7-2}=2^5=32$(개)

개념 보충

집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ y,\ a_n\}$의 부분집합의 개수

① 집합 A의 모든 부분집합의 개수 : 2^n(개)
② 집합 A의 모든 진부분집합의 개수 : 2^n-1(개)
③ 집합 A의 원소 중 특정한 원소 m개를 반드시 원소로 가지는 부분집합의 개수 : 2^{n-m}(개)
④ 집합 A의 원소 중 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 가지지 않는 부분집합의 개수 : 2^{n-k}(개)
⑤ 집합 A의 원소 중 특정한 원소 m개를 반드시 원소로 가지고, 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 가지지 않는 부분집합의 개수 : 2^{n-m-k}(개)

연습문제 II

p.39

059 정답 ③

$A-B=A-(A\cap B)=\{a,\ b,\ c\}$이므로

$A\cap B=\{d,\ e\}$

또, $A-C=A-(A\cap C)=\{a,\ b,\ d\}$이므로

$A\cap C=\{c,\ e\}$

집합 $C-B$의 원소는 집합 C에는 속하지만 집합 B에는 속하지 않으므로 $c\in(C-B)$이다.

060 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$(A-B)\cup(B\cap C)=\varnothing$이므로 $A-B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$이다.
ㄱ. $A-B=\varnothing$, 즉 $A\subset B$이므로 $A\cup B=B$ (참)
ㄴ. $B\cap C=\varnothing$이므로 $B-C=B$ (참)
ㄷ. $A-B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$이므로 $A\subset B$이고 $B\cap C=\varnothing$이므로 $A\cap C=\varnothing$ (참)
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

061 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$
$=(B-A)\cup(A-B)=B\triangle A$ (참)
ㄴ. $A\triangle\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A$ (참)
ㄷ. $A\triangle A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$ (참)
ㄹ. $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$이므로
$A\triangle A^C=(A\cup A^C)-(A\cap A^C)=U-\varnothing=U$ (참)
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ 모두 옳다.

062 정답 16 서술형

구하는 집합을 X라고 하면

$X\subset A$이고 $X\cap B=\varnothing$ … ①

즉, 집합 X는 집합 B의 원소인 3, 6을 원소로 가지지 않는 A의 부분집합이다. … ②
따라서 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$(개) … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	서로소인 집합의 뜻 알기	30 %
②	구하는 집합의 원소가 될 수 없는 것 파악하기	40 %
③	조건을 만족하는 집합의 개수 구하기	30 %

3. 집합의 연산법칙

확인문제 pp.44~51

063 정답 (i) $A\cap B$ (ii) $A\cap B\cap C$ (iii) $A\cap(B\cup C)$ (iv) $A-(B\cup C)$

다음과 같이 나타낼 수 있다.

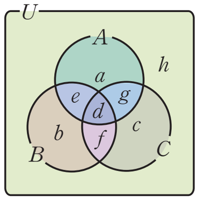
(⇦ 이외에 여러 가지 표현이 가능하다.)

(i) $\{d,\ e\}=A\cap B$

(ii) $\{d\}=A\cap B\cap C$

(iii) $\{d,\ e,\ g\}=A\cap(B\cup C)$

(iv) $\{a\}=A-(B\cup C)$



064 정답 {6, 7, 9}

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$이고

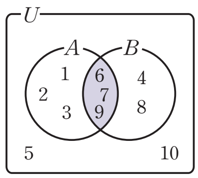
$A\cap B^C=A-B=\{1,\ 2,\ 3\}$

$A^C\cap B=B-A=\{4,\ 8\}$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{5,\ 10\}$

따라서 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore\ A\cap B=\{6,\ 7,\ 9\}$



065 정답 A

두 집합의 연산이므로 벤 다이어그램을 오른쪽과 같이 두면

$A\cup B=\{a,\ b,\ c\}$,

$A\cup B^C=\{a,\ c,\ d\}$이므로

$(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$

$=\{a,\ b,\ c\}\cap\{a,\ c,\ d\}=\{a,\ c\}$

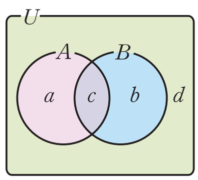
또, $A\cup B=\{a,\ b,\ c\}$이므로

$\{(A\cup B)\cap(A\cup B^C)\}\cap(A\cup B)$

$=\{a,\ c\}\cap\{a,\ b,\ c\}=\{a,\ c\}$

이때, $\{a,\ c\}=A$이므로

$\{(A\cup B)\cap(A\cup B^C)\}\cap(A\cup B)=A$



066 정답 $B\cap C$

세 집합의 연산이므로 벤 다이어그램을 오른쪽과 같이 두면

$A\cup(B\cap C)=\{a,\ d,\ e,\ f,\ g\}$,

$A^C\cup(B\cap C)=\{b,\ c,\ d,\ f,\ h\}$

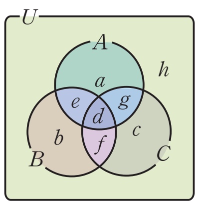
이므로

$\{A\cup(B\cap C)\}\cap\{A^C\cup(B\cap C)\}$

$=\{a,\ d,\ e,\ f,\ g\}\cap\{b,\ c,\ d,\ f,\ h\}=\{d,\ f\}$

이때, $\{d,\ f\}=B\cap C$이므로

$\{A\cup(B\cap C)\}\cap\{A^C\cup(B\cap C)\}=B\cap C$



067 정답 ⑤

$(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cup B)$

$=\varnothing$ ← (가)

$(A\cup B)\cup(A^C\cap B^C)=(A\cup B)\cup(A\cup B)^C$

$=U$ ← (나)

따라서 ⑤이다.

068 정답 (가) $A^C\cap B^C$, (나) $\varnothing$, (다) $A\cup B$

$A^C\cap(A\cup B^C)=(A^C\cap A)\cup(A^C\cap B^C)$

$=\varnothing\cup(A^C\cap B^C)$ ← $A^C\cap A=\varnothing$

$=A^C\cap B^C$

$=(A\cup B)^C$ ← 드 모르간의 법칙

069 정답 (1) 15 (2) 15

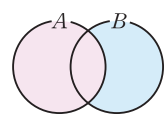
오른쪽 벤 다이어그램에서

(1) $n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$

$=40-25=15$

(2) $n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)$

$=30-15=15$

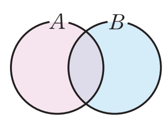


070 정답 24

오른쪽 벤 다이어그램에서

$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)$

$=16-9=7$



이고, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cup B)=16+15-7=24$

다른 풀이

벤 다이어그램에서

$n(A\cup B)=n(B)+n(A-B)$

$=15+9=24$

071 정답 50

100 이하의 자연수 중에서 자연수 k의 배수의 개수는 100을 k로 나눈 몫과 같으므로

$n(A_3)=33,\ n(A_4)=25$

또, $A_3\cap A_4=A_{12}$이므로

$n(A_3\cap A_4)=n(A_{12})=8$

$\therefore\ n(A_3\cup A_4)=n(A_3)+n(A_4)-n(A_3\cap A_4)$

$=33+25-8=50$

072 정답 20

1에서 240까지의 자연수 전체의 집합을 U, U의 부분집합 중 6의 배수의 집합을 A, 4의 배수의 집합을 B라고 하면,

$n(U)=240$, $n(A)=40$, $n(B)=60$

또, 집합 $A\cap B$는 6의 배수이고 4의 배수인 수, 즉 12의 배수인 수의 집합이므로

$n(A\cap B)=20$

6의 배수이지만 4의 배수가 아닌 수의 개수는 집합 $A\cap B^C$의 원소의 개수이므로

$$n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$
$$=40-20=20(\text{개})$$

073 정답 8

학급 전체 학생의 집합을 U, 남자 형제가 있는 학생의 집합을 A, 여자 형제가 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=30$, $n(A)=15$, $n(B)=13$

남자 형제와 여자 형제가 모두 있는 학생의 수는 집합 $A\cap B$의 원소의 개수와 같으므로

$n(A\cap B)=6$

또, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cup B)=15+13-6=22$

이때, 남자 형제와 여자 형제가 모두 없는 학생의 수는 집합 $A^C\cap B^C$의 원소의 개수와 같으므로

$$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=30-22=8$$

따라서 남자 형제와 여자 형제가 모두 없는 학생의 수는 8명이다.

074 정답 150

조사에 응한 소비자 300명 전체의 집합을 U, A제품을 선호하는 사람의 집합을 A, B제품을 선호하는 사람의 집합을 B라 하면

$n(U)=300$, $n(A)=160$, $n(A\cap B)=50$

두 가지 제품을 모두 선호하지 않는 사람의 수는 집합 $A^C\cap B^C$의 원소의 개수와 같으므로

$n(A^C\cap B^C)=40$

이때, $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$40=300-n(A\cup B)$

$\therefore\ n(A\cup B)=260$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$260=160+n(B)-50$

$\therefore\ n(B)=150$

따라서 B제품을 선호하는 사람의 수는 150명이다.

연습문제 I pp.52~54

075 정답 (1) $\{4, 8, 12\}$ (2) $\{1, 2\}$

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$이므로 A, B, C를 원소나열법으로 나타내면

$A=\{3, 6, 9, 12\}$, $B=\{4, 8, 12\}$, $C=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

이다.

(1) $B\cap(A^C\cup C)=(B\cap A^C)\cup(B\cap C)$
$=(B-A)\cup(B\cap C)$

$B-A=\{4, 8\}$, $B\cap C=\{4, 12\}$이므로

$B\cap(A^C\cup C)=(B-A)\cup(B\cap C)=\{4, 8, 12\}$

(2) $(A^C\cap B^C)\cap C=C\cap(A^C\cap B^C)=C\cap(A\cup B)^C$
$=C-(A\cup B)$

$A\cup B=\{3, 4, 6, 8, 9, 12\}$이므로

$(A^C\cap B^C)\cap C=C-(A\cup B)=\{1, 2\}$

076 정답 ③

$$(A\cup B^C)\cap B=(A\cap B)\cup(B^C\cap B)$$
$$=(A\cap B)\cup\varnothing$$
$$=A\cap B$$

에서 $A\cap B=B$이므로 $B\subset A$

$\therefore\ A\cup B=A\ (\because\ B\subset A)$

077 정답 $\{1, 5, 7\}$

$A^C-B=A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이고,

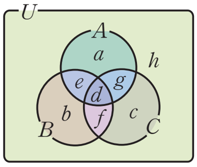
$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$A\cup B=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$이므로

$A^C-B=(A\cup B)^C=\{1, 5, 7\}$

078 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

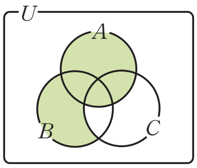
세 집합의 연산이므로 벤 다이어그램을 다음과 같이 두자.



(1) $B\cap C^C=B-C=\{b, e\}$이므로

$A\cup(B\cap C^C)=A\cup(B-C)$
$=\{a, d, e, g\}\cup\{b, e\}$
$=\{a, b, d, e, g\}$

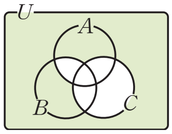
따라서 $A\cup(B\cap C^C)$는 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분과 같다.



(2) $A\cap B=\{d,\ e\}$, $C^C=\{a,\ b,\ e,\ h\}$이므로

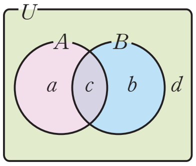
$$\begin{aligned}(A\cap B)^C\cap C^C&=C^C\cap(A\cap B)^C\\&=C^C-(A\cap B)\\&=\{a,\ b,\ e,\ h\}-\{d,\ e\}\\&=\{a,\ b,\ h\}\end{aligned}$$

따라서 $(A\cap B)^C\cap C^C$는 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분과 같다.



079 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

두 집합의 연산이므로 벤 다이어그램을 다음과 같이 두자.



ㄱ. $A^C=\{b,\ d\}$, $B^C=\{a,\ d\}$이므로

$A^C-B^C=\{b\}=B-A$ (참)

ㄴ. $A\cup B^C=\{a,\ c,\ d\}$, $A\cap B^C=A-B=\{a\}$이므로

$A\cap(A\cup B^C)=\{a,\ c\}\cap\{a,\ c,\ d\}=\{a,\ c\}$

$A\cup(A\cap B^C)=\{a,\ c\}\cup\{a\}=\{a,\ c\}$

$\therefore A\cap(A\cup B^C)=A\cup(A\cap B^C)$ (참)

ㄷ. $A-B=\{a\}$이므로

$A-(A-B)=\{a,\ c\}-\{a\}=\{c\}=A\cap B$

$B-A=\{b\}$이므로

$B-(B-A)=\{b,\ c\}-\{b\}=\{c\}=A\cap B$

$\therefore A-(A-B)=B-(B-A)$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

다른 풀이

ㄱ. $A^C-B^C=A^C\cap(B^C)^C=A^C\cap B=B\cap A^C$

$=B-A$ (참)

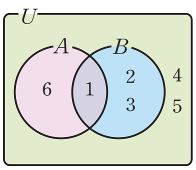
080 정답 {1, 6}

$A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=\{1\}$,

$(A\cup B^C)^C=A^C\cap B=B\cap A^C=B-A=\{2,\ 3\}$,

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{4,\ 5\}$

이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore A=\{1,\ 6\}$

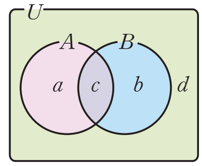
081 정답 (가) B, (나) $\varnothing$

$$\begin{aligned}A-(A-B)&=A\cap(A-B)^C &&\text{차집합의 성질}\\&=A\cap(A\cap B^C)^C &&\text{드 모르간의 법칙}\\&=A\cap(A^C\cup \underset{(가)}{B}) &&\text{분배법칙}\\&=(A\cap A^C)\cup(A\cap B) &&\text{교집합의 성질 }A\cap A^C=\varnothing\\&=\underset{(나)}{\varnothing}\cup(A\cap B) &&\text{합집합의 성질 }A\cup\varnothing=A\\&=A\cap B\end{aligned}$$

따라서 (가) B, (나) $\varnothing$이다.

082 정답 ④

두 집합의 연산이므로 벤 다이어그램을 오른쪽과 같이 두면



$(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=\{a,\ b\}$

이므로

$$\begin{aligned}A\cup\{(A\cup B)\cap(A\cap B)^C\}&=\{a,\ c\}\cup\{a,\ b\}\\&=\{a,\ b,\ c\}\end{aligned}$$

이때, $\{a,\ b,\ c\}=A\cup B$이므로

$A\cup\{(A\cup B)\cap(A\cap B)^C\}=A\cup B$

주어진 조건 $A\cup\{(A\cup B)\cap(A\cap B)^C\}=A$에서

$A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

$\therefore A\cap B=B$ ($\because B\subset A$)

083 정답 39

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$53=35+32-n(A\cap B)$

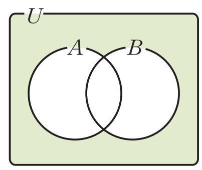
$\therefore n(A\cap B)=14$

$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$이므로

$$\begin{aligned}n((A-B)\cup(B-A))&=n((A\cup B)-(A\cap B))\\&=n(A\cup B)-n(A\cap B)\\&=53-14=39\end{aligned}$$

084 정답 8

$$\begin{aligned}n(A^C\cap B^C)&=n((A\cup B)^C)\\&=n(U)-n(A\cup B)\end{aligned}$$



이므로

$10=40-n(A\cup B)$

$\therefore n(A\cup B)=30$

한편, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$$\begin{aligned}n(A\cap B)&=n(A)+n(B)-n(A\cup B)\\&=16+22-30=8\end{aligned}$$

085 정답 ①

수하물은 폭이 60 cm 이하, 높이는 60 cm 이하이고, 길이는 60 cm 이하인 화물이므로 집합 A의 원소이고 집합 B의 원소이고 집합 C의 원소이어야 한다.
따라서 (가)에 알맞은 것은 $A\cap B\cap C$이다.
한편, 폭이 60 cm 이하이지만 수하물이 될 수 없는 화물은 높이가 60 cm보다 크거나 길이가 60 cm보다 큰 화물이므로 집합 A의 원소이지만 B^C의 원소이거나 C^C의 원소인 경우이므로 (나)에 알맞은 것은 $A\cap(B^C\cup C^C)=A\cap(B\cap C)^C$이다.

086 정답 53

$15=3\times5$이므로 15와 서로소인 수는 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아니어야 한다.
여기서 1부터 100까지의 자연수 전체의 집합을 U, U의 부분집합 중 3의 배수인 수의 집합을 A, 5의 배수인 수의 집합을 B라고 하면

$n(U)=100,\ n(A)=33,\ n(B)=20$

이때, 집합 $A\cap B$는 15의 배수인 수의 집합이므로

$n(A\cap B)=6$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cup B)=33+20-6=47$

3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수의 개수는 집합 $A^C\cap B^C$의 원소의 개수와 같으므로

$$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=100-47=53(\text{개})$$

087 정답 5

학급 전체 학생의 집합을 U, A동아리에 가입한 학생의 집합을 A, B동아리에 가입한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=32,\ n(A)=15,\ n(B)=18$

두 동아리에 모두 가입한 학생의 수는 집합 $A\cap B$의 원소의 개수와 같으므로

$n(A\cap B)=6$

또, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

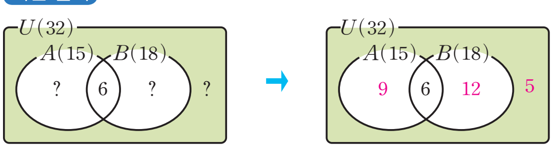
$n(A\cup B)=15+18-6=27$

이때, 어느 동아리에도 가입하지 않은 학생의 수는 집합 $A^C\cap B^C$의 원소의 개수와 같으므로

$$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=32-27=5$$

따라서 어느 동아리에도 가입하지 않은 학생의 수는 5명이다.

다른 풀이



개념 보충

유한집합의 원소의 개수의 활용에 관한 문제는 주어진 상황을 집합의 관계로 표현하는 것이 무엇보다 중요하다.
이때,
~이거나, 또는 ⇨ 합집합
모두, 그리고, 둘 다 ⇨ 교집합
~이 아닌 ⇨ 여집합
을 이용한다.

088 정답 70

논술을 신청한 학생들의 집합을 A, 컴퓨터를 신청한 학생들의 집합을 B라 하면,

$n(A)=90,\ n(B)=50$

적어도 한 과목을 신청한 학생의 수는 집합 $A\cup B$의 원소의 개수와 같으므로

$n(A\cup B)=120$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$120=90+50-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=20$

이때, 논술만 신청한 학생의 수는 집합 $A-B$의 원소의 개수와 같으므로

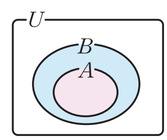
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=90-20=70$

따라서 논술만 신청한 학생의 수는 70명이다.

연습문제 Ⅱ p.55

089 정답 ④

$A\subset B$이면 오른쪽 그림에서



① $A-B=\varnothing$ (참)
② $A-B=\varnothing$에서
$$A\cap B^C=\varnothing \Longleftrightarrow (A\cap B^C)^C=\varnothing^C$$
$$\Longleftrightarrow A^C\cup B=U \text{ (참)}$$
③ $A\cap B=A,\ A\cup B=B$ (참)
④ $A\cup B=B \Longleftrightarrow (A\cup B)^C=B^C$
$$\Longleftrightarrow A^C\cap B^C=B^C\neq A^C \text{ (거짓)}$$
⑤ $A^C\cap B^C=B^C$에서 $B^C\subset A^C$ (참)
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

090 정답 ③

벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합은 집합 C에는 속하고 $A\cap B$에는 속하지 않는 원소들의 집합이다.

$$\therefore C\cap(A\cap B)^C=C\cap(A^C\cup B^C)$$
$$=(A^C\cup B^C)\cap C$$

091 정답 C

$\{A\cap(A^C\cup C)\}\cup\{C\cap(B\cup C)\}$에서

(i) $A\cap(A^C\cup C)=(A\cap A^C)\cup(A\cap C)$

$=\varnothing\cup(A\cap C)$

$=A\cap C$

(ii) $C\subset(B\cup C)$이므로 $C\cap(B\cup C)=C$

$\therefore\ \{A\cap(A^C\cup C)\}\cup\{C\cap(B\cup C)\}=(A\cap C)\cup C$

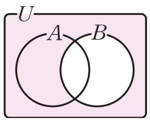
$=C$

092 정답 **15** 서술형

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=20-10=10$ ⋯ ①

이고, 다음 벤 다이어그램에서



$n(B^C)=n((A\cup B)^C)+n(A-B)$이므로

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(B^C)-n(A-B)$ ⋯ ②

$=25-10=15$ ⋯ ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$n(A-B)$ 구하기	40%
②	$n(A^C\cap B^C)$를 $n(A-B)$와 $n(B^C)$를 이용하여 나타내기	40%
③	$n(A^C\cap B^C)$ 구하기	20%

4. 명제와 진리집합

확인문제 pp.60~67

093 정답 (1) $\{4, 5\}$ (2) $\{3, 6\}$ (3) $\{3, 4, 5, 6\}$ (4) $\varnothing$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p : 'x는 6의 약수이다.'에서 $P=\{1, 2, 3, 6\}$

q : $x\geq 3$에서 $Q=\{3, 4, 5, 6\}$

(1) 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로 구하는 진리집합은

$P^C=\{4, 5\}$

(2) 조건 'p이고 q'의 진리집합은 $P\cap Q$이므로 구하는 진리집합은

$P\cap Q=\{1, 2, 3, 6\}\cap\{3, 4, 5, 6\}=\{3, 6\}$

(3) 조건 '$\sim p$이거나 q'의 진리집합은 $P^C\cup Q$이므로 구하는 진리집합은

$P^C\cup Q=\{4, 5\}\cup\{3, 4, 5, 6\}=\{3, 4, 5, 6\}$

(4) 조건 'p이거나 q'의 진리집합이 $P\cup Q$이므로 조건 '$\sim(p$이거나 $q)$'의 진리집합은$(P\cup Q)^C=P^C\cap Q^C$이다.

그러므로 구하는 진리집합은

$P^C\cap Q^C=\{4, 5\}\cap\{1, 2\}=\varnothing$

094 정답 (1) $\{x\mid x<2\}$ (2) $\{x\mid 2\leq x<5\}$ (3) $\{x\mid x<5\}$ (4) $\{x\mid x<2$ 또는 $x\geq 5\}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid x\geq 2\}$, $Q=\{x\mid x<5\}$

(1) 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로 구하는 진리집합은

$P^C=\{x\mid x<2\}$

(2) 조건 'p이고 q'의 진리집합은 $P\cap Q$이므로 구하는 진리집합은

$P\cap Q=\{x\mid x\geq 2\}\cap\{x\mid x<5\}=\{x\mid 2\leq x<5\}$

(3) 조건 '$\sim p$이거나 q'의 진리집합은 $P^C\cup Q$이므로 구하는 진리집합은

$P^C\cup Q=\{x\mid x<2\}\cup\{x\mid x<5\}=\{x\mid x<5\}=Q$

(4) 조건 '$\sim p$이거나 $\sim q$'의 진리집합은 $P^C\cup Q^C=(P\cap Q)^C$이고, (2)에서 $P\cap Q=\{x\mid 2\leq x<5\}$이므로 구하는 진리집합은

$P^C\cup Q^C=\{x\mid x<2$ 또는 $x\geq 5\}$

095 정답 (1) $\sim p$이고 $\sim q$ (2) $\sim p$이거나 q (3) p이거나 q

(1) $\sim(p$이거나 $q)$는 '$\sim p$이고 $\sim q$'

(2) $\sim(p$이고 $\sim q)$는 '$\sim p$이거나 q'

(3) $\sim(\sim p$이고 $\sim q)$는 'p이거나 q'

096 정답 (1) $x\neq1$이고 $x\neq3$

(2) $x\le0$이거나 $x=2$

(3) $x=0$이거나 $x=1$

(1) $\sim(x=1$ 또는 $x=3)$은 '$x\neq1$이고 $x\neq3$'

(2) $\sim(x>0$이고 $x\neq2)$는 '$x\le0$이거나 $x=2$'

(3) $\sim(x\neq0$이고 $x\neq1)$은 '$x=0$이거나 $x=1$'

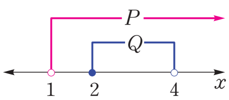
097 정답 (1) 거짓 (2) 참

주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q라 하고, 각각의 진리집합을 P, Q라고 하자.

(1) $P=\{x\mid x>1\}$,

$Q=\{x\mid 2\le x<4\}$에서 $P\not\subset Q$

이므로 주어진 명제는 거짓이다.



다른 풀이

【반례】 $x=\frac{3}{2}$일 때, $x>1$이지만 $2\le x<4$는 성립하지 않는다.

(2) $x^2-3x+2=0$, 즉 $(x-1)(x-2)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 $P=\{1, 2\}$

$x^2-2x-3<0$, 즉 $(x+1)(x-3)<0$에서 $-1<x<3$이므로 $Q=\{x\mid -1<x<3\}$

이때, $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

098 정답 (1) 거짓 (2) 참

주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q라 하고, 각각의 진리집합을 P, Q라고 하자.

(1) 【반례】 $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x^3=-1$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

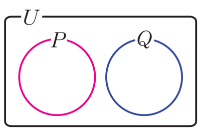
(2) $|x|<1$, 즉 $-1<x<1$이므로 $P=\{x\mid -1<x<1\}$

$x^2<1$에서 $x^2-1<0$, $(x+1)(x-1)<0$에서 $-1<x<1$이므로 $Q=\{x\mid -1<x<1\}$

이때, $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

099 정답 (1) 거짓 (2) 거짓 (3) 참

$P\cap Q=\varnothing$이므로, 두 집합 P, Q를 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



(1) $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

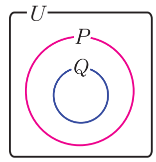
(2) $P^C\not\subset Q$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow q$는 거짓이다.

(3) $P\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 참이다. 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참!

100 정답 ㄱ, ㄷ

명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q\subset P$

이때, 두 집합 P, Q를 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같으므로



ㄱ. $P\cap Q=Q$ (참)

ㄴ. $P\cup Q=P\neq U$ (거짓)

ㄷ. $P^C\cap Q=Q-P=\varnothing$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

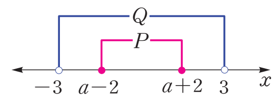
101 정답 $-1<a<1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x\mid a-2\le x\le a+2\}$, $Q=\{x\mid -3<x<3\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.

수직선에서



$a-2>-3$이고 $a+2<3$

즉, $a>-1$이고 $a<1$이므로

$-1<a<1$

102 정답 거짓

【반례】 $x=1$, $y=i$이면 $x+yi=0$이지만 $x\neq0$, $y\neq0$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

개념 보충

복소수가 서로 같을 조건

a, b, c, d가 실수일 때

① $a+bi=c+di \iff a=c$, $b=d$

② $a+bi=0 \iff a=0$, $b=0$

103 정답 (1) 참 (2) 거짓

(1) $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$이고 모든 실수 x에 대하여

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2+x+1>0$이다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

(2) $x^2+3x+2=0$, $(x+1)(x+2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-2$

따라서 주어진 등식을 만족하는 자연수가 하나도 없으므로 주어진 명제는 거짓이다.

104 정답 (1) 모든 자연수 x에 대하여 $x(x+1)\neq0$이다.

(2) 어떤 권력은 국민으로부터 나오지 않는다.

(1) 부정 : 모든 자연수 x에 대하여 $x(x+1)\neq0$이다.

(2) 부정 : 어떤 권력은 국민으로부터 나오지 않는다.

105 정답 (3) **거짓인 명제**, (5) **참인 명제**

(1)번과 (2)번은 상대적인 가치를 나타내기 때문에 참, 거짓을 명확히 구별할 수가 없으므로 명제가 아니다.
(3)번은 거짓인 명제이고 (5)번은 참인 명제이며,
(4)번은 x에 따라 참, 거짓이 달라지기 때문에 이대로는 참, 거짓을 구별할 수가 없으므로 명제가 아니다.
(6)번은 x에 어떤 값을 대입하더라도 참, 거짓을 판정할 수 있는 식이 아니므로 명제가 아니다.

106 정답 (1) **직사각형은 평행사변형도 아니고 마름모도 아니다.**

(2) **5는 짝수이거나 3의 배수이다.**
(3) **정삼각형의 무게중심은 외심이 아니거나 내심이 아니다.**
(4) $\boldsymbol{x\le1}$**이고** $\boldsymbol{x>-1}$**이다. (또는** $\boldsymbol{-1<x\le1}$**)**

107 정답 (1) $\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$ (2) $\varnothing$ (3) $\{1,\ 4\}$ (4) U

네 조건 p, q, r, s의 진리집합을 각각 P, Q, R, S라고 하자.
(1) $P=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$
(2) 실수의 제곱은 항상 0 이상이므로, $x^2+1=0$을 만족하는 실수 x는 없다.
$\therefore\ Q=\varnothing$
(3) $x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$
즉, $x=1$ 또는 $x=4$
$\therefore\ R=\{1,\ 4\}$
(4) $x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.
$\therefore\ S=U$

108 정답 (1) $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

(2) $\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$
(3) $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하면 P, Q, R는 전체집합 U의 부분집합이므로 모든 원소는 정수로만 이루어진다.
(1) p : $-2\le x\le 2$에서 x는 정수이므로
$P=\{-2,\ -1,\ 0\ ,\ 1,\ 2\}$
(2) q : $x+5<2x<x+10 \Longleftrightarrow x+5<2x$이고 $2x<x+10$
$\Longleftrightarrow 5<x$이고 $x<10$
즉, $5<x<10$인 정수이므로 $Q=\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$
(3) r : $x\ge2$이고 $-3<x<8$, 즉 $2\le x<8$인 정수이므로
$R=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

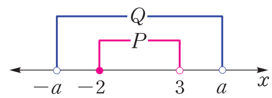
109 정답 (1) **거짓** (2) **참** (3) **참**

(1) 【반례】 2는 소수이지만 홀수가 아니다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.
(2) $x<0$이면 $|x|=-x$이므로 $|x|+x=-x+x=0$
따라서 주어진 명제는 참이다.
(3) 가정의 진리집합은 $\{x|2<x<4\}$, 결론의 진리집합은 $\{x|x<4\}$이고

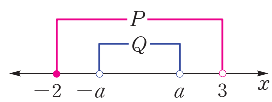
그림에서
$\{x|2<x<4\}\subset\{x|x<4\}$
이므로 주어진 명제는 참이다.

110 정답 (1) $\boldsymbol{a\ge3}$ (2) $\boldsymbol{0<a\le2}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{x|-2\le x<3\}$,
q : $|x|<a$에서 $-a<x<a$ ($\because\ a>0$)이므로
$Q=\{x|-a<x<a\}$
(1) 명제 '$p\longrightarrow q$'가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.



위의 수직선에서 $-a<-2$이고 $a\ge3$
즉, $a>2$이고 $a\ge3$이므로
$a\ge3$
(2) 명제 '$q\longrightarrow p$'가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 한다.



위의 수직선에서 $-a\ge-2$이고 $a\le3$
즉, $a\le2$이고 $a\le3$이므로
$0<a\le2$ ($\because\ a>0$)

111 정답 (1) **참** (2) **거짓** (3) **거짓** (4) **참**

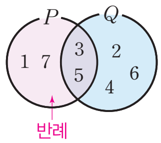
(1) $Q\subset P$이므로 $P^C\subset Q^C$
따라서 주어진 명제는 참이다.
(2) $R\not\subset P$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
(3) 조건 'q 또는 r'의 진리집합은 $Q\cup R$이고,
$P\not\subset(Q\cup R)$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
(4) 조건 'q이고 r'의 진리집합은 $Q\cap R$이고,
$(Q\cap R)\subset P$이므로 주어진 명제는 참이다.

112 정답 ⑤

명제 'p이거나 q이면 r이다.'가 참이므로 $(P\cup Q)\subset R$이다.
즉, $P\subset R$, $Q\subset R$, $(P\cup Q)\cap R=P\cup Q$,
$(P\cup Q)-R=(P\cup Q)\cap R^C=\varnothing$,
$(P\cup Q)\cup R=R$이므로 옳지 않은 것은 ⑤이다.

113 정답 8

명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이려면 P의 원소 중에서 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.



따라서 반례는 $P\cap Q^C$의 원소인 1, 7이므로 그 합은 $1+7=8$

114 정답 ④

명제 '$\sim p$이면 q이다.'가 거짓이 되려면 '$\sim p$이지만 q가 아닌' 경우, 즉 '$\sim p$이고 $\sim q$'인 것이 있으면 된다.
조건 '$\sim p$이고 $\sim q$'의 진리집합은 $P^C\cap Q^C$이므로 반례가 속하는 집합은 $P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$이다.

115 정답 (1) {1, 4}　(2) {1, 2, 5}　(3) {1, 2, 3, 4, 5}

(1) 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합은
$$P\cap Q^C=P-Q=\{1,\ 4\}$$
(2) 조건 '(p이거나 q)이고 $\sim r$'의 진리집합은
$$(P\cup Q)\cap R^C=(P\cup Q)-R=\{1,\ 2,\ 5\}$$
(3) 조건 'p이거나 (q이고 $\sim r$)'의 진리집합은
$$P\cup(Q\cap R^C)=P\cup(Q-R)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

116 정답 (1) 참　(2) 거짓

(1) $x=0$이면 $x^2=2x$가 성립하므로, 주어진 명제는 참이다.
(2) 【반례】 $x=0$이면 $x^2+2x-1<0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

117 정답 (1) 어떤 정육면체는 길이가 다른 모서리가 있다.
(2) 가을에 피는 꽃은 없다.

(1) 어떤 정육면체는 각 모서리의 길이가 서로 같지는 않다.
즉, 어떤 정육면체는 길이가 다른 모서리가 있다.
(2) 가을에 피는 꽃은 없다.

연습문제 II ········ p.71

118 정답 ⑤

조건 '$a=b=c$'는 '$a=b$이고 $b=c$이고 $c=a$'와 같으므로
그 부정은 '$a\neq b$이거나 $b\neq c$이거나 $c\neq a$'
즉, 'a, b, c 중에 서로 다른 것이 적어도 하나 있다.'이다.

119 정답 ②

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 $P^C\subset Q$이다.
즉, $P^C-Q=\varnothing$에서 $P^C\cap Q^C=\varnothing$, 즉 $(P\cup Q)^C=\varnothing$이므로
$$P\cup Q=U$$

120 정답 $x\geq 2$인 어떤 실수 x에 대하여 $x-1\leq 0$이다.

이 명제의 전체집합은 '$x\geq 2$인 실수'이므로 전체집합은 부정할 수 없다.
따라서 부정은
'$x\geq 2$인 실수 x 중에서 어떤 x에 대하여 $x-1>0$이 성립하지 않는다.'
즉, '$x\geq 2$인 어떤 실수 x에 대하여 $x-1\leq 0$이다.'이다.

121 정답 6 ········ 서술형

두 조건 'x는 6의 약수', 'x는 4의 약수'의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.
주어진 명제가 참이 되려면 집합 P의 원소는 모두 집합 Q의 원소가 되어야 한다. … ①
이때, 집합 P는 6의 약수의 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$의 부분집합이고, 집합 Q는 4의 약수의 집합 $\{1,\ 2,\ 4\}$의 부분집합이다.
그러므로 $P\subset Q$가 되려면, 6의 약수 중 3과 6은 P의 원소가 아니어야 한다. … ②
즉, $U=\{1,\ 2,\ n\}$에서 n이 3과 6을 제외한 수이면 $P=\{1,\ 2\}$가 되어 $P\subset Q$가 성립한다.
한편, n은 10 이하의 자연수이고 1, 2 역시 제외해야 하므로 n은 4, 5, 7, 8, 9, 10의 6개이다. … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	명제의 참, 거짓과 진리집합의 포함 관계 알기	30 %
②	주어진 명제가 참이 되도록 하는 진리집합의 조건 구하기	40 %
③	자연수 n의 개수 구하기	30 %

5. 명제 사이의 관계

확인문제 pp.75~81

122

정답 (1) **역 : x가 2의 배수이면 x는 4의 배수이다. (거짓)**
대우 : x가 2의 배수가 아니면 x는 4의 배수가 아니다. (참)
(2) **역 : $x^3=y^3$이면 $x=y$이다. (참)**
대우 : $x^3 \neq y^3$이면 $x \neq y$이다. (참)

(1) 역 : x가 2의 배수이면 x는 4의 배수이다. (거짓)
【반례】 $x=6$이면 2의 배수이지만 4의 배수는 아니다.
대우 : x가 2의 배수가 아니면 x는 4의 배수가 아니다. (참)
원 명제가 참이므로 대우도 참이다.

(2) 역 : $x^3=y^3$이면 $x=y$이다. (참)
$x^3-y^3=0$에서 $(x-y)(x^2+xy+y^2)=0$
이때, $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2>0$이므로 $x-y=0$
$\therefore x=y$
대우 : $x^3 \neq y^3$이면 $x \neq y$이다. (참)
원 명제가 참이므로 대우도 참이다.

123

정답 (1) **역 : $-2<x<2$이면 $x^2<4$이다. (참)**
대우 : $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$이면 $x^2 \geq 4$이다. (참)
(2) **역 : $x^2+y^2=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다. (참)**
대우 : $x^2+y^2 \neq 0$이면 $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이다. (거짓)

(1) 역 : $-2<x<2$이면 $x^2<4$이다. (참)
대우 : $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$이면 $x^2 \geq 4$이다. (참)

(2) 역 : $x^2+y^2=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다. (참)
$x^2+y^2=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이므로 참이다.
대우 : $x^2+y^2 \neq 0$이면 $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이다. (거짓)
【반례】 $x=0$, $y=1$이면 $x^2+y^2 \neq 0$이지만 $x=0$이고 $y \neq 0$이다.

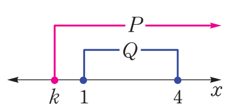
124

정답 **1**

조건 $x \geq k$와 $x^2-5x+4 \leq 0$의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x \mid x \geq k\}$, $Q=\{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$

이때, 주어진 명제의 역 '$x^2-5x+4 \leq 0$이면 $x \geq k$이다.'가 참이므로 $Q \subset P$이다.



위의 그림에서 $k \leq 1$
따라서 k의 최댓값은 1이다.

125

정답 **3**

주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$x \geq a$이고 $y \geq 1$이면 $x+y \geq 4$이다.'도 참이다.
$x \geq a$이고 $y \geq 1$에서 $x+y \geq a+1$이므로 $a+1 \geq 4$
$\therefore a \geq 3$
따라서 a의 최솟값은 3이다.

126

정답 (1) **참** (2) **거짓**

명제 $p \longrightarrow r$와 $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로
(1) 각각의 대우인 $\sim r \longrightarrow \sim p$와 $r \longrightarrow \sim q$도 참이다.
(2) $q \longrightarrow \sim r$, $\sim r \longrightarrow \sim p$가 참이므로 $q \longrightarrow \sim p$가 참이다.
따라서 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

127

정답 **ㄱ, ㄷ**

명제 $\sim p \longrightarrow q$와 $p \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로
ㄱ. 각각의 대우인 $\sim q \longrightarrow p$와 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
ㄴ. $p \longrightarrow \sim q$는 주어진 조건으로 참, 거짓을 판별할 수 없다.
ㄷ. $r \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 $r \longrightarrow q$도 참이다.
따라서 반드시 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

128

정답 (1) **충분조건** (2) **필요조건** (3) **필요충분조건**

(1) p : $x=y$ $\underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}$ q : $x^2=y^2$
($\not\leftarrow$) 【반례】 $x=-y$이면 $x^2=y^2$이지만 $x \neq y$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) p : $x<2$ $\underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ q : $x \leq 1$
($\not\rightarrow$) 【반례】 $x=\frac{3}{2}$이면 $x<2$이지만 $x>1$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(3) p : $|x|+|y|=0$ $\underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}$ q : $x^2+y^2=0$
($\longrightarrow$) $|x|+|y|=0$이면 $x=y=0$이므로 $x^2+y^2=0$이다.
($\longleftarrow$) $x^2+y^2=0$이면 $x=y=0$이므로 $|x|+|y|=0$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

129

정답 (1) **필요조건** (2) **충분조건** (3) **충분조건**

(1) p : $|x+y|=x+y$ $\underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ q : $x>0$이고 $y>0$
($\not\rightarrow$) 【반례】 $x=y=0$이면 $|x+y|=x+y$이지만 x, y 모두 양수는 아니다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(2) p : a, b는 모두 짝수 $\underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}$ q : $a+b$는 짝수
($\not\leftarrow$) 【반례】 $a=1$, $b=1$이면 $a+b$는 짝수이지만 a, b는 모두 홀수이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(3) p : $\angle A=90^\circ$ $\underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}$ q : $\triangle ABC$는 직각삼각형이다.
($\not\leftarrow$) 【반례】 $\angle B=90^\circ$이면 $\triangle ABC$는 직각삼각형이지만 $\angle A \neq 90^\circ$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

130 정답 **충분조건**

$P\cap Q=P$이면 $P\subset Q$이므로 $p \Longrightarrow q$

$Q\cap R=\varnothing$이면 $Q\subset R^C$이므로 $q \Longrightarrow \sim r$

따라서 $p \Longrightarrow \sim r$이므로 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

131 정답 $\boldsymbol{R\subset P\subset Q}$

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$

$\sim r$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이므로 $P^C\subset R^C$, 즉 $R\subset P$

따라서 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계는 $P\subset Q$, $R\subset P$에서 $R\subset P\subset Q$

132 정답 $\boldsymbol{a=2}$ **또는** $\boldsymbol{a=4}$

$x^2-6x+8=0$이 $x=a$이기 위한 필요조건이므로

명제 '$x=a$이면 $x^2-6x+8=0$이다.'가 참이다.

$x=a$를 대입하면 $a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore$ $a=2$ 또는 $a=4$

133 정답 $\boldsymbol{2\le a\le 5}$

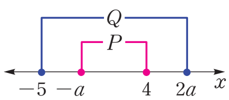
p : $-a\le x\le 4$, q : $-5\le x\le 2a$라 하고

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x\mid -a\le x\le 4\}$, $Q=\{x\mid -5\le x\le 2a\}$

p가 q이기 위한 충분조건이려면 $P\subset Q$

오른쪽 그림에서



$-5\le -a$, $4\le 2a$이므로

$a\le 5$, $a\ge 2$

$\therefore$ $2\le a\le 5$

연습문제 I .... pp.82~84

134 정답 **(1) 역 : 12의 약수는 4의 약수이다.**

대우 : 12의 약수가 아니면 4의 약수도 아니다.

(2) 역 : 실수이면 정수이다.

대우 : 실수가 아니면 정수가 아니다.

(3) 역 : $\boldsymbol{x=0}$**이면** $\boldsymbol{x^2=0}$**이다.**

대우 : $\boldsymbol{x\ne 0}$**이면** $\boldsymbol{x^2\ne 0}$**이다.**

(4) 역 : 두 집합 $\boldsymbol{A}$**와** $\boldsymbol{B}$**가** $\boldsymbol{A-B=A}$**이면** $\boldsymbol{A}$**와** $\boldsymbol{B}$**는 서로소이다.**

대우 : 두 집합 $\boldsymbol{A}$**와** $\boldsymbol{B}$**가** $\boldsymbol{A-B\ne A}$**이면** $\boldsymbol{A}$**와** $\boldsymbol{B}$**는 서로소가 아니다.**

135 정답 **(1) 역 :** $\boldsymbol{x+y>0}$**이면** $\boldsymbol{x>0}$**이고** $\boldsymbol{y>0}$**이다. (거짓)**

대우 : $\boldsymbol{x+y\le 0}$**이면** $\boldsymbol{x\le 0}$ **또는** $\boldsymbol{y\le 0}$**이다. (참)**

(2) 역 : $\boldsymbol{x=0}$**이고** $\boldsymbol{y=0}$**이면** $\boldsymbol{xy=0}$**이다. (참)**

대우 : $\boldsymbol{x\ne 0}$**이거나** $\boldsymbol{y\ne 0}$**이면** $\boldsymbol{xy\ne 0}$**이다. (거짓)**

(3) 역 : $\boldsymbol{a+b}$**가 무리수이면** $\boldsymbol{a}$**와** $\boldsymbol{b}$**가 무리수이다. (거짓)**

대우 : $\boldsymbol{a+b}$**가 무리수가 아니면** $\boldsymbol{a}$ **또는** $\boldsymbol{b}$**가 무리수가 아니다. (거짓)**

(1) 역 : $x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다. (거짓)

【반례】 $x=-1$, $y=2$이면 $x+y>0$이지만 $x<0$이고 $y>0$이다.

대우 : $x+y\le 0$이면 $x\le 0$ 또는 $y\le 0$이다. (참)

원 명제가 참이므로 대우도 참이다.

(2) 역 : $x=0$이고 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)

대우 : $x\ne 0$이거나 $y\ne 0$이면 $xy\ne 0$이다. (거짓)

【반례】 $x=0$, $y=1$이면 $x\ne 0$이거나 $y\ne 0$이지만 $xy=0$이다.

(3) 역 : $a+b$가 무리수이면 a와 b가 무리수이다. (거짓)

【반례】 $a=1$, $b=\sqrt{2}$이면 $a+b$는 무리수이지만 a는 유리수이다.

대우 : $a+b$가 무리수가 아니면 a 또는 b가 무리수가 아니다. (거짓)

【반례】 $a=-\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$이면 $a+b=0$은 무리수가 아니지만 a, b는 모두 무리수이다.

136 정답 **명제 : 참, 역 : 거짓, 대우 : 참**

명제 : $x=0$ 또는 $x=1$이면 $x(x-1)(x+1)=0$이다. (참)

가정과 결론의 조건의 진리집합 사이의 관계가 $\{0, 1\}\subset\{-1, 0, 1\}$이므로 참이다.

역 : $x(x-1)(x+1)=0$이면 $x=0$ 또는 $x=1$이다. (거짓)

【반례】 $x=-1$이면 $x(x-1)(x+1)=0$이지만 $x=0$ 또는 $x=1$이 아니다.

대우 : $x(x-1)(x+1)\ne 0$이면 $x\ne 0$이고 $x\ne 1$이다. (참)

원 명제가 참이므로 그 대우도 역시 참이다.

137 정답 **역 :** $\boldsymbol{r}$**가 참이면** $\boldsymbol{p}$**가 참이고** $\boldsymbol{q}$**는 거짓이다.**

대우 : $\boldsymbol{r}$**가 거짓이면** $\boldsymbol{p}$**가 거짓이거나** $\boldsymbol{q}$**가 참이다.**

138 정답 ④

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{1,\ 3,\ 9\}$, $Q=\{1,\ 9\}$

이므로 $Q\subset P$이다.

따라서 $q \longrightarrow p$가 참이므로 그 대우인 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

139 정답 4

명제 '$x^2-kx+3\neq0$이면 $x-3\neq0$이다.'가 참이므로

그 대우인 '$x-3=0$이면 $x^2-kx+3=0$이다.'도 참이다.

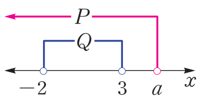
$x=3$을 대입하면 $9-3k+3=0$

$\therefore k=4$

140 정답 3

두 조건 $p: x<a$, $q: -2<x<3$의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이면 그 대우인 $q \longrightarrow p$도 참이므로 $Q\subset P$이어야 한다.



위의 그림에서 $a\geq3$

따라서 a의 최솟값은 3이다.

141 정답 ③

$p \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow p$도 참이다.

이때, $q \longrightarrow \sim p$, $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 $q \longrightarrow r$도 참이다.

$\sim r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다.

한편, $p \longrightarrow \sim q$가 참이라고 해서 그 역 $\sim q \longrightarrow p$도 참이라고 할 수 없다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ③이다.

142 정답 ㄱ, ㄴ

$\sim p \longrightarrow q$, $r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow p$, $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

이때, $\sim p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 $\sim p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

$r \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로 $r \longrightarrow p$도 참이다.

한편, $r \longrightarrow \sim q$가 참이라고 해서 그 역 $\sim q \longrightarrow r$도 참이라고 할 수 없다.

따라서 항상 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

143 정답 (1) **충분조건** (2) **필요조건** (3) **필요충분조건** (4) **필요충분조건** (5) **필요충분조건**

(1) $p: a=b \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} q: ac=bc$

$(\not\leftarrow)$ 【반례】 $c=0$이고 $a=1$, $b=2$이면 $ac=bc$이지만 $a\neq b$이다.

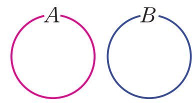
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) $p: |xy|=xy \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} q: x>0$이고 $y>0$

$(\not\rightarrow)$ 【반례】 $x=-1$, $y=-1$이면 $|xy|=xy$이지만 $x<0$이고 $y<0$이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(3) $p: A-B=A \underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} q: A\cap B=\varnothing$



따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

(4) $p: x$는 3의 약수이다. $\underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} q: x^2-4x+3=0$

3의 약수는 1, 3이므로 p의 진리집합은 $\{1,\ 3\}$,

또, $x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$이므로 q의 진리집합도 $\{1,\ 3\}$으로 두 조건의 진리집합이 서로 같다.

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

(5) $p: x=y=0 \underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} q: x^2+y^2=xy$

$(\longrightarrow)$ $x=y=0$이면 $x^2+y^2=xy$이다.

$(\longleftarrow)$ $x^2+y^2=xy$이면 $x^2-xy+y^2=0$, $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0$

이때, x, y는 실수이므로 $x-\frac{y}{2}=0$, $y=0$

$\therefore x=y=0$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

144 정답 ⑤

양변이 모두 음이 아니므로 양변을 제곱하면

$|x+y|^2=(|x|+|y|)^2$

$x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$

$xy=|xy|$

$\therefore xy\geq0$

따라서 구하는 필요충분조건은 $xy\geq0$이다.

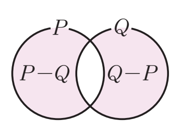
145 정답 ①

오른쪽 벤 다이어그램에서

$(P\cup Q)-(P\cap Q)=P-Q$이려면

$Q-P=\varnothing$, 즉 $Q\subset P$이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.



146 정답 ④

$\sim q$가 p이기 위한 필요조건이므로 $p \Longrightarrow \sim q$

따라서 $P\subset Q^C$, 즉 $P\cap Q=\varnothing$이다.

147 정답 $-2\le a\le 4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

p : $|x-a|\le 5$에서 $-5\le x-a\le 5$

$\therefore\ a-5\le x\le a+5$

q : $|x-1|\le 2$에서 $-2\le x-1\le 2$

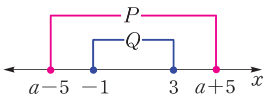
$\therefore\ -1\le x\le 3$

따라서

$P=\{x|a-5\le x\le a+5\}$, $Q=\{x|-1\le x\le 3\}$

p가 q이기 위한 필요조건이려면 $Q\subset P$이어야 하므로

오른쪽 그림에서



$a-5\le -1$, $3\le a+5$

즉, $a\le 4$, $a\ge -2$이므로

$-2\le a\le 4$

148 정답 24

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니려면 P는 Q의 진부분집합이어야 한다.

따라서 k는 12의 배수이고, $P\ne Q$이므로 구하는 k의 최솟값은 24이다.

연습문제 II p.85

149 정답

(1) 역 : $x+y>2$이면 $x>1$이거나 $y>1$이다. (참)

대우 : $x+y\le 2$이면 $x\le 1$이고 $y\le 1$이다. (거짓)

(2) 역 : $x+y>2$이면 $x>1$이고 $y>1$이다. (거짓)

대우 : $x+y\le 2$이면 $x\le 1$이거나 $y\le 1$이다. (참)

(3) 역 : $2x>2y$이면 $x>y$이다. (참)

대우 : $2x\le 2y$이면 $x\le y$이다. (참)

(4) 역 : $ab+1=a+b$이면 $a=1$이고 $b=1$이다. (거짓)

대우 : $ab+1\ne a+b$이면 $a\ne 1$ 또는 $b\ne 1$이다. (참)

(1) 역 : $x+y>2$이면 $x>1$이거나 $y>1$이다. (참)

대우 : $x+y\le 2$이면 $x\le 1$이고 $y\le 1$이다. (거짓)

【반례】 $x=-1$, $y=2$이면 $x+y\le 2$이지만 $y>1$이다.

(2) 역 : $x+y>2$이면 $x>1$이고 $y>1$이다. (거짓)

【반례】 $x=0$, $y=3$이면 $x+y>2$이지만 $x\le 1$이다.

대우 : $x+y\le 2$이면 $x\le 1$이거나 $y\le 1$ (참)

원 명제가 참이므로 대우도 참이다.

(3) 역 : $2x>2y$이면 $x>y$이다. (참)

대우 : $2x\le 2y$이면 $x\le y$이다. (참)

(4) 역 : $ab+1=a+b$이면 $a=1$이고 $b=1$이다. (거짓)

【반례】 $a=1$, $b=2$이면 $ab+1=a+b$이지만 $a=1$이고 $b\ne 1$이다.

대우 : $ab+1\ne a+b$이면 $a\ne 1$ 또는 $b\ne 1$이다. (참)

$ab+1\ne a+b$에서 $ab-a-b+1\ne 0$

즉, $(a-1)(b-1)\ne 0$이므로

$a\ne 1$이고 $b\ne 1$

150 정답 (1) **충분조건** (2) **필요충분조건**

p는 r이기 위한 충분조건이므로 $p\Longrightarrow r$ ...... ㉠

q는 r이기 위한 필요조건이므로 $r\Longrightarrow q$ ...... ㉡

s는 r이기 위한 충분조건이므로 $s\Longrightarrow r$ ...... ㉢

s는 q이기 위한 필요조건이므로 $q\Longrightarrow s$ ...... ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 정리하면 아래 그림과 같다.

$$\begin{tikzcd} & & q \arrow[dd, Rightarrow, "\text{㉣}"] \\ p \arrow[r, Rightarrow, "\text{㉠}"] & r \arrow[ur, Rightarrow, "\text{㉡}"] & \\ & & s \arrow[ul, Rightarrow, "\text{㉢}"] \end{tikzcd}$$

(1) ㉠, ㉡에서 $p\Longrightarrow r$, $r\Longrightarrow q$이므로 $p\Longrightarrow q$이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) ㉡, ㉣에서 $r\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow s$이므로 $r\Longrightarrow s$ ...... ㉤

㉢, ㉤에서 $s\Longrightarrow r$, $r\Longrightarrow s$이므로 $s\Longleftrightarrow r$

따라서 r는 s이기 위한 필요충분조건이다.

개념 보충

네 조건 p, q, r, s의 진리집합을 각각 P, Q, R, S라고 하면 이 문제를 진리집합의 포함 관계를 이용하여 해결할 수도 있다.

p는 r이기 위한 충분조건이므로 $P\subset R$ ...... ㉠

q는 r이기 위한 필요조건이므로 $R\subset Q$ ...... ㉡

s는 r이기 위한 충분조건이므로 $S\subset R$ ...... ㉢

s는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset S$ ...... ㉣

(1) p는 q이기 위한 무슨 조건인지 알기 위해서는 두 조건의 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 알아보아야 한다. ㉠, ㉡에서 $P\subset R$, $R\subset Q$이면 $P\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) r는 s이기 위한 무슨 조건인지 알기 위해서는 두 조건의 진리집합 R, S 사이의 포함 관계를 알아보아야 한다. ㉢에서 $S\subset R$이고, ㉡, ㉣에서 $R\subset Q$, $Q\subset S$이면 $R\subset S$이다. 즉, $S\subset R$이고 $R\subset S$이므로 $S=R$이다. 따라서 r는 s이기 위한 필요충분조건이다.

151 정답 ①

'카드의 한 쪽 면에 홀수가 쓰여 있으면 다른 쪽 면에는 자음이 쓰여 있다.'가 참이므로 7이 쓰여 있는 카드는 반드시 다른 면을 확인하여야 한다.

또, 이 명제의 대우는

'다른 쪽 면에 자음이 쓰여 있지 않으면 한 쪽 면에 홀수가 쓰여 있지 않다.'이다.

즉, '한 쪽 면에 모음이 쓰여 있으면 다른 면은 짝수가 쓰여 있어야 한다.'이고, 원 명제가 참이면 대우 역시 참이므로, 홀수가 쓰여 있는 면($\boxed{7}$)과 모음이 쓰여 있는 면($\boxed{A}$)은 반드시 다른 면을 확인하여 각각 자음과 짝수가 쓰여 있는지 확인해야 한다.

그러나, 역은 항상 참이라고 할 수는 없으므로 자음이 쓰여 있는 카드의 뒷면은 굳이 확인할 필요가 없다.

152 정답 4 서술형

명제와 그 대우는 참, 거짓이 같으므로 명제 $\sim p \longrightarrow q$의 대우 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 될 조건을 구하자. … ①

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

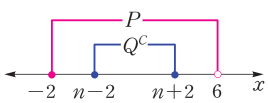
$P=\{x \mid -2\le x<6\}$

$\sim q$: $|x-n|\le 2$에서 $-2\le x-n\le 2$

즉, $n-2\le x\le n+2$이므로

$Q^C=\{x \mid n-2\le x\le n+2\}$ … ②

대우 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C\subset P$이어야 하므로



… ③

위의 그림에서

$-2\le n-2$, $n+2<6$

따라서 $0\le n<4$이므로 이를 만족하는 정수 n은 0, 1, 2, 3의 4개이다. … ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	명제 $\sim p \longrightarrow q$의 대우가 $\sim q \longrightarrow p$임을 알기	20%
②	두 조건 p, $\sim q$의 진리집합 구하기	20%
③	$\sim q \longrightarrow p$가 참이 되기 위한 진리집합의 포함 관계 구하기	30%
④	정수 n의 개수 구하기	30%

6. 명제의 증명과 절대부등식

확인문제 pp.90~97

153 정답 풀이 참조

두 자연수 a, b가 모두 홀수이므로

$a=2m-1$, $b=2n-1$(m, n은 자연수)이라 하면

$$\begin{aligned}a+b&=(2m-1)+(2n-1)\\&=2m+2n-2\\&=2(m+n-1)\end{aligned}$$

이고, $m+n-1$은 자연수이므로 $2(m+n-1)$은 짝수이다.

따라서 두 홀수 a, b의 합 $a+b$는 짝수이다.

154 정답 풀이 참조

두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$이 짝수이면 m, n은 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.

(i) m, n이 모두 짝수이면, m^2, n^2도 모두 짝수이므로 m^2+n^2은 짝수이다.

(ii) m, n이 모두 홀수이면, m^2, n^2도 모두 홀수이므로 m^2+n^2은 짝수이다.

따라서 $m+n$이 짝수이면 m^2+n^2은 짝수이다.

155 정답 풀이 참조

주어진 명제의 대우는

'두 자연수 m, n에 대하여 m 또는 n이 짝수이면 mn은 짝수이다.'

(i) m이 짝수이면 $m=2k$(k는 자연수)로 나타낼 수 있다.
$mn=2k\cdot n=2kn$이고, $2kn$이 짝수이므로 mn은 짝수이다.

(ii) n이 짝수이면 $n=2l$(l은 자연수)로 나타낼 수 있다.
$mn=m\cdot 2l=2lm$이고, $2lm$이 짝수이므로 mn은 짝수이다.

(i), (ii)에서 m 또는 n이 짝수이면 mn은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

156 정답 풀이 참조

주어진 명제의 대우는

'실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2\le 0$이면 $x+y\le 0$이다.'

실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2\ge 0$이므로

$x^2+y^2\le 0$이면 $0\le x^2+y^2\le 0$, 즉 $x^2+y^2=0$이다.

$x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이므로 $x+y=0$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

157 정답 **풀이 참조**

주어진 명제를 부정하여 a, b가 모두 음수가 아니라고 하면 $a\geq0$이고 $b\geq0$이므로 $a+b\geq0$이 되어 $a+b<0$이라는 가정에 모순이다.

따라서 실수 a, b에 대하여 $a+b<0$이면 a, b 중 적어도 하나는 음수이다.

158 정답 **풀이 참조**

$b\neq0$이라고 하면 $a+bi=0$에서 $i=-\dfrac{a}{b}$

즉, 좌변은 허수이고 우변은 실수가 되어 모순이므로 $b=0$

$b=0$을 $a+bi=0$에 대입하면 $a=0$

따라서 실수 a, b에 대하여 $a+bi=0$이면 $a=b=0$이다.

159 정답 **풀이 참조**

$$\begin{aligned}2(a^2+b^2)-(a+b)^2&=(2a^2+2b^2)-(a^2+2ab+b^2)\\&=a^2-2ab+b^2\\&=(a-b)^2\geq0\end{aligned}$$

여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

따라서 $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$이다.

160 정답 **풀이 참조**

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-(\sqrt{1+a})^2&=\left(1+a+\frac{a^2}{4}\right)-(1+a)\\&=\frac{a^2}{4}>0\ (\because a>0)\end{aligned}$$

따라서 $\left(1+\dfrac{a}{2}\right)^2>(\sqrt{1+a})^2$이므로 $1+\dfrac{a}{2}>\sqrt{1+a}$

161 정답 (1) **3** (2) **8**

(1) $a>0$, $b>0$이고 $3a+b=6$ (합이 일정)이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a+b\geq2\sqrt{3a\cdot b}=2\sqrt{3ab}$$

그런데 $3a+b=6$이므로

$$6\geq2\sqrt{3ab},\ \sqrt{3}\geq\sqrt{ab}$$

$$\therefore\ ab\leq3$$

이때, 등호가 성립하는 경우는 $3a=b=3$, 즉 $a=1$, $b=3$일 때이다.

따라서 ab의 최댓값은 3이다.

(2) $a>0$, $b>0$이고, $ab=4$ (곱이 일정)이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+4b\geq2\sqrt{a\cdot4b}=2\sqrt{4ab}$$

그런데 $ab=4$이므로 $a+4b\geq8$

이때, 등호가 성립하는 경우는 $a=4b=4$, 즉 $a=4$, $b=1$일 때이다.

따라서 $a+4b$의 최솟값은 8이다.

162 정답 **4**

$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+2$

한편, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$에서 $\dfrac{a}{b}>0$, $\dfrac{b}{a}>0$이고 $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}=1$ (곱이 일정)

이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=2$$

$$\therefore\ (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2\geq2+2=4$$

이때, 등호가 성립하는 경우는 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$, 즉 $a=b$일 때이다.

따라서 $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$의 최솟값은 4이다.

163 정답 $\mathbf{2\sqrt{13}}$

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(2^2+3^2)(x^2+y^2)\geq(2x+3y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=4$이므로 $(2x+3y)^2\leq13\times4=52$

$$\therefore\ -2\sqrt{13}\leq2x+3y\leq2\sqrt{13}$$

따라서 $2x+3y$의 최댓값은 $2\sqrt{13}$이다.

164 정답 **2**

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$$

그런데 $x+y=2$이므로 $2(x^2+y^2)\geq4$

$$\therefore\ x^2+y^2\geq2$$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 2이다.

연습문제 I ······························ pp.98~100

165 정답 (1) **무게중심** (2) **마름모** (3) **원** (4) **절대부등식**

166 정답 **풀이 참조**

[가정] $a>0$, $b>0$이고 $a^2>b^2$이다.

[결론] $a>b$이다.

[증명] $a^2>b^2$에서 $a^2-b^2>0$, $(a+b)(a-b)>0$

$a+b>0$이므로 양변을 $a+b$로 나누면

$$a-b>0$$

$$\therefore\ a>b$$

167 정답 **풀이 참조**

주어진 명제의 대우

'$a\neq0$이고 $b\neq0$이면 $ab\neq0$이다.'

가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

168 정답 풀이 참조

주어진 명제의 대우

'두 자연수 a, b에 대하여 ab가 홀수이면 a^2+b^2은 짝수이다.'

가 참임을 보이자.

ab가 홀수이면, a, b가 모두 홀수이므로

$$a=2m-1,\ b=2n-1\ (m,\ n\text{은 자연수})$$

로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(2m-1)^2+(2n-1)^2\\&=2(2m^2+2n^2-2m-2n+1)\end{aligned}$$

이때, $2m^2+2n^2-2m-2n+1$은 자연수이므로 a^2+b^2은 짝수이다.

따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

169 정답 풀이 참조

$$\begin{aligned}&(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\\&=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-3(ab+bc+ca)\\&=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\&=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0\end{aligned}$$

$$\therefore\ (a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$$

이때, 등호가 성립하는 경우는 $a=b=c$일 때이다.

170 정답 풀이 참조

$$\begin{aligned}\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}&=\frac{\sqrt{ab}(a+b)-2ab}{a+b}\\&=\frac{\sqrt{ab}(a-2\sqrt{ab}+b)}{a+b}\\&=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\geq 0\end{aligned}$$

이때, 등호가 성립하는 경우는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때이다.

따라서 $\sqrt{ab}\geq\dfrac{2ab}{a+b}$이다.

171 정답 풀이 참조

$a\geq 0$, $b\geq 0$이므로 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0$, $\sqrt{a+b}\geq 0$

$$\begin{aligned}&(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2\\&=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2\\&=a+2\sqrt{ab}+b-(a+b)\\&=2\sqrt{ab}\geq 0\end{aligned}$$

이때, 등호는 $ab=0$일 때 성립한다.

따라서 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geq(\sqrt{a+b})^2$이므로

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$$

172 정답 풀이 참조

$|a|+|b|\geq 0$, $|a+b|\geq 0$이므로

$$\begin{aligned}&(|a|+|b|)^2-|a+b|^2\\&=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2\\&=a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2\\&=2(|ab|-ab)\end{aligned}$$

그런데 $|ab|\geq ab$이므로 $2(|ab|-ab)\geq 0$

이때, 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab\geq 0$일 때 성립한다.

따라서 $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2\geq 0$이므로

$$(|a|+|b|)^2\geq|a+b|^2$$

$$\therefore\ |a|+|b|\geq|a+b|$$

173 정답 풀이 참조

$$\begin{aligned}a^3+b^3-ab(a+b)&=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)\\&=(a+b)(a^2-2ab+b^2)\\&=(a+b)(a-b)^2\end{aligned}$$

그런데 $a>0$, $b>0$이면 $a+b>0$이므로

$$(a+b)(a-b)^2\geq 0$$

이때, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

따라서 $a^3+b^3\geq ab(a+b)$이다.

174 정답 (1) 16 (2) 6

(1) $a>0$, $b>0$이고 $a+b=8$ (합이 일정)이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}$$

그런데 $a+b=8$이므로 $8\geq 2\sqrt{ab}$, 즉 $4\geq\sqrt{ab}$

양변을 제곱하면 $ab\leq 16$

이때, 등호가 성립하는 경우는 $a=b=4$일 때이다.

따라서 ab의 최댓값은 16이다.

(2) $a>0$, $b>0$이고 $ab=9$ (곱이 일정)이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}=6$$

이때, 등호가 성립하는 경우는 $a=b=3$일 때이다.

따라서 $a+b$의 최솟값은 6이다.

175 정답 ②

$x>1$에서 $x-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x-1}&=(x-1)+\frac{1}{x-1}+1\\&\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+1=3\end{aligned}$$

이때, 등호는 $x-1=\dfrac{1}{x-1}$, 즉 $x=2$일 때 성립한다.

따라서 주어진 식은 $x=2$일 때 최솟값 3을 가진다.

176 정답 27

$x>0$, $y>0$이므로

$$\left(4x+\frac{3}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+3y\right)=4+12xy+\frac{3}{xy}+9$$
$$=\left(12xy+\frac{3}{xy}\right)+13$$
$$\geq 2\sqrt{12xy\cdot\frac{3}{xy}}+13$$
$$=25$$

이때, 등호가 성립하는 경우는 $12xy=\frac{3}{xy}$, 즉 $xy=\frac{1}{2}$일 때이다.

따라서 $xy=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 25를 가지므로

$a=25$, $b=\frac{1}{2}$ $\qquad\therefore a+4b=27$

개념 보충

위의 문제에서 $x>0$, $y>0$이므로

$$4x+\frac{3}{y}\geq 2\sqrt{\frac{12x}{y}} \quad \cdots\cdots ①$$
$$\frac{1}{x}+3y\geq 2\sqrt{\frac{3y}{x}} \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 변끼리 곱하여

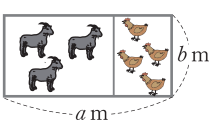
$$\left(4x+\frac{3}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+3y\right)\geq 2\sqrt{\frac{12x}{y}}\times 2\sqrt{\frac{3y}{x}}=24$$

에서 구하는 최솟값을 24라고 해서는 안 된다. 왜냐하면 ①의 등호는 $4x=\frac{3}{y}$, 즉 $xy=\frac{3}{4}$일 때 성립하고, ②의 등호는 $\frac{1}{x}=3y$, 즉 $xy=\frac{1}{3}$일 때 성립하므로 ①, ②의 등호가 동시에 성립하는 x, y의 값이 존재하지 않기 때문이다.

177 정답 150

전체 직사각형의 가로의 길이를 a m, 세로의 길이를 b m라고 하면 전체 우리의 넓이 S는

$S=ab(\mathrm{m}^2)$



이때, $a>0$, $b>0$이고 철망의 길이가 60 m이므로

$2a+3b=60$ (합이 일정)

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+3b\geq 2\sqrt{2a\cdot 3b}$

그런데 $2a+3b=60$이므로 $60\geq 2\sqrt{6ab}$

$\therefore 30\geq\sqrt{6ab}$

양변을 제곱하면

$900\geq 6ab$ $\qquad\therefore ab\leq 150$

이때, 등호는 $2a=3b=30$, 즉 $a=15$, $b=10$일 때 성립한다.

따라서 전체 우리의 넓이의 최댓값은 150 m^2이다.

178 정답 $2\sqrt{2}$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)\{x^2+(2y)^2\}\geq(x+2y)^2$

$x^2+4y^2=4$이므로 $8\geq(x+2y)^2$

$\therefore -2\sqrt{2}\leq x+2y\leq 2\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=2y$일 때 성립)

따라서 $x+2y$의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

연습문제 II

p.101

179 정답 풀이 참조

주어진 명제의 대우

'두 자연수 a, b에 대하여 a, b가 모두 3의 배수가 아니면 a^2+b^2은 3의 배수가 아니다.'

가 참임을 보이자.

어떤 자연수 n이 3의 배수가 아니면 n은

$3k-1$ 또는 $3k-2$ (k는 자연수)

중 하나이고

(i) $n=3k-1$일 때, $n^2=(3k-1)^2=3(3k^2-2k)+1$

(ii) $n=3k-2$일 때, $n^2=(3k-2)^2=3(3k^2-4k+1)+1$

이므로 n^2을 3으로 나눈 나머지는 1이다.

즉, 3의 배수가 아닌 자연수를 제곱한 수는 3으로 나눈 나머지가 1인 수이다.

두 자연수 a, b에 대하여 a, b가 모두 3의 배수가 아니면 a^2, b^2은 모두 3으로 나눈 나머지가 1인 수이므로 a^2+b^2은 3으로 나눈 나머지가 2인 수, 즉 3의 배수가 아니다.

따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

180 정답 풀이 참조

주어진 명제를 부정하여 a, b, c 중 어느 하나도 짝수가 아니다, 즉 a, b, c가 모두 홀수라고 하면

a^2, b^2, c^2도 모두 홀수이므로 a^2+b^2은 짝수, c^2은 홀수이다.

이때, $a^2+b^2=c^2$에서 (짝수)=(홀수)가 되어 모순이다.

따라서 세 자연수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2=c^2$이면 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이다.

181 정답 4

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$

그런데 $x+y=8$이므로 $8\geq 2\sqrt{xy}$

$\therefore \sqrt{xy}\leq 4$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

이때, $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}\leq 8+8=16$이므로

$0<\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq\sqrt{16}=4$

따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$는 $x=y=4$일 때 최댓값 4를 가진다.

182 정답 최댓값 : 6, 최솟값 : -6 서술형

점 $\mathrm{P}(a, b)$가 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=4$ $\cdots$ ①

점 $\mathrm{Q}(c, d)$가 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$c^2+d^2=9$ $\cdots$ ②

이때, a, b, c, d는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$$

그런데 $a^2+b^2=4$, $c^2+d^2=9$이므로

$4\times9\geq(ac+bd)^2$, $(ac+bd)^2\leq36$

$\therefore -6\leq ac+bd\leq6$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{c}{a}=\dfrac{d}{b}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$\cdots$ ③

따라서 $ac+bd$의 최댓값은 6, 최솟값은 -6이다. $\cdots$ ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	a^2+b^2의 값 구하기	20%
②	c^2+d^2의 값 구하기	20%
③	코시-슈바르츠 부등식을 이용하여 $ac+bd$의 값의 범위 구하기	40%
③	$ac+bd$의 최댓값과 최솟값 구하기	20%

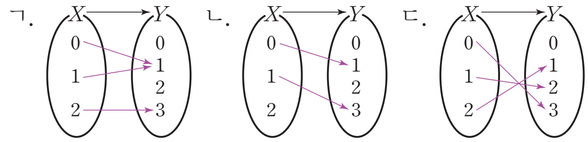
Ⅱ 함수와 그래프

7. 함수의 뜻과 그래프

확인문제 pp.108~118

183 정답 ㄱ, ㄷ

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



ㄴ은 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다. 따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

184 정답 -1, 0, 1

$X=\{0, 1, 2\}$의 각 원소에 대하여

$f(0)=a$, $f(1)=a+1$, $f(2)=a+2$

이고, 이 함숫값이 모두 공역 $Y=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$의 원소일 때 함수 f가 정의된다.

따라서 가능한 a의 값은 -1, 0, 1이다.

185 정답 22

$f(x)=\begin{cases}3x+2 & (x\text{는 홀수})\\ 2x-1 & (x\text{는 짝수})\end{cases}$에서

3은 홀수이므로 $f(3)=3\times3+2=11$

6은 짝수이므로 $f(6)=2\times6-1=11$

$\therefore f(3)+f(6)=11+11=22$

186 정답 -1

$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\geq2)\\ x^2-2x-1 & (x<2)\end{cases}$에서

(i) $k\geq2$이면 $f(k)=k+1=2$에서 $k=1$

그런데 $k\geq2$라고 하였으므로 성립하지 않는다.

(ii) $k<2$이면 $f(k)=k^2-2k-1=2$에서 $k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0$, 즉 $k=-1$ 또는 $k=3$

그런데 $k<2$이므로 $k=-1$

(i), (ii)에서 $k=-1$

187 정답 $\{1, 2, 5\}$

$f(0)=2$, $f(1)=1^2-2\times1+2=1$,

$f(2)=2^2-2\times2+2=2$, $f(3)=3^2-2\times3+2=5$이므로

치역은 $\{1, 2, 5\}$이다.

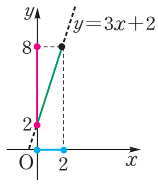
188 정답 $\{y|2\le y\le 8\}$

함수 $y=3x+2$의 그래프에서

$0\le x\le 2$일 때 y의 값의 범위는

$2\le y\le 8$

따라서 치역은 $\{y|2\le y\le 8\}$이다.



189 정답 2

$f=g$이면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같으므로

$f(1)=g(1)$에서 $1+a=2+b$, 즉 $a-b=1$ ...... ㉠

$f(2)=g(2)$에서 $4+2a=4+b$, 즉 $2a=b$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

$\therefore ab=2$

190 정답 1

$f=g$이면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같으므로

$f(-1)=g(-1)$에서 $1-a+2=-2+3$ $\therefore a=2$

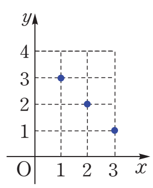
$f(k)=g(k)$에서 $k^2+ak+2=2k+3$

이때, $a=2$를 대입하여 정리하면 $k^2-1=0$

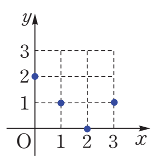
$(k-1)(k+1)=0$ $\therefore k=1$ 또는 $k=-1$

그런데 $k>0$이므로 $k=1$

191 정답



192 정답



193 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) (i) 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

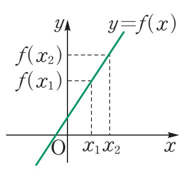
$x_1\ne x_2$이면

$f(x_1)-f(x_2)$

$=(2x_1+3)-(2x_2+3)$

$=2(x_1-x_2)\ne 0$

이므로 함수 f는 일대일함수이다.



(ii) 공역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이므로 서로 같다.

따라서 함수 $f(x)=2x+3$은 일대일대응이다.

(2) $x_1=1$, $x_2=-1$이면 $g(x_1)-g(x_2)=1^2-(-1)^2=0$

즉, $x_1\ne x_2$이지만 $g(x_1)=g(x_2)$이다.

따라서 일대일함수가 아니다.

194 정답 $a=1$, $b=5$

(i) $-1\le x\le 3$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$x_1\ne x_2$이면

$f(x_1)-f(x_2)=(-x_1+4)-(-x_2+4)$

$=-(x_1-x_2)\ne 0$

즉, $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$이므로 일대일함수이다.

(ii) $-1\le x\le 3$일 때, $1\le -x+4\le 5$이므로 치역은

$\{y|1\le y\le 5\}$이다.

이때 일대일대응이 되려면 치역과 공역이 같아야 하므로

$\{y|1\le y\le 5\}=\{y|a\le y\le b\}$

따라서 $a=1$, $b=5$

195 정답 $-1<a<2$

함수 f가 일대일대응이 되려면 x의 값이 증가할 때 y의 값이 계속 증가만 하거나 계속 감소만 해야 하므로 $x\ge 0$에서의 직선의 기울기와 $x<0$에서의 직선의 기울기가 서로 같은 부호이어야 한다.

즉, $(2-a)(a+1)>0$에서 $(a-2)(a+1)<0$이므로

$-1<a<2$

개념 보충

주어진 함수의 그래프는 $x\ge 0$일 때는 기울기가 $2-a$인 직선이고, $x<0$일 때는 기울기가 $1+a$인 직선이다.

기울기가 양수인 직선은 오른쪽 위로 향하므로 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하고, 기울기가 음수인 직선은 오른쪽 아래로 향하므로 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

주어진 함수가 일대일대응이 되려면 먼저 일대일함수가 되어야 하고, 어떤 함수에서 x의 값이 증가할 때 y의 값이 계속 증가만 하거나 계속 감소만 하면 그 함수는 일대일함수이다.

주어진 함수의 그래프가 $x=0$을 경계로 두 개의 직선을 나타내므로 두 개의 직선의 기울기가 모두 양수이거나 모두 음수이어야 x의 값이 증가할 때 y의 값이 계속 증가만 하거나 계속 감소만 한다.

따라서 두 기울기의 곱이 양수일 조건을 구하면 된다.

196 정답 $-1<a<1$

$f(x)=a|x-1|+x+2=\begin{cases}(1+a)x+2-a & (x\ge 1)\\(1-a)x+2+a & (x<1)\end{cases}$이므로

함수 f가 일대일대응이 되려면 $x\ge 1$에서의 직선의 기울기와 $x<1$에서의 직선의 기울기가 서로 같은 부호이어야 한다.

즉, $(1+a)(1-a)>0$에서 $(a+1)(a-1)<0$이므로

$-1<a<1$

197 정답 4

함수 $f(x)=x^2+(a+1)x+4$가 항등함수이므로

$f(1)=1$, $f(k)=k$이다.

$f(1)=1+(a+1)+4=1$에서

$a=-5$ ······ ㉠

$f(k)=k^2+(a+1)k+4=k$에 ㉠을 대입하면

$k^2-5k+4=0$, $(k-1)(k-4)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=4$

그런데 $k\neq1$이므로 $k=4$

198 정답 9

함수 f가 항등함수이면 정의역의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x)=x$이므로

$f(2)=2$, $f(5)=5$ ······ ㉠

한편, $f(2)\times g(0)=8$과 ㉠에서 $2\times g(0)=8$

$\therefore g(0)=4$ ······ ㉡

함수 g가 상수함수이면 정의역의 임의의 원소 x에 대하여 함숫값 $g(x)=$(일정한 값)이므로

$g(x)=4$, 즉 $g(1)=4$

$\therefore f(5)+g(1)=5+4=9$

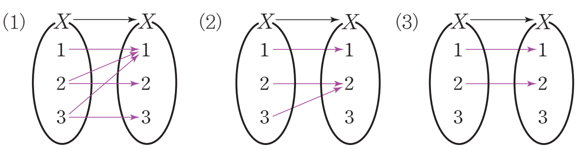
연습문제 I ······ pp.119~121

199 정답 (1) 함수가 아니다.

(2) 함수이다.

(3) 함수가 아니다.

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



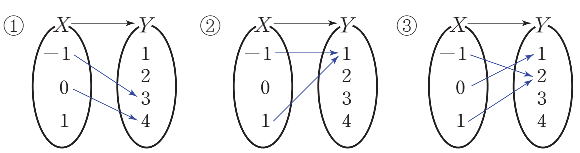
(1)은 X의 원소에 Y의 원소가 2개 대응하는 경우가 있으므로 함수가 아니다.

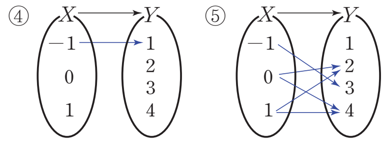
(2)는 함수이다.

(3)은 X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

200 정답 ③

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.





① X의 원소 1이 Y의 어떤 원소와도 대응하지 않으므로 함수가 아니다.

② X의 원소 0이 Y의 어떤 원소와도 대응하지 않으므로 함수가 아니다.

③ X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩 대응하고 있으므로 함수이다.

④ X의 원소 0과 1이 Y의 어떤 원소에도 대응하지 않으므로 함수가 아니다.

⑤ X의 원소 0과 1은 Y의 두 원소 2, 4에 동시에 대응하므로 함수가 아니다.

201 정답 (1) 0 (2) -3

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ ······ ㉠

(1) ㉠의 양변에 $y=0$을 대입하면

$f(x+0)=f(x)+f(0)$, $f(x)=f(x)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$

(2) ㉠의 양변에 $x=1$, $y=-1$을 대입하면

$\therefore f(0)=f(1)+f(-1)$

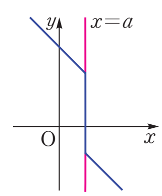
이때, $f(1)=3$, $f(0)=0$이므로 $0=3+f(-1)$

$\therefore f(-1)=-3$

202 정답 ⑤

임의의 실수 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나면 함수의 그래프이다.

따라서 함수의 그래프가 아닌 것은 ⑤이다.



203 정답 $-2\le a\le1$

$0\le x\le3$에서 함숫값 $f(x)=x+a$의 범위는 $a\le f(x)\le3+a$

함수 $f(x)$가 정의되려면 함숫값의 집합이

공역 $\{y\mid-2\le y\le4\}$에 포함되어야 하므로

$-2\le a$, $3+a\le4$ $\quad\therefore -2\le a\le1$

204 정답 $\frac{1}{2}$

$f(-1)=a+5$, $f(0)=a$, $f(1)=a-3$, $f(2)=a-4$,

$f(3)=a-3$이므로 치역은 $\{a-4,\ a-3,\ a,\ a+5\}$이다.

치역의 모든 원소의 합이 0이므로

$(a-4)+(a-3)+a+(a+5)=0$, $4a-2=0$

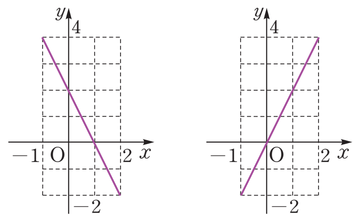
$\therefore a=\frac{1}{2}$

205 정답 2

치역과 공역이 같으려면 다음 그림과 같이

(i) $f(-1)=4$, $f(2)=-2$ 또는 (ii) $f(-1)=-2$, $f(2)=4$

이면 된다.



(i) $f(-1)=4$, $f(2)=-2$에서 $-a+b=4$, $2a+b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

$\therefore a+b=0$

(ii) $f(-1)=-2$, $f(2)=4$에서

$-a+b=-2$, $2a+b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$

$\therefore a+b=2$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 2이다.

206 정답 $a=2$, $b=-1$

$f(-1)=g(-1)$, $f(3)=g(3)$에서

$1-2\times(-1)=2a+b$, 즉 $2a+b=3$ …… ㉠

$f(1)=g(1)$에서 $-1=b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=-1$

207 정답 ①

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x\le 1) \\ 2-x & (1<x\le 2) \end{cases}$$

(i) $0\le x\le 1$일 때, $1\le 2-x\le 2$이므로

$f(x)=x$, $f(2-x)=2-(2-x)=x$

$\therefore f(x)+f(2-x)=x+x=2x$

(ii) $1<x\le 2$일 때, $0\le 2-x<1$이므로

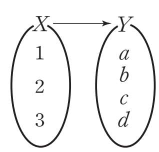
$f(x)=2-x$, $f(2-x)=2-x$

$\therefore f(x)+f(2-x)=(2-x)+(2-x)=2(2-x)$

(i), (ii)에서

$$f(x)+f(2-x)=\begin{cases} 2x & (0\le x\le 1) \\ 2(2-x) & (1<x\le 2) \end{cases}=2f(x)$$

208 정답 (1) 64 (2) 24



(1) 그림에서 정의역의 원소 1이 대응될 수 있는 공역의 원소가 a, b, c, d의 4가지, 2, 3이 각각 대응될 수 있는 공역의 원소도 각각 a, b, c, d의 4가지이므로 X에서 Y로의 함수의 총 개수는

$4\times4\times4=64$(개)

(2) 일대일함수이면 정의역의 각 원소에 대하여 그 함숫값이 모두 달라야 한다.

그림에서 정의역의 원소 1이 대응될 수 있는 공역의 원소가 a, b, c, d의 4가지, 이때 2가 대응될 수 있는 공역의 원소는 1이 대응된 원소를 제외한 나머지 3가지, 3이 대응될 수 있는 공역의 원소는 1과 2가 대응된 원소를 제외한 나머지 2가지이므로 X에서 Y로의 일대일함수의 개수는

$4\times3\times2=24$(개)

개념 보충

함수의 개수

집합 X의 원소가 n개이고 집합 Y의 원소가 m개일 때, X에서 Y로의 함수에 대하여

① 함수의 개수 ⇨ m^n(개)

② 일대일함수의 개수

⇨ $m\times(m-1)\times(m-2)\times\cdots\times(m-n+1)$(개) (단, $m\ge n$)

③ 상수함수의 개수 ⇨ m(개)

④ 일대일대응의 개수

⇨ $m\times(m-1)\times(m-2)\times\cdots\times2\times1$(개) (단, $m=n$)

209 정답 ①, ④

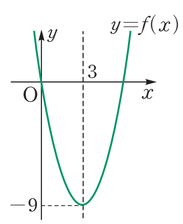
'$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$'의 대우는

'$x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$'

이므로 f는 일대일함수이다. 각 함수의 그래프 중 정의된 구간에서 증가 또는 감소하는 함수를 찾으면 ①, ④이다.

210 정답 $a\ge3$

$y=x^2-6x=(x-3)^2-9$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 f가 일대일함수가 되려면 x의 값이 증가할 때 y의 값이 계속 증가만 하거나 계속 감소만 해야 하므로 대칭축 $x=3$을 기준으로 하여 어느 한 쪽의 전체 또는 일부분이어야 한다.

즉, 정의역 $X=\{x\mid x\ge a\}$에서 $a\ge3$이다.

211 정답 $-1<a<1$

$x\ge 2$이면 $f(x)=a(x-2)+x+4=(a+1)x+4-2a$

$x<2$이면 $f(x)=-a(x-2)+x+4$

$\qquad\qquad =(-a+1)x+2a+4$

일대일함수가 되려면 $x\ge 2$, $x<2$일 때의 직선의 기울기의 부호가 같아야 하므로 $(a+1)(-a+1)>0$이어야 한다.

$(a+1)(-a+1)>0$, $(a+1)(a-1)<0$

$\therefore\ -1<a<1$

212 정답 4

함수 f는 X에서 X로의 일대일대응이고

$f(1)=2$, $f(1)>f(2)$에서 $2>f(2)$이므로

$f(2)=1$

또, $f(3)>f(4)$이므로 $f(3)=4$, $f(4)=3$

$\therefore\ f(2)\times f(3)=1\times 4=4$

213 정답 18

함수 f가 항등함수이면 정의역의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x)=x$이므로

$f(1)=1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

한편, $\{f(1)+2\}\{g(1)-2\}=12$이므로 ㉠을 대입하면

$(1+2)\{g(1)-2\}=12$, $g(1)-2=4$

$\therefore\ g(1)=6$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

함수 g가 상수함수이면 정의역의 임의의 원소 x에 대하여 함숫값 $g(x)=$(일정한 값)이므로

$g(x)=6$, $g(1)=g(2)=g(3)=6$

$\therefore\ g(1)+g(2)+g(3)=6+6+6=18$

연습문제 Ⅱ p.122

214 정답 4

$f=g$이면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같으므로

$f(a)=g(a)$에서

$a^2-2a+2=2a-1$, $a^2-4a+3=0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f(b)=g(b)$에서

$b^2-2b+2=2b-1$, $b^2-4b+3=0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 두 상수 a, b는 x에 대한 이차방정식

$x^2-4x+3=0$

의 두 실근이다.

따라서 근과 계수의 관계에서

$a+b=4$

개념 보충

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

(두 근의 합)$=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$,

(두 근의 곱)$=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

215 정답 풀이 참조

결론을 부정하여 $f(x)=2$를 만족하는 x가 존재한다고 하자.

그 값을 $x=a$라고 두면,

$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\text{는 유리수}) \\ 2x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$에서

(i) a가 유리수이면

$f(a)=a^2=2$에서 $a=\pm\sqrt{2}$

그런데 a는 유리수라고 하였으므로 성립하지 않는다.

(ii) a가 무리수이면

$f(a)=2a=2$에서 $a=1$

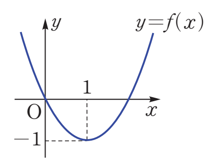
그런데 a는 무리수라고 하였으므로 성립하지 않는다.

따라서 $f(x)=2$를 만족하는 실수 x는 존재하지 않는다.

216 정답 3

$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 f가 일대일대응이 되려면 x의 값이 증가할 때 y의 값이 계속 증가만 하거나 계속 감소만 해야 하므로, 대칭축 $x=1$을 기준으로 어느 한 쪽의 전체 또는 일부분이어야 한다.

$\therefore\ k\ge 1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또한, 일대일대응이 되려면 함수 f의 치역과 공역이 같아야 하므로 공역 $X=\{x\,|\,x\ge k\}$에 대하여 치역도 $\{y\,|\,y\ge k\}$이어야 한다.

따라서 $k=f(k)$에서

$k=k^2-2k$

$k(k-3)=0$

$\therefore\ k=0$ 또는 $k=3$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 k의 값은 $k=3$

217 정답 **9** 서술형

$f(ab)=f(a)+f(b)$에서

$$f(abc)=f(ab)+f(c)=f(a)+f(b)+f(c)$$

$$f(abcd)=f(abc)+f(d)=f(a)+f(b)+f(c)+f(d)$$

와 같이 나타낼 수 있다. … ①

24를 소인수분해하여 소수의 곱으로 나타내면

$24=2\times2\times2\times3$ … ②

$\therefore f(24)=f(2\times2\times2\times3)$

$=f(2)+f(2)+f(2)+f(3)$

$=3f(2)+f(3)$ … ③

이때, 2와 3은 소수이므로 $f(2)=2$, $f(3)=3$

$\therefore f(24)=3f(2)+f(3)=6+3=9$ … ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	조건 (나)에서 함수 f의 성질 파악하기	20%
②	24를 소인수분해하기	20%
③	$f(24)$의 값을 $f(2)$, $f(3)$의 값을 이용하여 나타내기	40%
③	$f(24)$의 값 구하기	20%

8. 합성함수

확인문제 pp.126~131

218 정답 (1) **14** (2) **15** (3) **9**

(1) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=9+3+2=14$

(2) $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(8)=15$

(3) $(f\circ f\circ f)(2)=f(f(f(2)))=f(f(3))=f(5)=9$

219 정답 $\{1,\ 2\}$

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=2$

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)=1$

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(1)=2$

따라서 합성함수 $f\circ g$의 치역은 $\{1,\ 2\}$이다.

220 정답 (1) $f(g(x))=6x-2$ (2) $g(x)=2x+1$

(1) $f(x)=3x+1$, $g(x)=2x-1$에서

$f(g(x))=f(2x-1)$

$=3(2x-1)+1=6x-2$

(2) $f(x)=2x+1$에서 $f(g(x))=2g(x)+1$이므로

$2g(x)+1=4x+3$, $2g(x)=4x+2$

$\therefore g(x)=2x+1$

221 정답 (1) 8 (2) $f(x)=2x-2$

(1) $f(3x-1)$에서 $3x-1=5$인 x의 값을 구하면 $x=2$

$f(3x-1)=6x-4$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(5)=6\times2-4=8$

(2) $f(3x-1)=6x-4$ …… ㉠에서 $3x-1=t$라 두면

$3x=t+1$, 즉 $x=\dfrac{t+1}{3}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $f(t)=6\cdot\dfrac{t+1}{3}-4=2t-2$

$\therefore f(x)=2x-2$

222 정답 **7**

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(a-2)$

$=3(a-2)+2=3a-4$

$3a-4=5$에서 $a=3$이므로 $f(x)=3x-2$

$\therefore f(3)=9-2=7$

223 정답 -1

$(h\circ(g\circ f))(a)=((h\circ g)\circ f)(a)=(h\circ g)(f(a))$

$=(h\circ g)(3a+1)=-2(3a+1)+4$

$=-6a+2$

$-6a+2=8$에서 $a=-1$

224 정답 (1) $h(x)=-2x+3$ (2) $h(x)=-2x+9$

(1) $f(h(x))=h(x)+2$이므로 $f(h(x))=g(x)$에서

$h(x)+2=-2x+5$

$\therefore h(x)=-2x+3$

(2) $h(f(x))=g(x)$에서 $h(x+2)=-2x+5$ ······ ㉠

여기서 $x+2=t$라 두면 $x=t-2$이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$h(t)=-2(t-2)+5=-2t+9$

$\therefore h(x)=-2x+9$

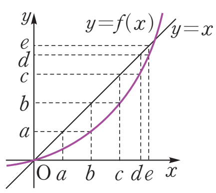
225 정답 $f(x)=2x+6$

$f\left(\frac{x-3}{2}\right)=x+3$에서 $\frac{x-3}{2}=t$라 두면 $x=2t+3$

따라서 $f(t)=(2t+3)+3=2t+6$이므로

$f(x)=2x+6$

226 정답 (1) a (2) d



(1) 위의 그림에서 $f(d)=c$, $f(c)=b$, $f(b)=a$이므로

$(f\circ f\circ f)(d)=f(f(f(d)))$

$=f(f(c))$

$=f(b)=a$

(2) $(f\circ f)(x)=b$에서 $f(f(x))=b$

한편, 위의 그림에서 $f(c)=b$이고, $f(x)$는 일대일함수이므로 $f(x)=c$이다.

또, $f(d)=c$이므로 $f(x)=c$를 만족하는 x의 값은 d이다.

따라서 $(f\circ f)(x)=b$이면 $x=d$이다.

227 정답 풀이 참조

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 식으로 나타내면

$$f(x)=-x+2,\ g(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ -2x+4 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

$$\therefore g(f(x))=\begin{cases} 2f(x) & (0\le f(x)<1) & \cdots\cdots ㉠ \\ -2f(x)+4 & (1\le f(x)\le 2) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

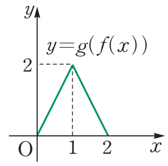
㉠에서 $0\le f(x)<1$인 x의 범위는 $1<x\le 2$이고,

㉡에서 $1\le f(x)\le 2$인 x의 범위는 $0\le x\le 1$이므로

$$g(f(x))=\begin{cases} 2(-x+2) & (1<x\le 2) \\ -2(-x+2)+4 & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2x & (0\le x\le 1) \\ -2x+4 & (1<x\le 2)\end{cases}$$

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



연습문제 I ······ pp.132~134

228 정답 (1) 1 (2) 4 (3) 1 (4) 2

(1) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=1$

(2) $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(4)=4$

(3) $(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(3)=1$

(4) $(g\circ g)(2)=g(g(2))=g(4)=2$

229 정답 (1) 24 (2) 7 (3) 1 (4) 21

(1) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(5)=5^2-1=24$

(2) $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(3)=7$

(3) $(f\circ g\circ h)(2)=f(g(h(2)))=f(g(-1))=f(0)=1$

(4) $(h\circ g\circ f)(2)=h(g(f(2)))=h(g(5))=h(24)=21$

230 정답 (1) $(f\circ g)(x)=2x^2+1$

(2) $(g\circ f)(x)=4x^2-4x+2$

(3) $(f\circ f\circ f\circ f)(x)=16x-15$

(1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)$

$=2(x^2+1)-1=2x^2+1$

(2) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$

$=(2x-1)^2+1=4x^2-4x+2$

(3) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x-1)$

$=2(2x-1)-1=4x-3$

$(f\circ f\circ f)(x)=f(4x-3)=2(4x-3)-1=8x-7$

$(f\circ f\circ f\circ f)(x)=f(8x-7)=2(8x-7)-1=16x-15$

231 정답 -3 또는 1

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(a^2-2)=(a^2-2)+2a$

$=a^2+2a-2$

$(f\circ g)(a)=1$에서 $a^2+2a-2=1$

$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

232 정답 ④

$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(2)=-4+5=1$,

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(3)=9+2=11$이므로

$(f\circ g)(0)+(g\circ f)(0)=1+11=12$

233 정답 7

$f(1)=3$, $g(1)=a+3$이고 $f(g(x))=g(f(x))$의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(g(1))=g(f(1))$이므로

$f(a+3)=g(3)$, $2(a+3)+1=3a+3$ $\therefore a=4$

$\therefore g(1)=a+3=4+3=7$

다른 풀이

$f(g(x)=g(f(x))$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(g(0))=g(f(0))$, $f(3)=g(1)$

이때, $f(3)=7$

$\therefore g(1)=7$

234 정답 $a=-1$, $b=2$

$f(1)=g(1)$에서 $a+2=b-1$, 즉 $a-b=-3$ …… ㉠

$f(g(x))=g(f(x))$에서 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(g(0))=g(f(0))$, $f(-1)=g(2)$

$-a+2=2b-1$ $\therefore a+2b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

235 정답 $a=2$, $b=-2$

$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$이므로

$$\begin{aligned}(h\circ(g\circ f))(x)&=((h\circ g)\circ f)(x)\\&=(h\circ g)(-x+a)\\&=4(-x+a)-3\\&=-4x+4a-3\end{aligned}$$

따라서 $2bx+5=-4x+4a-3$이 성립한다.

이 식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$2b=-4$, $5=4a-3$

$\therefore a=2$, $b=-2$

개념 보충

항등식의 성질

① $ax+b=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=0$, $b=0$

② $ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식

$\Longleftrightarrow a=a'$, $b=b'$

항등식에서 미정계수를 구할 때는 양변의 동류항의 계수를 비교하여 계수를 정하는 계수비교법이나 문자에 적당한 수를 대입하여 계수를 정하는 수치대입법을 사용한다.

236 정답 5

함수 $y=f(x)$는 일대일대응이므로 $f(a)=f(b)$이면 $a=b$이다.

$f(f(f(k)))=2$에서 $f(f(k))=a$라 하면 $f(a)=2$ …… ㉠

주어진 그래프에서 $f(4)=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=4$, 즉 $f(f(k))=4$

여기서 $f(k)=b$라고 두면 $f(b)=4$ …… ㉢

또한, 주어진 그래프에서 $f(1)=4$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $f(1)=4$이므로 $b=1$, 즉 $f(k)=1$

주어진 그래프에서 $f(5)=1$

$\therefore k=5$

237 정답 (1) 7 (2) $f(x)=6x-5$

(1) $f\left(\frac{x+1}{3}\right)=3x-2$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f\left(\frac{3+1}{2}\right)=3\times3-2$

$\therefore f(2)=7$

(2) $\frac{x+1}{2}=t$라 하면 $x=2t-1$

이 식을 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=3x-2$에 대입하면

$f(t)=3(2t-1)-2=6t-5$

$\therefore f(x)=6x-5$

238 정답 (1) $h(x)=\frac{3}{2}x+3$ (2) $h(x)=\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$

(1) $f(h(x))=2h(x)-1$이므로

$f(h(x))=g(x)$에서 $2h(x)-1=3x+5$

$\therefore h(x)=\frac{3}{2}x+3$

(2) $h(f(x))=g(x)$에서 $h(2x-1)=3x+5$

$2x-1=t$라 두면 $x=\frac{t+1}{2}$

따라서 $h(t)=3\cdot\frac{t+1}{2}+5=\frac{3}{2}t+\frac{13}{2}$이므로

$h(x)=\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$

239 정답 $a=2$, $b=1$

$f(x)=ax+b$ …… ㉠

$f(1)=3$에서 $a+b=3$ …… ㉡

$f(f(x))=4x+3$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(f(1))=7$

이때 $f(1)=3$이므로 $f(3)=7$

㉠에 $x=3$을 대입하면 $3a+b=7$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

다른 풀이

$f(x)=ax+b$에 대하여

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$$
$$=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$$

$(f\circ f)(x)=4x+3$이므로 $a^2x+ab+b=4x+3$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a^2=4,\ ab+b=3$ …… ㉠

또한, $f(1)=3$에서 $a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡으로부터 $a=2,\ b=1$

240 정답 1

$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4,\ f(4)=1$이고 $g(1)=3$이므로

$$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)$$
$$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=4$$

$g\circ f=f\circ g$이므로 $g(2)=4$

한편, $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)$이고

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(4)=1$이므로

$$g(3)=1$$

241 정답 ②

x가 유리수이면 $f(x)=1,\ f(f(x))=f(1)=1$

x가 무리수이면 $f(x)=0,\ f(f(x))=f(0)=1$

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=1$이다.

따라서 합성함수 $f\circ f$의 치역은 $\{1\}$이다.

242 정답 ②

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x+2)=(x+2)+2=x+4$

$$(f\circ f\circ f)(x)=f((f(f(x)))$$
$$=f(x+4)=(x+4)+2=x+6$$
$$(f\circ f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(f(x))))$$
$$=f(x+6)=(x+6)+2=x+8$$
$$\vdots$$

그러므로 $(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{10\text{개}})(x)=x+20$으로 추정할 수 있다.

$$\therefore\ (\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{10\text{개}})(2)=2+20=22$$

연습문제Ⅱ p.135

243 정답 2

정의역의 모든 x에 대하여 $f(x)=g(h(x))$를 만족하므로

$x=3$을 대입하면

$$f(3)=g(h(3))$$

여기서 $h(3)=k$라고 두면 $f(3)=g(k)$

$f(3)=4$이므로 $f(3)=g(k)=4$

주어진 함수에서 g는 일대일대응이고 $g(2)=4$이므로

$$k=2$$
$$\therefore\ h(3)=2$$

244 정답 98

자연수 n에 대하여

$f(n)=\begin{cases} n-2 & (n\ge 100\text{일 때}) \\ f(f(n+4)) & (n<100\text{일 때})\end{cases}$이므로

$$f(96)=f(f(100))$$
$$=f(98)=f(f(102))=f(100)=98$$

245 정답 (1) 4 (2) 4

(1) $(f\circ f\circ f)(8)=f(f(f(8)))=f(f(6))=f(2)=4$

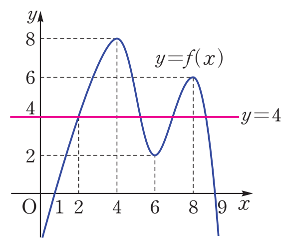
(2) $f(x)=t$라 하면 $f(f(x))=f(t)=8$에서

$t=4$, 즉 $f(x)=4$

방정식 $f(x)=4$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=4$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

다음 그림에서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=4$의 그래프는 서로 다른 네 점에서 만난다.

따라서 방정식 $f(f(x))=8$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



246 정답 풀이 참조

주어진 그래프에서 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\ge 0) \\ x+1 & (x<0)\end{cases}$이므로

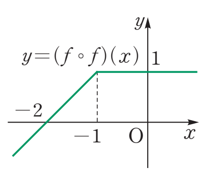
$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\begin{cases} 1 & (f(x)\ge 0) \\ f(x)+1 & (f(x)<0)\end{cases}$$

$f(x)\ge 0$인 x의 범위는 $x\ge -1$이고,

$f(x)<0$인 x의 범위는 $x<-1$이므로

$$f(f(x))=\begin{cases} 1 & (x\ge -1) \\ f(x)+1 & (x<-1)\end{cases}=\begin{cases} 1 & (x\ge -1) \\ x+2 & (x<-1)\end{cases}$$

그래프는 다음 그림과 같다.



247 정답 $a=1,\ b=0$ 서술형

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b$

$\qquad =a^2x+ab+b$ ⋯ ①

이므로 x의 모든 값에 대하여 $(f\circ f)(x)=f(x)$가 성립하려면 $a^2x+ab+b=ax+b$가 x에 대한 항등식이 되어야 한다. ⋯ ②

항등식의 성질에서 $a^2=a$ ⋯⋯ ㉠

$ab+b=b$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $a=0$ 또는 $a=1$

㉡에서 $ab=0$이므로 $a=0$ 또는 $b=0$

그런데 $a\neq0$이므로 $a=1$이고 $b=0$ ⋯ ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$(f\circ f)(x)$ 구하기	30%
②	$(f\circ f)(x)=f(x)$가 x에 대한 항등식임을 알기	30%
③	$a,\ b$의 값 정하기	40%

9. 역함수

확인문제 pp.141~146

248 정답 $\frac{1}{3}$

$g^{-1}(1)=2$에서 $g(2)=1$

$g(2)=2\times2+a=1$에서 $a=-3$이므로 $f(x)=-3x+2$

$f^{-1}(1)=k$라고 두면 $f(k)=1$이므로

$-3k+2=1,\ -3k=-1 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{3}$

249 정답 2

$\frac{x+1}{2}=t$라 하면 $x=2t-1$이므로

$f(t)=-(2t-1)+1=-2t+2$

$f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$이므로

$-2k+2=-2,\ -2k=-4 \qquad \therefore\ k=2$

다른 풀이

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=-x+1$에서 $\frac{x+1}{2}=f^{-1}(-x+1)$

양변에 $x=3$을 대입하면 $\frac{3+1}{2}=f^{-1}(-3+1)$

$\therefore\ f^{-1}(-2)=2$

250 정답 $a=4,\ b=-2$

함수 $f(x)=ax+b$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 치역과 공역이 같아야 한다.

함수 $f(x)=ax+b$의 그래프는 기울기 a가 양수인 직선이고, 정의역이 $X=\{x\,|\,0\leq x\leq1\}$이므로

$f(0)=b,\ f(1)=a+b$에서 치역은 $\{y\,|\,b\leq y\leq a+b\}$

이때 공역이 $Y=\{y\,|\,-2\leq y\leq2\}$이므로

$b=-2,\ a+b=2$이어야 한다.

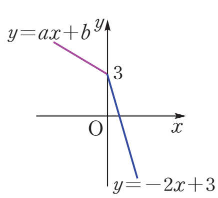
$\therefore\ a=4,\ b=-2$

개념 보충

함수 f가 일대일대응이 아니면 역으로 대응하는 관계는 함수가 아니므로 역함수가 존재하지 않는다. 따라서 역함수를 구할 때는 반드시 주어진 함수가 일대일대응인지를 먼저 확인해야 한다.

251 정답 2

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 두 직선 $y=-2x+3$, $y=ax+b$의 기울기의 부호가 같아야 하므로 $a<0$

이때 a는 정수이므로 $a\le -1$

(ii) 직선 $y=ax+b$가 점 $(0, 3)$을 지나야 하므로

$3=0+b \qquad \therefore b=3$

(i), (ii)에 의하여 $a+b\le -1+3=2$

따라서 $a+b$의 최댓값은 2이다.

252 정답 (1) $y=4x+4$ (2) $y=x-2\ (x\ge 2)$

(1) $y=\frac{1}{4}x-1$에서 x를 y에 관한 식으로 나타내면

$\frac{1}{4}x=y+1 \qquad \therefore x=4y+4$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=4x+4$

따라서 함수 $y=\frac{1}{4}x-1$의 역함수는 $y=4x+4$

(2) 함수 $y=x+2$의 정의역이 $\{x|x\ge 0\}$이므로 치역은 $\{y|y\ge 2\}$이다.

즉, 집합 $\{x|x\ge 0\}$에서 집합 $\{y|y\ge 2\}$로의 일대일대응이므로 역함수를 가진다.

$y=x+2$를 x에 관하여 정리하면

$x=y-2\ (x\ge 0,\ y\ge 2)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x-2\ (x\ge 2,\ y\ge 0)$

따라서 함수 $y=x+2$의 역함수는 $y=x-2\ (x\ge 2)$

253 정답 $y=-\sqrt{x}\ (x\ge 0)$

(i) 함수 $y=x^2$의 정의역이 $\{x|x\le 0\}$이므로 치역은 $\{y|y\ge 0\}$이다.

또, 집합 $\{x|x\le 0\}$에서 집합 $\{y|y\ge 0\}$으로의 일대일대응이므로 역함수를 가진다.

(ii) $y=x^2\ (x\le 0,\ y\ge 0)$을 x에 관하여 풀면 $x^2=y$

$x\le 0$이므로 $x=-\sqrt{y}\ (x\le 0,\ y\ge 0)$

(iii) x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\sqrt{x}\ (x\ge 0,\ y\le 0)$

따라서 함수 $y=x^2\ (x\le 0)$의 역함수는

$y=-\sqrt{x}\ (x\ge 0)$

254 정답 (1) $f(x)=2-x$ (2) $g^{-1}(x)=2x-5$

(1) $(f^{-1})^{-1}=f$이므로 함수 f는 $f^{-1}(x)=2-x$의 역함수이다.

$y=2-x$에서 $x=2-y$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=2-x$

$\therefore f(x)=2-x$

(2) $f(g(x))=x$, 즉 $(f\circ g)(x)=x$이므로 두 함수 f와 g는 서로 역함수 관계이다.

$\therefore g^{-1}(x)=f(x)=2x-5$

다른 풀이

$f(g(x))=x$에서 x 대신 $g^{-1}(x)$를 대입하면

$f(g(g^{-1}(x)))=g^{-1}(x)$, $(f\circ g\circ g^{-1})(x)=g^{-1}(x)$

즉, $(f\circ(g\circ g^{-1}))(x)=g^{-1}(x)$에서 $f(x)=g^{-1}(x)$이므로

$g^{-1}(x)=2x-5$

255 정답 -1

$(g^{-1}\circ f)(a)=1$에서 양변의 왼쪽에 함수 g를 취하면

$(g\circ(g^{-1}\circ f))(a)=g(1)$, $((g\circ g^{-1})\circ f)(a)=g(1)$

즉, $f(a)=g(1)$이므로

$3-2a=2+3 \qquad \therefore a=-1$

256 정답 -2

$$\begin{aligned}(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(4)&=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(4)\\&=((g\circ g^{-1})\circ(f^{-1}\circ g))(4)\\&=(f^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(g(4))\\&=f^{-1}(-1)\end{aligned}$$

$f^{-1}(-1)=a$라 하면 $f(a)=-1$이므로

$2a+3=-1 \qquad \therefore a=-2$

257 정답 $f^{-1}(3x-2)=\frac{1}{3}\{g(x)+2\}$

$h(x)=3x-2$라 하면 $f(3x-2)=f(h(x))=(f\circ h)(x)$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ h)^{-1}(x)&=(h^{-1}\circ f^{-1})(x)\\&=(h^{-1}\circ g)(x)=h^{-1}(g(x))\end{aligned}$$

이때 $h(x)=3x-2$의 역함수를 구하면

$y=3x-2$에서 $x=\frac{1}{3}(y+2)$이고, x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{3}(x+2)$

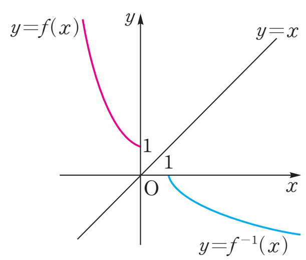
즉, $h^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x+2)$이므로

$(f\circ h)^{-1}(x)=h^{-1}(g(x))=\frac{1}{3}\{g(x)+2\}$

258 정답 풀이 참조

주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재하고, 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $f(x)=x^2+1\ (x\le 0)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



259 정답 (6, 6)

함수 $y=\frac{2}{3}x+2$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=\frac{2}{3}x+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 교점의 x좌표는 $\frac{2}{3}x+2=x$에서 $x=6$

따라서 교점의 좌표는 $(6,\ 6)$이다.

연습문제 I ······ pp.147~149

260 정답 (1) 3 (2) 2

(1) $g^{-1}(2)=a$라고 두면 $g(a)=2$에서 $a=1$

또, $f^{-1}(1)=b$라고 두면 $f(b)=1$에서 $b=3$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(2)=f^{-1}(g^{-1}(2))=f^{-1}(1)=3$

(2) $(f\circ g)^{-1}(2)=(g^{-1}\circ f^{-1})(2)=g^{-1}(f^{-1}(2))$

$f^{-1}(2)=c$라고 두면 $f(c)=2$에서 $c=1$

$g^{-1}(1)=d$라고 두면 $g(d)=1$에서 $d=2$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(2)=g^{-1}(f^{-1}(2))=g^{-1}(1)=2$

261 정답 −2

$f^{-1}(3)=-1$에서 $f(-1)=3$

$-a+1=3 \qquad \therefore a=-2$

262 정답 4

$f(2x+6)=-6x+2$에서 $2x+6=f^{-1}(-6x+2)$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $f^{-1}(8)=4$

다른 풀이

$f^{-1}(8)=k$라 하면 $f(k)=8$

$f(2x+6)=-6x+2$에서 $x=-1$을 대입하면 $f(4)=8$

이때 함수 f는 일대일대응이므로

$k=4$

263 정답 1

$f^{-1}(-5)=a,\ f^{-1}(5)=b$라고 하면

$f(a)=-5,\ f(b)=5$

이때 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & (x<0)\\ x+1 & (x\ge 0)\end{cases}$에서 함수 $f(x)$의 함숫값은

$x\ge 0$이면 $f(x)\ge 1$이고, $x<0$이면 $f(x)<1$이므로

$f(a)=-5$에서 $a<0$, 즉 $2a+1=-5 \qquad \therefore a=-3$

$f(b)=5$에서 $b\ge 0$, 즉 $b+1=5 \qquad \therefore b=4$

$\therefore f^{-1}(-5)+f^{-1}(5)=a+b=-3+4=1$

264 정답 $f(x)=2x-1$

$f^{-1}(3)=2$에서 $f(2)=3$이므로 $2a+b=3$ ······ ㉠

$(f\circ f)(2)=5$에서 $(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(3)=5$이므로

$3a+b=5$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

$\therefore f(x)=2x-1$

265 정답 (1) $y=\frac{x+3}{2}$ (2) $y=\frac{x}{2}+3$

(1) $y=2x-3$을 x에 관하여 풀면 $2x=y+3$

$\therefore x=\frac{y+3}{2}$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x+3}{2}$

다른 풀이

$y=2x-3$은 x에 먼저 2를 곱한 다음 3을 뺀 함수이므로 역순으로 하여 그 역함수는 x에 먼저 3을 더한 다음 2로 나눈 함수가 된다.

$\therefore y=\frac{x+3}{2}$ ← p.145 유형 005의 바른개념 참조

(2) $y=2(x-3)$을 x에 관하여 풀면 $x-3=\frac{y}{2}$

$\therefore x=\frac{y}{2}+3$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x}{2}+3$

다른 풀이

$y=2(x-3)$은 x에 먼저 3을 뺀 다음 2를 곱한 함수이므로 역순으로 하여 그 역함수는 x를 먼저 2로 나눈 다음 3을 더한 함수가 된다.

$\therefore y=\frac{x}{2}+3$

266 정답 3

$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+2$의 역함수가 $f(x)$이므로

$y=\frac{1}{3}x+2$로 놓고 x를 y에 관한 식으로 정리하면

$3y=x+6 \qquad \therefore x=3y-6$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3x-6$이므로

$f(x)=3x-6$

$\therefore f(3)=3\times 3-6=3$

다른 풀이

$f(3)=k$라고 하면 $f^{-1}(k)=3$에서

$\frac{1}{3}k+2=3,\ \frac{1}{3}k=1 \qquad \therefore k=3$

267 정답 ⑤

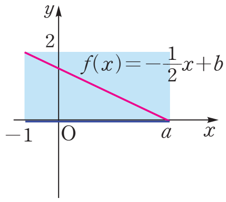
역함수가 존재하려면 그 함수가 일대일대응이어야 한다.

따라서 역함수를 가지는 함수의 그래프는 ⑤이다.

268 정답 $\frac{9}{2}$

함수 $f(x)$가 역함수를 가지면 $f(x)$는 일대일대응이므로 치역과 공역이 같아야 한다.

이때 일차함수 $f(x)=-\frac{1}{2}x+b$는 기울기가 음수인 직선이므로 오른쪽 그림에서 $f(-1)=2$이고 $f(a)=0$이다.



$f(-1)=2$에서 $\frac{1}{2}+b=2$

$\therefore b=\frac{3}{2}$

$f(a)=0$에서 $-\frac{1}{2}a+b=0$, $-\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}=0$

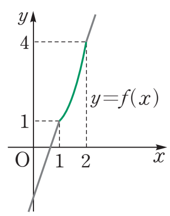
$-\frac{1}{2}a=-\frac{3}{2}$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore a+b=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

269 정답 -6

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다.

즉, 두 점 $(1, 1)$, $(2, 4)$에서 두 함수 $y=x^2$, $y=ax+b$의 그래프가 만나야 하므로



$1=a+b$, $4=2a+b$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-2$

$\therefore ab=3\times(-2)=-6$

270 정답 6

$((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(-1)$

$=(g^{-1}\circ f\circ f)(-1)$

$=g^{-1}(f(f(-1)))$

$=g^{-1}(f(1))$ $\leftarrow f(-1)=2\times(-1)+3=1$

$=g^{-1}(4)$ $\leftarrow f(1)=1^2+3=4$

$g^{-1}(4)=k$라 하면 $g(k)=4$이므로

$k-2=4$ $\quad\therefore k=6$

271 정답 $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}(x-1)$

먼저 $f(x)$를 구하기 위해 $3x-1=t$라고 하면

$x=\frac{t+1}{3}$

이 식을 $f(3x-1)=-6x+3$에 대입하면

$f(t)=-6\cdot\frac{t+1}{3}+3=-2t+1$

$\therefore f(x)=-2x+1$

이제 $f^{-1}(x)$를 구하기 위해 $y=-2x+1$을 x에 관하여 풀면 $-2x=y-1$, $x=-\frac{1}{2}(y-1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{2}(x-1)$

$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}(x-1)$

다른 풀이

$f(g(x))=x$이면 $g(x)$가 $f^{-1}(x)$이므로

$f(3x-1)=-6x+3$의 우변이 x가 되도록 변형하자.

$-6x+3=t$로 놓으면 $x=\frac{t-3}{-6}$

이때 $3x-1=3\cdot\frac{t-3}{-6}-1=\frac{t-1}{-2}$이므로

$f(3x-1)=-6x+3$에 대입하면 $f\left(\frac{t-1}{-2}\right)=t$

여기서 t를 x로 바꾸면 $f\left(\frac{x-1}{-2}\right)=x$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x-1}{-2}=-\frac{1}{2}(x-1)$

272 정답 ④

함수 $y=f(x)$와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\frac{1}{6}(x^2+8)=x$, $x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=4$

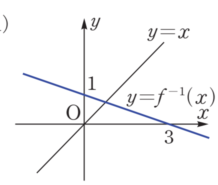
따라서 두 교점은 $(2, 2)$, $(4, 4)$이므로 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(4-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$

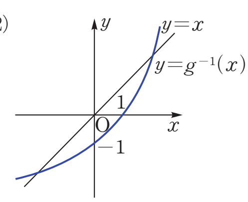
273 정답 풀이 참조

어떤 함수의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프가 그 역함수의 그래프이므로 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 역함수의 그래프는 각각 다음과 같다.

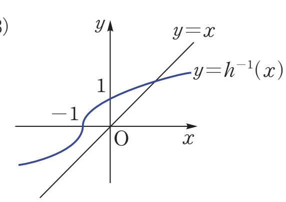
(1)



(2)

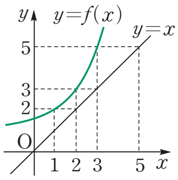


(3)



274 정답 2

직선 $y=x$를 이용하여 $y=f(x)$의 y좌표에 대응하는 x좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(5)=a$이면 $f(a)=5$에서 $a=3$

$f^{-1}(3)=b$이면 $f(b)=3$에서 $b=2$

$\therefore\ (f\circ f)^{-1}(5)=f^{-1}(f^{-1}(5))=f^{-1}(3)=2$

연습문제 Ⅱ

p.150

275 정답 ④

$f(2g(x)-x+4)=x$에서 $f^{-1}(x)=2g(x)-x+4$

$f^{-1}(x)=g(x)$이므로 $g(x)=2g(x)-x+4$

$\therefore\ g(x)=x-4$

이때 $f(1)=k$라 하면 $f^{-1}(k)=g(k)=1$에서 $k-4=1$

$\therefore\ k=5$

276 정답 12

$f^{-1}\circ h\circ g^{-1}=f$의 양변의 오른쪽에 함수 g를 취하면

$f^{-1}\circ h\circ g^{-1}\circ g=f\circ g$

즉, $f^{-1}\circ h\circ(g^{-1}\circ g)=f\circ g$에서

$f^{-1}\circ h=f\circ g$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변의 왼쪽에 함수 f를 취하면

$f\circ f^{-1}\circ h=f\circ f\circ g$

즉, $(f\circ f^{-1})\circ h=f\circ f\circ g$에서 $h=f\circ f\circ g$

$\therefore\ h(x)=(f\circ f\circ g)(x)$

$=f(f(g(x)))=f(f(x+2))$

$=f(2x+4)=2(2x+4)=4x+8$

따라서 $h(x)=ax+b$에서 $a=4$, $b=8$이므로

$a+b=4+8=12$

277 정답 ⑤

$h(x)=2x+3$이라 하면

$y=f(2x+3)=f(h(x))=(f\circ h)(x)$

이때 $(f\circ h)(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$(f\circ h)^{-1}=g$, 즉 $h^{-1}\circ f^{-1}=g$에서

$f^{-1}=h\circ g$

$h(x)=2x+3$이므로

$f^{-1}(x)=(h\circ g)(x)=h(g(x))$

$=2g(x)+3$

278 정답 $g(x)=2x+4$

$f^{-1}(4x+2)=x+2$에서 $4x+2=f(x+2)$

이때 $g(2x-1)=f(x+2)$에서

$g(2x-1)=4x+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2x-1=t$로 놓으면

$2x=t+1 \qquad \therefore\ x=\dfrac{t+1}{2}$

이 식을 ㉠에 대입하면 $g(t)=4\cdot\dfrac{t+1}{2}+2=2t+4$이므로

$g(x)=2x+4$

279 정답 2 서술형

$f(a)=f^{-1}(a)$를 만족하는 상수 a는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표이다. $\cdots$ ①

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표이므로 $x^2+2x-6=x$에서 $\cdots$ ②

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq-1$이므로 $x=2$

$\therefore\ a=2$ $\cdots$ ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 대칭성 이해하기	40%
②	$f(x)=x$를 만족하는 x의 값 구하기	40%
③	a의 값 구하기	20%

10. 유리식과 유리함수

확인문제 .... pp.154~165

280 정답 (1) $\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}$ (2) $-\dfrac{1}{x+1}$

(1) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{2}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}$

(2) $\dfrac{3}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{x-2}$

$=\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}-\dfrac{1}{x-2}$

$=\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}-\dfrac{x+1}{(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{3-(x+1)}{(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{-\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-2)}}$

$=-\dfrac{1}{x+1}$

281 정답 (1) $\dfrac{x(x+4)}{(x+1)(x-2)}$ (2) $\dfrac{2x}{x+1}$

(1) $\dfrac{x+4}{x^2-2x-3}\times\dfrac{x^2-3x}{x-2}=\dfrac{x+4}{(x+1)\cancel{(x-3)}}\times\dfrac{x\cancel{(x-3)}}{x-2}$

$=\dfrac{x(x+4)}{(x+1)(x-2)}$

(2) $\dfrac{2x-4}{x^2-1}\div\dfrac{x-2}{x^2-x}=\dfrac{2x-4}{x^2-1}\times\dfrac{x^2-x}{x-2}$

$=\dfrac{2\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}\times\dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-2}}$

$=\dfrac{2x}{x+1}$

282 정답 $\dfrac{4x}{(x+1)(x-1)}$

$\dfrac{x^2+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x-1)+2}{x+1}=x-1+\dfrac{2}{x+1}$,

$\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$이므로

$\dfrac{x^2+1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}-x$

$=\left(x-1+\dfrac{2}{x+1}\right)+\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)-x$

$=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}$

$=\dfrac{2(x-1)+2(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{4x}{(x+1)(x-1)}$

283 정답 $-x+1$

$1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=1-\dfrac{1\times x}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\times x}=1-\dfrac{x}{x-1}$

$=\dfrac{(x-1)-x}{x-1}=\dfrac{-1}{x-1}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{1\times(x-1)}{\dfrac{-1}{x-1}\times(x-1)}$

$=\dfrac{x-1}{-1}=-x+1$

284 정답 (1) $y=\dfrac{1}{x+1}+2$,

정의역 : $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$,

치역 : $\{y\,|\,y\neq2$인 실수$\}$,

점근선의 방정식 : $x=-1$, $y=2$

(2) $y=\dfrac{3}{x+2}-2$,

정의역 : $\{x\,|\,x\neq-2$인 실수$\}$,

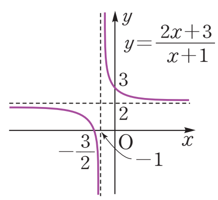
치역 : $\{y\,|\,y\neq-2$인 실수$\}$,

점근선의 방정식 : $x=-2$, $y=-2$

(1) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}$

$=\dfrac{1}{x+1}+2$

따라서 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



정의역 : $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$

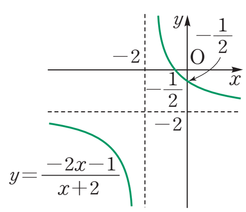
치역 : $\{y\,|\,y\neq2$인 실수$\}$

점근선의 방정식 : $x=-1$, $y=2$

(2) $y=\dfrac{-2x-1}{x+2}=\dfrac{-2(x+2)+3}{x+2}$

$=\dfrac{3}{x+2}-2$

따라서 $y=\dfrac{-2x-1}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



정의역 : $\{x\,|\,x\neq-2$인 실수$\}$

치역 : $\{y\,|\,y\neq-2$인 실수$\}$

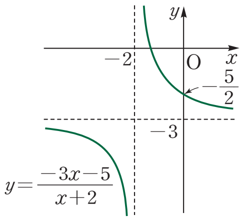
점근선의 방정식 : $x=-2$, $y=-2$

285 정답 **그래프는 풀이 참조,**
정의역 : $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$,
치역 : $\{y|y\neq-3$인 실수$\}$,
점근선의 방정식 : $x=-2$, $y=-3$

주어진 함수를 변형하면

$$y=\frac{-3x-5}{x+2}=\frac{-3(x+2)+1}{x+2}=\frac{1}{x+2}-3$$

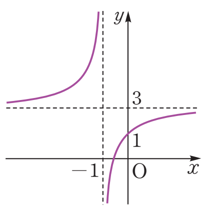
따라서 함수 $y=\frac{-3x-5}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



정의역 : $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$
치역 : $\{y|y\neq-3$인 실수$\}$
점근선의 방정식 : $x=-2$, $y=-3$

286 정답 **$a=-1$, $b=2$, $k=1$**

함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면



$$y=\frac{k}{x-1}+2=\frac{k}{x-1}+\frac{2(x-1)}{x-1}$$
$$=\frac{2x-2+k}{x-1}$$

함수 $y=\frac{bx-1}{x+a}$과 계수를 비교하면

$a=-1$, $b=2$, $-2+k=-1$

$\therefore a=-1$, $b=2$, $k=1$

287 정답 **ㄷ**

ㄱ. $y=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+2$

즉, $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{3x+1}{x+1}=\frac{3(x+1)-2}{x+1}=\frac{-2}{x+1}+3$

즉, $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$

즉, $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프를 평행이동하여 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 겹칠 수 있는 것은 ㄷ뿐이다.

288 정답 **$a=3$, $b=2$**

함수 $y=\frac{ax-1}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=-b$, $y=\frac{a}{1}=a$이므로 $b=2$, $a=3$

다른 풀이

$$y=\frac{ax-1}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab-1}{x+b}=\frac{-ab-1}{x+b}+a$$

이므로 이 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=a$이다. 따라서 $a=3$, $b=2$이다.

289 정답 **2**

주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$이므로 함수의 식을 $y=\frac{k}{x+1}+2$라 두자.

이 함수의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로 $1=k+2$

$\therefore k=-1$

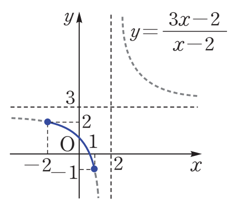
따라서 $y=\frac{-1}{x+1}+2=\frac{2x+1}{x+1}$이므로

$a=2$, $b=1$, $c=1$ $\quad\therefore abc=2$

290 정답 **$\{y|-1\leq y\leq 2\}$**

$y=\frac{3x-2}{x-2}=\frac{3(x-2)+4}{x-2}=\frac{4}{x-2}+3$이므로

$y=\frac{3x-2}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



$-2\leq x\leq 1$에서 $y=\frac{3x-2}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $x=-2$일 때 $y=2$, $x=1$일 때 $y=-1$이므로

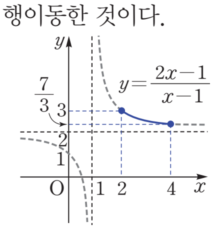
치역은 $\{y|-1\leq y\leq 2\}$

291 정답 **7**

$$y=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+2$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$2\leq x\leq 4$에서 함수 $y=\frac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때 최댓값 M, $x=4$일 때 최솟값 m을 가진다.



즉, $M=\frac{2\times2-1}{2-1}=3$, $m=\frac{2\times4-1}{4-1}=\frac{7}{3}$이므로

$M\times m=3\times\frac{7}{3}=7$

292 정답 $a=4,\ b=-1$

$y=\dfrac{ax+3}{x+b}$의 점근선의 방정식은 $x=-b,\ y=a$이므로

두 점근선의 교점의 좌표는 $(-b,\ a)$이다.

이때 두 직선 $y=x+3,\ y=-x+5$는 모두 두 점근선의 교점 $(-b,\ a)$를 지나므로

$a=-b+3$ …… ㉠

$a=-(-b)+5=b+5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-1$

293 정답 6

함수 $y=\dfrac{ax-1}{x-2}$의 그래프가 점 $(b,\ 3)$에 대하여 대칭이므로

점 $(b,\ 3)$은 두 점근선의 교점이다.

따라서 점근선의 방정식은 $x=b,\ y=3$이다. …… ㉠

한편, $y=\dfrac{ax-1}{x-2}$의 그래프에서 점근선의 방정식은

$x-2=0$에서 $x=2$,

일차항의 계수의 비에서 $y=\dfrac{a}{1}=a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b=2,\ a=3$

$\therefore ab=3\times2=6$

294 정답 (1) $y=-\dfrac{5}{x-2}-2$ (2) $y=\dfrac{x}{2x-3}$

(1) $y=-\dfrac{5}{x+2}+2$를 x에 관하여 정리하면

$y-2=-\dfrac{5}{x+2},\ (y-2)(x+2)=-5$

$x+2=-\dfrac{5}{y-2}$

$\therefore x=-\dfrac{5}{y-2}-2$

x와 y를 바꾸면 역함수는 $y=-\dfrac{5}{x-2}-2$

다른 풀이

$y=-\dfrac{5}{x+2}+2$에서 점근선의 방정식은

$x=-2,\ y=2$이고, 역함수는 점근선이 서로 바뀌므로 점근선이 $x=2,\ y=-2$인 유리함수가 구하는 역함수이다.

$\therefore y=-\dfrac{5}{x-2}-2$

(2) $y=\dfrac{3x}{2x-1}$를 x에 관하여 정리하면

$y(2x-1)=3x,\ (2y-3)x=y$

$\therefore x=\dfrac{y}{2y-3}$

x와 y를 바꾸면 역함수는 $y=\dfrac{x}{2x-3}$

다른 풀이

$y=\dfrac{3x}{2x-1}$에서 3 대신 $-(-1)$을 대입하고,

-1 대신 -3을 대입하면 $y=\dfrac{x}{2x-3}$

295 정답 12

역함수의 성질 $(f^{-1})^{-1}=f$에 의해

함수 $y=\dfrac{-4x+5}{2x-3}$의 역함수가 $y=\dfrac{ax+b}{2x+c}$이다.

$y=\dfrac{-4x+5}{2x-3}$에서 $y(2x-3)=-4x+5$

$(2y+4)x=3y+5$

$\therefore x=\dfrac{3y+5}{2y+4}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=\dfrac{3x+5}{2x+4}$

따라서 $y=\dfrac{ax+b}{2x+c}$와 계수를 비교하면

$a=3,\ b=5,\ c=4$

$\therefore a+b+c=3+5+4=12$

연습문제 I pp.166~168

296 정답 (1) $\dfrac{1}{x-1}$ (2) $\dfrac{1}{x+2}$ (3) $\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$ (4) $\dfrac{x+1}{x+2}$

(1) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

$=\dfrac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}$

(2) $\dfrac{x}{x^2+x}-\dfrac{1}{x^2+3x+2}$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{x+2-1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x+2)}$

$=\dfrac{1}{x+2}$

(3) $\dfrac{x-3}{x^2+x-6}\times\dfrac{x+3}{x^2-x-6}$

$=\dfrac{\cancel{x-3}}{(x-2)(\cancel{x+3})}\times\dfrac{\cancel{x+3}}{(\cancel{x-3})(x+2)}$

$=\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$

(4) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}\div\dfrac{x-3}{x-4}\times\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-16}$

$=\dfrac{(\cancel{x-2})(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-2})(x+2)}\times\dfrac{\cancel{x-4}}{\cancel{x-3}}\times\dfrac{(x+1)(\cancel{x+4})}{(\cancel{x-4})(\cancel{x+4})}$

$=\dfrac{x+1}{x+2}$

297 정답 (1) 0 (2) $\dfrac{1}{x}$

(1) $\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+2$,

$\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+1$,

$\dfrac{3x^2+2x-3}{x^2-1}=\dfrac{3(x^2-1)+2x}{x^2-1}=\dfrac{2x}{x^2-1}+3$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{2x+3}{x+1}+\frac{x}{x-1}-\frac{3x^2+2x-3}{x^2-1}\\&=\frac{1}{x+1}+2+\frac{1}{x-1}+1-\left(\frac{2x}{x^2-1}+3\right)\\&=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\\&=\frac{(x-1)+(x+1)-2x}{x^2-1}=0\end{aligned}$$

(2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\dfrac{1-x}{(1-x)-1}$

$$=1+\frac{1-x}{x}=\frac{x+1-x}{x}=\frac{1}{x}$$

298 정답 $a=3$, $b=-2$

$\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x-2}=\dfrac{(a+b)x-2a-3b}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{x}{(x-2)(x-3)}$

위의 식이 x에 대한 항등식이 되려면

$a+b=1$, $-2a-3b=0$

$\therefore a=3$, $b=-2$

다른 풀이

$\dfrac{x}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x-2}$의 양변에 $x-2$를 곱하면

$\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{a}{x-3}\times(x-2)+b$

위의 식에 $x=2$를 대입하면 $\dfrac{2}{2-3}=0+b$ $\therefore b=-2$

또, $\dfrac{x}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x-3}$의 양변에 $x-3$을 곱하면

$\dfrac{x}{x-2}=a+\dfrac{b}{x-2}\times(x-3)$

위의 식에 $x=3$을 대입하면 $\dfrac{3}{3-2}=a+0$ $\therefore a=3$

299 정답 그래프는 풀이 참조

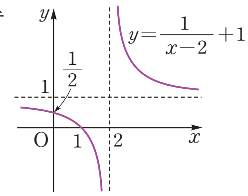
(1) 정의역 : $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$,
치역 : $\{y\,|\,y\neq1$인 실수$\}$,
점근선의 방정식 : $x=2$, $y=1$

(2) 정의역 : $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$,
치역 : $\{y\,|\,y\neq2$인 실수$\}$,
점근선의 방정식 : $x=-1$, $y=2$

(3) 정의역 : $\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$,
치역 : $\{y\,|\,y\neq1$인 실수$\}$,
점근선의 방정식 : $x=1$, $y=1$

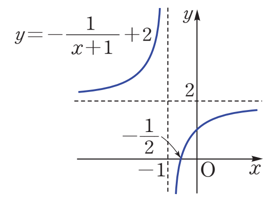
(4) 정의역 : $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$,
치역 : $\{y\,|\,y\neq-3$인 실수$\}$,
점근선의 방정식 : $x=2$, $y=-3$

(1) $y=\dfrac{1}{x-2}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



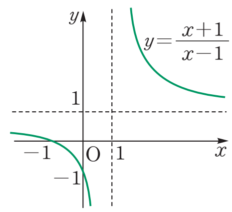
정의역 : $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$
치역 : $\{y\,|\,y\neq1$인 실수$\}$
점근선 : $x=2$, $y=1$

(2) $y=-\dfrac{1}{x+1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



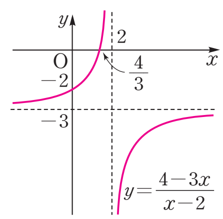
정의역 : $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$
치역 : $\{y\,|\,y\neq2$인 실수$\}$
점근선 : $x=-1$, $y=2$

(3) $y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정의역 : $\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$
치역 : $\{y\,|\,y\neq1$인 실수$\}$
점근선 : $x=1$, $y=1$

(4) $y=\dfrac{4-3x}{x-2}=-\dfrac{2}{x-2}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정의역 : $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$
치역 : $\{y\,|\,y\neq-3$인 실수$\}$
점근선 : $x=2$, $y=-3$

300 정답 $a=2$, $b=5$, $c=1$

점근선이 $x=-1$, $y=2$이므로 $y=\dfrac{k}{x+1}+2$로 놓자.

이 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{k}{3}+2$ $\therefore k=3$

따라서 $y=\dfrac{3}{x+1}+2=\dfrac{2x+5}{x+1}$이므로

$a=2$, $b=5$, $c=1$

301 정답 $a=-2$, $b=1$, $k=3$

주어진 그림에서 함수 $y=\dfrac{k}{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로

$a=-2$, $b=1$

또, 함수 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$의 그래프가 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{-1-2}+1$, $\dfrac{k}{3}=1$

$\therefore k=3$

302 정답 $a=-2,\ b=-1,\ c=4$

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2,\ y=-1$이므로 구하는 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x-2}-1$이라 하자. 이 그래프가 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$$0=\frac{k}{4-2}-1,\ \frac{k}{2}=1 \qquad \therefore k=2$$

따라서 주어진 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x-2}-1=\dfrac{-x+4}{x-2}$의 그래프이다.

이 식이 $y=\dfrac{bx+c}{x+a}$와 같으므로 $a=-2,\ b=-1,\ c=4$

303 정답 $m=2,\ n=-4$

함수 $y=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$$y=\frac{2}{x-(m+1)}+2+n$$

이 함수가 $y=\dfrac{-2x+8}{x-3}=\dfrac{2}{x-3}-2$와 일치하므로

$$m+1=3,\ 2+n=-2 \qquad \therefore m=2,\ n=-4$$

다른 풀이

함수 $y=\dfrac{2x}{x-1}$의 그래프의 점근선의 방정식은 직선 $x=1,\ y=2$이고, 함수 $y=\dfrac{-2x+8}{x-3}$의 그래프의 점근선의 방정식은 직선 $x=3,\ y=-2$이다.

함수의 그래프를 평행이동하면 그만큼 점근선도 이동하므로

$$m+1=3,\ 2+n=-2 \qquad \therefore m=2,\ n=-4$$

304 정답 ④

① $y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$이므로 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\dfrac{x-1}{x+1}=-\dfrac{2}{x+1}+1$이므로 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\dfrac{x-2}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+1$이므로 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+1$이므로 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+1$이므로 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

개념 보충

점의 평행이동과 도형의 평행이동

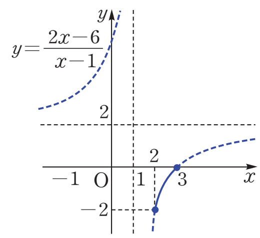
좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점을 P'이라 하면

$$\mathrm{P}'(a+m,\ b+n)$$

또, 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은

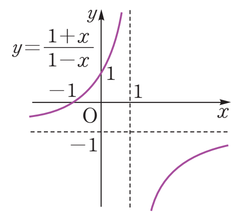
$$f(x-m,\ y-n)=0$$

305 정답 $\{y\,|\,-2\le y\le 0\}$



$y=\dfrac{2x-6}{x-1}=\dfrac{-4}{x-1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역이 $\{x\,|\,2\le x\le 3\}$일 때 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 0\}$

306 정답 ③



$$y=\frac{1+x}{1-x}=\frac{-(1-x)+2}{1-x}$$
$$=\frac{2}{1-x}-1$$
$$=-\frac{2}{x-1}-1$$

이므로 함수 $y=\dfrac{1+x}{1-x}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 그래프는 그림과 같으므로 함수 $y=\dfrac{1+x}{1-x}$의 그래프는 제1, 2, 3, 4사분면을 모두 지난다.

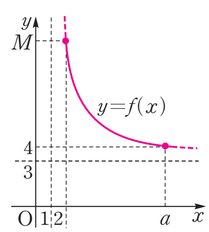
또한 두 점근선의 교점이 $(1,\ -1)$이므로 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

307 정답 20

$$y=\frac{3x+5}{x-1}=\frac{3(x-1)+8}{x-1}=\frac{8}{x-1}+3$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\dfrac{8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



$2\le x\le a$에서 함수 $f(x)=\dfrac{3x+5}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일때 최댓값 M, $x=a$일 때 최솟값 4를 가진다.

$\therefore\ M=f(2)=\dfrac{3\times2+5}{2-1}$

$=11$

또, $f(a)=\dfrac{3a+5}{a-1}=4$에서 $3a+5=4(a-1)$이므로

$a=9$

$\therefore\ M+a=11+9=20$

308 정답 3

함수 $y=\dfrac{1-x}{x+a}$의 그래프에서 점근선은

직선 $x=-a$, $y=-1$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-a,\ -1)$이다.

주어진 함수의 그래프가 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+2$는 두 점근선의 교점 $(-a,\ -1)$을 지나야 한다.

즉, $-1=-a+2$이므로 $a=3$

309 정답 (1) $y=\dfrac{x+1}{2x}$ (2) $y=\dfrac{-x-3}{x-2}$

(1) $y=\dfrac{1}{2x-1}$을 x에 관하여 정리하면

$2x-1=\dfrac{1}{y}$, $2x=\dfrac{y+1}{y}$

$\therefore\ x=\dfrac{y+1}{2y}$

x와 y를 바꾸면 역함수는

$y=\dfrac{x+1}{2x}$

(2) $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$을 x에 관하여 풀면

$y(x+1)=2x-3$, $(y-2)x=-y-3$

$\therefore\ x=\dfrac{-y-3}{y-2}$

x와 y를 바꾸면 역함수는 $y=\dfrac{-x-3}{x-2}$

310 정답 $a=1$, $b=-2$, $c=1$

$(g\circ f)(x)=x$이므로 $f(x)=g^{-1}(x)$이다.

$g^{-1}(x)$를 구하기 위하여 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$로 놓고 x에 관하여 정리하면

$(x+1)y=2x+1\qquad\therefore\ x=\dfrac{-y+1}{y-2}$

x와 y를 바꾸면 $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$

이 함수와 $f(x)=\dfrac{-x+c}{ax+b}$는 같은 함수이므로

$a=1$, $b=-2$, $c=1$

연습문제 II p.169

311 정답 x

$f(f(x))=f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$

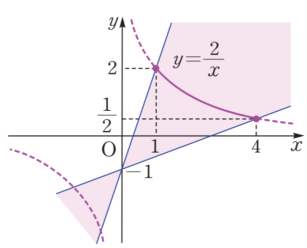
$=\dfrac{1-x}{(1-x)-1}=\dfrac{x-1}{x}$

$\therefore\ f(f(f(x)))=f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}$

$=\dfrac{x}{x-(x-1)}=x$

312 정답 $\dfrac{3}{8}\le m\le3$

$1\le x\le4$에서 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



직선 $y=mx-1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 두 그래프가 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선의 기울기 m이 점 $\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 지날 때보다 크거나 같고 점 $(1,\ 2)$를 지날 때보다 작거나 같아야 한다.

직선 $y=mx-1$이 점 $\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 지날 때

$\dfrac{1}{2}=4m-1$에서 $m=\dfrac{3}{8}$

직선 $y=mx-1$이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때

$2=m-1$에서 $m=3$

$\therefore\ \dfrac{3}{8}\le m\le3$

313 정답 $g(x)=\dfrac{-x+3}{3x+1}$

$(g\circ f)(x)=\dfrac{x-2}{2x+1}$에서 $h(x)=\dfrac{x-2}{2x+1}$라 두면

$g\circ f=h$

양변의 오른쪽에 f^{-1}를 취하면

$g=h\circ f^{-1}$, 즉 $g(x)=h(f^{-1}(x))$

이때 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에서 $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$이므로

$g(x)=h(f^{-1}(x))=h\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

$=\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-2}{2\times\dfrac{x+1}{x-1}+1}$ ← 분자, 분모에 $x-1$을 곱한다.

$=\dfrac{x+1-2(x-1)}{2(x+1)+(x-1)}=\dfrac{-x+3}{3x+1}$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{-x+3}{3x+1}$

314 정답 4

$f(x)=\dfrac{x+b}{x-a}$의 그래프가 점 $(2,\ 5)$를 지나므로

$$f(2)=\frac{2+b}{2-a}=5 \qquad \therefore\ 5a+b=8 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

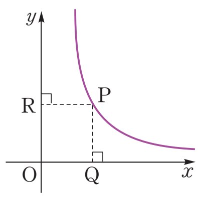
또, 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(2,\ 5)$를 지나므로 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(5,\ 2)$를 지난다.

$$f(5)=\frac{5+b}{5-a}=2 \qquad \therefore\ 2a+b=5 \qquad \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$

$\therefore\ a+b=1+3=4$

315 정답 12 ······ 서술형



(직사각형 OQPR의 둘레의 길이)$=2(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}})$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값을 먼저 구하자. … ①

점 P의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{4}{a-2}\right)$라고 하면

$\mathrm{Q}(a,\ 0),\ \mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{4}{a-2}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=\frac{4}{a-2}+a \qquad \cdots\ ②$$

$$=\frac{4}{a-2}+a-2+2$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{4}{a-2}\times(a-2)}+2$$

$$=4+2=6$$

$\left(\text{단, 등호는 }\dfrac{4}{a-2}=a-2,\ \text{즉 }a=4\text{일 때 성립한다.}\right)$ … ③

따라서 직사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최솟값은

$2\times6=12$이다. … ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	직사각형의 둘레의 길이를 선분의 길이의 합으로 나타내기	20%
②	$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$를 문자를 사용하여 유리식으로 나타내기	20%
③	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하기	40%
④	직사각형의 둘레의 길이의 최솟값 구하기	20%

11. 무리식과 무리함수

확인문제 ······ pp.173~183

316 정답 4

무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안의 식의 값이 0 이상이어야 하므로 $2-x\geq0,\ 2+x\geq0$에서

$$-2\leq x\leq 2 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

한편, (분모의 값)$\neq0$이어야 하므로 $x\neq-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $-2\leq x<-1$ 또는 $-1<x\leq2$

그런데 x는 정수이므로 $-2,\ 0,\ 1,\ 2$의 4개이다.

317 정답 5

$0<x<4$일 때, $x+1>0,\ x-4<0$이므로

$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-8x+16}$

$=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-4)^2}$

$=|x+1|+|x-4|$

$=(x+1)-(x-4)=5$

318 정답 (1) $\dfrac{2(x+1)}{x-1}$ (2) x^2

(1) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

$=\dfrac{(x-2\sqrt{x}+1)+(x+2\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$

(2) $\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}\times\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{2x(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}$

$=\dfrac{2x^2}{(x+2)-x}=\dfrac{2x^2}{2}=x^2$

319 정답 6

$f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

$=\dfrac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(x+1)-(x-1)}=\dfrac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{2}$

$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

$\therefore\ f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(48)$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{47})$

$=\sqrt{49}-\sqrt{1}=7-1=6$

320 정답 $a=2,\ b=3$

(ⅰ) (근호 안)≥ 0에서 $x-3\geq 0$, 즉 $x\geq 3$이므로 정의역은

$\{x\,|\,x\geq 3\}$

(ⅱ) (근호 전체)≥ 0에서 $\sqrt{x-3}=y-a\geq 0$

즉, $y\geq a$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\geq a\}$

$\therefore\ a=2,\ b=3$

321 정답 풀이 참조

함수 $y=\sqrt{-x-1}+1$에 대하여

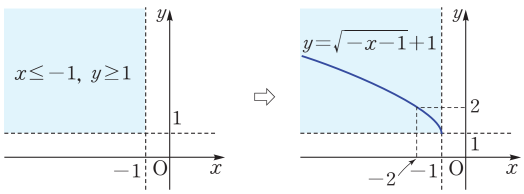
(ⅰ) (근호 안)≥ 0에서 $-x-1\geq 0$, 즉 $x\leq -1$이므로 정의역은

$\{x\,|\,x\leq -1\}$

(ⅱ) (근호 전체)≥ 0에서 $\sqrt{-x-1}=y-1\geq 0$, 즉 $y\geq 1$이므로

치역은 $\{y\,|\,y\geq 1\}$

따라서 좌표평면의 $x\leq -1$, $y\geq 1$인 영역에 그래프가 그려진다. 이때, $x=-2$이면 $y=2$이므로 점 $(-1,\ 1)$에서 시작하여 다음 그림과 같이 점 $(-2,\ 2)$를 지나도록 그린다.



322 정답 그래프는 풀이 참조

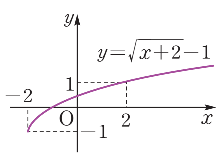
(1) 정의역 : $\{x\,|\,x\geq -2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\geq -1\}$

(2) 정의역 : $\{x\,|\,x\leq 1\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\geq -2\}$

(3) 정의역 : $\{x\,|\,x\geq 3\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\leq 1\}$

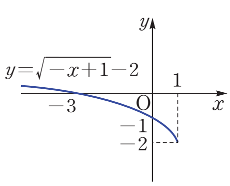
(4) 정의역 : $\{x\,|\,x\leq 2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\leq 3\}$

(1) $y=\sqrt{x+2}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



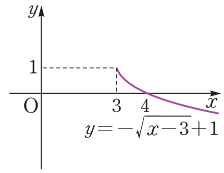
이 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq -2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq -1\}$이다.

(2) $y=\sqrt{-x+1}-2=\sqrt{-(x-1)}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



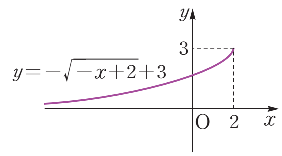
이 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\leq 1\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq -2\}$이다.

(3) $y=-\sqrt{x-3}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



이 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 3\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\leq 1\}$이다.

(4) $y=-\sqrt{-x+2}+3=-\sqrt{-(x-2)}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



이 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\leq 2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\leq 3\}$이다.

323 정답 2

무리함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 함수의 식은

$y=\sqrt{-2(x-3)}+b$

이 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로 $4=\sqrt{4}+b$

$\therefore\ b=2$

324 정답 $a=-1,\ b=4,\ c=1$

주어진 함수의 그래프는 $y=a\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=a\sqrt{x+4}+1$

로 나타낼 수 있다. 또, 이 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$a\sqrt{4}+1=-1,\ -2a=2\qquad \therefore\ a=-1$

따라서 주어진 무리함수는 $y=-\sqrt{x+4}+1$이다.

$\therefore\ a=-1,\ b=4,\ c=1$

325 정답 (1) 최댓값 : 1, 최솟값 : -1

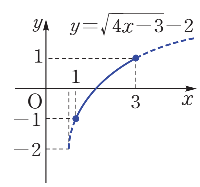
(2) 최댓값 : $2+\sqrt{3}$, 최솟값 : 3

(1) $y=\sqrt{4x-3}-2$

$=\sqrt{4\left(x-\dfrac{3}{4}\right)}-2$의 그래프는

$y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{3}{4}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼

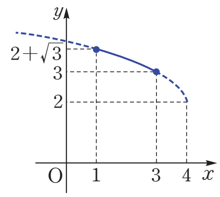
평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 최댓값은 $x=3$일 때 1이고, 최솟값은 $x=1$일 때 -1이다.

(2) $y=\sqrt{-x+4}+2$

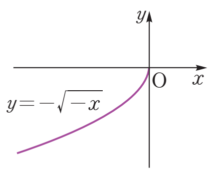
$=\sqrt{-(x-4)}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 최댓값은 $x=1$일 때 $2+\sqrt{3}$이고, 최솟값은 $x=3$일 때 3이다.

326 정답 3

$f(x)=-\sqrt{2-x}+a$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 평행이동한 것이므로, $y=f(x)$는 x의 값이 커질수록 y의 값도 커진다.



즉, $-2\le x\le 1$에서 $x=-2$일 때 최소이고 $x=1$일 때 최대이다.

$x=-2$일 때, 최솟값이 2이므로 $f(-2)=-\sqrt{4}+a=2$

$\therefore a=4$

따라서 최댓값은 $x=1$일 때 $f(1)=-\sqrt{1}+4=3$

327 정답 $y=x^2+4x+5\ (x\le -2)$

$y=-\sqrt{x-1}-2$에서 $y+2=-\sqrt{x-1}$

양변을 제곱하여 x에 대한 식으로 정리하면

$(y+2)^2=x-1,\ x=(y+2)^2+1 \qquad \therefore x=y^2+4y+5$

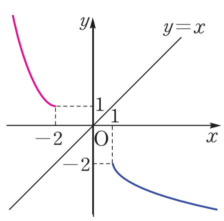
x와 y를 서로 바꾸면 $y=x^2+4x+5$

이때, 무리함수 $y=-\sqrt{x-1}-2$의 치역은 $\{y\,|\,y\le -2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\le -2\}$이다.

따라서 구하는 역함수는 $y=x^2+4x+5\ (x\le -2)$이다.

328 정답 $y=(x+2)^2+1\ (x\le -2)$

무리함수 $y=-\sqrt{x-1}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(1,\ -2)$에서 시작하는 곡선이다.



따라서 이 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 역함수의 그래프는 꼭짓점이 $(-2,\ 1)$인 포물선의 $x\le -2$인 부분이므로 역함수는

$y=a(x+2)^2+1(x\le -2) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

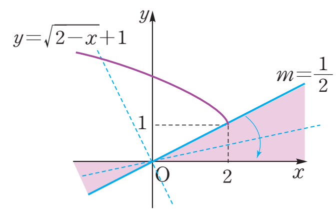
그런데 무리함수 $y=-\sqrt{x-1}-2$의 그래프는 점 $(2,\ -3)$을 지나므로 역함수의 그래프는 점 $(-3,\ 2)$를 지나야 한다.

㉠에 $x=-3,\ y=2$를 대입하면 $2=a+1 \qquad \therefore a=1$

따라서 구하는 역함수는 $y=(x+2)^2+1\ (x\le -2)$이다.

329 정답 $0\le m<\frac{1}{2}$

함수 $y=\sqrt{2-x}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



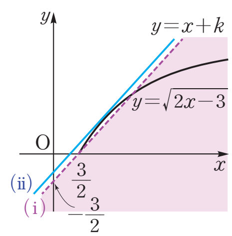
직선 $y=mx$가 점 $(2,\ 1)$을 지날 때 $1=2m$에서

$m=\frac{1}{2}$

따라서 두 그래프가 만나지 않도록 하는 실수 m의 값의 범위는 $0\le m<\frac{1}{2}$

330 정답 $k<-\frac{3}{2}$ 또는 $k=-1$

오른쪽 그림에서



(i) 직선 $y=x+k$가

점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날 때

$0=\frac{3}{2}+k \qquad \therefore k=-\frac{3}{2}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 곡선 $y=\sqrt{2x-3}$에 접할 때

$\sqrt{2x-3}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x-3=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2+3=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+3)=0$에서 $-2k-2=0$

$\therefore k=-1$

따라서 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프와 직선이 한 점에서 만날 때는 직선이 (i)보다 아래쪽에 있거나 (ii)일 때이다.

$\therefore k<-\frac{3}{2}$ 또는 $k=-1$

연습문제 I

pp.184~186

331 정답 (1) $\frac{1}{3}\le x\le 3$ (2) $x<5$ (3) $-1\le x<0$ 또는 $0<x\le 1$

무리식의 값이 실수가 되려면 (근호 안의 식의 값)≥ 0이어야 한다.

(1) $3-x\ge 0$이고 $3x-1\ge 0$에서 $x\le 3$이고 $x\ge \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{3}\le x\le 3$

(2) $5-x\ge 0$이고 $5-x\ne 0 \qquad \therefore x<5$

(3) $1-x^2\ge 0$이고 $x\ne 0$에서 $-1\le x\le 1$이고 $x\ne 0$

$\therefore -1\le x<0$ 또는 $0<x\le 1$

332 정답 2

$-1<a<1$에서 $-2<a-1<0$, $0<a+1<2$이므로

$\therefore$ (주어진 식)$=|a-1|+|a+1|$

$=-(a-1)+a+1=2$

333 정답 (1) $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}$ (2) $2\sqrt{x}$

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

$\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$

$\therefore$ (주어진 식)$=(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})+(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})$

$=2\sqrt{x}$

334 정답 ⑤

$\dfrac{x}{1+\sqrt{x-1}}+\dfrac{x}{1-\sqrt{x-1}}$

$=\dfrac{x(1-\sqrt{x-1})}{(1+\sqrt{x-1})(1-\sqrt{x-1})}+\dfrac{x(1+\sqrt{x-1})}{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{x-x\sqrt{x-1}}{1-(x-1)}+\dfrac{x+x\sqrt{x-1}}{1-(x-1)}$

$=\dfrac{2x}{2-x}$

335 정답 (1) 4 (2) 4

(1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$

$=(\cancel{\sqrt{2}}-1)+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{25}-\cancel{\sqrt{24}})$

$=\sqrt{25}-\sqrt{1}=5-1=4$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}+\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{10}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{100}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{4}}{2}+\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{8}}{2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{100}-\sqrt{98}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{100}-\sqrt{4}}{2}=\dfrac{10-2}{2}=4$

336 정답 그래프는 풀이 참조

(1) 정의역 : $\{x\,|\,x\geq 2\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\geq 0\}$

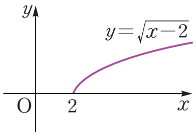
(2) 정의역 : $\{x\,|\,x\leq 1\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\geq 2\}$

(3) 정의역 : $\{x\,|\,x\leq -1\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\leq 2\}$

(4) 정의역 : $\{x\,|\,x\geq 1\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\leq -2\}$

(1) $y=\sqrt{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

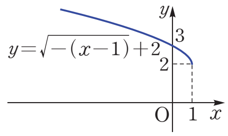
이 함수의 정의역은 $x-2\geq 0$에서 $\{x\,|\,x\geq 2\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이다.



(2) $y=\sqrt{-x+1}+2=\sqrt{-(x-1)}+2$

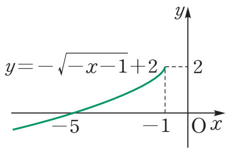
의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

이 함수의 정의역은 $-x+1\geq 0$에서 $\{x\,|\,x\leq 1\}$이고, 치역은 $\sqrt{-x+1}=y-2\geq 0$에서 $\{y\,|\,y\geq 2\}$이다.

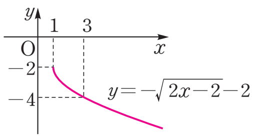


(3) $y=-\sqrt{-x-1}+2=-\sqrt{-(x+1)}+2$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

이 함수의 정의역은 $-x-1\geq 0$에서 $\{x\,|\,x\leq -1\}$이고, 치역은 $\sqrt{-x-1}=-y+2\geq 0$에서 $\{y\,|\,y\leq 2\}$이다.



(4) $y=-\sqrt{2x-2}-2=-\sqrt{2(x-1)}-2$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



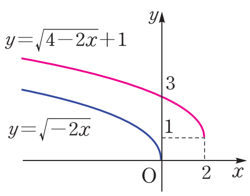
이 함수의 정의역은 $2x-2\geq 0$에서 $\{x\,|\,x\geq 1\}$이고, 치역은 $\sqrt{2x-2}=-y-2\geq 0$에서 $\{y\,|\,y\leq -2\}$이다.

337 정답 ④

ㄱ. (근호 안)$=4-2x\geq 0$에서 정의역은 $\{x\,|\,x\leq 2\}$,

(근호 전체)$=\sqrt{4-2x}=y-1\geq 0$에서 치역은 $\{y\,|\,y\leq 1\}$이다. (참)

ㄴ. $y=\sqrt{4-2x}+1=\sqrt{-2(x-2)}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



ㄴ. 평행이동하여 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 겹칠 수 없다. (거짓)

ㄷ. 제2사분면을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

338 정답 4

그림에서 주어진 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x-4)}+1$ …… ㉠

로 나타낼 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{-4a}+1$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore y=\sqrt{-(x-4)}+1=\sqrt{-x+4}+1$

이 식이 $y=\sqrt{ax+b}+c$와 같으므로

$a=-1,\ b=4,\ c=1$

$\therefore a+b+c=4$

339 정답 제1사분면, 제2사분면

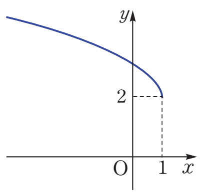
주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$이므로

$b=1,\ c=2$

이때, 유리함수 $y=\dfrac{a}{x+1}+2$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=a+2$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 $y=\sqrt{-x+1}+2$이다.



$y=\sqrt{-x+1}+2=\sqrt{-(x-1)}+2$이므로 무리함수 $y=\sqrt{-x+1}+2$의 그래프는 그림과 같이 제1사분면, 제2사분면을 지난다.

340 정답 4

$y=\sqrt{3-x}+k$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 평행이동한 것이므로 x의 값이 커질수록 y의 값은 작아진다.

즉, $x=2$에서 최솟값 2를 가지고, $x=-1$에서 최댓값 M을 가진다.

$x=2$일 때, $\sqrt{3-2}+k=2, 1+k=2$

$\therefore k=1$

$x=-1$일 때, $\sqrt{3-(-1)}+k=M$,

따라서 $M=\sqrt{4}+1=3$이므로

$M+k=4$

341 정답 $a=4,\ b=2$

$f(x)=\sqrt{a-2x}+b$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 평행이동한 것이므로 $y=f(x)$는 x의 값이 커질수록 y의 값은 작아진다.

$\therefore f(-6)=6,\ f(0)=4$

$f(-6)=\sqrt{a+12}+b=6$에서 $\sqrt{a+12}=6-b$

양변을 제곱하면 $a+12=(6-b)^2$ …… ㉠

$f(0)=\sqrt{a}+b=4$에서 $\sqrt{a}=4-b$이므로 양변을 제곱하면

$a=(4-b)^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=2$

342 정답

(1) $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}(x\ge0)$,

정의역 : $\{x\,|\,x\ge0\}$, **치역 :** $\left\{y\,\middle|\,y\ge-\dfrac{1}{2}\right\}$

(2) $y=(x-3)^2\ (x\le3)$,

정의역 : $\{x\,|\,x\le3\}$, **치역 :** $\{y\,|\,y\ge0\}$

(3) $y=-\dfrac{1}{3}(x+2)^2+\dfrac{1}{3}(x\ge-2)$,

정의역 : $\{x\,|\,x\ge-2\}$, **치역 :** $\left\{y\,\middle|\,y\le\dfrac{1}{3}\right\}$

(1) $y=\sqrt{2x+1}$에서 양변을 제곱한 후 x에 관하여 정리하면

$y^2=2x+1$ $\quad\therefore x=\dfrac{y^2-1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$

이때, 함수 $y=\sqrt{2x+1}$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\ge-\dfrac{1}{2}\right\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\ge0\}$이므로

역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$, 치역은 $\left\{y\,\middle|\,y\ge-\dfrac{1}{2}\right\}$이다.

따라서 역함수는 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\ (x\ge0)$

(2) $y=-\sqrt{x}+3$, 즉 $y-3=-\sqrt{x}$에서 양변을 제곱한 후 x에 관하여 정리하면

$(y-3)^2=x$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=(x-3)^2$

이때, $y=-\sqrt{x}+3$의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\le3\}$이므로

역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\le3\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge0\}$

따라서 역함수는 $y=(x-3)^2\ (x\le3)$

(3) $y=\sqrt{-3x+1}-2$, 즉 $y+2=\sqrt{-3x+1}$에서 양변을 제곱한 후 x에 관하여 정리하면

$(y+2)^2=-3x+1$ $\quad\therefore x=-\dfrac{1}{3}(y+2)^2+\dfrac{1}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\dfrac{1}{3}(x+2)^2+\dfrac{1}{3}$

이때, 함수 $y=\sqrt{-3x+1}-2$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{1}{3}\right\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\ge-2\}$이므로

역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge-2\}$, 치역은 $\left\{y\,\middle|\,y\le\dfrac{1}{3}\right\}$

따라서 역함수는 $y=-\dfrac{1}{3}(x+2)^2+\dfrac{1}{3}(x\ge-2)$

343 정답 $a=-3,\ b=7$

$f(x)=\sqrt{ax+b}$에서 $f(1)=2$이므로

$\sqrt{a+b}=2$ $\quad\therefore a+b=4$ …… ㉠

$f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g(1)=2$이면 $f(2)=1$이므로

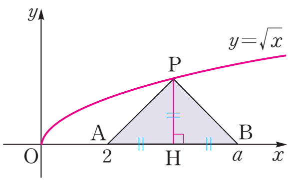
$\sqrt{2a+b}=1$ $\quad\therefore 2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=7$

344 정답 6

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(t,\ 0)$이라고 하면 점 P의 좌표는 $(t,\ \sqrt{t})$이다.



이때, $\triangle\mathrm{ABP}$가 직각이등변 삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{PH}}$이다.

$\overline{\mathrm{AH}}=t-2,\ \overline{\mathrm{BH}}=a-t,\ \overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{t}$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{PH}}$에서 $t-2=\sqrt{t}$

양변을 제곱하여 정리하면

$t^2-4t+4=t,\ t^2-5t+4=0$

$(t-1)(t+4)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=4$

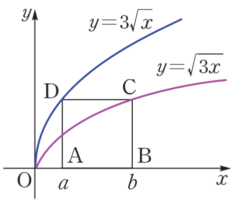
그런데 $t>2$이므로 $t=4$

따라서 $\overline{\mathrm{BH}}=a-4=2$에서 $a=6$

345 정답 $\frac{9}{4}$

점 A의 좌표가 $(a,\ 0)$이므로 점 D의 좌표는 $(a,\ 3\sqrt{a})$이다.

여기서 점 B의 좌표를 $(b,\ 0)$이라고 두면 점 C의 좌표는 $(b,\ \sqrt{3b})$이다.



이때 두 점 C, D의 y좌표가 같으므로 $3\sqrt{a}=\sqrt{3b}$에서

$3b=9a \qquad \therefore b=3a$

즉, 점 B의 좌표는 $(3a,\ 0)$이고 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$3\sqrt{a}=3a-a,\ 9a=4a^2$

$4a^2-9a=0,\ a(4a-9)=0$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{9}{4}$

346 정답 $2a$

$$\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}=\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{a^2}-2\right)+4}$$
$$=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}+2}=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}$$
$$=\left|a+\frac{1}{a}\right|$$

같은 방법으로

$$\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{1}{a}\right|$$

$0<a<1$에서 $\frac{1}{a}>1$이므로 $a+\frac{1}{a}>0,\ a-\frac{1}{a}<0$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\left|a+\frac{1}{a}\right|-\left|a-\frac{1}{a}\right|$$
$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)=2a$$

347 정답 (1) $x\geq1$ (2) $x<-1$ 또는 $x\geq1$

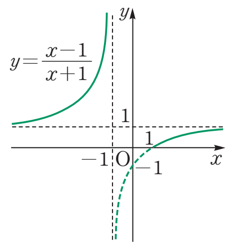
(1) $x+1>0$에서 $x>-1$ …… ㉠

$x-1\geq0$에서 $x\geq1$ …… ㉡

㉠과 ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\geq1$

(2) $\frac{x-1}{x+1}\geq0$이 되는 x의 값의 범위를 구해야 한다.

$y=\frac{x-1}{x+1}$이라 하면 점근선이 직선 $x=-1,\ y=1$이고 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 그래프는 다음 그림과 같다.



그림에서 $y\geq0$인 x의 범위는 $x<-1$ 또는 $x\geq1$

348 정답 $\frac{1}{2}$

직선 PQ의 기울기는 $\frac{d-b}{c-a}$ …… ㉠

여기서 $b=\sqrt{a}$이므로 $a=b^2$

또, $d=\sqrt{c}$이므로 $c=d^2$

$a=b^2,\ c=d^2$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{d-b}{c-a}=\frac{d-b}{d^2-b^2}=\frac{d-b}{(d-b)(d+b)}=\frac{1}{d+b}$$

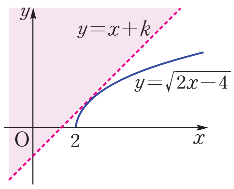
이때, $\frac{b+d}{2}=1$이므로

$$\frac{d-b}{c-a}=\frac{1}{b+d}=\frac{1}{2}$$

11강

349 정답 $k>-\frac{3}{2}$ 서술형

$A\cap B=\varnothing$이면 무리함수 $y=\sqrt{2x-4}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나지 않아야 한다. … ①



오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x+k$가 곡선 $y=\sqrt{2x-4}$에 접할 때의 k의 값을 구해보자.

$\sqrt{2x-4}=x+k$의 양변을 제곱하면

$$2x-4=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore\ x^2+2(k-1)x+k^2+4=0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+4)=0$에서 $-2k-3=0$

$$\therefore\ k=-\frac{3}{2}$$ … ②

따라서 $A\cap B=\varnothing$인 k의 값의 범위는 $k>-\frac{3}{2}$이다. … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$A\cap B=\varnothing$일 조건 이해하기	30%
②	$y=\sqrt{2x-4}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 조건 구하기	40%
③	$A\cap B=\varnothing$인 k의 값의 범위 구하기	30%

Ⅲ 경우의 수

12. 경우의 수

확인문제 pp.193~199

350 정답 9

주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수를 차례로 순서쌍 $(x,\ y)$로 나타내자.

두 눈의 수의 합이 4의 배수가 되는 경우는 합이 4, 8, 12일 때이다.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(ⅰ) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우의 수는

$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$의 3가지

(ⅱ) 눈의 수의 합이 8이 되는 경우의 수는

$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$의 5가지

(ⅲ) 눈의 수의 합이 12가 되는 경우의 수는

$(6,\ 6)$의 1가지

각각의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는

$3+5+1=9$(가지)

다른 풀이

합	(첫 번째 나온 눈의 수, 두 번째 나온 눈의 수)
4	$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$
8	$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$
12	$(6,\ 6)$

따라서 구하는 경우의 수는

$3+5+1=9$(가지)

351 정답 10

공에 적힌 숫자가 30의 약수인 경우의 수는

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30의 8가지

공에 적힌 숫자가 5의 배수인 경우의 수는

5, 10, 15, 20, 25, 30의 6가지

이때 공에 적힌 숫자가 30의 약수이면서 5의 배수인 경우의 수는 5, 10, 15, 30의 4가지이므로 구하는 경우의 수는

$8+6-4=10$(가지)

352 정답 40

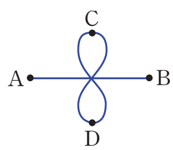
각 자리의 숫자의 합이 홀수이므로

(i) 십의 자리의 숫자가 짝수이고 일의 자리의 숫자가 홀수인 것의 개수는 $4\times5=20$

(ii) 십의 자리의 숫자가 홀수이고 일의 자리의 숫자가 짝수인 것의 개수는 $5\times4=20$

위의 사건 (i), (ii)는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 자연수의 개수는 $20+20=40$

353 정답 8

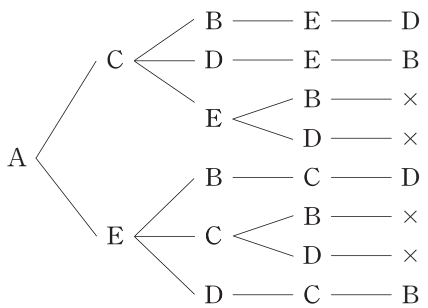


오른쪽 그림에서 점 A에서 점 C로 먼저 가거나 점 D로 먼저 가는 두 가지 방법이 있고, 점 C 또는 점 D를 각각 시계 방향으로 지나거나 시계 반대 방향으로 지나는 두 가지 방법이 있으므로 구하는 경우의 수는

$2\times2\times2=8$(가지)

354 정답 4

수형도를 그려보면 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 4가지이다.

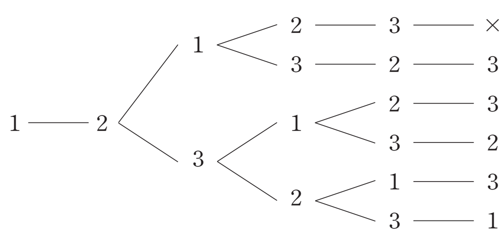
355 정답 30

수형도를 그려 구하자.

첫 번째 숫자가 1인 경우와 2 또는 3인 경우가 모두 동등한 조건이므로 1인 경우만 구하여 3배하면 된다.

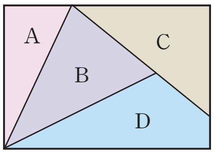
또, 첫 번째 숫자가 1일 때, 두 번째 숫자가 2인 경우와 3인 경우 역시 동등한 조건이므로 2인 경우만 구하여 2배하면 된다.

첫 번째 숫자가 1, 두 번째 숫자가 2인 경우의 수형도는 다음의 5가지이다.



따라서 구하는 경우의 수는 $3\times2\times5=30$(가지)

356 정답 72



인접한 영역의 개수가 가장 많은 영역이 B이므로 B를 맨 먼저 칠한 후 B → C → D → A의 순서로 색을 칠하자.

B에 칠할 수 있는 색은 4가지,

C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지,

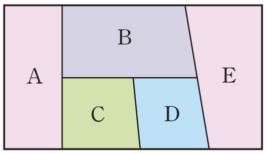
D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지,

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times2\times3=72$(가지)

357 정답 96



인접한 영역의 개수가 가장 많은 영역이 B이므로 B를 맨 먼저 칠한 후

B → A → C → D → E

의 순서로 색을 칠하자.

B에 칠할 수 있는 색은 4가지,

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지,

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지,

D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지,

E에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$4\times3\times2\times2\times2=96$(가지)

358 정답 **약수의 개수 : 30, 약수의 총합 : 2418**

720을 소인수분해하면 $720=2^4\times3^2\times5^1$이므로

약수의 개수는 $(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=30$(개)

약수의 총합은

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)(1+5)=31\times13\times6$$
$$=2418$$

359 정답 6

270과 144의 공약수의 개수는 두 수의 최대공약수의 약수의 개수와 같다.

270과 144를 각각 소인수분해하면

$270=2\times3^3\times5,\ 144=2^4\times3^2$

이므로 두 수의 최대공약수는 $2\times3^2=18$이다.

$18=2\times3^3$의 약수의 개수는

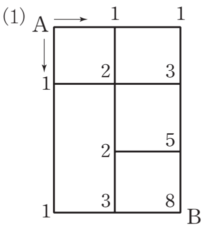
$(1+1)\times(2+1)=6$(개)

이므로 구하는 공약수의 개수는 6개이다.

360 정답 (1) 8 (2) 7

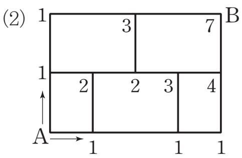
중간에 이르는 각 교차점까지의 경로의 수를 차례로 더하면 다음 그림과 같다.

(1)



따라서 최단 경로의 수는 8가지이다.

(2)



따라서 최단 경로의 수는 7가지이다.

연습문제 I

pp.200~202

361 정답 (1) 9 (2) 6 (3) 15

(1) A → B → D는 A → B이고 B → D이므로

(A → B)이고 (B → D)

3 × 3 =9(가지)

(2) A → C → D는 A → C이고 C → D이므로

(A → C)이고 (C → D)

3 × 2 =6(가지)

(3) A를 출발하여 C로 가는 모든 경우는

(A → B → D)이거나 (A → C → D)이므로

9 + 6 =15(가지)

362 정답 (1) 5 (2) 9

(1) (i) 두 눈의 수의 합이 3인 경우 : (1, 2), (2, 1)의 2가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 4인 경우 : (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

두 눈의 수의 합이 3인 사건과 4인 사건은 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여 2+3=5(가지)

(2) 두 눈의 수의 곱이 홀수가 되려면 두 주사위의 나온 눈의 수가 모두 홀수이어야 한다.

(i) 한 개의 주사위에서 나온 눈의 수가 홀수인 경우 : 1, 3, 5의 3가지

(ii) 그 각각에 대하여 나머지 주사위에서 나온 눈의 수가 홀수인 경우 : 1, 3, 5의 3가지

따라서 두 주사위의 나온 눈의 수가 모두 홀수인 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 3×3=9(가지)

363 정답 10

3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수,

즉 3 또는 6이 되어야 한다.

그리고 백의 자리의 수가 0이 될 수는 없으므로 가능한 백의 자리의 수는 1, 2, 3이다.

(i) 백의 자리의 숫자가 1인 경우

십의 자리 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 2 또는 5가 되어야 하므로

102, 120, 123, 132의 4개

(ii) 백의 자리의 숫자가 2인 경우

십의 자리 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 1 또는 4가 되어야 하므로

201, 210, 213, 231의 4개

(iii) 백의 자리의 숫자가 3인 경우

십의 자리 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 3이 되어야 하므로

312, 321의 2개

따라서 구하는 자연수의 개수는

4+4+2=10(개)

364 정답 (1) 45 (2) 65

(1) 각 자리의 수의 합이 짝수가 되려면, 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

(i) (짝)+(짝)인 경우 ⇨ 4×5=20(개)

(ii) (홀)+(홀)인 경우 ⇨ 5×5=25(개)

이때, (i), (ii)는 동시에 일어나지 않으므로

구하는 자연수의 개수는 합의 법칙에 의해

20+25=45(개)

(2) 전체에서 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 곱이 홀수인 수를 빼서 구하자.

십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 곱이 홀수이려면 둘 다 홀수이어야 한다.

십의 자리의 숫자가 홀수인 경우는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이고 그 각각의 경우에 대하여 일의 자리의 숫자가 홀수인 경우도 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이다.

따라서 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 곱이 홀수인 수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

5×5=25(개)

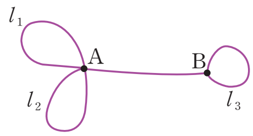
두 자리의 자연수 전체의 개수는 90개이므로

구하는 자연수의 개수는

90−25=65(개)

365 정답 16

다음 그림과 같이 세 개의 고리를 각각 l_1, l_2, l_3이라고 하자.



A에서 시작해서 B에서 마쳐야 하므로 우선 l_1, l_2를 그린 후 l_3을 그려야 한다.

(i) l_1, l_2를 그리는 순서는 $l_1 \to l_2$ 또는 $l_2 \to l_1$의 2가지이고

(ii) 그 각각에 대해 l_1 또는 l_2를 시계 방향으로 그리거나 시계 반대 방향으로 그리는 2가지 방법이 있고

(iii) 또, B에 와서 l_3을 그리는 것 역시 2가지 방법이 있다.

따라서 구하는 방법의 수는

$2\times(2\times2)\times2=16$(가지)

366 정답 7

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 실근을 가지려면 판별식

$D=a^2-4b\geq0$, 즉 $b\leq\frac{a^2}{4}$

(i) $b=0$이면 ⇨ $a=0$, 1, 2, 3의 4가지

(ii) $b=1$이면 ⇨ $a=2$, 3의 2가지

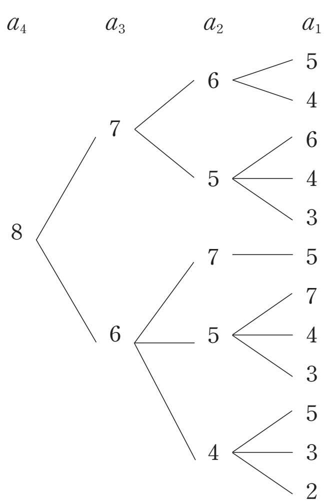
(iii) $b=2$이면 ⇨ $a=3$의 1가지

위의 사건 (i), (ii), (iii) 중 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$4+2+1=7$

367 정답 12

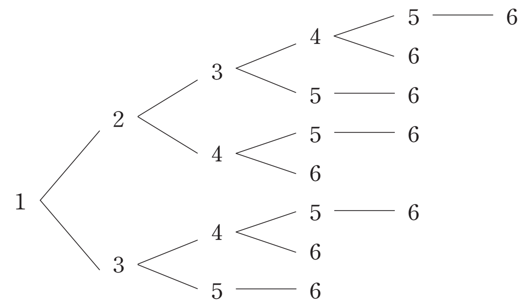
네 자리 자연수를 $a_1a_2a_3a_4$라고 할 때 주어진 조건을 만족하는 경우를 수형도를 이용하여 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 자연수의 개수는 12개이다.

368 정답 8

수형도를 그려보면

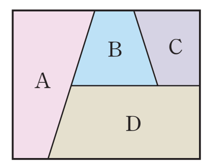


따라서 구하는 경우의 수는 8가지이다.

369 정답 48

인접한 영역의 개수가 가장 많은 영역이 D이므로 D를 맨 먼저 칠한 후 D → A → B → C의 순서로 색을 칠하자.

D에 칠할 수 있는 색은 4가지,



A에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한 3가지,

B에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 2가지,

C에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times2\times2=48$(가지)

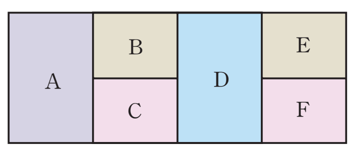
[참고]

인접한 영역의 개수가 가장 많은 영역은 B도 되므로

B → A → D → C의 순서로 색을 칠해도 구하는 경우의 수는 $4\times3\times2\times2=48$(가지)로 같다.

370 정답 288

인접한 영역의 개수가 가장 많은 영역이 D이므로 D를 맨 먼저 칠한 후 D → B → C → A → E → F의 순서로 색을 칠하자.



D에 칠할 수 있는 색은 4가지,

B에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한 3가지,

C에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 2가지,

A에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지,

E에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한 3가지,

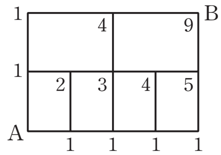
F에 칠할 수 있는 색은 D, E에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times2\times2\times3\times2=288$(가지)

371 정답 9

중간에 이르는 각 교차점까지의 경로의 수를 차례로 더하면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 최단 경로의 수는 9가지이다.

372 정답 16

단위가 큰 동전을 많이 사용하는 순서로 사전식 배열을 하면

(i) 100원짜리 동전 3개　　∴ 1가지

(ii) 100원짜리 동전 2개를 사용할 때, 나머지 100원을

① 50원짜리 2개, 10원짜리 0개

② 50원짜리 1개, 10원짜리 5개

③ 50원짜리 0개, 10원짜리 10개　　∴ 3가지

(iii) 100원짜리 동전 1개를 사용할 때, 나머지 200원을

① 50원짜리 4개, 10원짜리 0개

② 50원짜리 3개, 10원짜리 5개

③ 50원짜리 2개, 10원짜리 10개

④ 50원짜리 1개, 10원짜리 15개

⑤ 50원짜리 0개, 10원짜리 20개　　∴ 5가지

(iv) 100원짜리 동전을 사용하지 않을 때, 300원을

① 50원짜리 6개, 10원짜리 0개

② 50원짜리 5개, 10원짜리 5개

③ 50원짜리 4개, 10원짜리 10개

④ 50원짜리 3개, 10원짜리 15개

⑤ 50원짜리 2개, 10원짜리 20개

⑥ 50원짜리 1개, 10원짜리 25개

⑦ 50원짜리 0개, 10원짜리 30개　　∴ 7가지

따라서 (i)~(iv)에 의해

$1+3+5+7=16$(가지)

373 정답 53

1에서 100까지의 자연수가 적힌 100장의 카드 중 뽑은 카드가 3의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라고 하면 구하는 경우의 수는 $n(A^C\cap B^C)$이다.

$n(A)=33$, $n(B)=20$, $n(A\cap B)=6$이므로

$n(A\cup B)=33+20-6=47$

따라서 구하는 경우의 수는

$n(A^C\cap B^C)=100-n(A\cup B)=100-47=53$

374 정답 64

(i) $x=1$일 때, $1\times f(1)$이 짝수이려면 $f(1)$은 짝수이어야 한다.

따라서 $f(1)$이 될 수 있는 수는 2, 4의 2가지

(ii) $x=2$일 때, 2가 짝수이므로 $f(2)$의 짝홀에 관계없이 $2\times f(2)$는 짝수이다.

따라서 $f(2)$가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4가지

(iii) $x=3$일 때, $3\times f(3)$이 짝수이려면 $f(3)$은 짝수이어야 한다.

따라서 $f(3)$이 될 수 있는 수는 2, 4의 2가지

(iv) $x=4$일 때, 4가 짝수이므로 $f(4)$의 짝홀에 관계없이 $4\times f(4)$는 짝수이다.

따라서 $f(4)$가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4가지

(i)~(iv)에 의해 구하는 함수 f의 개수는

$2\times4\times2\times4=64$(개)

375 정답 42

여러 가지 방법으로 풀어보자.

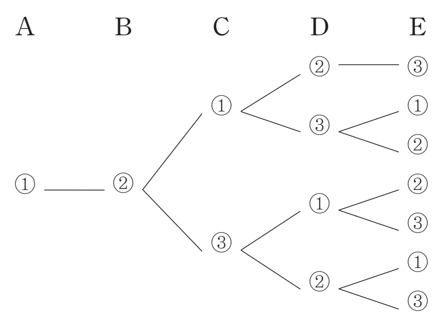
[수형도]

세 가지 색을 각각 ①, ②, ③이라 놓고, 수형도를 그리자.

먼저 A에 칠할 수 있는 색은 ①, ②, ③의 3가지,

각 경우에 대해 B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 나머지 색의 2가지이다.

아래의 수형도는 A에 ①, B에 ②를 칠하는 경우의 7가지를 구한 것이다.



따라서 구하는 경우의 수는

$\underset{A}{\underline{3}}\times\underset{B}{\underline{2}}\times7=42$(가지)

[여사건의 경우의 수]

이웃하는 정사각형에는 다른 색을 칠하는 모든 방법의 수에서 3가지 색을 모두 사용하지 않은(즉, 2가지 색으로만 칠하는) 방법의 수를 빼면 된다.

(i) 모든 방법의 수

A에 칠할 수 있는 색은 3가지,

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지,

C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지,

D에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 2가지,

E에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로

$3\times2\times2\times2\times2=48$(가지)

(ⅱ) 2가지 색으로만 칠하는 방법의 수

먼저 칠할 색 2가지를 정하는 방법은 사용하지 않을 색 1가지를 정하는 방법과 같으므로 3가지, 각 경우에 대해서 두 가지 색 가운데 A에 칠할 색을 정하는 방법은 2가지이므로

$3\times2=6$(가지)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

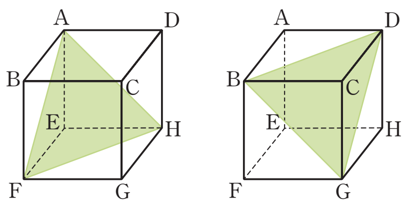
$48-6=42$(가지)

연습문제 Ⅱ p.203

376 정답 ③

정육면체의 두 밑면을 면 ABCD를 윗면, 면 EFGH를 아랫면으로 구분하자.

정삼각형의 세 꼭짓점이 놓이는 위치가



[그림 1] [그림 2]

(ⅰ) 윗면에 1개, 아랫면에 2개인 경우 :

[그림 1]과 같이 윗면의 꼭짓점이 될 수 있는 것은 A, B, C, D의 4가지

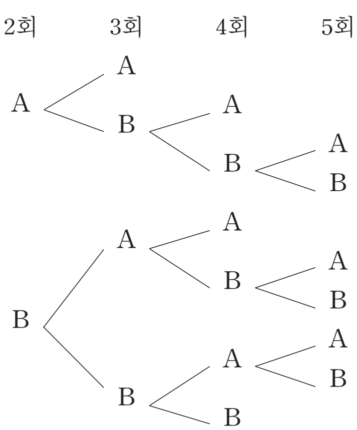
(ⅱ) 윗면에 2개, 아랫면에 1개인 경우 :

[그림 2]와 같이 아랫면의 꼭짓점이 될 수 있는 것은 E, F, G, H의 4가지

따라서 구하는 정삼각형의 개수는 8개이다.

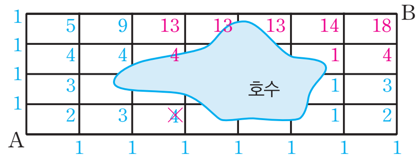
377 정답 10

수형도를 그려보면



따라서 모두 10가지이다.

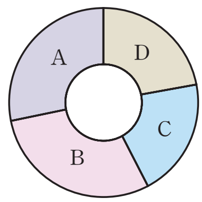
378 정답 18



따라서 최단 경로의 수는 18가지이다.

379 정답 84

주어진 그림의 상황에서는 같은 색은 많아야 2번 사용될 수 있으므로, A에 칠하는 색이 사용되는 횟수를 기준으로 경우를 나누어 풀자.



(ⅰ) A에 칠하는 색이 오직 한 번만 사용되는 경우 :

A에 칠할 색을 정하는 방법은 4가지,

B에 칠할 색을 정하는 방법은 A에 칠한 색을 제외한 나머지 3가지

C에 칠할 색을 정하는 방법은 A, B에 칠한 색을 제외한 나머지 2가지

D에 칠할 색을 정하는 방법은 A, C에 칠한 색을 제외한 나머지 2가지이므로

$4\times3\times2\times2=48$(가지)

(ⅱ) A에 칠하는 색이 두 번 사용되는 경우 :

A와 같은 색을 칠할 수 있는 영역은 C밖에 없으므로

A와 C에 칠할 색을 정하는 방법은 4가지,

B에 칠할 색을 정하는 방법은 A에 칠한 색을 제외한 나머지 3가지

D에 칠할 색을 정하는 방법은 A에 칠한 색을 제외한 나머지 3가지이므로

$4\times3\times3=36$(가지)

(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 방법의 수는

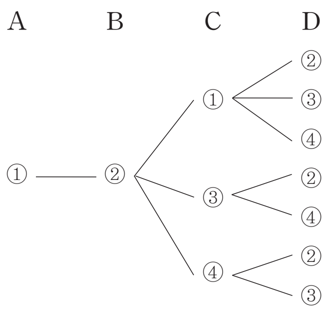
$48+36=84$(가지)

다른 풀이

서로 다른 네 가지 색을 ①, ②, ③, ④라 하고 영역 A에 ①을 칠하는 경우와 ②, ③, ④를 칠하는 경우가 모두 동등한 조건이므로 영역 A에 ①을 칠하는 경우를 구하여 4배하면 된다.

또, 영역 A에 ①을 칠하고 영역 B에 ②를 칠하는 경우와 ③, ④를 칠하는 경우 역시 동등한 조건이므로 영역 B에 ②를 칠하는 경우만 구하여 3배하면 된다.

영역 A에 ①을, 영역 B에 ②를 칠하는 경우의 수형도는 다음과 같다.



$\therefore 4\times3\times7=84$

380 정답 270 서술형

두 종류의 숫자 2개씩으로만 이루어진 경우는

○○△△, ○△○△, ○△△○

의 세 가지 꼴이 나올 수 있다. … ①

각 경우에 대하여

○자리에 올 수 있는 수는 0~9의 10가지

△자리에 올 수 있는 수는 ○자리에 온 수를 제외한 나머지 9가지 … ②

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times10\times9=270$(가지) … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	두 종류의 숫자 2개씩으로 이루어진 네 자리 숫자의 꼴 분류하기	30%
②	각각의 경우에 대하여 각 자리에 올 수 있는 수의 개수 구하기	40%
③	답 구하기	30%

13. 순열

확인문제 pp.208~213

381 정답 (1) 6 (2) 7 (3) 9 (4) 3

(1) $720=1\times2\times3\times4\times5\times6 \qquad \therefore n=6$

(2) ${}_n\mathrm{P}_3=30n$에서 $n(n-1)(n-2)=30n$

$(n-1)(n-2)=30$, $(n-1)(n-2)=6\times5$

즉, $n-1=6$이므로 $n=7$ ($\because n\geq3$)

(3) ${}_n\mathrm{P}_2=6\cdot{}_4\mathrm{P}_2$에서 $n(n-1)=6\times4\times3=72$

이때, 72를 연속하는 두 자연수의 곱으로 나타내면

$72=9\times8$이므로

$n(n-1)=9\times8 \qquad \therefore n=9$ ($\because n\geq2$)

(4) ${}_5\mathrm{P}_r=\underbrace{5\times4\times\cdots\times(5-r+1)}_{r\text{개}}$이고, ${}_5\mathrm{P}_r=60$이므로

60을 5에서 시작하여 차례로 1씩 줄여가면서 r개를 곱한 수로 나타내어야 한다.

$60=5\times4\times3$, 즉 5에서 시작하여 차례로 3개의 수를 곱한 것이므로 $r=3$

382 정답 (1) 504 (2) 280 (3) 224

(1) 1부터 9까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 9개에서 3개를 택하는 순열의 수 ${}_9\mathrm{P}_3$과 같다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

${}_9\mathrm{P}_3=9\times8\times7=504$(개)

(2) 세 자리 자연수가 홀수가 되려면 일의 자리의 숫자가 홀수이어야 한다.

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지,

각각의 경우에 대하여 백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 일의 자리의 숫자를 제외한 8개의 숫자 중에서 2개를 택하여 배열하면 되므로 그 방법의 수는 ${}_8\mathrm{P}_2$가지

따라서 구하는 자연수의 개수는

$5\times{}_8\mathrm{P}_2=5\times8\times7=280$(개)

(3) 세 자리 자연수 중 짝수는 전체 세 자리 자연수 가운데 홀수인 수를 제외한 수이므로 구하는 자연수의 개수는

$504-280=224$(개)

다른 풀이

세 자리의 자연수가 짝수가 되려면 일의 자리의 숫자가 짝수이어야 한다.

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4가지,

각각의 경우에 대하여 백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 일의 자리의 숫자를 제외한 8개의 숫자 중에서 2개를 택하여 배열하면 되므로 그 방법의 수는 ${}_8\mathrm{P}_2$가지

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\times{}_8\mathrm{P}_2=4\times8\times7=224$(개)

383 정답 10

회원 n명 중에서 대표, 부대표, 총무를 각각 1명씩 선출하는 방법의 수는 n명 중에서 3명을 택하는 순열의 수 ${}_nP_3$와 같다.

즉, ${}_nP_3=720$에서

$n(n-1)(n-2)=720$

이때, 720을 연속하는 세 자연수의 곱으로 나타내면

$720=10\times9\times8$이므로 $n=10$

384 정답 48

서로 이웃해야 하는 여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여

(i) 남학생 3명과 여학생 1묶음을 배열하는 방법의 수는

$4!$(가지)

(ii) 위의 묶음에서 여학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$4!\times2!=24\times2=48$(가지)

385 정답 144

a, b, c가 서로 이웃하지 않도록 일렬로 배열하려면 이웃해도 관계없는 d, e, f를 먼저 배열한 다음, 그 사이사이와 양 끝의 자리에 a, b, c를 넣으면 된다.

(i) d, e, f를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $3!=6$(가지)

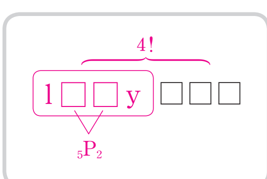
(ii) 그 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에서 3개를 택하여 a, b, c를 배열하는 방법의 수는 ${}_4P_3=24$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$3!\times{}_4P_3=6\times24=144$(가지)

386 정답 (1) 960 (2) 2400

(1) l과 y 사이에 2개의 문자를 먼저 넣은 후 (l□□y) 또는 (y□□l)의 꼴을 한 묶음으로 생각하자.



(l□□y)의 꼴일 때의 경우의 수를 먼저 구하면

(i) l와 y 사이에 2개의 문자를 넣는 방법의 수는

${}_5P_2=20$(가지)

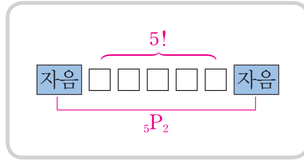
(ii) (l□□y)를 한 묶음으로 생각하고 나머지 3개의 문자와 묶음을 함께 배열하는 방법의 수는 $4!=24$(가지)

그러므로 구하는 경우의 수는 $20\times24=480$(가지)

(y□□l)의 꼴일 때도 마찬가지이므로 480(가지)

따라서 구하는 전체 경우의 수는 $480\times2=960$(가지)

(2) 자음인 l, b, r, t, y의 5개의 문자 중에서 2개를 택하여 양 끝에 배열하는 방법의 수는



${}_5P_2=5\times4=20$(가지)

가운데 5개의 자리에 양끝의 문자를 제외한 나머지 5개의 문자를 배열하는 방법의 수는 $5!=120$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

${}_5P_2\times5!=20\times120=2400$(가지)

387 정답 432

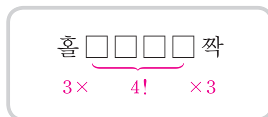
한 쪽 끝에는 홀수, 다른 쪽 끝에는 짝수가 오는 경우는

(홀, □, □, □, □, 짝) 또는 (짝, □, □, □, □, 홀)

의 두 가지 꼴이 있다.

이때 홀수는 1, 3, 5의 3개, 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로

(i) (홀, □, □, □, □, 짝)의 꼴일 때,



맨 앞에 홀수 하나를 배정하는 방법의 수는

⇨ ${}_3P_1=3$(가지),

맨 끝에 짝수 하나를 배정하는 방법의 수는

⇨ ${}_3P_1=3$(가지),

사이에 나머지 4개의 수를 일렬로 배열하는 방법의 수는

⇨ $4!=24$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times3\times24=216$(가지)

(ii) (짝, □, □, □, □, 홀)의 꼴일 때,

(i)과 같으므로 216(가지)

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $216\times2=432$(가지)

388 정답 576

전체 경우의 수에서 양 끝에 모두 모음이 오는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$6!=720$(가지)

(ii) 양 끝에 모두 모음이 오는 경우의 수는

- 3개의 모음 o, e, a 중에서 2개의 모음을 택하여 양 끝에 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$(가지)
- 그 각각에 대하여 나머지 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$(가지)

$\therefore 6\times24=144$(가지)

따라서 적어도 한 쪽 끝에 자음이 오는 경우의 수는

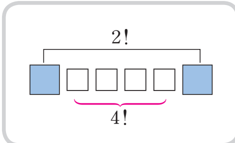
$720-144=576$(가지)

389 정답 672

전체 경우에서 m과 n 사이에 문자가 4개 들어 있는 경우를 빼면 된다.

(i) 6개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수는(가지)

$${}_6P_6=6!=720$$



(ii) m과 n 사이에 문자가 4개 들어있는 경우의 수는

양 끝에 m, n을 배열하는 방법의 수는 $2!$(가지)

m, n 사이에 4개의 문자를 배열하는 방법의 수 $4!$(가지)

$\therefore\ 2!\times4!=48$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $720-48=672$(가지)

390 정답 (1) 24 (2) 13 (3) 10

(1) 4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 일렬로 배열하는 것이므로

$4!=24$(개)

(2) 1□□□꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$(개)

2□□□꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$(개)

이때, 3124는 3□□□꼴의 첫 번째 자연수이므로

$6+6+1=13$(번째)

에 오는 자연수이다.

(3) 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 2400보다 작은 자연수는

1□□□, 21□□, 23□□

꼴의 자연수이다.

1□□□꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$(개)

2 1□□꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$(개)

2 3□□꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$(개)

따라서 2400보다 작은 자연수의 개수는 $6+2+2=10$(개)

연습문제 I

pp.214~216

391 정답 (1) 11 (2) 5 (3) 5 (4) 3

(1) ${}_nP_2=110$에서 $n(n-1)=110$

이때, 110을 연속하는 두 자연수의 곱으로 나타내면

$110=11\times10$이므로

$n(n-1)=11\times10 \qquad \therefore\ n=11\ (\because\ n\geq2)$

(2) ${}_{n+1}P_3=30(n-1)$에서

$(n+1)n(n-1)=30(n-1),\ n(n+1)=30$

이때, 30을 연속하는 두 자연수의 곱으로 나타내면

$30=5\times6$이므로

$n(n+1)=5\times6 \qquad \therefore\ n=5\ (\because\ n\geq3)$

(3) ${}_{n+1}P_2+{}_nP_2=50$에서

$(n+1)n+n(n-1)=50,\ 2n^2=50$

$n^2=25 \qquad \therefore\ n=5$

(4) ${}_{10}P_r=\underbrace{10\times9\times\cdots\times(10-r+1)}_{r\text{개}}$이고, ${}_{10}P_r=720$이므로

720을 10에서 시작하여 차례로 1씩 줄여가면서 r개를 곱한 수로 나타내어야 한다.

$720=10\times9\times8$, 즉 10에서 시작하여 차례로 3개의 수를 곱한 것이므로 $r=3$

392 정답 (가) $n-r$ (나) $r-1$ (다) n

$${}_nP_r=\frac{n!}{(\underbrace{n-r}_{\text{(가)}})!}\text{이고}$$

$${}_{n-1}P_{r-1}=\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}\text{이므로}$$

$$n\cdot{}_{n-1}P_{r-1}=n\cdot\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(\underbrace{r-1}_{\text{(나)}})\}!}$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)!}{(n-r)!}=\frac{(\overbrace{n}^{\text{(다)}})!}{(n-r)!}$$

$$={}_nP_r$$

393 정답 (1) 144 (2) 144

(1) 수학책 3권을 한 묶음으로 생각하고 수학책 한 묶음과 나머지 책 3권을 배열하는 방법의 수는 $4!$(가지)

또, 수학책끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의해

$4!\times3!=144$(가지)

(2) 이웃해도 되는 나머지 책 3권을 먼저 배열한 후, 그 사이사이 및 양 끝에 수학책을 꽂으면 되므로

∨□∨□∨□∨ (∨ ← 수학책 3권, □ ← 나머지 책 3권)

나머지 책 3권을 배열하는 방법의 수는 $3!$(가지)

그 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리 중에서 3개를 택하여 수학책을 꽂는 방법의 수는 ${}_4P_3$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는 $3!\times{}_4P_3=144$(가지)

개념 보충

이웃하거나 이웃하지 않는 조건이 있는 순열의 수

서로 다른 n개 중에서 특정한 r개가 이웃하지 않도록 배열하는 방법의 수는

(i) 이웃하지 않아야 하는 r개를 제외한 $(n-r)$개를 먼저 배열한다. ⇨ $(n-r)!$(가지)

(ii) (i)의 각각에 대하여 그 사이사이와 양 끝의 자리 $(n-r+1)$개에 이웃하지 않는 r개를 배열한다.

⇨ ${}_{n-r+1}P_r$(가지)

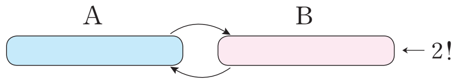
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$(n-r)!\times{}_{n-r+1}P_r$(가지)

394 정답 5760

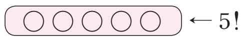
이웃해야 하는 것끼리 한 묶음으로 생각하자.

A반 학생 4명과 B반 학생 5명을 각각 한 묶음으로 생각하여 일렬로 세우는 방법의 수는 $2!=2$(가지)



A반 학생 4명끼리 서로 자리를 바꾸어 서는(일렬로 서는) 방법의 수는 $4!=24$(가지)

B반 학생 5명끼리 일렬로 서는 방법의 수는 $5!=120$(가지)



따라서 구하는 경우의 수는

$2\times4!\times5!=2\times24\times120=5760$(가지)

395 정답 ②

합창 6곡을 먼저 배열하고 그 사이사이와 양 끝에 독창 4곡을 배열하면 된다.

∨$\boxed{\text{합}}$∨$\boxed{\text{합}}$∨$\boxed{\text{합}}$∨$\boxed{\text{합}}$∨$\boxed{\text{합}}$∨$\boxed{\text{합}}$∨

합창 6곡을 배열하는 방법의 수는 $6!$(가지)

합창의 사이사이 및 양 끝의 7군데에 독창을 배열하는 방법의 수는

${}_7P_4$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는 $6!\times{}_7P_4$(가지)

396 정답 120

3000 미만의 수는

(i) 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1 또는 2의 2가지

(ii) 그 각각에 대하여 나머지 세 자리에는 천의 자리의 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 뽑아 배열하면 되므로

${}_5P_3$

따라서 구하는 수의 개수는

$2\times{}_5P_3=2\times5\times4\times3=120$(개)

397 정답 1440

맨 앞에 남자를 세우는 방법의 수는 4가지,

남은 3명의 남자 중 1명을 뽑아 맨 뒤에 세우는 방법의 수는 3가지,

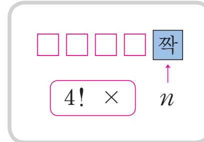
남은 남자 2명과 여자 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5!=120$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의해

$4\times3\times120=1440$(가지)

398 정답 3



5개의 한 자리의 자연수 중 짝수의 개수를 n이라 하자.

다섯 자리의 자연수가 짝수이면 일의 자리의 수가 짝수이어야 한다.

일의 자리의 수를 택하는 방법의 수는

n(가지)

나머지 4개의 수를 배열하는 방법의 수는

$4!$(가지)

따라서 짝수가 되는 경우의 수는 $n\times4!=24n$(가지)

즉, $24n=72$이므로 $n=3$

개념 보충

특정한 조건이 주어진 n자리의 자연수를 만드는 경우

(1) 짝수(홀수) : 일의 자리에 올 수 있는 숫자를 먼저 결정한다.

(2) 3의 배수(9의 배수) : 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수(9의 배수)가 되도록 각 자리에 올 수 있는 수의 순서쌍을 먼저 결정한다.

399 정답 ④

10대 참가자는 1명이므로 첫 번째나 마지막 순서에 올 수 없다.

(i) 첫 번째와 마지막 순서에 모두 20대 참가자가 무대에 오르는 경우의 수는

${}_3P_2\times4!=144$(가지)

(ii) 첫 번째와 마지막 순서에 모두 30대 참가자가 무대에 오르는 경우의 수는

${}_2P_2\times4!=48$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$144+48=192$(가지)

400 정답 108

전체 경우의 수에서 a, b, c 중 어느 것도 이웃하지 않는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 배열하는 전체 경우의 수는 ⇨ $5!=120$(가지)

(ii) a, b, c 중 어느 것도 이웃하지 않는 경우의 수는 d, e를 일렬로 배열하고 그 사이사이 및 양 끝의 3개의 자리에 a, b, c가 오도록 배열하는 경우의 수와 같으므로

⇨ $3!\times2!=12$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $120-12=108$(가지)

401 정답 480

전체 경우의 수에서 m과 n 사이에 문자가 하나도 없는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 6개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수는

$_6P_6=6!=720$(가지)

(ii) m과 n 사이에 문자가 들어가지 않는 경우의 수는 (m, n)을 한 묶음으로 생각하면 되므로

(m, n)묶음과 나머지 4개의 문자를 배열하는 방법의 수는
⇨ 5!

(m, n)묶음 안에서 m과 n이 서로 자리를 바꾸는 방법의 수
⇨ 2!

$\therefore 5!\times2!=240$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$720-240=480$(가지)

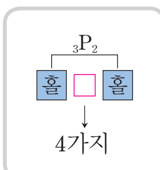
402 정답 76

전체 경우의 수에서 양 끝이 모두 홀수인 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 1, 2, 3, 4, 5의 5가지, 십의 자리와 일의 자리에는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 배열하면 되므로 그 방법의 수는 $_5P_2=20$

따라서 세 자리의 자연수의 개수는 $5\times20=100$(개)

(ii) 양 끝에 모두 홀수가 오는 경우의 수는



홀수의 개수가 1, 3, 5의 3개이므로

• 먼저 양 끝에 2개의 홀수를 넣는 방법의 수는

$_3P_2=6$(가지)

• 가운데 숫자는 양 끝에 온 홀수를 제외한 숫자가 올 수 있으므로 4가지

• 따라서 양쪽 끝이 홀수인 세 자리의 자연수의 개수는

$6\times4=24$

(i), (ii)에서 적어도 한쪽 끝이 짝수인 자연수의 개수는

$100-24=76$

403 정답 60

$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$를 만족하는 함수 f는 일대일함수이다.

$f(1)$은 a, b, c, d, e 5가지 중 하나

$f(2)$는 a, b, c, d, e 중 $f(1)$을 제외한 4가지 중 하나

$f(3)$은 a, b, c, d, e 중 $f(1), f(2)$를 제외한 3가지 중 하나

$\therefore {}_5P_3=5\times4\times3=60$(개)

404 정답 ②

a□□□□, b□□□□의 꼴인 문자열의 개수는

$2\times4!=48$(개)이므로

50번째에 오는 문자열은 c□□□□의 꼴의 두 번째 문자열이다.

$cabde$, $cabed$, ⋯

따라서 50번째에 오는 문자열은 $cabed$이다.

405 정답 104

340보다 큰 세 자리의 자연수는

34□, 35□, 36□, 4□□, 5□□, 6□□의 꼴이다.

(i) 34□의 꼴일 때, □ 안에 들어갈 수 있는 숫자는 1, 2, 5, 6의 4가지

(ii) 35□, 36□의 꼴일 때, 안에 들어갈 수 있는 숫자는 각각 5가지이므로

$2\times5=10$(가지)

(iii) 4□□, 5□□, 6□□의 꼴일 때, 백의 자리에 오는 수를 제외한 6개의 숫자 중 2개를 택하여 나열하는 방법의 수와 같으므로

$3\times{}_6P_2=90$(가지)

(i), (ii), (iii)에서 구하는 개수는

$4+10+90=104$

연습문제 Ⅱ

p.217

406 정답 144

A와 B는 이웃하고, C와 D는 이웃하지 않도록 배열하는 하나의 경우는 다음과 같다.

∨$\boxed{\text{AB}}$∨$\boxed{\text{E}}$∨$\boxed{\text{F}}$∨

(i) 이웃하는 A와 B를 한 묶음으로 생각하여 C와 D를 제외한 (AB), E, F의 세 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$(가지)

(ii) 위의 각각의 경우에 대하여 A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$(가지)

(iii) 배열의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리 중에서 2개의 자리에 C, D를 배열하는 경우의 수는

$_4P_2=12$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2\times12=144$(가지)

407 정답 ⑤

(0과 1), (2와 3), (4와 5)의 세 장의 카드에 대하여

(ⅰ) 세 장의 카드를 배열하는 순서를 정하는 방법의 수는 $3!$
  각 배열 순서에서 카드의 앞면 또는 뒷면을 정하는 방법의 수는 각각 2가지
  따라서 세 장의 카드를 늘어 놓는 모든 경우의 수는
  $3!\times 2^3$(가지)

(ⅱ) 0이 적힌 카드가 맨 앞에 오면 세 자리 자연수가 되지 않으므로 제외해야 한다.
  0이 적힌 카드가 맨 앞에 오는 경우의 수는 $2!\times 2^2$(가지)

따라서 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!\times 2^3-2!\times 2^2$(개)

408 정답 48

세 자리의 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수이어야 한다.

1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 3개의 수를 택할 때, 그 수의 합이 3의 배수인 경우는

(1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 5, 6),
(2, 3, 4), (2, 4, 6), (3, 4, 5), (4, 5, 6)

의 8가지이다.

구하는 3의 배수의 개수는 위의 각 경우를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$8\times {}_3P_3=8\times 3!=48$(개)

409 정답 8

0, 1, 2, 3, 4 중 홀수는 1, 3의 2개이므로, 네 자리의 자연수 $\boxed{\text{천}}\boxed{\text{백}}\boxed{\text{십}}\boxed{\text{일}}$에서

(ⅰ) 백의 자리와 일의 자리에 홀수가 오는 경우의 수는 ${}_2P_2$

(ⅱ) 천의 자리에는 남은 3개의 숫자 0, 2, 4 중에서 0은 올 수 없으므로 2, 4의 2가지

(ⅲ) 십의 자리에 올 수 있는 수는 0, 2, 4 중 천의 자리에 온 수를 제외한 2가지

따라서 구하는 네 자리의 자연수의 개수는

${}_2P_2\times 2\times 2=8$(개)

410 정답 78 서술형

5개의 문자를 일렬로 배열하는 모든 방법의 수에서 A가 처음에 오는 경우 또는 E가 마지막에 오는 경우를 제외하면 된다.

5개의 문자 A, B, C, D, E를 일렬로 배열하는 모든 방법의 수는 ⇨ $5!=120$(가지) … ①

A가 처음에 오는 경우의 수는 A□□□□의 꼴이므로
⇨ $4!=24$(가지)

E가 마지막에 오는 경우의 수는 □□□□E에서
⇨ $4!=24$(가지)

A가 처음에, E가 마지막에 오는 경우의 수는 A□□□E의 꼴이므로
⇨ $3!=6$(가지)

따라서 A가 처음에 오거나 E가 마지막에 오는 경우의 수는

$24+24-6=42$(가지) … ②

이상에서 구하는 경우의 수는

$120-42=78$(가지) … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	5개의 문자 A, B, C, D, E를 일렬로 배열하는 방법의 수 구하기	30 %
②	A가 처음에 오거나 E가 마지막에 오는 경우의 수 구하기	50 %
③	답 구하기	20 %

14. 조합

확인문제 .... pp.222~227

411 정답 (1) **1** (2) **45** (3) **210**

(1) ${}_{10}\mathrm{C}_{10}={}_{10}\mathrm{C}_0=1$

(2) ${}_{10}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$

(3) ${}_{10}\mathrm{C}_6={}_{10}\mathrm{C}_4=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

412 정답 (1) **10** (2) **6** (3) **9** (4) **4**

(1) ${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=45$에서 $n(n-1)=90=10\times9$

$\therefore n=10\ (\because n\geq2)$

(2) ${}_n\mathrm{C}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_1$이므로 ${}_n\mathrm{C}_1=6$

$\therefore n=6$

(3) ${}_n\mathrm{C}_6={}_n\mathrm{C}_{n-6}={}_n\mathrm{C}_3$에서 $n-6=3$

$\therefore n=9$

(4) ${}_{10}\mathrm{C}_r={}_{10}\mathrm{C}_{10-r}$이므로 ${}_{10}\mathrm{C}_{10-r}={}_{10}\mathrm{C}_{r+2}$에서

$10-r=r+2,\ 2r=8 \qquad \therefore r=4$

413 정답 (1) **45** (2) **10** (3) **120**

(1) 회원 10명 중에서 청소 당번 2명을 뽑는 방법의 수는 서로 다른 10개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_{10}\mathrm{C}_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$(가지)

(2) 10 이하의 짝수는 2, 4, 6, 8, 10의 5개이고, 이 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$(가지)

(3) 집합 S의 원소 10개 중에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$(가지)

414 정답 **105**

$1\leq a<b\leq15$이므로 두 자연수 a, b는 1 이상 15 이하의 서로 다른 자연수이다.

또, a, b는 이미 대소 관계(순서)가 정해져 있으므로, 2개의 수를 뽑기만 하면 작은 수가 a, 큰 수가 b로 정해진다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 15개의 수에서 2개의 수를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_{15}\mathrm{C}_2=\dfrac{15\times14}{2\times1}=105$

415 정답 (1) **210** (2) **40**

(1) 검은 공 5개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$(가지)

흰 공 7개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_2=21$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$10\times21=210$(가지)

(2) 검은 공 5개 중에서 4개를 뽑는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_4=5$(가지)

흰 공 7개 중에서 4개를 뽑는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_4=35$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$5+35=40$(가지)

416 정답 (1) **5** (2) **10** (3) **25**

(1) 빨강과 파랑이 모두 포함되므로 7가지 색연필 중에서 빨강과 파랑은 미리 뽑았다고 생각하고, 빨강과 파랑을 제외한 나머지 5가지 색연필 중에서 1자루만 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1=5$(가지)

(2) 빨강과 파랑이 모두 포함되지 않으므로 빨강과 파랑을 제외한 나머지 5가지 색연필 중에서 3자루를 뽑으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$(가지)

(3) 전체 7가지 색연필 중에서 3자루를 뽑는 경우의 수에서 빨강과 파랑이 모두 포함되지 않는 경우의 수를 빼면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_3-{}_5\mathrm{C}_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}-\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}$

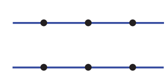
$=35-10=25$(가지)

417 정답 **18**

6개의 점 중에서 세 개의 점을 택하는 방법의 수는

${}_6\mathrm{C}_3=20$(가지)

이때, 한 직선 위에 세 점이 있는 경우는 오른쪽 그림과 같이 2가지이다.

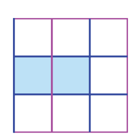


따라서 구하는 삼각형의 개수는 $20-2=18$(개)

418 정답 **36**

4개의 가로선 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$(가지)

4개의 세로선 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$(가지)



따라서 만들 수 있는 직사각형의 개수는

$6\times6=36$(개)

419 정답 100

[경우 나누기]

1부터 10까지의 10개의 자연수 중 홀수와 짝수가 각각 5개씩 있다. 이 중에서 3개를 뽑을 때 홀수와 짝수가 적어도 하나씩은 있어야 하므로 (홀수 2개, 짝수 1개)를 뽑거나 (홀수 1개, 짝수 2개)를 뽑아야 한다.

(i) 홀수 2개, 짝수 1개를 뽑는 방법의 수는

$${}_5C_2 \times {}_5C_1 = 10 \times 5 = 50(\text{가지})$$

(ii) 홀수 1개, 짝수 2개를 뽑는 방법의 수는

$${}_5C_1 \times {}_5C_2 = 5 \times 10 = 50(\text{가지})$$

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$$50 + 50 = 100(\text{가지})$$

[여사건을 이용한 풀이]

전체 10개의 자연수 중에서 3개를 뽑는 경우의 수에서 홀수만 3개를 뽑는 경우의 수와 짝수만 3개를 뽑는 경우의 수를 빼면 된다.

10개 중 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_3 = 120$(가지)

홀수 5개 중 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3 = 10$(가지)

짝수 5개 중 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3 = 10$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 - ({}_5C_3 + {}_5C_3) = 120 - (10 + 10) = 100(\text{가지})$$

연습문제 I .... pp.228~230

420 정답 (1) 9 (2) 9 (3) 10 (4) 13

(1) ${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2!} = 36$에서

$$n(n-1) = 72 = 9 \times 8 \qquad \therefore n = 9$$

(2) $n = n(n-1) - 63$에서

$$n^2 - 2n - 63 = 0,\ (n-9)(n+7) = 0$$

$$\therefore n = 9$$

(3) ${}_nC_8 = {}_nC_{n-8} = {}_nC_2$에서

$$n - 8 = 2 \qquad \therefore n = 10$$

(4) ${}_{n+2}C_n + {}_{n+1}C_{n-1} = {}_{n+2}C_2 + {}_{n+1}C_2$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2!} + \frac{(n+1)n}{2!} = 196$$

$$(n+2)(n+1) + (n+1)n = 392$$

$$n^2 + 2n - 195 = 0,\ (n+15)(n-13) = 0$$

$$\therefore n = 13$$

421 정답 10

${}_nP_r = {}_nC_r \times r!$이므로 $210 = 35 \times r!$에서 $r! = 6$

$$\therefore r = 3$$

즉, ${}_nP_3 = 210$에서 $n(n-1)(n-2) = 210$이고,

$210 = 7 \times 6 \times 5$이므로 $n = 7$

$$\therefore n + r = 7 + 3 = 10$$

422 정답 (가) $r-1$ (나) $n-r$

등식 $r \cdot {}_nC_r = n \cdot {}_{n-1}C_{r-1}$에서 좌변을 정리하면

$$r \cdot {}_nC_r = r \times \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{\underbrace{(r-1)}_{(\text{가})}!(n-r)!}$$

또, 우변을 정리하면

$$n \cdot {}_{n-1}C_{r-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\underbrace{(n-r)}_{(\text{나})}!}$$

따라서 좌변과 우변이 같으므로 주어진 등식이 성립한다.

423 정답 360

회원 10명 중에서 먼저 회장 1명을 뽑는 방법의 수는

$${}_{10}C_1 = 10(\text{가지})$$

각각의 경우에서 나머지 9명 중 부회장 2명을 뽑는 방법의 수는

$${}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36(\text{가지})$$

따라서 곱의 법칙에 의해 구하는 경우의 수는

$${}_{10}C_1 \times {}_9C_2 = 10 \times 36 = 360(\text{가지})$$

424 정답 220

$1 \le a < b < c \le 12$이므로 세 자연수 a, b, c는 1 이상 12 이하의 서로 다른 자연수이다.

또 a, b, c는 이미 대소 관계(순서)가 정해져 있으므로, 3개의 수를 뽑기만 하면 크기가 작은 수부터 차례로 a, b, c가 정해진다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 1에서 12까지의 12개의 자연수 중에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

425 정답 7

n개의 팀이 참석했다고 하면 서로 한 번씩 경기한 횟수는 ${}_nC_2$이므로

$${}_nC_2 = 21,\ \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 21,\ n(n-1) = 42$$

$$n(n-1) = 7 \times 6 \qquad \therefore n = 7$$

426 정답 (1) 40 (2) 14

(1) 1학년 학생 4명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4(\text{가지})$$

2학년 학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10(\text{가지})$$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$4 \times 10 = 40(\text{가지})$$

(2) 1학년 학생 중에서 3명 모두 뽑거나 2학년 학생 중에서 3명 모두 뽑으면 된다.
1학년 학생 4명 중에서 3명을 모두 뽑는 경우의 수는

$_4C_3=4$(가지)

2학년 학생 5명 중에서 3명을 모두 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={_5C_2}=10$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$4+10=14$(가지)

427 정답 **78**

특정한 2명은 미리 선발했다고 생각하고, 그 2명을 제외한 나머지 13명 중에서 2명을 선발하면 된다.

$\therefore\ {_{13}C_2}=\dfrac{13\times12}{2\times1}=78$(가지)

428 정답 **31**

전체 7명에서 3명을 뽑는 경우의 수에서 3명 모두 남학생을 뽑는 경우의 수를 빼면 된다.
전체 7명에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$(가지)

남학생 4명에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_4C_3={_4C_1}=4$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $35-4=31$(가지)

429 정답 **155**

10장의 카드에서 4장을 뽑는 모든 경우의 수에서 홀수가 적힌 카드가 1장 이하로 뽑히는 경우의 수를 빼면 된다.
10장의 카드에서 4장을 뽑는 모든 경우의 수는

$_{10}C_4=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$(가지)

짝수가 적힌 카드만 4장을 뽑는 경우의 수는

$_5C_4=5$(가지)

짝수가 적힌 카드 3장, 홀수가 적힌 카드 1장을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3\times{_5C_1}=10\times5=50$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $210-(5+50)=155$(가지)

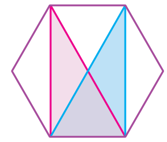
430 정답 (1) **9** (2) **8**

(1) 꼭짓점 6개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 $_6C_2$가지이다.
그런데 이웃하는 두 꼭짓점을 택하는 6가지 경우는 제외해야 하므로 구하는 대각선의 수는

$_6C_2-6=15-6=9$(개)

(2) 꼭짓점 6개 가운데 3개를 택하여 삼각형을 만들 수 있으므로 전체 삼각형의 개수는 $_6C_3=20$(개)
이 중 정육각형의 한 변을 공유하는 직각삼각형이 각 변 마다 2개씩 만들어지므로 직각삼각형의 개수는

$6\times2=12$(개)



따라서 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수는

$20-12=8$(개)

개념 보충

***n*각형의 대각선의 개수**

n개의 꼭짓점에서 2개를 택하여 연결하면 대각선 또는 n각형의 변이 만들어진다. 따라서 n각형의 대각선의 개수는 n개에서 2개를 택하는 조합의 수에서 n각형의 변의 개수 n을 뺀 것과 같다.

⇨ $_nC_2-n=\dfrac{n(n-1)}{2\times1}-n=\dfrac{n(n-3)}{2}$

431 정답 (1) **16** (2) **31**

(1) 전체 7개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_7C_2=21$(가지)

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택는 방법의 수는 $_4C_2=6$(가지)
이때, 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하여 만든 직선은 모두 같은 직선이므로 구하는 직선의 개수는

$_7C_2-{_4C_2}+1=21-6+1=16$(개)

(2) 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$_7C_3-{_4C_3}=35-4=31$(개)

432 정답 **30**

각 그룹에 적어도 1명의 여학생이 포함되려면 여학생이 1명인 그룹과 여학생이 2명인 그룹으로 나누어져야 한다.
여학생이 1명인 그룹을 정하는 방법의 수는
여학생 3명 중에서 1명을 택하는 방법의 수 $_3C_1=3$
남학생 5명 중에서 3명을 택하는 방법의 수 $_5C_3=10$

$\therefore\ {_3C_1}\times{_5C_3}=3\times10=30$(가지)

여학생이 1명인 그룹이 결정되면 남은 사람은 모두 여학생이 2명인 그룹을 이루게 된다.
따라서 구하는 방법의 수는 30가지이다.

433 정답 (1) **15** (2) **20** (3) **35**

(1) 길동이와 길남이를 제외한 6명 중에서 2명을 뽑아서 한 팀으로 묶으면 되므로 구하는 경우의 수는

$_6C_2=15$(가지)

(2) 길동이와 길남이를 미리 서로 다른 팀에 배정한 다음, 남은 6명 중 길동이팀에 속할 3명을 뽑으면 나머지 3명은 길남이팀에 속하게 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 6명 중 3명을 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_6C_3=20$(가지)

(3) 8명을 4명씩 두 팀으로 나눌 때, 길동이와 길남이가 같은 팀에 속하거나 같은 팀에 속하지 않거나 두 가지 중 하나이므로 구하는 모든 경우의 수는 (1), (2)에 의해

$15+20=35$(가지)

434 정답 **70**

택시 정원이 4명이므로 4명과 3명의 두 조로 나누어 A, B 두 대의 택시에 나누어 타야 한다.

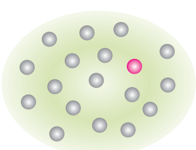
(i) A에 4명, B에 3명이 타는 경우
A에 탈 4명을 정하면 나머지 3명은 B에 타게 되므로
${}_7C_4=35$(가지)

(ii) A에 3명, B에 4명이 타는 경우
A에 탈 3명을 정하면 나머지 4명은 B에 타게 되므로
${}_7C_3=35$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는
${}_7C_4+{}_7C_3=70$(가지)

435 정답 (가) ${}_{n-1}C_{r-1}$ (나) ${}_{n-1}C_r$

${}_nC_r$는 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수이다. 이때 n개 중에서 r개를 택하는 경우는 오른쪽 그림에서 ●를 택하는 경우와 ●를 택하지 않는 경우의 두 가지로 나누어 생각할 수 있다.



(i) ●를 택하는 경우
●를 이미 택하였으므로 나머지 $n-1$개 중에서 $r-1$개만 더 택하면 된다.
따라서 $\underbrace{{}_{n-1}C_{r-1}}_{(가)}$(가지)

(ii) ●를 택하지 않는 경우
●는 택하지 않으므로 나머지 $n-1$개 중에서 r개를 택해야 한다.
따라서 $\underbrace{{}_{n-1}C_r}_{(나)}$(가지)

(i)의 경우와 (ii)의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여 다음이 성립한다.

$${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$$

[참고] ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$를 '파스칼의 삼각형'이라고 한다.

연습문제 II

p.231

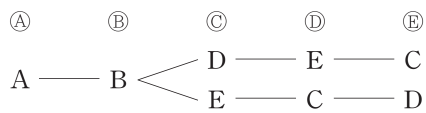
436 정답 **120**

백의 자리의 수를 a, 십의 자리의 수를 b, 일의 자리의 수를 c라 놓으면 $a>b>c$이어야 한다.
따라서 0에서 9까지 10개의 수 중에서 3개를 택하여 큰 수부터 차례로 a, b, c로 놓으면 된다.
즉, 구하는 자연수의 개수는 10개의 수 중에서 3개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_{10}C_3=120$(개)

437 정답 **20**

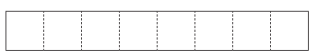
예를 들어, 5명의 수험생을 각각 A, B, C, D, E라고 할 때 A, B가 자신의 수험표를 받고 C, D, E가 자신의 것이 아닌 수험표를 받는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같이 2가지이다.



5명의 수험생 중 자신의 수험표를 받을 사람을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2$(가지)
각각의 경우에 대하여 나머지 세 학생이 자신의 것이 아닌 수험표를 받는 경우의 수는 2가지
따라서 전체 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$\begin{aligned}{}_5C_2\times2&=\frac{5\times4}{2\times1}\times2\\&=20(\text{가지})\end{aligned}$$

438 정답 **126**



도형을 세 부분으로 나누는 방법의 수는 위의 그림의 7개의 점선에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_7C_2=21$(가지)
또, 세 부분을 색칠하는 방법의 수는 세 개의 색을 배열하는 순열의 수와 같으므로 $3!$
따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의해

$$\begin{aligned}{}_7C_2\times3!&=21\times6\\&=126(\text{가지})\end{aligned}$$

439 정답 130

[경우 나누기]

(i) 한 쌍의 부부만 포함되는 경우

5쌍의 부부 중 포함되는 한 쌍을 택하는 경우의 수는

$_5C_1=5$(가지)

나머지 네 쌍 중에서 한 명씩만 뽑히는 두 쌍을 택하는 경우의 수는 $_4C_2=6$(가지)

한 명씩만 뽑히는 두 쌍에서 남편 또는 아내를 택하는 경우의 수는 각각 2가지씩이므로

$_5C_1\times{}_4C_2\times2\times2=120$(가지)

(ii) 두 쌍의 부부가 포함되는 경우

5쌍의 부부 중 포함되는 두 쌍을 택하는 경우의 수는

$_5C_2=10$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $120+10=130$(가지)

[여사건을 이용한 풀이]

5쌍의 부부 10명 중에서 4명을 뽑는 전체 경우의 수에서 한 쌍의 부부도 포함되지 않는 경우의 수를 빼면 된다.

5쌍의 부부 10명 중에서 4명을 뽑는 전체 경우의 수는

$_{10}C_4=210$(가지)

5쌍 중에서 한 명씩만 뽑히는 네 쌍을 택하는 경우의 수는

$_5C_4=5$(가지)

한 명씩만 뽑히는 네 쌍에서 남편 또는 아내를 택하는 경우의 수는 각각 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$_{10}C_4-{}_5C_4\times2\times2\times2\times2=210-80=130$(가지)

440 정답 15 서술형

두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 (두 수 모두 3의 배수)이거나 (3으로 나눈 나머지가 각각 1인 수와 나머지가 2인 수)인 경우이다. … ①

1부터 10까지의 자연수를 3으로 나눈 나머지가 같은 수로 분류하면 다음과 같다.

3의 배수인 수 : 3, 6, 9

나머지가 1인 수 : 1, 4, 7, 10

나머지가 2인 수 : 2, 5, 8 … ②

(i) 두 수 모두 3의 배수인 경우 : 3, 6, 9의 세 개의 수에서 2개를 택하는 방법이므로 $_3C_2=3$(가지)

(ii) 3으로 나눈 나머지가 각각 1인 수와 나머지가 2인 수인 경우 : 1, 4, 7, 10의 네 개의 수에서 1개를 택하고 2, 5, 8의 세 개의 수에서 1개를 택하는 방법이므로

$_4C_1\times{}_3C_1=4\times3=12$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$3+12=15$(가지) … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우 구하기	20%
②	1부터 10까지의 자연수를 3으로 나눈 나머지가 같은 수로 분류하기	20%
③	답 구하기	60%

다른 풀이

2장의 카드에 적힌 수의 합이 3의 배수인 경우는 3, 6, 9, 12, 15, 18이다.

3인 경우 : (1, 2)

6인 경우 : (1, 5), (2, 4)

9인 경우 : (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)

12인 경우 : (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7)

15인 경우 : (5, 10), (6, 9), (7, 8)

18인 경우 : (8, 10)

따라서 구하는 경우의 수는

$1+2+4+4+3+1=15$(가지)