정답 및 해설

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

Ⅱ. 삼각함수

Ⅲ. 수열

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

1. 지수

유형 .... pp.13~21

001 정답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 125의 세제곱근은 세제곱하여 125가 되는 수를 모두 말한다. 즉, 방정식 $x^3=125$의 세 근이다.

$$x^3-125=0,\ (x-5)(x^2+5x+25)=0$$

$$\therefore\ x=5 \text{ 또는 } x=\frac{-5\pm5\sqrt{3}i}{2}\ (\text{거짓})$$

ㄴ. $\sqrt[3]{-125}$는 -125의 세제곱근 중 실수인 것을 나타낸다. (참)

ㄷ. 방정식 $x^4=-16$의 실근이 없으므로 -16의 네제곱근 중 실수인 것은 없다. (참)

ㄹ. -2의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-2}$이고, $\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$이므로 $\sqrt[3]{-2}$ 자신이 음수이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

002 정답 (1) 1 (2) 1 (3) 3 (4) 0.1 (5) $\frac{1}{2}$ (6) $\frac{76}{9}$ (7) 2 (8) 3

(1) $\sqrt[4]{(-3)^4}+\sqrt[5]{(-2)^5}=\sqrt[4]{3^4}+\sqrt[5]{(-2)^5}$
$=3+(-2)=1$

(2) $(\sqrt[4]{3})^4+(\sqrt[3]{-2})^3=3+(-2)=1$

(3) $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3\times27}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(4) $\sqrt[3]{0.0001}\times\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{0.0001\times10}=\sqrt[3]{0.001}$
$=\sqrt[3]{(0.1)^3}=0.1$

(5) $\dfrac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{-16}}=\dfrac{-\sqrt[3]{2}}{-\sqrt[3]{16}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{16}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$
$=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}=\dfrac{1}{2}$

(6) $\sqrt[4]{16^3}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{8}{27}\right)^2}=\sqrt[4]{2^{12}}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^6}=2^3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$
$=8+\dfrac{4}{9}=\dfrac{76}{9}$

(7) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}\times\sqrt{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{16}}\times\sqrt[3]{\sqrt{16}}$
$=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2$

(8) $\sqrt[12]{3^4}\times\sqrt[9]{3^6}=\sqrt[3\times4]{3^{1\times4}}\times\sqrt[3\times3]{3^{2\times3}}$
$=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{3^3}=3$

003 정답 (1) 1 (2) $\sqrt[6]{a}$

(1) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}\times\dfrac{\sqrt{\sqrt[6]{a}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}}\times\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[6]{a}}=1$

(2) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}\times\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}\times\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}}}$
$=\dfrac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}}\times\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}$
$=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}}=\dfrac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{a}}=\sqrt[6]{\dfrac{a^2}{a}}$
$=\sqrt[6]{a}$

004 정답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 12 (3) 1 (4) 18 (5) ab^2 (6) $a^{\sqrt{2}}$

(1) $\left\{\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$
$=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}=\dfrac{3}{2}$

(2) $(4^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times27^{\frac{1}{3\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}}=(4^{\frac{\sqrt{2}}{2}})^{\sqrt{2}}\times(27^{\frac{1}{3\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}}$
$=4^1\times27^{\frac{1}{3}}=4^1\times(3^3)^{\frac{1}{3}}$
$=4^1\times3^1=12$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}\times32^{-0.2}=\sqrt[6]{2^6}\times(2^5)^{-\frac{1}{5}}=2\times2^{5\times\left(-\frac{1}{5}\right)}$
$=2\times2^{-1}=2^{1-1}=2^0=1$

(4) $\sqrt[4]{16^2}\times(\sqrt[3]{3})^6\div\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\{(2^4)^2\}^{\frac{1}{4}}\times(3^{\frac{1}{3}})^6\div(2^6)^{\frac{1}{6}}$
$=2^{4\times2\times\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{3}\times6}\div2^{6\times\frac{1}{6}}$
$=2^2\times3^2\div2^1$
$=2\times3^2=18$

(5) $(\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[8]{b^3})^6\div(a^2b^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{2}}=(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{8}})^6\div(a^2b^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{2}}$
$=(a^{\frac{2}{3}})^6\times(b^{\frac{3}{8}})^6\div\{(a^2)^{\frac{3}{2}}(b^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{2}}\}$
$=a^4b^{\frac{9}{4}}\div a^3b^{\frac{1}{4}}$
$=a^{4-3}b^{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}}=ab^2$

(6) $(a^{\sqrt{\frac{4}{3}}}\times a^{\frac{1}{\sqrt{12}}}\div a^{\frac{\sqrt{3}}{2}})^{\sqrt{6}}=(a^{\sqrt{\frac{4}{3}}})^{\sqrt{6}}\times(a^{\frac{1}{\sqrt{12}}})^{\sqrt{6}}\div(a^{\frac{\sqrt{3}}{2}})^{\sqrt{6}}$
$=a^{\sqrt{\frac{4}{3}}\times\sqrt{6}}\times a^{\frac{1}{\sqrt{12}}\times\sqrt{6}}\div a^{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{6}}$
$=a^{2\sqrt{2}}\times a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\div a^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$
$=a^{2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}}=a^{\sqrt{2}}$

005 정답 (1) ① $\sqrt{5}$ ② 18 (2) -1

(1) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$이고, $x^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}=x^0=1$, $x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}=x^0=1$이므로

① $(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})^2=(x^{\frac{1}{4}})^2+2x^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}+(x^{-\frac{1}{4}})^2$
$=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})+2=3+2=5$

이므로 $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=\sqrt{5}$ 또는 $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=-\sqrt{5}$

이때, $x>0$에서 $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}>0$이므로

$x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=\sqrt{5}$

② $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$
$=3^3-3\times1\times3=18$

(2) $23^x=3^2$에서 $(23^x)^{\frac{1}{x}}=(3^2)^{\frac{1}{x}}$, 즉 $23=3^{\frac{2}{x}}$ …… ㉠

$69^y=3^4$에서 $(69^y)^{\frac{1}{y}}=(3^4)^{\frac{1}{y}}$, 즉 $69=3^{\frac{4}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{23}{69}=\frac{3^{\frac{2}{x}}}{3^{\frac{4}{y}}}$, $\frac{1}{3}=3^{\frac{2}{x}-\frac{4}{y}}$, $3^{-1}=3^{\frac{2}{x}-\frac{4}{y}}$

$\therefore \frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-1$

006 정답 (1) **4** (2) $\mathbf{\frac{11}{2}}$

(1) (좌변)$=\sqrt[7]{\left(\sqrt{a}\times\frac{a}{\sqrt[3]{a}}\right)^k}=(a^{\frac{1}{2}}\times a\times a^{-\frac{1}{3}})^{\frac{k}{7}}$

$=(a^{\frac{7}{6}})^{\frac{k}{7}}=a^{\frac{k}{6}}$,

(우변)$=\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$

이므로 주어진 등식은 $a^{\frac{k}{6}}=a^{\frac{2}{3}}$

따라서 $\frac{k}{6}=\frac{2}{3}$이므로 $k=4$

(2) (좌변)$=\sqrt{a\times\sqrt[3]{a\times\sqrt[4]{a}}}=\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt[3]{a}}\times\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}$

$=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[24]{a}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{24}}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}}=a^{\frac{17}{24}}$,

(우변)$=\sqrt[4]{a\times\sqrt[3]{a^k}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^k}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[12]{a^k}$

$=a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{k}{12}}=a^{\frac{1}{4}+\frac{k}{12}}=a^{\frac{3+k}{12}}$

이므로 $a^{\frac{17}{24}}=a^{\frac{3+k}{12}}$ $\quad\therefore k=\frac{11}{2}$

개념 보충

거듭제곱근의 성질의 증명

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상인 정수일 때

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(5) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

[증명] (2) $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$

이때, $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$에서 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}>0$이므로 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$는 양수 $\frac{a}{b}$의 양의 n제곱근이다.

$\therefore \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(5) $(\sqrt[n]{a^m})^{np}=\{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^p=(a^m)^p=a^{mp}$

이때, $\sqrt[n]{a}>0$에서 $\sqrt[n]{a^m}>0$이므로 $\sqrt[n]{a^m}$은 양수 a^{mp}의 양의 np제곱근이다.

$\therefore \sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$

확인문제 pp.13~21

001 정답 **5**

16의 네제곱근은 네제곱하여 16이 되는 수이므로 방정식 $x^4=16$의 네 근이다.

따라서 16의 네제곱근은 4개이므로 $a=4$

-3의 세제곱근은 세제곱하여 -3이 되는 수이므로 방정식 $x^3=-3$의 세 근이다.

$x^3=-3$의 세 근 중 실수인 것은 1개이므로 $b=1$

$\therefore a+b=4+1=5$

002 정답 ㄷ

ㄱ. $\sqrt[3]{-64}$는 -64의 세제곱근 중 실수인 것을 나타낸다. (거짓)

ㄴ. 10개의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{10}$의 한 개뿐이다. (거짓)

ㄷ. 36의 네제곱근은 $\pm\sqrt{6}$, $\pm\sqrt{6}i$의 4개이고, 이 중 실수인 것은 $\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

003 정답 (1) **0** (2) **0** (3) $\mathbf{-2}$ (4) **0.1**

(1) $\sqrt[4]{(-5)^4}+\sqrt[3]{(-5)^3}=\sqrt[4]{5^4}+\sqrt[3]{(-5)^3}$

$=5+(-5)=0$

(2) $(\sqrt[4]{5})^4+(\sqrt[3]{-5})^3=5+(-5)=0$

(3) $\sqrt[5]{8}\times\sqrt[5]{-4}=\sqrt[5]{8\times(-4)}$

$=\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$

(4) $\sqrt[3]{0.01}\times\sqrt[3]{0.1}=\sqrt[3]{0.01\times0.1}=\sqrt[3]{0.001}$

$=\sqrt[3]{(0.1)^3}=0.1$

004 정답 (1) $\mathbf{-3}$ (2) $\mathbf{\frac{41}{4}}$ (3) **3** (4) **2**

(1) $\frac{\sqrt[3]{-81}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{-\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=-\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$

$=-\sqrt[3]{27}=-\sqrt[3]{3^3}=-3$

(2) $\sqrt[8]{16^6}+\sqrt[6]{\left(\frac{27}{8}\right)^4}=\sqrt[8]{2^{24}}+\sqrt[6]{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}=2^3+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$=8+\frac{9}{4}=\frac{41}{4}$

(3) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{81}}\times\sqrt{\sqrt[3]{81}}=\sqrt[12]{3^4}\times\sqrt[6]{3^4}$

$=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3^2}$

$=\sqrt[3]{3^3}=3$

(4) $\sqrt[6]{16}\times\sqrt[9]{8}=\sqrt[6]{2^4}\times\sqrt[9]{2^3}=\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{2}$

$=\sqrt[3]{2^3}=2$

005 정답 (1) $\sqrt[24]{a}$ (2) 1

(1) (주어진 식)$=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}\times\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}}}=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}}\times\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}$

$=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}}=\dfrac{\sqrt[24]{a^4}}{\sqrt[24]{a^3}}=\sqrt[24]{\dfrac{a^4}{a^3}}=\sqrt[24]{a}$

(2) (주어진 식)$=\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt{\sqrt[4]{a}}}\times\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt{\sqrt{a}}}\times\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}$

$=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}}\times\dfrac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[4]{a}}\times\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}$

$=1$

006 정답 1

(주어진 식)$=\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[5]{\sqrt{x}}}\times\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}}}\times\dfrac{\sqrt{\sqrt[5]{x}}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}$

$=\dfrac{\sqrt[15]{x}}{\sqrt[10]{x}}\times\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[15]{x}}\times\dfrac{\sqrt[10]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

$=1$

개념 보충

지수법칙 $\boxed{2}$의 증명

$a\neq0$, $b\neq0$이고 m, n이 음의 정수일 때,

(1) $a^ma^n=a^{m+n}$　　(2) $a^m\div a^n=a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n=a^{mn}$　　(4) $(ab)^n=a^nb^n$

[증명] $m=-p$, $n=-q$ (p, q는 양의 정수)로 놓으면

(1) $a^ma^n=a^{-p}a^{-q}=\dfrac{1}{a^p}\times\dfrac{1}{a^q}=\dfrac{1}{a^{p+q}}$

$=a^{-(p+q)}=a^{(-p)+(-q)}=a^{m+n}$

$\therefore a^ma^n=a^{m+n}$

(2) $a^m\div a^n=a^{-p}\div a^{-q}=\dfrac{1}{a^p}\div\dfrac{1}{a^q}=\dfrac{1}{a^p}\times a^q$

$=\dfrac{a^q}{a^p}=a^{q-p}=a^{(-p)-(-q)}=a^{m-n}$

$\therefore a^m\div a^n=a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n=(a^{-p})^{-q}=\left(\dfrac{1}{a^p}\right)^{-q}$

$=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a^p}\right)^q}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a^{pq}}}=a^{pq}$

$=a^{(-p)\times(-q)}=a^{mn}$

$\therefore (a^m)^n=a^{mn}$

(4) $n=-p$ (p는 양의 정수)로 놓으면

$(ab)^n=(ab)^{-p}=\dfrac{1}{(ab)^p}=\dfrac{1}{a^pb^p}=\dfrac{1}{a^p}\times\dfrac{1}{b^p}$

$=a^{-p}b^{-p}=a^nb^n$

$\therefore (ab)^n=a^nb^n$

개념 보충

지수법칙 $\boxed{3}$의 증명

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때,

(1) $a^ra^s=a^{r+s}$　　(2) $(ab)^r=a^rb^r$

(3) $a^r\div a^s=a^{r-s}$　　(4) $(a^r)^s=a^{rs}$

[증명] 정수 m, n, p, q ($n\geq2$, $q\geq2$)에 대하여

$r=\dfrac{m}{n}$, $s=\dfrac{p}{q}$로 놓으면

(1) $a^ra^s=a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq}{nq}}a^{\frac{np}{nq}}$

$=\sqrt[nq]{a^{mq}}\times\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}$

$=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{r+s}$

$\therefore a^ra^s=a^{r+s}$

(2) $(ab)^r=(ab)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(ab)^m}=\sqrt[n]{a^mb^m}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m}$

$=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}=a^rb^r$

$\therefore (ab)^r=a^rb^r$

(3) $a^r\div a^s=a^{\frac{m}{n}}\div a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq}{nq}}\div a^{\frac{np}{nq}}$

$=\sqrt[nq]{a^{mq}}\div\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq-np}}=a^{\frac{mq-np}{nq}}$

$=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}=a^{r-s}$

$\therefore a^r\div a^s=a^{r-s}$

(4) $(a^r)^s=(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}=\sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}}=\sqrt[nq]{a^{mp}}$

$=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}=a^{rs}$

$\therefore (a^r)^s=a^{rs}$

007 정답 (1) $\sqrt[3]{4}$ (2) $81\sqrt{3}$ (3) 24 (4) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

(1) $\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{7}}\right\}^{-\frac{14}{15}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{7}\times\left(-\frac{14}{15}\right)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$

(2) $(3^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\times3^{\frac{2}{\sqrt{5}}})^{\sqrt{5}}=(3^{\frac{\sqrt{5}}{2}})^{\sqrt{5}}\times(3^{\frac{2}{\sqrt{5}}})^{\sqrt{5}}=3^{\frac{5}{2}}\times3^2$

$=3^{\frac{5}{2}+2}=3^{\frac{9}{2}}$

$=81\sqrt{3}$

(3) $4^{-\frac{3}{2}}\times27^{\frac{1}{3}}\div\sqrt{16^{-3}}=(2^2)^{-\frac{3}{2}}\times(3^3)^{\frac{1}{3}}\div(2^{-12})^{\frac{1}{2}}$

$=2^{-3}\times3\div2^{-6}$

$=2^{(-3)-(-6)}\times3$

$=2^3\times3=24$

(4) $\dfrac{\sqrt[6]{8}\times\sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}}=\dfrac{(2^3)^{\frac{1}{6}}\times(3^2)^{\frac{1}{12}}}{(3^4)^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{6}}}{3^{\frac{2}{3}}}$

$=2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

008 정답 (1) 2 (2) $\frac{1}{\sqrt{b}}$

(1) $\sqrt[4]{16a\times\sqrt{a}}\div\sqrt[8]{a^3}=(16a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}\div(a^3)^{\frac{1}{8}}$

$=(2^4)^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{4}}\times(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}\div(a^3)^{\frac{1}{8}}$

$=2^1\times a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}\div a^{\frac{3}{8}}$

$=2\times a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{3}{8}}$

$=2a^0=2$

(2) $(a^{-6}b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\div\sqrt[3]{a^{-5}b^2}\times(a^{\sqrt{3}})^{\frac{1}{\sqrt{27}}}$

$=(a^{-6}b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\div(a^{-5}b^2)^{\frac{1}{3}}\times(a^{\sqrt{3}})^{\frac{1}{\sqrt{27}}}$

$=(a^{-6})^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\div\{(a^{-5})^{\frac{1}{3}}(b^2)^{\frac{1}{3}}\}\times a^{\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{27}}}$

$=a^{-2}b^{\frac{1}{6}}\div a^{-\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}$

$=a^{-2-\left(-\frac{5}{3}\right)+\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}$

$=a^0b^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}$

009 정답 (1) 23 (2) 110

(1) $x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}=(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^2-2x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}$

$=5^2-2=23$

(2) $x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3-3x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})$

$=5^3-3\times1\times5$

$=110$

010 정답 1

$45^x=3^3$에서 $(45^x)^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}$, 즉 $45=3^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$15^y=3^2$에서 $(15^y)^{\frac{1}{y}}=(3^2)^{\frac{1}{y}}$, 즉 $15=3^{\frac{2}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{45}{15}=\frac{3^{\frac{3}{x}}}{3^{\frac{2}{y}}}$, $3=3^{\frac{3}{x}-\frac{2}{y}}$

$\therefore\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=1$

011 정답 $\frac{7}{8}$

$\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}\times\sqrt{\sqrt[4]{a}}=\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt[3]{a}}\times\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\sqrt[4]{a}}$

$=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[12]{a}\times\sqrt[8]{a}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{12}}\times a^{\frac{1}{8}}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}}$

$=a^{\frac{21}{24}}$

$=a^{\frac{7}{8}}=a^k$

$\therefore\ k=\frac{7}{8}$

012 정답 9

(좌변) $=\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}}\times\frac{\sqrt{\sqrt[k]{a}}}{\sqrt{\sqrt[6]{a}}}=\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[9]{a}}\times\frac{\sqrt[2k]{a}}{\sqrt[12]{a}}$

$=\frac{\sqrt[2k]{a}}{\sqrt[9]{a}}=a^{\frac{1}{2k}-\frac{1}{9}}$

(우변) $=\sqrt[18]{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt[18]{a}}=a^{-\frac{1}{18}}$

따라서 $a^{\frac{1}{2k}-\frac{1}{9}}=a^{-\frac{1}{18}}$에서 $\frac{1}{2k}-\frac{1}{9}=-\frac{1}{18}$

$\therefore\ k=9$

연습문제 I pp.22~24

013 정답 (1) -3, $\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$ (2) ±10, $\pm10i$

(1) -27의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=-27$에서

$x^3+27=0$이므로

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -27의 세제곱근은 -3, $\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$이다.

(2) 10000의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=10^4$에서

$x^4-10^4=0$이므로

$(x-10)(x+10)(x^2+100)=0$

$\therefore\ x=\pm10$ 또는 $x=\pm10i$

따라서 10000의 네제곱근은 ±10, $\pm10i$이다.

014 정답 5

$\sqrt{729}=\sqrt{3^6}=27$이고, 27의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{27}$ 하나뿐이므로

$a=\sqrt[3]{27}=3$

16의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm2$이고, 양수인 것은 2이므로

$b=2$

$\therefore\ a+b=3+2=5$

015 정답 0

n이 짝수일 때, $\sqrt[n]{(-2)^n}=\sqrt[n]{2^n}=2$,

n이 홀수일 때, $\sqrt[n]{(-2)^n}=-2$

$\therefore\ \sqrt{(-2)^2}+\sqrt[3]{(-2)^3}+\sqrt[4]{(-2)^4}+\sqrt[5]{(-2)^5}$

$=2-2+2-2=0$

016 정답 0

$\sqrt[3]{(a-1)^3}+\sqrt[4]{(a-1)^4}=(a-1)+|a-1|$

이때, $a<1$에서 $a-1<0$이므로 $|a-1|=-(a-1)$

$\therefore$ (주어진 식) $=(a-1)+|a-1|=0$

017 정답 ㄱ, ㄷ

a의 n제곱근 중 실수인 수는

(i) n이 홀수일 때

실수 a의 값에 관계없이 $\sqrt[n]{a}$ 하나뿐이다.

(ii) n이 짝수일 때

① $a>0$이면, $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$의 2개 존재한다.

② $a=0$이면, 0 하나뿐이다.

③ $a<0$이면, 실수인 수는 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

018 정답 (1) $4\sqrt[3]{2}$ (2) 2 (3) 2 (4) $-\frac{3}{4}$ (5) 7^5 (6) 27

(1) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2\times3^3}+\sqrt[3]{2\times2^3}-\sqrt[3]{2}$

$=3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}$

(2) $\sqrt[6]{2}\times\sqrt{8}\div\sqrt[3]{4}=2^{\frac{1}{6}+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}=2^1=2$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=(2^6)^{\frac{1}{6}}=2$

(4) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{4}\right)^3}=-\frac{3}{4}$

(5) $(7^{\frac{8}{9}})^6\div7^{\frac{1}{3}}=7^{\frac{8}{9}\times6-\frac{1}{3}}=7^5$

(6) $\{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=27$

019 정답 (1) $a^{\frac{11}{12}}$ (2) a (3) a^{-9} (4) b (5) $a^{\frac{13}{30}}b^{\frac{2}{5}}$

(1) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}=\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt{a}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}}$

$=\sqrt{a}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[12]{a^2}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{2}{12}}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{12}}=a^{\frac{11}{12}}$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}\times\sqrt{\sqrt[3]{a^5}}}{\sqrt[3]{a}}=\dfrac{a^{\frac{3}{6}}\times a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{3}{6}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=a^1=a$

(3) $(\sqrt{a}\times a^3\div\sqrt[4]{a^2})^{-3}=(a^{\frac{1}{2}}\times a^3\div a^{\frac{1}{2}})^{-3}$

$=(a^{\frac{1}{2}+3-\frac{1}{2}})^{-3}=a^{-9}$

(4) $\sqrt[6]{ab^4}\div\sqrt[3]{a^2b^5}\times\sqrt{ab^4}=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{3}}\times a^{\frac{1}{2}}b^2$

$=a^{\frac{1}{6}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\times b^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}+2}=b$

(5) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^5b^3}}\times\sqrt{ab^2}}{\sqrt[5]{a^2b^4}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^5}}\times\sqrt[3]{\sqrt[5]{b^3}}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b^2}}{\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[5]{b^4}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[5]{b}\times\sqrt{a}\times b}{\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[5]{b^4}}$

$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}}\times b^{\frac{1}{5}+1-\frac{4}{5}}=a^{\frac{13}{30}}b^{\frac{2}{5}}$

020 정답 ③

$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x}{3}}=(2^{-3})^{\frac{x}{3}}=2^{-x}=\frac{1}{2^x}=\frac{1}{3}$

021 정답 (1) 14 (2) 52

(1) $x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-2=4^2-2=14$

(2) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=4^3-3\times4=52$

022 정답 (1) $a-b$ (2) $a-b^{-1}$ (3) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$

(1) $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$이므로

$(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{\frac{1}{3}})^3$

$=a-b$

(2) $(a^{\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})$

$=\{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{-\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})$

$=(a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})$

$=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{-\frac{1}{2}})^2$

$=a-b^{-1}$

(3) $(a-b)\div(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=\{(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2\}\div(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})$

$=(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})\div(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})$

$=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$

023 정답 a^{12}

주어진 식의 분모와 분자에 각각 a^{12}을 곱하면

(주어진 식)$=\dfrac{a^{12}(a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10})}{a^{10}+a^8+a^6+a^4+a^2}=a^{12}$

024 정답 3

$248^x=32$에서 $248^x=2^5$이므로

$248=2^{\frac{5}{x}}$ …… ㉠

$31^y=4$에서 $31^y=2^2$이므로

$31=2^{\frac{2}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $2^{\frac{5}{x}}\div2^{\frac{2}{y}}=8$

$2^{\frac{5}{x}-\frac{2}{y}}=2^3$이므로 $\frac{5}{x}-\frac{2}{y}=3$

025 정답 ③

$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 분자, 분모에 각각 a^x을 곱하면

$\dfrac{a^x(a^{3x}-a^{-3x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\dfrac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\dfrac{(a^{2x})^2-\frac{1}{a^{2x}}}{a^{2x}+1}$

$=\dfrac{3^2-\frac{1}{3}}{3+1}=\dfrac{\frac{26}{3}}{4}=\dfrac{13}{6}$

026 정답 $\frac{7}{8}$

$$\frac{\sqrt{2^3\times\sqrt[4]{2^3}}}{2}=\frac{\sqrt{2^3\times 2^{\frac{3}{4}}}}{2}=\frac{\sqrt{2^{\frac{15}{4}}}}{2}$$
$$=\frac{2^{\frac{15}{8}}}{2}=2^{\frac{15}{8}-1}=2^{\frac{7}{8}}$$

이므로 $k=\frac{7}{8}$

027 정답 ③

세 수 A, B, C를 각각 6제곱하면

$$A^6=(\sqrt[3]{2\sqrt{6}})^6=\{(\sqrt[3]{2\sqrt{6}})^3\}^2=(2\sqrt{6})^2=24,$$
$$B^6=(\sqrt[3]{\sqrt{10}})^6=\{(\sqrt[3]{\sqrt{10}})^3\}^2=(\sqrt{10})^2=10,$$
$$C^6=(\sqrt{2\sqrt[3]{6}})^6=\{(\sqrt{2\sqrt[3]{6}})^2\}^3=(2\sqrt[3]{6})^3=48$$

이므로 $B^6<A^6<C^6$

$\therefore B<A<C$

연습문제 II

p.25

028 정답 $a^{-4}b^{\frac{5}{4}}$

$2^5=a$에서 $2=a^{\frac{1}{5}}$, 즉 $4=a^{\frac{2}{5}}$ ...... ㉠

$12^8=b$에서 $12=b^{\frac{1}{8}}$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $3=b^{\frac{1}{8}}\div a^{\frac{2}{5}}=a^{-\frac{2}{5}}b^{\frac{1}{8}}$

$\therefore 3^{10}=(a^{-\frac{2}{5}}b^{\frac{1}{8}})^{10}=a^{-4}b^{\frac{5}{4}}$

029 정답 ③

직육면체의 가로, 세로 높이를 각각 x, y, z라고 하면 직육면체의 여섯 개의 면의 넓이는 xy, yz, zx가 각각 두 개씩 있으므로 여섯 개의 면의 넓이의 곱은

$$(xy)^2\times(yz)^2\times(zx)^2=a$$

즉, $(xyz)^4=a$이므로 직육면체의 부피는

$$xyz=\sqrt[4]{a}$$

030 정답 900

$2^x=3^y=5^z=k$에서

$$k^{\frac{1}{x}}=2,\ k^{\frac{1}{y}}=3,\ k^{\frac{1}{z}}=5$$

이므로 변끼리 곱하면

$$k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\times k^{\frac{1}{z}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=30$$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$이므로 $k^{\frac{1}{2}}=30$

양변을 제곱하면 $k=900$

031 정답 8

$x=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$$x^3=(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}})^3$$
$$=(3^{\frac{1}{3}})^3-3\cdot(3^{\frac{1}{3}})^2\cdot 3^{-\frac{1}{3}}+3\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot(3^{-\frac{1}{3}})^2-(3^{-\frac{1}{3}})^3$$
$$=3-3\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}})-3^{-1}$$
$$=3-3x-\frac{1}{3}$$

이므로 $x^3+3x=\frac{8}{3}$

$\therefore 3x^3+9x=8$

032 정답 648

$\sqrt{\frac{n}{2}}$이 자연수이려면 $\frac{n}{2}$이 어떤 자연수의 제곱이어야 하므로

$n=2\times p^2$ (p는 자연수) ...... ㉠

$\sqrt[3]{\frac{n}{3}}$이 자연수이려면 $\frac{n}{3}$이 어떤 자연수의 세제곱이어야 하므로

$n=3\times q^3$ (q는 자연수) ...... ㉡

의 꼴이어야 한다.

㉠=㉡에서 $2\times p^2=3\times q^3$ 즉, $\frac{2}{3}\times p^2=q^3$

이때, 좌변 $\frac{2}{3}\times p^2$이 자연수 q의 세제곱이 되려면

$p=2\times 3^2\times r^3$ (r은 자연수)

의 꼴이어야 하므로 구하는 n의 최솟값은 $r=1$일 때

$n=2\times(2\times 3^2)^2=2^3\times 3^4=8\times 81=648$

033 정답 2^{32} 서술형

$x=\left(\frac{1}{128}\right)^{\frac{3}{n}}=(2^{-7})^{\frac{3}{n}}=2^{-\frac{21}{n}}$이므로 … ①

x가 자연수이면 $-\frac{21}{n}$은 음이 아닌 정수이어야 한다. … ②

이때, 정수 n이 될 수 있는 수는 -1, -3, -7, -21이므로

$n=-1$일 때 $x=2^{21}$, $n=-3$일 때 $x=2^7$,

$n=-7$일 때 $x=2^3$, $n=-21$일 때 $x=2$ … ③

따라서 주어진 집합은 $\{2,\ 2^3,\ 2^7,\ 2^{21}\}$이므로 모든 원소의 곱은

$2^{1+3+7+21}=2^{32}$ … ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$x=2^k$ 꼴로 나타내기	20 %
②	x가 자연수가 될 조건을 구하기	30 %
③	주어진 집합의 원소 구하기	30 %
④	주어진 집합의 모든 원소의 곱 구하기	20 %

2. 로그

유형 .... pp.29~38

001 정답 (1) **$x\neq3$인 모든 실수**

(2) **$-2<x<-1$ 또는 $x>-1$**

(3) **$1<x<2$ 또는 $2<x<3$**

(1) 진수의 조건에서 $(x-3)^2>0$이므로

$x\neq3$인 모든 실수

(2) 밑의 조건에서 $x+2\neq1$, $x+2>0$이므로

$-2<x<-1$ 또는 $x>-1$

(3) 밑의 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq1$

$\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ …… ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+4x-3>0$

$x^2-4x+3<0$, $(x-1)(x-3)<0$

$\therefore 1<x<3$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$1<x<2$ 또는 $2<x<3$

002 정답 (1) $-\frac{2}{3}$ (2) **4** (3) **9** (4) **27** (5) **125** (6) **2**

(1) $\log_8 \frac{1}{4}=x$에서 $8^x=\frac{1}{4}$

$(2^3)^x=\frac{1}{4}$, $2^{3x}=2^{-2}$

$3x=-2 \qquad \therefore x=-\frac{2}{3}$

(2) $\log_{2\sqrt{2}} 64=x$에서 $(2\sqrt{2})^x=64$

즉, $(\sqrt{8})^x=64$에서 $(8^{\frac{1}{2}})^x=8^2$이므로 $8^{\frac{1}{2}x}=8^2$

$\frac{1}{2}x=2 \qquad \therefore x=4$

(3) $\log_x 81=2$에서 $x^2=81$

그런데 $x\neq1$, $x>0$이어야 하므로

$x=9$

(4) $\log_x 9=\frac{2}{3}$에서 $x^{\frac{2}{3}}=9$

양변을 $\frac{3}{2}$제곱하면

$(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}=9^{\frac{3}{2}}$

$\therefore x=(3^2)^{\frac{3}{2}}=27$

(5) $\log_{25} x=1.5$에서 $25^{1.5}=x$

$(5^2)^{\frac{3}{2}}=x$, $5^3=x \qquad \therefore x=125$

(6) $\log_6(\log_{64} x)=-1$에서 $6^{-1}=\log_{64} x$

즉, $\log_{64} x=\frac{1}{6}$에서 $64^{\frac{1}{6}}=x$이므로 $(2^6)^{\frac{1}{6}}=x$

$\therefore x=2$

003 정답 (1) **2** (2) **3** (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{2}$ (5) **12** (6) **0**

(1) $2\log_{10} 2+\log_{10} 25=\log_{10} 2^2+\log_{10} 5^2$

$=\log_{10}(2^2\times5^2)$

$=\log_{10} 10^2=2$

(2) $\log_3 \frac{9}{5}+2\log_3\sqrt{15}=\log_3\frac{9}{5}+\log_3(\sqrt{15})^2$

$=\log_3\left(\frac{9}{5}\times15\right)=\log_3 27$

$=\log_3 3^3=3$

(3) $\log_2 3+\log_2\sqrt{2}-2\log_2\sqrt{6}=\log_2 3+\log_2\sqrt{2}-\log_2(\sqrt{6})^2$

$=\log_2\frac{3\times\sqrt{2}}{6}=\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\log_2 2^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$

(4) $\log_5 10-\log_5\frac{2}{\sqrt{5}}=\log_5 10-(\log_5 2-\log_5\sqrt{5})$

$=\log_5 10-\log_5 2+\log_5\sqrt{5}$

$=\log_5\frac{10\times\sqrt{5}}{2}=\log_5 5\sqrt{5}$

$=\log_5 5^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

(5) $4\log_3 54-3\log_3\sqrt[3]{16}=\log_3 54^4-\log_3(\sqrt[3]{16})^3$

$=\log_3 54^4-\log_3 2^4$

$=\log_3\frac{54^4}{2^4}=\log_3 27^4$

$=\log_3 3^{12}=12$

(6) $6\log_2\sqrt{3}+\frac{1}{3}\log_2 125-\log_2 135$

$=\log_2(\sqrt{3})^6+\log_2 125^{\frac{1}{3}}-\log_2 135$

$=\log_2 3^3+\log_2 5-\log_2 135$

$=\log_2\frac{3^3\times5}{135}=\log_2 1=0$

004 정답 (1) **4** (2) **3** (3) **1**

(1) 밑을 10으로 하는 로그로 변환하면

$(\text{주어진 식})=\frac{\log_{10} 9}{\log_{10}\sqrt{5}}\times\frac{\log_{10} 25}{\log_{10}\sqrt{3}}\times\frac{\log_{10}\sqrt{5}}{\log_{10} 25}$

$=\frac{2\log_{10} 3}{\frac{1}{2}\log_{10} 5}\times\frac{2\log_{10} 5}{\frac{1}{2}\log_{10} 3}\times\frac{\frac{1}{2}\log_{10} 5}{2\log_{10} 5}$

$=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

(2) $(\text{주어진 식})=\log_2\left(\log_2 32+\log_{2^{-1}}\frac{3}{4}+\log_{2^2} 6^2\right)$

$=\log_2\left(\log_2 32-\log_2\frac{3}{4}+\log_2 6\right)$

$=\log_2\left\{\log_2\left(32\times\frac{4}{3}\times6\right)\right\}$

$=\log_2(\log_2 2^8)=\log_2 8=3$

(3) $\log_{10} 2=a$, $\log_{10} 5=b$로 놓으면

$$a+b=\log_{10} 2+\log_{10} 5=\log_{10} 10=1$$

이때, $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(\log_{10} 2)^3+(\log_{10} 5)^3+3\log_{10} 2\log_{10} 5\\&=a^3+b^3+3ab\\&=a^3+b^3+3ab(a+b)\ (\because a+b=1)\\&=(a+b)^3=1^3=1\end{aligned}$$

다른 풀이

(1) $\log_{\sqrt{5}} 9\cdot\log_{\sqrt{3}} 25\cdot\log_{25}\sqrt{5}$

$=\log_{\sqrt{3}} 9\cdot\log_{25} 25\cdot\log_{\sqrt{5}}\sqrt{5}$

$=\log_{\sqrt{3}} 9=\log_3 9^2$

$=\log_3 3^4=4\log_3 3=4$

005 정답 (1) $\dfrac{3a+2b+1}{2a+b}$ (2) $\dfrac{ab+3}{ab+a+1}$

(1) $\log_{12} 720$을 10을 밑으로 하는 로그로 변환하자.

$$\begin{aligned}\therefore \log_{12} 720&=\frac{\log_{10} 720}{\log_{10} 12}=\frac{\log_{10}(2^3\times3^2\times10)}{\log_{10}(2^2\times3)}\\&=\frac{3\log_{10} 2+2\log_{10} 3+\log_{10} 10}{2\log_{10} 2+\log_{10} 3}\\&=\frac{3a+2b+1}{2a+b}\end{aligned}$$

(2) 주어진 조건 $\log_2 3=a$, $\log_3 7=b$에 공통으로 포함된 수가 3이므로 $\log_2 3=a$를 3을 밑으로 하는 로그로 변환하면

$\log_2 3=\dfrac{1}{\log_3 2}=a$에서 $\log_3 2=\dfrac{1}{a}$

$$\begin{aligned}\therefore \log_{42} 56&=\frac{\log_3 56}{\log_3 42}=\frac{\log_3(7\times2^3)}{\log_3(7\times2\times3)}\\&=\frac{\log_3 7+3\log_3 2}{\log_3 7+\log_3 2+\log_3 3}\\&=\frac{b+\frac{3}{a}}{b+\frac{1}{a}+1}=\frac{ab+3}{ab+a+1}\end{aligned}$$

006 정답 (1) 40.9 (2) 1.6532

(1) $x=\sqrt[3]{68400}=68400^{\frac{1}{3}}$으로 놓고 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log x&=\frac{1}{3}\log 68400=\frac{1}{3}\log(10^4\times6.84)\\&=\frac{1}{3}(\log 10^4+\log 6.84)\end{aligned}$$

상용로그표에서 $\log 6.84=0.8351$이므로

$$\log x=\frac{1}{3}(4+0.8351)=1.6117$$

상용로그표에서 0.6117에 가장 가까운 값을 찾으면

$$\log 4.09=0.6117$$

로그의 성질을 이용하면

$$\begin{aligned}\log x&=1.6117=1+0.6117=\log 10+\log 4.09\\&=\log(10\times4.09)=\log 40.9\end{aligned}$$

따라서 x는 약 40.9이다.

(2) $45=3^2\times5$이므로 $\log 45=\log 3^2\times5=2\log 3+\log 5$

이때 $\log 5=\log\dfrac{10}{2}=1-\log 2=1-0.3010=0.6990$이므로

$$\begin{aligned}\log 45&=2\log 3+\log 5=2\times0.4771+0.6990\\&=1.6532\end{aligned}$$

확인문제 pp.29~38

034 정답 (1) $x\neq2$인 모든 실수

(2) $1<x<2$ 또는 $x>2$

(3) $-2<x<-1$ 또는 $-1<x<1$

로그의 진수는 양수이고, 밑은 1이 아닌 양수이어야 한다.

(1) 진수의 조건 : $(x-2)^2>0$에서 $x\neq2$인 모든 실수

(2) 밑의 조건 : $x-1\neq1$, $x-1>0$에서

$1<x<2$ 또는 $x>2$

(3) 밑의 조건 : $x+2\neq1$, $x+2>0$에서

$-2<x<-1$ 또는 $x>-1$

진수의 조건 : $-x^2-2x+3>0$에서 $x^2+2x-3<0$

$(x-1)(x+3)<0$이므로 $-3<x<1$

밑과 진수의 조건을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$-2<x<-1$ 또는 $-1<x<1$

035 정답 3

$x-1\neq1$, $x-1>0$이고 $4-x>0$이어야 한다.

$\therefore 1<x<4$, $x\neq2$

이때, x는 정수이므로 $x=3$

036 정답 (1) 5 (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) 4

(1) $\log_2 32=x$에서 $2^x=32$, $2^x=2^5$

$\therefore x=5$

(2) $\log_{27} 3=x$에서 $27^x=3$, $3^{3x}=3$

$3x=1 \qquad \therefore x=\dfrac{1}{3}$

(3) $\log_{2\sqrt{3}} 144=x$에서 $(2\sqrt{3})^x=144$, $(\sqrt{12})^x=144$

$12^{\frac{x}{2}}=12^2$, $\dfrac{x}{2}=2$

$\therefore x=4$

037 정답 (1) -1 (2) $\dfrac{10}{3}$ (3) 4 (4) 8 (5) 8

(1) $\log_4 0.25=\log_4\dfrac{1}{4}=\log_4 4^{-1}=x$

$4^x=4^{-1} \qquad \therefore x=-1$

(2) $\log_{2\sqrt{2}} 32 = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^5 = x$

$2^{\frac{3}{2}x} = 2^5$, $\frac{3}{2}x = 5$ $\quad \therefore x = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

(3) $\log_x 16 = \log_x 2^4 = 2$

$x^2 = 2^4 \quad \therefore x = 2^2 = 4$

(4) $\log_x 4 = \log_x 2^2 = \frac{2}{3}$

$x^{\frac{2}{3}} = 2^2$

양변에 $\frac{3}{2}$제곱을 하면

$\therefore x = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

(5) $\log_4 x = 1.5 = \frac{3}{2}$

$\therefore x = 4^{\frac{3}{2}} = 8$

038 정답 (1) **1** (2) **2** (3) **1** (4) **3**

(1) $\log_3 6 + \log_3 \frac{1}{2} = \log_3 \left(6 \times \frac{1}{2}\right)$

$= \log_3 3 = 1$

(2) $\log_3 45 - \log_3 5 = \log_3 \frac{45}{5} = \log_3 9$

$= \log_3 3^2 = 2$

(3) $2\log_5 \sqrt{15} - \log_5 3 = \log_5 (\sqrt{15})^2 - \log_5 3$

$= \log_5 \frac{15}{3} = \log_5 5 = 1$

(4) $\log_2 12 + \log_2 6 - 2\log_2 3 = \log_2 12 + \log_2 6 - \log_2 3^2$

$= \log_2 \frac{12 \times 6}{9} = \log_2 8$

$= \log_2 2^3 = 3$

039 정답 (1) **1** (2) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (3) **2** (4) $\mathbf{-\frac{1}{2}}$

(1) $\log_5 10 + \log_5 \frac{1}{2} = \log_5 \left(10 \times \frac{1}{2}\right)$

$= \log_5 5 = 1$

(2) $\log_2 3\sqrt{2} - \log_2 3 = \log_2 \frac{3\sqrt{2}}{3} = \log_2 \sqrt{2}$

$= \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(3) $2\log_2 \sqrt{3} - \log_2 6 + 6\log_2 \sqrt{2}$

$= \log_2 (\sqrt{3})^2 - \log_2 6 + \log_2 (\sqrt{2})^6$

$= \log_2 \frac{3 \times 8}{6} = \log_2 4 = 2$

(4) $\log_5 3 - \log_5 3\sqrt{15} + \log_5 \sqrt{3} = \log_5 \frac{3 \times \sqrt{3}}{3\sqrt{15}}$

$= \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$

$= \log_5 5^{-\frac{1}{2}}$

$= -\frac{1}{2}$

040 정답 (1) **1** (2) **4**

(1) $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 (2 \times 3)$

$= \log_6 6 = 1$

(2) 밑을 10으로 하는 로그로 변환하면

$(\text{주어진 식}) = \left(\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3} + \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 9}\right) \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

$= \left(\frac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 3} + \frac{2\log_{10} 2}{2\log_{10} 3}\right) \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

$= \frac{3\log_{10} 2 + \log_{10} 2}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

$= 4$

다른 풀이

(2) $(\text{주어진 식}) = \log_3 8 \cdot \log_2 3 + \log_9 4 \cdot \log_2 3$

$= \log_3 3 \cdot \log_2 8 + \log_9 3 \cdot \log_2 4$

$= 1 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$

041 정답 (1) $\mathbf{\frac{1}{9}}$ (2) **4** (3) **121** (4) **120**

(1) $\log_8 \sqrt[3]{2} = \log_{2^3} \sqrt[3]{2} = \log_{2^3} 2^{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9}$

(2) $\log_2 3 \times \log_3 129 \times \log_{129} 16$

$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 129}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 129}$

$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 129}{\log_{10} 3} \times \frac{4\log_{10} 2}{\log_{10} 129}$

$= 4$

(3) $9^{\log_3 11} = 11^{\log_3 9} = 11^{2\log_3 3} = 11^2 = 121$

(4) 2의 지수를 x라고 하면

$x = \log_2 (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) = \log_2 120$

$\therefore 2^x = 2^{\log_2 120} = 120^{\log_2 2} = 120^1 = 120$

042 정답 (1) $\mathbf{2a}$ (2) $\mathbf{a+1}$ (3) $\mathbf{2a+b}$ (4) $\mathbf{\frac{1}{2}(b+1)}$

(1) $\log_5 4 = \log_5 2^2 = 2\log_5 2 = 2a$

(2) $\log_5 10 = \log_5 (2 \times 5) = \log_5 2 + \log_5 5 = a + 1$

(3) $\log_5 12 = \log_5 (2^2 \times 3) = 2\log_5 2 + \log_5 3 = 2a + b$

(4) $\log_5 \sqrt{15} = \log_5 (3 \times 5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\log_5 3 + \log_5 5)$

$= \frac{1}{2}(b+1)$

043 정답 (1) $\mathbf{\frac{1}{ab}}$ (2) $\mathbf{\frac{3}{2}ab}$

(1) $\log_2 3 = \frac{\log_7 3}{\log_7 2} = \frac{1}{\log_7 2} \times \frac{1}{\log_3 7} = \frac{1}{ab}$

(2) $\log_3 \sqrt{8} = \log_3 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_3 2 = \frac{3}{2} \times \frac{\log_7 2}{\log_7 3}$

$= \frac{3}{2} \times \log_7 2 \times \log_3 7 = \frac{3}{2}ab$

044 정답 (1) **1.4969** (2) **2670** (3) **0.416**

(1) 상용로그표에서 $\log 3.14=0.4969$이므로

$$\log 31.4=\log(10\times3.14)$$
$$=\log 10+\log 3.14$$
$$=1+0.4969=1.4969$$
$$\therefore x=1.4969$$

(2) 상용로그표에서 $\log 2.67=0.4265$이므로

$$\log x=3.4265=3+0.4265$$
$$=\log 10^3+\log 2.67$$
$$=\log(10^3\times2.67)=\log 2670$$
$$\therefore x=2670$$

(3) $x=\sqrt[3]{0.072}$의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x=\frac{1}{3}\log 0.072$$

상용로그표에서 $\log 7.20=0.8573$이므로

$$\log 0.072=\log(10^{-2}\times7.20)=-2+0.8573$$
$$\log x=\frac{1}{3}(-2+0.8573)$$
$$=\frac{1}{3}(-3+1.8573)=-1+0.6191$$

상용로그표에서 $0.6191=\log 4.16$이므로

$$\log x=-1+0.6191$$
$$=\log\frac{1}{10}+\log 4.16=\log 0.416$$
$$\therefore x=0.416$$

045 정답 (1) **1.8572** (2) **1.1761**

(1) $\log 72=\log(2^3\times3^2)=\log 2^3+\log 3^2$
$$=3\log 2+2\log 3$$
$$=3\times0.3010+2\times0.4771=1.8572$$

(2) $\log 15=\log(3\times5)=\log 3+\log 5$
$$=\log 3+\log\frac{10}{2}=\log 3+1-\log 2$$
$$=0.4771+1-0.3010=1.1761$$

연습문제 I

pp.39~41

046 정답 (1) $\boldsymbol{x<-1}$ **또는** $\boldsymbol{x>3}$
(2) $\boldsymbol{2<x<3}$ **또는** $\boldsymbol{3<x<5}$

(1) $x^2-2x-3>0$이어야 하므로

$$(x+1)(x-3)>0$$
$$\therefore x<-1 \text{ 또는 } x>3$$

(2) $x-2\neq1$, $x-2>0$이고 $5-x>0$이어야 한다.

즉, $2<x<5$이고 $x\neq3$이므로

$$2<x<3 \text{ 또는 } 3<x<5$$

047 정답 (1) **0** (2) **3** (3) $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ (4) **4**

(1) $\log_{\frac{1}{2}} 1=x$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=1$
$$\therefore x=0$$

(2) $\log_2 8=x$에서 $2^x=8$, $2^x=2^3$
$$\therefore x=3$$

(3) $\log_{64} x=\frac{1}{4}$
$$\therefore x=64^{\frac{1}{4}}=(2^6)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$$

(4) $\log_x 16=2$에서 $x^2=16$

그런데 $x\neq1$, $x>0$이어야 하므로

$$x=4$$

048 정답 ③

① $10^1=10$이므로 $\log_{10} 10=1$

② $7^0=1$이므로 $\log_7 1=0$

③ $\log_{\sqrt{2}} 8=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^6=6\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}=6$

④ $\log_3 42=\log_3(2\times3\times7)=\log_3 2+\log_3 3+\log_3 7$
$$=1+\log_3 2+\log_3 7$$

⑤ $\log_5\sqrt{10}=\log_5 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_5(2\times5)$
$$=\frac{1}{2}(\log_5 2+\log_5 5)=\frac{1}{2}(1+\log_5 2)$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

049 정답 (1) **3** (2) **1** (3) **1** (4) **3**

(1) $\log_2 32+\log_2\frac{1}{4}=\log_2\left(32\times\frac{1}{4}\right)=\log_2 8$
$$=\log_2 2^3=3$$

(2) $\log_5 80-\log_5 16=\log_5\frac{80}{16}$
$$=\log_5 5=1$$

(3) $2\log_7\sqrt{35}-\log_7 5=\log_7(\sqrt{35})^2-\log_7 5$
$$=\log_7\frac{35}{5}=\log_7 7=1$$

(4) $\log_3 54-\log_3 8+2\log_3 2$
$$=\log_3 54-\log_3 8+\log_3 2^2$$
$$=\log_3\frac{54\times4}{8}=\log_3 27$$
$$=\log_3 3^3=3$$

050 정답 $\boldsymbol{-4}$

$$\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\cdots+\log_2\frac{15}{16}$$
$$=\log_2 1-\log_2 2+\log_2 2-\log_2 3+\cdots+\log_2 15-\log_2 16$$
$$=\log_2 1-\log_2 16=-4$$

다른 풀이

$$(\text{주어진 식})=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{15}{16}\right)$$
$$=\log_2\frac{1}{16}=\log_2 2^{-4}=-4$$

051 정답 (1) $\boldsymbol{2X+Y+3Z}$ (2) $\boldsymbol{2X-Y-3Z}$

(1) $\log_a x^2yz^3=\log_a x^2+\log_a y+\log_a z^3$
$=2\log_a x+\log_a y+3\log_a z$
$=2X+Y+3Z$

(2) $\log_a\frac{x^2}{yz^3}=\log_a x^2-\log_a y-\log_a z^3$
$=2\log_a x-\log_a y-3\log_a z$
$=2X-Y-3Z$

052 정답 ⑤

③ $\log_{a^2} b^2=\frac{\log_c b^2}{\log_c a^2}=\frac{2\log_c b}{2\log_c a}=\log_a b$

④ $\log_{xy} a=\frac{1}{\log_a xy}=\frac{1}{\log_a x+\log_a y}$

⑤ $\log_{(x+y)} a=\frac{1}{\log_a(x+y)}\neq\frac{1}{\log_a xy}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

053 정답 (1) $\boldsymbol{\frac{4a+b}{2a+b}}$ (2) $\boldsymbol{\frac{ab+a}{ab+1}}$

(1) 10을 밑으로 하는 로그로 변환하면

$$\log_{12}48=\frac{\log_{10}48}{\log_{10}12}=\frac{\log_{10}(2^4\times3)}{\log_{10}(2^2\times3)}$$
$$=\frac{4\log_{10}2+\log_{10}3}{2\log_{10}2+\log_{10}3}=\frac{4a+b}{2a+b}$$

(2) 주어진 조건 $\log_2 3=a$, $\log_3 5=b$에 공통으로 포함된 수가 3이므로 $\log_2 3=a$를 3을 밑으로 하는 로그로 변환하면

$\log_2 3=\frac{1}{\log_3 2}=a$에서 $\log_3 2=\frac{1}{a}$

$$\therefore \log_{10}15=\frac{\log_3 15}{\log_3 10}=\frac{\log_3(3\times5)}{\log_3(2\times5)}$$
$$=\frac{\log_3 3+\log_3 5}{\log_3 2+\log_3 5}$$
$$=\frac{1+b}{\frac{1}{a}+b}=\frac{ab+a}{ab+1}$$

054 정답 6

$\log_3 a+2\log_9 b=\log_3 a+\log_3 b=\log_3 ab$이므로

$$(\text{주어진 식})=\log_3 ab\times\log_{\sqrt{ab}}27$$
$$=\frac{\log_{10}ab}{\log_{10}3}\times\frac{\log_{10}27}{\log_{10}\sqrt{ab}}$$
$$=\frac{\log_{10}ab}{\log_{10}3}\times\frac{3\log_{10}3}{\frac{1}{2}\log_{10}ab}=6$$

055 정답 $\boldsymbol{-5}$

$$(\text{주어진 식})=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\cdots+\log_2\frac{31}{32}$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{31}{32}\right)$$
$$=\log_2\frac{1}{32}$$
$$=\log_2 2^{-5}=-5$$

056 정답 (1) $\boldsymbol{3a+2b}$ (2) $\boldsymbol{-a-3b+2}$ (3) $\boldsymbol{\frac{a+3b-2}{3}}$

(1) $\log_{10}72=\log_{10}(2^3\times3^2)=\log_{10}2^3+\log_{10}3^2$
$=3\log_{10}2+2\log_{10}3$
$=3a+2b$

(2) $\log_{10}\frac{50}{27}=\log_{10}50-\log_{10}27$
$=\log_{10}\frac{100}{2}-\log_{10}3^3$
$=\log_{10}10^2-\log_{10}2-3\log_{10}3$
$=-a-3b+2$

(3) $\log_{10}\sqrt[3]{0.54}=\log_{10}\left(\frac{54}{100}\right)^{\frac{1}{3}}$
$=\frac{1}{3}\{\log_{10}(2\times3^3)-\log_{10}10^2\}$
$=\frac{1}{3}(\log_{10}2+3\log_{10}3-2)$
$=\frac{a+3b-2}{3}$

057 정답 (1) 1 (2) 2 (3) 8 (4) 3

(1) $\log_3 2\cdot\log_8 27=\log_3 2\cdot\log_{2^3}3^3$
$=\log_3 2\cdot\log_2 3=1$

(2) $\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9=\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}7}{\log_{10}5}\cdot\frac{\log_{10}9}{\log_{10}7}$
$=\frac{2\log_{10}3}{\log_{10}3}=2$

(3) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 16)$
$=(\log_2 3+\log_2 3)(\log_3 4+\log_3 4)$
$=2\log_2 3\times2\log_3 4$
$=4\times\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{2\log 2}{\log 3}=8$

(4) $\log_8 27=\log_{2^3}3^3=\log_2 3$이므로
$(\text{주어진 식})=2^{\log_2 3}=3^{\log_2 2}=3^1=3$

058 정답 (1) 4.5855 (2) $-$3.1290 (3) 4130 (4) 0.0240

(1) 상용로그표에서 $\log 3.85=0.5855$이므로
$\log 38500=\log(10^4\times3.85)=\log 10^4+\log 3.85$
$=4+0.5855=4.5855$
$\therefore x=4.5855$

(2) 상용로그표에서 $\log 7.43=0.8710$이므로

$$\begin{aligned}\log 0.0007438&=\log(10^{-4}\times 7.43)\\&=-4+0.8710\\&=-3.1290\end{aligned}$$

$\therefore\ x=-3.1290$

(3) 상용로그표에서 $\log 4.13=0.6160$이므로

$$\begin{aligned}\log x=3.6160&=3+0.6160\\&=\log 10^3+\log 4.13\\&=\log(10^3\times 4.13)=\log 4130\end{aligned}$$

$\therefore\ x=4130$

(4) $-1.6198=-2+0.3802$이고,

상용로그표에서 $\log 2.40=0.3802$이므로

$$\begin{aligned}\log x=-1.6198&=-2+0.3802\\&=\log 10^{-2}+\log 2.40\\&=\log(10^{-2}\times 2.40)\\&=\log 0.0240\end{aligned}$$

$\therefore\ x=0.0240$

059 정답 (1) 6.87×10^8 (2) 0.258

(1) $x=7.65^{10}$으로 놓고 양변에 상용로그를 취하면

$\log x=10\log 7.65$

상용로그표에서 $\log 7.65=0.8837$이므로

$\log x=8.837$

상용로그표에서 0.837에 가장 가까운 값을 찾으면

$\log 6.87=0.8370$이므로

$$\begin{aligned}\log x&=8+0.837\\&=\log 10^8+\log 6.87\\&=\log(10^8\times 6.87)\end{aligned}$$

$\therefore\ x=6.87\times10^8$

(2) $x=\sqrt[4]{0.00443}=(0.00443)^{\frac{1}{4}}$으로 놓고

양변에 상용로그를 취하면

$$\log x=\frac{1}{4}\log 0.00443=\frac{1}{4}\log(10^{-3}\times 4.43)$$

상용로그표에서 $\log 4.43=0.6464$이므로

$$\begin{aligned}\log x&=\frac{1}{4}(-3+0.6464)\\&=-0.5884\\&=-1+0.4116\end{aligned}$$

상용로그표에서 0.4116에 가장 가까운 값을 찾으면

$\log 2.58=0.4116$이므로

$$\begin{aligned}\log x&=-1+0.4116\\&=\log 10^{-1}+\log 2.58\\&=\log(10^{-1}\times 2.58)\end{aligned}$$

$\therefore\ x=0.258$

060 정답 2.1047

$$\begin{aligned}\log 15+\log\sqrt{72}&=\log(3\times5)+\frac{1}{2}\log(2^3\times3^2)\\&=\log 3+\log 5+\frac{1}{2}(3\log 2+2\log 3)\\&=\log 3+(1-\log 2)+\frac{3}{2}\log 2+\log 3\\&=2\log 3+\frac{1}{2}\log 2+1\\&=2\times0.4771+\frac{1}{2}\times0.3010+1\\&=2.1047\end{aligned}$$

061 정답 22

$\log E=11.8+1.5M$에서

$M=6.8$을 대입하면

$\log E=11.8+1.5\times6.8=22$

$\therefore\ E=10^{22}$

따라서 $k=22$이다.

연습문제 II

p.42

062 정답 3, 4

$x-1\neq1$, $x-1>0$이어야 하므로

$1<x<2$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$-x^2+6x-5>0$이어야 하므로 $x^2-6x+5<0$

$(x-1)(x-5)<0$ $\quad\therefore\ 1<x<5$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$1<x<2$ 또는 $2<x<5$

이므로 정수 x는 3, 4이다.

063 정답 $\frac{13}{6}$

$\log_a c:\log_b c=3:2$이므로 $3\log_b c=2\log_a c$

a를 밑으로 하는 로그로 변환하면

$$3\times\frac{\log_a c}{\log_a b}=2\times\frac{\log_a c}{\log_a a}\qquad\therefore\ \log_a b=\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \log_a b+\log_b a&=\log_a b+\frac{1}{\log_a b}\\&=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}\end{aligned}$$

064 정답 ④

$x=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 2}\times\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}\times\dfrac{\log_2 7}{\log_2 5}=\log_2 7$이므로

$2^x=2^{\log_2 7}=7^{\log_2 2}=7$

$\therefore\ 2^x+2^{-x}=7+\dfrac{1}{7}=\dfrac{50}{7}$

065 정답 90.36

색유리 다섯 장을 통과하였을 때의 빛의 밝기가 l이므로

$l=100\times\left(1-\dfrac{2}{100}\right)^5=100\times0.98^5$

$\therefore\ \log l=2+5\log 0.98$

$=2+5\log(9.80\times10^{-1})$

$=2+5(\log 9.80-1)$

$=2+5(0.9912-1)$

$=2+4.9560-5=1.9560$

$=1+\log 9.036=\log 90.36$

$\therefore\ l=90.36$

066 정답 6 서술형

$\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$이므로 주어진 등식에 대입하면

$\log_a b=\dfrac{1}{\log_a b}$, $(\log_a b)^2=1$ … ①

즉, $\log_a b=\pm1$에서 $a=b$ 또는 $a^{-1}=b$

그런데 $a\neq b$이므로 $a^{-1}=b$, 즉 $ab=1$ … ②

$\therefore\ 2ab+a+4b=2+a+4b$

$\geq 2+2\sqrt{4ab}=6$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	로그의 여러 가지 공식을 이용하여 a, b에 대한 등식 얻기	30%
②	a, b 사이의 관계식 구하기	30%
③	주어진 식의 최솟값 구하기	40%

3. 지수함수와 그 그래프

유형 pp.46~53

001 정답 (1) 3 (2) 4

(1) 세 점 $(p,\ 2)$, $(q,\ 3)$, $(r,\ 6)$이 함수 $y=a^x$의 그래프 위의 점이므로

$a^p=2$ …… ㉠

$a^q=3$ …… ㉡

$a^r=6$ …… ㉢

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면 $a^p\times a^q=6$

㉢에 의해 $a^{p+q}=a^r$

이때, 함수 $y=a^x$은 일대일함수이므로

$r=p+q=3$

(2) 함수 $y=3^x$의 그래프가 두 점 $(a,\ p)$, $(b,\ q)$를 지나므로

$3^a=p$, $3^b=q$

두 식을 변끼리 곱하면 $pq=3^a\times3^b=3^{a+b}$

즉, $3^{a+b}=81=3^4$이고, 함수 $y=3^x$은 일대일함수이므로

$a+b=4$

002 정답 (1) $a<-2$ 또는 $a>2$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}<\sqrt[5]{\dfrac{1}{100}}<\sqrt[3]{0.1}$

(1) $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$, 즉 x의 값이 증가하면 함숫값도 증가하므로 지수함수 $f(x)=(a^2-3)^x$의 밑이 1보다 크다.

즉, $a^2-3>1$에서 $a^2-4>0$이므로 $(a+2)(a-2)>0$

$\therefore\ a<-2$ 또는 $a>2$

(2) $\sqrt[3]{0.1}=\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[5]{\dfrac{1}{100}}=\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{2}{5}}$

함수 $y=\left(\dfrac{1}{10}\right)^x$은 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

이때, $\dfrac{1}{3}<\dfrac{2}{5}<\dfrac{1}{2}$이므로

$\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{2}{5}}>\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}<\sqrt[5]{\dfrac{1}{100}}<\sqrt[3]{0.1}$

003 정답 그래프는 풀이 참조

(1) 치역: $\{y\,|\,y>0\}$, 점근선의 방정식: $y=0$

(2) 치역: $\{y\,|\,y<0\}$, 점근선의 방정식: $y=0$

(3) 치역: $\{y\,|\,y>0\}$, 점근선의 방정식: $y=0$

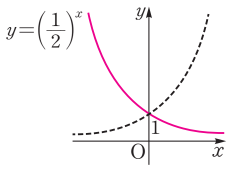
(4) 치역: $\{y\,|\,y>1\}$, 점근선의 방정식: $y=1$

(1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$이므로

$$y=2^x \xrightarrow[\text{대칭이동}]{y\text{축에 대하여}} y=2^{-x}$$

치역 : $\{y\,|\,y>0\}$

점근선의 방정식 : $y=0$ (x축)

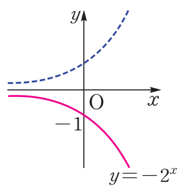


(2) $-y=2^x$에서 $y=-2^x$이므로

$$y=2^x \xrightarrow[\text{대칭이동}]{x\text{축에 대하여}} -y=2^x$$

치역 : $\{y\,|\,y<0\}$,

점근선의 방정식 : $y=0$

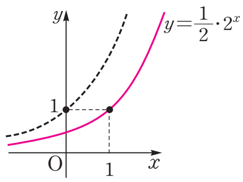


(3) $y=\frac{1}{2}\cdot 2^x=2^{x-1}$이므로

$$y=2^x \xrightarrow[\text{1만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로}} y=2^{x-1}$$

치역 : $\{y\,|\,y>0\}$,

점근선의 방정식 : $y=0$

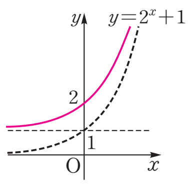


(4) $y=2^x \xrightarrow[\text{1만큼 평행이동}]{y\text{축의 방향으로}} y-1=2^x$

즉, $y=2^x+1$

치역 : $\{y\,|\,y>1\}$,

점근선의 방정식 : $y=1$



004 정답 (1) $a=-1$, $b=-1$, $c=2$ (2) 3

(1) 함수 $y=3^{x-a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$이므로

$b=-1$

이때, 함수 $y=3^{x-a}-1$의 그래프가 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=3^{-1-a}-1$

$3^{-1-a}=1=3^0$

$-1-a=0$에서 $a=-1$

따라서 주어진 함수는 $y=3^{x+1}-1$이므로 $x=0$일 때

$c=3^{0+1}-1=2$

(2) $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=a^{-x}$

이것을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y-3=a^{-(x-2)}$

$y=a^{-x+2}+3$

이 그래프가 점 $(1, 6)$을 지나므로

$a+3=6$

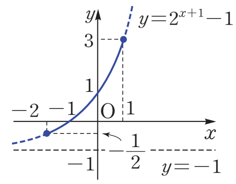
$\therefore a=3$

005 정답 (1) **최댓값 : 3, 최솟값 : $-\frac{1}{2}$**

(2) 최댓값 : 9, 최솟값 : $\frac{1}{3}$

(3) 최댓값 : $\frac{3}{2}$, 최솟값 : $\frac{2}{3}$

(1) 함수 $y=2^{x+1}-1$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=2^{x+1}-1$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$x=1$에서 최댓값 $2^{1+1}-1=3$,

$x=-2$에서 최솟값 $2^{-2+1}-1=-\frac{1}{2}$

을 가진다.

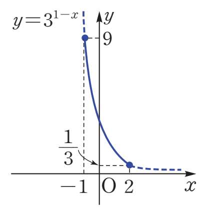
(2) 함수 $y=3^{1-x}=3^{-(x-1)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$x=-1$에서

최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1-1}=9$,

$x=2$에서 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-1}=\frac{1}{3}$

을 가진다.

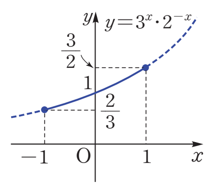


(3) 함수 $y=3^x\cdot 2^{-x}=\frac{3^x}{2^x}=\left(\frac{3}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$x=1$에서 최댓값 $\left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2}$,

$x=-1$에서 최솟값 $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$

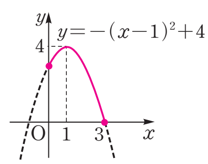
를 가진다.



006 정답 (1) **최댓값 : 81, 최솟값 : 1** (2) 5

(3) 최댓값 : 3, 최솟값 : -1

(1) $f(x)=-x^2+2x+3$으로 놓으면 함수 $y=3^{f(x)}$의 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 $3^{f(x)}$도 최대이고, $f(x)$가 최소일 때 $3^{f(x)}$도 최소이다.



$0\le x\le 3$일 때, $f(x)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $0\le f(x)\le 4$이다.

따라서 $0\le f(x)\le 4$일 때 $3^0\le 3^{f(x)}\le 3^4$이므로 $0\le x\le 3$일 때 함수 $y=3^{f(x)}$의 최솟값은 1, 최댓값은 81이다.

(2) $f(x)=x^2+4x+6$으로 놓으면 함수 $y=a^{f(x)}$의 밑 a가 1보다 크므로 $f(x)$가 최소일 때 $a^{f(x)}$도 최소이다.

$f(x)=x^2+4x+6=(x+2)^2+2$에서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값 2를 가지므로 $a^{f(x)}$의 최솟값은 a^2이다.

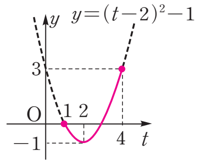
즉, $a^2=25$에서 $a=5$($\because a>1$)

(3) $2^x=t$로 놓으면 $0\le x\le 2$이므로

$$2^0\le 2^x\le 2^2 \quad \therefore 1\le t\le 4$$

$$y=4^x-2^{x+2}+3=(2^x)^2-4\cdot 2^x+3$$
$$=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$$

$1\le t\le 4$일 때, 함수 $y=(t-2)^2-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=2$에서 최솟값 -1,

$t=4$에서 최댓값 $2^2-1=3$

을 가진다.

확인문제 pp.46~53

067 정답 3

함수 $y=a^x$의 그래프가 점 $\left(2, \frac{1}{9}\right)$을 지나므로

$$a^2=\frac{1}{9} \qquad \therefore a=\frac{1}{3}(\because a>0)$$

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프가 점 $(-1, k)$를 지나므로

$$k=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$$

068 정답 2

주어진 그래프에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^a=3^{-a}=18$,

$\left(\frac{1}{3}\right)^b=3^{-b}=2$이므로

$$3^{-a}\div 3^{-b}=18\div 2=9, \text{ 즉 } 3^{b-a}=3^2$$

$$\therefore b-a=2$$

069 정답 $0<a<1$

지수함수 $f(x)=(a^2-a+1)^x$에서 x의 값이 증가할 때 함숫값 $f(x)$가 감소하면 지수함수 $f(x)=(a^2-a+1)^x$의 밑이 0과 1 사이에 있어야 한다.

$$\therefore 0<a^2-a+1<1$$

이때, 임의의 실수 a에 대하여 $a^2-a+1>0$이므로 $a^2-a+1<1$인 범위를 구하면

$$a^2-a+1<1,\ a(a-1)<0$$

$$\therefore 0<a<1$$

070 정답 $\sqrt[7]{81}<\sqrt[3]{9}<\sqrt[4]{27}$

주어진 세 수를 3^x의 꼴로 나타내면

$$\sqrt[3]{9}=9^{\frac{1}{3}}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}},\ \sqrt[4]{27}=27^{\frac{1}{4}}=(3^3)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}},$$

$$\sqrt[7]{81}=81^{\frac{1}{7}}=(3^4)^{\frac{1}{7}}=3^{\frac{4}{7}}$$

함수 $y=3^x$은 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

이때, $\frac{4}{7}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$이므로 $3^{\frac{4}{7}}<3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{4}}$

$$\therefore \sqrt[7]{81}<\sqrt[3]{9}<\sqrt[4]{27}$$

071 정답 그래프는 풀이 참조

(1) 치역 : $\{y|y>0\}$, 점근선의 방정식 : $y=0$
(2) 치역 : $\{y|y<0\}$, 점근선의 방정식 : $y=0$
(3) 치역 : $\{y|y>0\}$, 점근선의 방정식 : $y=0$
(4) 치역 : $\{y|y>-1\}$, 점근선의 방정식 : $y=-1$

(1) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x}$이므로 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$\therefore$ 치역 : $\{y|y>0\}$, 점근선의 방정식 : $y=0$(x축)

(2) $y=-3^x$에서 $-y=3^x$이므로 $y=-3^x$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

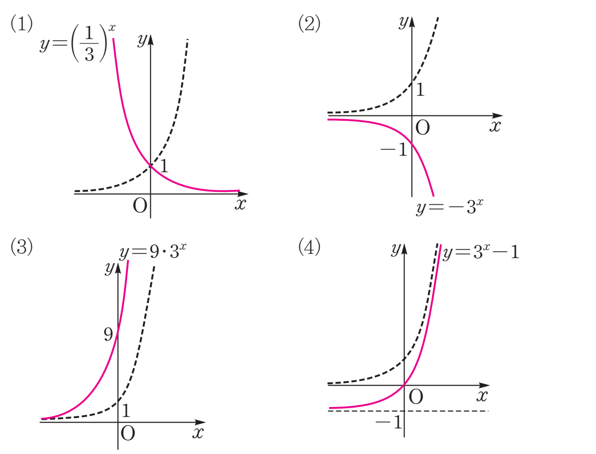
$\therefore$ 치역 : $\{y|y<0\}$, 점근선의 방정식 : $y=0$(x축)

(3) $y=9\cdot 3^x=3^{x+2}$이므로 $y=9\cdot 3^x$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore$ 치역 : $\{y|y>0\}$, 점근선의 방정식 : $y=0$(x축)

(4) $y=3^x-1$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore$ 치역 : $\{y|y>-1\}$, 점근선의 방정식 : $y=-1$



072 정답 10

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$이므로 $b=-3$

이때, 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-a}-3$의 그래프가 원점을 지나므로

$$0=\left(\frac{1}{3}\right)^{-a}-3,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-a}=3,\ 3^a=3^1 \qquad \therefore a=1$$

$$\therefore a^2+b^2=1^2+(-3)^2=10$$

073 정답 3

$y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y-2=a^{x-3}$, 즉 $y=a^{x-3}+2$

이것을 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=a^{-x-3}+2$

위의 그래프가 점 $(-4,\ 5)$를 지나므로

$5=a^{-(-4)-3}+2$, 즉 $a+2=5$

$\therefore\ a=3$

074 정답 (1) 최댓값 : 11, 최솟값 : 3 (2) 최댓값 : 13, 최솟값 : −2

(1) 함수 $y=3^{x-1}+2$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

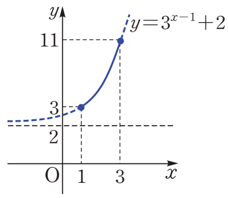
$x=3$에서 최댓값

$3^{3-1}+2=11$,

$x=1$에서 최솟값

$3^{1-1}+2=3$

을 가진다.



(2) 함수 $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-1}-3$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

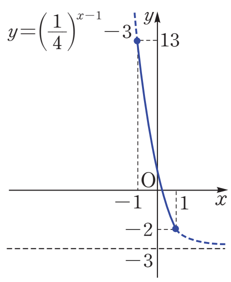
$x=-1$에서 최댓값

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1-1}-3=13$,

$x=1$에서 최솟값

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1-1}-3=-2$

를 가진다.



075 정답 (1) 최댓값 : 18, 최솟값 : 4 (2) 최댓값 : 9, 최솟값 : 4

(1) 함수

$y=2^{3-x}+2=2^{-(x-3)}+2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}+2$

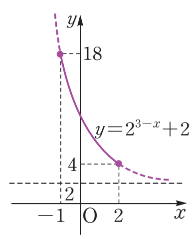
는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$x=-1$에서 최댓값

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1-3}+2=18$,

$x=2$에서 최솟값 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2-3}+2=4$

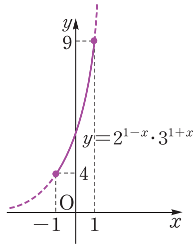
를 가진다.



(2) 함수

$y=2^{1-x}\cdot 3^{1+x}=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\cdot 3\cdot 3^x=6\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$

은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로



$x=1$에서 최댓값 $6\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^1=9$,

$x=-1$에서 최솟값 $6\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}=4$

를 가진다.

076 정답 (1) 최댓값 : 32, 최솟값 : 2 (2) 3

(1) 함수 $y=2^{x^2-6x+10}$에서 $f(x)=x^2-6x+10$으로 놓으면

함수 $y=2^{f(x)}$의 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 $2^{f(x)}$도 최대이고, $f(x)$가 최소일 때 $2^{f(x)}$도 최소이다.

$f(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$이므로

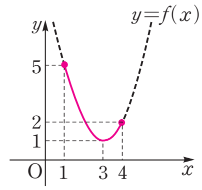
오른쪽 그래프에서

$1\le x\le 4$일 때 $1\le f(x)\le 5$이고

$2^1\le 2^{f(x)}\le 2^5$

따라서 $1\le x\le 4$일 때 함수

$y=2^{f(x)}$의 최솟값은 2, 최댓값은 32이다.



(2) $y=a^{-x^2-2x+3}$에서 $f(x)=-x^2-2x+3$으로 놓으면

함수 $y=a^{f(x)}$의 밑 a가 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 $a^{f(x)}$도 최대이다.

$f(x)=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$에서

$f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 4를 가지므로

$a^{f(x)}$의 최댓값은 a^4이다.

즉, $a^4=81$에서 $a=3(\because\ a>1)$

077 정답 최댓값 : 9, 최솟값 : 0

$2^x=t$로 놓으면 $0\le x\le 2$이므로 $2^0\le 2^x\le 2^2$

$\therefore\ 1\le t\le 4$

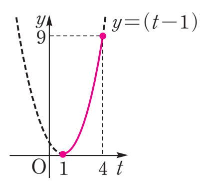
$y=2^{2x}-2^{x+1}+1=(2^x)^2-2\cdot 2^x+1=t^2-2t+1=(t-1)^2$

$1\le t\le 4$에서 함수 $y=(t-1)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$에서 최솟값 0,

$t=4$에서 최댓값 $3^2=9$

를 가진다.



연습문제 I

pp.54~56

078 정답 ③

$f(2)=3$에서 $a^2=3$이므로 $a=\pm\sqrt{3}$

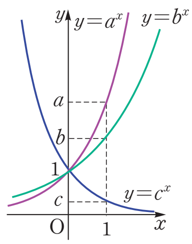
이때, $a>0$이므로 $a=\sqrt{3}$

$\therefore\ f(3)=(\sqrt{3})^3=3\sqrt{3}$

079 정답 $c<b<a$

세 지수함수 $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$에 대하여 $x=1$일 때의 함숫값이 각각 a, b, c이다.

오른쪽 그림에서 $c<b<a$



개념 보충

$x>0$인 범위에서

① $y=a^x(a>1)$의 그래프는 a의 값이 커질수록 y축에 가까워진다.

② $y=a^x(0<a<1)$의 그래프는 a의 값이 작아질수록 x축에 가까워진다.

080 정답 6

함수 $y=a^x$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 일정한 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

이때, 함수 $y=a^{x-2}+3$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 a의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 4)$를 지난다.

$$(0,\ 1) \xrightarrow[\text{y축의 방향으로 3만큼 평행이동}]{\text{x축의 방향으로 2만큼}} (2,\ 4)$$

따라서 $p=2$, $q=4$이므로 $p+q=6$

081 정답 ③

$\left(\frac{1}{2}\right)^p=a$, $\left(\frac{1}{2}\right)^q=b$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{p+q}=c$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^p\times\left(\frac{1}{2}\right)^q=\left(\frac{1}{2}\right)^{p+q}$이므로 $a\times b=c$

$\therefore c=ab$

082 정답 -2

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 y절편이 0보다 작거나 같아야 한다.

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^{0-1}+k\le 0$에서 $2+k\le 0$이므로 $k\le -2$

따라서 상수 k의 최댓값은 -2이다.

083 정답 1

$y=16\cdot 2^{2x}+3=2^{2x+4}+3=2^{2(x+2)}+3$

따라서 함수 $y=16\cdot 2^{2x}+3$의 그래프는 함수 $y=2^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 $p=-2$, $q=3$

$\therefore p+q=1$

084 정답 2

함수 $y=3^{x-a}+b$의 그래프에서 점근선의 방정식이 $y=-2$이므로 $b=-2$

함수 $y=3^{x-a}-2$의 그래프가 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로

$3^{-1-a}-2=-1$에서 $3^{-1-a}=1$

즉, $3^{-1-a}=3^0$에서 $-1-a=0$

$\therefore a=-1$

또, c는 함수 $y=3^{x+1}-2$의 그래프의 y절편이므로

$3^{0+1}-2=c$에서 $c=1$

$\therefore abc=(-1)\times(-2)\times 1=2$

085 정답 -2

함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=2^{-x}$

함수 $y=2^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$y=2^{-(x-a)}+b=2^{-x+a}+b$

이때, 점근선의 방정식이 $y=-4$이므로 $b=-4$

함수 $y=2^{-x+a}-4$의 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$2^a=4$에서 $a=2$

$\therefore a+b=-2$

086 정답 $\frac{23}{20}$

주어진 수를 밑이 3인 지수를 이용하여 나타내면

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.4}=(3^{-1})^{-0.4}=3^{0.4}=3^{\frac{2}{5}}$,

$(\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}=(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$

함수 $y=3^x$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉, $\frac{2}{5}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$이므로 $3^{\frac{2}{5}}<3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{4}}$

따라서 가장 작은 수는 $3^{\frac{2}{5}}$, 가장 큰 수는 $3^{\frac{3}{4}}$이므로

$3^{\frac{2}{5}}\times 3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{2}{5}+\frac{3}{4}}=3^{\frac{23}{20}}$ $\qquad\therefore k=\frac{23}{20}$

087 정답 1

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x}=\frac{1}{3}\cdot 9^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$x=2$일 때 최댓값 $M=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2\cdot 2}=27$,

$x=-1$일 때 최솟값 $m=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2\cdot(-1)}=\frac{1}{27}$

을 가진다.

$\therefore Mm=27\times\frac{1}{27}=1$

088 정답 (1) 4 (2) 1

(1) 함수 $y=2^{x^2+2x+3}$에서 $f(x)=x^2+2x+3$이라고 하자.

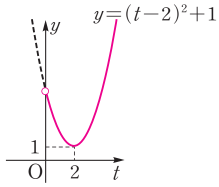
밑이 2이므로 $f(x)$가 최소일 때, $2^{f(x)}$의 값도 최소이다.

$f(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$이므로 $x=-1$일 때 $f(x)$의 최솟값은 2이다.

따라서 함수 $y=2^{x^2+2x+3}$의 최솟값은 $2^2=4$이다.

(2) $3^{-x}=t$로 놓으면 $3^{-x}>0$이므로 $t>0$

$$\begin{aligned} y&=9^{-x}-12\cdot 3^{-x-1}+5 \\ &=t^2-4t+5 \\ &=(t-2)^2+1\ (t>0) \end{aligned}$$



이므로 오른쪽 그림에서

$t=2$일 때, y의 최솟값은

$(2-2)^2+1=1$

089 정답 9

$y=3^{-x^2+4x-2}$에서 $f(x)=-x^2+4x-2$라고 하면

$f(x)=-(x-2)^2+2\le 2$

밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대이면 $y=3^{f(x)}$도 최대이다.

따라서 $f(x)=2$일 때, 주어진 함수의 최댓값은 $3^2=9$이다.

090 정답 $a=3$, $b=0$

$$\begin{aligned} f(x)&=4^x-2^{x+1}+a \\ &=(2^x)^2-2\cdot 2^x+a \\ &=(2^x-1)^2+a-1 \end{aligned}$$

이므로 함수 $f(x)$는 $2^x=1$, 즉 $x=0$일 때 최솟값 $a-1$을 가진다.

따라서 $b=0$이고, $a-1=2$에서 $a=3$이다.

091 정답 (1) $t\ge 2$ (2) $y=t^2-2t+2$ (3) 2

(1) $2^x+2^{-x}=t$에서 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$ ← $a>0$, $b>0$일 때, $a+b\ge 2\sqrt{ab}$

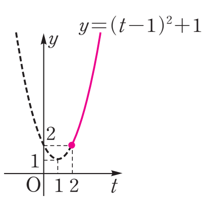
(단, 등호는 $2^x=2^{-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

$\therefore t\ge 2$

(2) $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$ 이므로

$$\begin{aligned} y&=4^x+4^{-x}-2(2^x+2^{-x})+4 \\ &=(t^2-2)-2t+4=t^2-2t+2 \\ &=(t-1)^2+1\ (t\ge 2) \end{aligned}$$

(3) $y=(t-1)^2+1\ (t\ge 2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 y는 $t=2$일 때 최솟값 2를 가진다.



092 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(x+y)=a^{x+y}=a^x\cdot a^y=f(x)f(y)$ (참)

ㄴ. $f(-x)=a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}=\dfrac{1}{f(x)}$ (참)

ㄷ. $f(nx)=a^{nx}=(a^x)^n=\{f(x)\}^n$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

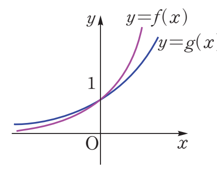
연습문제 Ⅱ ······ p.57

093 정답 $a>1$

$a^2-a+3=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>1$이므로 지수함수 $y=g(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

(i) 함수 $f(x)$의 밑이 1보다 클 경우,

즉 $a^2+a+1>1$인 경우



$a^2+a+1>1$에서

$a<-1$ 또는 $a>0$ ······ ㉠

$g(x)$의 밑보다 $f(x)$의 밑이 커야 하므로

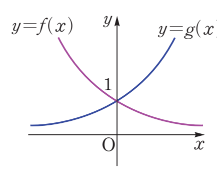
$a^2+a+1>a^2-a+3$에서

$a>1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 범위는

$a>1$

(ii) 함수 $f(x)$의 밑이 1보다 작을 경우 임의의 음수 x에 대하여 항상 $f(x)>g(x)$이므로 주어진 조건을 만족하는 실수 a는 없다.



따라서 구하는 a의 값의 범위는

$a>1$

094 정답 99

$f(2)=\dfrac{a^2+a^{-2}}{2}=17$에서 $a^2+a^{-2}=34$이므로

$(a+a^{-1})^2=a^2+a^{-2}+2=36$ $\quad\therefore a+a^{-1}=\pm 6$

그런데 $a>0$이므로 $a+a^{-1}=6$

따라서 $a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})^3-3(a+a^{-1})=216-18=198$

$\therefore f(3)=\dfrac{a^3+a^{-3}}{2}=99$

095 정답 $\frac{7}{3}$

함수 $y=-a^{x-m}+n$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=2$이므로 $n=2$

함수 $y=-a^{x-m}+2$의 그래프가 두 점 $(0,\ 1)$, $(-1,\ -1)$을 지나므로

$$-a^{-m}+2=1,\ a^{-m}=1 \qquad \therefore m=0$$

$$-a^{-1}+2=-1,\ a^{-1}=3 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a+m+n=\frac{1}{3}+0+2=\frac{7}{3}$$

096 정답 **최솟값 : 6, $x=0$**

$3^{1+x}=3\cdot3^x$, $3^{1-x}=3\cdot3^{-x}=3\cdot\frac{1}{3^x}$이고

$3^x>0$, $\frac{1}{3^x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3^{1+x}+3^{1-x}=3\cdot3^x+3\cdot\frac{1}{3^x}\geq2\sqrt{3\cdot3^x\cdot3\cdot\frac{1}{3^x}}=2\sqrt{9}=6$$

$$\left(\text{단, 등호는 } 3\cdot3^x=3\cdot\frac{1}{3^x},\ \text{즉 } x=0\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $y=3^{1+x}+3^{1-x}$은 $x=0$일 때 최솟값 6을 가진다.

097 정답 8 서술형

두 함수 $y=a^x$, $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 직선 $x=0$(y축)에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 함수 $f(x)=a^{x-k}$, $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-k}$의 그래프는 직선 $x=k$에 대하여 대칭이다.

이때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$k=2$ … ①

한편, 함수 $f(x)=a^{x-2}$, $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-2}$에서

$$f(1)=a^{1-2}=\frac{1}{a},\ g(1)=\left(\frac{1}{a}\right)^{1-2}=a$$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{15}{4}$이므로 $a-\frac{1}{a}=\frac{15}{4}$

$$4a^2-15a-4=0,\ (4a+1)(a-4)=0$$

$$a=-\frac{1}{4}\ \text{또는}\ a=4$$

그런데 $a>1$이므로 $a=4$ … ②

$\therefore ak=4\times2=8$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	두 함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 k의 값 구하기	40%
②	$\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 이용하여 a의 값 구하기	40%
③	ak의 값 구하기	20%

4. 로그함수와 그 그래프

유형 pp.63~71

001 정답 (1) 27 (2) 1

(1) 함수 $y=\log_3 x$의 그래프가 두 점 $(a,\ p)$, $(b,\ q)$를 지나므로

$$\log_3 a=p,\ \log_3 b=q$$

두 식을 변끼리 더하면 $p+q=\log_3 a+\log_3 b=\log_3 ab$

즉, $3=\log_3 ab$이고, 함수 $y=\log_3 x$는 일대일함수이므로

$$ab=3^3=27$$

(2) 점 P의 좌표는 $(0,\ \log_2 p)$, 점 Q의 좌표는 $(0,\ \log_{\sqrt{2}} q)$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OQ}}=2:3$에서 $\log_2 p:\log_{\sqrt{2}} q=2:3$

즉, $2\log_{\sqrt{2}} q=3\log_2 p$이므로 밑을 2로 고치면

$$4\log_2 q=3\log_2 p$$

따라서 $\log_2 q^4=\log_2 p^3$에서 $q^4=p^3$이므로 $\frac{q^4}{p^3}=1$

002 정답 (1) (4, 2) (2) $A<B<C$

(1) 함수 $y=\log_a x$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

함수 $y=\log_a(x-3)+2$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표는 $(4,\ 2)$이다.

$$(1,\ 0)\xrightarrow[y\text{축의 방향으로 2만큼}]{x\text{축의 방향으로 3만큼}}(1+3,\ 0+2),\ \text{즉 }(4,\ 2)$$

(2) 주어진 수의 밑을 모두 2로 바꾸어 정리하면

$$A=-3\log_2\frac{1}{3}=\log_2\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=\log_2 27$$

$$B=2+\log_2 7=\log_2 4+\log_2 7=\log_2 28$$

$$C=1+\underline{2\log_4 15}=\log_2 2+\log_2 15=\log_2 30$$

$$\log_4 15=\log_{2^2} 15=\frac{1}{2}\log_2 15$$

함수 $y=\log_2 x$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉, $27<28<30$이므로 $\log_2 27<\log_2 28<\log_2 30$

$$\therefore A<B<C$$

003 정답 **그래프는 풀이 참조**

(1) **정의역 : $\{x\mid x>1\}$,**
점근선의 방정식 : $x=1$

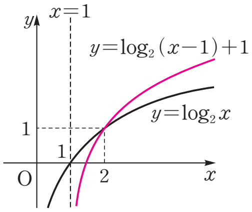
(2) **정의역 : $\{x\mid x>-2\}$,**
점근선의 방정식 : $x=-2$

(3) **정의역 : $\{x\mid x>0\}$,**
점근선의 방정식 : $x=0$

(4) **정의역 : $\{x\mid x<1\}$,**
점근선의 방정식 : $x=1$

(1) $y=\log_2 x \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 1만큼}]{x\text{축의 방향으로 1만큼}} y=\log_2(x-1)+1$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



진수 조건 $x-1>0$에서

정의역 : $\{x|x>1\}$,

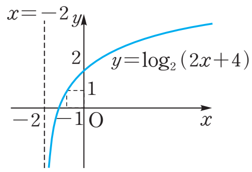
점근선의 방정식 : $x=1$

(2) $y=\log_2(2x+4)$

$=\log_2 2(x+2)=\log_2(x+2)+1$이므로

$y=\log_2 x \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 1만큼}]{x\text{축의 방향으로 }-2\text{만큼}} y=\log_2(x+2)+1$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



진수 조건 $2x+4>0$에서

정의역 : $\{x|x>-2\}$,

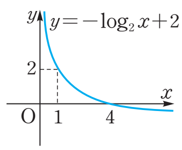
점근선의 방정식 : $x=-2$

(3) $y=\log_2 \dfrac{4}{x}=\log_2 4-\log_2 x=-\log_2 x+2$이므로

$y=\log_2 x \xrightarrow[\text{대칭이동}]{x\text{축에 대하여}} y=-\log_2 x$

$\xrightarrow[\text{2만큼 평행이동}]{y\text{축의 방향으로}} y=-\log_2 x+2$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



진수 조건 $\dfrac{4}{x}>0$에서

정의역 : $\{x|x>0\}$,

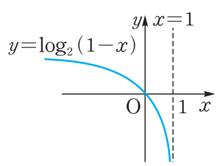
점근선의 방정식 : $x=0$(y축)

(4) $y=\log_2(1-x)=\log_2\{-(x-1)\}$이므로

$y=\log_2 x \xrightarrow[\text{대칭이동}]{y\text{축에 대하여}} y=\log_2(-x)$

$\xrightarrow[\text{1만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로}} y=\log_2\{-(x-1)\}$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



진수 조건 $1-x>0$에서

정의역 : $\{x|x<1\}$,

점근선의 방정식 : $x=1$

004 정답 (1) 4 (2) $a=-5$, $b=\frac{1}{2}$

(1) $y=\log_2 a(x+b)=\log_2(x+b)+\log_2 a$

점근선의 방정식이 $x=-2$이므로

$-b=-2$ $\quad\therefore b=2$

$y=\log_2 a(x+2)$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=\log_2 2a$, $2a=2^2$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore a+b=2+2=4$

(2) 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

$y=\log_3(x-a)$

이 그래프가 점 $(4, 2)$를 지나므로

$\log_3(4-a)=2$, $4-a=3^2$

$\therefore a=-5$

또, 함수 $y=\log_b x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$y=-\log_b x=\log_b \dfrac{1}{x}$

이 그래프가 점 $(4, 2)$를 지나므로

$\log_b \dfrac{1}{4}=2$, $b^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore b=\dfrac{1}{2}$($\because b>0$, $b\neq 1$)

005 정답 (1) 1 (2) 3

(1) $y=\log_2(x+1)-2$를 x에 관하여 풀면

$y+2=\log_2(x+1)$, $x+1=2^{y+2}$

$\therefore x=2^{y+2}-1$

여기서 x와 y를 서로 바꾸어 대입하면 구하는 역함수는 $y=2^{x+2}-1$이므로

$a=2$, $b=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

(2) 함수 $y=f(x)$는 함수 $y=\log_2(x+a)$의 역함수이므로

점 P$(3, 5)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이면

점 $(5, 3)$은 함수 $y=\log_2(x+a)$의 그래프 위의 점이다.

$3=\log_2(5+a)$에서 $5+a=2^3=8$

$\therefore a=3$

006 정답 (1) 최댓값 : 4, 최솟값 : 2

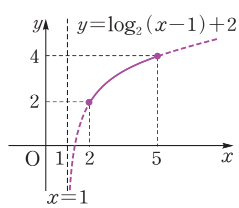
(2) 최댓값 : 0, 최솟값 : -2

(3) 최댓값 : 3, 최솟값 : 2

(1) 함수 $y=\log_2(x-1)+2$는 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $2\leq x\leq 5$에서 함수

$y=\log_2(x-1)+2$는



$x=2$일 때 최솟값

$\log_2 1+2=2$,

$x=5$일 때 최댓값

$\log_2 4+2=4$

를 가진다.

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+1$은 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $5\le x\le 11$에서 함수

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+1$은

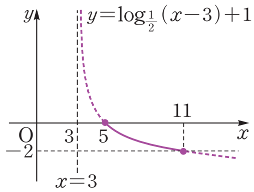
$x=5$일 때 최댓값

$\log_{\frac{1}{2}}(5-3)+1=0$,

$x=11$일 때 최솟값

$\log_{\frac{1}{2}}(11-3)+1=-2$

를 가진다.



(3) 함수 $y=\log_3 3(10-x)=\log_3(10-x)+1$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $1\le x\le 7$에서 함수

$y=\log_3(10-x)+1$은

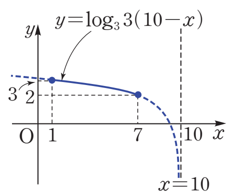
$x=1$일 때 최댓값

$\log_3(10-1)+1=3$

$x=7$일 때 최솟값

$\log_3(10-7)+1=2$

를 가진다.



007 정답 (1) 5 (2) 최댓값 : 7, 최솟값 : −1 (3) 6

(1) $f(x)=x^2-4x+8$이라고 하면

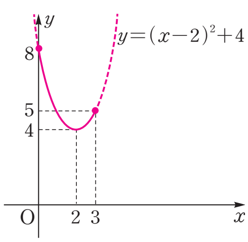
$0\le x\le 3$일 때, $f(x)=(x-2)^2+4$는

$x=2$에서 최솟값 $f(2)=4$,

$x=0$에서 최댓값 $f(0)=8$

을 가진다.

이때, 함수 $y=\log_2 f(x)$의 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 $\log_2 f(x)$도 최대이고, $f(x)$가 최소일 때 $\log_2 f(x)$도 최소이다.



따라서 $\log_2 f(x)$는

$f(x)=8$, 즉 $x=0$일 때, 최댓값 $\log_2 8=3$

$f(x)=4$, 즉 $x=2$일 때, 최솟값 $\log_2 4=2$

를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$3+2=5$

(2) $\log_3 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 27$에서 $0\le t\le 3$

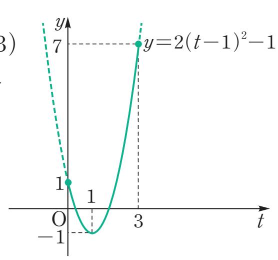
$y=2(\log_3 x)^2-4\log_3 x+1(1\le x\le 27)$에서

$y=2t^2-4t+1$

$=2(t-1)^2-1(0\le t\le 3)$

즉, $t=3$일 때 최댓값 7을 가지고, $t=1$일 때 최솟값 -1을 가진다.

따라서 구하는 최댓값은 7, 최솟값은 -1이다.



(3) 함수 $y=(\log_2 2x)\left(\log_2 \frac{8}{x}\right)$을 변형하면

$y=(1+\log_2 x)(3-\log_2 x)$

$=3+2\log_2 x-(\log_2 x)^2$

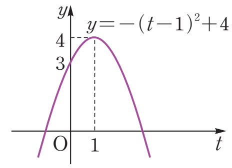
이때, $\log_2 x=t$로 놓으면

$y=3+2t-t^2$

$=-(t-1)^2+4$

이므로 주어진 함수는 $t=1$, 즉 $x=2$일 때 최댓값 4를 가진다.

$\therefore M+a=4+2=6$



확인문제 pp.63~71

098 정답 −4

함수 $y=\log_a x$의 그래프가 점 $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$를 지나므로

$\log_a \frac{1}{3}=2 \qquad \therefore a^2=\frac{1}{3}$

또, 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 점 $(9, k)$를 지나므로

$\log_a 9=k$, $a^k=9$

이때, $9=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=(a^2)^{-2}=a^{-4}$이므로

$a^k=a^{-4} \qquad \therefore k=-4$

099 정답 9

점 A의 좌표는 $(0, \log_3 a)$, 점 B의 좌표는 $(0, \log_3 b)$

$\overline{AB}=2$에서 $\log_3 b-\log_3 a=2$이므로

$\log_3 \frac{b}{a}=\log_3 3^2$

$\therefore \frac{b}{a}=9$

100 정답 ㄴ

ㄱ. 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. (×)

ㄴ. 함수 $y=\log_2 x$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. (○)

ㄷ. $y=\log_2 \frac{1}{x}=-\log_2 x$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. (×)

따라서 구하는 함수는 ㄴ뿐이다.

101 정답 $C<A<B$

주어진 수의 밑을 모두 4로 바꾸면

$$A=\log_4 7,$$

$$B=-\log_2\frac{1}{3}=\log_2\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\log_2 3=\log_4 9,$$

$$C=1+\log_{\frac{1}{4}}\frac{4}{5}=1+\log_4\frac{5}{4}=\log_4 4+\log_4\frac{5}{4}=\log_4 5$$

로그함수 $y=\log_4 x$는 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $5<7<9$이므로 $C<A<B$

102 정답 그래프는 풀이 참조

(1) 정의역 : $\{x|x>-1\}$,

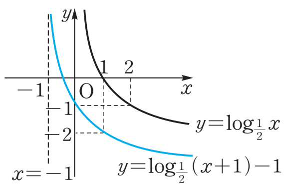
점근선의 방정식 : $x=-1$

(2) 정의역 : $\{x|x>2\}$,

점근선의 방정식 : $x=2$

(1) $y=\log_{\frac{1}{2}} x \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 }-1\text{만큼}]{x\text{축의 방향으로 }-1\text{만큼}} y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-1$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



진수 조건 $x+1>0$에서

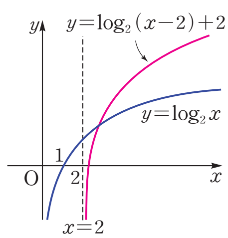
정의역 : $\{x|x>-1\}$,

점근선의 방정식 : $x=-1$

(2) $y=\log_2(4x-8)=\log_2 4(x-2)=\log_2(x-2)+2$이므로

$y=\log_2 x \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 }2\text{만큼}]{x\text{축의 방향으로 }2\text{만큼}} y=\log_2(x-2)+2$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



진수 조건 $4x-8>0$에서

정의역 : $\{x|x>2\}$,

점근선의 방정식 : $x=2$

103 정답 그래프는 풀이 참조

(1) 정의역 : $\{x|x>0\}$,

점근선의 방정식 : $x=0$

(2) 정의역 : $\{x|x<1\}$,

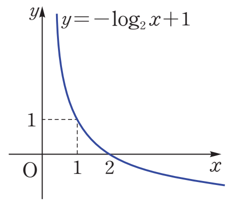
점근선의 방정식 : $x=1$

(1) $y=-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}+1=-\log_{2^{-1}}x^{-1}+1=-\log_2 x+1$이므로

$y=\log_2 x \xrightarrow[\text{대칭이동}]{x\text{축에 대하여}} y=-\log_2 x$

$\xrightarrow[1\text{만큼 평행이동}]{y\text{축의 방향으로}} y=-\log_2 x+1$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



진수 조건 $\frac{1}{x}>0$에서

정의역 : $\{x|x>0\}$,

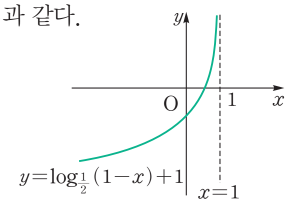
점근선의 방정식 : $x=0$(y축)

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-x}{2}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1-x)=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)+1$이므로

$y=\log_{\frac{1}{2}} x \xrightarrow[\text{대칭이동}]{y\text{축에 대하여}} y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$

$\xrightarrow[y\text{축의 방향으로 }-1\text{만큼}]{x\text{축의 방향으로 }1\text{만큼}} y=\log_{\frac{1}{2}}\{-(x-1)\}-1$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



진수 조건 $\frac{1-x}{2}>0$에서

정의역 : $\{x|x<1\}$,

점근선의 방정식 : $x=1$

104 정답 4

점근선의 방정식이 $x=-3$이므로

$-a=-3 \qquad \therefore a=3$

$y=\log_{\frac{1}{3}}(x+3)+b$의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$\log_{\frac{1}{3}} 3+b=0 \qquad \therefore b=-\log_{\frac{1}{3}} 3=\log_{\frac{1}{3}} 3^{-1}=1$

$\therefore a+b=3+1=4$

105 정답 6

$y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+b$

이것을 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+b$

즉, $y=-\log_{\frac{1}{2}}(x-a)-b=\log_2(x-a)-b$ ⋯⋯ ㉠

한편, $y=\log_2(8x+16)=\log_2 8(x+2)$

$=\log_2(x+2)+\log_2 8$

$=\log_2(x+2)+3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 함수의 식이 같아야 하므로 $a=-2$, $b=-3$

$\therefore ab=6$

106 정답 -1

$y=\log_3(x-2)+3$을 x에 관하여 풀면

$y-3=\log_3(x-2)$, $x-2=3^{y-3} \qquad \therefore x=3^{y-3}+2$

여기서 x와 y를 서로 바꾸어 대입하면 구하는 역함수는

$y=3^{x-3}+2$이므로 $a=-3$, $b=2$

$\therefore a+b=(-3)+2=-1$

107 정답 4

함수 $y=\log_a x+k$와 그 역함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$와 $y=\log_a x+k$의 그래프의 교점과 같으므로 두 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$, $(3,\ 3)$이다.

$1=\log_a 1+k$에서 $k=1$

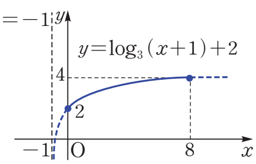
또, $3=\log_a 3+1$에서 $2=\log_a 3$이므로

$a^2=3$

$\therefore\ a^2+k^2=3+1=4$

108 정답 (1) 최댓값 : 4, 최솟값 : 2 (2) 최댓값 : 3, 최솟값 : 0

(1) 함수 $y=\log_3(x+1)+2$는 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.



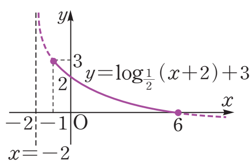
따라서 $0\le x\le 8$에서 함수 $y=\log_3(x+1)+2$는

$x=0$에서 최솟값 $\log_3 1+2=2$,

$x=8$에서 최댓값 $\log_3 9+2=4$

를 가진다.

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+3$은 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



따라서 $-1\le x\le 6$에서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+3$은

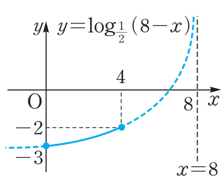
$x=-1$일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}(-1+2)+3=3$,

$x=6$일 때 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}}(6+2)+3=0$

을 가진다.

109 정답 최댓값 : -2, 최솟값 : -3

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(8-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 8만큼 평행이동한 그래프이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(8-x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $0\le x\le 4$에서

$x=0$일 때 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}}(8-0)=-3$,

$x=4$일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}(8-4)=-2$

를 가진다.

110 정답 (1) 최솟값 : 1 (2) 최댓값 : -2

(1) $f(x)=x^2-6x+12$라고 하면 $f(x)=(x-3)^2+3\ge 3$

이때, 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최소일 때, $\log_3 f(x)$의 값도 최소이다.

따라서 $f(x)=3$일 때, 최솟값은 $\log_3 3=1$이다.

(2) $f(x)=x^2+4x+13$이라고 하면 $f(x)=(x+2)^2+9\ge 9$

이때, 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$가 최소일 때, $\log_{\frac{1}{3}} f(x)$의 값은 최대이다.

따라서 $f(x)=9$일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$이다.

111 정답 최댓값 : 7, 최솟값 : 3

$\log_{\frac{1}{2}} x=-\log_2 x$이므로

$y=-(\log_{\frac{1}{2}} x)^2-\log_{\frac{1}{2}} x^4+3$

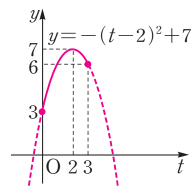
$=-(-\log_2 x)^2-(-\log_2 x^4)+3$

$=-(\log_2 x)^2+4\log_2 x+3$

여기서 $\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 8$에서 $0\le t\le 3$

$\therefore\ y=-t^2+4t+3=-(t-2)^2+7$

$0\le t\le 3$에서 함수 $y=-(t-2)^2+7$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=2$일 때 최댓값 7, $t=0$일 때 최솟값 3을 가진다.

연습문제 I

pp.72~74

112 정답 ④

$f(3)=2$에서 $\log_a 3=2$, $a^2=3$

이때, $a>0$이므로 $a=\sqrt{3}$

$\therefore\ f(\sqrt{3})=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}=1$

113 정답 2

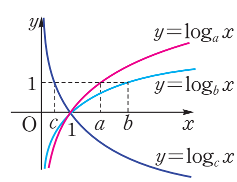
$b=\log_2 a$

$c=\log_2 4a=\log_2 4+\log_2 a=2+b$

$\therefore\ c-b=(2+b)-b=2$

114 정답 $c<a<b$

세 로그함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$에 대하여 직선 $y=1$과의 교점의 x좌표가 각각 a, b, c이다.



오른쪽 그림에서 $c<a<b$

개념 보충

제1사분면에서

① $y=\log_a x(a>1)$의 그래프는 a의 값이 커질수록 x축에 가까워진다.

② $y=\log_a x(0<a<1)$의 그래프는 a의 값이 작아질수록 y축에 가까워진다.

115 정답 6

함수 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 일정한 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

이때, 함수 $y=\log_a(x-2)+3$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 a의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 3)$을 지난다.

$$(1,\ 0)\xrightarrow[y\text{축의 방향으로 3만큼}]{x\text{축의 방향으로 2만큼}}(3,\ 3)$$

따라서 $p=3,\ q=3$이므로

$p+q=6$

116 정답 (11, 3)

점 B의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 점 A의 좌표는

$(a,\ 3)$

이때, 점 A는 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이므로

$3=\log_2 a \qquad \therefore a=8$

따라서 점 A의 좌표는 $(8,\ 3)$이고, $\overline{\mathrm{AD}}=3$이므로 점 D의 좌표는 $(11,\ 3)$이다.

117 정답 $\frac{1}{4}$

점 B의 x좌표를 a라 하면 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(a,\ \log_3 a)$

$\overline{\mathrm{BC}}=2$이므로 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(a+2,\ \log_3 a)$

또, $\overline{\mathrm{CD}}=2$이므로 점 D의 좌표는

$\mathrm{D}(a+2,\ 2+\log_3 a)$

이때, 점 D는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점이므로

$\log_3(a+2)=2+\log_3 a$

$\log_3(a+2)=\log_3 9a$

따라서 $a+2=9a$이므로

$a=\frac{1}{4}$

118 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$\log_a b=0.5,\ \log_a f=2.5$이므로

$\log_a bf=\log_a b+\log_a f=3 \qquad \therefore bf=a^3$

ㄱ. $\log_a ce=\log_a c+\log_a e=1+2=3$

$\therefore ce=a^3$

ㄴ. $\log_a d^2=2\log_a d=2\times1.5=3$

$\therefore d^2=a^3$

ㄷ. $\log_a ae=\log_a a+\log_a e=1+2=3$

$\therefore ae=a^3$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 bf의 값과 같다.

119 정답 $A<C<B$

주어진 수의 밑을 모두 2로 바꾸어 정리하면

$A=2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9,$

$\leftarrow \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_{2^{-1}}3^{-1}=\log_2 3$

$B=2+\log_2 3=\log_2 4+\log_2 3=\log_2 12,$

$C=1+\log_4 25=1+\log_2 5=\log_2 2+\log_2 5=\log_2 10$

$\leftarrow \log_4 25=\log_{2^2}5^2=\log_2 5$

함수 $y=\log_2 x$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $9<10<12$이므로

$\log_2 9<\log_2 10<\log_2 12$

$\therefore A<C<B$

120 정답 1

점근선의 방정식이 $x=2$이므로

$a=2$

$y=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)+b$의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$\log_{\frac{1}{2}}2+b=-2,\ -1+b=-2 \qquad \therefore b=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

121 정답 64

$y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y=\log_2(x+2)+3$

이것을 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\log_2(x+2)+3$

즉, $y=-\log_2(x+2)-3=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-3$

$=\log_{\frac{1}{2}}8(x+2)=\log_{\frac{1}{2}}(8x+16) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

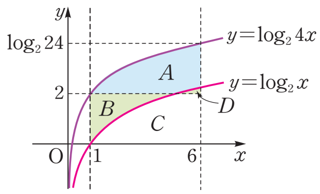
㉠의 식이 $y=\log_a(bx+c)$와 같아야 하므로

$a=\frac{1}{2},\ b=8,\ c=16$

$\therefore abc=\frac{1}{2}\times8\times16=64$

122 정답 10

$y=\log_2 4x=\log_2 x+2$이므로 $y=\log_2 4x$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

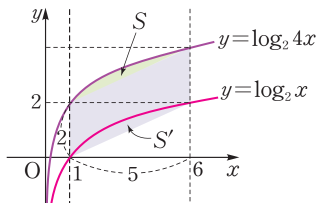


따라서 위의 그림에서 $A+D=C+D$이므로 $A=C$

$\therefore A+B=B+C=5\times 2=10$

다른 풀이

그림과 같이 두 도형 S와 S'가 합동이므로 S를 S'으로 이동하면 구하는 도형의 넓이는 평행사변형의 넓이와 같다.



$\therefore$ (구하는 도형의 넓이)$=$(평행사변형의 넓이)

$=2\times 5=10$

123 정답 3

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수이므로

$(f\circ g)(9)=9$

$(g\circ h)(9)=g(h(9))=g(9^3)=\log_3 9^3$

$=6\log_3 3=6$

$\therefore (f\circ g)(9)-(g\circ h)(9)=9-6=3$

124 정답 2

함수 $y=\log_3(x-6)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\log_3(x-6)$, $y=-\log_3(x-6)$

$\therefore y=\log_{\frac{1}{3}}(x-6)$ …… ㉠

함수 $y=a^x+b$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x=a^y+b$, $x-b=a^y$

$\therefore y=\log_a(x-b)$ …… ㉡

㉠, ㉡의 식이 같아야 하므로 $a=\frac{1}{3}$, $b=6$

$\therefore ab=\frac{1}{3}\times 6=2$

125 정답 (1) 2 (2) 4

(1) $f(x)=-2x^2-4x+7$로 놓으면

$f(x)=-2x^2-4x+7=-2(x+1)^2+9\le 9$

이때, 함수 $y=\log_3 f(x)$의 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 $y=\log_3 f(x)$도 최대이다.

따라서 $f(x)=9$일 때 최댓값 $\log_3 9=2$를 가진다.

(2) 진수 조건에서 $x-1>0$, $9-x>0$이므로

$1<x<9$

$y=\log_2(x-1)+\log_2(9-x)$

$=\log_2(x-1)(9-x)$

여기서 $f(x)=(x-1)(9-x)$로 놓으면 $1<x<9$에서

$0<f(x)\le 16$

이때, 함수 $y=\log_2 f(x)$의 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 $y=\log_2 f(x)$도 최대이다.

따라서 $f(x)=16$일 때 최댓값 $\log_2 16=4$를 가진다.

126 정답 (1) 최댓값 : 3, 최솟값 : -1 (2) 최댓값 : 4, 최솟값 : -5

(1) $y=(\log_3 x)^2-\log_3\frac{x^4}{27}$

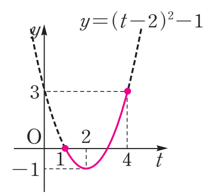
$=(\log_3 x)^2-(\log_3 x^4-\log_3 27)$

$=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $3\le x\le 81$에서 $1\le t\le 4$이므로

$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

$1\le t\le 4$에서 함수 $y=(t-2)^2-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=4$에서 최댓값 $2^2-1=3$,

$t=2$에서 최솟값 -1

을 가진다.

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 8x=-\log_2 8x$, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{x}=-\log_2\frac{2}{x}$이므로

$y=(\log_{\frac{1}{2}} 8x)\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{x}\right)=(\log_2 8x)\left(\log_2\frac{2}{x}\right)$

$=(\log_2 8+\log_2 x)(\log_2 2-\log_2 x)$

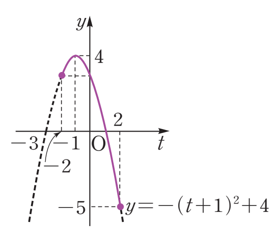
$=(3+\log_2 x)(1-\log_2 x)$

여기서 $\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{4}\le x\le 4$에서 $-2\le t\le 2$

$y=(3+\log_2 x)(1-\log_2 x)$에서

$y=(t+3)(1-t)=-(t+1)^2+4$

$-2\le t\le 2$에서 함수 $y=-(t+1)^2+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=-1$에서 최댓값 4

$t=2$에서 최솟값

$-3^2+4=-5$

를 가진다.

연습문제 II

p.75

127 정답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}=\log_{2^{-1}}x^{-1}=\frac{-1}{-1}\log_2 x=\log_2 x$이므로 일치한다.

ㄴ. 함수 $y=\log_2 x$의 진수 조건 $x>0$에서 정의역은

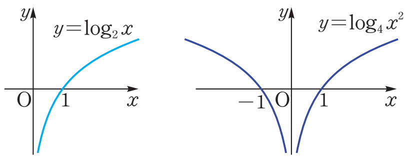
$\{x\,|\,x>0\}$

함수 $y=\log_4 x^2$의 진수 조건 $x^2>0$에서 정의역은

$\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$

이므로 그래프는 같지 않다.

즉, $y=\log_4 x^2=\frac{2}{2}\log_2|x|=\log_2|x|$이므로 두 함수의 그래프는 다음과 같다.



ㄷ. $y=\log_8 x^3=\log_{2^3}x^3=\frac{3}{3}\log_2 x=\log_2 x$이므로 일치한다.

따라서 그래프가 일치하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

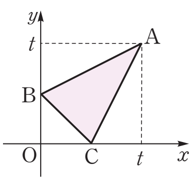
128 정답 (1) 2 (2) $f(x)=2^{x-1}-1$

(1) $y=f(x)$의 그래프가 점 C$(1,\ 0)$을 지나므로

$y=\log_2(x+a)+b$의 그래프는 점 B$(0,\ 1)$을 지나야 한다.

$\therefore\ 1=\log_2(0+a)+b$ $\cdots\cdots$ ㉠

$y=\log_2(x+a)+b$의 그래프와 $y=f(x)$의 그래프의 교점은 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 점 A의 좌표를 $(t,\ t)$라고 하면 그림에서



△ABC의 넓이는 한 변의 길이가 t인 정사각형의 넓이에서 △ABC를 둘러싼 삼각형의 넓이를 빼자.

$$\triangle ABC=t^2-2\cdot\frac{1}{2}t(t-1)-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=t-\frac{1}{2}$$

넓이가 $\frac{5}{2}$이므로 $t-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$에서 $t=3$

따라서 점 A의 좌표는 $(3,\ 3)$이므로

$3=\log_2(3+a)+b$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=1$

$\therefore\ a+b=2$

(2) $y=\log_2(x+1)+1$을 x에 관하여 풀면

$y-1=\log_2(x+1),\ x+1=2^{y-1}$

$\therefore\ x=2^{y-1}-1$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^{x-1}-1$

$\therefore\ f(x)=2^{x-1}-1$

129 정답 (1) 4 (2) 4

(1) $a>0,\ b>0$이므로

$a+b\geq2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

$200\geq2\sqrt{ab}$에서 $ab\leq10^4$이므로

$\log a+\log b=\log ab\leq\log10^4=4$

따라서 구하는 최댓값은 4이다.

(2) $xy=16$의 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_2 xy=\log_2 16$

$\therefore\ \log_2 x+\log_2 y=4$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때, $x\geq1,\ y\geq1$에서 $\log_2 x>0,\ \log_2 y>0$이므로

$\log_2 x+\log_2 y\geq2\sqrt{\log_2 x\cdot\log_2 y}$

$4\geq2\sqrt{\log_2 x\cdot\log_2 y}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$\therefore\ \log_2 x\cdot\log_2 y\leq4$

따라서 구하는 최댓값은 4이다.

130 정답 최댓값 : 48, 최솟값 : 9

$x^{\log 2}=2^{\log x}$이고,

$2^{\log 10x}=2^{\log 10+\log x}=2\cdot2^{\log x}$이므로

$f(x)=(2^{\log x})^2+4\cdot2\cdot2^{\log x}$

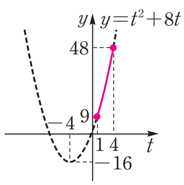
$=(2^{\log x})^2+8\cdot2^{\log x}$

또, $1\leq x\leq100$이므로 $0\leq\log x\leq2$에서 $1\leq2^{\log x}\leq4$

$2^{\log x}=t$로 놓으면 $1\leq t\leq4$

$\therefore\ f(t)=t^2+8t=(t^2+8t+16)-16$

$=(t+4)^2-16$



따라서 오른쪽 그래프에서 $t=4$일 때 최댓값은 48이고, $t=1$일 때 최솟값은 9이다.

131 정답 $C<A<B$ 서술형

$0<a<b<1$이므로 함수 $y=\log_a x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

즉, $\log_a a>\log_a b>\log_a 1$이므로

$0<\log_a b<1$ $\cdots$ ①

또, 함수 $y=\log_b x$도 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

즉, $\log_b a>\log_b b>\log_b 1$이므로

$\log_b a>1$ $\cdots$ ②

이때, $\log_b a>1$이므로 $1-\log_b a<0$

따라서 $1-\log_b a<\log_a b<\log_b a$이므로

$C<A<B$ $\cdots$ ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$0<\log_a b<1$임을 보이기	40%
②	$\log_b a>1$임을 보이기	40%
③	$A,\ B,\ C$의 대소를 비교하기	20%

5. 지수함수와 로그함수의 활용

유형 pp.80~89

001
정답 (1) $x=-4$ 또는 $x=2$

(2) $x=\dfrac{\log 2+2\log 3}{2\log 2-\log 3}$

(3) $x=2$

(1) 주어진 방정식은 $3^{x^2}=(3^{-2})^{x-4}$, 즉 $3^{x^2}=3^{-2x+8}$

양변의 지수를 비교하면 $x^2=-2x+8$

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

(2) $2^{2x-1}=3^{x+2}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(2x-1)\log 2=(x+2)\log 3$

$(2\log 2-\log 3)x=\log 2+2\log 3$

$\therefore x=\dfrac{\log 2+2\log 3}{2\log 2-\log 3}$

(3) 주어진 방정식을 변형하면 $2^{2x}+2\cdot 2^x-24=0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2+2t-24=0$, $(t+6)(t-4)=0$

$\therefore t=-6$ 또는 $t=4$

그런데 $t>0$이므로 $t=4$

따라서 $2^x=4$에서 $2^x=2^2$ $\quad\therefore x=2$

002
정답 (1) $x\geq 2$ (2) $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{4}$ (3) $x\geq 0$

(1) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^x=\left\{\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\right\}^x=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x}$이므로 주어진 부등식은

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+2}\geq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x}$

밑 $\dfrac{1}{5}$은 1보다 작으므로 $x+2\leq 2x$

$\therefore x\geq 2$

(2) 주어진 부등식을 변형하면 $3^{-x}<3^{\frac{1}{2}}<3^{-2x+2}$

(i) $3^{-x}<3^{\frac{1}{2}}$에서 $-x<\dfrac{1}{2}$, 즉 $x>-\dfrac{1}{2}$

(ii) $3^{\frac{1}{2}}<3^{-2x+2}$에서 $\dfrac{1}{2}<-2x+2$, 즉 $x<\dfrac{3}{4}$

(i), (ii)에서 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{4}$

(3) 주어진 부등식을 변형하면

$2\cdot(2^x)^2+2\cdot 2^x-4\geq 0$

$2^x=X$ $(X>0)$로 놓으면 $2X^2+2X-4\geq 0$

$X^2+X-2\geq 0$, $(X+2)(X-1)\geq 0$

$\therefore X\leq -2$ 또는 $X\geq 1$

그런데 $X>0$이므로 $X\geq 1$

따라서 $2^x\geq 1$에서 $x\geq 0$

003
정답 (1) 7 (2) 4

(1) $16^x-4^{x+2}+49=0$에서 $(4^x)^2-16\cdot 4^x+49=0$

$4^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-16t+49=0$

이 방정식의 근은 4^α, 4^β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$4^\alpha\cdot 4^\beta=49$, $2^{2(\alpha+\beta)}=7^2$

$\therefore 2^{\alpha+\beta}=7$ ($\because 2^{\alpha+\beta}>0$)

(2) $4^x-2^{x+2}+k\geq 0$에서 $(2^x)^2-4\cdot 2^x+k\geq 0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $t^2-4t+k\geq 0$

$f(t)=t^2-4t+k$로 놓으면

$f(t)=(t-2)^2+k-4$

이므로 이차함수 $f(t)$는 $t=2$에서 최소이다.

그러므로 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 $f(t)\geq 0$이 성립하려면 $f(2)=k-4\geq 0$ $\quad\therefore k\geq 4$

따라서 k의 최솟값은 4이다.

004
정답 28 °C

보관함의 온도가 10 °C이므로 $f(t)=10+(A-10)p^{-kt}$

$f(5)=10+(A-10)p^{-5k}=16$이므로

$(A-10)p^{-5k}=6$ ······ ㉠

$f(10)=10+(A-10)p^{-10k}=12$이므로

$(A-10)p^{-10k}=2$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $p^{-5k}=\dfrac{1}{3}$

$p^{-5k}=\dfrac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$(A-10)\times\dfrac{1}{3}=6$ $\quad\therefore A=28$

따라서 보관함에 넣기 전 물체의 온도는 28°C이다.

005
정답 (1) $x=3$ (2) $x=2$ (3) $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=64$

(1) 밑은 1이 아닌 양수이므로 $x+2>0$, $x+2\neq 1$에서

$x>-2$, $x\neq -1$

$\therefore -2<x<-1$ 또는 $x>-1$ ······ ㉠

로그의 정의에 의하여 $(x+2)^2=25$

$x^2+4x-21=0$, $(x+7)(x-3)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $x=3$

(2) 진수 조건에 의하여 $x>0$, $x+2>0$

$\therefore x>0$ ······ ㉠

로그의 성질을 이용하여 주어진 방정식을 변형하면

$\log_2 x(x+2)=\log_2 8$

즉, $x(x+2)=8$에서 $x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

㉠에서 $x>0$이므로 $x=2$

(3) 밑과 진수의 조건에 의하여 $x>0$, $x\neq1$ …… ㉠

$\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}$이므로 $\log_2 x=t$로 놓으면

$t=\dfrac{6}{t}+5$, $t^2-5t-6=0$

$(t+1)(t-6)=0$

$\therefore$ $t=-1$ 또는 $t=6$

$\log_2 x=-1$에서 $x=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

$\log_2 x=6$에서 $x=2^6=64$

$x=\dfrac{1}{2}$, $x=64$는 모두 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

006 정답 (1) $x>\dfrac{1}{2}$ (2) $1<x<2$ (3) $\dfrac{1}{1000}<x<10$

(1) 진수의 조건에 의하여 $2x-1>0$, $3x+1>0$

$\therefore$ $x>\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

밑 $\dfrac{1}{2}$은 1보다 작으므로

$2x-1\leq3x+1$ $\therefore$ $x\geq-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$x>\dfrac{1}{2}$

(2) 진수의 조건에 의하여 $x>0$, $x-1>0$

$\therefore$ $x>1$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$\log_2 x(x-1)<\log_2 2$

밑 2는 1보다 크므로

$x(x-1)<2$

$x^2-x-2<0$

$(x-2)(x+1)<0$

$\therefore$ $-1<x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$1<x<2$

(3) 진수의 조건에 의하여 $x>0$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$(\log x)^2+2\log x-3<0$

$\log x=X$로 놓으면

$X^2+2X-3<0$

$(X+3)(X-1)<0$

$\therefore -3<X<1$

즉, $\log 10^{-3}<\log x<\log 10$이고, 밑 10은 1보다 크므로

$\dfrac{1}{1000}<x<10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$\dfrac{1}{1000}<x<10$

007 정답 (1) 2 (2) $k>\dfrac{9}{4}$

(1) 주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta=9$

$\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-kt-6=0$

이 방정식의 해는 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=k$,

$\log_3\alpha\beta=k$, $\log_3 9=k$

$\therefore$ $k=2$

(2) 부등식 $(\log x)^2+3\log x+k>0$에서 $\log x=t$로 놓으면

$t^2+3t+k>0$

모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로

이차방정식 $t^2+3t+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4k<0$

$\therefore$ $k>\dfrac{9}{4}$

008 정답 (1) 1000 (2) 35년 후

(1) 리히터 규모가 6인 지진의 에너지를 y라고 하면

$\log y=11.8+1.5\times6=20.8$

$\therefore$ $y=10^{20.8}$

리히터 규모가 8인 지진의 에너지를 x라고 하면

$\log x=11.8+1.5\times8=23.8$

$\therefore$ $x=10^{23.8}$

리히터 규모가 8인 지진의 에너지는 $10^{23.8}$이고 규모가 6인 지진의 에너지는 $10^{20.8}$이므로

$\dfrac{10^{23.8}}{10^{20.8}}=10^3=1000$

따라서 리히터 규모가 8인 지진의 에너지는 규모가 6인 지진의 에너지의 1000배이다.

(2) 현재 제품의 가격을 a원, x년 후의 제품의 가격을 y원이라고 하면

$y=a(1+0.02)^x$

$a(1+0.02)^x\geq2a$에서 $1.02^x\geq2$

$\log 1.02^x\geq\log 2$, $x\log 1.02\geq\log 2$

$x\geq\dfrac{\log 2}{\log 1.02}$, $x\geq\dfrac{0.3010}{0.0086}$

$\therefore$ $x\geq35$

따라서 35년 후 처음으로 현재 가격의 2배 이상이 된다.

확인문제 pp.80~89

132 정답 (1) $x=-1$ 또는 $x=2$ (2) $x=\log\frac{32}{25}$

(1) $\frac{10^{x^2+1}}{10^x}=1000$에서

$10^{x^2+1}=10^x\cdot10^3$, 즉 $10^{x^2+1}=10^{x+3}$

지수를 비교하면 $x^2+1=x+3$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(2) $2^{5-x}=5^{2+x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(5-x)\log 2=(2+x)\log 5$

$(\log 5+\log 2)x=5\log 2-2\log 5$

$\therefore x=5\log 2-2\log 5=\log\frac{32}{25}$

다른 풀이

(2) $2^{5-x}=5^{2+x}$의 양변에 2^x을 곱하면

$2^5=5^2\cdot5^x\cdot2^x$, $32=25\cdot10^x$

$10^x=\frac{32}{25}$ $\qquad\therefore x=\log\frac{32}{25}$

133 정답 (1) $x=1$ (2) $x=-2$ 또는 $x=2$

(1) 주어진 방정식을 변형하면

$2\cdot(2^x)^2-2^x-6=0$

$2^x=X(X>0)$로 놓으면 $2X^2-X-6=0$이므로

$(2X+3)(X-2)=0$

$\therefore X=-\frac{3}{2}$ 또는 $X=2$

그런데 $X>0$이므로 $X=2$

따라서 $2^x=2$에서 $x=1$

(2) 주어진 방정식을 변형하면

$\frac{1}{9}\cdot3^x+9\cdot3^x=(3^x)^2+1$

$9\cdot(3^x)^2-82\cdot3^x+9=0$

$3^x=X(X>0)$로 놓으면

$9X^2-82X+9=0$, $(9X-1)(X-9)=0$

$\therefore X=\frac{1}{9}$ 또는 $X=9$

따라서 $3^x=\frac{1}{9}$에서 $x=-2$, $3^x=9$에서 $x=2$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

134 정답 (1) $x<4$ (2) $x<-4$

(1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x=(3^{-\frac{1}{2}})^x=3^{-\frac{1}{2}x}$, $9^{3-x}=(3^2)^{3-x}=3^{6-2x}$이므로

주어진 부등식은 $3^{-\frac{1}{2}x}<3^{6-2x}$

밑 3은 1보다 크므로 $-\frac{1}{2}x<6-2x$, $\frac{3}{2}x<6$

$\therefore x<4$

(2) (i) $2^x<8$에서 $2^x<2^3$

밑 2는 1보다 크므로 $x<3$

(ii) $8<\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$에서 $2^3<2^{-x-1}$

밑 2는 1보다 크므로 $3<-x-1$, 즉 $x<-4$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x<-4$

135 정답 (1) $1<x<4$ (2) $x<1$

(1) 주어진 부등식을 변형하면

$(2^x)^2-18\cdot2^x+32<0$

$2^x=X(X>0)$로 놓으면 $X^2-18X+32<0$

$(X-2)(X-16)<0$ $\qquad\therefore 2<X<16$

따라서 $2^1<2^x<2^4$에서 밑 2는 1보다 크므로

$1<x<4$

(2) 주어진 부등식을 변형하면

$3^x-3\cdot3^{-x}-2<0$

$3^x>0$이므로 양변에 3^x을 곱하여 정리하면

$(3^x)^2-2\cdot3^x-3<0$

$3^x=X(X>0)$로 놓으면 $X^2-2X-3<0$

$(X-3)(X+1)<0$

그런데 $X>0$에서 $X+1>0$이므로 양변을 $X+1$로 나누면

$X<3$

따라서 $3^x<3$에서 밑 3은 1보다 크므로

$x<1$

136 정답 $-\frac{1}{5}$

$5^{2x}-4\cdot5^x-k=0$에서 $(5^x)^2-4\cdot5^x-k=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-4t-k=0$

이 방정식의 근은 5^α, 5^β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$5^\alpha\cdot5^\beta=-k$, $5^{\alpha+\beta}=-k$

주어진 조건에서 $\alpha+\beta=-1$이므로

$k=-5^{-1}=-\frac{1}{5}$

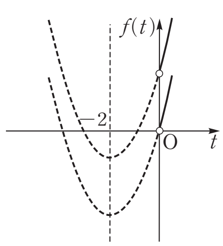
137 정답 $k>0$

$9^x+4\cdot3^x+k\geq0$에서 $(3^x)^2+4\cdot3^x+k\geq0$

$3^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2+4t+k\geq0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f(t)=t^2+4t+k$로 놓으면 부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면



$f(t)=(t+2)^2+k-4$

에서 축의 방정식이 $t=-2$이므로

$f(0)>0$ $\qquad\therefore k>0$

138 정답 28 ℃

$t=2$일 때 $y=63$이므로

$63=a\cdot b^{-2}$ …… ㉠

$t=4$일 때 $y=42$이므로

$42=a\cdot b^{-4}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $b^{-2}=\frac{2}{3}$이므로 ㉠에 대입하면 $a=\frac{189}{2}$

따라서 6분 후 물의 온도는

$y=a\cdot b^{-6}=\frac{189}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=28(℃)$

139 정답 4년 후

올해 종이 생산에 사용된 폐지 1톤 중에서 재활용되어 x년 후에도 계속 사용되는 종이의 양을 y톤이라고 하면 매년 80 %가 재활용되므로

$y=1\times\left(\frac{80}{100}\right)^x=\left(\frac{4}{5}\right)^x$

재활용되어 계속 사용되는 종이의 양이 x년 후에 처음으로 $\frac{256}{625}$톤 이하가 된다고 하면

$\left(\frac{4}{5}\right)^x\le\frac{256}{625}$

$\frac{256}{625}=\left(\frac{4}{5}\right)^4$이고, $0<\frac{4}{5}<1$이므로

$\left(\frac{4}{5}\right)^x\le\left(\frac{4}{5}\right)^4$ $\therefore x\ge4$

따라서 처음으로 $\frac{256}{625}$톤 이하가 되는 것은 4년 후이다.

140 정답 (1) $x=2$ (2) $x=4$

(1) 진수의 조건에 의하여 $x+3>0$, $2x+1>0$

$\therefore x>-\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)=-\log_2(2x+1)$이므로 주어진 방정식은

$\log_2(x+3)-\log_2(2x+1)=0$

$\log_2(x+3)=\log_2(2x+1)$

진수를 비교하면 $x+3=2x+1$ $\therefore x=2$

$x=2$는 ㉠을 만족하므로 구하는 해이다.

(2) 진수 조건에 의하여 $x-2>0$, $x+4>0$

$\therefore x>2$ …… ㉠

주어진 방정식에서

$\log_2(x-2)(x+4)=\log_2 16$

$(x-2)(x+4)=16$, $x^2+2x-24=0$

$(x-4)(x+6)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-6$

그런데 ㉠에서 $x>2$이므로 구하는 해는 $x=4$이다.

141 정답 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=8$

진수의 조건에 의하여 $x>0$ …… ㉠

주어진 방정식을 변형하면

$\log_2 x\cdot(\log_2 x-\log_2 4)=3$

$\log_2 x=X$로 놓으면 $X(X-2)=3$

$X^2-2X-3=0$, $(X+1)(X-3)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=3$

$\log_2 x=-1$에서 $x=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$\log_2 x=3$에서 $x=2^3=8$

$x=\frac{1}{2}$, $x=8$은 모두 ㉠을 만족하므로 구하는 해이다.

142 정답 (1) $-\frac{1}{4}<x<2$ (2) $-\frac{1}{3}<x\le4$

(1) 진수의 조건에 의하여 $4x+1>0$

$\therefore x>-\frac{1}{4}$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$\log_3(4x+1)<\log_3 9$

밑 3은 1보다 크므로

$4x+1<9$ $\therefore x<2$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$-\frac{1}{4}<x<2$

(2) 진수의 조건에 의하여 $3x+1>0$, $2x+5>0$

$\therefore x>-\frac{1}{3}$ …… ㉠

$\log_5(3x+1)\le\log_5(2x+5)$에서 밑 5는 1보다 크므로

$3x+1\le2x+5$ $\therefore x\le4$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$-\frac{1}{3}<x\le4$

143 정답 8

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x\le4$

$\log_2 x=X$로 놓으면 $X^2-3X-4\le0$

$(X+1)(X-4)\le0$

$\therefore -1\le X\le4$

즉, $\log_2 2^{-1}\le\log_2 x\le\log_2 2^4$이고, 밑 2는 1보다 크므로

$\frac{1}{2}\le x\le16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$\frac{1}{2}\le x\le16$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=16$이므로 $\alpha\beta=8$

144 정답 25

주어진 방정식을 변형하면

$$(\log_5 x)^2-2\log_5 x-k=0$$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-k=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 ㉠의 두 근은 $\log_5 \alpha$, $\log_5 \beta$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_5 \alpha+\log_5 \beta=2, \text{ 즉 } \log_5 \alpha\beta=2$$

$$\therefore\ \alpha\beta=25$$

145 정답 $1<a<10^4$

이차방정식 $x^2-x\log a+\log a=0$이 실근을 갖지 않으려면 판별식이 0보다 작아야 하므로

$$D=(\log a)^2-4\log a<0$$

$$(\log a-4)\log a<0$$

$$\therefore\ 0<\log a<4$$

이때, 밑이 1보다 크므로 구하는 a의 값의 범위는

$$1<a<10^4$$

146 정답 10배

일상 대화의 소리의 크기를 $x(\mathrm{W/m^2})$라 하면

$$60=10\log\frac{x}{10^{-12}}=10(\log x-\log 10^{-12})$$

$$6=\log x+12$$

$$\log x=-6 \qquad \therefore\ x=10^{-6} \quad \cdots\cdots ㉠$$

확성기의 소리의 크기를 $y(\mathrm{W/m^2})$라 하면

$$70=10\log\frac{y}{10^{-12}}=10(\log y-\log 10^{-12})$$

$$7=\log x+12$$

$$\log y=-5 \qquad \therefore\ y=10^{-5} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $y=10x$

따라서 확성기의 소리의 크기는 일상 대화의 소리의 크기의 10배이다.

147 정답 400분

한 개의 대장균이 분열하여 $n\times20$분 후의 대장균의 개수는 2^n개이므로

$$2^n\ge10^6$$

$$\log 2^n\ge\log 10^6,\ n\log 2\ge6$$

$$\therefore\ n\ge\frac{6}{\log 2}=\frac{6}{0.3}=20$$

따라서 $20\times20=400$분 후에 1백만 개 이상이 된다.

연습문제 I

pp.90~92

148 정답 (1) $x=2$ (2) $x=9$

(1) $2^{x+1}\cdot3^x=72$에서 $2\cdot2^x\cdot3^x=72$

정리하면 $6^x=36$, $6^x=6^2$

$$\therefore\ x=2$$

(2) $4^{x+3}=(2^2)^{x+3}=2^{2x+6}$, $8^{x-1}=(2^3)^{x-1}=2^{3x-3}$이므로

$2^{2x+6}=2^{3x-3}$에서 $2x+6=3x-3$

$$\therefore\ x=9$$

149 정답 (1) $x=0$ 또는 $x=1$ (2) $x=3$

(1) 주어진 방정식을 변형하면

$$(3^x)^2-4\cdot3^x+3=0$$

$3^x=X(X>0)$로 놓으면

$$X^2-4X+3=0$$

$$(X-1)(X-3)=0$$

$$\therefore\ X=1 \text{ 또는 } X=3$$

따라서 $3^x=1$에서 $x=0$, $3^x=3$에서 $x=1$

(2) 주어진 방정식을 변형하면

$$(2^x)^2-6\cdot2^x-16=0$$

$2^x=X(X>0)$로 놓으면 $X^2-6X-16=0$

$$(X+2)(X-8)=0$$

$$\therefore\ X=-2 \text{ 또는 } X=8$$

그런데 $X>0$이므로 $X=8$이다.

따라서 $2^x=8$에서 $x=3$

150 정답 (1) $x\le\frac{5}{3}$ (2) $-1\le x\le2$

(1) 주어진 부등식의 양변을 지수의 밑이 $\frac{1}{2}$로 같도록 변형하면

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\le\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}^{x-1},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-4}$$

밑 $\frac{1}{2}$은 1보다 작으므로

$$x+1\ge4x-4,\ -3x\ge-5$$

$$\therefore\ x\le\frac{5}{3}$$

(2) 주어진 부등식의 양변을 지수의 밑이 2로 같도록 변형하면

$$2^{x^2+1}\le2^{x+3}$$

밑 2는 1보다 크므로

$$x^2+1\le x+3$$

$$x^2-x-2\le0,\ (x+1)(x-2)\le0$$

$$\therefore\ -1\le x\le2$$

151 정답 (1) $x\le1$ (2) $1\le x\le3$

(1) 주어진 부등식을 변형하면

$$3^{2x}+9\cdot3^x\le3\cdot3^x+27,\ (3^x)^2+6\cdot3^x-27\le0$$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$t^2+6t-27\le0$$

$$(t+9)(t-3)\le0$$

이때, $t>0$이므로 $t-3\le0$, $t\le3$, 즉 $3^x\le3$

$$\therefore\ x\le1$$

(2) $2^x+2^{4-x}\le10$에서 $2^x+16\cdot\frac{1}{2^x}\le10$

양변에 2^x을 곱하여 정리하면

$$(2^x)^2-10\cdot2^x+16\le0$$

$2^x=X\ (X>0)$로 놓으면

$$X^2-10X+16\le0$$

$$(X-2)(X-8)\le0 \qquad \therefore\ 2\le X\le8$$

따라서 $2\le2^x\le8$에서 $2\le2^x\le2^3$이므로

$$1\le x\le3$$

152 정답 (1) $0<x<3$ (2) $\frac{2}{3}<x\le1$

(1) (i) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-9}<\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}$에서 $\left(\frac{3}{5}\right)^{9}<\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}$

밑 $\frac{3}{5}$은 1보다 작으므로 $x^2<9$에서

$$(x+3)(x-3)<0$$

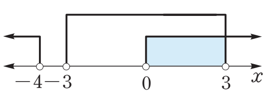
$$\therefore\ -3<x<3$$

(ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}<\left(\frac{25}{9}\right)^{2x}$에서 $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}<\left(\frac{3}{5}\right)^{-4x}$

밑 $\frac{3}{5}$은 1보다 작으므로 $x^2>-4x$

$$x(x+4)>0 \qquad \therefore\ x<-4 \text{ 또는 } x>0$$

(i), (ii)에서 $0<x<3$



(2) (i) $3^{3x}>\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-4}$에서 $3^{3x}>3^{-3x+4}$

밑 3은 1보다 크므로

$$3x>-3x+4,\ 6x>4$$

$$\therefore\ x>\frac{2}{3}$$

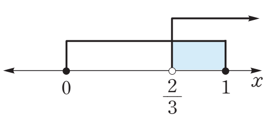
(ii) $4^x-3\cdot2^x+2\le0$에서 $2^x=X\ (X>0)$로 놓으면

$$X^2-3X+2\le0,\ (X-1)(X-2)\le0$$

$$\therefore\ 1\le X\le2$$

즉, $2^0\le2^x\le2^1$에서 $0\le x\le1$

(i), (ii)에서 $\frac{2}{3}<x\le1$



153 정답 (1) $x=8$ (2) $x=3$ 또는 $x=6$ (3) $x=2$

(1) 진수의 조건에 의하여 $x>0$, $\log_2 x>0$

$$\therefore\ x>1 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

주어진 식을 변형하면

$$\log_3(\log_2 x)=\log_3 3,\ \text{즉 } \log_2 x=3$$

$$\therefore\ x=2^3=8$$

$x=8$은 ㉠을 만족하므로 구하는 해이다.

(2) 진수의 조건에 의하여 $x>0$, $x-2>0$

$$\therefore\ x>2 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

주어진 방정식을 변형하면

$$\log_9 x^2=\log_9 9+\log_9(x-2)$$

$$\log_9 x^2=\log_9 9(x-2),\ x^2=9(x-2)$$

$$x^2-9x+18=0,\ (x-3)(x-6)=0$$

$$\therefore\ x=3 \text{ 또는 } x=6 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $x=3$ 또는 $x=6$

(3) 진수의 조건에 의하여 $x>0$, $x+3>0$, $x+8>0$

$$\therefore\ x>0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

주어진 방정식을 변형하면

$$\log x(x+3)=\log(x+8)$$

$$x(x+3)=x+8,\ (x+4)(x-2)=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

$$\therefore\ x=-4 \text{ 또는 } x=2$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $x=2$

154 정답 (1) $2\le x<7$ (2) $-1<x<5$

(1) 진수의 조건에 의하여 $x+3>0$, $7-x>0$

$$\therefore\ -3<x<7 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

밑이 1보다 작으므로 $x+3\ge7-x$에서

$$x\ge2 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$$2\le x<7$$

(2) 진수의 조건에 의하여 $x+3>0$, $7-x>0$

$$\therefore\ -3<x<7 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

주어진 부등식을 변형하면

$$\log_2(x+3)+\log_2(7-x)>4$$

$$\log_2(x+3)(7-x)>4$$

$$\log_2(x+3)(7-x)>\log_2 16$$

밑 2는 1보다 크므로

$$(x+3)(7-x)>16,\ x^2-4x-5<0$$

$$(x-5)(x+1)<0$$

$$\therefore\ -1<x<5 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$$-1<x<5$$

155 정답 (1) $10<x<100$ (2) $\frac{1}{2}\le x\le 1$

(1) 진수의 조건에 의하여 $x>0$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$(\log x)^2-3\log x+2<0$

$\log x=X$로 놓으면

$X^2-3X+2<0$

$(X-1)(X-2)<0$

$\therefore 1<X<2$

$1<\log x<2$에서 $10<x<100$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$10<x<100$

(2) 진수의 조건에 의하여 $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} x=-\log_2 x$이므로 주어진 부등식을 변형하면

$\log_2 x\cdot\log_2 4x^2\le 0$, $(2\log_2 x+2)\log_2 x\le 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t(2t+2)\le 0$이므로

$2t(t+1)\le 0$

$\therefore -1\le t\le 0$

$-1\le\log_2 x\le 0$에서 $\frac{1}{2}\le x\le 1$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$\frac{1}{2}\le x\le 1$

156 정답 (1) $0<x<\frac{1}{4}$

(2) $-\frac{1}{4}<x<0$ 또는 $0<x<\frac{1}{4}$

(3) $1<x<100$

(1) 진수의 조건에 의하여 $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} x>2$, 즉 $\log_{\frac{1}{2}} x>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$에서

밑이 1보다 작으므로 $x<\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$0<x<\frac{1}{4}$

(2) 진수의 조건에 의하여 $x^2>0$

$\therefore x\ne 0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} x^2>4$, 즉 $\log_{\frac{1}{2}} x^2>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4$에서

밑이 1보다 작으므로 $x^2<\frac{1}{16}$

$\therefore -\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$-\frac{1}{4}<x<0$ 또는 $0<x<\frac{1}{4}$

(3) 진수의 조건에 의하여 $x>0$ …… ㉠

$(\log x)^2<\log x^2$에서

$(\log x)^2-2\log x<0$

$\log x=X$로 놓으면 $X^2-2X<0$

$X(X-2)<0$

$\therefore 0<X<2$

$0<\log x<2$에서

$1<x<100$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$1<x<100$

157 정답 (1) $3\le x\le 9$ (2) $2\le x\le 8$

(1) $0\le\log_2(\log_3 x)\le 1$에서

진수의 조건에 의하여 $x>0$, $\log_3 x>0$

$\therefore x>1$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$\log_2 1\le\log_2(\log_3 x)\le\log_2 2$

밑 2는 1보다 크므로 $1\le\log_3 x\le 2$

즉, $\log_3 3\le\log_3 x\le\log_3 9$이고 밑 3은 1보다 크므로

$3\le x\le 9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$3\le x\le 9$

(2) $0\le\log_3(\log_2 x)\le 1$에서

진수의 조건에 의하여 $x>0$, $\log_2 x>0$

$\therefore x>1$ …… ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$\log_3 1\le\log_3(\log_2 x)\le\log_3 3$

밑 3은 1보다 크므로 $1\le\log_2 x\le 3$

즉, $\log_2 2\le\log_2 x\le\log_2 8$이고 밑 2는 1보다 크므로

$2\le x\le 8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$2\le x\le 8$

158 정답 -1

$2^{2x}-2^{x+1}=a$에서 $(2^x)^2-2\cdot 2^x-a=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2t-a=0$ …… ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식의 ㉠의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-a)>0$

$1+a>0$ $\therefore a>-1$

(ii) (두 근의 합)$=2>0$

(iii) (두 근의 곱)$=-a>0$ $\quad\therefore a<0$

이상에서 $-1<a<0$이므로 $m=-1$, $n=0$

$\therefore m+n=-1$

개념 보충

이차방정식의 실근의 부호

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D, 두 실근을 α, β라 하면

① 두 근이 모두 양 $\Leftrightarrow D\geq 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음 $\Leftrightarrow D\geq 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\Leftrightarrow \alpha\beta<0$

159 정답 16

주어진 방정식을 변형하면

$6\log_2 x-(1+\log_2 x)^2=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $6t-(1+t)^2=0$

$\therefore t^2-4t+1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때, 주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 ㉠의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=4$

$\log_2 \alpha\beta=4$

$\therefore \alpha\beta=2^4=16$

160 정답 $\frac{1}{2}<a<8$

진수의 조건에 의하여 $a>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

이차방정식 $x^2+2x\log_2 a+2\log_2 a+3=0$의 판별식 D는 $D<0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=(\log_2 a)^2-(2\log_2 a+3)<0$에서

$(\log_2 a)^2-2\log_2 a-3<0$

$\log_2 a=X$로 놓으면

$X^2-2X-3<0$

$(X+1)(X-3)<0$

$\therefore -1<X<3$

따라서 $\log_2 \frac{1}{2}<\log_2 a<\log_2 2^3$이고, 밑 2는 1보다 크므로

$\frac{1}{2}<a<8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$\frac{1}{2}<a<8$

161 정답 6

투자 금액이 640만 원일 때 t년 후의 이익금은

$f(t)=640\times\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{t}{2}}$이므로

$640\times\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{t}{2}}=1250$

$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{t}{2}}=\frac{125}{64}=\left(\frac{5}{4}\right)^3$

따라서 $\frac{t}{2}=3$이므로 $t=6$

162 정답 34 km

처음 신호의 세기를 a, 중계소까지의 거리를 n km라고 하면

$a(0.98)^n=\frac{1}{2}a$

$(0.98)^n=\frac{1}{2}$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 0.98=-\log 2$

$\therefore n=\frac{-\log 2}{\log(9.8\times 10^{-1})}=\frac{-\log 2}{\log 9.8-1}$

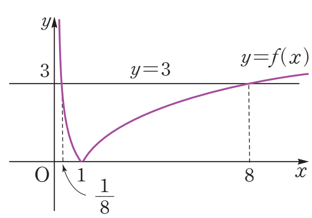
$=\frac{-0.3010}{0.9912-1}=34.2\times\times\times$

따라서 처음 신호를 보내는 곳에서부터 중계소까지의 광섬유의 길이는 약 34 km이다.

연습문제 Ⅱ

p.93

163 정답 1



(i) $-\log_2 x=3$일 때, $x=\frac{1}{8}$

(ii) $\log_2 x=3$일 때, $x=8$

따라서 구하는 값은 $8\times\frac{1}{8}=1$

164 정답 (1) $0\le x\le 1$ (2) $1<x<10$

(1) 부등식의 양변을 16^x으로 나누면

$$4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2x}-7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x}+3\le 0$$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x=X\,(X>0)$로 놓으면 $4X^2-7X+3\le 0$

$$(4X-3)(X-1)\le 0$$

$$\therefore\ \frac{3}{4}\le X\le 1$$

즉, $\frac{3}{4}\le\left(\frac{3}{4}\right)^x\le\left(\frac{3}{4}\right)^0$이고, 밑 $\frac{3}{4}$은 1보다 작으므로

$$0\le x\le 1$$

(2) 진수의 조건에 의하여 $x>0$ ⋯⋯ ㉠

$3^{\log x}\cdot x^{\log 3}-2(3^{\log x}+x^{\log 3})+3<0$에서

$x^{\log 3}=3^{\log x}$이므로 $3^{\log x}=X\,(X>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$$X^2-4X+3<0,\ (X-1)(X-3)<0$$

$$\therefore\ 1<X<3$$

$1<3^{\log x}<3$에서 밑 3은 1보다 크므로

$0<\log x<1$ $\therefore\ 1<x<10$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$$1<x<10$$

165 정답 6

$\log_y x+\log_x y=\frac{5}{2}$에서 $\frac{1}{\log_x y}+\log_x y=\frac{5}{2}$

$\log_x y=t$로 놓으면 $\frac{1}{t}+t=\frac{5}{2}$

$$2t^2-5t+2=0,\ (2t-1)(t-2)=0$$

$$\therefore\ t=\frac{1}{2}\ \text{또는}\ t=2$$

즉, $\log_x y=\frac{1}{2}$ 또는 $\log_x y=2$

(i) $y=x^{\frac{1}{2}}$일 때, $x\cdot x^{\frac{1}{2}}=8$, $x^{\frac{3}{2}}=8$

$$\therefore\ x=4,\ y=2$$

(ii) $y=x^2$일 때, $x\cdot x^2=8$, $x^3=8$

$$\therefore\ x=2,\ y=4$$

(i), (ii)에서 $x+y=6$

166 정답 (1) $t\ge 2$
(2) $2t^2-t-10=0$
(3) $x=-1$ 또는 $x=1$

(1) $2^x+2^{-x}=t$에서 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

$\therefore\ t\ge 2$ ⋯⋯ ㉠

(2) $4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2$
$=t^2-2$

이므로 주어진 방정식은 $2(t^2-2)-t-6=0$

$\therefore\ 2t^2-t-10=0$ ⋯⋯ ㉡

(3) ㉡에서 $(t+2)(2t-5)=0$ $\therefore\ t=-2$ 또는 $t=\frac{5}{2}$

그런데 ㉠에서 $t\ge 2$이므로 $t=\frac{5}{2}$

즉, $2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$에서 $2\cdot(2^x)^2-5\cdot 2^x+2=0$

$(2\cdot 2^x-1)(2^x-2)=0$ $\therefore\ 2^x=\frac{1}{2}$ 또는 $2^x=2$

따라서 $2^x=\frac{1}{2}$에서 $x=-1$, $2^x=2$에서 $x=1$이므로 구하는 해는

$$x=-1\ \text{또는}\ x=1$$

167 정답 $b<x<c$ 또는 $d<x<e$ 서술형

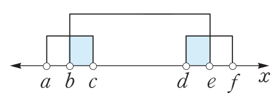
부등식 $\log_{\frac{1}{2}}f(x)>\log_{\frac{1}{2}}g(x)$에서

밑이 1보다 작으므로 $f(x)<g(x)$이고, 주어진 그래프에서 $f(x)<g(x)$를 만족하는 x의 값의 범위는

$b<x<e$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ①

진수 조건에 의하여 $f(x)>0$, $g(x)>0$을 모두 만족하는 x의 값의 범위는 그래프에 의하여

$a<x<c$ 또는 $d<x<f$ ⋯⋯ ㉡



⋯ ②

따라서 구하는 해는 ㉠, ㉡의 공통범위이므로

$b<x<c$ 또는 $d<x<e$ ⋯ ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	그래프를 이용하여 $f(x)$, $g(x)$에 관한 부등식의 해 구하기	40 %
②	로그의 진수 조건을 만족하는 x의 값의 범위 구하기	40 %
③	로그부등식의 해 구하기	20 %

Ⅱ. 삼각함수

6. 일반각과 호도법

유형 pp.100~105

001 정답 (1) ① $\mathbf{360^\circ \times n+150^\circ}$ **(n은 정수), 제2사분면**

② $\mathbf{360^\circ \times n+210^\circ}$ **(n은 정수), 제3사분면**

(2) **제1사분면 또는 제3사분면**

(1) ① $1230^\circ=360^\circ\times3+150^\circ$이므로 일반각은

$360^\circ\times n+150^\circ$ (n은 정수)

이고, $90^\circ<150^\circ<180^\circ$이므로 제2사분면의 각이다.

② $-1230^\circ=360^\circ\times(-4)+210^\circ$이므로 일반각은

$360^\circ\times n+210^\circ$ (n은 정수)

이고, $180^\circ<210^\circ<270^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

(2) 각 θ가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

각 변에 $\frac{1}{2}$을 곱하면

$180^\circ\times n+45^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\times n+90^\circ$

$n=0$일 때, $45^\circ<\frac{\theta}{2}<90^\circ$이므로 제1사분면의 각

$n=1$일 때, $225^\circ<\frac{\theta}{2}<270^\circ$이므로 제3사분면의 각

$n=2$일 때, $405^\circ<\frac{\theta}{2}<450^\circ$이므로 제1사분면의 각

$n=3$일 때, $585^\circ<\frac{\theta}{2}<630^\circ$이므로 제3사분면의 각

⋮

따라서 $\frac{\theta}{2}$가 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면 또는 제3사분면이다.

002 정답 (1) ① $\mathbf{2n\pi+\frac{2}{3}\pi}$ **(n은 정수), 제2사분면**

② $\mathbf{2n\pi+\frac{6}{5}\pi}$ **(n은 정수), 제3사분면**

(2) $\mathbf{2400^\circ,\ \frac{40}{3}\pi}$

(1) ① $\frac{20}{3}\pi=2\pi\times3+\frac{2}{3}\pi$이므로

일반각은 $2n\pi+\frac{2}{3}\pi$ (n은 정수)이고,

$\frac{\pi}{2}<\frac{2}{3}\pi<\pi$이므로 제2사분면의 각이다.

② $-\frac{24}{5}\pi=2\pi\times(-3)+\frac{6}{5}\pi$이므로

일반각은 $2n\pi+\frac{6}{5}\pi$ (n은 정수)이고,

$\pi<\frac{6}{5}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로 제3사분면의 각이다.

(2) 시계의 분침은 6바퀴 회전한 후 40분에 해당하는 각의 크기만큼 회전하였으므로 구하는 각의 크기는

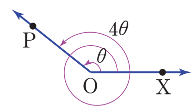
$360^\circ\times6+6^\circ\times40=2400^\circ$

이것을 호도법으로 나타내면 $2400\times\frac{\pi}{180}=\frac{40}{3}\pi$

003 정답 (1) **0 또는 $\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi$**

(2) **0 또는 $\frac{\pi}{2}$ 또는 π 또는 $\frac{3}{2}\pi$**

(1) 두 동경이 같은 위치에 있으므로 동경이 나타내는 한 각을 α라고 하면,



$\theta=2l\pi+\alpha$ (l은 정수),

$4\theta=2m\pi+\alpha$ (m은 정수)

로 나타낼 수 있다.

$\therefore 4\theta-\theta=2m\pi+\alpha-(2l\pi+\alpha)=2(m-l)\pi$

여기서 $m-l=n$이라 하면 $4\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

즉, $3\theta=2n\pi$이므로 $\theta=\frac{2n}{3}\pi$

그런데 $0\le\theta<2\pi$이므로 위의 식을 만족하는 n의 값은 0, 1, 2이다.

$\therefore \theta=0$ 또는 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

(2) 각 θ와 3θ가 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+3\theta=2n\pi$ (n은 정수)

즉, $4\theta=2n\pi$이므로 $\theta=\frac{n}{2}\pi$

그런데 $0\le\theta<2\pi$이므로 위의 식을 만족하는 n의 값은 0, 1, 2, 3이다.

$\therefore \theta=0$ 또는 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\pi$ 또는 $\theta=\frac{3}{2}\pi$

004 정답 (1) $\mathbf{\frac{\pi}{2}}$ (2) $\mathbf{5\pi}$

(1) 부채꼴의 호의 길이는 4θ이고, 이것은 밑면인 원의 둘레의 길이 2π와 같다.

$4\theta=2\pi$ $\qquad\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$

(2) 원뿔의 겉넓이는 전개도에서 부채꼴의 넓이와 원의 넓이의 합이다.

$\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{2}+\pi\times1^2=5\pi$

확인문제 pp.102~105

168 정답 (1) $\mathbf{360^\circ\times n+30^\circ}$ **(n은 정수), 제1사분면**

(2) $\mathbf{360^\circ\times n+280^\circ}$ **(n은 정수), 제4사분면**

(1) $1110^\circ=360^\circ\times3+30^\circ$이므로 일반각은

$360^\circ\times n+30^\circ$ (n은 정수)

이고, $0^\circ<30^\circ<90^\circ$이므로 제1사분면의 각이다.

(2) $-800^\circ=360^\circ\times(-3)+280^\circ$이므로 일반각은

$360^\circ\times n+280^\circ$ (n은 정수)

이고, $270^\circ<280^\circ<360^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.

169 정답 **제1사분면 또는 제2사분면 또는 제3사분면**

각 θ가 제1사분면의 각이므로

$$360^\circ\times n+0^\circ<\theta<360^\circ\times n+90^\circ \ (n\text{은 정수})$$

각 변에 $\frac{1}{3}$을 곱하면

$$120^\circ\times n<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times n+30^\circ$$

$n=0$일 때, $0^\circ<\frac{\theta}{3}<30^\circ$이므로 제1사분면의 각

$n=1$일 때, $120^\circ<\frac{\theta}{3}<150^\circ$이므로 제2사분면의 각

$n=2$일 때, $240^\circ<\frac{\theta}{2}<270^\circ$이므로 제3사분면의 각

$n=3$일 때, $360^\circ<\frac{\theta}{2}<390^\circ$이므로 제1사분면의 각

⋮

따라서 $\frac{\theta}{3}$가 존재하는 사분면은 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제3사분면이다.

170 정답 **(1) $2n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수), 제2사분면**

(2) $2n\pi+\frac{\pi}{6}$ (n은 정수), 제1사분면

(1) $\frac{19}{4}\pi=2\pi\times2+\frac{3}{4}\pi$이므로 일반각은

$$2n\pi+\frac{3}{4}\pi \ (n\text{은 정수})$$

이고, $\frac{\pi}{2}<\frac{3}{4}\pi<\pi$이므로 제2사분면의 각이다.

(2) $-\frac{11}{6}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{\pi}{6}$이므로 일반각은

$$2n\pi+\frac{\pi}{6} \ (n\text{은 정수})$$

이고, $0<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$이므로 제1사분면의 각이다.

171 정답 **115°, $\frac{23}{36}\pi$**

시침이 10, 분침이 2를 가리킬 때, 시침과 분침이 이루는 각의 크기는 120°이고, 분침이 10분 동안 움직일 때 시침이 움직인 각의 크기는 $30^\circ\times\frac{1}{6}=5^\circ$

따라서 구하는 각의 크기는

$$120^\circ-5^\circ=115^\circ$$

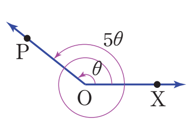
이것을 호도법으로 나타내면

$$115^\circ=115\times\frac{\pi}{180}=\frac{23}{36}\pi$$

172 정답 **0 또는 $\frac{\pi}{2}$ 또는 π 또는 $\frac{3}{2}\pi$**

각 θ와 5θ가 나타내는 동경이 일치하므로

$$5\theta-\theta=2n\pi \ (n\text{은 정수})$$



즉, $4\theta=2n\pi$이므로 $\theta=\frac{n}{2}\pi$

그런데 $0\le\theta<2\pi$이므로 위의 식을 만족하는 n의 값은 0, 1, 2, 3이다.

$$\therefore \theta=0 \text{ 또는 } \theta=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \theta=\pi \text{ 또는 } \theta=\frac{3}{2}\pi$$

173 정답 **$\frac{\pi}{5}$ 또는 $\frac{3}{5}\pi$ 또는 π 또는 $\frac{7}{5}\pi$ 또는 $\frac{9}{5}\pi$**

각 θ와 4θ가 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$$4\theta+\theta=2n\pi+\pi \ (n\text{은 정수})$$

즉, $5\theta=(2n+1)\pi$이므로 $\theta=\frac{2n+1}{5}\pi$

그런데 $0\le\theta<2\pi$이므로 위의 식을 만족하는 n의 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{5} \text{ 또는 } \theta=\frac{3}{5}\pi \text{ 또는 } \theta=\pi \text{ 또는 } \theta=\frac{7}{5}\pi$$

$$\text{또는 } \theta=\frac{9}{5}\pi$$

174 정답 **(1) $\frac{2}{9}\pi$ (2) $\frac{3}{2}\pi$ cm^2**

(1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r cm, 중심각의 크기를 θ라 하면 부채꼴의 넓이 S cm^{2}는 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$이므로

$$4\pi=\frac{1}{2}\times6^2\times\theta$$

$$\therefore \theta=\frac{2}{9}\pi$$

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r cm, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l cm라 하면 중심각의 크기는 $60^\circ=\frac{\pi}{3}$이므로

$$r=\frac{l}{\theta}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3(\text{cm})$$

이때, 부채꼴의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\times3\times\pi=\frac{3}{2}\pi(\text{cm}^2)$$

175 정답 **$\frac{\pi}{2}$**

부채꼴의 반지름의 길이를 r cm, 중심각의 크기를 θ라 하면

$$l=r\theta=2\pi \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta=4\pi \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{1}{2}r\times2\pi=4\pi \qquad \therefore r=4(\text{cm})$$

이때, ㉠에서 $\theta=\frac{l}{r}$이므로 $\theta=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

연습문제 I pp.106~108

176 정답 **ㄱ과 ㄷ, ㄴ과 ㅁ, ㄹ과 ㅂ**

각을 일반각 $360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (n은 정수, $0 \le \alpha^\circ < 360^\circ$)의 꼴로 나타내면

ㄱ. $-300^\circ = 360^\circ \times (-1) + 60^\circ$

ㄴ. $480^\circ = 360^\circ \times 1 + 120^\circ$

ㄷ. $1140^\circ = 360^\circ \times 3 + 60^\circ$

ㄹ. $-30^\circ = 360^\circ \times (-1) + 330^\circ$

ㅁ. $-600^\circ = 360^\circ \times (-2) + 120^\circ$

ㅂ. $1050^\circ = 360^\circ \times 2 + 330^\circ$

따라서 동경의 위치가 같은 각끼리 짝지으면 ㄱ과 ㄷ, ㄴ과 ㅁ, ㄹ과 ㅂ이다.

177 정답 (1) $\mathbf{140^\circ,\ 360^\circ \times n + 140^\circ}$ **(n은 정수)**
(2) $\mathbf{350^\circ,\ 360^\circ \times n + 350^\circ}$ **(n은 정수)**
(3) $\mathbf{180^\circ,\ 360^\circ \times n + 180^\circ}$ **(n은 정수)**
(4) $\mathbf{80^\circ,\ 360^\circ \times n + 80^\circ}$ **(n은 정수)**

(1) $500^\circ = 360^\circ \times 1 + 140^\circ$이므로 최소의 양의 각은 140°
일반각은 $360^\circ \times n + 140^\circ$ (n은 정수)

(2) $710^\circ = 360^\circ \times 1 + 350^\circ$이므로 최소의 양의 각은 350°
일반각은 $360^\circ \times n + 350^\circ$ (n은 정수)

(3) $-180^\circ = 360^\circ \times (-1) + 180^\circ$이므로 최소의 양의 각은 180°
일반각은 $360^\circ \times n + 180^\circ$ (n은 정수)

(4) $-1000^\circ = 360^\circ \times (-3) + 80^\circ$이므로 최소의 양의 각은 80°
일반각은 $360^\circ \times n + 80^\circ$ (n은 정수)

178 정답 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $-\frac{7}{3}\pi$ (3) 135° (4) -240°

(1) $45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$(라디안)

(2) $-420 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{7}{3}\pi$(라디안)

(3) $\frac{3}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 135^\circ$

(4) $-\frac{4}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -240^\circ$

179 정답 (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{5}{2}\pi$ (3) $-\frac{\pi}{3}$ (4) $-\frac{5}{6}\pi$

(1) $30^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$

(2) $450^\circ = 450 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{2}\pi$

(3) $-60^\circ = -60 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{3}$

(4) $-150^\circ = -150 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{6}\pi$

180 정답 (1) 120° (2) -210° (3) -225° (4) 390°

(1) $\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$

(2) $-\frac{7}{6}\pi = -\frac{7}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -210^\circ$

(3) $-\frac{5}{4}\pi = -\frac{5}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -225^\circ$

(4) $\frac{13}{6}\pi = \frac{13}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 390^\circ$

181 정답 (1) $2n\pi + \frac{5}{3}\pi$ **(n은 정수)**
(2) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ **(n은 정수)**

(1) $\frac{17}{3}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{5}{3}\pi$이므로 일반각은
$2n\pi + \frac{5}{3}\pi$ (n은 정수)

(2) $-\frac{7}{4}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{\pi}{4}$이므로 일반각은
$2n\pi + \frac{\pi}{4}$ (n은 정수)

182 정답 $\frac{13}{36}\pi$

시침은 1시간에 30°씩 이동하므로 1분에 $\frac{30^\circ}{60}$, 즉 0.5°씩 이동한다. 또, 분침은 1시간에 360°씩 이동하므로 1분에 $\frac{360^\circ}{60}$, 즉 6°씩 이동한다.

시침과 분침이 12를 가리킬 때의 각의 크기를 0°라고 하면 4시 10분에 시침의 각의 크기는

$$30^\circ \times 4 + 0.5^\circ \times 10 = 125^\circ$$

분침의 각의 크기는

$$6^\circ \times 10 = 60^\circ$$

이므로 시침과 분침이 이루는 각의 크기는

$$125^\circ - 60^\circ = 65^\circ$$

따라서 65°를 호도법으로 나타내면

$$65 \times \frac{\pi}{180} = \frac{13}{36}\pi$$

183 정답 $\frac{2}{9}\pi$ **또는** $\frac{4}{9}\pi$

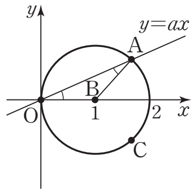
θ와 10θ의 동경이 일치하므로 정수 n에 대하여

$$10\theta - \theta = 2n\pi \qquad \therefore \theta = \frac{2n}{9}\pi$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 $0 < \frac{2n}{9}\pi < \frac{\pi}{2}$를 만족하는 정수 n의 값은 1, 2이다.

$$\therefore \theta = \frac{2}{9}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{4}{9}\pi$$

184 정답 $\frac{\pi}{6}$



$\overset{\frown}{AO} : \overset{\frown}{ACO}=1 : 2$이므로 $\overset{\frown}{AO}$의 길이는 원의 둘레의 길이의 $\frac{1}{3}$이다.

$\therefore\ \angle ABO=2\pi\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\pi$

$\triangle ABO$는 이등변삼각형이므로

$\angle AOB=\angle OAB=\theta$라 하면 $2\theta+\frac{2}{3}\pi=\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}$

185 정답 (1) $l=6$ cm, $S=9$ cm^2 (2) $\theta=\frac{3}{2}$, $S=12$ cm^2

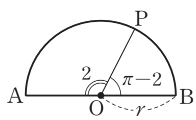
(1) $l=3\times2=6$(cm)

$S=\frac{1}{2}\times3^2\times2=9$ (cm^2)

(2) $l=r\theta$에서 $\theta=\frac{l}{r}=\frac{3}{2}$

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\times4\times6=12$(cm^2)

186 정답 ⑤



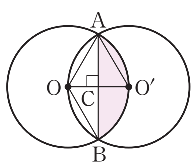
$\overset{\frown}{AP}=\overline{AB}$이므로 $\overset{\frown}{AP}=2r$

따라서 $\angle AOP=2$(라디안),

$\angle BOP=\pi-2$(라디안)이므로

$$\frac{(\text{부채꼴 AOP의넓이})}{(\text{부채꼴 BOP의넓이})}=\frac{\frac{1}{2}r^2\cdot2}{\frac{1}{2}r^2(\pi-2)}=\frac{2}{\pi-2}$$

187 정답 $\left(6\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$ cm^2



오른쪽 그림에서

$\overline{AO}=\overline{AO'}=\overline{OO'}=3$ (cm)

즉, $\triangle AOO'$은 정삼각형이므로

$\angle AOC=60^\circ=\frac{\pi}{3}$,

$\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$,

$\overline{OC}=\frac{3}{2}$ (cm), $\overline{AC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (cm),

$\overline{AB}=2\overline{AC}=3\sqrt{3}$ (cm)

그림에서 색칠한 활꼴의 넓이는

(부채꼴 AOB의 넓이)$-$(삼각형 AOB의 넓이)

와 같으므로

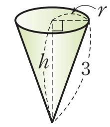
$\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}$

따라서 구하는 넓이는 위에서 구한 활꼴의 넓이의 2배이므로

$6\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (cm^2)

188 정답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ cm^3

원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r(cm), 높이를 h(cm)라 하면 부채꼴의 호의 길이와 밑면의 둘레의 길이가 같으므로



$3\times\frac{2}{3}\pi=2\pi r\qquad\therefore\ r=1$ (cm)

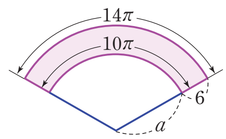
피타고라스 정리에 의하여

$h=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ (cm)

$\therefore\ V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times1^2\times2\sqrt{2}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm^3)

189 정답 72π



직원뿔대의 윗면과 아랫면의 둘레의 길이는 각각 10π, 14π이므로 오른쪽 그림에서

$a : (a+6)=10\pi : 14\pi$

$10(a+6)=14a$

$\therefore\ a=15$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times21\times14\pi-\frac{1}{2}\times15\times10\pi=72\pi$

연습문제 Ⅱ p.109

190 정답 (1) $\frac{\pi}{7}$ 또는 $\frac{3}{7}\pi$ (2) $\frac{2}{7}\pi$

(1) 두 각 2θ, 5θ가 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$2\theta+5\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

가 성립한다. 즉,

$7\theta=(2n+1)\pi\qquad\therefore\ \theta=\frac{2n+1}{7}\pi$

이때, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\frac{2n+1}{7}\pi<\frac{\pi}{2}$를 만족하는 정수 n의 값은 0, 1이다.

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{7}$ 또는 $\theta=\frac{3}{7}\pi$

(2) 두 각 2θ, 5θ가 나타내는 두 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$2\theta+5\theta=2n\pi$ (n은 정수)

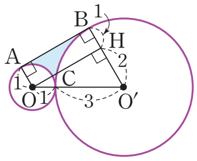
가 성립한다. 즉,

$7\theta=2n\pi\qquad\therefore\ \theta=\frac{2n}{7}\pi$

이때, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\frac{2n}{7}\pi<\frac{\pi}{2}$를 만족하는 정수 n은 1뿐이다.

$\therefore\ \theta=\frac{2}{7}\pi$

191 정답 $4\sqrt{3}-\frac{11}{6}\pi$



오른쪽 그림에서

$\overline{OA}\perp\overline{AB}$, $\overline{O'B}\perp\overline{AB}$,

$\overline{OO'}=\overline{OC}+\overline{O'C}=4$

점 O에서 $\overline{O'B}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{O'H}=\overline{O'B}-\overline{BH}=2$

직각삼각형 $OO'H$에서

$\overline{OO'}:\overline{O'H}=2:1$이므로

$\angle O'OH=\frac{\pi}{6}$, $\angle OO'H=\frac{\pi}{3}$

이때, $\angle AOC=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi$, $\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$이고, 구하는 도형의 넓이는 사다리꼴 $OABO'$의 넓이에서 2개의 부채꼴 OAC, O′BC의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2}(1+3)\times2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{\pi}{3}$$

$$=4\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{3}{2}\pi=4\sqrt{3}-\frac{11}{6}\pi$$

192 정답 ①

색칠한 부분의 둘레의 길이가 10이므로

$2(r_1-r_2)+r_1\theta+r_2\theta=10$ ······ ㉠

이때 색칠한 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}r_1^2\theta-\frac{1}{2}r_2^2\theta$$

$$=\frac{1}{2}(r_1-r_2)(r_1+r_2)\theta$$

$$=\frac{1}{2}(r_1-r_2)\{10-2(r_1-r_2)\}$$

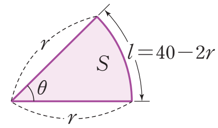
($\because$ ㉠에서 $(r_1+r_2)\theta=10-2(r_1-r_2)$)

$$=-(r_1-r_2)^2+5(r_1-r_2)$$

$$=-\left\{(r_1-r_2)-\frac{5}{2}\right\}^2+\frac{25}{4}\le\frac{25}{4}$$

따라서 $r_1-r_2=\frac{5}{2}$일 때, 색칠한 부분의 넓이가 최대이다.

193 정답 2(라디안) 서술형



부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 40이므로 $2r+l=40$에서

$l=40-2r$ ··· ①

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}r(40-2r)\ (0<r<20)$$

$$=-r^2+20r$$

$$=-(r-10)^2+100$$ ··· ②

따라서 $r=10$일 때 넓이는 최대이고, 이때 $l=20$이므로

구하는 중심각의 크기를 θ라고 하면 $l=r\theta$에서

$20=10\theta$

$\therefore\ \theta=2$(라디안) ··· ③

[채점 기준표]

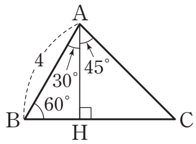
단계	채점 요소	배점
①	부채꼴의 둘레의 길이에 대한 식 세우기	20 %
②	부채꼴의 넓이에 대한 식 세우기	40 %
③	부채꼴의 넓이가 최대일 때 중심각의 크기 구하기	40 %

7. 삼각함수

유형 .... pp.114~120

001 정답 (1) $\mathbf{2+2\sqrt{3}}$ (2) $\mathbf{\sqrt{3}-1}$

(1) 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서 $\angle\mathrm{BAH}=30°$이므로

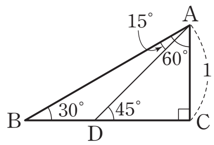


$$\angle\mathrm{CAH}=\angle\mathrm{BAC}-\angle\mathrm{BAH}=75°-30°=45°$$

삼각형 ACH는 $\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AH}}$인 직각이등변삼각형이다.

$$\overline{\mathrm{BH}}=4\cos 60°=2,$$
$$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AH}}=4\sin 60°=2\sqrt{3}$$
$$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{CH}}=2+2\sqrt{3}$$

(2) $\angle\mathrm{ADC}=30°+15°=45°$(외각)이므로 $\triangle\mathrm{ADC}$는 직각이등변삼각형이다.



따라서 $\overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{AC}}=1$이고,
$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}\tan 60°=\sqrt{3}$이므로

$$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{3}-1$$

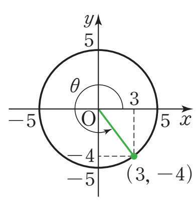
002 정답 (1) ① $\mathbf{\sin\theta=-\frac{4}{5},\ \cos\theta=\frac{3}{5},\ \tan\theta=-\frac{4}{3}}$

② $\mathbf{\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\theta=-\frac{1}{2},\ \tan\theta=-\sqrt{3}}$

(2) **2**

(1) ① $x=3,\ y=-4$이므로 $r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

$$\therefore \sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{4}{5},$$
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{3}{5},$$
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=-\frac{4}{3}$$



② $x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$
$$\therefore \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{1}{2},$$
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=-\sqrt{3}$$

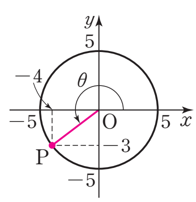
(2) 각 θ가 나타내는 동경 위에 $\overline{\mathrm{OP}}=5$인 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 잡으면 θ가 제3사분면의 각이므로 $x<0,\ y<0$

$$r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x^2+y^2}=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 $\sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{3}{5}$에서

$$y=-3$$

㉠에 대입하면 $x=-4$



따라서 $\mathrm{P}(-4,\ -3)$이므로 삼각함수의 정의에 의해

$$\cos\theta=-\frac{4}{5},\ \tan\theta=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$
$$\therefore \tan\theta-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{8}{4}=2$$

003 정답 (1) **제1사분면 또는 제2사분면** (2) $\mathbf{2\sin\theta}$

(1) 각 θ가 나타내는 동경 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하고 $\overline{\mathrm{OP}}=r$라 하면 삼각함수의 정의에 의하여

$$\cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}$$

$\cos\theta\tan\theta>0$에서

$$\cos\theta\tan\theta=\frac{x}{r}\times\frac{y}{x}=\frac{y}{r}>0$$

즉, $y>0$인 사분면은 제1사분면 또는 제2사분면이다.

(2) θ가 제2사분면의 각이면 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$이므로

$$\sqrt{\sin^2\theta}=|\sin\theta|=\sin\theta,$$
$$\sqrt[3]{(\sin\theta+\cos\theta)^3}=\sin\theta+\cos\theta,$$
$$\sqrt[4]{\cos^4\theta}=|\cos\theta|=-\cos\theta$$
$$\therefore \sqrt{\sin^2\theta}+\sqrt[3]{(\sin\theta+\cos\theta)^3}+\sqrt[4]{\cos^4\theta}$$
$$=\sin\theta+(\sin\theta+\cos\theta)+(-\cos\theta)$$
$$=2\sin\theta$$

다른 풀이

(1) $\cos\theta\tan\theta>0$에서 $\cos\theta,\ \tan\theta$가 같은 부호이므로 둘 다 양이거나 둘 다 음이다.

(i) $\cos\theta>0,\ \tan\theta>0$일 때:
$\cos\theta>0$인 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\tan\theta>0$인 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이므로 동시에 만족하는 것은 제1사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta<0,\ \tan\theta<0$일 때:
$\cos\theta<0$인 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이고, $\tan\theta<0$인 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 동시에 만족하는 것은 제2사분면의 각이다.

따라서 $\cos\theta\tan\theta>0$을 만족하는 각 θ의 동경이 위치하는 사분면은 제1사분면 또는 제2사분면이다.

004 정답 (1) **2** (2) $\mathbf{\frac{2}{\cos\theta}}$

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$
$$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$\quad+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2\times1=2$$

(2) $$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta+1}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{2}{\cos\theta}$$

005 정답 (1) 1 (2) 3

(1) $\sin\theta+\sin^2\theta=1$에서 $\sin\theta=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

즉, $\sin\theta=\cos^2\theta$이므로 $\sin^2\theta=\cos^4\theta$

$\therefore \cos^2\theta+\cos^4\theta=\sin\theta+\sin^2\theta=1$

(2) $\tan\theta=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$의 분자, 분모를 $\cos\theta$로

나누면

$$\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

다른 풀이

(2) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$에서 $\cos\theta=2\sin\theta$

$$\therefore \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{2\sin\theta+\sin\theta}{2\sin\theta-\sin\theta}$$

$$=\frac{3\sin\theta}{\sin\theta}=3$$

006 정답 (1) $-\frac{3}{8}$ (2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (3) $\frac{11}{16}$

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

이때, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

이때, (1)에서 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$이므로

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

그런데 θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이다. 즉, $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

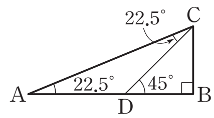
(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{3}{8}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$

확인문제 pp.114~120

194 정답 $\sqrt{2}-1$



$\triangle$ADC에서

$\angle ACD=45^\circ-22.5^\circ=22.5^\circ$

이므로 $\triangle$ADC는 $\overline{AD}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이다.

한편, $\overline{BC}=\overline{BD}=a$라고 하면

$\overline{CD}=\overline{AD}=\sqrt{2}a$

$$\therefore \tan 22.5^\circ=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}+\overline{BD}}=\frac{a}{\sqrt{2}a+a}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

195 정답 (1) $\overline{PH}=\frac{1}{2}$, $\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $2-\sqrt{3}$

(1) 삼각형 OHP에서 $\sin 30^\circ=\frac{\overline{PH}}{\overline{OP}}$이므로

$$\overline{PH}=\overline{OP}\sin 30^\circ=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

또, $\cos 30^\circ=\frac{\overline{OH}}{\overline{OP}}$이므로

$$\overline{OH}=\overline{OP}\cos 30^\circ=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) 삼각형 HPQ에서

$$\tan\alpha=\frac{\overline{PH}}{\overline{QH}}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=2-\sqrt{3}$$

196 정답 (1) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan\theta=\frac{1}{2}$

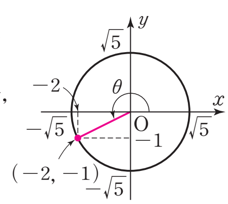
(2) $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

(1) $x=-2$, $y=-1$이므로 $r=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

$$\therefore \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$



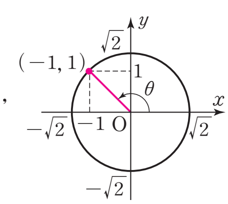
(2) $x=-1$, $y=1$이므로

$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\therefore \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{-1}=-1$$



07강

197 정답 $-\frac{2}{5}$

각 θ가 나타내는 동경 위의 한 점을 $P(x,\ y)$라 하면 θ가 제4사분면의 각이므로 $x>0,\ y<0$

이때, $\tan\theta=\frac{y}{x}=-2$에서 $\frac{y}{x}=\frac{-2}{1}$이므로

$P(1,\ -2)$

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$이므로 삼각함수의 정의에 의해

$\sin\theta=\frac{-2}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{2}{5}$

198 정답 **제2사분면 또는 제4사분면**

각 θ가 나타내는 동경 위의 한 점을 $P(x,\ y)$라 하고 $\overline{OP}=r$라 하면 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r}$

$\sin\theta\cos\theta<0$에서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{y}{r}\times\frac{x}{r}=\frac{xy}{r^2}<0$

따라서 $xy<0$인 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

다른 풀이

$\sin\theta\cos\theta<0$이면 $\sin\theta>0$이고 $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$이고 $\cos\theta>0$이므로 $\sin\theta>0$이고 $\cos\theta<0$인 θ는 제2사분면의 각이고, $\sin\theta<0$이고 $\cos\theta>0$인 θ는 제4사분면의 각이다. 따라서 $\sin\theta\cos\theta<0$을 만족하는 각 θ의 동경이 위치하는 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

199 정답 **0**

θ가 제4사분면의 각이면 $\cos\theta>0,\ \tan\theta<0$이므로

$\cos\theta-\tan\theta>0$

따라서 $\sqrt{(\cos\theta-\tan\theta)^2}=|\cos\theta-\tan\theta|=\cos\theta-\tan\theta,$ $|\cos\theta|=\cos\theta$이므로

$\sqrt{(\cos\theta-\tan\theta)^2}+\sqrt[3]{\tan^3\theta}-|\cos\theta|$

$=(\cos\theta-\tan\theta)+\tan\theta-\cos\theta=0$

200 정답 (1) $\frac{1}{\sin\theta}$ (2) -1

(1) $\frac{1}{\tan\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta}$

(2) $\tan^2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta-1}{\cos^2\theta}$

$=\frac{-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=-1$

201 정답 (1) $\frac{1}{\cos\theta}$ (2) $\tan\theta$

(1) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$

(2) $\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta-\cos^3\theta}=\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta(1-\cos^2\theta)}$

$=\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta\sin^2\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

202 정답 $\frac{7}{8}$

$\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$=2\cos^2\theta-1=\frac{3}{4}$

$2\cos^2\theta=\frac{7}{4}\qquad \therefore \cos^2\theta=\frac{7}{8}$

203 정답 $\pm\frac{1}{2}$

$\sin^2\theta-\sin^4\theta=\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$

$=\sin^2\theta\cos^2\theta=(\sin\theta\cos\theta)^2=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$

204 정답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(1) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

이때, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

이때, (1)에서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

그런데 θ는 제1사분면의 각이므로 $\sin\theta>0,\ \cos\theta>0$이다. 따라서 $\sin\theta+\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$

205 정답 (1) $\sqrt{2}$ (2) 2

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+2\times\frac{1}{2}=2$$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{2}$

그런데 θ는 제1사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이다. 따라서 $\sin\theta+\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$

(2) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=2$$

연습문제 I .... pp.121~123

206 정답 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

$y=2x+6$에 $x=0$, $y=0$을 각각 대입하면

$A(-3,\ 0)$, $B(0,\ 6)$

이므로 직각삼각형 AOB에서

$\overline{OA}=3$, $\overline{OB}=6$, $\overline{AB}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{6}{3\sqrt{5}}+\dfrac{3}{3\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

207 정답 $\dfrac{2}{\cos\theta}$

직각삼각형 POA에서

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP}}=\dfrac{2}{\overline{OP}}$ $\qquad\therefore \overline{OP}=\dfrac{2}{\cos\theta}$

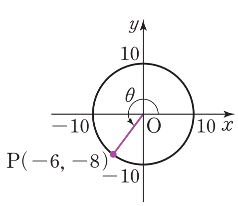
208 정답 $\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$, $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$, $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$

$\overline{OP}=\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}=10$이므로 삼각함수의 정의에 의해

$\sin\theta=\dfrac{-8}{10}=-\dfrac{4}{5}$,

$\cos\theta=\dfrac{-6}{10}=-\dfrac{3}{5}$,

$\tan\theta=\dfrac{-8}{-6}=\dfrac{4}{3}$



209 정답 (1) $\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$,

$\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$

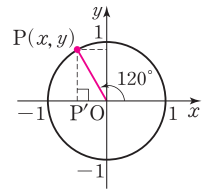
(2) $\sin\dfrac{7}{4}\pi=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\dfrac{7}{4}\pi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\tan\dfrac{7}{4}\pi=-1$

(3) $\sin\left(-\dfrac{5}{3}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\dfrac{5}{3}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$,

$\tan\left(-\dfrac{5}{3}\pi\right)=\sqrt{3}$

(1) 오른쪽 그림과 같이 크기가 120°인 각의 동경이 단위원과 만나는 점을 $P(x,\ y)$라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 P′이라 하자. 이때, $\angle POP'=60^\circ$이므로 점 P의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

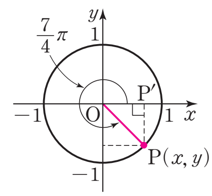


$\therefore \sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$,

$\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$

(2) 오른쪽 그림에서

$\angle POP'=\dfrac{\pi}{4}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

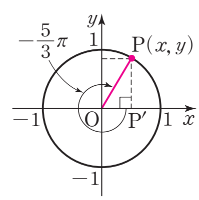


$\therefore \sin\dfrac{7}{4}\pi=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\dfrac{7}{4}\pi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\dfrac{7}{4}\pi=-1$

(3) 오른쪽 그림에서

$\angle POP'=\dfrac{\pi}{3}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.



$\therefore \sin\left(-\dfrac{5}{3}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\left(-\dfrac{5}{3}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$, $\tan\left(-\dfrac{5}{3}\pi\right)=\sqrt{3}$

210 정답 $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$인 제3사분면의 각 θ의 동경 위의 한 점을 $P(x,\ y)$라 하자.

$x<0$, $y<0$이므로 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-3}{-4}$에서 점 $P(-4,\ -3)$으로 놓을 수 있다.

이때, $r=\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$이므로

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=-\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}=-\dfrac{4}{5}$

다른 풀이

$\tan\theta=\frac{3}{4}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서 $\sin\theta=\frac{3}{4}\cos\theta$ …… ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 ㉠을 대입하면

$$\frac{9}{16}\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$\frac{25}{16}\cos^2\theta=1$에서 $\cos^2\theta=\frac{16}{25}$

$$\therefore \cos\theta=\pm\frac{4}{5}$$

θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

$\cos\theta=-\frac{4}{5}$를 ㉠에 대입하면 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$

$$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{5},\ \cos\theta=-\frac{4}{5}$$

211 정답 ⑤

각 θ가 나타내는 동경 위에 $\overline{OP}=5$인 점 $P(x, y)$를 잡으면

θ가 제2사분면의 각이므로 $x<0$, $y>0$

$$r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{4}{5}$에서 $x=-4$

㉠에 대입하면 $y=3$

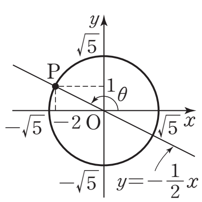
따라서 $P(-4, 3)$이므로 삼각함수의 정의에 의해

$$\sin\theta=\frac{3}{5},\ \tan\theta=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore 5\sin\theta-4\tan\theta=5\times\frac{3}{5}-4\times\left(-\frac{3}{4}\right)=6$$

212 정답 $\frac{1}{5}$

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원을 그리고 직선 $y=-\frac{1}{2}x$와 원이 만나는 제2사분면 위의 점을 P라고 하면 점 P의 좌표는 $(-2, 1)$이다.



이때, $\overline{OP}=\sqrt{5}$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{5}},\ \tan\theta=\frac{1}{-2}$$

$$\therefore \sin\theta\times\cos\theta\times\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{-2}{\sqrt{5}}\times\left(\frac{1}{-2}\right)=\frac{1}{5}$$

213 정답 ⑤

(ⅰ) $\sin\theta\cos\theta=\frac{x}{r}\times\frac{y}{r}=\frac{xy}{r^2}<0$, 즉 $xy<0$이므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ⅱ) $\cos\theta\tan\theta=\frac{x}{r}\times\frac{y}{x}=\frac{y}{r}>0$

즉, $y>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 θ는 제2사분면의 각이므로

$$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta<0$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

214 정답 (1) **5** (2) **1**

(1) $(2\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-2\cos\theta)^2$

$=(4\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$\quad+(\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta)$

$=5(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=5$

(2) $\cos^2\theta+\sin\theta-\tan\theta(1-\sin\theta)\cos\theta$

$=\cos^2\theta+\sin\theta-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1-\sin\theta)\cos\theta$

$=\cos^2\theta+\sin\theta-\sin\theta(1-\sin\theta)$

$=\cos^2\theta+\sin\theta-\sin\theta+\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

215 정답 **2**

$\frac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}-\frac{2}{\sin^2\theta}$

$=\frac{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}+\frac{(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$\quad-\frac{2}{\sin^2\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$\quad+\frac{1-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}-\frac{2}{\sin^2\theta}$

$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2}{\tan\theta}$

$$\therefore \frac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}-\frac{2}{\sin^2\theta}=\frac{\boxed{2}}{\tan\theta}$$

따라서 □ 안에 알맞은 수는 2이다.

216 정답 ②

ㄱ. $\triangle AOB$에서 $\tan\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\overline{AB}$ (참)

ㄴ. $\overline{AB}\perp\overline{OC}$, $\overline{OB}\perp\overline{BC}$이므로 직각삼각형의 닮음의 성질에 의하여 $\overline{AB}^2=\overline{OA}\times\overline{AC}=\overline{AC}$

$$\therefore \overline{AC}=\overline{AB}^2=(\tan\theta)^2=\tan^2\theta \text{ (참)}$$

ㄷ. $\triangle OAB$에서 $\cos\theta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{1}{\overline{OB}}$이므로

$$\overline{OB}=\frac{1}{\cos\theta} \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

217 정답 $\sqrt{2}$

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

주어진 조건에서 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=2$이므로

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$$
$$\therefore (\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+2\times\frac{1}{2}=2$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$일 때 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$$

218 정답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $2\sqrt{2}$ (3) 2

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$

(3) $$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$$
$$=\frac{1-2(\sin\theta\cos\theta)^2}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$$
$$=\frac{1-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2$$

219 정답 $\sqrt{6}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{a}{2}$ ...... ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ ...... ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

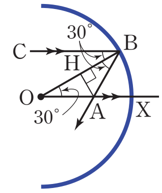
$$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{a^2}{4}$$
$$\therefore 1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{a^2}{4}$$

㉡을 대입하면

$$1+2\times\frac{1}{4}=\frac{a^2}{4},\ a^2=6$$
$$\therefore a=\sqrt{6}\ (\because a>0)$$

연습문제 Ⅱ p.124

220 정답 ④



오른쪽 그림에서 $\overline{CB}\,/\!/\,\overline{OX}$이므로

$\angle BOA=\angle CBO=30^\circ$(엇각)

$\therefore \angle BOA=\angle OBA$

따라서 $\triangle OAB$는 $\overline{AO}=\overline{AB}$인 이등변삼각형이므로 점 A에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH}=\frac{r}{2}$$

직각삼각형 AOH에서 $\cos 30^\circ=\dfrac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \overline{OA}=\frac{\sqrt{3}}{3}r$$

221 정답 ①

원의 반지름의 길이를 r, 호 AP의 길이를 l이라 하면

$l=r\theta$이므로 $\overline{PN}=\dfrac{l}{3}=\dfrac{r\theta}{3}$

$$\therefore \sin\theta=\frac{\overline{PN}}{\overline{OP}}=\frac{\frac{r\theta}{3}}{r}=\frac{\theta}{3}$$

222 정답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

분자, 분모를 $\cos^2\theta$으로 나누면

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2}{2^2+1}=\frac{2}{5}$$

(2) $\sin^2\theta-\cos^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{1}=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

분자, 분모를 $\cos^2\theta$으로 나누면

$$(\text{주어진 식})=\frac{\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1}=\frac{2^2-1}{2^2+1}=\frac{3}{5}$$

223 정답 0 서술형

$f(x)$는 x가 양수이면 함숫값이 1, x가 음수이면 함숫값이 -1이다.

θ가 제3사분면의 각일 때

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$, $\sin\theta\cos\theta>0$ ··· ①

$\therefore f(\sin\theta)+f(\cos\theta)+f(\tan\theta)+f(\sin\theta\cos\theta)$

$=(-1)+(-1)+1+1=0$ ··· ②

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	제3사분면에서 삼각함수의 값의 부호 알기	60%
②	식의 값 구하기	40%

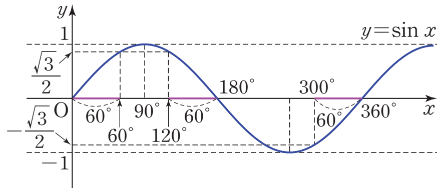
8. 삼각함수의 그래프

유형 .... pp.129~137

001 정답 **(1) 차례로 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$**

(2) 풀이 참조

(1)



그림과 같이 120°는 180°에서 음의 방향으로 60°만큼 이동한 값이므로 sin 120°는 sin 60°의 값과 같다.

같은 방법으로, 300°는 360°에서 음의 방향으로 60°만큼 이동한 값이므로 sin 300°는 $-$sin 60°의 값과 같다.

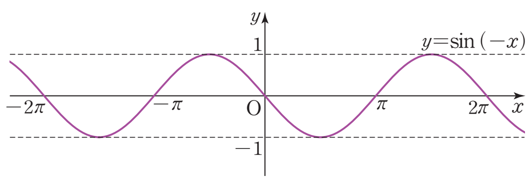
또한, $210°=180°+30°$이므로 sin 210°는 $-$sin 30°의 값과 같다.

$$\sin 120°=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 180°=0,$$

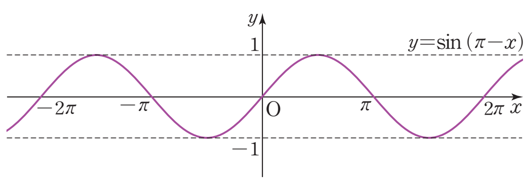
$$\sin 210°=-\sin 30°=-\frac{1}{2},$$

$$\sin 270°=-1,\ \sin 300°=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

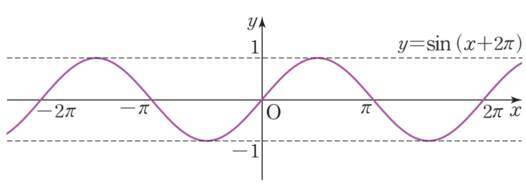
(2) ① $y=\sin(-x)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



② $y=\sin(\pi-x)=\sin\{-(x-\pi)\}$이므로 $y=\sin(\pi-x)$의 그래프는 $y=\sin(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이다.



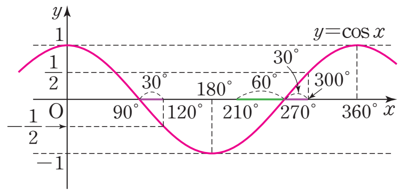
③ 함수 $y=\sin x$의 주기가 2π이므로 $y=\sin(x+2\pi)=\sin x$이다. 따라서 $y=\sin(x+2\pi)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프와 같다.



002 정답 **(1) 차례로 $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$**

(2) 풀이 참조

(1)



그림과 같이 120°는 90°에서 양의 방향으로 30°만큼 이동한 값이므로 cos 120°는 $-$sin 30°의 값과 같다.

같은 방법으로, 300°는 270°에서 양의 방향으로 30°만큼 이동한 값이므로 cos 300°는 sin 30°의 값과 같다.

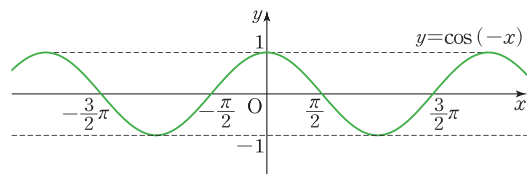
또한, $210°=270°-60°$이므로 cos 210°는 $-$sin 60°의 값과 같다.

$$\cos 120°=-\sin 30°=-\frac{1}{2},\ \cos 180°=-1,$$

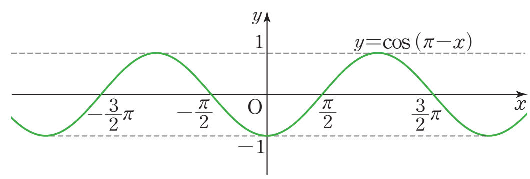
$$\cos 210°=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 270°=0,$$

$$\cos 300°=\sin 30°=\frac{1}{2}$$

(2) ① $y=\cos(-x)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이다. 그런데 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $y=\cos(-x)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프와 같다.



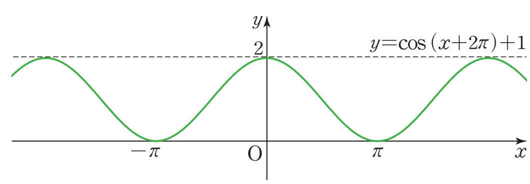
② $y=\cos(\pi-x)=\cos(-(x-\pi))$이므로 $y=\cos(\pi-x)$의 그래프는 $y=\cos(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이다.



③ 함수 $y=\cos x$의 주기가 2π이므로 $y=\cos(x+2\pi)=\cos x$이다.

$\therefore y=\cos(x+2\pi)+1=\cos x+1$

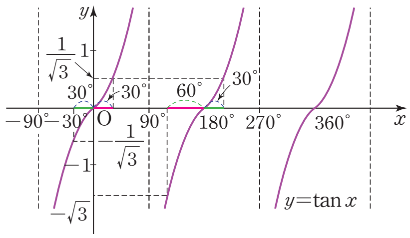
따라서 $y=\cos(x+2\pi)+1$의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



003 정답 (1) 차례로 $-\sqrt{3}$, -1, 0, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) 풀이 참조

(1)



그림과 같이 120°는 180°에서 음의 방향으로 60°만큼 이동한 값이므로 tan 120°는 −tan 60°의 값과 같다.

또, 135°는 180°에서 음의 방향으로 45°만큼 이동한 값이므로 tan 135°는 −tan 45°의 값과 같다.

210°는 180°에서 양의 방향으로 30°만큼 이동한 값이므로 tan 210°는 tan 30°의 값과 같다.

같은 방법으로, −30°는 원점에서 음의 방향으로 30°만큼 이동한 값이므로 tan(−30°)는 −tan 30°의 값과 같다.

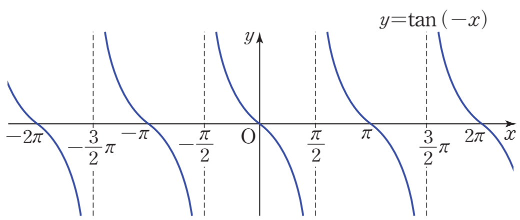
$\therefore \tan 120^\circ=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$,

$\tan 135^\circ=-\tan 45^\circ=-1$,

$\tan 180^\circ=0$, $\tan 210^\circ=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

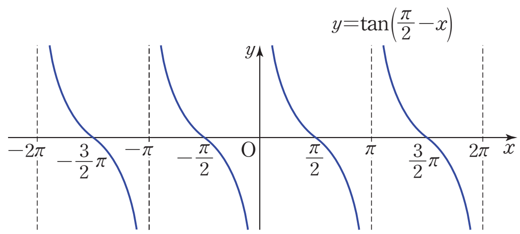
$\tan(-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) ① $y=\tan(-x)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



② $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan\left(-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$이므로

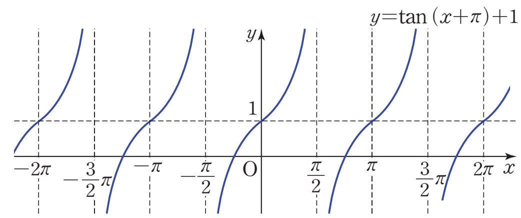
$y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$의 그래프는 $y=\tan(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.



③ 함수 $y=\tan x$의 주기가 π이므로

$y=\tan(x+\pi)=\tan x$이다.

따라서 $y=\tan(x+\pi)+1=\tan x+1$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



004 정답 (1) 주기 : 2π, 최댓값 : 5, 최솟값 : -1

(2) 주기 : π, 최댓값 : 2, 최솟값 : 0

(3) 주기 : 2π, 최댓값, 최솟값은 없다.

(1) $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2$의 그래프는 $y=3\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주기는 $y=3\sin x$의 주기와 같으므로 2π,

최댓값과 최솟값은 $y=3\sin x$의 최댓값과 최솟값에 각각 2를 더한 것과 같으므로

최댓값 : $3+2=5$, 최솟값 : $-3+2=-1$

(2) $y=\cos(2x-\pi)+1=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주기는 $y=\cos 2x$의 주기와 같으므로 $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$,

최댓값과 최솟값은 $y=\cos 2x$의 최댓값과 최솟값에 각각 1을 더한 것과 같으므로

최댓값 : $1+1=2$, 최솟값 : $-1+1=0$

(3) $y=2\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=2\tan\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=2\tan\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주기는 $y=2\tan\frac{x}{2}$의 주기와 같으므로 $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=2\pi$,

최댓값과 최솟값은 모두 없다.

005 정답 (1) 2 (2) $-\frac{8}{3}\pi$

(1) 함수 $y=a\cos bx+c$ $(a>0,\ b>0)$의 최댓값은 $a+c$, 최솟값은 $-a+c$이므로

$a+c=5$, $-a+c=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $c=1$

또, 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}=4\pi$이므로 $b=\frac{1}{2}$ $(\because b>0)$

따라서 $a=4$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$이므로

$abc=4\times1\times\frac{1}{2}=2$

(2) $y=a\sin(bx+c)$ ...... ㉠

$-|a|\le a\sin(bx+c)\le|a|$이므로 최댓값은 $|a|$이고, 주어진 그래프에서 최댓값이 2이므로

$a=2$ ($\because a>0$)

㉠에서 주기는 $\dfrac{2\pi}{|b|}$이고, 주어진 그래프에서 주기는

$\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\pi$이므로 $\dfrac{2\pi}{|b|}=\pi$

$\therefore b=2$ ($\because b>0$)

이때, $y=2\sin(2x+c)=2\sin 2\left(x+\dfrac{c}{2}\right)$이므로 ㉠의 그래프는 $y=2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{c}{2}$만큼 평행이동한 것이고, 주어진 그래프는 $y=2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로

$-\dfrac{c}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ ($\because -\pi<c<\pi$)

$\therefore c=-\dfrac{2}{3}\pi$

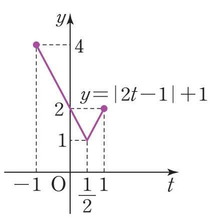
$\therefore abc=2\times2\times\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\dfrac{8}{3}\pi$

006 정답 (1) **최댓값 : 4, 최솟값 : 1**
(2) 최댓값 : 7, 최솟값 : −2

(1) $\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le1$이고

$y=|2t-1|+1$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값 4, $t=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 1이다.



(2) $y=4\sin^2 x-4\cos x+2$

$=4(1-\cos^2 x)-4\cos x+2$

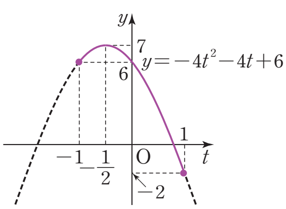
$=-4\cos^2 x-4\cos x+6$

이때, $\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le1$이고

$y=-4t^2-4t+6$

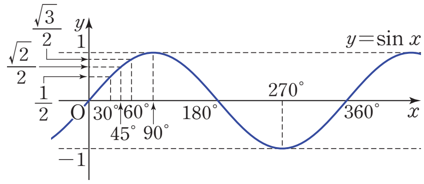
$=-4\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+7$

오른쪽 그림에서 $t=-\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값 7, $t=1$일 때 최솟값 -2이다.



확인문제 pp.129~137

224 정답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $-\dfrac{1}{2}$ (5) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



(1) $150^\circ=180^\circ-30^\circ$이므로 그래프에 의해

$\sin 150^\circ=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$

(2) $225^\circ=180^\circ+45^\circ$이므로 그래프에 의해

$\sin 225^\circ=-\sin 45^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $240^\circ=180^\circ+60^\circ$이므로 그래프에 의해

$\sin 240=-\sin 60^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $330^\circ=360^\circ-30^\circ$이므로 그래프에 의해

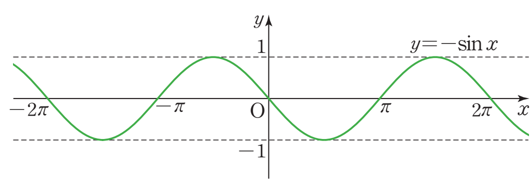
$\sin 330^\circ=-\sin 30^\circ=-\dfrac{1}{2}$

(5) $420^\circ=360^\circ+60^\circ$이므로 그래프에 의해

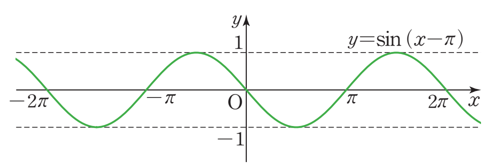
$\sin 420^\circ=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

225 정답 풀이 참조

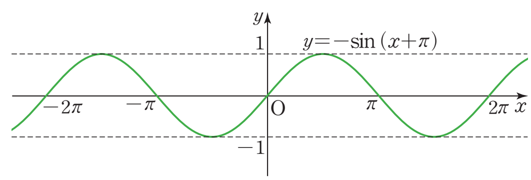
(1) $y=-\sin x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.



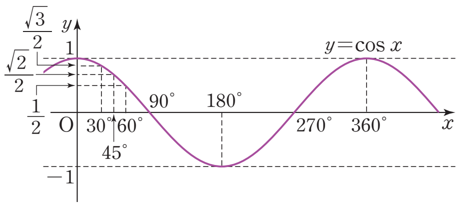
(2) $y=\sin(x-\pi)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이다.



(3) $y=-\sin(x+\pi)=-\sin\{x-(-\pi)\}$이므로 $y=-\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 것이다.



226 정답 (1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\dfrac{1}{2}$ (4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (5) $\dfrac{1}{2}$



(1) $150^\circ=90^\circ+60^\circ$이므로 그래프에 의해

$$\cos 150^\circ=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $225^\circ=270^\circ-45^\circ$이므로 그래프에 의해

$$\cos 225^\circ=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3) $240^\circ=270^\circ-30^\circ$이므로 그래프에 의해

$$\cos 240^\circ=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

(4) $330^\circ=270^\circ+60^\circ$이므로 그래프에 의해

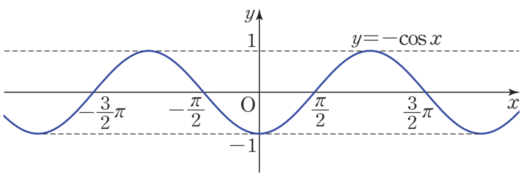
$$\cos 330^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(5) $420^\circ=360^\circ+60^\circ$이므로 그래프에 의해

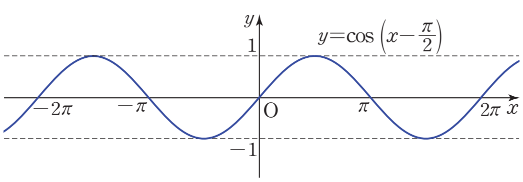
$$\cos 420^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

227 정답 풀이 참조

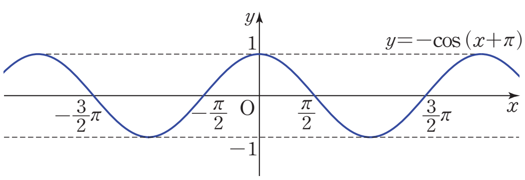
(1) $y=-\cos x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.



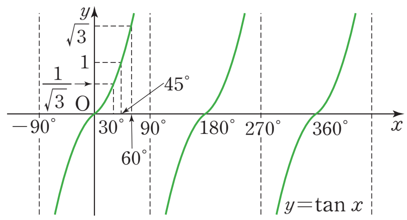
(2) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.



(3) $y=-\cos(x+\pi)=-\cos(x-(-\pi))$의 그래프는 $y=-\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 것이다.



228 정답 (1) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (2) 1 (3) $\sqrt{3}$ (4) $-\sqrt{3}$ (5) $\sqrt{3}$



(1) $150^\circ=180^\circ-30^\circ$이므로 그래프에 의해

$$\tan 150^\circ=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $225^\circ=180^\circ+45^\circ$이므로 그래프에 의해

$$\tan 225^\circ=\tan 45^\circ=1$$

(3) $240^\circ=180^\circ+60^\circ$이므로 그래프에 의해

$$\tan 240^\circ=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

(4) 그래프에 의해

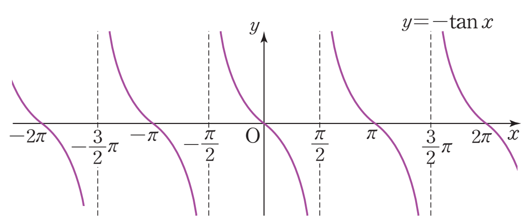
$$\tan(-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

(5) 탄젠트의 주기가 180°이므로

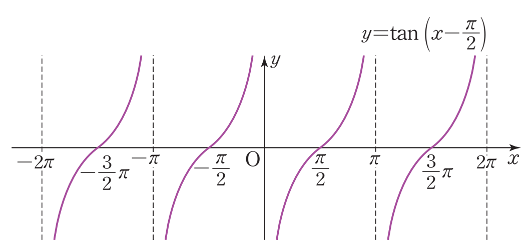
$$\begin{aligned}\tan(-120^\circ)&=\tan(-120^\circ+180^\circ)\\&=\tan 60^\circ=\sqrt{3}\end{aligned}$$

229 정답 풀이 참조

(1) $y=-\tan x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.



(2) $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.



(3) 함수 $y=\tan x$의 주기가 π이므로

$$y=-\tan(x+\pi)=-\tan x$$

따라서 $y=-\tan(x+\pi)$의 그래프는 $y=-\tan x$의 그래프와 같으므로 (1)의 그림과 같다.

08강

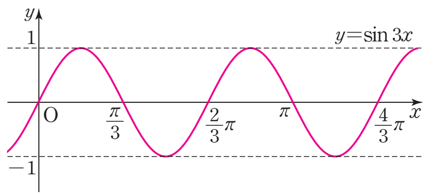
230 정답 **(1) 주기 : $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값 : 1, 최솟값 : -1**

(2) 주기 : 4π, 최댓값 : 2, 최솟값 : -2

(3) 주기 : $\frac{\pi}{2}$, 최댓값, 최솟값은 없다.

(1) 주기는 $\frac{2\pi}{|3|}=\frac{2}{3}\pi$

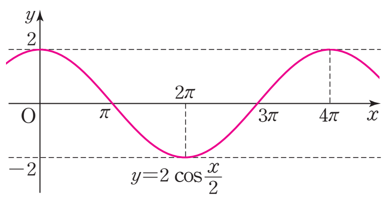
한편, $-1\leq \sin 3x\leq 1$이므로 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.



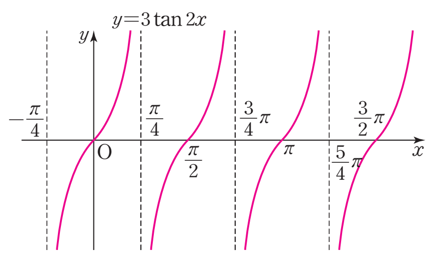
(2) 주기는 $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$

한편, $-1\leq \cos\frac{x}{2}\leq 1$이므로 $-2\leq 2\cos\frac{x}{2}\leq 2$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.



(3) 주기는 $\frac{\pi}{|2|}=\frac{\pi}{2}$, 최댓값, 최솟값은 없다.



231 정답 **(1) 주기 : π, 최댓값 : $\frac{1}{3}$, 최솟값 : $-\frac{1}{3}$**

(2) 주기 : $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값 : 5, 최솟값 : 3

(1) $y=\frac{1}{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$에서 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$,

$-1\leq\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 1$에서 $-\frac{1}{3}\leq\frac{1}{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{1}{3}$

이므로 최댓값은 $\frac{1}{3}$, 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이다.

(2) $y=\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)+4$에서 주기는 $\frac{2\pi}{|-3|}=\frac{2}{3}\pi$,

$-1\leq\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)\leq 1$에서 $3\leq\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)+4\leq 5$이므로

최댓값은 5, 최솟값은 3이다.

232 정답 **$a=3$, $b=6$, $c=2$**

함수 $y=a\sin bx+c$의 최댓값은 $|a|+c$, 최솟값은 $-|a|+c$이고 $a>0$이므로

$a+c=5$, $-a+c=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=2$

또, 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$에서

$b=6$

233 정답 **$a=2$, $b=4$, $c=1$**

그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $c=1$

최댓값이 $a+c$이므로

$a+c=3$ $\quad\therefore a=2$

그래프에서 주기는 $\frac{3}{8}\pi-\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore b=4\ (\because b>0)$

$\therefore a=2,\ b=4,\ c=1$

234 정답 **(1) 최댓값 : $-\frac{1}{2}$, 최솟값 : $-\frac{3}{2}$**

(2) 최댓값 : 4, 최솟값 : -1

(1) $-1\leq\sin 2x\leq 1$에서 $-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}\sin 2x\leq\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{3}{2}\leq\frac{1}{2}\sin 2x-1\leq-\frac{1}{2}$

따라서 $-\frac{3}{2}\leq y\leq-\frac{1}{2}$이므로

최댓값 : $-\frac{1}{2}$, 최솟값 : $-\frac{3}{2}$

(2) $-1\leq\cos x\leq 1$에서 $-3\leq 3\cos x\leq 3$이므로

$-5\leq 3\cos x-2\leq 1$

즉, $0\leq|3\cos x-2|\leq 5$이므로

$-1\leq|3\cos x-2|-1\leq 4$

따라서 $-1\leq y\leq 4$이므로

최댓값 : 4, 최솟값 : -1

235 정답 **최댓값 : 9, 최솟값 : 1**

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$를 주어진 식에 대입하면

$y=-\cos^2 x-4\sin x+5$

$=-(1-\sin^2 x)-4\sin x+5$

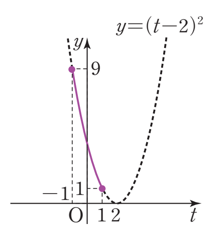
$=\sin^2 x-4\sin x+4$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\leq t\leq 1$이고

주어진 식은 $y=t^2-4t+4=(t-2)^2$

오른쪽 그림에서

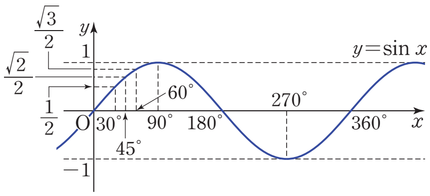
$t=-1$일 때 최댓값 9, $t=1$일 때 최솟값 1이다.

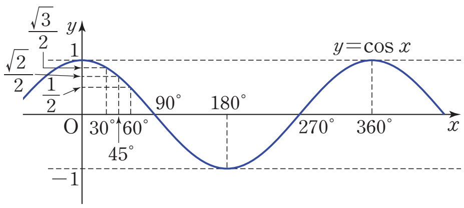


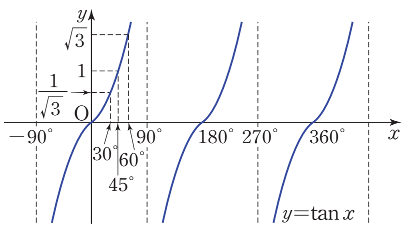
연습문제 I ·· pp.138~140

236 정답 (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

(4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) -1







(1) 사인함수의 그래프에서 $\sin 315^\circ=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 코사인함수의 그래프에서 $\cos 225^\circ=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) 탄젠트함수의 그래프에서 $\tan 240^\circ=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

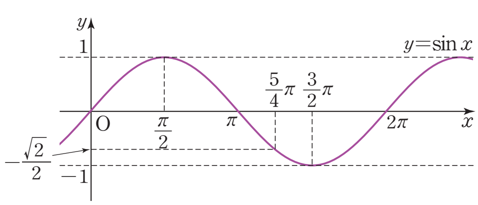
(4) 사인함수의 그래프에서 $\sin(-120^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

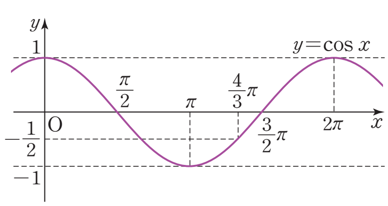
(5) 코사인함수의 그래프에서 $\cos(-60^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

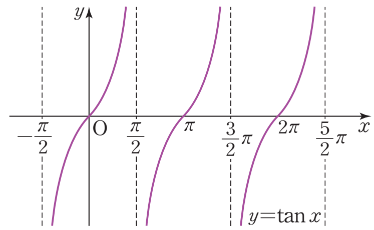
(6) 탄젠트함수의 그래프에서 $\tan(-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$

237 정답 (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) $-\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) -1







(1) $\frac{5}{4}\pi=\pi+\frac{\pi}{4}$이므로 그래프에서

$$\sin\frac{5}{4}\pi=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $\frac{4}{3}\pi=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{6}$이므로 그래프에서

$$\cos\frac{4}{3}\pi=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

(3) $\frac{7}{6}\pi=\pi+\frac{\pi}{6}$이므로 그래프에서

$$\tan\frac{7}{6}\pi=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(4) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(5) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(6) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

238 정답 $A=\left\{0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right\}$

집합 $A=\left\{x \,\middle|\, x=\sqrt{3}\sin\frac{n}{3}\pi,\ n\text{은 자연수}\right\}$에서

$n=1$일 때 $x=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$

$n=2$일 때 $x=\sqrt{3}\sin\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$

$n=3$일 때 $x=\sqrt{3}\sin\pi=0$

$n=4$일 때 $x=\sqrt{3}\sin\frac{4}{3}\pi=\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

$n=5$일 때 $x=\sqrt{3}\sin\frac{5}{3}\pi=\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

$n=6$일 때 $x=\sqrt{3}\sin 2\pi=0$

$n=7$일 때 $x=\sqrt{3}\sin\frac{7}{3}\pi=\sqrt{3}\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$

⋮

이와 같이 되풀이 되므로 $A=\left\{0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right\}$이다.

239 정답 (1) 3π (2) $\frac{\pi}{2}$

정의역의 모든 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족하는 최소의 양수 p는 주기이다.

(1) $f(x)=\sin\frac{2}{3}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$이므로 $p=3\pi$

(2) $f(x)=\tan(2x+3)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $p=\frac{\pi}{2}$

08강

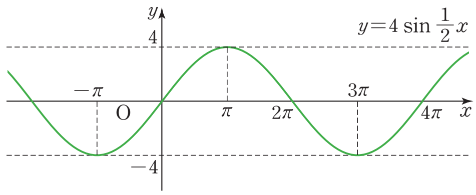
240 정답 그래프는 풀이 참조

(1) 주기 : 4π, 최댓값 : 4, 최솟값 : -4

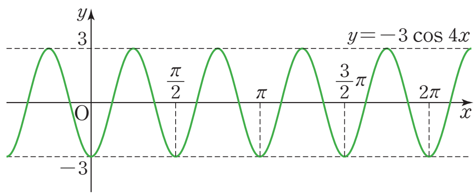
(2) 주기 : $\frac{\pi}{2}$, 최댓값 : 3, 최솟값 : -3

(3) 주기 : 1, 최댓값, 최솟값은 없다.

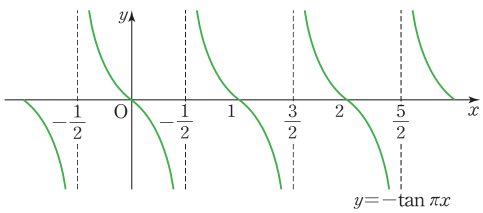
(1) 주기 : 4π, 최댓값 : 4, 최솟값 : -4



(2) 주기 : $\frac{\pi}{2}$, 최댓값 : 3, 최솟값 : -3



(3) 주기 : 1, 최댓값, 최솟값은 없다.



241 정답 (1) $m=\frac{2}{3}\pi$, $n=1$

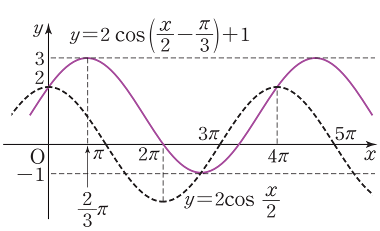
(2) 그래프는 풀이 참조, 주기 : 4π,

최댓값 : 3, 최솟값 : -1

(1) $y=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+1=2\cos\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)+1$이므로

$m=\frac{2}{3}\pi$, $n=1$

(2)



주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$, 최댓값은 $2+1=3$,

최솟값은 $-2+1=-1$

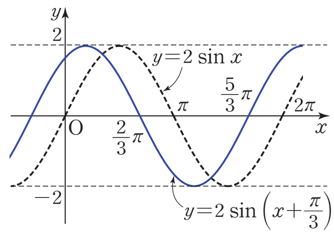
242 정답 그래프는 풀이 참조

(1) 주기 : 2π, 최댓값 : 2, 최솟값 : -2

(2) 주기 : π, 최댓값 : 2, 최솟값 : 0

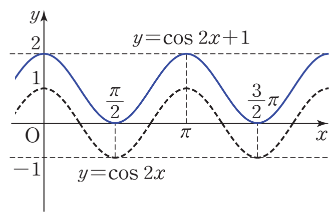
(3) 주기 : $\frac{\pi}{2}$, 최댓값과 최솟값은 없다.

(1) $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이다.



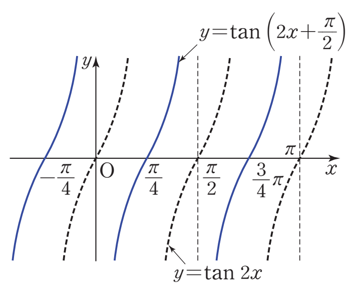
$\therefore$ 주기 : 2π, 최댓값 : 2, 최솟값 : -2

(2) $y=\cos 2x+1$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



$\therefore$ 주기 : π, 최댓값 : 2, 최솟값 : 0

(3) $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\tan 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이다.



$\therefore$ 주기 : $\frac{\pi}{2}$, 최댓값과 최솟값은 없다.

243 정답 (1) π (2) 6π (3) $\frac{\pi}{3}$

(1) 함수 $y=2\cos 2x+2$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

(2) 함수 $y=\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-1$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$이다.

(3) 함수 $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{|-3|}=\frac{\pi}{3}$이다.

244 정답 ①

$-1\le\sin 2x\le 1$이므로

$$-2\le -2\sin 2x\le 2$$

$$\therefore\ -3\le -2\sin 2x-1\le 1$$

따라서 $M=1,\ m=-3$이므로

$$M+m=-2$$

245 정답 300

주기는 $\dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{p}\right|}=4\pi$에서 $p=2$ ($\because\ p>0$)

$f(x)=-a\sin\dfrac{x}{2}+b$이므로 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{5}{2}$에서

$$-a\sin\frac{\pi}{6}+b=\frac{5}{2}$$

$$-\frac{a}{2}+b=\frac{5}{2}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

한편, $-1\le\sin\dfrac{x}{2}\le 1$이므로

$$-a+b\le -a\sin\frac{x}{2}+b\le a+b$$

최솟값이 -5이므로

$$-a+b=-5\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=15,\ b=10$$

$$\therefore\ abp=15\times 10\times 2=300$$

246 정답 (1) $y=\cos x$ (2) $y=\sin x,\ y=\tan x$ (3) $y=\tan x$

(1) $f(-x)=f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 함수의 그래프가 y축에 대하여 대칭인 것을 찾으면

$$y=\cos x$$

(2) $f(-x)=-f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 함수의 그래프가 원점에 대하여 대칭인 것을 찾으면

$$y=\sin x,\ y=\tan x$$

(3) $f(x+\pi)=f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 주기를 정수배한 수가 π이다. $y=\sin x,\ y=\cos x$의 주기는 모두 2π이므로 만족하지 않고, $y=\tan x$의 주기는 π이므로 만족한다.

$$y=\tan x$$

247 정답 $a=1,\ b=2,\ c=-\frac{\pi}{6}$

주어진 그래프에서 함수

$$y=a\cos(bx+c)=a\cos b\left(x+\frac{c}{b}\right)$$

의 최댓값이 1, 최솟값이 -1이므로 $a=1$ ($\because\ a>0$)

주기가 $\dfrac{5}{6}\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\pi$이므로 $\dfrac{2\pi}{|b|}=\pi$에서 $b=2$ ($\because\ b>0$)

또, x축 위의 두 점 $\left(-\dfrac{\pi}{6},\ 0\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$을 이은 선분의 중점은 $\left(\dfrac{\pi}{12},\ 0\right)$이므로 주어진 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{12}$만큼 평행이동한 것이다.

즉, $-\dfrac{c}{b}=-\dfrac{c}{2}=\dfrac{\pi}{12}$ ($\because\ -\pi<c<\pi$)이므로 $c=-\dfrac{\pi}{6}$

248 정답 3

함수 $f(x)=a\sin\left(bx-\dfrac{\pi}{2}\right)+c$의 최댓값은 $a+c$,

최솟값은 $-a+c$이므로 $a+c=4,\ -a+c=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ c=2$

주기는 $\dfrac{2\pi}{|b|}=4\pi$이므로 $b=\dfrac{1}{2}$ ($\because\ b>0$)

즉, $f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{2}\right)+2$이므로

$$f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=2\sin\frac{\pi}{6}+2=2\times\frac{1}{2}+2=3$$

249 정답 최댓값 : 3, 최솟값 : 1

$y=\sin^2 x-\cos x+2$

$\quad=1-\cos^2 x-\cos x+2$

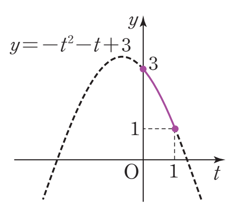
$\quad=-\cos^2 x-\cos x+3$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$이므로 $0\le t\le 1$이다.

따라서 주어진 함수는

$$y=-t^2-t+3$$

$$=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$$



이고, 그래프는 오른쪽과 같으므로

$t=0$일 때 최댓값 3,

$t=1$일 때 최솟값 1이다.

250 정답 $\frac{2}{5}$

$y=2\sin^2\theta-3\cos^2\theta-4\sin\theta$

$\quad=2\sin^2\theta-3(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta$

$\quad=5\sin^2\theta-4\sin\theta-3$

$\sin\theta=t$로 치환하면 $-1\le t\le 1$

$$y=5t^2-4t-3=5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{19}{5}$$

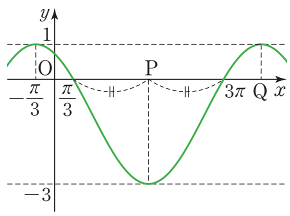
따라서 $t=\dfrac{2}{5}$, 즉 $\sin\theta=\dfrac{2}{5}$일 때 최솟값 $-\dfrac{19}{5}$를 가진다.

251 정답 24

주어진 그래프에서 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로 $a=2$

$\therefore y=2\cos(bx+c)-1$

그림과 같이 두 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$, $(3\pi,\ 0)$을 이은 선분의 중점을 P라 하면 $\mathrm{P}\left(\frac{5}{3}\pi,\ 0\right)$



점 Q의 x좌표는

$$\frac{5}{3}\pi+\left\{\frac{5}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{11}{3}\pi$$

$$\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{11}{3}\pi,\ 0\right)$$

즉, 주어진 함수의 주기는 $-\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{11}{3}\pi$까지이므로

$$\frac{11}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=4\pi$$

에서 $\frac{2\pi}{|b|}=4\pi \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$ ($\because\ b>0$)

$$\therefore y=2\cos\left(\frac{x}{2}+c\right)-1$$

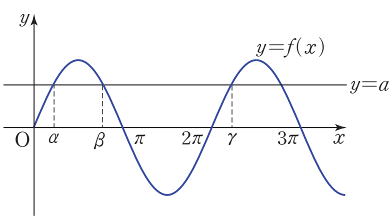
또, 주어진 그래프는 함수 $y=2\cos\frac{x}{2}-1$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로

$$y=2\cos\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-1$$

에서 $c=\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \frac{p}{abc}=\frac{4\pi}{2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}}=24$$

252 정답 ②



$f(\alpha)=\sin\alpha=a$이고, $f(x)=\sin x$의 주기는 2π이므로 그래프에서

$$\beta=\pi-\alpha,\ \gamma=2\pi+\alpha$$

$$\therefore f(\alpha+\beta+\gamma)=f(\alpha+\pi-\alpha+2\pi+\alpha)$$

$$=f(3\pi+\alpha)=\sin(3\pi+\alpha)$$

$$=-\sin\alpha=-a$$

253 정답 $\frac{1}{2}$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

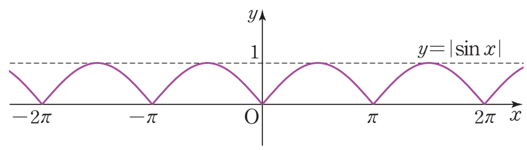
$$f(10)=f(7)=f(4)=f(1)$$

$0\le x<3$일 때, $f(x)=\cos\frac{\pi}{3}x$이므로 $f(1)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

254 정답 **주기함수 : ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ, 주기의 총합 : 5π**

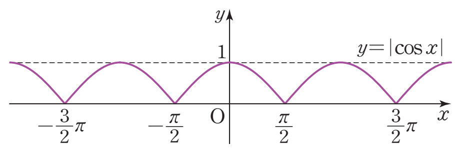
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x축의 윗부분은 그대로 두고 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이고, 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x>0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이므로 주어진 함수의 그래프는 각각 아래와 같다.

ㄱ. $y=|\sin x|$



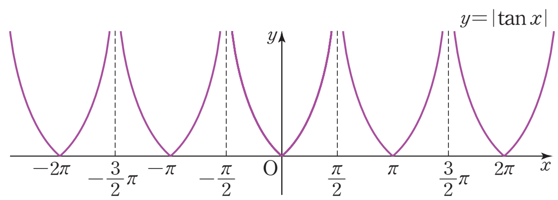
⇨ 주기가 π인 주기함수이다.

ㄴ. $y=|\cos x|$



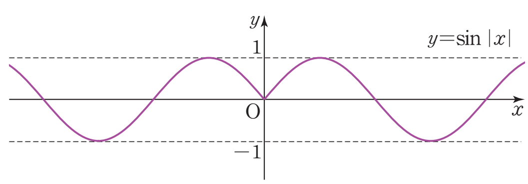
⇨ 주기가 π인 주기함수이다.

ㄷ. $y=|\tan x|$



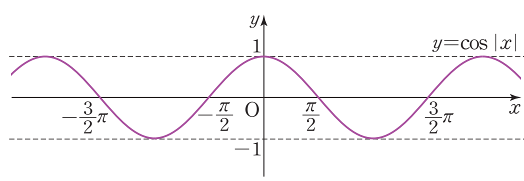
⇨ 주기가 π인 주기함수이다.

ㄹ. $y=\sin|x|$



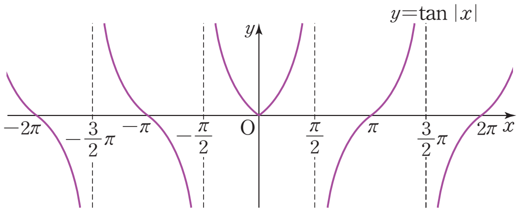
⇨ 주기함수가 아니다.

ㅁ. $y=\cos|x|$



⇨ 주기가 2π인 주기함수이다.

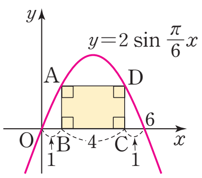
ㅂ. $y=\tan|x|$



⇨ 주기함수가 아니다.

따라서 주기함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ이고, 주기의 총합은 5π이다.

255 정답 4 서술형



$y=2\sin\frac{\pi}{6}x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$ … ①

$x>0$인 범위에서 $y=2\sin\frac{\pi}{6}x$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표의 최솟값은 6이다.

또, $\overline{BC}=4$이므로 두 점 B, C의 좌표를 각각 $(b,\ 0)$, $(b+4,\ 0)$으로 놓으면

$b+4=6-b \qquad \therefore b=1$ … ②

따라서 B$(1,\ 0)$, C$(5,\ 0)$이므로 $A\left(1,\ 2\sin\frac{\pi}{6}\right)$, 즉 A$(1,\ 1)$이다. … ③

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 $4\times1=4$ … ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	주어진 함수의 주기 구하기	20%
②	그래프의 대칭성을 이용하여 두 점 B, C의 좌표 구하기	40%
③	점 A의 좌표 구하기	20%
④	직사각형 ABCD의 넓이 구하기	20%

9. 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식

개념 보충

(1) 함수 $y=\sin x$와 $y=\cos x$의 주기는 2π이므로

$y=\sin x=\sin(x+2\pi)=\sin(x+4\pi)$

$=\cdots=\sin(2n\pi+x)$ (단, n은 정수)

$y=\cos x=\cos(x+2\pi)=\cos(x+4\pi)$

$=\cdots=\cos(2n\pi+x)$ (단, n은 정수)

마찬가지로 $y=\tan x$의 주기는 π이므로

$y=\tan x=\tan(x+\pi)=\tan(x+2\pi)$

$=\cdots=\tan(n\pi+x)$ (단, n은 정수)

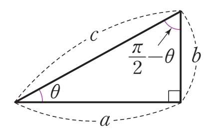
(2) 함수 $y=\sin x$와 $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$\sin(-x)=-\sin x$, $\tan(-x)=-\tan x$

또, 함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$\cos(-x)=\cos x$

(3) 오른쪽 그림의 직각삼각형에서



$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{a}{c}=\cos\theta$,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{b}{c}=\sin\theta$,

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{a}{b}=\frac{1}{\tan\theta}$

유형 pp.147~152

001 정답 (1) 0 (2) 2

(1) $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$이므로

(주어진 식) $=-\sin\theta+\sin\theta+\cos\theta-\cos\theta$

$=0$

(2) $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로

(주어진 식)

$=(-\cos\theta)^2+\sin^2\theta+(-\sin\theta)^2+(-\cos\theta)^2$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=1+1=2$

002 정답 (1) $\frac{91}{2}$ (2) 1

(1) $\sin 89^\circ=\sin(90^\circ-1^\circ)=\cos 1^\circ$,

$\sin 88^\circ=\sin(90^\circ-2^\circ)=\cos 2^\circ$,

$\vdots$

$\sin 46^\circ=\sin(90^\circ-44^\circ)=\cos 44^\circ$이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ)\\&\quad+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 45^\circ\\&\quad+\sin^2 90^\circ\\&=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)\\&\quad+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1^2\\&=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{44\text{개}}+\frac{1}{2}+1=\frac{91}{2}\end{aligned}$$

(2) $\tan 89^\circ=\tan(90^\circ-1^\circ)=\frac{1}{\tan 1^\circ}$

$\tan 88^\circ=\tan(90^\circ-2^\circ)=\frac{1}{\tan 2^\circ}$

$\vdots$

$\tan 46^\circ=\tan(90^\circ-44^\circ)=\frac{1}{\tan 44^\circ}$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식})&=(\tan 1^\circ\times\tan 89^\circ)\times(\tan 2^\circ\times\tan 88^\circ)\\&\quad\times\cdots\times(\tan 44^\circ\times\tan 46^\circ)\times\tan 45^\circ\\&=\underbrace{1\times1\times\cdots\times1}_{44\text{개}}\times1=1\end{aligned}$$

003 정답 (1) $x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{12}\pi$

(2) $\frac{2}{3}\pi\le x\le\pi$

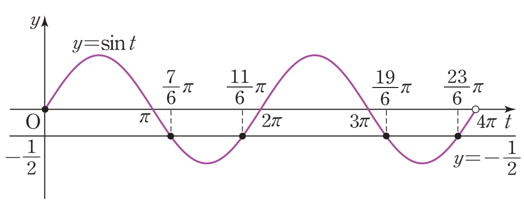
(3) $\frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x<\frac{5}{3}\pi$

(1) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x=\frac{1}{2}$에서 $\sin 2x=-\frac{1}{2}$

여기서 $2x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le t<4\pi$

$\sin t=-\frac{1}{2}$

함수 $y=\sin t$ $(0\le t<4\pi)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$은 다음과 같다.



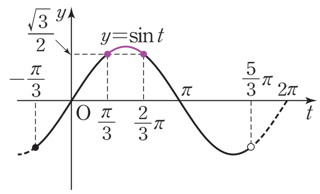
$\therefore t=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{11}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{19}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{23}{6}\pi$

$2x=t$에서 $x=\frac{t}{2}$이므로 구하는 해는

$x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{12}\pi$

(2) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면

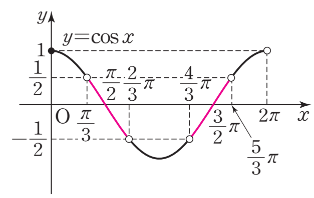
$-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$, $\sin t\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\therefore \frac{\pi}{3}\le t\le\frac{2}{3}\pi$

따라서 $\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{2}{3}\pi$이므로 $\frac{2}{3}\pi\le x\le\pi$

(3) $|\cos x|<\frac{1}{2}$에서 $-\frac{1}{2}<\cos x<\frac{1}{2}$



$\therefore \frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x<\frac{5}{3}\pi$

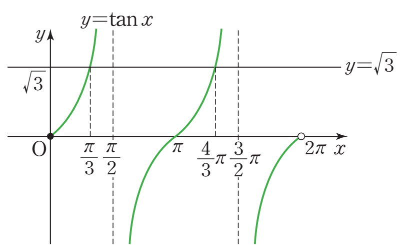
004 정답 (1) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

(2) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(3) $0\le x<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

(1) $\sin x=\sqrt{3}\cos x$에서 $\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{3}$, 즉 $\tan x=\sqrt{3}$

함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$은 다음과 같다.



$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

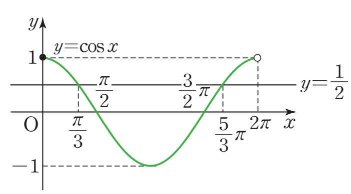
(2) $2\sin^2 x-5\cos x+1=0$

$2(1-\cos^2 x)-5\cos x+1=0$

$(2\cos x-1)(\cos x+3)=0$

$-1\le\cos x\le1$이므로 $\cos x=\frac{1}{2}$

함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 그림과 같다.

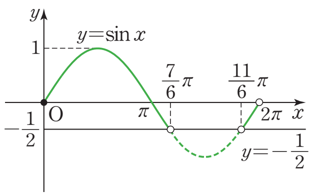


$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(3) $\cos^2 x=1-\sin^2 x$를 $2\cos^2 x+3\sin x>0$에 대입하면

$$2(1-\sin^2 x)+3\sin x>0$$
$$(\sin x-2)(2\sin x+1)<0$$
$$\therefore\ -\frac{1}{2}<\sin x<2$$

이때, $-1\le\sin x\le1$이므로 $-\frac{1}{2}<\sin x\le1$



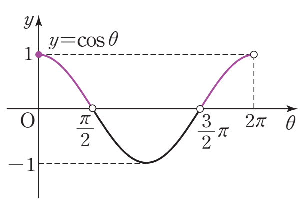
$\therefore\ 0\le x<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

005 정답 (1) $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ (2) $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{3}\pi$

(1) 이차부등식 $x^2-2x\cos\theta+2\cos\theta>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2-2x\cos\theta+2\cos\theta=0$의 판별식 D가 $D<0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=\cos^2\theta-2\cos\theta=\cos\theta(\cos\theta-2)<0$$
$$\therefore\ 0<\cos\theta<2$$

이때, $-1\le\cos\theta\le1$이므로 $0<\cos\theta\le1$



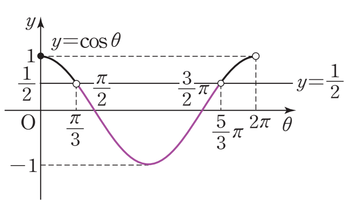
$$\therefore\ 0\le\theta<\frac{\pi}{2}\ \text{또는}\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$$

(2) 이차방정식 $2x^2+x+2\cos\theta-1=0$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=\frac{2\cos\theta-1}{2}$$

이때, 두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$에서

$$2\cos\theta-1<0,\ \text{즉}\ \cos\theta<\frac{1}{2}$$



$$\therefore\ \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{3}\pi$$

확인문제 pp.147~152

256 정답 (1) $\cos\theta$ (2) 2

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$,

$\sin(\theta-\pi)=\sin(\theta+\pi)$ ← 주기인 2π를 더해도 같다.

$=-\sin\theta$

$\therefore$ (주어진 식) $=\cos\theta+\sin\theta-\sin\theta$

$=\cos\theta$

(2) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$,

$\cos(3\pi-\theta)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$,

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$, $\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta$

$\therefore$ (주어진 식) $=\frac{-\sin\theta}{-\sin\theta}-\frac{-\cos\theta\tan\theta}{\sin\theta}$

$=1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=1+1$

$=2$

257 정답 (1) -1 (2) 0

(1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$,

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\tan(\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$,

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$

$\therefore$ (주어진 식) $=\frac{-\cos\theta}{\cos\theta\cos^2\theta}-\frac{-\sin\theta(-\tan\theta)^2}{\sin\theta}$

$=-\frac{1}{\cos^2\theta}+\tan^2\theta$

$=-\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=-\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=-\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=-1$

(2) $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$,

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$,

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\therefore$ (주어진 식) $=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta(-\cos\theta)}-\frac{\sin\theta}{(-\cos\theta)^3}$

$=\frac{\sin\theta}{-\cos^3\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}=0$

258 정답 (1) $\frac{89}{2}$ (2) 1

(1) $\cos 89^\circ=\cos(90^\circ-1^\circ)=\sin 1^\circ$,

$\cos 88^\circ=\cos(90^\circ-2^\circ)=\sin 2^\circ$,

$\vdots$

$\cos 46^\circ=\cos(90^\circ-44^\circ)=\sin 44^\circ$이므로

$\therefore$ (주어진 식)

$=(\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\cos^2 88^\circ)$

$\quad+\cdots+(\cos^2 44^\circ+\cos^2 46^\circ)+\cos^2 45^\circ$

$=(\cos^2 1^\circ+\sin^2 1^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\sin^2 2^\circ)$

$\quad+\cdots+(\cos^2 44^\circ+\sin^2 44^\circ)+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{44\text{개}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{89}{2}$

(2) $\tan 80^\circ=\tan(90^\circ-10^\circ)=\dfrac{1}{\tan 10^\circ}$

$\tan 70^\circ=\tan(90^\circ-20^\circ)=\dfrac{1}{\tan 20^\circ}$

$\tan 60^\circ=\tan(90^\circ-30^\circ)=\dfrac{1}{\tan 30^\circ}$

$\tan 50^\circ=\tan(90^\circ-40^\circ)=\dfrac{1}{\tan 40^\circ}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=(\tan 10^\circ\times\tan 80^\circ)\times(\tan 20^\circ\times\tan 70^\circ)$

$\quad\times(\tan 30^\circ\times\tan 60^\circ)\times(\tan 40^\circ\times\tan 50^\circ)$

$=1\times1\times1\times1=1$

259 정답 **0**

$\sin 350^\circ=\sin(360^\circ-10^\circ)=-\sin 10^\circ$이므로

$\sin 350^\circ+\sin 10^\circ=0$

$\sin 340^\circ=\sin(360^\circ-20^\circ)=-\sin 20^\circ$이므로

$\sin 340^\circ+\sin 20^\circ=0$

$\vdots$

$\sin 190^\circ=\sin(360^\circ-170^\circ)=-\sin 170^\circ$이므로

$\sin 190^\circ+\sin 170^\circ=0$

$\therefore$ (주어진 식)$=(\sin 10^\circ+\sin 350^\circ)+(\sin 20^\circ+\sin 340^\circ)$

$\quad+\cdots+(\sin 170^\circ+\sin 190^\circ)$

$\quad+\sin 180^\circ+\sin 360^\circ$

$=0+0+\cdots+0+0=0$

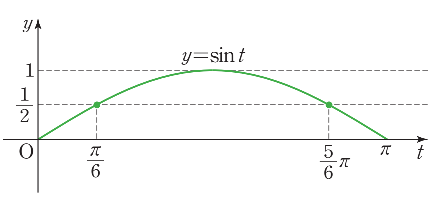
260 정답 (1) $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

(2) $x=\dfrac{\pi}{12}$ 또는 $x=\dfrac{11}{12}\pi$ 또는

$x=\dfrac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\dfrac{23}{12}\pi$

(1) $\dfrac{x}{2}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le t<\pi$

함수 $y=\sin t\ (0\le t<\pi)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2}$은 다음과 같다.



$\therefore t=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $t=\dfrac{5}{6}\pi$

$\dfrac{x}{2}=t$에서 $x=2t$이므로 구하는 해는

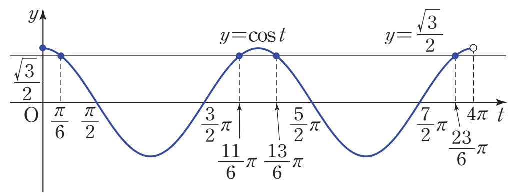
$x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

(2) $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$이므로 $\cos 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

여기서 $2x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le t<4\pi$

주어진 방정식은 $\cos t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ (0\le t<4\pi)$

함수 $y=\cos t\ (0\le t<4\pi)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$은 다음과 같다.



$\therefore t=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $t=\dfrac{11}{6}\pi$ 또는 $t=\dfrac{13}{6}\pi$ 또는 $t=\dfrac{23}{6}\pi$

$2x=t$에서 $x=\dfrac{t}{2}$이므로 구하는 해는

$x=\dfrac{\pi}{12}$ 또는$x=\dfrac{11}{12}\pi$ 또는 $x=\dfrac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\dfrac{23}{12}\pi$

261 정답 (1) $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{11}{12}\pi$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi<x<\dfrac{23}{12}\pi$

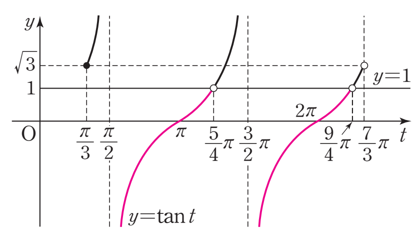
(2) $0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{5}{6}\pi\le x\le\dfrac{7}{6}\pi$

또는 $\dfrac{11}{6}\pi\le x<2\pi$

(1) $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)<1$에서 $x+\dfrac{\pi}{3}=t$로 놓으면

$\dfrac{\pi}{3}\le t<\dfrac{7}{3}\pi,\ \tan t<1$

함수 $y=\tan t\left(\dfrac{\pi}{3}\le t<\dfrac{7}{3}\pi\right)$의 그래프와 직선 $y=1$은 다음과 같다.

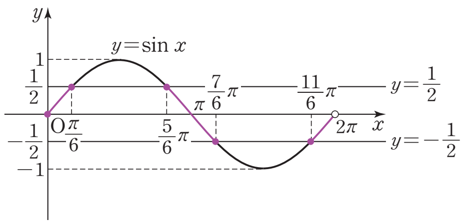


따라서 $\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{5}{4}\pi$ 또는 $\dfrac{3}{2}\pi<t<\dfrac{9}{4}\pi$, 즉

$\dfrac{\pi}{2}<x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{4}\pi$ 또는 $\dfrac{3}{2}\pi<x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{9}{4}\pi$이므로

구하는 해는 $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{11}{12}\pi$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi<x<\dfrac{23}{12}\pi$이다.

(2) $|\sin x| \le \frac{1}{2}$에서 $-\frac{1}{2} \le \sin x \le \frac{1}{2}$



그림에서 $-\frac{1}{2} \le \sin x \le \frac{1}{2}$을 만족하는 x의 값의 범위는

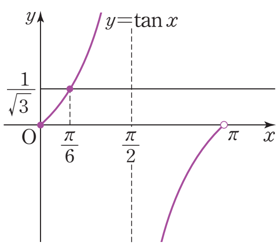
$$0 \le x \le \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi \le x < 2\pi$$

262 정답 (1) $x=\frac{\pi}{6}$ (2) $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

(3) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

(1) $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$은 다음과 같다.



$\therefore\ x=\frac{\pi}{6}$

(2) $\sin^2 x=1-\cos^2 x$를 $2\sin^2 x+\cos x-1=0$에 대입하면

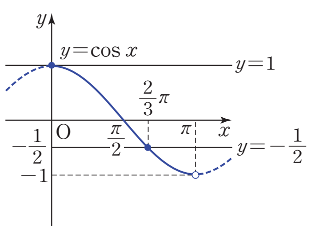
$2(1-\cos^2 x)+\cos x-1=0$

$2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$(\cos x-1)(2\cos x+1)=0$

$\therefore\ \cos x=1$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$

함수 $y=\cos x$의 그래프와 두 직선 $y=1$, $y=-\frac{1}{2}$은 다음과 같다.



(i) $\cos x=1$에서 $x=0$

(ii) $\cos x=-\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{2}{3}\pi$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

(3) $\cos^2 x=1-\sin^2 x$를 $2\cos^2 x+3\sin x-3=0$에 대입하면

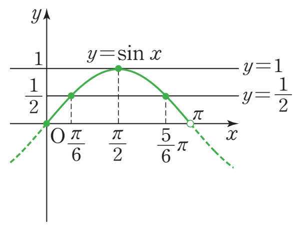
$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-3=0$

$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

$(2\sin x-1)(\sin x-1)=0$

$\therefore\ \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

함수 $y=\sin x$의 그래프와 두 직선 $y=\frac{1}{2}$, $y=1$은 다음과 같다.



(i) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(ii) $\sin x=1$일 때

$x=\frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

263 정답 $0 \le x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi < x < 2\pi$

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$를 $5\sin x+2\cos^2 x<4$에 대입하면

$5\sin x+2(1-\sin^2 x)<4$

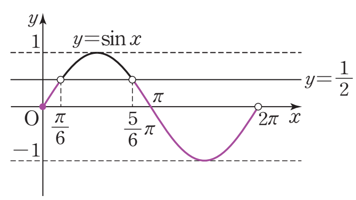
$2\sin^2 x-5\sin x+2>0$

$(2\sin x-1)(\sin x-2)>0$

$\therefore\ \sin x<\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x>2$

이때, $-1 \le \sin x \le 1$이므로

$-1 \le \sin x < \frac{1}{2}$



$\therefore\ 0 \le x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi < x < 2\pi$

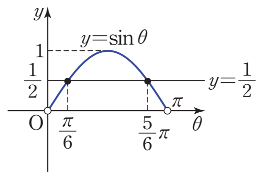
264 정답 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

$x^2-4x\sin\theta+1=0$이 중근을 가지려면 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$$\frac{D}{4}=(-2\sin\theta)^2-1=0$$

$$\therefore \sin\theta=\pm\frac{1}{2}$$

이때, $0<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{2}$



$$\therefore \theta=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta=\frac{5}{6}\pi$$

265 정답 (1) (부채꼴 OAB)$=\frac{1}{2}\theta$,

(삼각형 OBT)$=\frac{1}{2}\tan\theta$

(2) 풀이 참조

(1) 부채꼴 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}^2\cdot\theta=\frac{1}{2}\theta$

삼각형 OBT의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{TB}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OB}\tan\theta$$

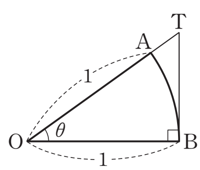
$$=\frac{1}{2}\tan\theta$$

(2) 주어진 그림에서 도형의 넓이를 비교하면

(부채꼴 OAB)$<$($\triangle$OBT)

이고, (1)에 의하여 $\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\tan\theta$

$\therefore \theta<\tan\theta$



연습문제 I .... pp.153~156

266 정답 (1) 1 (2) 1

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$이므로

(주어진 식)$=\cos\theta\cos\theta-(-\sin\theta)\sin\theta$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

(2) $\cos 50^\circ=\cos(90^\circ-40^\circ)=\sin 40^\circ$,

$\sin 50^\circ=\sin(90^\circ-40^\circ)=\cos 40^\circ$이므로

(주어진 식)$=\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ=1$

267 정답 (1) 2 (2) 1

(1) $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$이므로

(주어진 식)$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

(2) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$,

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{\tan(-\theta)}=-\frac{1}{\tan\theta}$,

$\tan(\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$,

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$이므로 ← 탄젠트함수의 주기는 π이다.

(주어진 식)

$=\frac{1}{\tan\theta}\times\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)\times(-\tan\theta)\times\tan\theta=1$

268 정답 (1) 0 (2) 0

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$이므로

(주어진 식)$=\cos\theta+(-\cos\theta)=0$

(2) $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$,

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$이므로

(주어진 식)$=-\sin\theta+\sin\theta-\cos\theta-(-\cos\theta)=0$

269 정답 ②

ㄱ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$이고 $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\neq\cos(\pi+\theta)$

ㄴ. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이고 $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$이므로

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin(\pi+\theta)$

ㄷ. $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$이고 $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$이므로

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\neq\frac{1}{\tan(\pi+\theta)}$

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

270 정답 -1

$\theta=\frac{\pi}{10}$에서 $10\theta=\pi$이므로

$\cos 9\theta=\cos(10\theta-\theta)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\cos 8\theta=\cos(10\theta-2\theta)=\cos(\pi-2\theta)=-\cos 2\theta$

$\cos 7\theta=\cos(10\theta-3\theta)=\cos(\pi-3\theta)=-\cos 3\theta$

$\cos 6\theta=\cos(10\theta-4\theta)=\cos(\pi-4\theta)=-\cos 4\theta$

$\cos 5\theta=\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\cos 10\theta=\cos\pi=-1$

$\therefore$ (주어진 식)$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 4\theta+0$

$-\cos\theta-\cos 2\theta-\cdots-\cos 4\theta-1$

$=-1$

271 정답 ㄴ, ㄷ

$y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$이므로

ㄱ. $y=\sin 2x$ (×)

ㄴ. $y=\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos 2x$ (○)

ㄷ. $y=\cos 2x$ (○)

ㄹ. $y=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x$ (×)

따라서 주어진 함수와 그래프가 일치하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

272 정답 (1) 80° (2) 50°

(1) $\sin 280^\circ=\sin(360^\circ-80^\circ)$

$=\sin(-80^\circ)=-\sin 80^\circ$

이므로 $-\sin 80^\circ=-\sin\theta$

$0\le\theta<90^\circ$이므로 $\theta=80^\circ$

(2) $\cos 500^\circ=\cos(360^\circ+140^\circ)=\cos 140^\circ$

$=\cos(90^\circ+50^\circ)=-\sin 50^\circ$

이므로 $-\sin 50^\circ=-\sin\theta$

$0\le\theta<90^\circ$이므로 $\theta=50^\circ$

273 정답 (1) 1 (2) 1

(1) $\sin 205^\circ=\sin(180^\circ+25^\circ)=-\sin 25^\circ$

$\sin 250^\circ=\sin(180^\circ+70^\circ)=-\sin 70^\circ$

∴ (주어진 식) $=\sin 25^\circ+\sin 70^\circ+1-\sin 25^\circ-\sin 70^\circ$

$=1$

(2) $\sin(-150^\circ)=\sin(360^\circ-150^\circ)=\sin 210^\circ$

$=\sin(180^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ$

$=-\frac{1}{2}$

$\tan 135^\circ=\tan(180^\circ-45^\circ)=\tan(-45^\circ)$

$=-\tan 45^\circ$

$=-1$

$\tan 570^\circ=\tan(180^\circ\times3+30^\circ)$

$=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos 1050^\circ=\cos(360^\circ\times3-30^\circ)$

$=\cos(-30^\circ)=\cos 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ (주어진 식) $=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{-1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=1$

274 정답 $\frac{1}{15}$

∠B가 직각인 직각삼각형 CDB에서

$\angle CDB=\pi-\theta$, $\overline{CD}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$\sin(\pi-\theta)=\frac{4}{5}$, $\cos(\pi-\theta)=\frac{3}{5}$, $\tan(\pi-\theta)=\frac{4}{3}$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{4}{5}$,

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{3}{5}$에서 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$,

$\tan(\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta=\frac{4}{3}$에서 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta+\tan\theta=\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{1}{15}$

275 정답 최댓값 : $\frac{1}{4}$, 최솟값 : -2

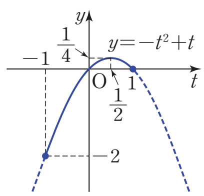
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, $\cos(\pi+x)=-\cos x$이므로 주어진 함수는

$y=\cos x-(-\cos x)^2=-\cos^2 x+\cos x$

이때, $\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2+t$

$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$



이므로 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{1}{4}$,

$t=-1$일 때 최솟값 -2이다.

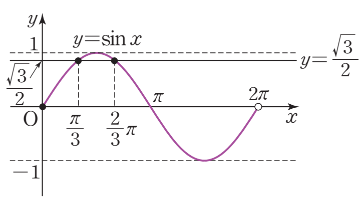
276 정답 (1) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

(2) $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$

(1) $(2\sin x-\sqrt{3})(\tan x-\sqrt{3})=0$에서

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\tan x=\sqrt{3}$

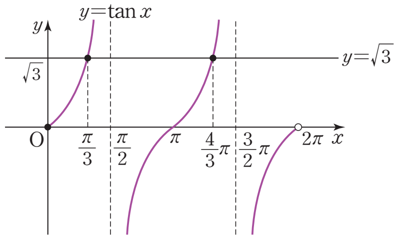
(i) $0\le x<2\pi$인 범위에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 다음과 같다.



이때, 위의 그림에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표인 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$가 구하는 해이다.

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

(ii) $0\le x<2\pi$인 범위에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$은 다음과 같다.



이때, 위의 그림에서 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표인 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$가 구하는 해이다.

$\therefore\ x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

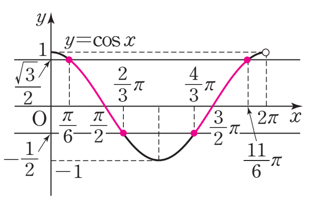
(i), (ii)에서 구하는 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

(2) $(2\cos x-\sqrt{3})(2\cos x+1)\le 0$에서

$-\frac{1}{2}\le\cos x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

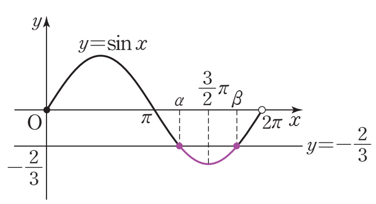
$0\le x<2\pi$인 범위에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 다음과 같다.



따라서 구하는 해는 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있거나 같고, 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 아래쪽에 있거나 같은 x의 값의 범위인 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$이다.

277 정답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

부등식 $\sin x\le-\frac{2}{3}$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{2}{3}$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.



위의 그림에서 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$을 이은 선분의 중점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 0\right)$이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$ $\quad\therefore\ \alpha+\beta=3\pi$

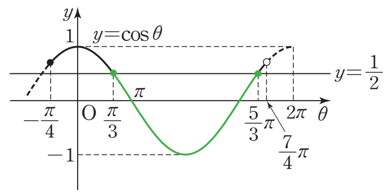
$\therefore\ \sin\frac{\alpha+\beta}{4}=\sin\frac{3}{4}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

278 정답 ⑤

$2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$에서 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{1}{2}$

여기서 $x-\frac{\pi}{4}=\theta$로 놓으면 $-\frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{7}{4}\pi$이므로

함수 $y=\cos\theta$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 다음과 같다.



$-\frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{7}{4}\pi$에서 삼각방정식 $\cos\theta=\frac{1}{2}$의 해를 구하면

$\theta=\frac{\pi}{3}$, $\theta=\frac{5}{3}\pi$이다.

구하는 부등식의 해는 함수 $y=\cos\theta$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있거나 같은 θ의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$

따라서 $\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{5}{3}\pi$이므로

$\frac{7}{12}\pi\le x\le\frac{23}{12}\pi$

279 정답 $\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2\sin\theta)^2-6\cos\theta\ge 0$

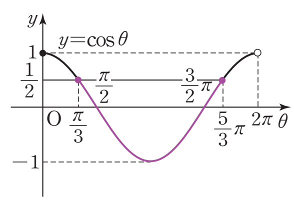
$4\sin^2\theta-6\cos\theta\ge 0$

$4(1-\cos^2\theta)-6\cos\theta\ge 0$

$2(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)\le 0$

$\therefore\ -2\le\cos\theta\le\frac{1}{2}$

이때, $-1\le\cos\theta\le 1$이므로 $-1\le\cos\theta\le\frac{1}{2}$



$\therefore\ \frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$

280 정답 $x=\pi+\alpha$ 또는 $x=\pi+\beta$

$y=\sin x$와 $y=a$의 교점의 x좌표가 α, β이므로

$\sin\alpha=a$, $\sin\beta=a$

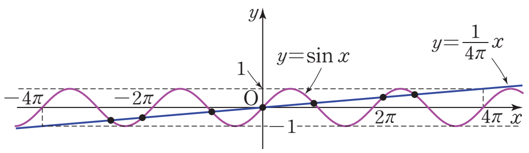
이때, $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-a$,

$\sin(\pi+\beta)=-\sin\beta=-a$이므로 방정식 $\sin x=-a$의 해는

$x=\pi+\alpha$ 또는 $x=\pi+\beta$

281 정답 7

방정식 $\sin x=\frac{1}{4\pi}x$의 실근은 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4\pi}x$의 교점의 x좌표이므로 다음 그림에서 실근의 개수는 7이다.



282 정답 $x=0$ 또는$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$2(1-\sin^2 x)+\sin x-2=0$

$2\sin^2 x-\sin x=0$, $\sin x(2\sin x-1)=0$,

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\sin x=0$에서 $x=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 구하는 해는 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

283 정답 $-\frac{1}{2}$

$\sin\pi x=\frac{1}{2}$에서

$\pi x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\pi x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\pi x=\frac{13}{6}\pi$

$\alpha<\beta<\gamma$이므로

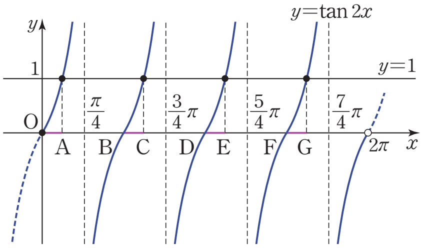
$\alpha=\frac{1}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}$, $\gamma=\frac{13}{6}$

따라서 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{19}{6}$이므로

$$f(\alpha+\beta+\gamma)=f\left(\frac{19}{6}\right)=\sin\frac{19}{6}\pi$$
$$=\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

284 정답 ④

함수 $y=\tan 2x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 함수 $y=\tan 2x$의 그래프와 직선 $y=1$은 다음과 같다.



$0<x<\frac{\pi}{4}$에서 $\tan 2x=1$의 해를 구하면

$2x=\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore x=\frac{\pi}{8}$

$\overline{OA}=\overline{BC}=\overline{DE}=\overline{FG}=\frac{\pi}{8}$이므로

점 C의 x좌표는 $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{8}\pi$

점 E의 x좌표는 $\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{9}{8}\pi$

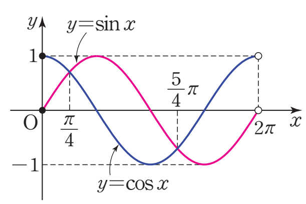
점 G의 x좌표는 $\frac{\pi}{8}+\frac{3}{2}\pi=\frac{13}{8}\pi$

$\therefore \frac{\pi}{8}+\frac{5}{8}\pi+\frac{9}{8}\pi+\frac{13}{8}\pi=\frac{28}{8}\pi=\frac{7}{2}\pi$

연습문제 Ⅱ p.157

285 정답 π

함수 $y=\sin x$의 그래프와 함수 $y=\cos x$의 그래프는 다음과 같다.



두 그래프의 교점의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

따라서 함수 $y=\sin x$의 그래프가 함수 $y=\cos x$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위는 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$이므로

$\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{5}{4}\pi$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\pi$

286 정답 2

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$를 주어진 부등식 $\cos^2\theta-4\sin\theta\le 2k$에 대입하면

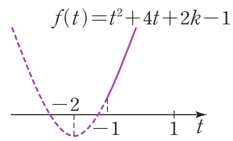
$$(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta\le 2k$$

정리하면 $\sin^2\theta+4\sin\theta+2k-1\ge 0$

여기서 $t=\sin\theta$로 놓으면 $-1\le t\le 1$

즉, 부등식 $t^2+4t+2k-1\ge 0$이 $-1\le t\le 1$의 범위에서 항상 성립해야 한다.

오른쪽 그림의 함수 $f(t)=t^2+4t+2k-1$의 그래프에서 축의 방정식이 $t=-2$이므로 $f(-1)\ge 0$이면 된다.



$$f(-1)=(-1)^2-4+2k-1\ge 0$$

$$2k-4\ge 0 \qquad \therefore k\ge 2$$

따라서 실수 k의 최솟값은 2이다.

287 정답 2분

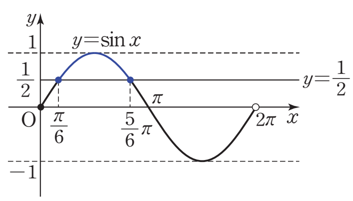
놀이기구의 최대 높이는 21 m, 최소 높이는 1 m이고, 주기가 6분이므로 시각 t에서 탑승한 칸의 높이 y m는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y=10\sin\frac{2}{6}\pi t+11$$

부등식 $10\sin\frac{2}{6}\pi t+11\ge 16\ (0\le t<6)$을 풀면

$$\sin\frac{\pi}{3}t\ge\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{\pi}{3}t=x$로 놓으면 $0\le x<2\pi$이고 두 함수 $y=\sin x$와 $y=\frac{1}{2}$의 그래프는 다음과 같다.



그림에서 부등식 $\sin x\ge\frac{1}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$이므로

부등식 ㉠의 해는 $\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{3}t\le\frac{5}{6}\pi$

$$\therefore \frac{1}{2}\le t\le\frac{5}{2}$$

따라서 놀이 기구를 타고 한 바퀴 돌 때, 지상에서 16 m 이상인 곳에 있는 시간은

$$\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2(\text{분})$$

288 정답 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$ 서술형

$y=x^2-2x\sin\theta+\cos^2\theta$

$\quad=(x-\sin\theta)^2-\sin^2\theta+\cos^2\theta$

에서 꼭짓점의 좌표는 $(\sin\theta,\ \cos^2\theta-\sin^2\theta)$이다. … ①

이때, 꼭짓점 $(\sin\theta,\ \cos^2\theta-\sin^2\theta)$이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\sin\theta$ … ②

$(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta=\sin\theta$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\theta=-1$

$0\le\theta<\pi$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{2}$에서 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$이고, $\sin\theta=-1$인 θ는 없다.

따라서 구하는 값은

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표 구하기	30 %
②	꼭짓점이 직선 $y=x$ 위에 있음을 이용하여 식 세우기	30 %
③	삼각방정식의 해 구하기	40 %

10. 사인법칙과 코사인법칙

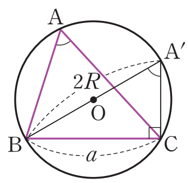
개념 보충

사인법칙의 증명

삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R 라고 할 때, ∠A의 크기에 따라 세 가지 경우로 나누어 $\frac{a}{\sin A}$의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $A<90^\circ$일 때

선분 BA′이 지름이 되도록 점 A′을 잡으면 $A=A'$이고, ∠A′CB$=90^\circ$이므로



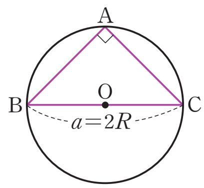
$$\sin A=\sin A'=\frac{a}{2R}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A}=2R$$

(ii) $A=90^\circ$일 때

선분 BC는 원의 지름이다.

따라서 $a=2R$이므로



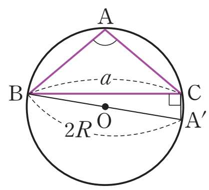
$$\sin A=1=\frac{a}{2R}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A}=2R$$

(iii) $A>90^\circ$일 때

선분 BA′이 지름이 되도록 점 A′을 잡으면

$A=180^\circ-A'$이고, $A'<90^\circ$ 이므로



$$\sin A=\sin(180^\circ-A')$$

$$=\sin A'=\frac{a}{2R}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A}=2R$$

따라서 ∠A의 크기에 관계없이 $\frac{a}{\sin A}=2R$이다.

같은 방법으로

$$\frac{b}{\sin B}=2R,\ \frac{c}{\sin C}=2R$$

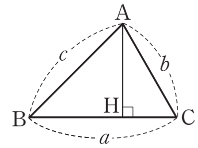
임을 알 수 있다.

개념 보충

(i) $C<90^\circ$일 때

$a=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{CH}}$

$=c\cos B+b\cos C$

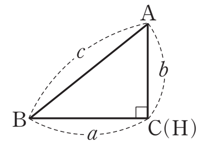


(ii) $C=90^\circ$일 때

$a=\overline{\mathrm{BC}}=c\cos B$

$=c\cos B+b\cos C$

(∵ $C=90^\circ$일 때 $\cos C=0$)

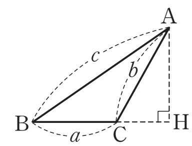


(iii) $C>90^\circ$일 때

$a=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BH}}-\overline{\mathrm{CH}}$

$=c\cos B-b\cos(\pi-C)$

$=c\cos B+b\cos C$



유형 ·· pp.163~170

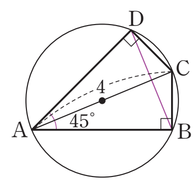
001

정답 **(1) 외접원의 반지름의 길이 : 2, $\overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{2}$**

(2) $3\sqrt{2}$

(1) ∠B$=$∠D$=90^\circ$이므로 사각형 ABCD는 $\overline{\mathrm{AC}}$를 지름으로 하는 원에 내접하는 사각형이다.

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}=4$이므로



$R=2$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin 45^\circ}=4 \qquad \therefore \overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{2}$$

(2) 삼각형 ABC에서

$B=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 45^\circ}=\frac{3}{\sin 30^\circ}$$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{2}$

002

정답 **(1) $a=7$, 반지름의 길이 : $\frac{7\sqrt{3}}{3}$**

(2) $\overline{\mathrm{AC}}$의 길이 : 7, $\cos B=\frac{1}{2}$

(1) △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$a^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos 120^\circ$

$=25+9-2\times5\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=49$

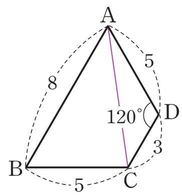
$\therefore a=7$ (∵ $a>0$)

이때, △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{7}{\sin 120^\circ}=2R$$

$$\therefore R=\frac{7}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

(2) 오른쪽 그림과 같이 선분 AC를 그으면 $\triangle$ACD에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{AC}^2=3^2+5^2$

$\quad -2\times3\times5\times\cos 120^\circ$

$\quad =49$ …… ㉠

$\therefore \overline{AC}=7$

$\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos B$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$49=8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos B$

$80\cos B=40$

$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$

003 정답 (1) ① $\dfrac{5}{7}$ ② $\sqrt{33}$ (2) 120°

(1) ① $\triangle$ABD에서

$\cos B=\dfrac{6^2+7^2-5^2}{2\times6\times7}=\dfrac{5}{7}$

② $\triangle$ABC에서 $\overline{BC}=8$이므로

$\overline{AC}^2=7^2+8^2-2\times7\times8\cos B$

$=7^2+8^2-2\times7\times8\times\dfrac{5}{7}=33$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{33}$ ($\because \overline{AC}>0$)

(2) $a^2=b^2+bc+c^2$에서 $b^2+c^2-a^2=-bc$이므로 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$

이때, $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=120^\circ$

004 정답 (1) $C=90^\circ$인 직각삼각형
(2) $b=c$인 이등변삼각형

(1) $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$가 성립하므로

$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2$ $\quad\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

(2) $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

$\sin A=2\cos B\sin C$가 성립하므로

$\dfrac{a}{2R}=2\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\times\dfrac{c}{2R}$

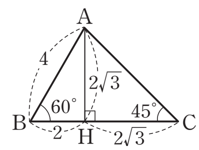
양변에 $2aR$를 곱하여 정리하면 $a^2=a^2+c^2-b^2$

$\therefore b^2=c^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

005 정답 (1) $6+2\sqrt{3}$ (2) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ (3) $6\sqrt{10}$

(1) 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{BH}=4\cos 60^\circ=2$,

$\overline{AH}=4\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$,

$\overline{CH}=\overline{AH}\tan 45^\circ=2\sqrt{3}$

이므로 $\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=2+2\sqrt{3}$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times4\times(2+2\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=6+2\sqrt{3}$

(2) $\overline{AB}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{6})^2=x^2+2^2-2\times x\times2\times\cos 60^\circ$

$x^2-2x-2=0$, $x=1\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=1+\sqrt{3}$ ($\because x>0$)

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times(1+\sqrt{3})\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

(3) $s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{11+6+7}{2}=12$이므로 $\triangle$ABC의 넓이는

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{12\times(12-11)\times(12-6)\times(12-7)}$

$=\sqrt{12\times1\times6\times5}=6\sqrt{10}$

006 정답 (1) $\sqrt{7}$ (2) 4

(1) 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

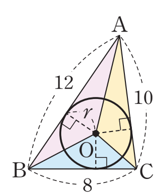
$s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{8+10+12}{2}=15$이므로

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{15\times(15-8)\times(15-10)\times(15-12)}$

$=\sqrt{15\times7\times5\times3}=15\sqrt{7}$ …… ㉠

이때, 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r라 하면



$\triangle$ABC$=\triangle$AOB$+\triangle$BOC$+\triangle$COA

이므로

$S=\dfrac{1}{2}\times(8+10+12)\times r=15r$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $15r=15\sqrt{7}$

$\therefore r=\sqrt{7}$

(2) $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$이므로

$$\frac{1}{2}\times 6\times 12\times \sin 120^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times 6\times \overline{AD}\times \sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times 12\times \overline{AD}\times \sin 60^\circ$$
$$\frac{1}{2}\times 6\times 12\times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\times 6\times \overline{AD}\times \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 12\times \overline{AD}\times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $12=3\overline{AD}$이므로

$$\overline{AD}=4$$

확인문제 pp.163~170

289 정답 (1) 45° (2) $15\sqrt{6}$ (3) $15\sqrt{2}$

(1) $A=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

(2) $\dfrac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{30}{\sin 45^\circ}$에서

$$\overline{AC}=\frac{30}{\sin 45^\circ}\times \sin 60^\circ=15\sqrt{6}$$

(3) $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{30}{\sin 45^\circ}=2R\text{이므로 } R=\frac{30}{2\sin 45^\circ}=15\sqrt{2}$$

290 정답 $2\sqrt{6}$

원주각의 크기는 서로 같으므로

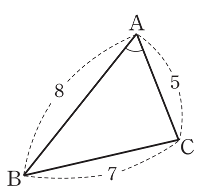
$$\angle ACB=\angle ADB=60^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}=\frac{6}{\sin 60^\circ}$$
$$\therefore \overline{AC}=\frac{6}{\sin 60^\circ}\times \sin 45^\circ=2\sqrt{6}$$

291 정답 (1) 60° (2) $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

(1) 오른쪽 그림에서



$$\cos A=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times 5\times 8}=\frac{1}{2}$$

이때, $0<A<180^\circ$이므로

$$A=60^\circ$$

(2) 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{a}{\sin A}\text{이므로}$$
$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

292 정답 $-\dfrac{11}{14}$

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=1^2+1^2-2\times 1\times 1\times \cos\theta$$
$$=2-2\cos\theta \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times \cos(180^\circ-\theta)$$
$$=13+12\cos\theta \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $2-2\cos\theta=13+12\cos\theta$이므로

$$14\cos\theta=-11$$
$$\therefore \cos\theta=-\frac{11}{14}$$

293 정답 6

$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=9$이므로

$$\cos B=\frac{8^2+9^2-7^2}{2\times 8\times 9}=\frac{2}{3}$$

$\triangle ABD$에서 $\overline{AD}=x$라 하면

$$x^2=8^2+6^2-2\times 8\times 6\cos B$$
$$=8^2+6^2-2\times 8\times 6\times \frac{2}{3}=36$$
$$\therefore \overline{AD}=6\ (\because \overline{AD}>0)$$

294 정답 (1) $3:5:6$ (2) $\dfrac{13}{15}$

(1) 사인법칙에 의하여

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$
$$=3:5:6$$

(2) $a=3k$, $b=5k$, $c=6k$ ($k\neq 0$인 상수)로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{(5k)^2+(6k)^2-(3k)^2}{2\times 5k\times 6k}$$
$$=\frac{52k^2}{60k^2}=\frac{13}{15}$$

295 정답 정삼각형

$\triangle ABC$에서 $A+B+C=\pi$이므로

$$a\sin(B+C)=b\sin(C+A)=c\sin(A+B)$$
$$a\sin(\pi-A)=b\sin(\pi-B)=c\sin(\pi-C)$$
$$a\sin A=b\sin B=c\sin C$$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$a\times\frac{a}{2R}=b\times\frac{b}{2R}=c\times\frac{c}{2R}$$
$$a^2=b^2=c^2$$
$$\therefore a=b=c$$

따라서 $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

296 정답 $a=b$인 이등변삼각형

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$을

$a\cos B=b\cos A$에 대입하면

$$a\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

양변에 $2c$를 곱하면 $a^2+c^2-b^2=b^2+c^2-a^2$

$a^2=b^2 \qquad \therefore a=b$

따라서 △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

297 정답 60°

$\dfrac{1}{2}\times5\times4\sin A=5\sqrt{3}$이므로 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때, $0^\circ<A<90^\circ$이므로 $A=60^\circ$

298 정답 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\dfrac{21}{2}$ (3) $12\sqrt{5}$

(1) $\dfrac{1}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2}{\sin C}$에서 $\sin C=1$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=90^\circ$

따라서 $A=180^\circ-(B+C)=60^\circ$이므로 △ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $\overline{\mathrm{BC}}=a$라 하면 코사인법칙에 의하여

$5^2=(3\sqrt{2})^2+a^2-2\times3\sqrt{2}\times a\cos 45^\circ$

$a^2-6a-7=0$, $(a-7)(a+1)=0$

$\therefore a=7$ ($\because a>0$)

따라서 △ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times7\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{21}{2}$$

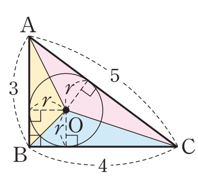
(3) $s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{7+8+9}{2}=12$이므로 △ABC의 넓이는

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{12\times(12-7)\times(12-8)\times(12-9)}$

$=\sqrt{12\times5\times4\times3}=12\sqrt{5}$

299 정답 1



직각삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r라 하면

△ABC=△AOB+△BOC+△COA

이므로

$S=\dfrac{1}{2}\times(3+4+5)\times r=6r \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $6r=6$

$\therefore r=1$

300 정답 $\dfrac{24\sqrt{3}}{5}$

△ABC=△ABD+△ACD이므로

$\dfrac{1}{2}\times12\times8\times\sin 60^\circ$

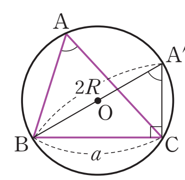
$=\dfrac{1}{2}\times12\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin 30^\circ+\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times8\times\sin 30^\circ$

$24\sqrt{3}=3\overline{\mathrm{AD}}+2\overline{\mathrm{AD}}$

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{24\sqrt{3}}{5}$

연습문제 I ······ pp.171~174

301 정답 A', 90°, $\dfrac{a}{2R}$



삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라 하자.

오른쪽 그림과 같이 점 B를 지나는 지름의 다른 한 끝점을 A′이라고 하면 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$A=\boxed{A'}$이고,

또, 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로

$\angle\mathrm{BCA'}=\boxed{90^\circ}$

$$\sin A=\sin A'=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BA'}}}=\boxed{\frac{a}{2R}}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A}=2R$$

302 정답 (1) $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ (2) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

(1) $B=75^\circ$, $C=60^\circ$이므로 $A=45^\circ$

$\dfrac{3}{\sin 45^\circ}=\dfrac{c}{\sin 60^\circ}$에서

$$c=\frac{3\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

(2) $\dfrac{4}{\sin 60^\circ}=2R$에서

$$R=\frac{4}{2\sin 60^\circ}=\frac{4}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

303 정답 (1) $\dfrac{4}{3}$ (2) $\dfrac{1}{3}$

(1) $\sin A:\sin B=4:3=a:b$이므로

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{4}{3}$

(2) $A : B : C = 1 : 2 : 3$에서 $A = k$, $B = 2k$, $C = 3k$라 하면

$A + B + C = \pi$이므로 $k + 2k + 3k = \pi$

$$\therefore k = \frac{\pi}{6}$$

따라서 $A = \frac{\pi}{6}$, $B = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{\pi}{2}$이고, 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$에서 $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$

$$\therefore \frac{a\sin A}{b\sin B} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{6}}{\sin^2 \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

304 정답 $B = 60°$, $c = \sqrt{6}$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{3}{\sin B} = 2\sqrt{3},\ \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore B = 60°$ ($\because$ B는 예각)

또, $\frac{c}{\sin 45°} = 2\sqrt{3}$에서

$$c = 2\sqrt{3}\sin 45° = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$$

305 정답 $\frac{100\sqrt{6}}{3}$ m

$P = 180° - (75° + 45°) = 60°$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AP}}{\sin B} = \frac{100}{\sin P}$$

$$\therefore \overline{AP} = \frac{100}{\sin P} \times \sin B$$

$$= \frac{100}{\sin 60°} \times \sin 45°$$

$$= \frac{100}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{100\sqrt{6}}{3}\ (\text{m})$$

306 정답 $\frac{5}{4}$

$\overline{AM} = d$라 하면 △ABM의 넓이와 △ACM의 넓이가 같으므로

$$\frac{1}{2} \times 8 \times d \times \sin\alpha = \frac{1}{2} \times 10 \times d \times \sin\beta$$

$$4\sin\alpha = 5\sin\beta$$

$$\therefore \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{5}{4}$$

다른 풀이

$\angle AMB = \theta$라고 하면 $\angle AMC = \pi - \theta$

△ABM에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BM}}{\sin\alpha} = \frac{8}{\sin\theta}$$

또, △ACM에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{MC}}{\sin\beta} = \frac{10}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{10}{\sin\theta}$$

$$\therefore \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\theta}{8} \times \overline{BM}}{\frac{\sin\theta}{10} \times \overline{MC}}$$

$$= \frac{10}{8} = \frac{5}{4}\ (\because \overline{BM} = \overline{MC})$$

307 정답 (1) 7 (2) $\frac{5}{6}$

(1) 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= 64 + 25 - 40 = 49$$

$a > 0$이므로 $a = \sqrt{49} = 7$

(2) $\cos C = \frac{3^2 + 3^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times 3 \times 3} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

308 정답 $100\sqrt{19}$ m

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

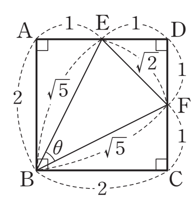
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos 120°$$

$$= 200^2 + 300^2 - 2 \times 200 \times 300 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 190000$$

$$\therefore \overline{AB} = 100\sqrt{19}\ (\text{m})$$

309 정답 $\frac{4}{5}$



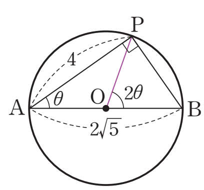
정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 $\overline{BE} = \overline{BF} = \sqrt{5}$, $\overline{EF} = \sqrt{2}$

삼각형 BEF에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}}$$

$$= \frac{4}{5}$$

310 정답 8



중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로 $\angle PAB = \theta$에서

$$\angle POB = 2\theta$$

△ABP에서 선분 AB가 원의 지름이므로 $\angle APB = 90°$

$$\overline{PB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AP}^2 = (2\sqrt{5})^2 - 4^2 = 4$$

$$\therefore \overline{PB} = 2$$

10강

또, $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{5}$이므로 $\triangle$POB에서

$$\cos 2\theta=\frac{\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{PB}}^2}{2\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OB}}}$$
$$=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-2^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$$
$$=\frac{3}{5}$$

따라서 $p=5$, $q=3$이므로

$$p+q=5+3=8$$

311 정답 $a=b$인 이등변삼각형

사인법칙에서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$

코사인법칙에서 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$이므로

위의 값을 $\sin A\cos B=\cos A\sin B$에 대입하면

$$\frac{a}{2R}\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{b}{2R}$$

즉, $a^2+c^2-b^2=b^2+c^2-a^2$에서

$$a^2=b^2 \qquad \therefore a=b$$

따라서 $\triangle$ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

312 정답 $C=90°$인 직각삼각형

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 중근을 가지므로 $D=0$이다.

$$\frac{D}{4}=\sin^2 B+(\cos C+\cos A)(\cos C-\cos A)$$
$$=\sin^2 B+\cos^2 C-\cos^2 A=0$$

$\cos^2 C=1-\sin^2 C$, $\cos^2 A=1-\sin^2 A$에서

$$\sin^2 B+1-\sin^2 C-(1-\sin^2 A)=0$$
$$\therefore \sin^2 C=\sin^2 B+\sin^2 A$$

사인법칙에 의하여

$$\left(\frac{c}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{a}{2R}\right)^2$$
$$\therefore c^2=a^2+b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

313 정답 (1) 60 (2) 24

(1) $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times15\times16\times\sin 30°$

$$=\frac{1}{2}\times15\times16\times\frac{1}{2}=60$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times8\times\sin 45°$

$$=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=24$$

314 정답 $6+2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{BC}}=a$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$4^2=(2\sqrt{6})^2+a^2-2\times2\sqrt{6}\times a\cos 45°$$
$$a^2-4\sqrt{3}a+8=0,\ a=2\sqrt{3}\pm2$$
$$\therefore a=2+2\sqrt{3}\ (\because a>2)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times(2+2\sqrt{3})\times\sin 45°=6+2\sqrt{3}$$

315 정답 2 또는 4

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CE}}=x$라고 하면 $\overline{\mathrm{AE}}=6-x$이므로

삼각형 ADE의 넓이는

$$\frac{1}{2}x(6-x)\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}x(6-x)$$

정삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=9\sqrt{3}$

$\triangle\mathrm{ADE}=\frac{2}{9}\triangle\mathrm{ABC}$에서

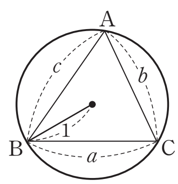
$$\frac{\sqrt{3}}{4}x(6-x)=\frac{2}{9}\times9\sqrt{3}$$
$$x^2-6x+8=0,\ (x-4)(x-2)=0$$
$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}$의 길이는 2 또는 4이다.

316 정답 4

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 1이므로

사인법칙에 의하여



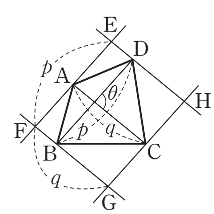
$$\frac{a}{\sin A}=2\times1 \qquad \therefore \sin A=\frac{a}{2}$$

삼각형 ABC의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{4}abc=1$$
$$\therefore abc=4$$

317 정답 풀이 참조

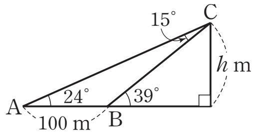
$\overline{\mathrm{BD}}$에 평행하고 점 A, C를 각각 지나는 두 개의 평행선과 $\overline{\mathrm{AC}}$에 평행하고 점 B, D를 각각 지나는 두 개의 평행선의 교점을 그림과 같이 점 E, F, G, H라고 하자.



□EFGH는 평행사변형이고, $\overline{\mathrm{EF}}=p$, $\overline{\mathrm{FG}}=q$, $\angle\mathrm{EFG}=\theta$이다.

$$\square\mathrm{EFGH}=2\triangle\mathrm{EFG}$$
$$=2\times\frac{1}{2}pq\sin\theta=pq\sin\theta$$
$$\therefore \square\mathrm{ABCD}=\frac{1}{2}\square\mathrm{EFGH}=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$

318 정답 99.2 m



$\triangle$ABC에서 $\angle$ACB$=39^\circ-24^\circ=15^\circ$이므로

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 24^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 15^\circ}$$

$$\therefore \overline{BC}=\frac{100}{\sin 15^\circ}\times\sin 24^\circ$$

$$=\frac{100}{0.25}\times 0.40=160$$

따라서 $\triangle$CBH에서

$$h=\overline{BC}\sin 39^\circ$$

$$=160\times 0.62=99.2\ (\mathrm{m})$$

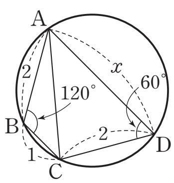
연습문제 Ⅱ p.175

319 정답 (1) 3 (2) $2\sqrt{3}$

(1) $\triangle$ABC에서

$$\overline{AC}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos 120^\circ$$

$$=4+1-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7 \quad \cdots\cdots ㉠$$



또, $\triangle$ACD에서 $\overline{DA}=x$라고 하면

$D=60^\circ$이므로

$$\overline{AC}^2=2^2+x^2-2\times2\times x\times\cos 60^\circ$$

$$=4+x^2-2\times2\times x\times\frac{1}{2}$$

$$=x^2-2x+4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $x^2-2x+4=7$

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=3\ (\because x>0)$$

(2) $\square$ABCD$=\triangle$ABC$+\triangle$ACD

$$=\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin 60^\circ$$

$$=2\sqrt{3}$$

320 정답 $A=90^\circ$인 직각삼각형

$a\cos B-b\cos A=c$에 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$을 대입하면

$$a\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$$

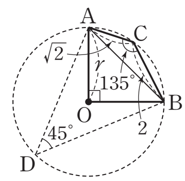
즉, $(a^2+c^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)=2c^2$이므로

$$a^2=b^2+c^2$$

따라서 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

321 정답 (1) 135° (2) $\sqrt{5}$

(1) 오른쪽 그림과 같이 원 O에 내접하는 사각형 ADBC에서 호 AB에 대한 중심각 O가 90°이므로 원주각 D는 45°이다.



또, 사각형 ADBC는 원 O에 내접하는 사각형이므로 $C+D=180^\circ$

$$\therefore C=180^\circ-45^\circ=135^\circ$$

(2) $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=2^2+(\sqrt{2})^2-2\times2\times\sqrt{2}\times\cos 135^\circ$$

$$=10$$

한편, $\triangle$AOB에서 $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=2r^2$

$$2r^2=10 \qquad \therefore r=\sqrt{5}$$

322 정답 (1) $\dfrac{2}{9}S$ (2) $\dfrac{1}{3}$

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$로 놓으면

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

(1) $\overline{AD}=\dfrac{2}{3}c$, $\overline{AF}=\dfrac{1}{3}b$이므로

$$\triangle ADF=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AF}\times\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}c\times\frac{1}{3}b\times\sin A$$

$$=\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{2}{9}S$$

(2) (1)과 같은 방법으로 계산하면

$$\triangle BDE=\triangle CFE=\frac{2}{9}S$$

이므로

$$\triangle DEF=\triangle ABC-(\triangle ADF+\triangle BDE+\triangle CFE)$$

$$=S-\frac{2}{9}S\times3=\frac{1}{3}S$$

$$\therefore \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{1}{3}$$

323 정답 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 서술형

코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ$

$(\sqrt{7})^2=b^2+c^2-2bc\times\dfrac{1}{2}$

$7=b^2+c^2-bc$

$\quad=(b+c)^2-3bc=5^2-3bc$

$\therefore bc=6$ … ①

$\therefore S=\dfrac{1}{2}bc\sin 60^\circ$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\quad=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ … ②

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	코사인법칙을 이용하여 bc의 값 구하기	50 %
②	△ABC의 넓이 구하기	50 %

Ⅲ 수열

11. 등차수열

유형 pp.181~189

001 정답 (1) $a_n=\dfrac{1}{n^2}$ (2) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ (3) $a_n=(-1)^n$ (4) $a_n=(-1)^{n+1}\cdot n$

(1) 주어진 수열은 자연수 제곱인 수의 역수를 차례로 나열한 것이므로

$a_1=\dfrac{1}{1^2},\ a_2=\dfrac{1}{2^2},\ a_3=\dfrac{1}{3^2},\ a_4=\dfrac{1}{4^2},\ \cdots$

따라서 구하는 일반항 a_n은

$a_n=\dfrac{1}{n^2}$

(2) 주어진 수열의 n번째 항의 분자는 n이고, 분모는 $n+1$이다.

따라서 구하는 일반항 a_n은

$a_n=\dfrac{n}{n+1}$

(3) $a_1=-1,\ a_2=(-1)^2,\ a_3=(-1)^3,\ a_4=(-1)^4,\ \cdots$

따라서 구하는 일반항 a_n은

$a_n=(-1)^n$

(4) 주어진 수열의 n번째 항의 절댓값은 n이고, 부호는 홀수번째 항은 +, 짝수번째 항은 −이다.

따라서 구하는 일반항 a_n은

$a_n=(-1)^{n+1}\cdot n$

002 정답 (1) 399 (2) 제46항 (3) 제10항

(1) 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=3+(n-1)\times4=4n-1$

따라서 제100항은

$a_{100}=4\times100-1=399$

(2) 첫째항이 1.2, 공차가 0.3인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=1.2+(n-1)\times0.3=0.3n+0.9$

$0.3n+0.9=14.7$에서 $n=46$

따라서 14.7은 제46항이다.

(3) 첫째항이 35, 공차가 −4인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=35+(n-1)\times(-4)=-4n+39$

$a_n<0$, 즉 $-4n+39<0$에서

$n>\dfrac{39}{4}=9.75$

n은 자연수이므로 $n\geq10$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제10항이다.

003 정답 (1) $a_n=3n-7$ (2) 14

(1) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=a+3d=5$ …… ㉠

$a_{11}=a+10d=26$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ d=3$

$\therefore a_n=-4+(n-1)\times3=3n-7$

(2) 넣은 k개의 수를 순서대로 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_k$라고 하면 조건에 의해 수열

$10, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_k, 100$

은 등차수열을 이룬다. 이 수열을 $\{a_n\}$이라고 하면, 첫째항은 10이고 100은 제 $(k+2)$항이다.

이 등차수열의 공차가 6이므로

$a_{k+2}=10+\{(k+2)-1\}\times6=6k+16=100$

$6k=84$

$\therefore k=14$

다른 풀이

(1) 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 n에 대한 일차식이므로 $a_n=pn+q$로 나타낼 수 있다.

$a_4=4p+q=5$ …… ㉢

$a_{11}=11p+q=26$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $p=3,\ q=-7$

$\therefore a_n=3n-7$

004 정답 (1) $2\sqrt{2}$ (2) 105

(1) 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 항을 두 개씩 건너뛰어 만든 수열

a_3, a_5, a_7

도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

따라서 a_5는 a_3과 a_7의 등차중항이므로

$a_5=\dfrac{a_3+a_7}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

(2) 구하는 세 개의 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면 조건에서

$(a-d)+a+(a+d)=15$ …… ㉠

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=83$ …… ㉡

㉠에서

$3a=15 \qquad \therefore a=5$

㉡에서

$3a^2+2d^2=83,\ d^2=4 \qquad \therefore d=\pm2$

(i) $d=2$이면 구하는 세 수는 3, 5, 7

(ii) $d=-2$이면 구하는 세 수는 7, 5, 3

따라서 세 수의 곱은

$3\times5\times7=105$

005 정답 (1) 290 (2) 2 (3) 10

(1) 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 6이므로 일반항은

$a_n=2+(n-1)\times6=6n-4$

이때, 56이 제n항이라 하면

$6n-4=56$

$\therefore n=10$

따라서 구하는 합은 첫째항이 2, 끝항이 56, 항수가 10인 등차수열의 합이므로

$S_{10}=\dfrac{10(2+56)}{2}=290$

(2) 공차를 d라고 하면 첫째항이 6이고 첫째항부터 제20항까지의 합이 500이므로

$S_{20}=\dfrac{20\{2\times6+(20-1)d\}}{2}=500$

$12+19d=50$

$19d=38$

$\therefore d=2$

(3) 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제k항까지의 합이 100이므로

$S_k=\dfrac{k\{2\times1+(k-1)\times2\}}{2}=100,\ k^2=100$

$\therefore k=\pm10$

이때, k는 자연수이므로 $k=10$

006 정답 (1) 100 (2) 180

(1) $S_{10}=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_8+a_9+a_{10}=\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}$

이때, 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_3+a_8=a_2+a_9=a_1+a_{10}=20$

$\therefore S_{10}=\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}=\dfrac{10\times20}{2}=100$

(2) 등차수열의 항을 같은 개수만큼 묶어서 더한 값으로 만든 수열도 등차수열을 이루므로

$(a_1+a_2+\cdots+a_{10}),\ (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}),$

$(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30})$

도 등차수열을 이룬다.

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=40,$

$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{20})-(a_1+a_2+\cdots+a_{10})$

$=100-40=60$

이므로 $a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}=80$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{30}$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20})$

$+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30})$

$=40+60+80=180$

324 정답 (1) **3, 7, 11, 15, 19**
(2) **1, 3, 9, 27, 81**
(3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \frac{1}{24}, \frac{1}{35}$

325 정답 (1) $a_n=3n$ (2) $a_n=2n-1$
(3) $a_n=n+\frac{n+2}{n+1}$

(1) 주어진 수열은 3의 배수를 차례로 나열한 것이므로

$a_1=3\times1,\ a_2=3\times2,\ a_3=3\times3,\ a_4=3\times4,\ \cdots$

따라서 구하는 일반항은

$a_n=3\times n=3n$

(2) 주어진 수열은 홀수를 차례로 나열한 것이므로

$a_1=1=2\times1-1,\ a_2=3=2\times2-1,$

$a_3=5=2\times3-1,\ a_4=7=2\times4-1,$

$\vdots$

따라서 구하는 일반항은

$a_n=2\times n-1=2n-1$

(3) 각 항은 (정수)+(분수)의 꼴로 되어 있다.
주어진 수열의 n번째 항의 (정수)는 n이고, (분수)의 분자는 $n+2$, 분모는 $n+1$이다.
따라서 구하는 일반항 a_n은 $a_n=n+\frac{n+2}{n+1}$

326 정답 **제42항**

첫째항이 13, 공차가 -3인 등차수열이므로 일반항은

$a_n=13+(n-1)\times(-3)=-3n+16$

$-3n+16=-110$에서 $n=42$

따라서 -110은 제42항이다.

327 정답 **제135항**

일반항은 $a_n=400+(n-1)\times(-3)=-3n+403$

이때, $-3n+403<0$에서 $n>\frac{403}{3}=134.33\times\times\times$

따라서 제135항에서 처음으로 음수가 된다.

328 정답 **25**

주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=9$ ······ ㉠

$a_7=a+6d=17$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ d=2$

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=5+(n-1)\times2=2n+3$

$\therefore a_{11}=2\times11+3=25$

329 정답 **2**

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 공차를 d라고 하면

첫째항은 3이고 25는 제12항이므로

$a_{12}=3+(12-1)d=25$

$11d=22 \qquad \therefore d=2$

330 정답 **11**

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 항을 세 개씩 건너뛰어 만든 수열

$a_2,\ a_5,\ a_8$

도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

따라서 a_5는 a_2과 a_8의 등차중항이므로

$a_5=\frac{a_2+a_8}{2}=\frac{3+19}{2}=11$

331 정답 **8**

주어진 삼차방정식의 세 근을 $a-d,\ a,\ a+d$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=3,\ 3a=3$

$\therefore a=1$

$x=1$이 주어진 삼차방정식의 한 근이므로

$1-3-6+k=0$

$\therefore k=8$

332 정답 (1) **440** (2) **500**

(1) 첫째항이 3, 공차가 2, 항수가 20이므로

$S_{20}=\frac{20\{2\times3+(20-1)\times2\}}{2}=440$

(2) 첫째항이 63, 공차가 -4, 항수가 20이므로

$S_{20}=\frac{20\{2\times63+(20-1)\times(-4)\}}{2}=500$

333 정답 **480**

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_4=a+3d=11$ ······ ㉠

$a_{17}=a+16d=37$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5,\ d=2$

$\therefore S_{20}=\frac{20\{2\times5+(20-1)\times2\}}{2}=480$

334 정답 **300**

$S_{15}=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{14}+a_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}$

이때, 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_1+a_{15}=a_4+a_{12}=40$

$\therefore S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=\frac{15\times40}{2}=300$

335 정답 **120**

등차수열의 항을 같은 개수만큼 묶어 더한 값으로 만든 수열도 등차수열을 이루므로

$(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$, $(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$,
$(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15})$

도 등차수열을 이룬다.

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=10$,

$a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$
$=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})-(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$
$=50-10=40$

따라서 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=70$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{15}$
$=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$
$\quad+(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15})$
$=10+40+70=120$

연습문제 I

pp.190~192

336 정답 (1) $\boldsymbol{-2,\ 4}$ (2) $\boldsymbol{-1,\ 32}$

(1) 주어진 수열은 바로 앞의 항에 3을 더하여 다음 항을 만드는 규칙으로 이루어져 있다.

$-8,\ -5,\ \boxed{-2},\ 1,\ \boxed{4},\ 7,\ 10,\ 13,\ \cdots$

(2) 주어진 수열은 바로 앞의 항에 -2를 곱하여 다음 항을 만드는 규칙으로 이루어져 있다.

$\boxed{-1},\ 2,\ -4,\ 8,\ -16,\ \boxed{32},\ -64,\ 128,\ \cdots$

337 정답 (1) $\boldsymbol{a_n=n(n+1)}$
(2) $\boldsymbol{a_n=n^2+n+1}$
(3) $\boldsymbol{a_n=(-1)^n\times(2n-1)}$

(1) $a_1=1\times2=1\times(1+1)$
$a_2=2\times3=2\times(2+1)$
$a_3=3\times4=3\times(3+1)$
$a_4=4\times5=4\times(4+1)$
$\vdots$
$\therefore a_n=n(n+1)$

(2) $a_1=1+2=1^2+1+1$
$a_2=4+3=2^2+2+1$
$a_3=9+4=3^2+3+1$
$a_4=16+5=4^2+4+1$
$\vdots$
$\therefore a_n=n^2+n+1$

(3) $a_1=-1=(-1)\times(2\times1-1)$
$a_2=3=(-1)^2\times(2\times2-1)$
$a_3=-5=(-1)^3\times(2\times3-1)$
$a_4=7=(-1)^4\times(2\times4-1)$
$\vdots$
$\therefore a_n=(-1)^n\times(2n-1)$

338 정답 **199**

$a_1=p\times1^2+q=p+q=1$ ...... ㉠
$a_5=p\times5^2+q=25p+q=49$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=2,\ q=-1$

따라서 일반항은 $a_n=2n^2-1$이므로

$a_{10}=2\times10^2-1=199$

339 정답 (1) $\boldsymbol{a_n=3n+2}$ (2) $\boldsymbol{a_n=-2n+12}$

(1) 첫째항이 5, 공차가 3이므로
$a_n=5+(n-1)\times3=3n+2$

(2) 첫째항이 10, 공차가 -2이므로
$a_n=10+(n-1)\times(-2)=-2n+12$

340 정답 **15**

$a_n=3n-4$에서 공차 α는

$\alpha=a_{n+1}-a_n$
$=\{3(n+1)-4\}-(3n-4)=3$

$b_n=5n+1$에서 공차 β는

$\beta=b_{n+1}-b_n$
$=\{5(n+1)+1\}-(5n+1)=5$

$\therefore \alpha\beta=15$

341 정답 (1) **41** (2) **4**

(1) $a_8=a_1+(8-1)\times(-2)=27$에서
$a_1=41$

(2) 주어진 수열의 공차를 d라고 하면
$a_{11}=-3+(11-1)d=37$
$\therefore d=4$

342 정답 $\boldsymbol{-2}$

공차를 d라고 하면

$a_2=6+d,\ a_6=6+5d$

a_2와 a_6의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로

$a_2+a_6=0$, 즉 $(6+d)+(6+5d)=0$

$12+6d=0 \qquad \therefore d=-2$

343 정답 (1) 제8항 (2) 제7항, 98

첫째항이 26, 공차가 -4인 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=26+(n-1)\times(-4)=-4n+30$$

(1) 제n항이 음수가 된다고 하면

$$-4n+30<0,\ n>7.5$$

n은 자연수이므로 n의 최솟값은 8이다.

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제8항이다.

(2) 제8항부터 음수가 되므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대가 된다. 따라서 그 합은

$$S_7=\frac{7\{2\times26+(7-1)\times(-4)\}}{2}=98$$

344 정답 ③

주어진 수열의 분자는 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열을 이루고, 분모는 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열을 이루므로

$$a_n=\frac{1+(n-1)\times3}{4+(n-1)\times3}=\frac{3n-2}{3n+1}$$

$a_n=\dfrac{3n-2}{3n+1}>\dfrac{99}{100}$에서

$$100(3n-2)>99(3n+1)$$

$$\therefore\ n>99.\times\times\times$$

따라서 처음으로 $\dfrac{99}{100}$보다 커지는 것은 제100항이다.

345 정답 $x=11,\ y=15,\ z=19$

7, x, y, z, 23이 이 순서로 등차수열을 이루므로 첫째항은 7이고 제5항은 23이다.

따라서 공차를 d라고 하면

$$7+4d=23 \qquad \therefore\ d=4$$

x, y, z는 각각 이 수열의 제2, 3, 4항이므로

$$x=7+d,\ y=7+2d,\ z=7+3d$$

$$\therefore\ x=11,\ y=15,\ z=19$$

346 정답 25

한 개의 정사각형을 네 개의 정사각형으로 나누므로 정사각형의 개수는 3개씩 증가한다.

$$a_1=4,\ a_2=7,\ a_3=10,\ \cdots$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_n=4+(n-1)\times3=3n+1$$

$$\therefore\ a_8=3\times8+1=25$$

347 정답 4

a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b=a+c \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$2b$, c, $3a$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2c=2b+3a \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $2c=4a+c$, $c=4a$

$$\therefore\ \frac{c}{a}=4$$

348 정답 (1) $S_n=n^2+n$ (2) 590

(1) 첫째항 $a=2$, 공차 $d=2$이므로

$$S_n=\frac{n\{2\times2+(n-1)\times2\}}{2}=n^2+n$$

(2) 첫째항 $a=1$, 공차 $d=3$이므로 58을 제n항이라고 하면

$$58=1+(n-1)\times3$$

$$\therefore\ n=20$$

따라서 이 수열의 항수는 20이므로 구하는 합을 S라고 하면

$$S=\frac{20\times(1+58)}{2}=590$$

349 정답 -6

주어진 등차수열의 항수를 n, 공차를 d라고 하면

$$S_n=\frac{n\{50+(-10)\}}{2}=220 \qquad \therefore\ n=11$$

또, 끝항이 -10이므로 $a_{11}=50+10d=-10$

$$\therefore\ d=-6$$

350 정답 810

두 자리의 자연수 중 6의 배수는

$$12,\ 18,\ 24,\ \cdots,\ 96 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠은 첫째항이 12이고 공차가 6인 등차수열이므로

96이 제n항이라고 하면

$$96=12+(n-1)\times6 \qquad \therefore\ n=15$$

따라서 수열 ㉠의 첫째항부터 제15항까지의 합을 구하면

$$12+18+24+\cdots+96=\frac{15(12+96)}{2}=810$$

351 정답 -60

등차수열의 항을 같은 개수만큼 묶어 더한 값으로 만든 수열도 등차수열을 이루므로

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{10}),\ (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}),$$

$$(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30})$$

도 등차수열을 이룬다.

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=30,$$

$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$
$=(a_1+a_2+\cdots+a_{20})-(a_1+a_2+\cdots+a_{10})$
$=10-30=-20$

이므로 $a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}=-70$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{30}$
$=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20})$
$+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30})$
$=30+(-20)+(-70)=-60$

352 정답 140

$$S_{14}=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{13}+a_{14}=\frac{14(a_1+a_{14})}{2}$$

이때, 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$$a_1+a_{14}=a_2+a_{13}=a_3+a_{12}=\cdots$$

문제의 조건에서 $a_2+a_3+a_{12}+a_{13}=40$이므로

$$a_1+a_{14}=a_2+a_{13}=a_3+a_{12}=20$$

$$\therefore S_{14}=\frac{14(a_1+a_{14})}{2}=\frac{14\times20}{2}=140$$

연습문제 II

p.193

353 정답 17

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면,

$$d=a_2-a_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

따라서 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공차가 $\frac{1}{6}$이므로 일반항 a_n은

$$a_n=\frac{1}{3}+(n-1)\times\frac{1}{6}=\frac{n+1}{6}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$의 항을 나열하면

$$\frac{2}{6},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{6},\ \frac{7}{6},\ \cdots$$

이고, 이 중 항의 값이 정수인 항은

$$\frac{6}{6},\ \frac{12}{6},\ \frac{18}{6},\ \frac{24}{6},\ \cdots$$

이므로 $b_3=\frac{18}{6}$이다.

$a_k=\frac{k+1}{6}=\frac{18}{6}$에서 $k=17$

354 정답 2

a_2-a_1, b_2-b_1은 각각 두 수열의 공차이다.
첫 번째 수열에서 y는 제11항이므로

$$y=x+10\times(a_2-a_1) \qquad \therefore a_2-a_1=\frac{y-x}{10}$$

두 번째 수열에서 y는 제21항이므로

$$y=x+20\times(b_2-b_1) \qquad \therefore b_2-b_1=\frac{y-x}{20}$$

$$\therefore \frac{a_2-a_1}{b_2-b_1}=\frac{20}{10}=2$$

355 정답 35

$a_{n+1}-a_n=-3$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -3인 등차수열이다.
첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2\times50+(n-1)\times(-3)\}}{2}$$
$$=\frac{-3n^2+103n}{2}$$

$\frac{-3n^2+103n}{2}<0$에서

$$3n^2-103n>0,\ n(3n-103)>0$$

$$\therefore n<0 \text{ 또는 } n>\frac{103}{3}=34.33\times\times\times$$

이때, n은 자연수이므로 n의 최솟값은 35이다.

356 정답 90

$$S_9=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8+a_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}$$

이때, 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_1+a_9=2a_5=20$ ← a_5는 a_1과 a_9의 등차중항

$$\therefore S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9\times20}{2}=90$$

357 정답 5050

$100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots+2^2-1^2$
$=(100+99)(100-99)+(98+97)(98-97)+$
$\cdots+(2+1)(2-1)$
$=100+99+98+97+\cdots+2+1$
$=\frac{100(100+1)}{2}=5050$

358 정답 89 서술형

주어진 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=20+(n-1)\times(-3)=-3n+23 \qquad \cdots ①$$

이때, $-3n+23<0$에서 $n>\frac{23}{3}=7.\times\times\times$이므로

처음으로 음수가 되는 항은 제8항이다. … ②

$\therefore |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|$
$=(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(a_8+a_9+a_{10})$
$=(20+17+\cdots+2)-(-1-4-7)$
$=(20+17+\cdots+2)+(1+4+7)$
$=\frac{7(20+2)}{2}+12=89$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	수열 $\{a_n\}$의 일반항 구하기	30%
②	처음으로 음수가 되는 항 구하기	30%
③	주어진 식의 값 구하기	40%

12. 등비수열

유형 pp.198~206

001 정답 (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{96}$ (2) $3\cdot2^9$ (3) 3^8

(1) 첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로 일반항 a_n은

$$a_n=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

따라서 제100항은

$$a_{100}=\left(\frac{1}{2}\right)^{100-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{96}$$

(2) 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=12$ …… ㉠

$a_6=ar^5=96$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$

$\therefore r=2$ ($\because$ r는 실수)

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=3$

따라서 일반항 a_n은 $a_n=3\cdot2^{n-1}$이므로

$a_{10}=3\cdot2^9$

(3) $a_{n+1}=3a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

첫째항을 a라고 하면 $a_2=a\cdot3=1$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 일반항 a_n은 $a_n=\frac{1}{3}\cdot3^{n-1}=3^{n-2}$이므로

$a_{10}=3^{10-2}=3^8$

002 정답 (1) $2\sqrt{2}$ (2) 24

(1) 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로, 항을 두 개씩 건너뛰어 만든 수열 a_3, a_5, a_7도 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

따라서 a_5는 a_3과 a_7의 등비중항이므로

$a_5{}^2=a_3\times a_7=\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=8$

$\therefore a_5=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ($\because a_5>0$)

(2) 세 수 4, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=4b$ $\quad\therefore b=\frac{a^2}{4}$ …… ㉠

세 수 a, b, 24가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+24$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$a^2-2a-48=0$, $(a-8)(a+6)=0$

$\therefore a=8$ ($\because a>0$)

$a=8$을 ㉠에 대입하면

$b=16$

$\therefore a+b=8+16=24$

003 정답 $4\times\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

한 번 시행 후 남아있는 종이의 넓이는 이전 정사각형의 넓이의 $\frac{3}{4}$이다.

맨 처음의 정사각형의 넓이가 4이므로

1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 $4\times\frac{3}{4}$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$\left(4\times\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{4}=4\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$\vdots$

따라서 10회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$4\times\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

004 정답 (1) $\frac{171}{256}$ (2) $3(2^n-1)$

(1) 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제9항까지의 합 S_9는

$$S_9=\frac{1\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^9\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^9\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{512}\right)=\frac{171}{256}$$

(2) 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 제2항이 6, 제5항이 48이므로

$$\begin{cases} ar=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ ar^4=48 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$

$\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=3$

따라서 주어진 수열은 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$$

005 정답 (1) 9 (2) $f(x)=(x+1)^{11}-1$

(1) $a_7+a_8+a_9=p$라고 두자.

등비수열의 항을 같은 개수만큼 묶어 더한 값으로 만든 수열도 등비수열을 이루므로

$a_1+a_2+a_3$, $a_4+a_5+a_6$, $a_7+a_8+a_9$

즉, 4, 6, p는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이때, 6은 4와 p의 등비중항이므로 $6^2=4p$

$\therefore p=9$

(2) $f(x)$는 첫째항이 x이고 공비가 $x+1$인 등비수열의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

(i) $x+1\neq1$, 즉 $x\neq0$일 때,

$$f(x)=\frac{x\{(x+1)^{11}-1\}}{(x+1)-1}=(x+1)^{11}-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $x+1=1$, 즉 $x=0$일 때,

$$f(0)=0+0+\cdots+0=0$$

이 값은 ㉠에 $x=0$을 대입한 것과 같다.

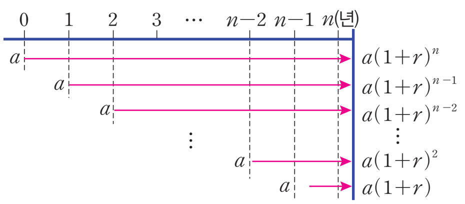
$$\therefore f(x)=(x+1)^{11}-1$$

006 정답 $\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$ 원

첫해에 적립한 a원은 n년간 예금되는 셈이므로 n년 후 원리합계가 $a(1+r)^n$원이 된다.

또, 다음 해에 적립한 a원은 $(n-1)$년 후 원리합계가 $a(1+r)^{n-1}$원이 된다.

이것을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



구하는 적립금의 원리합계를 S_n이라고 하면

$$S_n=a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$$

이것은 첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$S_n=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}$$

$$=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}(\text{원})$$

007 정답 (1) 2, 1, 3, 5, 7

$a_1=2,\ a_n=2n-3\ (n\geq2)$

(2) -1

(1) $S_n=n^2-2n+3$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1-2+3=2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2-2n+3-\{(n-1)^2-2(n-1)+3\}$$
$$=2n-3$$

즉, $a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots$는 공차가 2인 등차수열이다.

따라서 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5는

2, 1, 3, 5, 7

이고, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항을 제외한 제2항부터 등차수열을 이루므로 일반항은

$$a_1=2,\ a_n=2n-3\ (n\geq2)$$

(2) $S_n=3^n+a$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3+a \quad \cdots\cdots ㉠$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n+a)-(3^{n-1}+a)=3^n-3^{n-1}$$
$$=2\cdot3^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

즉, $a_2, a_3, a_4, \cdots$는 공비가 3인 등비수열이다.

이때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 것과 ㉠이 같아야 하므로

$$2=3+a \qquad \therefore a=-1$$

확인문제

pp.198~206

359 정답 $a_n=2^{n+1}$

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_2=8$, $a_5=64$이므로

$$a_2=ar=8 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_5=ar^4=64 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8 \qquad \therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=4$

따라서 등비수열의 일반항은

$$a_n=4\cdot2^{n-1}=2^2\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$$

360 정답 $3\cdot2^{49}$

$a_{n+1}=2a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

첫째항을 a라고 하면 $a_3=a\cdot2^2=12 \qquad \therefore a=3$

따라서 일반항은 $a_n=3\cdot2^{n-1}$이므로

$$a_{50}=3\cdot2^{49}$$

361 정답 1

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 항을 세 개씩 건너뛰어 만든 수열

$a_2,\ a_5,\ a_8$

도 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

따라서 a_5는 a_2와 a_8의 등비중항이므로

$$a_5{}^2=a_2\times a_8=\frac{1}{4}\times4=1$$

$$\therefore a_5=1\ (\because a_5>0)$$

362 정답 272

세 수 x, 8, y가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$8^2=xy \qquad \therefore xy=64 \quad \cdots\cdots ㉠$$

세 수 x, 10, y가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\frac{x+y}{2}=10 \qquad \therefore x+y=20 \quad \cdots\cdots ㉡$$

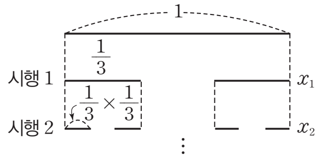
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$(x-4)(x-16)=0 \qquad \therefore x=4 \text{ 또는 } x=16$$

따라서 $x=4$, $y=16$ 또는 $x=16$, $y=4$이므로

$$x^2+y^2=4^2+16^2=272$$

363 정답 $1-\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$



1회 시행 후 남아 있는 선분의 길이 : $\frac{2}{3}$

2회 시행 후 남아 있는 선분의 길이 : $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

3회 시행 후 남아 있는 선분의 길이 : $\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$

⋮

20회 시행 후 남아 있는 선분의 길이 : $\left(\frac{1}{3}\right)^{19}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

따라서 20회 시행하는 동안 버려진 선분의 길이의 합은

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

364 정답 **2016**

수열

$$2^5,\ 2^6,\ 2^7,\ \cdots,\ 2^{10},\ \cdots$$

은 첫째항이 2^5, 공비가 2인 등비수열이고 2^{10}은 제6항이므로 제6항까지의 합 S_6은

$$S_6=\frac{2^5(2^6-1)}{2-1}=2^{11}-2^5$$
$$=2048-32=2016$$

다른 풀이

$2^5+2^6+2^7+\cdots+2^{10}$

$=(2+2^2+2^3+\cdots+2^{10})-(2+2^2+2^3+2^4)$

$=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}-\frac{2(2^4-1)}{2-1}$

$=2^{11}-2^5=2016$

365 정답 $\frac{5}{4}(2^{20}-1)$

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 제3항이 5, 제6항이 40이므로

$$\begin{cases} ar^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ ar^5=40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\quad\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=\frac{5}{4}$

따라서 주어진 수열은 첫째항이 $\frac{5}{4}$이고 공비가 2인 등비수열이므로

$$S_{20}=\frac{\frac{5}{4}(2^{20}-1)}{2-1}=\frac{5}{4}(2^{20}-1)$$

366 정답 **48**

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^9$$
$$=a(1+r+r^2+\cdots+r^9)$$
$$=3 \quad\cdots\cdots ㉠$$
$$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}=ar^{10}+ar^{11}+ar^{12}+\cdots+ar^{19}$$
$$=ar^{10}(1+r+r^2+\cdots+r^9)$$
$$=12 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $3r^{10}=12$ $\quad\therefore r^{10}=4$

$$\therefore a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}=ar^{20}+ar^{21}+ar^{22}+\cdots+ar^{29}$$
$$=ar^{20}(1+r+r^2+\cdots+r^9)$$
$$=a(1+r+r^2+\cdots+r^9)\cdot r^{20}$$
$$=3\cdot 4^2=48$$

367 정답 $x^{10}-1$

$$f(x)=(x-1)+x(x-1)+x^2(x-1)+x^3(x-1)$$
$$+\cdots+x^9(x-1)$$

이라 하면 $f(x)$는 첫째항이 $x-1$이고 공비가 x인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

(i) $x\neq 1$일 때,

$$f(x)=\frac{(x-1)(x^{10}-1)}{x-1}=x^{10}-1 \quad\cdots\cdots ㉠$$

(ii) $x=1$일 때,

$$f(1)=0+0+\cdots+0=0$$

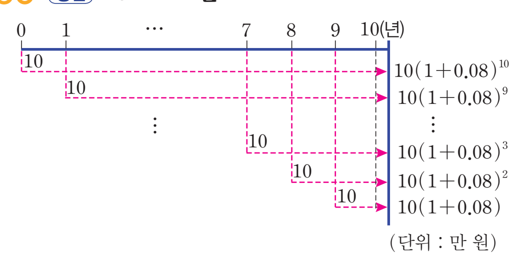
이 값은 ㉠에 $x=1$을 대입한 것과 같다.

$$\therefore f(x)=x^{10}-1$$

다른 풀이

$$f(x)=(x-1)+x(x-1)+x^2(x-1)$$
$$+x^3(x-1)+\cdots+x^9(x-1)$$
$$=(\cancel{x}-1)+(\cancel{x^2}-\cancel{x})+(\cancel{x^3}-\cancel{x^2})+(\cancel{x^4}-\cancel{x^3})$$
$$+\cdots+(x^{10}-\cancel{x^9})$$
$$=x^{10}-1$$

368 정답 **1566000원**

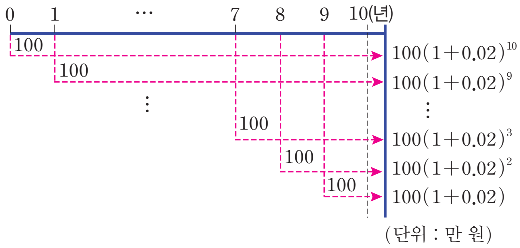


10년째 말의 원리합계를 P라 하면

$$P=10\times1.08+10\times1.08^2+\cdots+10\times1.08^{10}$$
$$=(10\times1.08)\times\frac{1.08^{10}-1}{1.08-1}$$
$$=10.8\times\frac{2.16-1}{0.08}=156.6(\text{만 원})$$

따라서 구하는 원리합계는 1566000원이다.

369 정답 11220000원



10년째 말의 원리합계를 P라 하면

$$\begin{aligned}P&=100\times1.02+100\times1.02^2\\&\quad+\cdots+100\times1.02^9+100\times1.02^{10}\\&=(100\times1.02)\times\frac{1.02^{10}-1}{1.02-1}\\&=102\times\frac{1.22-1}{0.02}\\&=1122(\text{만 원})\end{aligned}$$

따라서 구하는 원리합계는 11220000원이다.

370 정답 29

$S_n=3\cdot2^n-1$에서

$$\begin{aligned}a_1&=S_1=3\cdot2-1=5,\\a_4&=S_4-S_3=3\times2^4-1-(3\times2^3-1)\\&=3\times(2^4-2^3)=24\end{aligned}$$

$\therefore a_1+a_4=5+24=29$

371 정답 $a_n=6n-1$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3+2=5$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(3n^2+2n)-\{3(n-1)^2+2(n-1)\}\\&=6n-1\end{aligned}$$ ⋯⋯ ㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=6n-1$은 $n=1$일 때도 성립한다.

따라서 구하는 일반항은

$a_n=6n-1$

연습문제 I

pp.207~209

372 정답 (1) 6, 24, 48 (2) -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

(1) 3, $\boxed{a}$, 12, $\boxed{b}$, $\boxed{c}$, 96, ⋯이라고 두면

$a^2=3\times12=36$ $\quad\therefore a=\pm6$

(i) $a=-6$이면 공비는 -2이고, 이때 제6항은 $3\times(-2)^5=-96$이 되어 모순이다.

(ii) $a=6$이면 공비는 2이고, 제6항은 $3\cdot2^5=96$이 되어 성립한다.

따라서 $a=6$이므로

$b=12\times2=24$, $c=24\times2=48$

(2) 4, $\boxed{a}$, 1, $\boxed{b}$, $\boxed{c}$, $-\frac{1}{8}$, ⋯이라고 두면

$a^2=4$에서 $a=\pm2$

만약 $a=2$이면 공비는 $\frac{1}{2}$이 되고, 제6항이 $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{8}$이므로 모순이다.

따라서 $a=-2$이고 공비는 $-\frac{1}{2}$이므로

$b=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$, $c=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

373 정답 (1) 제10항 (2) 첫째항 : 3, 공비 : ±3 (3) 8

(1) 첫째항이 1, 공비가 -2인 등비수열이므로

일반항은 $a_n=1\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$

$a_n=(-2)^{n-1}=-512=(-2)^9$에서

$n-1=9$ $\quad\therefore n=10$

따라서 -512는 이 수열의 제10항이다.

(2) 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

조건에서 $a_3=ar^2=27$, $a_5=ar^4=243$이므로

$\frac{ar^4}{ar^2}=r^2=\frac{243}{27}=9$

따라서 $r=\pm3$이고 $a=3$

(3) 첫째항이 8, 공비가 2인 등비수열이므로

일반항은 $a_n=8\cdot2^{n-1}=2^{n+2}$

이때, 1024가 제n항이라고 하면 $2^{n+2}=1024=2^{10}$

$\therefore n=8$

따라서 이 수열의 전체 항수는 8이다.

374 정답 제9항

첫째항이 5, 공비가 2이므로 일반항은 $a_n=5\cdot2^{n-1}$

이때, $a_n\geq1000$인 n을 구하면

$a_n=5\cdot2^{n-1}\geq1000$, $2^{n-1}\geq200$

$2^8=256>200>128=2^7$이므로 $n\geq9$이다.

따라서 처음으로 1000 이상이 되는 항은 제9항이다.

375 정답 1

주어진 수열이 모두 등비수열이므로 공비는 이웃하는 두 항의 비와 같다.

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비가 각각 r_a, r_b이므로

$$r_a=\frac{a_2}{a_1}=\frac{5\times\frac{1}{2}}{5\times 2}=\frac{1}{4},\ r_b=\frac{b_2}{b_1}=\frac{5\times 2^7}{5\times 2^5}=4$$

$$\therefore\ r_a\times r_b=\frac{1}{4}\times 4=1$$

376 정답 6

a_6은 a_3, a_9의 등비중항이므로

$${a_6}^2=a_3a_9=36 \qquad \therefore\ a_6=6\ (\because\ a_n>0)$$

다른 풀이

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$a_3a_9=ar^2\times ar^8=(ar^5)^2=36$$

$a_n>0$이므로 $ar^5=6$

$$\therefore\ a_6=ar^5=6$$

377 정답 (1) 6, 18, 54 (2) $a=3$, $b=3$ 또는 $a=-6$, $b=12$

(1) 2, x, y, z, 162가 이 순서대로 등비수열을 이룬다고 하면 세 수 2, y, 162도 등비수열을 이룬다.

즉, $y^2=2\times 162=324$에서 $y=18\ (\because\ y>0)$

또, 세 수 2, x, y, 세 수 y, z, 162도 등비수열을 이루므로

$$x^2=2y=36,\ z^2=162y=(3^3\times 2)^2$$

$$\therefore\ x=6,\ y=18,\ z=54$$

(2) a, 3, b가 등차수열을 이루므로 $a+b=6$ …… ㉠

3, a, b가 등비수열을 이루므로 $a^2=3b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a^2=3(6-a)$에서

$$a^2+3a-18=0,\ (a+6)(a-3)=0$$

따라서 $a=3$ 또는 $a=-6$이므로

$$a=3,\ b=3 \text{ 또는 } a=-6,\ b=12$$

378 정답 (1) $S_n=2^n-1$ (2) $S_n=32-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$

(3) $S_n=\begin{cases}\dfrac{x+(-x)^{n+1}}{1+x} & (x\neq -1)\\ -n & (x=-1)\end{cases}$

(1) $S_n=\dfrac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

(2) 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=32\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=32-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$$

(3) 첫째항이 x, 공비가 $-x$인 등비수열이므로

(i) $-x\neq 1$, 즉 $x\neq -1$일 때,

$$S_n=\frac{x\{1-(-x)^n\}}{1-(-x)}=\frac{x-x(-x)^n}{1+x}$$

$$=\frac{x+(-x)^{n+1}}{1+x}$$

(ii) $-x=1$, 즉 $x=-1$일 때,

$$S_n=\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{n\text{개}}=-n$$

379 정답 4

등비수열의 첫째항을 2라고 하면 32는 제9항이 된다.

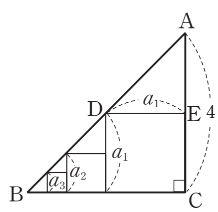
공비를 r라고 하면 $2r^8=32$, $r^8=2^4$

각 항이 양수이므로 $r=\sqrt{2}$

이때, a_2는 제3항이 되므로

$$2r^2=2\cdot(\sqrt{2})^2=4$$

380 정답 $\left(\frac{1}{2}\right)^8$



$\triangle$ADE$\backsim\triangle$ABC이므로

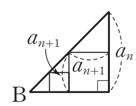
$\triangle$ADE는 $\overline{\text{AE}}=\overline{\text{DE}}=a_1$

인 직각이등변삼각형이다.

즉, $\overline{\text{AE}}+\overline{\text{CE}}=2a_1=4$이므로

$$a_1=2$$

마찬가지로 다음의 관계식이 성립한다.



$$a_1=2a_2$$

$$a_2=2a_3$$

$$\vdots$$

$$a_n=2a_{n+1} \qquad \therefore\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$$

따라서 주어진 수열은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$$a_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$\therefore\ a_{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

381 정답 42

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$S_6=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=6$$

$$S_{12}=\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{a(r^6-1)(r^6+1)}{r-1}=18$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $r^6=2$

$$\therefore\ S_{18}=\frac{a(r^{18}-1)}{r-1}=\frac{a(r^6-1)}{r-1}\cdot(r^{12}+r^6+1)$$

$$=6\times(2^2+2+1)=42$$

382 정답 **제8항**

첫째항이 $\frac{2}{3}$, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{\frac{2}{3}(2^n-1)}{2-1}=\frac{2}{3}(2^n-1)$$

$\frac{2}{3}(2^n-1)>100$에서 $2^n>151$

이때, $2^7=128$, $2^8=256$이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 처음으로 100보다 크게 된다.

383 정답 ④

첫째항이 5^5이고 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비수열의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$$S_6=\frac{5^5\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^6\right\}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5^5\left(\frac{5^6-3^6}{5^6}\right)}{\frac{2}{5}}=\frac{5^6-3^6}{2}$$

384 정답 ③

$f(x)=x^9+x^8+\cdots x+1$이라고 하면 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(\frac{1}{2}\right)$이다. ← 나머지정리

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^9+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots+\frac{1}{2}+1$$

위의 식에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$, 항수가 10인 등비수열의 합과 같다.

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^9}$$

385 정답 ②

n개월 동안 불입하여 만기일에 원리합계가 1000만 원 이상이 된다고 하면

$$10\times(1+0.002)+10\times(1+0.002)^2$$
$$+\cdots+10\times(1+0.002)^n\geq1000$$
$$\frac{10\times1.002\{(1.002)^n-1\}}{1.002-1}\geq10^3$$

$(1.002)^{n+1}-1.002\geq0.2$, 즉 $(1.002)^{n+1}\geq1.202$

양변에 상용로그를 취하면 $\log(1.002)^{n+1}\geq\log1.202$

정리하면 $(n+1)\log1.002\geq\log1.202$이므로

$$n+1\geq\frac{\log1.202}{\log1.002}=\frac{0.0800}{0.0009}=88.8\times\times\times$$
$$\therefore n\geq87.8\times\times\times$$

따라서 최소한 88번 불입해야 원리합계가 1000만 원 이상이 된다.

386 정답 (1) $a_n=-2n+9$ (2) 4

(1) (i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=-1+8=7$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(-n^2+8n)-\{-(n-1)^2+8(n-1)\}\\&=-2n+9\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $a_n=-2n+9(n\geq1)$

(2) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 7이고 공차가 -2인 등차수열이므로 $a_n\geq0$인 항까지의 합이 최대가 된다.

$$a_n=-2n+9\geq0\qquad\therefore n\geq\frac{9}{2}$$

즉, 첫째항부터 제4항까지 양수이고 제5항부터는 음수이다.
따라서 첫째항부터 제4항까지의 합이 최대이다.

연습문제 Ⅱ

p.210

387 정답 $S_n=\frac{1}{9}(10^{n+1}-9n-10)$

$$\begin{aligned}S_n&=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)\\&=10+10^2+10^3+\cdots+10^n-n\\&=\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\\&=\frac{1}{9}(10^{n+1}-9n-10)\end{aligned}$$

388 정답 **17**

구하는 세 수를 a, ar, ar^2이라고 하면

$$a+ar+ar^2=21\qquad\cdots\cdots ㉠$$
$$a\cdot ar\cdot ar^2=(ar)^3=64\qquad\therefore ar=4$$

$ar=4$를 ㉠에 대입하면 $a+ar^2=17$

그런데 조건에서 세 수가 양수이므로 $r>0$

$$\therefore a<ar<ar^2 \text{ 또는 } a>ar>ar^2$$

따라서 최대인 수와 최소인 수의 합은 어떤 경우에도 $a+ar^2$이므로 구하는 합은 17이다.

389 정답 **4**

첫째항을 a라고 하면

$$a_k=a\cdot2^{k-1}=400$$
$$\therefore a\cdot2^k=800\qquad\cdots\cdots ㉠$$

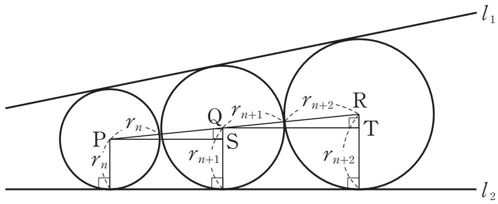
첫째항부터 제k항까지의 합이 750이므로

$$S_k=\frac{a(2^k-1)}{2-1}=a(2^k-1)=750$$
$$\therefore a\cdot2^k-a=750\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=50$, $k=4$

390 정답 6

n번째 원의 반지름의 길이를 r_n이라고 하면
아래 그림에서 △PQS∽△QRT이므로



$\overline{QS}:\overline{RT}=\overline{PQ}:\overline{QR}$에서

$$(r_{n+1}-r_n):(r_{n+2}-r_{n+1})=(r_n+r_{n+1}):(r_{n+1}+r_{n+2})$$

정리하면 $r_{n+1}{}^2=r_nr_{n+2}$

따라서 각 원의 반지름의 길이로 이루어진 수열 $\{r_n\}$은 등비수열을 이루므로 세 번째 원의 반지름의 길이를 x라고 하면 x는 4와 9의 등비중항이다.

즉, $x^2=4\times9=36$이므로 $x=6$

391 정답 $\frac{3}{4}(9^{10}-1)$ 서술형

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^{n+1}-3)-(3^n-3)$$
$$=2\cdot3^n\ (n\geq2) \quad \cdots ①$$

한편, $a_1=S_1=3^{1+1}-3=6$이므로 위의 식은 $n=1$일 때에도 성립한다.

즉, $a_n=2\cdot3^n$이므로

$$a_{2n-1}=2\cdot3^{2n-1}=6\cdot3^{2(n-1)}=6\cdot9^{n-1} \quad \cdots ②$$

따라서 구하는 값은 첫째항이 6, 공비가 9인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이다.

$$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=\frac{6(9^{10}-1)}{9-1}$$
$$=\frac{3}{4}(9^{10}-1) \quad \cdots ③$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	수열 $\{a_n\}$의 일반항 구하기	30%
②	수열 $\{a_{2n-1}\}$의 일반항 구하기	40%
③	수열의 합 구하기	30%

13. 수열의 합

유형 pp.214~220

001 정답 (1) $2^2+3^2+4^2+\cdots+11^2$

(2) $3\cdot3^2+4\cdot3^3+5\cdot3^4+\cdots+9\cdot3^8$

(3) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{3k+1}$

(4) $\sum_{k=m}^{n}a_k$

(1) $\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2$은 일반항 $(k+1)^2$의 k 대신 1, 2, 3, ⋯, 10을 대입하여 얻은 항을 모두 더한 것이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2=2^2+3^2+4^2+\cdots+11^2$$

(2) $\sum_{i=3}^{9}i\cdot3^{i-1}$은 일반항 $i\cdot3^{i-1}$의 i 대신 3, 4, 5, ⋯, 9를 대입하여 얻은 항을 모두 더한 것이므로

$$\sum_{i=3}^{9}i\cdot3^{i-1}=3\cdot3^2+4\cdot3^3+5\cdot3^4+\cdots+9\cdot3^8$$

(3) 주어진 수열은 각 항의 역수가 첫째항이 4이고 공차가 3인 등차수열이다.

즉, 일반항이 $a_n=\frac{1}{3n+1}$인 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{31}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{3k+1}$$

(4) 일반항이 a_k인 수열의 제m항부터 제n항까지의 합이므로

$$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n=\sum_{k=m}^{n}a_k$$

002 정답 (1) 150 (2) 400

(1) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-3)^2=\sum_{k=1}^{10}(4a_k{}^2-12a_k+9)$

$$=4\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-12\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}9$$
$$=4\times30-12\times5+9\times10=150$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

즉, $\sum_{k=1}^{2n}a_k=4n^2$이므로 $\sum_{k=1}^{20}a_k=4\times10^2=400$

003 정답 (1) $2n$ (2) n^2+1 (3) n^2+2n-1 (4) $2n+4$

(1) $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(k^2+1)-(k^2-1)\}=\sum_{k=1}^{n}2=2n$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+1)$

$=\left\{\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+1)+(n^2+1)\right\}-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+1)=n^2+1$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$

$=\left\{\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+1)+(n^2+1)\right\}-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{n-1}\{(k^2+1)-(k^2-1)\}+(n^2+1)$

$=\sum_{k=1}^{n-1}2+(n^2+1)=2(n-1)+n^2+1=n^2+2n-1$

(4) $\sum_{k=0}^{n}(k^2+1)=1+\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)$,

$\sum_{k=3}^{n}(k^2-1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)-\{(1^2-1)+(2^2-1)\}$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)-3$

$\therefore \sum_{k=0}^{n}(k^2+1)-\sum_{k=3}^{n}(k^2-1)$

$=1+\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)-3\right\}$

$=4+\sum_{k=1}^{n}\{(k^2+1)-(k^2-1)\}=4+\sum_{k=1}^{n}2=2n+4$

004 정답 (1) 100 (2) 440 (3) 1770 (4) 2255

(1) $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1$

$=2\times\frac{10\times(10+1)}{2}-10=100$

(2) $\sum_{k=1}^{10}k(k+1)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\times(10+1)\times(20+1)}{6}+\frac{10\times(10+1)}{2}=440$

(3) $\sum_{k=1}^{10}(2k+1)^2$

$=\sum_{k=1}^{10}(4k^2+4k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{10}k^2+4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=4\times\frac{10\times(10+1)\times(20+1)}{6}+4\times\frac{10\times(10+1)}{2}+10$

$=1770$

(4) $\sum_{k=1}^{10}k^2(k-2)=\sum_{k=1}^{10}(k^3-2k^2)=\sum_{k=1}^{10}k^3-2\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=\left(\left\{\frac{10\times(10+1)}{2}\right\}^2-2\times\frac{10\times(10+1)\times(20+1)}{6}\right)$

$=2255$

005 정답 (1) 559 (2) 715 (3) 3016

(1) $7^2+8^2+9^2+\cdots+12^2=\sum_{k=7}^{12}k^2=\sum_{k=1}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{6}k^2$

$=\frac{12\times(12+1)\times(24+1)}{6}$

$-\frac{6\times(6+1)\times(12+1)}{6}=559$

(2) 구하는 합은 일반항이 $a_n=n(2n-1)$인 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$\sum_{k=1}^{10}k(2k-1)=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-k)$

$=2\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k$

$=2\times\frac{10\times(10+1)\times(20+1)}{6}$

$-\frac{10\times(10+1)}{2}$

$=715$

(3) $\sum_{k=1}^{8}(k+2)^3=3^3+4^3+5^3+\cdots+10^3=\sum_{k=3}^{10}k^3$

$=\sum_{k=1}^{10}k^3-(1^3+2^3)$

$=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2-9=3016$

006 정답 (1) $4n^2+n$ (2) $\frac{n(n+1)(8n-5)}{6}$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2n^2-n$이므로

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2-1=1$ …… ㉠

(ii) $n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-n-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$

$=4n-3$ …… ㉡

이때, ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=4n-3$은 $n=1$일 때도 성립한다.

$\therefore a_n=4n-3$

(1) $a_{2k}=4\times(2k)-3=8k-3$이므로

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}(8k-3)$

$=8\times\frac{n(n+1)}{2}-3n=4n^2+n$

(2) $ka_k=k(4k-3)=4k^2-3k$이므로

$\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-3k)$

$=4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3\times\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)(8n-5)}{6}$

확인문제 pp.214~220

392 정답 (1) $\sum_{k=1}^{10}(5k)^3$ (2) $\sum_{k=1}^{10}k(k+2)$

(1) 주어진 수열의 일반항은 $a_n=(5n)^3$이고, 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$5^3+10^3+15^3+\cdots+50^3=\sum_{k=1}^{10}(5k)^3$

(2) 주어진 수열의 일반항은 $a_n=n(n+2)$이고, 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+10\cdot12=\sum_{k=1}^{10}k(k+2)$$

393 정답 (1) $2^4-2^5+2^6-2^7+2^8-2^9$

(2) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

(1) $\sum_{i=4}^{9}(-2)^i$

$=(-2)^4+(-2)^5+(-2)^6+(-2)^7+(-2)^8+(-2)^9$

$=2^4-2^5+2^6-2^7+2^8-2^9$

(2) $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

394 정답 190

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

$=3n^2+n$

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

$=n^2-3n$

두 식을 변끼리 더하면 $2\sum_{k=1}^{n}a_k=4n^2-2n$이므로

$\sum_{k=1}^{n}a_k=2n^2-n$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=2\times10^2-10=190$

395 정답 220

$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=A$라고 두면

$\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=200$

$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=A$

두 식을 변끼리 더하면

$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{19}+a_{20}=200+A$

즉, $\sum_{k=1}^{20}a_k=200+A$이고, 조건 $\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+n$에서

$\sum_{k=1}^{20}a_k=20^2+20=420$이므로

$200+A=420 \qquad \therefore A=220$

396 정답 (1) 30 (2) 119

(1) $\sum_{k=1}^{10}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-2)=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+1)-(k^2-2)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}3=30$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{9}(k^2-1)$

$=\left\{\sum_{k=1}^{9}(k^2+1)+(10^2+1)\right\}-\sum_{k=1}^{9}(k^2-1)$

$=\sum_{k=1}^{9}\{(k^2+1)-(k^2-1)\}+(10^2+1)$

$=\sum_{k=1}^{9}2+101=2\times9+101=119$

397 정답 25

$\sum_{k=0}^{n}(k^2+3)=3+\sum_{k=1}^{n}(k^2+3)$이고,

$\sum_{k=2}^{n}(k^2+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-(1^2+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-2$이므로

$\sum_{k=0}^{n}(k^2+3)-\sum_{k=2}^{n}(k^2+1)$

$=3+\sum_{k=1}^{n}(k^2+3)-\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-2\right\}$

$=5+\sum_{k=1}^{n}\{(k^2+3)-(k^2+1)\}$

$=5+\sum_{k=1}^{n}2=2n+5$

즉, $2n+5=55$에서 $n=25$

398 정답 (1) 207 (2) 276

(1) $\sum_{k=1}^{9}(4k+3)=4\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}3$

$=4\times\frac{9\times(9+1)}{2}+3\times9=207$

(2) $\sum_{k=1}^{9}(k-1)(k+1)=\sum_{k=1}^{9}(k^2-1)=\sum_{k=1}^{9}k^2-\sum_{k=1}^{9}1$

$=\frac{9\times(9+1)\times(18+1)}{6}-9=276$

399 정답 (1) 456 (2) 3960

(1) $\sum_{k=1}^{8}(2k-3)^2=\sum_{k=1}^{8}(4k^2-12k+9)$

$=4\sum_{k=1}^{8}k^2-12\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}9$

$=4\times\frac{8\times9\times17}{6}-12\times\frac{8\times9}{2}+9\times8$

$=456$

(2) $\sum_{k=1}^{8}(4k^3-6k^2)=4\sum_{k=1}^{8}k^3-6\sum_{k=1}^{8}k^2$

$=4\times\left\{\frac{8\times(8+1)}{2}\right\}^2-6\times\frac{8\times(8+1)\times(16+1)}{6}$

$=3960$

400 정답 (1) 330 (2) 680

(1) 구하는 합은 일반항이 $a_n=n(n+1)$인 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합이므로

$\sum_{k=1}^{9}k(k+1)=\sum_{k=1}^{9}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}k$

$=\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{9\times10}{2}=330$

(2) 구하는 합은 일반항이 $a_n=(2n-1)^2$인 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{8}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{8}(4k^2-4k+1)$$
$$=4\sum_{k=1}^{8}k^2-4\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}1$$
$$=4\times\frac{8\times9\times17}{6}-4\times\frac{8\times9}{2}+8=680$$

401 정답 **2024**

$$\sum_{k=1}^{8}(k+1)^3=2^3+3^3+4^3+\cdots+9^3$$
$$=\sum_{k=1}^{9}k^3-1^3=\left(\frac{9\times10}{2}\right)^2-1$$
$$=2024$$

402 정답 (1) $\mathbf{2n^2}$ (2) $\mathbf{\dfrac{2n(n+1)(n+2)}{3}}$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n(n+1)$이므로

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1\times2=2$ …… ㉠

(ii) $n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$
$$=n(n+1)-(n-1)n$$
$$=2n \quad\cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 $a_n=2n$은 $n=1$일 때도 성립한다.

$\therefore a_n=2n$

(1) $a_{2k-1}=2(2k-1)=4k-2$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(4k-2)=4\times\frac{n(n+1)}{2}-2n=2n^2$$

(2) $(k+1)a_k=(k+1)\cdot2k=2k^2+2k$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+2k)$$
$$=2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{2n(n+1)(n+2)}{3}$$

연습문제 I pp.221~223

403 정답 (1) $\sum_{k=1}^{n}4k$ (2) $\sum_{k=1}^{6}(2k-1)^2$ (3) $\sum_{k=1}^{10}ka$

(1) 일반항이 $a_n=4n$인 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$4+8+12+\cdots+4n=\sum_{k=1}^{n}4k$$

(2) 일반항이 $a_n=(2n-1)^2$인 수열의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+11^2=\sum_{k=1}^{6}(2k-1)^2$$

(3) 일반항이 $a_n=na$인 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$a+2a+3a+\cdots+10a=\sum_{k=1}^{10}ka$$

404 정답 (1) $\mathbf{5+8+11+\cdots+32}$
(2) $\mathbf{1\times3^1+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+20\times3^{20}}$

(1) $\sum_{k=1}^{10}(3k+2)=5+8+11+\cdots+32$

(2) $\sum_{i=1}^{20}i\cdot3^i=1\times3^1+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+20\times3^{20}$

405 정답 **25**

$$\sum_{k=2}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{19}a_k=(a_2+a_3+\cdots+a_{20})-(a_1+a_2+\cdots+a_{19})$$
$$=a_{20}-a_1$$

이므로 $\sum_{k=2}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{19}a_k=25$에서 $a_{20}-a_1=25$

406 정답 **350**

$\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=A$라고 두면

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=A$$
$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=390$$

두 식을 변끼리 더하면

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{19}+a_{20}=A+390$$

즉, $\sum_{k=1}^{20}a_k=A+390$이고, 조건 $\sum_{k=1}^{n}a_k=2n^2-3n$에서

$\sum_{k=1}^{20}a_k=2\times20^2-3\times20=740$이므로

$A+390=740 \qquad \therefore A=350$

407 정답 (1) **0** (2) **32**

(1) $\sum_{k=1}^{n}(3a_k-2b_k)=3\sum_{k=1}^{n}a_k-2\sum_{k=1}^{n}b_k=3\times8-2\times12=0$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}\{(a_k+1)^2-(a_k-1)^2\}$
$$=\sum_{k=1}^{n}4a_k=4\times8=32$$

408 정답 (1) 294 (2) 495 (3) 969

(1) $\sum_{k=1}^{12}(3k+5)=3\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}5$

$=3\times\frac{12\times 13}{2}+5\times 12=294$

(2) $\sum_{k=1}^{10}k(k+2)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k)=\sum_{k=1}^{10}k^2+2\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\times 11\times 21}{6}+2\times\frac{10\times 11}{2}=495$

(3) $\sum_{k=1}^{9}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{9}(4k^2-4k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{9}k^2-4\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}1$

$=4\times\frac{9\times 10\times 19}{6}-4\times\frac{9\times 10}{2}+9$

$=969$

409 정답 (1) 1260 (2) 1288

(1) $\sum_{k=1}^{8}k(k+1)(k-1)=\sum_{k=1}^{8}(k^3-k)=\sum_{k=1}^{8}k^3-\sum_{k=1}^{8}k$

$=\left(\frac{8\times 9}{2}\right)^2-\frac{8\times 9}{2}=1260$

(2) $\sum_{k=1}^{8}(k-1)(k^2+k+1)=\sum_{k=1}^{8}(k^3-1)=\sum_{k=1}^{8}k^3-\sum_{k=1}^{8}1$

$=\left(\frac{8\times 9}{2}\right)^2-1\times 8=1288$

410 정답 1188

$\sum_{k=1}^{10}(2^{k-1}+3k)=\sum_{k=1}^{10}2^{k-1}+3\sum_{k=1}^{10}k$

$=(1+2+2^2+\cdots+2^9)+3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}$

$=\frac{1\times(2^{10}-1)}{2-1}+165$

$=1188$

411 정답 (1) 620 (2) 176

(1) $\sum_{k=2}^{9}(k+3)^2=5^2+6^2+7^2+\cdots+12^2$

$=\sum_{k=1}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{4}k^2$

$=\frac{12\times 13\times 25}{6}-\frac{4\times 5\times 9}{6}$

$=620$

(2) $\sum_{k=2}^{9}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{9}(k-1)^2$

$=(3^2+4^2+5^2+\cdots+10^2)-(0^2+1^2+2^2+\cdots+8^2)$

$=(9^2+10^2)-(1^2+2^2)=176$

412 정답 (1) 605 (2) 3145

(1) 구하는 합은 일반항이 $a_n=n(n+4)$인 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$\sum_{k=1}^{10}k(k+4)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+4k)=\sum_{k=1}^{10}k^2+4\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\times 11\times 21}{6}+4\times\frac{10\times 11}{2}=605$

(2) 구하는 합은 일반항이 $a_n=(3n-1)^2$인 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$\sum_{k=1}^{10}(3k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(9k^2-6k+1)$

$=9\times\frac{10\times 11\times 21}{6}-6\times\frac{10\times 11}{2}+10$

$=3145$

413 정답 134

$\sum_{k=1}^{9}f(k+1)-\sum_{k=3}^{9}f(k)$

$=\{f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)\}$

$\quad-\{f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(9)\}$

$=f(2)+f(10)$

한편, $f(2)=11$, $f(10)=123$이므로

$\sum_{k=1}^{9}f(k+1)-\sum_{k=3}^{9}f(k)=f(2)+f(10)$

$=11+123=134$

414 정답 (1) 120 (2) 1066

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면,

$a_3=a+2d=3$ ······ ㉠

$a_{10}=a+9d=17$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d=2$, $a=-1$

따라서 일반항은 $a_n=2n-3$

(1) $\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}(2k-3)=2\times\frac{12\times 13}{2}-3\times 12=120$

(2) $\sum_{k=1}^{12}ka_k=\sum_{k=1}^{12}k(2k-3)=\sum_{k=1}^{12}(2k^2-3k)$

$=2\times\frac{12\times 13\times 25}{6}-3\times\frac{12\times 13}{2}=1066$

415 정답 15

수열 $\{a_n\}$이 공차가 4인 등차수열이므로 임의의 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=4$가 성립한다.

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}-\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k}-a_{2k-1})=\sum_{k=1}^{n}4=4n$

즉, $4n=60$이므로 $n=15$

416 정답 (1) 198 (2) 750

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=n^2+5n$이므로

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1+5=6$ …… ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+5n-\{(n-1)^2+5(n-1)\}$

$=2n+4$ …… ㉡

이때, ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=2n+4$는 $n=1$일 때도 성립한다.

$\therefore a_n=2n+4$

(1) $a_{2k-1}=2(2k-1)+4=4k+2$이므로

$$\sum_{k=1}^{9} a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{9}(4k+2)$$

$$=4\times\frac{9\times 10}{2}+2\times 9=198$$

(2) $ka_k=k(2k+4)=2k^2+4k$이므로

$$\sum_{k=1}^{9} ka_k=\sum_{k=1}^{9}(2k^2+4k)$$

$$=2\times\frac{9\times 10\times 19}{6}+4\times\frac{9\times 10}{2}=750$$

연습문제 Ⅱ

p.224

417 정답 (1) $\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-5}$ (2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

(1) 일반항이 $a_n=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}$인 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$$81+27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-5}$$

(2) 제k항이 $a_k=\frac{1}{n+k}$인 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

418 정답 30

$\sum_{k=1}^{10} a_{2n}=50$에서

$a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{20}=50$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{20}(-1)^n a_n=20$에서

$-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots+a_{20}=20$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{19}=30$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_{2n-1}=a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{19}=30$

419 정답 195

$\sum_{k=1}^{n} ka_k=n(n+1)(n+2)$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=1\cdot 2\cdot 3=6$ …… ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$\sum_{k=1}^{n} ka_k=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$

$=n(n+1)(n+2)$ …… ㉡

$\sum_{k=1}^{n-1} ka_k=a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}$

$=(n-1)n(n+1)$ …… ㉢

㉡−㉢을 하면

$na_n=n(n+1)\{(n+2)-(n-1)\}$

$=3n(n+1)$ …… ㉣

이때, ㉠은 ㉣에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$na_n=3n(n+1)$은 $n=1$일 때도 성립한다.

따라서 $a_n=3(n+1)$이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10} 3(k+1)=3\sum_{k=1}^{10} k+3\times 10$$

$$=3\times\frac{10\times 11}{2}+30=165+30=195$$

420 정답 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 서술형

제k항이 $a_k=k\{n-(k-1)\}=k(n-k+1)$인 수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이므로 … ①

$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$

$=\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)$ … ②

$=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k-k^2\}$

$=(n+1)\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n} k^2$

$=(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	주어진 수열의 제k항 구하기	20 %
②	주어진 수열의 합을 $\sum$ 기호를 사용하여 나타내기	30 %
③	$\sum$의 성질을 이용하여 주어진 수열의 합을 n의 식으로 나타내기	50 %

14. 여러 가지 수열의 합

유형 ························ pp.227~232

001 정답 (1) **92** (2) **14**

(1) $a_{n+1}-a_n=2n$에 $n=1, 2, 3, \cdots, 9$를 차례로 대입하여 나열한 후 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}-a_1=2\times1 \\ & \cancel{a_3}-\cancel{a_2}=2\times2 \\ & \vdots \\ + & a_{10}-\cancel{a_9}=2\times9 \\ \hline & a_{10}-a_1=2(1+2+3+\cdots+9)=90 \end{array}$$

$\therefore\ a_{10}=a_1+90=92$

(2) $\sum_{k=1}^{9}b_k=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9$이므로

$b_n=a_{n+1}-a_n$에 $n=1, 2, 3, \cdots, 9$를 차례로 대입하여 나열한 후 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & b_1=\cancel{a_2}-a_1 \\ & b_2=\cancel{a_3}-\cancel{a_2} \\ & \vdots \\ + & b_9=a_{10}-\cancel{a_9} \\ \hline & \sum_{k=1}^{9}b_k=a_{10}-a_1=16-2=14 \end{array}$$

002 정답 (1) **4** (2) **6** (3) **1**

(1) $$\begin{aligned}\frac{8}{(k+1)(k+3)}&=8\cdot\frac{1}{(k+1)(k+3)}\\&=8\cdot\frac{1}{(k+3)-(k+1)}\cdot\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\\&=4\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\end{aligned}$$

$\therefore\ a=4$

(2) $$\begin{aligned}&\frac{b}{(3k-1)(3k+2)}\\&=b\cdot\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}\\&=b\cdot\frac{1}{(3k+2)-(3k-1)}\cdot\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)\\&=\frac{b}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)\end{aligned}$$

에서 $\frac{b}{3}=2$ $\quad\therefore\ b=6$

(3) $$\begin{aligned}&\frac{4}{(k+1)(k+3)(k+5)}\\&=\frac{4}{k+3}\times\frac{1}{(k+1)(k+5)}\\&=\frac{4}{k+3}\times\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+5}\right)\\&=\frac{1}{(k+1)(k+3)}-\frac{1}{(k+3)(k+5)}\end{aligned}$$

$\therefore\ c=1$

003 정답 (1) $\mathbf{\frac{10}{31}}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)}$

(1)
$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{1\cdot4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) \\ & \frac{1}{4\cdot7}=\frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right) \\ & \frac{1}{7\cdot10}=\frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right) \\ & \vdots \\ & \frac{1}{25\cdot28}=\frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{25}}-\cancel{\frac{1}{28}}\right) \\ + & \frac{1}{28\cdot31}=\frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{28}}-\frac{1}{31}\right) \\ \hline & (\text{합})\ =\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{31}\right)=\frac{10}{31} \end{array}$$

앞에서 한 개가 남으면 뒤에도 한 개가 남는다.

(2)
$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{1\cdot3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) \\ & \frac{1}{2\cdot4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) \\ & \frac{1}{3\cdot5}=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right) \\ & \frac{1}{4\cdot6}=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right) \\ & \vdots \\ & \frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) \\ + & \frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right) \\ \hline & (\text{합})\ =\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \\ & \qquad\ =\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \end{array}$$

앞에서 두 개가 남으면 뒤에도 두 개가 남는다.

004 정답 (1) $\mathbf{\frac{1}{3}(6-\sqrt{3})}$ (2) **3**

각 항의 분모를 유리화한 후 변끼리 더하면

(1)
$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{1}{3}(\cancel{\sqrt{6}}-\sqrt{3}) \\ & \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{9}}=\frac{1}{3}(\cancel{\sqrt{9}}-\cancel{\sqrt{6}}) \\ & \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{12}}=\frac{1}{3}(\cancel{\sqrt{12}}-\cancel{\sqrt{9}}) \\ & \frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{15}}=\frac{1}{3}(\cancel{\sqrt{15}}-\cancel{\sqrt{12}}) \\ & \vdots \\ + & \frac{1}{\sqrt{33}+\sqrt{36}}=\frac{1}{3}(\sqrt{36}-\cancel{\sqrt{33}}) \\ \hline & (\text{합})\ =\frac{1}{3}(\sqrt{36}-\sqrt{3}) \\ & \qquad\ =\frac{1}{3}(6-\sqrt{3}) \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rll} \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} & =\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} & =\sqrt{2}-1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} & =\dfrac{2(\sqrt{4}-\sqrt{2})}{4-2} & =\sqrt{4}-\cancel{\sqrt{2}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{4}+\sqrt{7}} & =\dfrac{3(\sqrt{7}-\sqrt{4})}{7-4} & =\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{4}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{11}} & =\dfrac{4(\sqrt{11}-\sqrt{7})}{11-7} & =\cancel{\sqrt{11}}-\cancel{\sqrt{7}} \\ +\ \dfrac{5}{\sqrt{11}+\sqrt{16}} & =\dfrac{5(\sqrt{16}-\sqrt{11})}{16-11} & =\sqrt{16}-\cancel{\sqrt{11}} \\ \hline & (\text{합}) & =\sqrt{16}-1=3 \end{array}$$

확인문제 .... pp.227~232

421 정답 286

$a_{n+1}-a_n=n^2$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$를 차례로 대입하여 나열한 후 변끼리 더하면

$$\begin{array}{l} \cancel{a_2}-a_1=1^2 \\ \cancel{a_3}-\cancel{a_2}=2^2 \\ \cancel{a_4}-\cancel{a_3}=3^2 \\ \quad\vdots \\ +\ a_{10}-\cancel{a_9}=9^2 \\ \hline a_{10}-a_1=1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2=\dfrac{9\times10\times19}{6}=285 \end{array}$$

$\therefore\ a_{10}=a_1+285=286$

422 정답 29

$\displaystyle\sum_{k=1}^{19}b_k=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{19}$이므로

$b_n=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 19$를 차례로 대입하여 나열한 후 변끼리 더하면

$$\begin{array}{l} b_1=\dfrac{1}{a_1}-\cancel{\dfrac{1}{a_2}} \\ b_2=\cancel{\dfrac{1}{a_2}}-\cancel{\dfrac{1}{a_3}} \\ b_3=\cancel{\dfrac{1}{a_3}}-\cancel{\dfrac{1}{a_4}} \\ \quad\vdots \\ +\ b_{19}=\cancel{\dfrac{1}{a_{19}}}-\dfrac{1}{a_{20}} \\ \hline \displaystyle\sum_{k=1}^{19}b_k=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{20}}=30-1=29 \end{array}$$

423 정답 (1) $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+2}\right)$ (2) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+3}\right)$

(1) $\dfrac{1}{(k-1)(k+2)}=\dfrac{1}{(k+2)-(k-1)}\cdot\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+2}\right)$
$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

(2) $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+3)}$
$=\dfrac{1}{(2k+3)-(2k-1)}\cdot\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+3}\right)$
$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+3}\right)$

424 정답 2

$\dfrac{a}{k^3-k}=\dfrac{a}{(k-1)k(k+1)}$
$=a\cdot\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{(k-1)(k+1)}$
$=a\cdot\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+1}\right)$
$=\dfrac{a}{2}\left\{\dfrac{1}{k(k-1)}-\dfrac{1}{k(k+1)}\right\}$

이므로 $\dfrac{a}{2}=1$ $\quad\therefore\ a=2$

425 정답 $\dfrac{15}{31}$

(주어진 식)$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\cancel{\dfrac{1}{3}}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{3}}-\cancel{\dfrac{1}{5}}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{5}}-\cancel{\dfrac{1}{7}}\right)$
$+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{27}}-\cancel{\dfrac{1}{29}}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{29}}-\dfrac{1}{31}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{31}\right)=\dfrac{15}{31}$

426 정답 $\dfrac{29}{88}$

(주어진 식)$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\cancel{\dfrac{1}{4}}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\cancel{\dfrac{1}{5}}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{4}}-\cancel{\dfrac{1}{6}}\right)$
$+\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{5}}-\cancel{\dfrac{1}{7}}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{9}}-\dfrac{1}{11}\right)$
$+\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{10}}-\dfrac{1}{12}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{87}{264}=\dfrac{29}{88}$

427 정답 $\dfrac{1}{2}(10-\sqrt{2})$

각 항의 분모를 유리화한 후 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} & =\dfrac{1}{2}(\cancel{\sqrt{4}}-\sqrt{2}) \\ \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} & =\dfrac{1}{2}(\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{4}}) \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{8}} & =\dfrac{1}{2}(\cancel{\sqrt{8}}-\cancel{\sqrt{6}}) \\ & \vdots \\ +\ \dfrac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{100}} & =\dfrac{1}{2}(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{98}}) \\ \hline (\text{합}) & =\dfrac{1}{2}(\sqrt{100}-\sqrt{2}) \\ & =\dfrac{1}{2}(10-\sqrt{2}) \end{array}$$

14강

428 정답 $3\sqrt{2}$

각 항의 분모를 유리화한 후 변끼리 더하면

$$
\begin{array}{rlll}
 & \dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} & =\dfrac{2(\sqrt{4}-\sqrt{2})}{2} & =\cancel{\sqrt{4}}-\sqrt{2} \\
 & \dfrac{4}{\sqrt{4}+\sqrt{8}} & =\dfrac{4(\sqrt{8}-\sqrt{4})}{4} & =\cancel{\sqrt{8}}-\cancel{\sqrt{4}} \\
 & \dfrac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{14}} & =\dfrac{6(\sqrt{14}-\sqrt{8})}{6} & =\cancel{\sqrt{14}}-\cancel{\sqrt{8}} \\
 & \dfrac{8}{\sqrt{14}+\sqrt{22}} & =\dfrac{8(\sqrt{22}-\sqrt{14})}{8} & =\cancel{\sqrt{22}}-\cancel{\sqrt{14}} \\
+ & \dfrac{10}{\sqrt{22}+\sqrt{32}} & =\dfrac{10(\sqrt{32}-\sqrt{22})}{10} & =\sqrt{32}-\cancel{\sqrt{22}} \\
\hline
 & & (\text{합}) & =\sqrt{32}-\sqrt{2} \\
 & & & =3\sqrt{2}
\end{array}
$$

431 정답 19

$\sum_{k=1}^{10} b_k=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}$이므로

$b_n=a_{n+1}-a_n$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$을 차례로 대입하여 나열한 후 변끼리 더하면

$$
\begin{array}{rl}
 & b_1=\cancel{a_2}-\cancel{a_1} \\
 & b_2=\cancel{a_3}-\cancel{a_2} \\
 & b_3=\cancel{a_4}-\cancel{a_3} \\
 & \quad\vdots \\
+ & b_{10}=a_{11}-\cancel{a_{10}} \\
\hline
 & \sum_{k=1}^{10} b_k=a_{11}-a_1=20-1=19
\end{array}
$$

432 정답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{1}{4}$

(1) $\dfrac{k}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)}$

$=k\cdot\dfrac{1}{(k^2+k+1)-(k^2-k+1)}\cdot\left(\dfrac{1}{k^2-k+1}-\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)$

$=\dfrac{k}{2k}\cdot\left(\dfrac{1}{k^2-k+1}-\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k^2-k+1}-\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{k+1}{k^2(k+2)^2}=(k+1)\cdot\dfrac{1}{k^2(k+2)^2}$

$=(k+1)\cdot\dfrac{1}{(k+2)^2-k^2}\cdot\left\{\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+2)^2}\right\}$

$=(k+1)\cdot\dfrac{1}{4k+4}\cdot\left\{\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+2)^2}\right\}$

$=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+2)^2}\right\}$

$\therefore\ b=\dfrac{1}{4}$

연습문제 I .... pp.233~234

429 정답 47

$a_{n+1}-a_n=n$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$를 차례로 대입하여 나열한 후 변끼리 더하면

$$
\begin{array}{rl}
 & \cancel{a_2}-a_1=1 \\
 & \cancel{a_3}-\cancel{a_2}=2 \\
 & \cancel{a_4}-\cancel{a_3}=3 \\
 & \cancel{a_5}-\cancel{a_4}=4 \\
 & \qquad\vdots \\
+ & a_{10}-\cancel{a_9}=9 \\
\hline
 & a_{10}-a_1=1+2+3+\cdots+9=45
\end{array}
$$

$\therefore\ a_{10}=a_1+45=47$

430 정답 $\dfrac{10}{9}$

$\sum_{k=1}^{9}\left(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{a_1}-\cancel{\dfrac{1}{a_2}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{a_2}}-\cancel{\dfrac{1}{a_3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\dfrac{1}{a_9}}-\dfrac{1}{a_{10}}\right)$

$=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{10}}$

즉, $\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{10}}=1-\dfrac{1}{a_{10}}$

$\dfrac{1}{a_{10}}=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$ $\qquad\therefore\ a_{10}=\dfrac{10}{9}$

433 정답 (1) $\dfrac{80}{81}$ (2) -8

(1) $\sum_{k=1}^{80}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{1}-\cancel{\dfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{2}}-\cancel{\dfrac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{3}}-\cancel{\dfrac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\dfrac{1}{80}}-\dfrac{1}{81}\right)$

$=1-\dfrac{1}{81}=\dfrac{80}{81}$

(2) $\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$=(\sqrt{1}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{4}})+\cdots+(\cancel{\sqrt{80}}-\sqrt{81})$

$=\sqrt{1}-\sqrt{81}=1-9=-8$

434 정답 (1) $\dfrac{n}{2n+4}$ (2) $\dfrac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$

(1) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)$$
$$+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}=\frac{n}{2n+4}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)$$
$$+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$
$$=\frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$$

435 정답 $\dfrac{8}{17}$

$$\frac{1}{(2k)^2-1}=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

이므로 위의 식에 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 8$을 차례로 대입하여 나열한 후 변끼리 더하면

$$\frac{1}{2^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)$$
$$\frac{1}{4^2-1}=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)$$
$$\frac{1}{6^2-1}=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)$$
$$\vdots$$
$$+\ \frac{1}{16^2-1}=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{15}}-\frac{1}{17}\right)$$
$$\therefore\ \frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{16^2-1}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{17}\right)=\frac{8}{17}$$

436 정답 $\dfrac{35}{36}$

각 항을 부분분수로 분해하여 더하면

$$\frac{2}{1\cdot 3}=\frac{2}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{3}{3\cdot 6}=\frac{3}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{6}}$$
$$\frac{4}{6\cdot 10}=\frac{4}{4}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)=\cancel{\frac{1}{6}}-\cancel{\frac{1}{10}}$$
$$\vdots$$
$$+\ \frac{8}{28\cdot 36}=\frac{8}{8}\left(\frac{1}{28}-\frac{1}{36}\right)=\cancel{\frac{1}{28}}-\frac{1}{36}$$
$$\therefore\ \frac{2}{1\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 6}+\frac{4}{6\cdot 10}+\cdots+\frac{8}{28\cdot 36}=1-\frac{1}{36}$$
$$=\frac{35}{36}$$

437 정답 1023

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

일반항은 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

한편, $\dfrac{a_k-a_{k+1}}{a_ka_{k+1}}=\dfrac{1}{a_{k+1}}-\dfrac{1}{a_k}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)$$
$$=\left(\cancel{\frac{1}{a_2}}-\frac{1}{a_1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{a_3}}-\cancel{\frac{1}{a_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{a_4}}-\cancel{\frac{1}{a_3}}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{a_{11}}-\cancel{\frac{1}{a_{10}}}\right)$$
$$=\frac{1}{a_{11}}-\frac{1}{a_1}=2^{10}-1=1023$$

438 정답 6

구하는 합을 S라고 하자.

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 7이고 공차가 2인 등차수열이므로

일반항은 $a_n=2n+5$

한편, $\dfrac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\dfrac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}=\dfrac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{2}$

이므로 $a_{k+1}-a_k=2$ (공차)

$$\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}=\frac{1}{2}(\cancel{\sqrt{a_3}}-\sqrt{a_2})$$
$$\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}=\frac{1}{2}(\cancel{\sqrt{a_4}}-\cancel{\sqrt{a_3}})$$
$$\frac{1}{\sqrt{a_4}+\sqrt{a_5}}=\frac{1}{2}(\cancel{\sqrt{a_5}}-\cancel{\sqrt{a_4}})$$
$$\vdots$$
$$+\ \frac{1}{\sqrt{a_{109}}+\sqrt{a_{110}}}=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{110}}-\cancel{\sqrt{a_{109}}})$$
$$\therefore\ S=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{110}}-\sqrt{a_2})$$

이때, $a_2=9,\ a_{110}=225$이므로

$$S=\frac{1}{2}\times(\sqrt{225}-\sqrt{9})=\frac{1}{2}\times(15-3)=6$$

439 정답 $\frac{20}{11}$

더하는 수열의 제k항은

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{2}{k(k+1)}$$
$$=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\therefore 1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{10}}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

440 정답 $\frac{11}{67}$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=3$ …… ㉠

$n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$
$$=2n+1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 일반항은

$$a_n=2n+1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{99}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{199}}-\frac{1}{201}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{201}\right)=\frac{11}{67}$$

441 정답 9

$\frac{1}{f(k)}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$이므로

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(99)}$$
$$=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{f(k)}$$
$$=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}})$$
$$=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9$$

442 정답 $\frac{20}{11}$ 서술형

이차방정식 $x^2+2x-n(n+1)=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 하므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=-2,\ \alpha_n\beta_n=-n(n+1) \quad \cdots ①$$

이므로

$$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \quad \cdots ②$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$
$$=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{10}}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11} \quad \cdots ③$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$의 값 구하기	40 %
②	$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}$을 n에 관한 식으로 나타내기	20 %
③	$\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값 구하기	40 %

15. 수학적 귀납법

유형 .... pp.240~245

001 정답 (1) **91** (2) **1023**

(1) $n=1, 2, 3, \cdots$을 관계식 $a_{n+1}=a_n+2n$에 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+2=1+2$$
$$a_3=a_2+4=1+2+4$$
$$a_4=a_3+6=1+2+4+6$$
$$a_5=a_4+8=1+2+4+6+8$$
$$\vdots$$
$$a_{10}=a_9+18=1+2+4+6+8+\cdots+18$$
$$=1+\sum_{k=1}^{9}2k=1+2\times\frac{9\times10}{2}=91$$

(2) $n=1, 2, 3, \cdots$을 관계식 $a_{n+1}=2a_n+1$에 차례대로 대입하면

$$a_2=2a_1+1=2+1$$
$$a_3=2a_2+1=2(2+1)+1=2^2+2+1$$
$$a_4=2a_3+1=2(2^2+2+1)+1=2^3+2^2+2+1$$
$$\vdots$$
$$a_{10}=2a_9+1=2^9+2^8+\cdots+2+1=\frac{2^{10}-1}{2-1}=1023$$

002 정답 (1) **13** (2) **145**

(1) $a_1=60$, $a_{n+1}-a_n=-4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 60, 공차가 -4인 등차수열이다.

따라서 일반항은

$$a_n=60+(n-1)\times(-4)=-4n+64$$

이때, $a_k=-4k+64=12$에서 $-4k=-52$

$$\therefore\ k=13$$

(2) $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열을 이룬다.

$a_1=1$이고 $a_2-a_1=4-1=3$이므로 첫째항이 1, 공차가 3이다.

따라서 일반항은

$$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(3k-2)=3\times\frac{10\times11}{2}-2\times10=145$$

003 정답 (1) **2** (2) **27**

(1) $a_1=2$, $a_{n+1}=ra_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 r인 등비수열이다.

따라서 일반항은 $a_n=2r^{n-1}$

이때, $a_{10}=4^5$ 에서 $2r^9=4^5=2^{10}$, $r^9=2^9$

$$\therefore\ r=2$$

(2) $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다.

$a_1=3$, $\frac{a_2}{a_1}=\frac{9}{3}=3$이므로 첫째항이 3, 공비가 3이다.

따라서 일반항은 $a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

$$\therefore\ \frac{a_{16}}{a_{13}}=\frac{3^{16}}{3^{13}}=3^3=27$$

004 정답 **풀이 참조**

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ ...... ㉠

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$

이므로 등식 ㉠은 $n=1$일 때 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ ...... ㉡

이때, ㉡의 양변에 $(2k+1)$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$

정리하면

성립한다고 가정한 식 ㉡을 이용하여 ㉢의 식을 유도한다.

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$

...... ㉢

㉢은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 등식 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

(증명끝)

005 정답 **풀이 참조**

$(1+h)^n>1+nh$ ...... ㉠

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$, (우변)$=1+2h$

이때, $h^2>0$이므로

$1+2h+h^2>1+2h$

따라서 $n=2$일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$ ...... ㉡

유도해야 하는 식
$(1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$

㉡의 양변에 $(1+h)$를 곱하면

$(1+h)^k(1+h)>(1+kh)(1+h)$

$(1+h)^{k+1}>1+(k+1)h+kh^2$

이때, $kh^2>0$이므로

$1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$

$\therefore\ (1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$ ...... ㉢

㉢은 식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다. (증명끝)

확인문제 pp.240~245

443 정답 $\frac{1}{10}$

$n=1, 2, 3, \cdots$을 관계식 $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$에 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$
$$a_3=\frac{2}{3}a_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$
$$a_4=\frac{3}{4}a_3=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$
$$\vdots$$
$$\therefore a_{10}=\frac{1}{10}$$

444 정답 $\frac{1023}{512}$

$n=1, 2, 3, \cdots$을 관계식 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$에 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{2}a_1+1=\frac{1}{2}+1$$
$$a_3=\frac{1}{2}a_2+1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)+1=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}+1$$
$$a_4=\frac{1}{2}a_3+1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}+1\right)+1$$
$$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}+1$$
$$\vdots$$
$$\therefore a_{10}=\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2}+1$$
$$=\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^9}=\frac{1023}{512}$$

445 정답 제18항

$a_1=50$, $a_{n+1}-a_n=-3$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 50이고 공차가 -3인 등차수열이다.

$$\therefore a_n=50+(n-1)\times(-3)=-3n+53$$

$-3n+53<0$에서 $n>17.\times\times\times$

따라서 $a_{17}=2>0$, $a_{18}=-1<0$이므로 항의 값이 처음으로 음수가 되는 항은 제18항이다.

446 정답 55

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열을 이룬다.

$a_1=1$이고 $a_2-a_1=6-1=5$이므로 첫째항이 1, 공차가 5이다.

따라서 일반항은

$$a_n=1+(n-1)\times 5=5n-4$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(5k-4)$$
$$=5\times\frac{5\times 6}{2}-4\times 5=55$$

447 정답 6

$a_1=2^5$이고, $2a_{n+1}=3a_n$, 즉 $a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2^5, 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다.

따라서 일반항은

$$a_n=2^5\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

이때, $a_k=3^5$에서 $a_k=2^5\times\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=3^5$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\frac{3^5}{2^5}=\left(\frac{3}{2}\right)^5$

$$\therefore k=6$$

448 정답 2

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$에서 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다.

$a_1=1$, $\frac{a_2}{a_1}=\frac{-1}{1}=-1$이므로 첫째항이 1, 공비가 -1이다.

따라서 일반항은

$$a_n=1\times(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}$$

즉, n이 홀수이면 $a_n=1$, n이 짝수이면 $a_n=-1$이므로

$$a_9-a_8=1-(-1)=2$$

449 정답 풀이 참조

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ …… ㉠

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=2^1-1=1$

따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$ …… ㉡

㉡의 양변에 2^k을 더하면

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=2^k-1+2^k=2\times 2^k-1$

$=2^{k+1}-1$ …… ㉢

㉢은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 등식 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. (증명끝)

450 정답 풀이 참조

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ …… ㉠

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1\times 2\times 3}{6}=1$

따라서 $n=1$일 때, 등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ …… ㉡

ⓛ의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6)$$
$$\therefore\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢은 등식 ㉠에 $n=k+1$을 대입한 것과 같다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 등식 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

(증명끝)

451 정답 풀이 참조

$$2^n \geq n \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $n=1$일 때, $2^1>1$이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq 1)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$2^k \geq k \qquad \cdots\cdots ㉡$$

유도해야 하는 식
$2^{k+1}\geq k+1$

ⓛ의 양변에 2를 곱하면

$$2\cdot 2^k \geq 2k=k+k$$

이고 $k\geq 1$에서 $k+k\geq k+1$이므로

$$\therefore\ 2\cdot 2^k=2^{k+1}\geq k+1$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대해서 ㉠이 성립한다.

(증명끝)

452 정답 풀이 참조

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $n=2$일 때,

$$(\text{좌변})=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4},$$
$$(\text{우변})=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

이고, $\frac{5}{4}<\frac{3}{2}$이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq 2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

유도해야 하는 식

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

ⓛ의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

이때,

$$\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{-1}{k(k+1)^2}<0$$

이므로

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\cdots\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$<2-\frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다. (증명끝)

연습문제 I

pp.246~248

453 정답 (1) $a_1=5,\ a_{n+1}=a_n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=4a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1) 첫째항이 5, 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_1=5,\ a_{n+1}=a_n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2) 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열이므로

$$a_1=2,\ a_{n+1}=4a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

454 정답 $-\frac{1}{5}$

$a_2=\frac{a_1-1}{a_1+1}=\frac{5-1}{5+1}=\frac{2}{3}$이므로

$$a_3=\frac{a_2-1}{a_2+1}=\frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{2}{3}+1}=-\frac{1}{5}$$

455 정답 385

$$a_2=a_1+2^2=1+2^2$$
$$a_3=a_2+3^2=1+2^2+3^2$$
$$a_4=a_3+4^2=1+2^2+3^2+4^2$$
$$\vdots$$
$$\therefore\ a_{10}=1+2^2+3^2+\cdots+10^2=\sum_{k=1}^{10}k^2$$
$$=\frac{10\times 11\times 21}{6}=385$$

456 정답 (1) 67 (2) $\frac{3}{5}$

(1) $a_2=3a_1+1=3\times 2+1=7$

$$a_3=3a_2+1=3\times 7+1=22$$
$$\therefore\ a_4=3a_3+1=3\times 22+1=67$$

(2) $a_2=\frac{1}{a_1+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$$a_3=\frac{1}{a_2+1}=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}$$
$$\therefore\ a_4=\frac{1}{a_3+1}=\frac{1}{\frac{2}{3}+1}=\frac{3}{5}$$

457 정답 $\frac{1}{50}$

$a_{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)a_n=\frac{n}{n+1}a_n$

이 식에 $n=1, 2, 3, \cdots, 99$를 차례로 대입하고 변변 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{1}{2}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{2}{3}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{3}{4}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times\ a_{100}=\frac{99}{100}\cancel{a_{99}}$$

$$\therefore a_{100}=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{99}}{100}\times a_1$$
$$=\frac{1}{100}\times a_1=\frac{1}{50}$$

458 정답 ②

$a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+3^n$에 $n=1, 2, 3, \cdots, 9$를 차례로 대입하고 변변 더하면

$$\cancel{a_2}=a_1+3$$
$$\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+3^2$$
$$\cancel{a_4}=\cancel{a_3}+3^3$$
$$\vdots$$
$$+\ a_{10}=\cancel{a_9}+3^9$$

$$\therefore a_{10}=a_1+(3+3^2+3^3+\cdots+3^9)$$
$$=1+3+3^2+3^3+\cdots+3^9$$
$$=\frac{3^{10}-1}{3-1}=\frac{3^{10}-1}{2}$$

459 정답 23

$\begin{cases}a_1=-4\\ a_{n+1}-a_n=3\ (n=1, 2, 3, \cdots)\end{cases}$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -4이고 공차가 3인 등차수열이다.

따라서 일반항은 $a_n=3n-7$이므로

$a_k=3k-7=62$에서 $3k=69$

$\therefore k=23$

460 정답 39

$\begin{cases}a_1=2\\ a_{n+1}=4a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)\end{cases}$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 4인 등비수열이다.

따라서 일반항은 $a_n=2\cdot 4^{n-1}=2^{2n-1}$이므로

$a_{20}=2^{2\times 20-1}=2^{39}=2^k$

$\therefore k=39$

461 정답 ㄴ, ㄷ

자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이면 명제 $p(3n)$이 참이므로

ㄱ. $p(1)$이 참 $\Longrightarrow p(3)$이 참 $\Longrightarrow p(9)$가 참 $\Longrightarrow \cdots$

따라서 $p(7)$은 반드시 참이라고 할 수 없다. (거짓)

ㄴ. $p(2)$가 참 $\Longrightarrow p(6)$이 참 $\Longrightarrow p(18)$가 참 $\Longrightarrow \cdots$

따라서 $p(18)$도 참이다. (참)

ㄷ. $p(3)$이 참 $\Longrightarrow p(9)$가 참 $\Longrightarrow p(27)$이 참

$\Longrightarrow p(81)$이 참 $\Longrightarrow p(243)$이 참 $\Longrightarrow \cdots$

따라서 $p(243)$도 참이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

462 정답 (가) $k+1$ (나) $\frac{k(k+1)}{2}$

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 수학적 귀납법으로 보이자.

(i) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=1,\ (\text{우변})=\frac{1\times 2}{2}=1$$

따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $\boxed{k+1}$을(를) 더하면 ← (가)

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)$$
$$=\underbrace{\boxed{\frac{k(k+1)}{2}}}_{(나)}+(k+1)$$
$$=\left(\underbrace{\boxed{k+1}}_{(가)}\right)\left(\frac{k}{2}+1\right)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

$\therefore$ (가) : $k+1$, (나) : $\frac{k(k+1)}{2}$

463 정답 (가) $1+\frac{1}{k+2}$ (나) $\frac{k+3}{2}$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n+2}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 수학적 귀납법으로 보이자.

(i) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=(\text{우변})=\frac{3}{2}$$

따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{k+2}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $\boxed{1+\frac{1}{k+2}}$ ←(가) 을(를) 곱하면

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\left(\boxed{1+\frac{1}{k+2}}\right) \leftarrow (가)$$

$$=\frac{k+2}{2}\left(\boxed{1+\frac{1}{k+2}}\right)=\boxed{\frac{k+3}{2}} \leftarrow (나)$$

(가)

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

$\therefore$ (가) : $1+\frac{1}{k+2}$, (나) : $\frac{k+3}{2}$

464 정답 풀이 참조

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ⅰ) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=1\times2=2,\ (\text{우변})=\frac{1\times2\times3}{3}=2$$

따라서 $n=1$일 때 등식 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1\times2+2\times3+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $(k+1)(k+2)$를 더하면

$$1\times2+2\times3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

(증명끝)

연습문제Ⅱ p.249

465 정답 2

$n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하여 규칙을 찾아보면

$a_1=2$

$$a_2=\frac{1}{1-a_1}=\frac{1}{1-2}=-1$$

$$a_3=\frac{1}{1-a_2}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$$

$$a_4=\frac{1}{1-a_3}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2=a_1$$

$$a_5=\frac{1}{1-a_4}=-1=a_2$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은

$$2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \cdots$$

즉, $2,\ -1,\ \frac{1}{2}$의 세 수가 이 순서대로 반복되는 수열이다.

이때, $100=3\times33+1$이므로

$$a_{100}=a_1=2$$

466 정답 55

주어진 점화식 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$은 앞의 두 항을 더한 값을 다음 항으로 하는 규칙을 나타낸다.

$a_1=1,\ a_2=1$이므로 앞의 두 항을 더한 값을 차례로 나열하면

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \cdots$$

에서 $a_{10}=55$

467 정답 ④

주어진 점화식에 $n=1, 2, 3, \cdots, 9$를 차례로 대입하고 변변 더하면

$$\cancel{a_2}-a_1=1^2+1+1$$
$$\cancel{a_3}-\cancel{a_2}=2^2+2+1$$
$$\cancel{a_4}-\cancel{a_3}=3^2+3+1$$
$$\vdots$$
$$+\ \underline{a_{10}-\cancel{a_9}=9^2+9+1}$$
$$a_{10}-a_1=(1^2+2^2+\cdots+9^2)+(1+2+\cdots+9)+(1+1+\cdots+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}1$$
$$=\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{9\times10}{2}+1\times9$$
$$=285+45+9=339$$

$$\therefore a_{10}=339+a_1=340$$

15강

468 정답 풀이 참조

$2n^2>(n+1)^2$ ...... ㉠

(i) $n=3$일 때,

(좌변)$=18$, (우변)$=16$

따라서 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\ge3)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$2k^2>(k+1)^2$ ...... ㉡

㉡의 양변에 $4k+2$를 더하면

$$2k^2+4k+2>(k+1)^2+4k+2$$

$$2(k+1)^2>k^2+6k+3=(k+2)^2+2k-1$$

$$>(k+2)^2$$

($\because$ $k\ge3$이므로 $2k-1>0$이다.)

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 3 이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. (증명끝)

469 정답 7 서술형

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열을 이룬다.

$a_1=3$이고 $a_2-a_1=7-3=4$이므로 첫째항이 3, 공차가 4이다.

$\therefore$ $a_n=3+(n-1)\times4=4n-1$ ... ①

이때, $\sum_{k=1}^{n}a_k>100$에서

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\times\frac{n(n+1)}{2}-n$$ ... ②

$$=2n^2+n>100$$

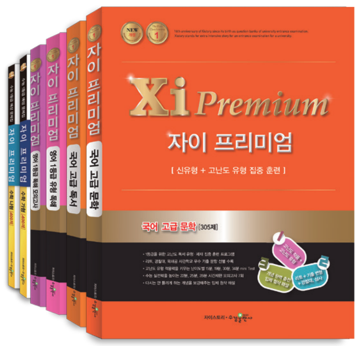
$\therefore$ $n(2n+1)>100$

$6\times(12+1)=78$, $7\times(14+1)=105$이므로 자연수 n의 최솟값은 7이다. ... ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	수열 $\{a_n\}$의 일반항 구하기	30%
②	$\sum_{k=1}^{n}a_k$를 n에 관한 식으로 나타내기	30%
③	$\sum_{k=1}^{n}a_k>100$을 만족하는 자연수 n의 최솟값 구하기	40%

신유형 + 고난도 유형 집중 대비!!



수능 대비 1등급 전략서

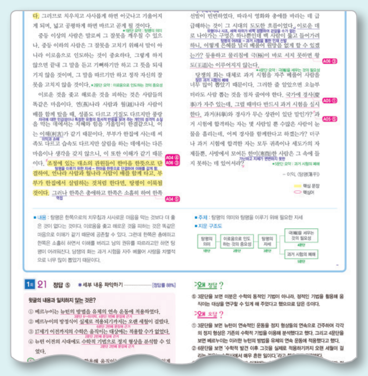
자이 프리미엄

• 경찰대, 사관학교, 리트 우수기출 문제 수록

• 수능 1등급을 위한 고품격 문제들만을 엄선 수록

❶ 고난도 유형 + 작품 / 제재 완벽 정리

❷ 다시는 안 틀리게 하는 입체 첨삭 해설



★ 국어 고급 독서 [303제]
- 단원별 고난도 유형과 제재의 특징 분석 및 풀이 비법 수록
- 경찰대+삼사+LEET 우수 기출 문제 선별
- 난이도별 15분, 20분, 30분 mini test
- 수능 실전 27분, 29분 시간제한 모의고사

★ 영어 1등급 유형 독해 [364제]
- 절대평가 1등급 대비 필수 8개 유형 정리
- 최신 경찰대+삼사 기출문제 수록
- 1등급 난이도에 맞는 신규 예상 문제 수록
- 절대평가 1등급 독해 유형 모의고사 4회 (16문항)

★ 수학 고급 가형 [400제]
- 대단원별 고난도 경향 분석 및 대책
- 프리미엄 개념 CHECK
- 경찰대+삼사 우수 문항+예상 문제
- 등급마스터 – 등급을 가르는 최고난도 21번, 29번, 30번 문항 대비
- 수능 1등급 실전 고난도 가형 모의고사

★ 국어 고급 문학 [305제]
- 단원별 고난도 유형과 작품의 특징 분석 및 풀이 비법 수록
- 경찰대+삼사+LEET 우수 기출 문제 선별
- 난이도별 15분, 24분, 30분 mini test
- 수능 실전 22분, 25분, 28분 시간제한 모의고사

★ 영어 1등급 독해 모의고사 [10회]
- 절대평가 수능 출제 기준에 맞춘 모의고사
- 최신 경찰대+삼사 기출문제 수록
- 다시는 틀리지 않게 부족한 개념을 완벽 보충하는 입체 첨삭 해설

★ 수학 고급 나형 [400제]
- 대단원별 고난도 경향 분석 및 대책
- 프리미엄 개념 CHECK
- 경찰대+삼사 우수 문항+예상 문제
- 등급을 가르는 최고난도 21번, 29번, 30번 문항 대비
- 수능 1등급 실전 고난도 나형 모의고사