수학 기본 실력 100% 충전

수력충전

개념 충전 » 수능 기초 연산서

고등 수학 I

[정답 및 해설]

자이스토리 · 수경출판사

Ⅰ 지수함수와 로그함수

Ⅰ-1 지수

pp. 10~24

01 답 1) 2^3 2) $\frac{2^4}{3^4}$ 3) $-\frac{1}{6^3}$ 4) $2^3\times3^2$

5) a^5 6) $\frac{x^4}{y^2}$

02 답 1) $-\frac{4}{3}xy^{10}$ 2) $\frac{x^3}{y^3}$

1) $(-2x^2y^4)^3\div6x^5y^2$

$=(-8x^6y^{12})\div6x^5y^2$

$=\frac{-8x^6y^{12}}{6x^5y^2}$

$=-\frac{4}{3}xy^{10}$

2) $(x^2y^3)^4\div(x^4y^3)^2\times\left(\frac{x}{y^3}\right)^3$

$=x^8y^{12}\div x^8y^6\times\frac{x^3}{y^9}$

$=\frac{x^{11}y^{12}}{x^8y^{15}}$

$=\frac{x^3}{y^3}$

03 답 1) a^{m+n} 2) a^{mn} 3) a^nb^n

4) $\frac{a^n}{b^n}$ 5) a^{m-n}, 1, $\frac{1}{a^{n-m}}$

04 답 1) $x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

2) $x=\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm2\sqrt{2}i$

3) $x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

1) -1의 세제곱근을 x라고 하면

$x^3=\boxed{-1}$에서 $x^3+\boxed{1}=0$

$(x+\boxed{1})(x^2-\boxed{x}+1)=0$

$\therefore x=\boxed{-1}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{\boxed{3}}i}{2}$

2) 64의 네제곱근을 x라고 하면

$x^4=64$에서 $x^4-64=0$

$(x^2-8)(x^2+8)=0$

$(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}i)(x-2\sqrt{2}i)=0$

$\therefore x=\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm2\sqrt{2}i$

3) $(-2)^4=16$이고 16의 네제곱근을 x라고 하면

$x^4=16$에서 $x^4-16=0$

$(x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)=0$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

05 답 1) 3, -3 2) 4, -4 3) -3

1) 81의 네제곱근을 x라고 하면

$x^4=\boxed{81}$에서

$x^4-\boxed{81}=0$

$(x+\boxed{3})(x-\boxed{3})(x+3i)(x-3i)=0$

$\therefore x=\pm\boxed{3}$ 또는 $x=\pm3i$

따라서 81의 네제곱근 중 실수인 것은 3과 $\boxed{-3}$이다.

2) 256의 네제곱근을 x라고 하면

$x^4=256$에서

$x^4-256=0$

$(x+4)(x-4)(x+4i)(x-4i)=0$

$\therefore x=\pm4$ 또는 $x=\pm4i$

따라서 256의 네제곱근 중 실수인 것은 4와 -4이다.

3) -27의 세제곱근을 x라고 하면

$x^3=-27$에서

$x^3+27=0$

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.

06 답 1) × 2) × 3) × 4) ○ 5) ×

6) × 7) ○ 8) ×

1) ×, 양수 a의 n제곱근은 n개이다.

2) ×, 8의 세제곱근은 3개이다.

3) ×, 27의 세제곱근 중 실수인 것은 한 개이다.

4) ○, 81의 네제곱근은 $x=\pm\sqrt[4]{81}=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

5) ×, 16의 네제곱근은 4개이고 이 중 실수인 것이 $\sqrt[4]{16}$과 $-\sqrt[4]{16}$이다.

6) ×, $x^4=-16$을 만족하는 실수 x는 없다.

7) ○, $\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

8) ×, $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$

07 답 1) 2 2) -2 3) 3 4) 0.3

5) -3 6) -4

1) $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

2) $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

3) $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

4) $\sqrt[3]{0.027}=\sqrt[3]{0.3^3}=0.3$

5) $-\sqrt[4]{81}=-\sqrt[4]{3^4}=-3$

6) $-\sqrt[4]{256}=-\sqrt[4]{4^4}=-4$

08 답 1) a의 n제곱근

2) $\sqrt[n]{a}$, 0, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$, 0, 없다

09 답 1) $\mathbf{5}$ 2) $\mathbf{3}$ 3) $\mathbf{2}$ 4) $\mathbf{3}$ 5) $\mathbf{2}$ 6) $\mathbf{9}$ 7) $\mathbf{2}$

1) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5\times25}=\sqrt[3]{5^3}=5$

2) $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3\times27}=\sqrt[4]{3^4}=3$

3) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{24}{3}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

4) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\dfrac{243}{3}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

5) $(\sqrt[6]{4})^3=\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{2^6}=2$

6) $(\sqrt[3]{3})^6=\{(\sqrt[3]{3})^3\}^2=3^2=9$

7) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

10 답 1) $\mathbf{3\sqrt{3}}$ 2) $\mathbf{1}$ 3) $\mathbf{6}$ 4) $\mathbf{1}$ 5) $\mathbf{\sqrt[3]{2}}$

1) $\sqrt[3]{27\sqrt{27}}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{\sqrt{27}}=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3}}=3\sqrt{3}$

2) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{3}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{5}}}=\dfrac{\sqrt[12]{5}}{\sqrt[6]{3}}\times\dfrac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[12]{5}}=1$

3) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}+\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4\times16}+\sqrt[3]{\dfrac{16}{2}}$

$=\sqrt[3]{4^3}+\sqrt[3]{2^3}$

$=4+2=6$

4) $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}-\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[3]{9\times3}-\sqrt[5]{\dfrac{64}{2}}$

$=\sqrt[3]{3^3}-\sqrt[5]{2^5}=3-2=1$

5) $\dfrac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^3\times2}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9\times3}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3^3}}$

$=\dfrac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}}{3}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{3}=\sqrt[3]{2}$

11 답 1) $\mathbf{13}$ 2) $\mathbf{23}$ 3) $\mathbf{11}$

1) $2\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{54}=2\sqrt[3]{2^3\times2}+3\sqrt[3]{3^3\times2}$

$=2\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{2}$

$=4\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{2}=13\sqrt[3]{2}$

$13\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}k \qquad \therefore k=13$

2) $\sqrt[4]{a}\times\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[12]{a^3}\times\sqrt[12]{a^8}=\sqrt[12]{a^{11}}$

$\sqrt[12]{a^{11}}=\sqrt[m]{a^n} \qquad \therefore m+n=12+11=23$

3) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=\sqrt[4]{a\sqrt[3]{\sqrt{a^2\times a}}}=\sqrt[4]{a\sqrt[6]{a^3}}$

$=\sqrt[4]{a\sqrt{a}}=\sqrt[4]{\sqrt{a^2\times a}}$

$=\sqrt[8]{a^3}$

$\sqrt[8]{a^3}=\sqrt[m]{a^n} \qquad \therefore m+n=8+3=11$

12 답 1) $\mathbf{36}$ 2) $\mathbf{2}$

1) $\sqrt[3]{a}=81$에서 $a=81^3=(3^4)^3=3^{12}$

$\sqrt[4]{b}=8$에서 $b=8^4=(2^3)^4=2^{12}$

$ab=3^{12}\times2^{12}=(3\times2)^{12}=6^{12}$

$\therefore \sqrt[6]{ab}=\sqrt[6]{6^{12}}=6^2=36$

2) $6^a=2$, $(\sqrt{6})^b=3$의 양변을 변끼리 곱하면

$6^a\times(\sqrt{6})^b=6$

$\sqrt{6^{2a}}\times\sqrt{6^b}=\sqrt{6^2}$

$\sqrt{6^{2a}\times6^b}=\sqrt{6^2}$

$\sqrt{6^{2a+b}}=\sqrt{6^2}$

$\therefore 2a+b=2$

13 답 1) $\sqrt[n]{ab}$ 2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ 3) $\sqrt[n]{a^m}$ 4) $\sqrt[mn]{a}$ 5) $\sqrt[n]{a^m}$

14 답 1) $\mathbf{1}$ 2) $\dfrac{1}{9}$ 3) $\dfrac{1}{9}$ 4) $\dfrac{125}{8}$

1) $(-5)^0=1$

2) $3^{-2}=(3^{-1})^2=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$

3) $(-3)^{-2}=\{(-3)^{-1}\}^2=\dfrac{1}{(-3)^2}=\dfrac{1}{9}$

4) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}=\left\{\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}\right\}^3=\left(\dfrac{5}{2}\right)^3=\dfrac{125}{8}$

15 답 1) $\dfrac{1}{a^2}$ 2) $\dfrac{1}{a^8}$ 3) a^{12} 4) a^3

1) $a^3\times a^4\div a^9=a^3\times a^4\times a^{-9}$

$=a^{3+4-9}=a^{-2}$

$=\dfrac{1}{a^2}$

2) $a^{-2}\times(a^{-3})^2=a^{-2}\times a^{-6}$

$=a^{(-2)+(-6)}=a^{-8}$

$=\dfrac{1}{a^8}$

3) $(a^{-4})^2\times(a^{-5})^{-3}\div a^{-5}=a^{-8}\times a^{15}\times a^5$

$=a^{(-8)+15+5}$

$=a^{12}$

4) $\dfrac{(a^{-5})^2\times(a^2)^5}{a^2\times a^{-5}}=\dfrac{a^{-10}\times a^{10}}{a^{2+(-5)}}=\dfrac{a^{(-10)+10}}{a^{-3}}$

$=a^{0-(-3)}=a^3$

16 답 1) $5^{\frac{1}{2}}$ 2) $7^{\frac{1}{3}}$ 3) $3^{\frac{5}{4}}$ 4) $5^{-\frac{4}{3}}$

1) $\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$

2) $\sqrt[3]{7}=7^{\frac{1}{3}}$

3) $\sqrt[4]{3^5}=3^{\frac{5}{4}}$

4) $\sqrt[3]{5^{-4}}=5^{-\frac{4}{3}}$

17 답 1) $\sqrt[3]{121}$ 2) $\dfrac{\sqrt{5}}{25}$ 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 4) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

1) $11^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{11^2}=\sqrt[3]{121}$

2) $5^{-\frac{3}{2}}=5^{\frac{-3}{2}}=\sqrt{5^{-3}}=\sqrt{\dfrac{1}{5^3}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{125}}=\dfrac{1}{5\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{25}$

3) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{10}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}^{\frac{3}{10}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{5\times\frac{3}{10}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$

$=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{6}}=\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^3\right\}^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{3\times\frac{1}{6}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

18 답 1) $\mathbf{125}$ 2) $\mathbf{8}$ 3) $\mathbf{5^{\frac{7}{4}}}$ 4) $\mathbf{\frac{25}{9}}$

5) $\mathbf{\frac{4}{3}}$ 6) $\mathbf{\sqrt{2}}$ 7) $\mathbf{5^{\frac{5}{2}}}$ 8) $\mathbf{7^{\frac{7}{4}}}$

1) $\{(-5)^2\}^{\frac{3}{2}}=25^{\frac{3}{2}}=(5^2)^{\frac{3}{2}}=5^{2\times\frac{3}{2}}=5^3=125$

2) $25^{-\frac{3}{2}}\times100^{\frac{3}{2}}=(5^2)^{-\frac{3}{2}}\times(2^2\times5^2)^{\frac{3}{2}}$

$=2^3\times5^{-3+3}=8$

3) $5^{\frac{3}{4}}\times625^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{4}}\times(5^4)^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{4}+1}=5^{\frac{7}{4}}$

4) $\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{5}{2}}\right\}^{\frac{4}{5}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{5}{2}\times\frac{4}{5}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

$=\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

5) $\left\{\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{3^3}{4^3}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{3}$

6) $16^{\frac{1}{4}}\div16^{\frac{1}{8}}=16^{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}=16^{\frac{1}{8}}=(2^4)^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

7) $(5^{\frac{3}{2}})^2\div\sqrt{5}=5^{\frac{3}{2}\times2}\div5^{\frac{1}{2}}$

$=5^{3-\frac{1}{2}}$

$=5^{\frac{5}{2}}$

8) $7^{\frac{5}{4}}\times7^{-\frac{3}{2}}\div7^{-2}=7^{\frac{5}{4}+\left(-\frac{3}{2}\right)-(-2)}=7^{\frac{7}{4}}$

19 답 1) $\boldsymbol{a^{-\frac{13}{3}}}$ 2) $\boldsymbol{a^{\frac{13}{30}}}$ 3) $\mathbf{1}$ 4) $\boldsymbol{a^{\frac{13}{12}}}$ 5) $\boldsymbol{a^{\frac{7}{30}}}$

6) $\boldsymbol{a^{\frac{7}{8}}}$ 7) $\boldsymbol{a^{\frac{11}{8}}}$ 8) $\boldsymbol{3a^{\frac{7}{8}}}$ 9) $\boldsymbol{b}$ 10) $\boldsymbol{a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{5}{3}}}$

1) $(a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{3}{2}})^{-2}=(a^{\frac{2}{3}})^{-2}\times(a^{\frac{3}{2}})^{-2}$

$=a^{-\frac{4}{3}}\times a^{-3}$

$=a^{\left(-\frac{4}{3}\right)+(-3)}=a^{-\frac{13}{3}}$

2) $(\sqrt{a^3}\div\sqrt[5]{a})^{\frac{1}{3}}=(a^{\frac{3}{2}}\div a^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}}$

$=(a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}}$

$=(a^{\frac{13}{10}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{13}{30}}$

3) $a^{-\frac{1}{2}}\div a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{3}{4}}=a^{\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=a^0=1$

4) $\sqrt[4]{a^5}\times\sqrt{a^3}\div\sqrt[3]{a^5}=a^{\frac{5}{4}}\times a^{\frac{3}{2}}\div a^{\frac{5}{3}}$

$=a^{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}-\frac{5}{3}}=a^{\frac{13}{12}}$

5) $\sqrt[3]{\sqrt{a}\times\sqrt[5]{a}}=(a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}}$

$=(a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}}$

$=(a^{\frac{7}{10}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{7}{30}}$

6) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=\left\{a(a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}=(a\times a^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

$=(a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{8}}$

7) $\sqrt{a\sqrt{a^2\sqrt{a^3}}}=\left\{a(a^2\times a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{a(a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$=(a\times a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}$

$=(a^{\frac{11}{4}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{11}{8}}$

8) $\sqrt{9a\sqrt{a\sqrt{a}}}=\left\{9a(a\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}=(9a\times a^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

$=(9a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}}a^{\frac{7}{8}}=3a^{\frac{7}{8}}$

9) $\sqrt[3]{ab^2}\times\sqrt[6]{ab^5}\div\sqrt{ab}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\div a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}}=b$

10) $\sqrt[3]{a^2b^5}\div\sqrt[4]{a^5b^2}\times\sqrt{a^3b}$

$=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{3}}\div a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{2}{4}}\times a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{2}{3}-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{5}{3}}$

20 답 1) $\mathbf{3^{2\sqrt{5}}}$ 2) $\mathbf{8}$ 3) $\mathbf{12^{\sqrt{5}}}$ 4) $\mathbf{4}$ 5) $\mathbf{324}$

1) $3^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\times3^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}=3^{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}}=3^{2\sqrt{5}}$

2) $(4^{\sqrt{3}})^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4^{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=4^{\frac{3}{2}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^3=8$

3) $3^{\sqrt{5}}\times4^{\sqrt{5}}=(3\times4)^{\sqrt{5}}=12^{\sqrt{5}}$

4) $2^{\sqrt{2}+1}\div2^{\sqrt{2}-1}=2^{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}=2^2=4$

5) $(3^{\sqrt{8}}\times2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=(3^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}}\times(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=3^4\times2^2=324$

21 답 1) $\boldsymbol{a^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$ 2) $\boldsymbol{a^{2\sqrt{2}}}$ 3) $\boldsymbol{a^{\sqrt{3}}}$

1) $a^{\sqrt{2}}\div a^{2\sqrt{2}}\times a^{\sqrt{3}}=a^{\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}=a^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

2) $a^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}\times a^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}\div a^{-3\sqrt{2}}=a^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-(-3\sqrt{2})}=a^{2\sqrt{2}}$

3) $(a^{\frac{\sqrt{3}}{2}})^4\div a^{\sqrt{3}}=a^{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}=a^{\sqrt{3}}$

22 답 1) ① $\mathbf{1}$ ② $\boldsymbol{\frac{1}{a^n}}$ ③ $\boldsymbol{\sqrt[m]{a^n}}$ ④ $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$

2) ① $\boldsymbol{a^{x+y}}$ ② $\boldsymbol{a^{x-y}}$ ③ $\boldsymbol{a^{xy}}$ ④ $\boldsymbol{a^xb^x}$ ⑤ $\boldsymbol{\frac{a^x}{b^x}}$

23 답 1) $\mathbf{\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[6]{10}}$ 2) $\mathbf{\sqrt{2\sqrt{2}}<\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}$

3) $\mathbf{2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}>\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2}}$

1) $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^{\boxed{3}}}=\sqrt[6]{\boxed{8}}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^{\boxed{2}}}=\sqrt[6]{\boxed{9}}$ 이므로

$\sqrt[6]{\boxed{8}}<\sqrt[6]{\boxed{9}}<\sqrt[6]{10}$

$\therefore\ \boxed{\sqrt{2}}<\boxed{\sqrt[3]{3}}<\sqrt[6]{10}$

2) $\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{2^2\times2}}=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[12]{(2^3)^3}=\sqrt[12]{2^9}=\sqrt[12]{512}$,

$\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^2\times3}}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[12]{(3^3)^2}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{729}$

이므로 $\sqrt[12]{512}<\sqrt[12]{729}$

$\therefore\ \sqrt{2\sqrt{2}}<\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

3) $(2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})-(\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2})$

$=\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$

$=\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[6]{2^3}$

$=\sqrt[6]{9}-\sqrt[6]{8}>0$

$\therefore\ 2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}>\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2}$

24 답 1) $\sqrt[12]{7}<\sqrt[6]{5}<\sqrt[3]{3}$ 2) $\sqrt[3]{2}<\sqrt[4]{4}<\sqrt{3}$

1) $\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[12]{7}=7^{\frac{1}{12}}$에서

지수 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$의 분모의 최소공배수는 $\boxed{12}$이므로

$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{\boxed{4}}{12}}=(3^{\boxed{4}})^{\frac{1}{12}}=\boxed{81}^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{\boxed{2}}{12}}=(5^{\boxed{2}})^{\frac{1}{12}}=\boxed{25}^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[12]{7}=7^{\frac{1}{12}}$

$\therefore \boxed{\sqrt[12]{7}}<\boxed{\sqrt[6]{5}}<\boxed{\sqrt[3]{3}}$

2) $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{4}=4^{\frac{1}{4}}$에서

지수 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$의 분모의 최소공배수는 12이므로

$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{6}{12}}=(3^6)^{\frac{1}{12}}=729^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{12}}=(2^4)^{\frac{1}{12}}=16^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[4]{4}=4^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{3}{12}}=(4^3)^{\frac{1}{12}}=64^{\frac{1}{12}}$

$\therefore \sqrt[3]{2}<\sqrt[4]{4}<\sqrt{3}$

25 답 분수 지수, 최소공배수

26 답 1) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ 2) $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}$

1) $a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{\boxed{6}}}=2^{\frac{1}{\boxed{6}}}\times 3^{\frac{1}{\boxed{6}}}$

$=(\boxed{2}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\times(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{\boxed{2}}}$

$=a^{\frac{1}{\boxed{3}}}b^{\frac{1}{\boxed{2}}}$

2) $a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{4}}$이므로

$\sqrt[8]{6}=6^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{1}{8}}\times 3^{\frac{1}{8}}$

$=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}\times(3^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}$

27 답 1) 64 2) 3 3) 10 4) 81

1) $9^x=2$이므로 $3^{2x}=2$

$\therefore \left(\frac{1}{27}\right)^{-4x}=(3^{-3})^{-4x}=3^{12x}$

$=(3^{2x})^6=2^6=64$

2) $3^x=4=2^2$

$\therefore 2^{\frac{2}{x}}=3$

3) $10^x=50$에서 $10=50^{\frac{1}{x}}$

$\sqrt[x]{2500}=(50^2)^{\frac{1}{x}}=(50^{\frac{1}{x}})^2=10^2=100$

$\therefore \frac{\sqrt[x]{2500}}{10}=\frac{100}{10}=10$

4) $x^{0.3}=27$에서 $x^{\frac{3}{10}}=27$이므로

$x^{\frac{1}{10}}=27^{\frac{1}{\boxed{3}}}=\boxed{3}$

$\therefore x^{0.4}=x^{\frac{4}{10}}=(x^{\frac{1}{10}})^4=(\boxed{3})^4=\boxed{81}$

28 답 1) 8 2) $\frac{2}{3}$

1) $7^{\frac{y}{2}}=16=2^4$에 $2^x=7$을 대입하면

$7^{\frac{y}{2}}=(2^x)^{\frac{y}{2}}=2^{\frac{xy}{2}}=2^4$이므로

$\frac{xy}{2}=4$

$\therefore xy=8$

2) $a=8^{16}=(2^3)^{16}=2^{48}$이므로

$16^8=(2^4)^8=2^{32}=(2^{48})^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}=a^x$

$\therefore x=\frac{2}{3}$

29 답 1) $a-b$ 2) 4 3) $a+b$

1) $a^{\frac{1}{4}}=A$, $b^{\frac{1}{4}}=B$로 놓으면

$a^{\frac{1}{2}}=A^{\boxed{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}=B^{\boxed{2}}$

$\therefore (a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$

$=(A-B)(A+B)(A^{\boxed{2}}+B^{\boxed{2}})$

$=(\boxed{A^2}-\boxed{B^2})(A^{\boxed{2}}+B^{\boxed{2}})$

$=A^{\boxed{4}}-B^{\boxed{4}}$

$=(a^{\frac{1}{4}})^{\boxed{4}}-(b^{\frac{1}{4}})^{\boxed{4}}$

$=\boxed{a-b}$

2) 곱셈 공식 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$(복호동순)을 이용하면

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2$

$=(a+2+a^{-1})-(a-2+a^{-1})=4$

3) 곱셈 공식 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$을 이용하면

$(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$

$=(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3=a+b$

30 답 1) 7 2) $\pm 3\sqrt{5}$ 3) 18

1) $a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}})^2+(a^{-\frac{1}{2}})^2$

$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2$

$=3^2-2=7$

2) $(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4$

$=7^2-4=45$

$\therefore a-a^{-1}=\pm 3\sqrt{5}$

3) $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3+(a^{-\frac{1}{2}})^3$

$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$

$=3^3-3\times 1\times 3$

$=18$

31 답 1) 18 2) ± 5 3) 140

1) $a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}})^2+(a^{-\frac{1}{2}})^2$

$=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2+2$

$=4^2+2$

$=18$

2) $(x-x^{-1})^2=x^2+x^{-2}-2$

$=27-2$

$=25$

$\therefore\ x-x^{-1}=\pm5$

3) $a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3-(a^{-\frac{1}{2}})^3$

$=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^3+3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})$

$=5^3+3\times1\times5$

$=140$

32

답 **1)** $\mathbf{3}$ **2)** $\mathbf{\frac{3}{2}}$ **3)** $\mathbf{\frac{13}{4}}$ **4)** $\mathbf{\frac{21}{4}}$

1) 분모, 분자에 $\boxed{a^x}$을 각각 곱하면

$$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^{\boxed{2x}}+1}{a^{\boxed{2x}}-1}=\frac{\boxed{2}+1}{\boxed{2}-1}=\boxed{3}$$

2) 분모, 분자에 a^{3x}을 각각 곱하면

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^{6x}+1}{a^{4x}+a^{2x}}=\frac{(a^{2x})^3+1}{(a^{2x})^2+a^{2x}}=\frac{8+1}{4+2}$$

$$=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

3) 분모, 분자에 a^{7x}을 각각 곱하면

$$\frac{a^{5x}+a^{-7x}}{a^x+a^{-3x}}=\frac{a^{12x}+1}{a^{8x}+a^{4x}}=\frac{(a^{2x})^6+1}{(a^{2x})^4+(a^{2x})^2}$$

$$=\frac{64+1}{16+4}=\frac{65}{20}=\frac{13}{4}$$

4) 분모, 분자에 a^{6x}을 각각 곱하면

$$\frac{a^{6x}-a^{-6x}}{a^{2x}-a^{-2x}}=\frac{a^{12x}-1}{a^{8x}-a^{4x}}=\frac{(a^{2x})^6-1}{(a^{2x})^4-(a^{2x})^2}$$

$$=\frac{64-1}{16-4}=\frac{63}{12}=\frac{21}{4}$$

33

답 **1)** $\mathbf{\frac{1}{3}}$ **2)** $\mathbf{\frac{1}{3}}$ **3)** $\mathbf{\frac{15}{4}}$ **4)** $\mathbf{25}$

1) 분모, 분자에 $\boxed{2^a}$을 각각 곱하면

$$\frac{2^{\boxed{2a}}+1}{2^{\boxed{2a}}-1}=\frac{\boxed{4}^a+1}{\boxed{4}^a-1}=-2$$

이것을 정리하면 $4^a=\boxed{\frac{1}{3}}$

2) 분모, 분자에 2^a을 각각 곱하면

$$\frac{2^{2a}-1}{2^{2a}+1}=\frac{4^a-1}{4^a+1}=\frac{1}{2}$$

이것을 정리하면 $4^a=3$

$\therefore\ 4^{-a}=\frac{1}{3}$

3) 분모, 분자에 3^a을 각각 곱하면

$$\frac{3^{2a}-1}{3^{2a}+1}=\frac{9^a-1}{9^a+1}=\frac{3}{5}$$

이것을 정리하면 $9^a=4$

$\therefore\ 9^a-9^{-a}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

4) 분모, 분자에 3^a을 각각 곱하면

$$\frac{3^{2a}+1}{3^{2a}-1}=\frac{9^a+1}{9^a-1}=\frac{3}{2}$$

이것을 정리하면 $9^a=5$

$\therefore\ 81^a=9^{2a}=(9^a)^2=5^2=25$

34

답 **1)** $\mathbf{1}$ **2)** $\mathbf{2}$ **3)** $\mathbf{2}$ **4)** $\mathbf{-2}$

1) $5^x=4^y=20$이므로 $5=20^{\boxed{\frac{1}{x}}}$, $4=20^{\boxed{\frac{1}{y}}}$

$20^{\frac{1}{x}}\times20^{\frac{1}{y}}=20^{\boxed{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}=\boxed{5}\times\boxed{4}=\boxed{20}$

$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\boxed{1}$

2) $3^a=12^b=6$이므로 $3=6^{\frac{1}{a}}$, $12=6^{\frac{1}{b}}$

$6^{\frac{1}{a}}\times6^{\frac{1}{b}}=6^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=3\times12=36=6^2$

$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$

3) $2^x=9^y=12$이므로 $2=12^{\frac{1}{x}}$, $9=12^{\frac{1}{y}}$

$12^{\frac{4}{x}+\frac{1}{y}}=(12^{\frac{1}{x}})^4\times12^{\frac{1}{y}}=2^4\times9=144=12^2$

$\therefore\ \frac{4}{x}+\frac{1}{y}=2$

4) $67^x=27$에서 $67=27^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ ······ ㉠

$603^y=81$에서 $603=81^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ ······ ㉡

㉠÷㉡에서 $\frac{1}{9}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$이므로 $3^{-2}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

$\therefore\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-2$

35

답 $\mathbf{0}$

$2^x=3^y=6^z=k\ (k>0)$로 놓으면

$xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ ······ ㉠

$3^y=k$에서 $3=k^{\boxed{\frac{1}{y}}}$ ······ ㉡

$6^z=k$에서 $6=k^{\frac{1}{z}}$ ······ ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$2\times3\div\boxed{6}=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}$

$\therefore\ k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=\boxed{1}$

그런데 $k\neq1$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\boxed{0}$

36

답 **1)** ① $\boldsymbol{a^2-b^2}$ ② $\boldsymbol{a^2\pm2ab+b^2}$ ③ $\boldsymbol{a^3\pm b^3}$

2) ① $\boldsymbol{2ab}$ ② $\boldsymbol{a-b}$ ③ $\boldsymbol{4ab}$ ④ $\boldsymbol{3ab(a+b)}$

⑤ $\boldsymbol{a-b,\ a-b}$

Ⅰ－2 로그

pp. 25~43

37 답 1) $\log_2 32=5$ 2) $\log_{10} 0.001=-3$ 3) $\log_5 \sqrt{5}=\frac{1}{2}$ 4) $\log_{\frac{1}{5}} 125=-3$

1) $\log_2 \boxed{32}=\boxed{5}$

2) $\log_{10} 0.001=-3$

3) $\log_5 \sqrt{5}=\frac{1}{2}$

4) $\log_{\frac{1}{5}} 125=-3$

38 답 1) $3^4=81$ 2) $10^{-4}=0.0001$ 3) $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$

1) $3^{\boxed{4}}=\boxed{81}$

2) $10^{-4}=0.0001$

3) $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$

39 답 1) 4 2) -4 3) -1 4) $\frac{2}{9}$ 5) $\frac{5}{6}$ 6) $\frac{3}{4}$

1) $\log_2 16=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$2^x=\boxed{16}$이므로 $2^x=2^{\boxed{4}}$ $\therefore x=\boxed{4}$

$\therefore \log_2 16=\boxed{4}$

2) $\log_{0.5} 16=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$0.5^x=16$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=16$

$2^{-x}=2^4$ $\therefore x=-4$

$\therefore \log_{0.5} 16=-4$

3) $\log_{0.25} 4=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$0.25^x=4$이므로 $\left(\frac{1}{4}\right)^x=4$

$4^{-x}=4$ $\therefore x=-1$

$\therefore \log_{0.25} 4=-1$

4) $\log_{125} \sqrt[3]{25}=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$125^x=\sqrt[3]{25}$이므로 $(5^3)^x=5^{\frac{2}{3}}$

$5^{3x}=5^{\frac{2}{3}}$에서

$3x=\frac{2}{3}$ $\therefore x=\frac{2}{9}$

$\therefore \log_{125} \sqrt[3]{25}=\frac{2}{9}$

5) $\log_{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{32}=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$(2\sqrt{2})^x=\sqrt[4]{32}$이므로 $(2^{\frac{3}{2}})^x=2^{\frac{5}{4}}$

$2^{\frac{3}{2}x}=2^{\frac{5}{4}}$에서

$\frac{3}{2}x=\frac{5}{4}$ $\therefore x=\frac{5}{6}$

$\therefore \log_{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{32}=\frac{5}{6}$

6) $\log_{49} \sqrt{343}=x$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$49^x=\sqrt{343}$이므로 $(7^2)^x=\sqrt{7^3}$

$7^{2x}=7^{\frac{3}{2}}$에서 $2x=\frac{3}{2}$ $\therefore x=\frac{3}{4}$

$\therefore \log_{49} \sqrt{343}=\frac{3}{4}$

40 답 1) 81 2) $\frac{1}{8}$ 3) 7 4) 10 5) 8 6) 625

1) $\log_3 x=4$에서 $x=3^4=81$

2) $\log_{\frac{1}{2}} x=3$에서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

3) $\log_x 49=2$에서 $x^{\boxed{2}}=49$

$\therefore x=\boxed{\pm 7}$

그런데 $x>\boxed{0}$이므로 $x=\boxed{7}$

4) $\log_x \frac{1}{100}=-2$에서 $x^{-2}=\frac{1}{100}$

$\frac{1}{x^2}=\left(\frac{1}{10}\right)^2$

$x^2=10^2$ $\therefore x=\pm 10$

그런데 $x>0$이므로 $x=10$

5) $\log_3 (\log_2 x)=1$에서 $\log_2 x=3^1=3$

$\therefore x=2^3=8$

6) $\log_2 (\log_5 x)=2$에서 $\log_5 x=2^2=4$

$\therefore x=5^4=625$

41 답 1) $x<-1$ 또는 $x>3$ 2) $-2<x<-1$ 또는 $x>-1$ 3) $x>1$ 4) $1<x<2$ 또는 $2<x<5$

1) 진수 조건에서 $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(\boxed{x-3})>0$ $\therefore \boxed{x<-1}$ 또는 $\boxed{x>3}$

2) 밑 조건에서 $x+2>0$, $x+2\neq 1$

$\therefore x>-2$, $x\neq -1$

$\therefore -2<x<-1$ 또는 $x>-1$

3) (i) 밑 조건에서 $\boxed{x}>0$, $\boxed{x}\neq 1$

(ii) 진수 조건에서 $x^2+2x-3>0$

$(x+\boxed{3})(x-\boxed{1})>0$

$\therefore x<\boxed{-3}$ 또는 $x>\boxed{1}$

(i), (ii)에서 $x>\boxed{1}$

4) (i) 밑 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq 1$

$\therefore x>1$, $x\neq 2$

(ii) 진수 조건에서 $-x^2+3x+10>0$

$x^2-3x-10<0$

$(x+2)(x-5)<0$ $\therefore -2<x<5$

(i), (ii)에서 $1<x<2$ 또는 $2<x<5$

42 답 1) 18 2) 15

1) (ⅰ) 밑 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq 1$

$\therefore x>3$, $x\neq 4$

(ⅱ) 진수 조건에서 $-x^2+11x-24>0$

$x^2-11x+24<0$, $(x-3)(x-8)<0$

$\therefore 3<x<8$

(ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족하는 정수 x는 5, 6, 7이다.

$\therefore 5+6+7=18$

2) (ⅰ) 밑 조건에서 $x-5>0$, $x-5\neq 1$

$\therefore x>5$, $x\neq 6$

(ⅱ) 진수 조건에서 $-x^2+11x-18>0$

$x^2-11x+18<0$, $(x-2)(x-9)<0$

$\therefore 2<x<9$

(ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족하는 정수 x는 7, 8이다.

$\therefore 7+8=15$

43 답 1) $>$, $\neq$

2) $>$, $\neq$, $>$, $\boldsymbol{x=\log_a N}$, 로그, 진수

44 답 1) 0, 1 2) $\boldsymbol{m, n, m+n, a, m+n}$

3) $\boldsymbol{m, n, m-n, a, m-n}$

4) $\boldsymbol{m, a^{mn}, a, a^{mn}, mn}$

1) $a^0=1 \Longleftrightarrow \log_a 1=\boxed{0}$

$a^1=a \Longleftrightarrow \log_a a=\boxed{1}$

2) $\log_a x=m$, $\log_a y=n$으로 놓고,

로그의 정의를 이용하면

$x=a^{\boxed{m}}$, $y=a^{\boxed{n}}$이므로 $xy=a^{\boxed{m+n}}$

양변에 밑이 $\boxed{a}$인 로그를 취하면

$\log_a xy=\boxed{m+n}=\log_a x+\log_a y$

3) $\log_a x=m$, $\log_a y=n$으로 놓고,

로그의 정의를 이용하면

$x=a^{\boxed{m}}$, $y=a^{\boxed{n}}$이므로 $\dfrac{x}{y}=a^{\boxed{m-n}}$

양변에 밑이 $\boxed{a}$인 로그를 취하면

$\log_a \dfrac{x}{y}=\boxed{m-n}=\log_a x-\log_a y$

4) $\log_a x=m$으로 놓고,

로그의 정의를 이용하면 $x=a^{\boxed{m}}$이므로

양변을 n제곱하면 $x^n=\boxed{a^{mn}}$

양변에 밑이 $\boxed{a}$인 로그를 취하면

$\log_a x^n=\log_a \boxed{a^{mn}}=\boxed{mn}=n\log_a x$

45 답 1) 0 2) 1 3) -4 4) -2

1) $\log_3 1=0$

2) $\log_5 5=1$

3) $\log_3 \dfrac{1}{81}=\log_3 3^{-4}=-4\log_3 3=-4$

4) $\log_2 0.25=\log_2 \dfrac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2\log_2 2=-2$

46 답 1) 1 2) 2 3) 4 4) 2 5) 1 6) 3

1) $\log_2 16+\log_2 \dfrac{1}{8}=\log_2\left(16\times\dfrac{1}{8}\right)=\log_2 2=1$

2) $\log_6 3+\log_6 12=\log_6 (3\times 12)=\log_6 36$

$=\log_6 6^2=2\log_6 6=2$

3) $\log_2 \dfrac{4}{3}+2\log_2 \sqrt{12}$

$=\log_2 \dfrac{4}{3}+\log_2 12=\log_2\left(\dfrac{4}{3}\times 12\right)$

$=\log_2 16=\log_2 2^4=4\log_2 2=4$

4) $\log_3 \sqrt{27}-\log_3 \dfrac{1}{\sqrt{3}}=\log_3 \dfrac{\sqrt{27}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\log_3 \sqrt{81}=\log_3 9$

$=\log_3 3^2=2$

5) $\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4=\log_3 \dfrac{6\times 2}{4}=\log_3 3=1$

6) $\log_2 3-\log_2 \dfrac{9}{2}+\log_2 12=\log_2 \dfrac{3\times 12}{\dfrac{9}{2}}=\log_2 8$

$=\log_2 2^3=3$

47 답 1) 31 2) 1 3) 2 4) 6

1) $9^{\frac{3}{2}}+\log_3 81=(3^2)^{\frac{3}{2}}+\log_3 3^4=3^{2\times\frac{3}{2}}+4\log_3 3$

$=27+4=31$

2) $\sqrt[3]{27}-\log_3 \sqrt{81}=\sqrt[3]{3^3}-\log_3 \sqrt{3^4}$

$=3-\log_3 3^2=3-2=1$

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}\times\log_3 81=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^3}}\times\log_3 3^4=\dfrac{1}{2}\times 4=2$

4) $3^{\frac{2}{3}}\times 27^{\frac{1}{9}}+\log_2 8=3^{\frac{2}{3}}\times(3^3)^{\frac{1}{9}}+\log_2 2^3=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}+3=6$

48 답 1) $\boldsymbol{4a+b}$ 2) $\boldsymbol{1-a}$ 3) $\boldsymbol{2a-2}$ 4) $\boldsymbol{-a+2b+1}$

5) $\boldsymbol{3a+2b-3}$ 6) $\boldsymbol{9a-3}$

7) $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}(-a+b+1)}$ 8) $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}a+b}$

1) $\log_{10} 48=\log_{10}(2^{\boxed{4}}\times 3)=\log_{10} 2^{\boxed{4}}+\boxed{\log_{10} 3}$

$=\boxed{4}\log_{10} 2+\boxed{\log_{10} 3}=\boxed{4}a+b$

2) $\log_{10} 5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10} 10-\log_{10} 2=1-a$

3) $\log_{10}\dfrac{1}{25}=\log_{10} 5^{-2}=-2\log_{10} 5=-2\log_{10}\dfrac{10}{2}$

$=-2(\log_{10} 10-\log_{10} 2)$

$=-2(1-a)=2a-2$

4) $\log_{10} 45=\log_{10}(5\times 3^2)=\log_{10} 5+\log_{10} 3^2$

$=\log_{10}\frac{10}{2}+2\log_{10} 3$

$=\log_{10} 10-\log_{10} 2+2\log_{10} 3$

$=-a+2b+1$

5) $\log_{10} 0.072=\log_{10}\frac{72}{1000}=\log_{10}\frac{2^3\times 3^2}{10^3}$

$=\log_{10} 2^3+\log_{10} 3^2-\log_{10} 10^3$

$=3\log_{10} 2+2\log_{10} 3-3$

$=3a+2b-3$

6) $\log_{10}\left(\frac{4}{5}\right)^3=3(\log_{10} 4-\log_{10} 5)$

$=3(\log_{10} 2^2-\log_{10} 5)$

$=3\left(2\log_{10} 2-\log_{10}\frac{10}{2}\right)$

$=3\{2\log_{10} 2-(\log_{10} 10-\log_{10} 2)\}$

$=3\{2a-(1-a)\}=3(3a-1)$

$=9a-3$

7) $\log_{10}\sqrt[4]{15}=\frac{1}{4}\log_{10} 15=\frac{1}{4}\log_{10}(3\times 5)$

$=\frac{1}{4}(\log_{10} 3+\log_{10} 5)$

$=\frac{1}{4}(\log_{10} 3+\log_{10} 10-\log_{10} 2)$

$=\frac{1}{4}(-a+b+1)$

8) $\log_{10}\sqrt{72}=\frac{1}{2}\log_{10} 72=\frac{1}{2}\log_{10}(2^3\times 3^2)$

$=\frac{1}{2}(3\log_{10} 2+2\log_{10} 3)$

$=\frac{1}{2}(3a+2b)=\frac{3}{2}a+b$

49 답 1) $2A+B+3C$ 2) $2A-B-3C$

1) $\log_a x^2yz^3=2\log_a x+\log_a y+3\log_a z$

$=2A+B+3C$

2) $\log_a\frac{x^2}{yz^3}=2\log_a x-(\log_a y+3\log_a z)$

$=2A-B-3C$

50 답 1) $x+2y+3z$ 2) $-3x+5y+z$

$10^x=a$, $10^y=b$, $10^z=c$에서

$x=\log_{10} a$, $y=\log_{10} b$, $z=\log_{10} c$

1) $\log_{10} ab^2c^3=\log_{10} a+2\log_{10} b+3\log_{10} c$

$=x+2y+3z$

2) $\log_{10}\frac{b^5c}{a^3}=5\log_{10} b+\log_{10} c-3\log_{10} a$

$=-3x+5y+z$

51 답 1) $\frac{7}{4}a-\frac{3}{2}b+1$ 2) $3a-2b$

1) $\log_{10} 36=\log_{10}(2^{\boxed{2}}\times\boxed{3}^2)$

$=\boxed{2}\log_{10} 2+2\log_{10}\boxed{3}$

$\therefore a=\boxed{2}\log_{10} 2+2\log_{10}\boxed{3}$ …… ㉠

$\log_{10} 24=\log_{10}(\boxed{2}^3\times 3)=3\log_{10}\boxed{2}+\log_{10} 3$

$\therefore b=3\log_{10}\boxed{2}+\log_{10} 3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\log_{10} 2=\boxed{-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b}$, $\log_{10} 3=\boxed{\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}b}$

$\therefore \log_{10} 45=\log_{10}(5\times 3^{\boxed{2}})$

$=\log_{10} 5+\boxed{2}\log_{10} 3$

$=\boxed{1-\log_{10} 2}+\boxed{2}\log_{10} 3$

$=1-\left(\boxed{-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b}\right)+2\left(\boxed{\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}b}\right)$

$=\frac{7}{4}a-\frac{3}{2}b+\boxed{1}$

2) $\log_{10} 15=\log_{10}(3\times 5)=\log_{10} 3+\log_{10} 5$

$\therefore a=\log_{10} 3+\log_{10} 5$ …… ㉠

$\log_{10} 45=\log_{10}(3^2\times 5)=2\log_{10} 3+\log_{10} 5$

$\therefore b=2\log_{10} 3+\log_{10} 5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\log_{10} 3=-a+b$, $\log_{10} 5=2a-b$

$\therefore \log_{10}\frac{5}{3}=\log_{10} 5-\log_{10} 3=(2a-b)-(-a+b)$

$=3a-2b$

52 답 1) **0** 2) **1** 3) $\log_a x+\log_a y$
4) $\log_a x-\log_a y$ 5) $n\log_a x$

53 답 1) b, $\log_c b$, $\log_c b$, $\frac{\log_c b}{\log_c a}$, $\frac{\log_c b}{\log_c a}$

2) b, $\log_b b$, 1, $\frac{1}{\log_b a}$, $\frac{1}{\log_b a}$

1) $\log_a b=x$로 놓고, 로그의 정의를 이용하면

$a^x=\boxed{b}$

양변에 밑이 c인 로그를 취하면 $\log_c a^x=\boxed{\log_c b}$

$x\log_c a=\boxed{\log_c b}$ $\quad\therefore x=\boxed{\frac{\log_c b}{\log_c a}}$

$\therefore \log_a b=\boxed{\frac{\log_c b}{\log_c a}}$

2) $\log_a b=x$로 놓고, 로그의 정의를 이용하면

$a^x=\boxed{b}$

양변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b a^x=\boxed{\log_b b}$

$x\log_b a=\boxed{1}$ $\quad\therefore x=\boxed{\frac{1}{\log_b a}}$

$\therefore \log_a b=\boxed{\frac{1}{\log_b a}}$

54 답 1) **1** 2) $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ 3) $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ 4) **2** 5) **2** 6) **1** 7) **5**

1) $\log_2 3\times\log_3 2=\log_2 3\times\dfrac{1}{\log_2 3}=1$

2) $\log_5 3\times\log_3\sqrt{5}=\log_5 3\times\dfrac{1}{2}\log_3 5$

$=\dfrac{1}{2}\log_5 3\times\dfrac{1}{\log_5 3}=\dfrac{1}{2}$

3) $\log_{25} 9\times\log_{27} 5=\dfrac{\log_{10} 9}{\log_{10} 25}\times\dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 27}$

$=\dfrac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 5^2}\times\dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3^3}$

$=\dfrac{2\log_{10} 3}{2\log_{10} 5}\times\dfrac{\log_{10} 5}{3\log_{10} 3}$

$=\dfrac{1}{3}$

4) $\log_3 5\times\log_5 7\times\log_7 9=\dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}\times\dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5}\times\dfrac{\log_{10} 9}{\log_{10} 7}$

$=\dfrac{\log_{10} 9}{\log_{10} 3}=\dfrac{2\log_{10} 3}{\log_{10} 3}=2$

5) $\log_2 20-\dfrac{1}{\log_5 2}=\log_2 20-\log_2 5$

$=\log_2\dfrac{20}{5}=\log_2 4=2$

6) $\log_2(\log_2 3)+\log_2(\log_3 4)$

$=\log_2(\log_2 3\times\log_3 4)$

$=\log_2(\log_2 3\times 2\log_3 2)$

$=\log_2\left(\log_2 3\times\dfrac{2}{\log_2 3}\right)$

$=\log_2 2=1$

7) $\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\times\log_{31} 32$

$=\log_2 3\times\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}\times\dfrac{\log_2 5}{\log_2 4}\times\cdots\times\dfrac{\log_2 32}{\log_2 31}$

$=\log_2 32=\log_2 2^5=5$

55 답 1) $\boldsymbol{\frac{b}{a}}$ 2) $\boldsymbol{\frac{2a+b}{a+b}}$ 3) $\boldsymbol{\frac{3b}{2a}}$ 4) $\boldsymbol{\frac{a+2b}{2b}}$

1) $\log_2 3=\dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}=\dfrac{b}{a}$

2) $\log_6 12=\dfrac{\log_{10} 12}{\log_{10} 6}=\dfrac{\log_{10}(2^2\times 3)}{\log_{10}(2\times 3)}$

$=\dfrac{\log_{10} 2^2+\log_{10} 3}{\log_{10} 2+\log_{10} 3}$

$=\dfrac{2\log_{10} 2+\log_{10} 3}{\log_{10} 2+\log_{10} 3}$

$=\dfrac{2a+b}{a+b}$

3) $\log_2\sqrt{27}=\log_2 3^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}\log_2 3$

$=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}=\dfrac{3b}{2a}$

4) $\log_3\sqrt{18}=\dfrac{1}{2}\log_3(2\times 3^2)=\dfrac{1}{2}(\log_3 2+2\log_3 3)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3}+2\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}+2\right)=\dfrac{a+2b}{2b}$

56 답 1) $\boldsymbol{\frac{y+2z}{3x+3y}}$ 2) $\boldsymbol{\frac{3x+5y}{4y+2z}}$ 3) $\boldsymbol{\frac{x+y+2z}{6x+3y+3z}}$

$10^x=a$, $10^y=b$, $10^z=c$에서

$x=\log_{10}\boxed{a}$, $y=\log_{10} b$, $z=\log_{10}\boxed{c}$이므로

1) $\log_{ab}\sqrt[3]{bc^2}=\dfrac{\log_{10}\sqrt[3]{bc^2}}{\log_{10}\boxed{ab}}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{\boxed{3}}(\log_{10} b+\boxed{2}\log_{10} c)}{\log_{10} a+\log_{10} b}$

$=\dfrac{\boxed{y+2z}}{\boxed{3}(x+y)}=\boxed{\dfrac{y+2z}{3x+3y}}$

2) $\log_{b^2c}\sqrt{a^3b^5}=\dfrac{\log_{10}\sqrt{a^3b^5}}{\log_{10} b^2c}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{2}(\log_{10} a^3+\log_{10} b^5)}{\log_{10} b^2+\log_{10} c}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{2}(3\log_{10} a+5\log_{10} b)}{2\log_{10} b+\log_{10} c}$

$=\dfrac{3x+5y}{2(2y+z)}=\dfrac{3x+5y}{4y+2z}$

3) $\log_{a^2bc}\sqrt[3]{abc^2}=\dfrac{\log_{10}\sqrt[3]{abc^2}}{\log_{10} a^2bc}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{3}(\log_{10} a+\log_{10} b+2\log_{10} c)}{2\log_{10} a+\log_{10} b+\log_{10} c}$

$=\dfrac{x+y+2z}{3(2x+y+z)}=\dfrac{x+y+2z}{6x+3y+3z}$

57 답 1) $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$ 2) **4**

1) $8^x=3$에서 $x=\log_8 3$

$9^y=2$에서 $y=\log_9 2$

$\therefore\ xy=\log_8 3\times\log_9 2=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 8}\times\dfrac{\log_2 2}{\log_2 9}$

$=\dfrac{\log_2 3}{3}\times\dfrac{1}{2\log_2 3}=\dfrac{1}{6}$

2) $\dfrac{\log_5 4}{a}=\log_5 6$에서

$a=\dfrac{\log_5 4}{\log_5 6}=\log_6 4$

마찬가지 방법으로 $b=\log_6 9$, $c=\log_6 36$

$\therefore\ a+b+c=\log_6 4+\log_6 9+\log_6 36$

$=\log_6(4\times 9\times 36)=\log_6 6^4=4$

58 답 1) $\log_c b$ 2) $\log_b a$

59 답 1) $n\log_a b$, m
2) $\log_c b$, $\log_c b$, $\log_c a$, $\log_c a$

1) $\log_{a^m} b^n$에서 밑의 변환 공식를 이용하여 밑이 a인 로그로 바꾸면

$$\log_{a^m} b^n=\frac{\log_a b^n}{\log_a a^m}=\frac{\boxed{n\log_a b}}{\boxed{m}\log_a a}$$

$$=\frac{n}{m}\log_a b$$

2) $a^{\log_c b}=x$ …… ㉠

로 놓자. 양변에 c를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_c a^{\log_c b}=\log_c x$

$\boxed{\log_c b}\times\log_c a=\log_c x$

$\log_c a\times\boxed{\log_c b}=\log_c x$

$\log_c b^{\boxed{\log_c a}}=\log_c x$

$b^{\boxed{\log_c a}}=x$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

60 답 1) $\frac{4}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 10 4) 125

1) $\log_{5^3} 5^4=\frac{4}{3}\log_5 5=\frac{4}{3}$

2) $\log_8 2\sqrt{2}=\log_{2^3} 2^{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{3}\log_2 2=\frac{1}{2}$

3) $2^{\log_2 10}=10^{\log_2 2}=10$

4) $27^{\log_3 5}=5^{\log_3 27}=5^{3\log_3 3}=5^3=125$

61 답 1) $\frac{3}{4}$ 2) -2 3) 2 4) 2

1) $\log_4 2+\log_{16} 2=\log_{2^2} 2+\log_{2^4} 2$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

2) $\log_{\frac{1}{2}} 2+\log_7 \frac{1}{7}=-1-1=-2$

3) $(\log_2 3+\log_8 3)\times(\log_3 2+\log_9 2)$

$=\left(\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3\right)\times\left(\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2\right)$

$=\left(\frac{4}{3}\log_2 3\right)\times\left(\frac{3}{2}\log_3 2\right)$

$=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=2$

4) $\log_5 3\times(\log_3\sqrt{5}-\log_{\frac{1}{9}} 125)$

$=\log_5 3\times\left(\frac{1}{2}\log_3 5+\frac{3}{2}\log_3 5\right)$

$=\log_5 3\times 2\log_3 5=2$

62 답 1) $\frac{n}{6m}$ 2) 2^{mn}

1) $a=5^m$, $b=5^n$에서 $m=\boxed{\log_5 a}$, $n=\boxed{\log_5 b}$이므로

$$\log_{a^3}\sqrt{b}=\frac{\log_5\sqrt{b}}{\log_5 a^3}=\frac{\boxed{\frac{1}{2}}\log_5 b}{\boxed{3}\log_5 a}=\boxed{\frac{n}{6m}}$$

2) $b=2^n$에서 $\log_2 b=\log_2 2^n=n$이므로

$a^{\log_2 b}=(2^m)^n=2^{mn}$

63 답 1) $\frac{12}{13}$ 2) $\frac{1}{2}$

1) $x=a^{\frac{1}{2}}$, $y=a^{\frac{1}{3}}$, $z=a^{\frac{1}{4}}$에서

$xyz=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{6+4+3}{12}}=a^{\frac{13}{12}}$

$\therefore \log_{xyz} a=\log_{a^{\frac{13}{12}}} a=\frac{12}{13}\log_a a=\frac{12}{13}$

2) $\log_{a^2} 9=\log_{a^2} 3^{\boxed{2}}=\log_{\boxed{a}} 3=\log_{a^{\boxed{3}}} 3^3$이므로

$\log_{a^{\boxed{3}}} 27=\log_b 27$ $\therefore b=\boxed{a^3}$

$\therefore \log_{ab} a^2=\log_{a^{\boxed{4}}} a^2=\boxed{\frac{2}{4}}\log_a a=\boxed{\frac{1}{2}}$

64 답 1) $\frac{n}{m}\log_a b$ 2) $b^{\log_c a}$ 3) b

65 답 1) $-\frac{1}{3}$ 2) 2 3) 25

1) $a^2b^3=1$의 양변에 밑이 $\boxed{a}$인 로그를 취하면

$\log_a a^2b^3=\log_a 1$

$\log_a a^2+\log_a b^3=\boxed{0}$

$\boxed{2}+3\log_a b=0$ $\therefore \log_a b=\boxed{-\frac{2}{3}}$

$\therefore \log_a a^3b^5=\log_a a^3+\log_a b^5$

$=\boxed{3}+5\log_a b$

$=3+5\times\left(\boxed{-\frac{2}{3}}\right)=\boxed{-\frac{1}{3}}$

2) $12^x=75^y=30$의 각 변에 밑이 10인 로그를 취하면

$x\log_{10} 12=y\log_{10} 75=\log_{10} 30$

$x=\frac{\log_{10} 30}{\log_{10} 12}$, $y=\frac{\log_{10} 30}{\log_{10} 75}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 30}+\frac{\log_{10} 75}{\log_{10} 30}=\frac{\log_{10}(12\times 75)}{\log_{10} 30}$

$=\frac{\log_{10} 30^2}{\log_{10} 30}=\frac{2\log_{10} 30}{\log_{10} 30}=2$

3) $a+b=\log_3 4$, $a-b=\log_2 5$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\log_3 4\times\log_2 5$

$=2\log_3 2\times\log_2 5$

$=2\log_3 2\times\frac{\log_3 5}{\log_3 2}=2\log_3 5$

$\therefore 3^{a^2-b^2}=3^{2\log_3 5}=5^2=25$

66 답 1) **10** 2) **15**

1) 로그의 정의를 이용하면 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

$y^2=4 \quad \therefore y=2 \ (\because y>0,\ y\neq 1)$

$\therefore \frac{1}{x}+y=8+2=10$

2) 로그의 정의를 이용하면 $2^a=2+\sqrt{3}$

$4^a=(2^a)^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$

$\therefore 4^a+\frac{4}{2^a}=7+4\sqrt{3}+\frac{4}{2+\sqrt{3}}$

$=7+4\sqrt{3}+\frac{4\times(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=7+4\sqrt{3}+8-4\sqrt{3}=15$

67 답 $\frac{6}{5}$

$\log_a x=2$에서 $\frac{1}{\log_x a}=2$이므로 $\log_x a=\frac{1}{2}$

$\log_b x=3$에서 $\frac{1}{\log_x b}=3$이므로 $\log_x b=\frac{1}{3}$

$\therefore \log_{ab} x=\frac{1}{\log_x ab}=\frac{1}{\log_x a+\log_x b}$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}$

68 답 1) **2** 2) **−1**

1) 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=8,\ \alpha\beta=2$

$\therefore \log_2(\alpha^{-1}+\beta^{-1})=\log_2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\log_2\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\log_2\frac{8}{2}=\log_2 2^2=2$

2) 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 3+1=\log_2 3+\log_2 2=\log_2 6=-a$

$\therefore a=-\log_2 6$

$(\log_2 3)\times 1=\log_2 3=b$

$\therefore a+b=-\log_2 6+\log_2 3=\log_2 6^{-1}+\log_2 3$

$=\log_2\frac{3}{6}=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

69 답 1) **7** 2) **23** 3) **6** 4) **1**

1) 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=\boxed{6},\ \log_2 a\times\log_2 b=\boxed{4}$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\frac{\log_2 b}{\boxed{\log_2 a}}+\frac{\boxed{\log_2 a}}{\log_2 b}=\frac{(\log_2 a)^2+(\boxed{\log_2 b})^2}{\boxed{\log_2 a}\times\log_2 b}$

$=\frac{(\boxed{\log_2 a+\log_2 b})^2-\boxed{2}\log_2 a\times\log_2 b}{\boxed{\log_2 a}\times\log_2 b}$

$=\frac{\boxed{6}^2-\boxed{2}\times 4}{4}=\boxed{7}$

2) 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=5,\ \log_2 a\times\log_2 b=1$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}=\frac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{5^2-2\times 1}{1}=23$

3) 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=4,\ \log_2 a\times\log_2 b=2$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}=\frac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{4^2-2\times 2}{2}=6$

4) 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=3,\ \log_2 a\times\log_2 b=3$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}=\frac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{3^2-2\times 3}{3}=1$

70 답 **−1**

$x^2-5x+3=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=3$

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\log_3\alpha,\ \log_3\beta$이므로

$\log_3\alpha+\log_3\beta=-a$

$\therefore a=-(\log_3\alpha+\log_3\beta)$

$=-\log_3\alpha\beta=-\log_3 3=-1$

71 답 **25**

$x^2-8x+1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 $\alpha\beta=1$

$\log_2\left(\alpha+\frac{4}{\beta}\right)+\log_2\left(\beta+\frac{4}{\alpha}\right)$

$=\log_2\left(\alpha+\frac{4}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{4}{\alpha}\right)$

$=\log_2\left(\alpha\beta+4+4+\frac{16}{\alpha\beta}\right)$

$=\log_2 25=k$

$\therefore 2^k=25$

72 답 1) **9** 2) **−3**

1) $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} a=\log_2\boxed{a},\ 2\log_4 b=\log_{\boxed{2}} b,$

$3\log_8 c=\log_2\boxed{c},\ 4\log_4\sqrt{d}=\log_{\boxed{2}} d$이므로

$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} a+2\log_4 b+3\log_8 c+4\log_4 \sqrt{d}$

$=\log_2 \boxed{a}+\log_{\boxed{2}} b+\log_2 \boxed{c}+\log_{\boxed{2}} d$

$=\log_2 \boxed{abcd}=1$

$\therefore abcd=\boxed{2}$

$\therefore [\{(3^a)^b\}^c]^d=3^{\boxed{abcd}}=3^{\boxed{2}}=\boxed{9}$

2) $\log_a b+\log_b c+\log_c a+\log_a c+\log_c b+\log_b a$

$=(\log_a b+\log_a c)+(\log_b c+\log_b a)+(\log_c a+\log_c b)$

$=\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab$

$=\log_a \frac{1}{a}+\log_b \frac{1}{b}+\log_c \frac{1}{c}$ ($\because abc=1$)

$=\log_a a^{-1}+\log_b b^{-1}+\log_c c^{-1}$

$=(-1)+(-1)+(-1)=-3$

73 답 $\frac{25}{6}$

$b=a^{\frac{1}{2}}$, $c=b^{\frac{2}{3}}$, $a=c^3$이므로

$\log_a b+\log_b c+\log_c a=\log_a a^{\frac{1}{2}}+\log_b b^{\frac{2}{3}}+\log_c c^3$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+3=\frac{25}{6}$

74 답 32

$ab=27$에서 $\log_3 ab=\log_3 27$이므로

$\log_3 a+\log_3 b=\log_3 3^3=3$ ...... ㉠

$\log_3 \frac{b}{a}=\log_3 b-\log_3 a=5$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\log_3 a=-1$, $\log_3 b=4$

$\therefore 4\log_3 a+9\log_3 b=4\times(-1)+9\times 4$

$=-4+36=32$

75 답 $\angle B=90°$인 직각삼각형

$\log_a (b+c)+\log_a (b-c)=2$에서

$\log_a (b+c)(b-c)=2$, $\log_a (b^2-c^2)=2$

$b^2-c^2=a^2$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이다.

76 답 1) $x=\log_a N$ 2) 같게, 지수 3) $-\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$

77 답 1) 4, 4 2) 3, 3, 3 3) -3, -3, -3 4) -4, -4, -4

	N	$N=10^n$	$\log N=\log 10^n=n$
1)	10000	$10000=10^4$	$\log 10000=\log 10^{\boxed{4}}=\boxed{4}$
2)	1000	$1000=10^{\boxed{3}}$	$\log 1000=\log 10^{\boxed{3}}=\boxed{3}$
3)	0.001	$0.001=10^{\boxed{-3}}$	$\log 0.001=\log 10^{\boxed{-3}}=\boxed{-3}$
4)	0.0001	$0.0001=10^{\boxed{-4}}$	$\log 0.0001=\log 10^{\boxed{-4}}=\boxed{-4}$

78 답 1) 2 2) -5 3) -3 4) $\frac{5}{3}$ 5) $\frac{5}{2}$

1) $\log 10^2=2$

2) $\log 10^{-5}=-5$

3) $\log \frac{1}{1000}=\log 10^{-3}=-3$

4) $\log \sqrt[3]{10^5}=\log 10^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$

5) $\log 100\sqrt{10}=\log (10^2\times 10^{\frac{1}{2}})=\log 10^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$

79 답 1) 상용로그, $\log N$ 2) n

80 답 1) 1.3909 2) 2.3909 3) -1.6091 4) -3.6091

1) $\log 24.6=\log (2.46\times\boxed{10})$

$=\log 2.46+\log \boxed{10}$

$=0.3909+\boxed{1}=\boxed{1.3909}$

2) $\log 246=\log (2.46\times 100)$

$=\log 2.46+\log 100$

$=0.3909+2=2.3909$

3) $\log 0.0246=\log (2.46\times 10^{-2})$

$=\log 2.46+\log 10^{-2}$

$=0.3909-2=-1.6091$

4) $\log 0.000246=\log (2.46\times 10^{-4})$

$=\log 2.46+\log 10^{-4}$

$=0.3909-4=-3.6091$

81 답 1) 0.3980 2) -0.0970

1) $\log \frac{5}{2}=\log \frac{\boxed{10}}{4}=\boxed{1}-\boxed{2}\log 2$

$=\boxed{1}-\boxed{2}\times 0.3010$

$=\boxed{1}-\boxed{0.6020}=\boxed{0.3980}$

2) $\log \frac{4}{5}=\log \frac{8}{10}=\log 8-\log 10=3\log 2-1$

$=3\times 0.3010-1=0.9030-1=-0.0970$

82 답 상용로그표

83 답 1) 325 2) 32500 3) 0.325 4) 0.00325

1) $\log 3.25=0.5119$이므로

$\log N=2.5119=2+0.5119$

$=\log 100+\log 3.25=\log 325$

$\therefore N=325$

2) $\log 3.25=0.5119$이므로

$\log N=4.5119=4+0.5119$

$=\log 10000+\log 3.25=\log 32500$

$\therefore N=32500$

3) $\log 3.25=0.5119$이므로

$\log N=-0.4881=-1+\boxed{0.5119}$

$=\log 10^{-1}+\boxed{\log 3.25}$

$=\log(\boxed{10^{-1}\times 3.25})=\log\boxed{0.325}$

$\therefore N=\boxed{0.325}$

4) $\log 3.25=0.5119$이므로

$\log N=-2.4881=-3+0.5119$

$=\log 10^{-3}+\log 3.25$

$=\log(10^{-3}\times 3.25)=\log 0.00325$

$\therefore N=0.00325$

84 답 41.06

$N=3.45^3$으로 놓으면

$\log N=\log 3.45^3=3\log 3.45$

$=3\times 0.5378=1.6134=1+0.6134$

$=1+\log 4.106$

$=\log 10+\log 4.106$

$=\log 41.06$

따라서 $N=41.06$이므로 $3.45^3=41.06$

85 답 1) 10^n, n 2) 숫자 배열

Ⅰ-3 지수함수

pp. 44~52

86 답 1) ○ 2) × 3) ○ 4) × 5) ×

87 답 1) 8 2) $\frac{1}{2}$ 3) 32 4) 4 5) $\sqrt{2}$

1) $f(3)=2^3=8$

2) $f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$

3) $f(2)f(3)=2^2\times 2^3=2^5=32$

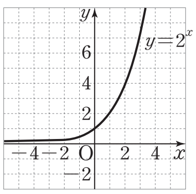
4) $\frac{f(5)}{f(3)}=\frac{2^5}{2^3}=2^2=4$

5) $f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

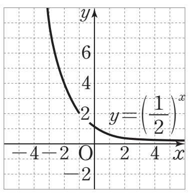
88 답 지수함수

89 답 해설 참조

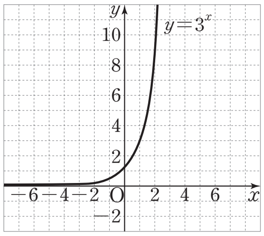
1)



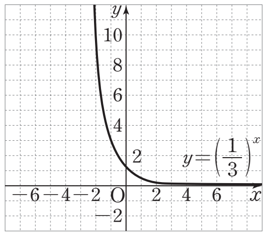
2)



3)



4)



90 답 1) × 2) × 3) × 4) ○ 5) ○

91 답 1) ○ 2) × 3) ○ 4) × 5) ×

92 답 $a=\sqrt{3}$, $b=\frac{3}{2}$

그래프가 두 점 $\left(\boxed{\frac{1}{2}}, \boxed{a}\right)$, $(b, \boxed{3\sqrt{3}})$을 지나므로

$a=3^{\boxed{\frac{1}{2}}}=\boxed{\sqrt{3}}$

$3\sqrt{3}=3^{\boxed{\frac{3}{2}}}=3^b$

$\therefore b=\boxed{\frac{3}{2}}$

93 답 2

$f(x)=a^x$이므로 $f(1)=a$, $f(3)=a^3$

$f(k)=\frac{f(3)}{f(1)}=\frac{a^3}{a}=a^2$

그런데 $f(k)=a^k=a^2$이므로 $k=2$

94 답 1) 실수 전체, 양의 실수 전체

2) $a>1$, $0<a<1$

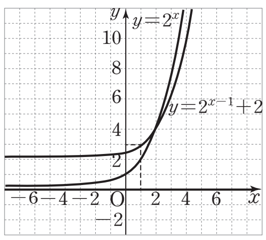
3) $(0, 1)$, x축 $(y=0)$

95 답 그래프는 해설 참조

1) $y=2^{x-1}+2$ 2) $y=3^{x+1}+1$

3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-1$ 4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+1$

1)

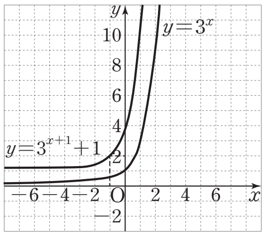


지수함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-\boxed{2}=2^{\boxed{x-1}}$

$\therefore y=2^{\boxed{x-1}}+\boxed{2}$

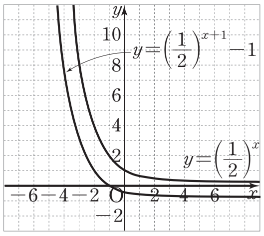
2)



지수함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=3^{x-(-1)}$ $\quad\therefore y=3^{x+1}+1$

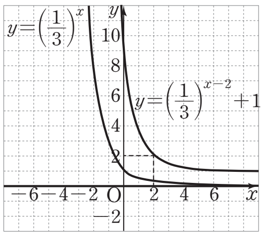
3)



지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-(-1)}$ $\quad\therefore y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-1$

4)



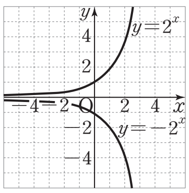
지수함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ $\quad\therefore y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+1$

96 답 그래프는 해설 참조

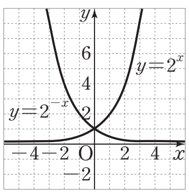
1) $\boldsymbol{y=-2^x}$ **2)** $\boldsymbol{y=2^{-x}}$ **3)** $\boldsymbol{y=-2^{-x}}$

1)



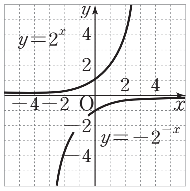
지수함수 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $\boxed{-y}=2^x$, 즉 $y=\boxed{-2^x}$이다.

2)



지수함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=2^{-x}$이다.

3)

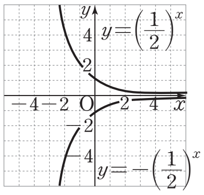


지수함수 $y=2^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=2^{-x}$, 즉 $y=-2^{-x}$이다.

97 답 그래프는 해설 참조

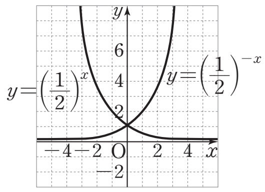
1) $\boldsymbol{y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$ **2)** $\boldsymbol{y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}}$ **3)** $\boldsymbol{y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}}$

1)



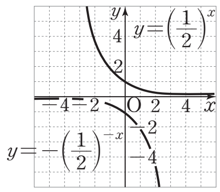
지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, 즉 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$이다.

2)



지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$이다.

3)



지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$, 즉 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$이다.

98 답 $\boldsymbol{y=2^{-x+3}+1}$

지수함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y-1=2^{x+3}$ $\quad\therefore y=2^{x+3}+1$

지수함수 $y=2^{x+3}+1$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=2^{-x+3}+1$

99 답 $\frac{1}{2}$

지수함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y-3=a^{x-2}$

$y-3=a^{x-2}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y-3=a^{x-2}$

$\therefore y=-a^{x-2}-3$

이 그래프가 점 $(1,\ -5)$를 지나므로

$-5=-a^{1-2}-3 \qquad \therefore a^{-1}=2$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

100 답 ㄷ, ㄹ

ㄱ. $y=\sqrt{3}\times 3^x=3^{x+\frac{1}{2}}$이므로 지수함수 $y=\sqrt{3}\times 3^x$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{1}{3^x}+2=3^{-x}+2$이므로 지수함수 $y=\frac{1}{3^x}+2$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=3^{2x+6}=3^{2(x+3)}$이므로 지수함수 $y=3^{2x+6}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여도 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=9\times(\sqrt{3})^x-1=3^2\times 3^{\frac{1}{2}x}-1=3^{\frac{1}{2}x+2}-1$이므로 지수함수 $y=9\times(\sqrt{3})^x-1$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여도 겹쳐질 수 없다.

따라서 겹쳐질 수 없는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

101 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. $y=\frac{1}{2}\times 2^x-3=2^{-1}\times 2^x-3=2^{x-1}-3$이므로 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

ㄴ. 실수 전체의 집합에서 $2^{x-1}>0$, 즉 $2^{x-1}-3>-3$이므로 치역은 $\{y|y>-3\}$이다. (참)

ㄷ. $y=2^{x-1}-3$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. (거짓)

ㄹ. 점근선의 방정식은 $y=-3$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

102 답 4

$g(5)=k$로 놓으면 $f(k)=5$이므로

$2^{k-2}+1=5$에서

$2^{k-2}=4=2^2$

$k-2=2$

$\therefore k=4$

103 답 -2

$g\left(\frac{10}{3}\right)=k$로 놓으면 $f(k)=\frac{10}{3}$이므로

$\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}+2=\frac{10}{3}$에서 $\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}=\frac{4}{3}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

$k+1=-1 \qquad \therefore k=-2$

104 답 1) $a^{x-m}+n$ 2) $-a^x$
3) a^{-x} 4) $-a^{-x}$

105 답 1) $<$ 2) $<$ 3) $>$ 4) $>$

1) $4^{15}=(2^{\boxed{2}})^{15}=2^{\boxed{30}}$, $8^{11}=(2^3)^{\boxed{11}}=2^{\boxed{33}}$이고 $30<33$

이때, 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $2^{30}<2^{33} \qquad \therefore 4^{15}<8^{11}$

2) $\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=3^{\frac{3}{2}}$이고 $\frac{2}{3}<\frac{3}{2}$

이때, 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \sqrt[3]{3^2}<\sqrt{27}$

3) $(0.1)^{-\frac{1}{2}}$, $(0.1)^{\frac{2}{3}}$이고 $-\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$

이때, 함수 $y=(0.1)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $(0.1)^{-\frac{1}{2}}>(0.1)^{\frac{2}{3}}$

4) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$이고 $\frac{3}{2}<2$

이때, 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}>\left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \therefore \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3>\frac{1}{4}$

106 답 1) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 2) $5^{\frac{1}{3}}$, $25^{\frac{1}{4}}$, $125^{\frac{1}{5}}$
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt{8}$

1) $\sqrt{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{\frac{1}{2}}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{2}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{\frac{2}{3}}}$,

$\sqrt[4]{\frac{1}{8}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{3}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{\frac{3}{4}}}$이고 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$

이때, 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

따라서 작은 것부터 나열하면 $\boxed{\sqrt[4]{\frac{1}{8}},\ \sqrt[3]{\frac{1}{4}},\ \sqrt{\frac{1}{2}}}$

2) $5^{\frac{1}{3}}$, $125^{\frac{1}{5}}=(5^3)^{\frac{1}{5}}=5^{\frac{3}{5}}$, $25^{\frac{1}{4}}=(5^2)^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{2}}$

이고 $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}$

이때, 함수 $y=5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $5^{\frac{1}{3}}<5^{\frac{1}{2}}<5^{\frac{3}{5}}$

따라서 작은 것부터 나열하면 $5^{\frac{1}{3}}$, $25^{\frac{1}{4}}$, $125^{\frac{1}{5}}$

3) $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=4^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$

이고 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{2}$

이때, 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{2}}$

따라서 작은 것부터 나열하면 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt{8}$

107 답 **1)** $a>1$ **2)** $0<a<1$

108 답 **1)** 최댓값 : **4**, 최솟값 : $\frac{1}{2}$

2) 최댓값 : **3**, 최솟값 : $\frac{1}{9}$

3) 최댓값 : **239**, 최솟값 : **5**

4) 최댓값 : **5**, 최솟값 : $\frac{13}{4}$

1) $y=2^x$은 밑이 2이므로

$x=2$일 때, 최댓값은 $2^2=4$

$x=-1$일 때, 최솟값은 $2^{-1}=\frac{1}{2}$

2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 밑이 $\frac{1}{3}$이므로

$x=-1$일 때, 최댓값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$

$x=2$일 때, 최솟값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

3) $y=3^{x+3}-4$는 밑이 3이므로

$x=2$일 때, 최댓값은 $3^{2+3}-4=239$

$x=-1$일 때, 최솟값은 $3^{-1+3}-4=5$

4) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$은 밑이 $\frac{1}{2}$이므로

$x=-1$일 때, 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+3=5$

$x=2$일 때, 최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^2+3=\frac{13}{4}$

109 답 **1)** 최댓값 : **3**, 최솟값 : $\frac{1}{27}$

2) 최댓값 : **4**, 최솟값 : **2**

1) $f(x)=x^2-4x+1=(x-\boxed{2})^2-\boxed{3}$으로 놓으면

$1\le x\le 4$에서

$f(1)=\boxed{-2}$, $f(\boxed{2})=-3$, $f(4)=\boxed{1}$

$\therefore \boxed{-3}\le f(x)\le \boxed{1}$

$y=3^{x^2-4x+1}=3^{f(x)}$의 밑이 $\boxed{3}$이므로

$f(4)=\boxed{1}$일 때, 최댓값은 $3^{\boxed{1}}=\boxed{3}$,

$f(2)=\boxed{-3}$일 때, 최솟값은 $3^{\boxed{-3}}=\boxed{\frac{1}{27}}$이다.

2) $f(x)=-x^2+6x-7=-(x-3)^2+2$로 놓으면

$2\le x\le 4$에서

$f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=1$

$\therefore 1\le f(x)\le 2$

$y=2^{-x^2+6x-7}=2^{f(x)}$의 밑이 2이므로

$f(3)=2$일 때, 최댓값은 $2^2=4$이고,

$f(2)=f(4)=1$일 때, 최솟값은 $2^1=2$이다.

110 답 **1)** 최댓값 : **53**, 최솟값 : **4**

2) 최댓값 : **54**, 최솟값 : $-\frac{9}{4}$

3) 최댓값 : **674**, 최솟값 : **2**

1) $y=4^x-2^{x+1}+5=(\boxed{2^x})^2-2\times 2^x+5$

$\boxed{2^x}=t\,(t>0)$로 치환하면

$y=t^2-\boxed{2}t+5=(t-\boxed{1})^2+\boxed{4}$

이때, $-1\le x\le 3$에서 $2^{-1}\le 2^x\le 2^3$이므로

$\boxed{\frac{1}{2}}\le t\le \boxed{8}$

따라서 $t=\boxed{8}$일 때, 최댓값은 $\boxed{53}$이고,

$t=1$일 때, 최솟값은 $\boxed{4}$이다.

2) $y=3^{2x}-3^{x+1}=(3^x)^2-3\times 3^x$

$3^x=t\,(t>0)$로 치환하면

$y=t^2-3t=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

이때, $0\le x\le 2$에서 $3^0\le 3^x\le 3^2$이므로 $1\le t\le 9$

따라서 $t=9$일 때, 최댓값은 54이고,

$t=\frac{3}{2}$일 때, 최솟값은 $-\frac{9}{4}$이다.

3) $y=25^{-x}+2\times 5^{-x}-1=\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2+2\times\left(\frac{1}{5}\right)^x-1$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=t\,(t>0)$로 치환하면

$y=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$

이때, $-2\le x\le 0$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^0\le\left(\frac{1}{5}\right)^x\le\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$이므로

$1\le t\le 25$

따라서 $t=25$일 때, 최댓값 674이고,

$t=1$일 때, 최솟값은 2이다.

111 답 **3**

$2^x>\boxed{0}$, $2^{-x}>\boxed{0}$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=2^x+2^{-x}+1\ge \boxed{2}\sqrt{2^x\times 2^{-x}}+1=\boxed{3}$

(단, 등호는 $2^x=\boxed{2^{-x}}$, 즉 $x=\boxed{0}$일 때 성립)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 $\boxed{3}$이다.

112 답 **7**

$3^x>0$, $3^{-x+2}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=3^x+3^{-x+2}\geq 2\sqrt{3^x\times 3^{-x+2}}=2\sqrt{3^2}=6$

등호는 $3^x=3^{-x+2}$, 즉 $x=1$일 때 성립하므로 $p=1$

따라서 $x=1$일 때 주어진 함수의 최솟값은 6이므로

$q=6$

$\therefore p+q=7$

113 답 1) a^m, a^n 2) a^n, a^m

Ⅰ-4 로그함수

pp. 53~61

114 답 1) $\{x|x>2\}$ 2) $\{x|x<4\}$
3) $\{x|x>0\}$ 4) $\{x|x\neq -3$인 모든 실수$\}$
5) $\{x|x<-1$ 또는 $x>3\}$

1) $x-2>0$에서 $x>\boxed{2}$

따라서 정의역은 $\boxed{\{x|x>2\}}$이다.

2) $4-x>0$에서 $x<4$

따라서 정의역은 $\{x|x<4\}$이다.

3) $3x>0$에서 $x>0$

따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$이다.

4) $(x+3)^2>0$에서 $x\neq -3$

따라서 정의역은 $\{x|x\neq -3$인 모든 실수$\}$

5) $x^2-2x-3>0$에서 $(x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$

따라서 정의역은 $\{x|x<-1$ 또는 $x>3\}$이다.

115 답 1) $y=\log_{\frac{1}{3}} x\ (x>0)$
2) $y=\log_5 (x+3)-2\ (x>-3)$
3) $y=3^{\frac{x}{2}}+1$
4) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$

1) 주어진 함수는 집합 $\{x|x$는 실수$\}$에서 집합 $\{y|y>\boxed{0}\}$

으로의 $\boxed{\text{일대일대응}}$이다.

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$에서 $x=\log_{\boxed{\frac{1}{3}}} y$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$\boxed{y=\log_{\frac{1}{3}} x}\ (x>\boxed{0})$

2) 주어진 함수는 집합 $\{x|x$는 실수$\}$에서 집합 $\{y|y>-3\}$

으로의 일대일대응이다.

$y=5^{x+2}-3$에서 $5^{x+2}=y+3$

$x+2=\log_5 (y+3)$

$x=\log_5 (y+3)-2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_5 (x+3)-2\ (x>-3)$

3) 주어진 함수는 집합 $\{x|x>1\}$에서 집합 $\{y|y$는 실수$\}$

로의 일대일대응이다.

$y=2\log_3 (x-1)$에서 $\log_3 (x-1)=\frac{y}{2}$

$x-1=3^{\frac{y}{2}}$, $x=3^{\frac{y}{2}}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=3^{\frac{x}{2}}+1$

4) 주어진 함수는 집합 $\{x|x>0\}$에서 집합 $\{y|y$는 실수$\}$

로의 일대일대응이다.

$y=\log_{\frac{1}{2}} x+3$에서 $\log_{\frac{1}{2}} x=y-3$

$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$

116 답 1) 8 2) $\log_2 3$ 3) -3 4) 16

1) $f(3)=2^3=8$

2) $y=2^x$에서 $x=\log_2 y$이므로

$y=\log_2 x \qquad \therefore g(x)=\log_2 x$

$\therefore g(3)=\log_2 3$

3) $y=2^x$에서 $x=\log_2 y$이므로

$y=\log_2 x \qquad \therefore g(x)=\log_2 x$

$\therefore g\left(\frac{1}{8}\right)=\log_2 \frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$

4) $(f\circ g)(16)=f(g(16))=f(\log_2 16)$

$=f(4)=2^4=16$

[다른 풀이]

4) $f=g^{-1}$이고 $g^{-1}\circ g=I$(I는 항등함수)이므로

$(f\circ g)(16)=(g^{-1}\circ g)(16)=16$

117 답 **7**

$f(2)=\log_a 9+3=5$이므로 $\log_a 9=2$

$a^2=9 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 $f(x)=\log_3 (4x+1)+3$이므로

$f(20)=\log_3 81+3=\log_3 3^4+3=4+3=7$

118 답 **62**

$f(x)=\log_2 \left(1+\frac{1}{x+1}\right)$

$=\log_2 \frac{x+\boxed{2}}{x+1}$

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=\log_2 \frac{3}{2}+\log_2 \frac{\boxed{4}}{3}+\log_2 \frac{\boxed{5}}{\boxed{4}}+\cdots+\log_2 \frac{n+\boxed{2}}{n+\boxed{1}}$

$=\log_2 \left(\frac{3}{2}\times\frac{\boxed{4}}{3}\times\frac{\boxed{5}}{\boxed{4}}\times\cdots\times\frac{n+\boxed{2}}{n+\boxed{1}}\right)$

$=\log_2 \frac{n+\boxed{2}}{2}=5$

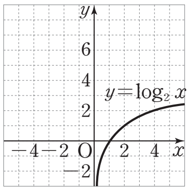
즉, $\frac{n+\boxed{2}}{\boxed{2}}=2^5$이므로 $n+2=\boxed{64}$ $\quad\therefore n=\boxed{62}$

119 답 1) 일대일대응, $\boldsymbol{y=\log_a x}$

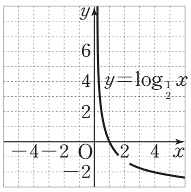
2) 양의 실수 전체, 실수 전체

120 답 해설 참조

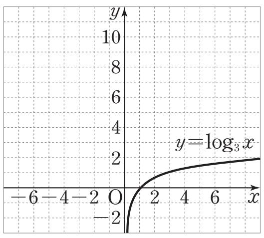
1)



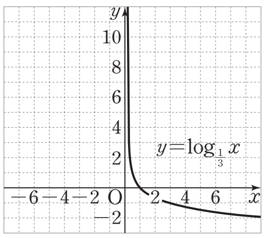
2)



3)



4)



121 답 1) ○ 2) × 3) ○ 4) ○ 5) ×

122 답 1) ○ 2) ○ 3) ○ 4) × 5) ○

123 답 $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

$\overline{OA}=\log_3 \boxed{a}$, $\overline{OB}=\log_3 \boxed{2}$이므로

$\overline{AB}=\overline{OA}-\overline{OB}=\log_3 \boxed{a}-\log_3 \boxed{2}=\log_3 \boxed{\frac{a}{2}}$

즉, $\log_3 \boxed{\frac{a}{2}}=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{a}{2}=\boxed{3^{\frac{1}{2}}}=\boxed{\sqrt{3}}$

$\therefore a=\boxed{2\sqrt{3}}$

124 답 **5**

$\log_2 x=\log_3 x \quad \therefore x=1$

$\therefore A(1, 0)$

$\log_2 x=2$이면 $x=2^2=4$

$\log_3 x=2$이면 $x=3^2=9$

$B(4, 2)$, $C(9, 2) \quad \therefore \overline{BC}=5$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times5\times2=5$

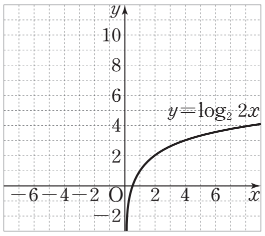
125 답 1) 양의 실수 전체, 실수 전체

2) $\boldsymbol{a>1,\ 0<a<1}$

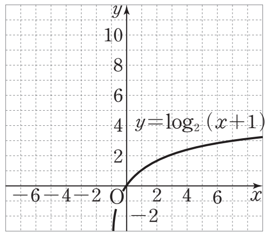
3) $\boldsymbol{(1, 0)}$, $\boldsymbol{y}$축 $\boldsymbol{(x=0)}$

126 답 해설 참조

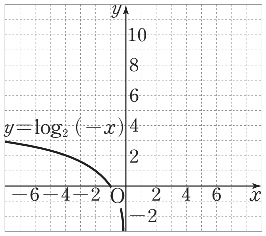
1)



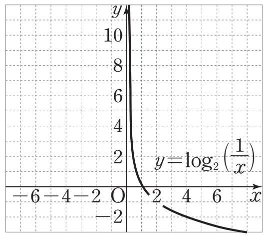
2)



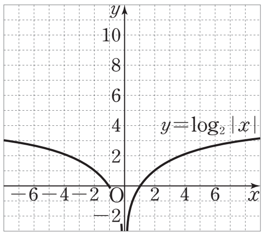
3)



4)



5)



127 답 1) ○ 2) × 3) ○ 4) ×

128 답 $\boldsymbol{y=-\log_2 (x+2)+3}$

$y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\log_2 x$이므로 $y=-\log_2 x$

이 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y-3=-\log_2 (x+2)$

$\therefore y=-\log_2 (x+2)+3$

129 답 $\boldsymbol{-3}$

$y=\log_{\frac{1}{2}} 5x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y+1=\log_{\frac{1}{2}} 5(x-2)$이므로

$y=\log_{\frac{1}{2}} 5(x-2)-1$

$\quad=\log_{2^{-1}} 5(x-2)-1$

$\quad=-\log_2 5(x-2)-1$

이 함수의 그래프가 $y=-\log_2 5(x+a)+b$의 그래프와 일치하므로 $a=-2$, $b=-1$

$\therefore a+b=-3$

130 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. $y=5^x+3$, 즉 $5^x=y-3$에서 로그의 정의에 의하여

$x=\log_5(y-3)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_5(x-3)$

따라서 지수함수 $y=5^x+3$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. 로그함수 $y=\log_5(x-2)+1$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\log_{\sqrt{5}} x-3=2\log_5 x-3$이므로

로그함수 $y=\log_{\sqrt{5}} x-3$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여도 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=\log_{\frac{1}{5}}(x+2)-4=\log_{5^{-1}}(x+2)-4$

$=-\log_5(x+2)-4$

이므로 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}(x+2)-4$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 평행이동이나 대칭이동으로 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

131 답 1) $\log_a(x-m)+n$ 2) $-\log_a x$ 3) $\log_a(-x)$ 4) $-\log_a(-x)$ 5) a^x

132 답 1) $\log_2 10>\log_2 6$ 2) $\log_3 5<-\log_3\frac{1}{6}$ 3) $\log_{\frac{1}{5}} 4<\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{10}$ 4) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{7}<-\log_{\frac{1}{3}} 8$

1) 함수 $y=\log_2 x$는 밑이 2이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 $\boxed{증가}$한다.

$10 > 6$이므로 $\log_2 10 > \log_2 6$

2) $-\log_3\frac{1}{6}=\log_3\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}=\log_3 6$

함수 $y=\log_3 x$는 밑이 3이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. $5<6$이므로

$\log_3 5<\log_3 6 \quad \therefore \log_3 5<-\log_3\frac{1}{6}$

3) 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$는 밑이 $\frac{1}{5}$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

$4>\frac{1}{10}$이므로 $\log_{\frac{1}{5}} 4<\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{10}$

4) $-\log_{\frac{1}{3}} 8=\log_{\frac{1}{3}} 8^{-1}=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{8}$

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 밑이 $\frac{1}{3}$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. $\frac{1}{7}>\frac{1}{8}$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{7}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{8} \quad \therefore \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{7}<-\log_{\frac{1}{3}} 8$

133 답 1) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{10}$, $\log_{\frac{1}{3}} 3$, $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{7}$
2) $\log_2\sqrt{8}$, $\log_2 3$, $\log_2 8$
3) $2\log_5 2$, $\frac{1}{2}\log_5 75$, $3\log_5 4$

1) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 밑이 $\frac{1}{3}$이므로

x의 값이 증가하면 y의 값은 $\boxed{감소}$한다.

$\sqrt{7} < 3=\sqrt{9} < \sqrt{10}$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{10} < \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{9} < \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{7}$

따라서 작은 것부터 나열하면

$\boxed{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{10},\ \log_{\frac{1}{3}} 3,\ \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{7}}$

2) $\log_2 3=\log_2\sqrt{9}$, $\log_2 8=\log_2\sqrt{64}$

함수 $y=\log_2 x$는 밑이 2이므로

x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$\sqrt{8}<3=\sqrt{9}<8=\sqrt{64}$이므로

$\log_2\sqrt{8}<\log_2\sqrt{9}<\log_2\sqrt{64}$

따라서 작은 것부터 나열하면

$\log_2\sqrt{8}$, $\log_2 3$, $\log_2 8$

3) $2\log_5 2=\log_5 2^2=\log_5 4$, $3\log_5 4=\log_5 4^3=\log_5 64$,

$\frac{1}{2}\log_5 75=\log_5\sqrt{75}$

함수 $y=\log_5 x$는 밑이 5이므로

x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$4<\sqrt{75}<64$이므로

$\log_5 4<\log_5\sqrt{75}<\log_5 64$

따라서 작은 것부터 나열하면

$2\log_5 2$, $\frac{1}{2}\log_5 75$, $3\log_5 4$

134 답 1) $a>1$ 2) $0<a<1$

135 답 1) 최댓값 : 6, 최솟값 : 1
2) 최댓값 : 2, 최솟값 : -3
3) 최댓값 : 5, 최솟값 : 2
4) 최댓값 : -1, 최솟값 : $\log_{\frac{1}{3}} 7$

1) $y=\log_2 x$는 밑이 2이므로

$x=64$일 때, 최댓값은 $\log_2 64=6$

$x=2$일 때, 최솟값은 $\log_2 2=1$

2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 밑이 $\frac{1}{3}$이므로

$x=\frac{1}{9}$일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}=2$

$x=27$일 때, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{3}} 27=-3$

3) $y=\log_2(x-1)$은 밑이 2이므로

$x=33$일 때, 최댓값은 $\log_2 32=5$

$x=5$일 때, 최솟값은 $\log_2 4=2$

4) $y=\log_{\frac{1}{3}}(3x+1)$은 밑이 $\frac{1}{3}$이므로

$x=\frac{2}{3}$일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}}3=-1$

$x=2$일 때, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{3}}7$

136 답 1) 최댓값 : $\log_2 5$, 최솟값 : 0

2) 최댓값 : $2\log_3 5$, 최솟값 : 2

3) 최댓값 : 0, 최솟값 : $\log_{\frac{1}{3}}33$

1) $f(x)=x^2-6x+10=(x-\boxed{3})^2+\boxed{1}$로 놓으면

$2\le x\le 5$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(\boxed{3})=1$,

최댓값은 $f(\boxed{5})=\boxed{5}$이다.

$y=\log_2(x^2-6x+10)=\log_2 f(x)$의 밑이 2이므로

$f(\boxed{5})=\boxed{5}$일 때, 최댓값은 $\log_2\boxed{5}$

$f(\boxed{3})=1$일 때, 최솟값은 $\log_2\boxed{1}=\boxed{0}$

2) $f(x)=-x^2+10x=-(x-5)^2+25$로 놓으면

$1\le x\le 7$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=9$,

최댓값은 $f(5)=25$이다.

$y=\log_3(-x^2+10x)=\log_3 f(x)$의 밑이 3이므로

$f(5)=25$일 때, 최댓값은 $\log_3 25=2\log_3 5$

$f(1)=9$일 때, 최솟값은 $\log_3 9=2$

3) $f(x)=2x^2+8x+9=2(x+2)^2+1$로 놓으면

$-2\le x\le 2$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(-2)=1$,

최댓값은 $f(2)=33$이다.

$y=\log_{\frac{1}{3}}(2x^2+8x+9)=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$의 밑이 $\frac{1}{3}$이므로

$f(-2)=1$일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}}1=0$

$f(2)=33$일 때, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{3}}33$

137 답 1) 최댓값 : 7, 최솟값 : 3

2) 최댓값 : 4, 최솟값 : 0

3) 최댓값 : 0, 최솟값 : -6

1) $1\le x\le 8$에서 로그의 밑이 2이므로

$\log_2 1 \le \log_2 x \le \log_2 8$

$\log_2 x=t$로 치환하면 $\boxed{0}\le t\le\boxed{3}$

이때, 주어진 함수는

$y=t^2-2t+4=(t-\boxed{1})^2+\boxed{3}$

따라서 $t=\boxed{3}$, 즉 $x=\boxed{8}$일 때 최댓값은 $\boxed{7}$,

$t=\boxed{1}$, 즉 $x=\boxed{2}$일 때 최솟값은 $\boxed{3}$이다.

2) $y=-(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+\log_{\frac{1}{2}}x^2+3$

$=-(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+2\log_{\frac{1}{2}}x+3$

$\frac{1}{4}\le x\le 2$에서 로그의 밑이 $\frac{1}{2}$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}2\le\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 치환하면 $-1\le t\le 2$

이때, 주어진 함수는

$y=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4$

따라서 $t=1$, 즉 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 4,

$t=-1$, 즉 $x=2$일 때 최솟값은 0이다.

3) $y=6(\log_3 x)^2-3\log_{\sqrt{3}}x^2=6(\log_3 x)^2-12\log_3 x$

$3\le x\le 9$에서 로그의 밑이 3이므로

$\log_3 3\le\log_3 x\le\log_3 9$

$\log_3 x=t$로 치환하면 $1\le t\le 2$

이때, 주어진 함수는 $y=6t^2-12t=6(t-1)^2-6$

따라서 $t=2$, 즉 $x=9$일 때, 최댓값은 0,

$t=1$, 즉 $x=3$일 때, 최솟값은 -6이다.

138 답 4

$x>1$일 때, $\log_3 x>0$, $\log_x 81>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_3 x+\log_x 81\ge\boxed{2}\sqrt{\log_3 x\times\log_x 81}$

$=\boxed{2}\sqrt{\log_x x\times\boxed{4}\log_x 3}$

$=\boxed{4}$

(단, 등호는 $\log_3 x=\boxed{\log_x 81}$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\boxed{4}$이다.

139 답 -2

$\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\frac{2}{y}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}+2y\right)$

$=\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+2y\right)=\log_{\frac{1}{3}}\left(2xy+\frac{2}{xy}+5\right)$

$2xy>0$, $\frac{2}{xy}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2xy+\frac{2}{xy}+5\ge 2\sqrt{2xy\times\frac{2}{xy}}+5=9$

$\left(\text{단, 등호는 } 2xy=\frac{2}{xy}\text{일 때 성립}\right)$

이때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 밑이 $\frac{1}{3}$로 x의 값이 증가할 때,

y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{3}}\left(x+\frac{2}{y}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}+2y\right)$

$=\log_{\frac{1}{3}}\left(2xy+\frac{2}{xy}+5\right)\le\log_{\frac{1}{3}}9=-2$

따라서 구하는 최댓값은 -2이다.

140 답 1) $\log_a m$, $\log_a n$ 2) $\log_a n$, $\log_a m$

Ⅰ-5 지수방정식과 지수부등식

pp. 62~70

141 답 1) $x=\frac{5}{3}$ 2) $x=-3$ 3) $x=-\frac{1}{2}$ 4) $x=\frac{5}{2}$

1) $27^x=243$에서 $3^{3x}=3^5$이므로

$3x=5 \qquad \therefore x=\frac{5}{3}$

2) $3^{x+1}=\frac{1}{9}$에서 $3^{x+1}=3^{-2}$이므로

$x+1=-2 \qquad \therefore x=-3$

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=2$에서 $2^{-2x}=2$이므로

$-2x=1 \qquad \therefore x=-\frac{1}{2}$

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}=3\sqrt{3}$에서 $3^{x-1}=3^{\frac{3}{2}}$이므로

$x-1=\frac{3}{2} \qquad \therefore x=\frac{5}{2}$

142 답 1) $x=0$ 2) $x=-1$
3) $x=0$ 또는 $x=2$
4) $x=-2$ 또는 $x=3$

1) $9^{x+2}=27\times3^{x+1}$에서 $3^{\boxed{2}x+4}=3^{x+\boxed{4}}$이므로

$\boxed{2}x+4=x+\boxed{4} \qquad \therefore x=\boxed{0}$

2) $5^x=(0.2)^{x+2}$에서 $5^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}$

$5^x=5^{-x-2}$이므로

$x=-x-2 \qquad \therefore x=-1$

3) $3^{x^2-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x}$에서 $3^{x^2-1}=3^{2x-1}$이므로

$x^2-1=2x-1$

$x^2-2x=0,\ x(x-2)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

4) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-5x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-6}$에서

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-5x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-4x+6}$이므로

$x^2-5x=-4x+6$

$x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

143 답 1) $x=0$ 2) $x=1$ 또는 $x=2$
3) $x=-1$ 또는 $x=-3$

1) $2^{2x}=(\boxed{2^x})^2$이므로 $\boxed{2^x}=t\,(t>0)$로 놓으면

주어진 방정식은 $t^2+\boxed{3}t-\boxed{4}=0$

$(t+\boxed{4})(t-\boxed{1})=0 \qquad \therefore t=\boxed{1}\ (\because t>0)$

따라서 $2^x=\boxed{1}$이므로 $x=\boxed{0}$

2) $9^x=(3^x)^2$이므로 $3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

주어진 방정식은 $t^2-12t+27=0$

$(t-3)(t-9)=0 \qquad \therefore t=3$ 또는 $t=9$

따라서 $3^x=3$ 또는 $3^x=9=3^2$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\,(t>0)$로 놓으면

주어진 방정식은 $t^2-10t+16=0$

$(t-2)(t-8)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=8$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ 또는 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=8=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

이므로 $x=-1$ 또는 $x=-3$

144 답 1) $x=0$ 2) $x=0$ 또는 $x=2$
3) $x=\frac{1}{2}$

1) $2^{-x}=\frac{1}{2^x}$이므로 $\boxed{2^x}=t\,(t>0)$로 놓으면

주어진 방정식은 $t+\boxed{\frac{1}{t}}=2$에서 $t^2-2t+\boxed{1}=0$

$(t-\boxed{1})^2=0 \qquad \therefore t=\boxed{1}$

따라서 $\boxed{2^x}=1$이므로 $x=\boxed{0}$

2) $3^{2-x}=\frac{9}{3^x}$이므로 $3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

주어진 방정식은 $t+\frac{9}{t}=10$에서 $t^2-10t+9=0$

$(t-1)(t-9)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=9$

$3^x=1$ 또는 $3^x=9$이므로 $x=0$ 또는 $x=2$

3) $5^{-x}=\frac{1}{5^x}$이므로 $5^x=t\,(t>0)$로 놓으면

주어진 방정식은 $t-\frac{\sqrt{5}}{t}+1-\sqrt{5}=0$

$t^2+(1-\sqrt{5})t-\sqrt{5}=0$

$(t+1)(t-\sqrt{5})=0$

$\therefore t=\sqrt{5}\ (\because t>0)$

따라서 $5^x=\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$이므로 $x=\frac{1}{2}$

145 답 1) $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, $f(x)=g(x)$
2) a^x, t

146 답 1) $x=1$ 또는 $x=3$ 2) $x=1$ 또는 $x=5$
3) $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

1) $x^{4x-1}=x^{x+8}$에서 $\boxed{밑}$이 같으므로

(i) $\boxed{지수}$가 같을 때, $4x-1=x+8$

$\therefore x=\boxed{3}$

(ii) 밑이 $\boxed{1}$일 때, 즉 $x=\boxed{1}$일 때,

주어진 방정식은 성립한다.

$\therefore x=\boxed{1}$ 또는 $x=\boxed{3}$

2) $x^{2x}=x^{x+5}$에서 밑이 같으므로

(i) 지수가 같을 때,

$2x=x+5 \quad \therefore x=5$

(ii) 밑이 1일 때, 즉 $x=1$일 때,

주어진 방정식은 성립한다.

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

3) $(x+2)^{x^2}=(x+2)^{3x}$에서 밑이 같으므로

(i) 지수가 같을 때,

$x^2=3x$에서 $x(x-3)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=3$

(ii) 밑이 1일 때, 즉 $x=-1$일 때,

주어진 방정식은 성립한다.

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

147 답 1) $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

2) $\boldsymbol{x=3}$ **또는** $\boldsymbol{x=7}$

1) $(x+1)^x=4^x$에서 $\boxed{\text{지수}}$가 같으므로

(i) $\boxed{\text{밑}}$이 같을 때,

$x+1=4 \quad \therefore x=\boxed{3}$

(ii) 지수가 $\boxed{0}$일 때, 즉 $x=\boxed{0}$일 때,

주어진 방정식은 성립한다.

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

2) $(x-1)^{x-3}=6^{x-3}$에서 지수가 같으므로

(i) 밑이 같을 때,

$x-1=6 \quad \therefore x=7$

(ii) 지수가 0일 때, 즉 $x=3$일 때,

주어진 방정식은 성립한다.

$\therefore x=3$ 또는 $x=7$

148 답 1) **지수,** $\boldsymbol{1}$ 2) **밑,** $\boldsymbol{0}$

149 답 1) $\boldsymbol{x>3}$ 2) $\boldsymbol{x\geq-8}$ 3) $\boldsymbol{x<1}$

1) $729=3^6$에서 $3^{2x}>3^6$

밑이 1보다 크므로 $2x>6$

$\therefore x>3$

2) $64=2^6=\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x+2\geq-6$

$\therefore x\geq-8$

3) $4\times8^x<32$에서 $2^{3x+2}<2^5$

밑이 1보다 크므로 $3x+2<5 \quad \therefore x<1$

150 답 1) $\boldsymbol{x>1}$ 2) $\boldsymbol{x>-3}$ 3) $\boldsymbol{x>-\frac{2}{3}}$

4) $\boldsymbol{x>\frac{5}{4}}$ 5) $\boldsymbol{-1\leq x\leq4}$

1) $4^x>2^{x+1}$에서 $2^{2x}>2^{x+1}$

밑이 1보다 크므로 $2x>x+1 \quad \therefore x>1$

2) $9^x>\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}$에서 $3^{2x}>3^{x-3}$

밑이 1보다 크므로

$2x>x-3 \quad \therefore x>-3$

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2x}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$2x+2>-x \quad \therefore x>-\frac{2}{3}$

4) $0.3^{x+1}<0.027^{-x+2}$에서 $0.027=0.3^3$이므로

$0.3^{x+1}<0.3^{-3x+6}$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x+1>-3x+6$에서

$4x>5 \quad \therefore x>\frac{5}{4}$

5) $64^x\geq(0.25)^{4-x^2}$에서 $0.25=\frac{1}{4}=4^{-1}$이므로

$4^{3x}\geq4^{x^2-4}$

밑이 1보다 크므로 $3x\geq x^2-4$에서

$x^2-3x-4\leq0$

$(x+1)(x-4)\leq0 \quad \therefore -1\leq x\leq4$

151 답 1) $\boldsymbol{0<x<4}$ 2) $\boldsymbol{-3<x<4}$

3) $\boldsymbol{-5<x<4}$ 4) $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{2\leq x\leq3}$

5) $\boldsymbol{-2<x<0}$

1) $1<3^x<3^4$에서 $3^0<3^x<3^4$

밑이 1보다 크므로 $0<x<4$

2) $\frac{1}{8}<2^x<16$에서 $2^{-3}<2^x<2^4$

밑이 1보다 크므로 $-3<x<4$

3) $\frac{1}{81}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<243$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^4<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $-5<x<4$

4) $3^{x+2}\leq3^{x^2}\leq27\times9^x$에서

$3^{x+2}\leq3^{x^2}\leq3^{\boxed{2x+3}}$

밑이 $\boxed{1}$보다 크므로

$x+2\leq x^2\leq\boxed{2x+3}$

(i) $x+2\leq x^2$에서 $x^2-x-2\geq0$

$(x+1)(\boxed{x-2})\geq0$

$\therefore x\leq\boxed{-1}$ 또는 $x\geq\boxed{2}$

(ii) $x^2\leq2x+3$에서 $x^2-2x-3\leq0$

$(\boxed{x+1})(x-3)\leq0 \quad \therefore -1\leq x\leq3$

따라서 (i), (ii)에서 $x=\boxed{-1}$ 또는 $\boxed{2}\leq x\leq3$

5) $4^{x-\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1}<4\times2^{2x}$에서

$2^{2x-1}<2^{-x^2-1}<2^{2x+2}$

밑이 1보다 크므로

$2x-1<-x^2-1<2x+2$

(i) $2x-1<-x^2-1$에서 $x^2+2x<0$

$x(x+2)<0 \qquad \therefore -2<x<0$

(ii) $-x^2-1<2x+2$에서 $x^2+2x+3>0$

그런데 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$이므로 이 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

따라서 (i), (ii)에서 $-2<x<0$

152 답 1) $\boldsymbol{x>1}$ 2) $\boldsymbol{-1\le x\le 0}$ 3) $\boldsymbol{x>1}$ 4) $\boldsymbol{-1\le x\le 1}$

1) $\boxed{5}^{2x}-4\times5^x-5>0$에서

$(\boxed{5^x})^2-4\times\boxed{5^x}-5>0$

$\boxed{5^x}=t\ (t>0)$로 치환하면

$t^2-\boxed{4}\,t-5>0$

$(t+1)(t-\boxed{5})>0 \qquad \therefore t<-1$ 또는 $t>\boxed{5}$

그런데 $t>0$이므로 $t>\boxed{5}$

따라서 $\boxed{5^x}>5$이고 밑이 1보다 크므로

$x>\boxed{1}$

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-3\left(\frac{1}{2}\right)^x+2\le0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\,(t>0)$로 치환하면 $t^2-3t+2\le0$

$(t-1)(t-2)\le0 \qquad \therefore 1\le t\le2$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^0\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$이고 밑이 1보다 작은 양수이므로 $-1\le x\le0$

3) $2\times9^x+3^{x+1}-27>0$에서

$2\times(3^x)^2+3\times3^x-27>0$

$3^x=t\,(t>0)$로 치환하면 $2t^2+3t-27>0$

$(2t+9)(t-3)>0$

$\therefore t<-\frac{9}{2}$ 또는 $t>3$

그런데 $t>0$이므로 $t>3$

따라서 $3^x>3$이고 밑이 1보다 크므로 $x>1$

4) $7^{2x+1}-50\times7^x+7\le0$에서

$7\times(7^x)^2-50\times7^x+7\le0$

$7^x=t\ (t>0)$로 치환하면 $7t^2-50t+7\le0$

$(7t-1)(t-7)\le0 \qquad \therefore \frac{1}{7}\le t\le7$

따라서 $7^{-1}\le7^x\le7^1$이고 밑이 1보다 크므로

$-1\le x\le1$

153 답 1) 밑, ① $\boldsymbol{a>1}$ ② $\boldsymbol{0<a<1}$

2) ① $\boldsymbol{a>1}$ ② $\boldsymbol{0<a<1}$

3) $\boldsymbol{a^x}$

154 답 1) $\boldsymbol{0<x\le1}$ 또는 $\boldsymbol{x\ge3}$ 2) $\boldsymbol{1<x<2}$

3) $\boldsymbol{1\le x\le5}$ 4) $\boldsymbol{x>1}$

1) $x^{x-2}\ge x^{-2x+7}$에서

(i) $x>\boxed{1}$일 때,

$x-2\ge-2x+7$에서 $x\ge\boxed{3}$

$\therefore x\ge\boxed{3}$

(ii) $0<x<\boxed{1}$일 때,

$x-2\,\le\,-2x+7$에서 $x\,\le\,3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<\boxed{1}$

(iii) $x=\boxed{1}$일 때,

$1^{-1}=1^5=1$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

$\therefore x=\boxed{1}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $0<x\le\boxed{1}$ 또는 $x\ge\boxed{3}$

2) $x^{3x-1}<x^{x+3}$에서

(i) $x>1$일 때,

$3x-1<x+3$에서 $x<2 \qquad \therefore 1<x<2$

(ii) $0<x<1$일 때,

$3x-1>x+3$에서 $x>2$

그런데 $0<x<1$이므로 해는 없다.

(iii) $x=1$일 때,

$1^2=1^4=1$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $1<x<2$

3) $x^{x^2-1}\le x^{3x+9}$에서

(i) $x>1$일 때,

$x^2-1\le3x+9$에서 $x^2-3x-10\le0$

$(x+2)(x-5)\le0$

$\therefore -2\le x\le5$

그런데 $x>1$이므로 $1<x\le5$

(ii) $0<x<1$일 때,

$x^2-1\ge3x+9$에서 $x^2-3x-10\ge0$

$(x+2)(x-5)\ge0$

$\therefore x\le-2$ 또는 $x\ge5$

그런데 $0<x<1$이므로 해는 없다.

(iii) $x=1$일 때,

$1^0=1^{12}=1$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

$\therefore x=1$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $1\le x\le 5$

4) $x^{x(x+1)}>x^{-3(x+1)}$에서

(i) $x>1$일 때,

$x(x+1)>-3(x+1)$에서 $x^2+4x+3>0$

$(x+3)(x+1)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>-1$

그런데 $x>1$이므로 $x>1$

(ii) $0<x<1$일 때,

$x(x+1)<-3(x+1)$에서 $x^2+4x+3<0$

$(x+3)(x+1)<0$

$\therefore -3<x<-1$

그런데 $0<x<1$이므로 해는 없다.

(iii) $x=1$일 때,

$1^2=1^{-6}$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $x>1$

155 답 **(밑)>1, 0<(밑)<1, (밑)=1, 합집합**

156 답 **1) 62 2) 7**

1) $4^x-2^{x+3}+1=0$에서

$(\boxed{2^x})^2-8\times 2^x+1=0$

$\boxed{2^x}=t\,(t>0)$로 치환하면

$t^2-8t+1=0$ ...... ㉠

지수방정식 $4^x-2^{x+3}+1=0$의 두 근이 α, β이므로

방정식 ㉠의 두 근은 $\boxed{2^\alpha}$, $\boxed{2^\beta}$이다.

㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha+2^\beta=\boxed{8}$, $2^\alpha\times 2^\beta=\boxed{1}$

$\therefore 2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(\boxed{2^\alpha+2^\beta})^2-2\times 2^\alpha\times 2^\beta$

$=\boxed{8}^2-2\times\boxed{1}=\boxed{62}$

2) $2^{2x+1}-2^{x+1}-6=0$에서 $2\times(2^x)^2-2\times 2^x-6=0$

$2^x=t\,(t>0)$로 치환하면

$2t^2-2t-6=0$

$\therefore t^2-t-3=0$ ...... ㉠

지수방정식 $2^{2x+1}-2^{x+1}-6=0$의 두 근이 α, β이므로

방정식 ㉠의 두 근은 2^α, 2^β이다.

㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha+2^\beta=1$, $2^\alpha\times 2^\beta=-3$

$\therefore 2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(2^\alpha+2^\beta)^2-2\times 2^\alpha\times 2^\beta$

$=1^2-2\times(-3)=7$

157 답 $\mathbf{0<k<\frac{9}{4}}$

$9^x-3^{x+1}+k=0$에서

$(3^x)^2-\boxed{3}\times 3^x+k=0$ ...... ㉠

$3^x=t\,(t>0)$로 치환하면

$t^2-\boxed{3}\,t+k=0$ ...... ㉡

㉠이 서로 다른 두 실근을 갖는다면 ㉡은 서로 다른 두

$\boxed{\text{양의 실근}}$을 가져야 하므로

(i) $t^2-\boxed{3}\,t+k=0$의 판별식을 D라고 할 때,

$D=(\boxed{-3})^2-4\times k>0$ $\therefore k<\boxed{\frac{9}{4}}$

(ii) (두 근의 합)$=\boxed{3}>0$

(iii) (두 근의 곱)$=\boxed{k}>0$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $\boxed{0<k<\frac{9}{4}}$

158 답 **1, 2**

$16^x-15\times 4^x-16\le 0$에서

$(4^x)^2-15\times 4^x-16\le 0$

$4^x=t\,(t>0)$로 치환하면

$(t+1)(t-16)\le 0$ $\therefore -1\le t\le 16$

그런데 $t>0$이므로 $0<t\le 16$

따라서 $0<4^x\le 4^2$이고 밑이 1보다 크므로 $0<x\le 2$로

모든 정수 x의 값은 1, 2이다.

159 답 **49**

$7n$일 후의 방사성 물질의 양은 처음의 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로

$\frac{1}{128}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{7}}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{7}}$ $\therefore n=\boxed{7}$

따라서 방사성 물질의 양이 처음의 $\frac{1}{128}$로 줄어드는 데

걸리는 시간은 $7\times\boxed{7}=\boxed{49}$(일)이다.

160 답 **5시간 후**

20마리의 박테리아가 3시간 후에 1280마리가 되었으므로

$20\times a^3=1280$

$a^3=\frac{1280}{20}=64=4^3$ $\therefore a=4$

50마리의 박테리아가 x시간 후 51200마리가 되었다면

$50\times 4^x=51200$

$4^x=\frac{51200}{50}=1024=4^5$ $\therefore x=5$

따라서 51200마리가 되는 것은 5시간 후이다.

161 답 2시간

x시간 경과 후 A박테리아의 수 : $2\times\boxed{2^x}$ 마리

x시간 경과 후 B박테리아의 수 : $1\times\boxed{8^x}$ 마리

두 배양기의 박테리아의 수의 합이 72마리 이상이므로

$2\times\boxed{2^x}+\boxed{8^x}\ge72$

이때, $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$\boxed{2t+t^3}\ge72$

$\boxed{t^3+2t-72}\ge0$

$$\begin{array}{c|cccc} \boxed{4} & 1 & 0 & 2 & -72 \\ & & \boxed{4} & \boxed{16} & \boxed{72} \\ \hline & 1 & \boxed{4} & \boxed{18} & \boxed{0} \end{array}$$

$(t-\boxed{4})(t^2+4t+18)\ge0$이고

$t^2+4t+18=(\boxed{t+2})^2+14\ (>)\ 0$이므로

$t-4\ (\ge)\ 0 \qquad \therefore t\ (\ge)\ 4$

즉, $2^x\ge4=2^{\boxed{2}}$이므로 $x\ge\boxed{2}$

따라서 최소 $\boxed{2}$ 시간이 경과한 것이다.

162 답 1) a^{α}, a^{β} 2) $a\times p^x$

Ⅰ-6 로그방정식과 로그부등식

pp. 71~81

163 답 1) $x=\sqrt{5}$ 2) $x=8$ 3) $x=\dfrac{11}{2}$ 4) $x=1$

1) 진수 조건에서 $\boxed{x>0}$ …… ㉠

$\log_5 x=\dfrac{1}{2}$에서 $x=\boxed{5}^{\frac{1}{2}}=\boxed{\sqrt{5}}$

따라서 $x=\boxed{\sqrt{5}}$는 ㉠을 만족하므로 주어진 방정식의 해이다.

2) 밑 조건에서 $x>0$, $x\ne1$ …… ㉠

$\log_x 64=2$에서 $x^2=64$

$\therefore x=-8$ 또는 $x=8$

㉠에 의하여 $x=8$

3) 진수 조건에서 $2x-1>0 \qquad \therefore x>\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

$\log(2x-1)=1$에서 $2x-1=10 \qquad \therefore x=\dfrac{11}{2}$

따라서 $x=\dfrac{11}{2}$은 ㉠을 만족하므로 주어진 방정식의 해이다.

4) 진수 조건에서 $x+3>0 \qquad \therefore x>-3$ …… ㉠

$\log_{\sqrt{2}}(x+3)=4$에서 $x+3=(\sqrt{2})^4=4 \qquad \therefore x=1$

따라서 $x=1$은 ㉠을 만족하므로 주어진 방정식의 해이다.

164 답 1) $x=1$ 2) $x=1$ 3) $x=\dfrac{4}{3}$

1) 진수 조건에서 $x+6\ (>)\ 0$이고 $8-x\ (>)\ 0$

$\therefore \boxed{-6<x<8}$ …… ㉠

$\log_3(x+6)=\log_3(8-x)$에서

$x+6=\boxed{8-x} \qquad \therefore x=\boxed{1}$

따라서 $x=\boxed{1}$은 ㉠을 만족하므로 주어진 방정식의 해이다.

2) 진수 조건에서 $x+4>0$이고 $6-x>0$

$\therefore -4<x<6$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x+4)=\log_{\frac{1}{2}}(6-x)$에서

$x+4=6-x \qquad \therefore x=1$

따라서 $x=1$은 ㉠을 만족하므로 주어진 방정식의 해이다.

3) 진수 조건에서 $3x-1>0$이고 $18x-15>0$

$\therefore x>\dfrac{5}{6}$ …… ㉠

$2\log_5(3x-1)=\log_5(18x-15)$에서

$\log_5(3x-1)^2=\log_5(18x-15)$이므로

$(3x-1)^2=18x-15$

$9x^2-24x+16=0$

$(3x-4)^2=0 \qquad \therefore x=\dfrac{4}{3}$

따라서 $x=\dfrac{4}{3}$는 ㉠을 만족하므로 주어진 방정식의 해이다.

165 답 1) $x=9$ 2) $x=0$ 3) $x=4$ 4) $x=5$

1) 진수 조건에서 $2x+3>0$이고 $x-2>0$

$\therefore x>\boxed{2}$ …… ㉠

$\log_5(2x+3)=\log_5 3+\log_5(x-2)$에서

$\log_5(2x+3)=\log_5\boxed{3(x-2)}$

$2x+3=3x-6 \qquad \therefore x=\boxed{9}$

㉠에 의하여 $x=\boxed{9}$

2) 진수 조건에서 $x+3>0$이고 $x+1>0$

$\therefore x>-1$ …… ㉠

$\log_3(x+3)+\log_3(x+1)=1$에서

$\log_3(x+3)(x+1)=\log_3 3$

$(x+3)(x+1)=3$

$x^2+4x=0$

$x(x+4)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=-4$

㉠에 의하여 $x=0$

3) 진수 조건에서 $x-1>0$이고 $x+5>0$

$\therefore x>1$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x+5)$에서

$2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(x+5)$

$(x-1)^2=x+5$

$x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=4$

㉠에 의하여 $x=4$

4) 진수 조건에서 $x+1>0$이고 $x+4>0$

$\therefore x>-1$ …… ㉠

$2\log_2(x+1)=\log_2(x+4)+2$에서

$\log_2(x+1)^2=\log_2(x+4)+\log_2 4$

$(x+1)^2=4(x+4)$

$x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

㉠에 의하여 $x=5$

166 답 1) $x=2$ 2) $x=0$

1) 진수 조건에서 $x+4>0$이고 $\boxed{8-x>0}$이므로

$\boxed{-4}<x<\boxed{8}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x+4)=-\log_3(8-x)$에서

$-\log_3(x+4)=-\log_3(8-x)$

$\boxed{x+4}=8-x$ $\quad\therefore x=\boxed{2}$

따라서 $x=\boxed{2}$는 ㉠을 만족하는 주어진 방정식의 해이다.

2) 진수 조건에서 $x+2>0$이고 $x+1>0$이므로

$x>-1$ …… ㉠

$\log_{\sqrt{2}}(x+2)=\log_2(x+1)+2$에서

$2\log_2(x+2)=\log_2(x+1)+\log_2 4$

$(x+2)^2=4(x+1)$

$x^2=0$ $\quad\therefore x=0$

따라서 $x=0$은 ㉠을 만족하는 주어진 방정식의 해이다.

167 답 $x=-3$ 또는 $x=4$

밑 조건에서

$x^2-1>0$, $x^2-1\neq1$, $x+11>0$, $x+11\neq1$이므로

$x>1$ 또는 $\boxed{-11}<x<-1$이고, $x\neq\pm\sqrt{2}$, $x\neq-10$

…… ㉠

이때, 진수가 2로 같으므로 $x^2-1=x+11$에서

$\boxed{x^2-x-12}=0$

$(x+3)(\boxed{x-4})=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $\boxed{x=4}$

㉠에 의하여 $\boxed{x=-3 \text{ 또는 } x=4}$

168 답 1) $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=2$

2) $x=\frac{1}{243}$ 또는 $x=27$

3) $x=2$ 또는 $x=8$

4) $x=\frac{1}{9}$ 또는 $x=3$

1) $(\log_2 x)^2+\log_2 x-2=0$에서

$\log_2 x=t$로 치환하면

$\boxed{t^2+t-2}=0$이므로 $(\boxed{t+2})(t-1)=0$

$\therefore t=\boxed{-2}$ 또는 $t=\boxed{1}$

따라서 $\log_2 x=\boxed{-2}$ 또는 $\log_2 x=\boxed{1}$이므로

$\boxed{x=\frac{1}{4}}$ 또는 $\boxed{x=2}$

2) $(\log_3 x)^2+2\log_3 x-15=0$에서

$\log_3 x=t$로 치환하면

$t^2+2t-15=0$이므로

$(t+5)(t-3)=0$

$\therefore t=-5$ 또는 $t=3$

따라서 $\log_3 x=-5$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=\frac{1}{243}$ 또는 $x=27$

3) $(1+\log_2 x)^2-6\log_2 x+2=0$에서

$\log_2 x=t$로 치환하면

$(1+t)^2-6t+2=0$이므로

$t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=2$ 또는 $x=8$

4) $(\log_3 9+\log_3 x)^2-3\log_3 x-6=0$에서

$(2+\log_3 x)^2-3\log_3 x-6=0$

$\log_3 x=t$로 치환하면

$(2+t)^2-3t-6=0$

$t^2+t-2=0$

$(t+2)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

따라서 $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=1$이므로

$x=\frac{1}{9}$ 또는 $x=3$

169 답 1) $x=2$ 또는 $x=16$

2) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=9$

3) $x=\frac{1}{64}$ 또는 $x=8$

4) $x=\frac{1}{100000}$ 또는 $x=100$

1) $\log_2 x+\dfrac{\boxed{4}}{\log_2 x}=5$에서

$\log_2 x=t$로 치환하면 $t+\dfrac{\boxed{4}}{t}-5=0$

양변에 t를 곱하면 $\boxed{t^2-5t+4}=0$

$(t-1)(\boxed{t-4})=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=\boxed{4}$

따라서 $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=\boxed{4}$이므로

$\boxed{x=2}$ 또는 $\boxed{x=16}$

2) $\log_3 x-\dfrac{2}{\log_3 x}=1$에서

$\log_3 x=t$로 치환하면 $t-\dfrac{2}{t}-1=0$

양변에 t를 곱하면 $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

따라서 $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=2$이므로

$x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=9$

3) $(\boxed{\log_2 4}+\log_2 x)(\boxed{\log_2 2}+\log_2 x)=20$에서

$(\boxed{2}+\log_2 x)(\boxed{1}+\log_2 x)=20$이므로

$\log_2 x=t$로 치환하면

$(\boxed{2}+t)(\boxed{1}+t)=20$

$t^2+3t-\boxed{18}=0$

$(t+6)(\boxed{t-3})=0$

$\therefore t=-6$ 또는 $t=\boxed{3}$

따라서 $\log_2 x=-6$ 또는 $\log_2 x=\boxed{3}$이므로

$\boxed{x=\dfrac{1}{64}}$ 또는 $\boxed{x=8}$

4) $(\log 10+\log x)(\log 100+\log x)=12$에서

$(1+\log x)(2+\log x)=12$이므로

$\log x=t$로 치환하면

$(1+t)(2+t)=12$

$t^2+3t-10=0$

$(t+5)(t-2)=0$

$\therefore t=-5$ 또는 $t=2$

따라서 $\log x=-5$ 또는 $\log x=2$이므로

$x=\dfrac{1}{100000}$ 또는 $x=100$

170 답 1) **16** 2) **81**

1) $(\log_2 x)^2-4\log_2 x-3=0$ ······ ㉠

에서 $\boxed{\log_2 x}=t$로 치환하면

$t^2-4t-3=0$ ······ ㉡

㉠의 두 근이 α, β이므로 ㉡의 두 근은

$\boxed{\log_2 \alpha}$, $\boxed{\log_2 \beta}$

㉡의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=\boxed{4}$

$\log_2 \alpha\beta=\boxed{4}$ $\quad\therefore \alpha\beta=\boxed{16}$

2) $(\log_3 3+\log_3 x)^2-6\log_3 x=0$

$(1+\log_3 x)^2-6\log_3 x=0$ ······ ㉠

에서 $\log_3 x=t$로 치환하면 $t^2-4t+1=0$ ······ ㉡

㉠의 두 근이 α, β이므로 ㉡의 두 근은 $\log_3 \alpha$, $\log_3 \beta$

㉡의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 \alpha+\log_3 \beta=4$

$\log_3 \alpha\beta=4$ $\quad\therefore \alpha\beta=81$

171 답 1) $\boldsymbol{f(x)=a^b}$ 2) $\boldsymbol{f(x)=g(x)}$

3) $\boldsymbol{g(x)=h(x), f(x)=1}$ 4) $\boldsymbol{\log_a x}$

172 답 1) $\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=32}$

2) $\boldsymbol{x=3}$ **또는** $\boldsymbol{x=9}$

3) $\boldsymbol{x=\dfrac{1}{625}}$ **또는** $\boldsymbol{x=5}$

1) $x^{\log_2 x}=32x^4$의 양변에 밑이 $\boxed{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\boxed{2}} x^{\log_2 x}=\log_{\boxed{2}} 32x^4$

$\log_2 x\times\log_{\boxed{2}} x=\log_{\boxed{2}} 2^5+4\log_{\boxed{2}} x$

$\boxed{\log_2 x}=t$로 치환하면

$t^2-4t-5=0$

$(t+\boxed{1})(t-\boxed{5})=0$

$\therefore t=\boxed{-1}$ 또는 $t=\boxed{5}$

따라서 $\log_2 x=\boxed{-1}$ 또는 $\log_2 x=\boxed{5}$이므로

$x=\boxed{\dfrac{1}{2}}$ 또는 $x=\boxed{32}$

2) $x^{\log_3 x}=\dfrac{1}{9}x^3$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 \dfrac{1}{9}x^3$

$\log_3 x\times\log_3 x=\log_3 3^{-2}+3\log_3 x$

$\log_3 x=t$로 치환하면

$t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=2$이므로

$x=3$ 또는 $x=9$

3) $x^{\log_5 x}=\dfrac{625}{x^3}$의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$\log_5 x^{\log_5 x}=\log_5 \dfrac{625}{x^3}$

$\log_5 x\times\log_5 x=\log_5 5^4-3\log_5 x$

$\log_5 x=t$로 치환하면

$t^2+3t-4=0$

$(t+4)(t-1)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=1$

따라서 $\log_5 x=-4$ 또는 $\log_5 x=1$이므로

$x=\dfrac{1}{625}$ 또는 $x=5$

173 답 1) $x=\frac{1}{10}$ 2) $x=\frac{1}{36}$

1) $2^{\log 2x}=5^{\log 5x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\boxed{\log 2x}\times\log 2=\boxed{\log 5x}\times\log 5$

$(\log 2+\log x)\log 2=(\log 5+\log x)\log 5$

$(\boxed{\log 2}-\log 5)\log x$

$=(\boxed{\log 5})^2-(\log 2)^2$

$=-(\boxed{\log 2}+\log 5)(\log 2-\boxed{\log 5})$

$\log x=-(\boxed{\log 2}+\log 5)$

$\log x=-\log\boxed{10}=\boxed{\log 10^{-1}}$

$\therefore x=\boxed{\frac{1}{10}}$

2) $3^{\log 9x}=2^{\log 4x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 9x\times\log 3=\log 4x\times\log 2$

$(\log 9+\log x)\log 3=(\log 4+\log x)\log 2$

$(\log 3-\log 2)\log x$

$=2(\log 2)^2-2(\log 3)^2$

$=-2(\log 3-\log 2)(\log 3+\log 2)$

$\log x=-2(\log 3+\log 2)=\log 6^{-2}$

$\therefore x=\frac{1}{36}$

174 답 로그, 치환

175 답 1) $x>1$ 2) $x>\frac{5}{8}$

1) 진수 조건에서 $\boxed{3x}>0$이므로

$x>\boxed{0}$ …… ㉠

$\log_3 3x>\log_3\boxed{3}$에서 밑이 1보다 크므로

$3x>3$ $\therefore x>1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\boxed{x>1}$

2) 진수 조건에서 $2x-1>0$이므로

$x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$에서

밑이 1보다 작은 양수이므로 $2x-1>\frac{1}{4}$

$\therefore x>\frac{5}{8}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x>\frac{5}{8}$

176 답 1) $2<x<6$ 2) $x>5$ 3) $x>-\frac{4}{3}$
4) $-1<x<1$ 5) $1<x<9$

1) 진수 조건에서 $\boxed{3x-2}>0$이고 $\boxed{6-x}>0$이므로

$\boxed{\frac{2}{3}}<x<\boxed{6}$ …… ㉠

$\log(3x-2)>\log(6-x)$에서 밑이 1보다 크므로

$3x-2>6-x$ $\therefore x>\boxed{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boxed{2<x<6}$

2) 진수 조건에서 $x+6>0$이고 $2x+1>0$이므로

$x>-\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x+6)>\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)$에서

밑이 1보다 작은 양수이므로

$x+6<2x+1$ $\therefore x>5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x>5$

3) 진수 조건에서 $\boxed{x+3}>0$이고 $\boxed{x^2+1}>0$이므로

$x>-3$ …… ㉠

$\log_2(x+3)>\log_{\boxed{2^2}}(x^2+1)$에서

양변의 밑을 2로 바꾸면

$\log_2(x+3)>\boxed{\frac{1}{2}}\log_2(x^2+1)$

$\boxed{2}\log_2(x+3)>\log_2(x^2+1)$

$\log_2(x+3)^{\boxed{2}}>\log_2(x^2+1)$

밑이 1보다 크므로 $(x+3)^2>x^2+1$

$\boxed{x^2+6x+9}>x^2+1$

$6x>\boxed{-8}$ $\therefore x>\boxed{-\frac{4}{3}}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boxed{x>-\frac{4}{3}}$

4) 진수 조건에서 $x+1>0$이고 $x+3>0$이므로

$x>-1$ …… ㉠

$\log_{3^{\frac{1}{2}}}(x+1)<\log_3(x+3)$에서

양변의 밑을 3로 바꾸면

$2\log_3(x+1)<\log_3(x+3)$

$\log_3(x+1)^2<\log_3(x+3)$

밑이 1보다 크므로 $(x+1)^2<x+3$

$x^2+2x+1<x+3$

$x^2+x-2<0$

$(x+2)(x-1)<0$

$\therefore -2<x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<x<1$

5) 진수 조건에서 $x^2+8x-9=(x+9)(x-1)>0$이고

$x+3>0$이므로 $x>1$ …… ㉠

$\log_{0.5^2}(x^2+8x-9)>\log_{0.5}(x+3)$에서

양변의 밑을 0.5로 바꾸면

$\frac{1}{2}\log_{0.5}(x^2+8x-9)>\log_{0.5}(x+3)$

$\log_{0.5}(x^2+8x-9)>2\log_{0.5}(x+3)$

$\log_{0.5}(x^2+8x-9)>\log_{0.5}(x+3)^2$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x^2+8x-9<(x+3)^2$

$x^2+8x-9<x^2+6x+9$

$2x<18$ $\therefore x<9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<9$

177 답 1) $\frac{5}{2}<x<3$ 2) $-\frac{7}{4}<x<2$ 3) $-1<x<1$

1) 진수 조건에서 $x-1>0$이고 $\boxed{3-x}>0$이므로

$\boxed{1}<x<\boxed{3}$ …… ㉠

$\log_3(x-1)-\log_3(3-x)-1>0$에서

$\log_3(x-1)>\log_3(3-x)+1$

$\log_3(x-1)>\log_3\boxed{3(3-x)}$

밑이 1보다 크므로 $x-1 > 9-3x$

$\therefore x > \frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boxed{\frac{5}{2}}<x<\boxed{3}$

2) 진수 조건에서 $2-x>0$이고 $x+3>0$이므로

$-3<x<2$ …… ㉠

$\log_3(2-x)<\log_3(x+3)+1$에서

$\log_3(2-x)<\log_3 3(x+3)$

밑이 1보다 크므로

$2-x<3x+9$ $\therefore x>-\frac{7}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-\frac{7}{4}<x<2$

3) 진수 조건에서 $x+1>0$이고 $x+5>0$이므로

$x>-1$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+5)>\log_{\frac{1}{2}}12$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x+5)>\log_{\frac{1}{2}}12$

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x+5)>\log_{\frac{1}{2}}12$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x^2+6x+5<12$

$x^2+6x-7<0$

$(x+7)(x-1)<0$ $\therefore -7<x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<x<1$

178 답 1) $0<x\le\frac{1}{8}$ 또는 $x\ge2$ 2) $\frac{1}{3}<x<9$
3) $0<x<2$ 또는 $x>4$

1) 진수 조건에서 $\boxed{x>0}$ …… ㉠

$\boxed{\log_2 x}=t$로 치환하면 주어진 부등식은

$t^2+2t-3\ge0$에서 $(t+\boxed{3})(t-\boxed{1})\ge0$

$\therefore t\le\boxed{-3}$ 또는 $t\ge\boxed{1}$

즉, $\boxed{\log_2 x}\le\log_2 2^{\boxed{-3}}$ 또는 $\boxed{\log_2 x}\ge\log_2\boxed{2}$

밑이 1보다 크므로

$x\le\boxed{\frac{1}{8}}$ 또는 $x\ge\boxed{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x\le\boxed{\frac{1}{8}}$ 또는 $x\ge\boxed{2}$

2) 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_3 x=t$로 치환하면 주어진 부등식은

$t^2-t-2<0$에서 $(t+1)(t-2)<0$

$\therefore -1<t<2$

즉, $\log_3 3^{-1}<\log_3 x<\log_3 3^2$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{3}<x<9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{3}<x<9$

3) 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_{0.5}x=t$로 치환하면 주어진 부등식은

$t^2+3t+2>0$에서 $(t+2)(t+1)>0$

$\therefore t<-2$ 또는 $t>-1$

즉, $\log_{0.5}x<\log_{0.5}0.5^{-2}$ 또는 $\log_{0.5}x>\log_{0.5}0.5^{-1}$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$x>0.5^{-2}$ 또는 $x<0.5^{-1}$

즉, $x>4$ 또는 $x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x<2$ 또는 $x>4$

179 답 1) $\frac{1}{81}<x<9$ 2) $0<x<1$ 또는 $x>4$

1) 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$(\log_3 27x)\left(\log_3\frac{x}{3}\right)<5$에서

$(\boxed{3}+\log_3 x)(\boxed{-1}+\log_3 x)<5$

$(\log_3 x)^2+\boxed{2}\log_3 x-\boxed{8}<0$

$\log_3 x=t$로 치환하면

$t^2+\boxed{2}t-\boxed{8}<0$

$(t+4)(\boxed{t-2})<0$ $\therefore -4<t<\boxed{2}$

즉, $\log_3 \boxed{3^{-4}} < \log_3 x < \log_3 \boxed{3^2}$

밑이 1보다 크므로 $\boxed{\frac{1}{81}} < x < \boxed{9}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boxed{\frac{1}{81} < x < 9}$

2) 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)\left(\log_2 \frac{x}{4}\right) < 0$에서

$-\log_2 x(\log_2 x - 2) < 0$

$\log_2 x(\log_2 x - 2) > 0$

$\log_2 x = t$로 치환하면

$t(t-2) > 0$

$\therefore t<0$ 또는 $t>2$

즉, $\log_2 x < \log_2 2^0$ 또는 $\log_2 x > \log_2 2^2$

밑이 1보다 크므로

$x<1$ 또는 $x>4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<1$ 또는 $x>4$

180 답 1) $>$, 밑, ① $a>1$, ② $0<a<1$, 공통 범위

2) 진수, $>$, $\log_a x$, 공통 범위

181 답 1) $0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>4$

2) $27<x<3$

1) 진수 조건에서 $x>\boxed{0}$ …… ㉠

$x^{\log_2 x} > 4x$의 양변에 밑이 $\boxed{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\boxed{2}} x^{\log_2 x} > \log_{\boxed{2}} 4x$에서

$(\boxed{\log_2 x})^2 > \boxed{\log_2 x} + 2$

$\boxed{\log_2 x} = t$로 치환하면 $t^2 - t - 2 > 0$

$(t+1)(t-2) > 0$ $\therefore t < \boxed{-1}$ 또는 $t > \boxed{2}$

즉, $\boxed{\log_2 x} < \log_2 2^{-1}$ 또는 $\boxed{\log_2 x} > \log_2 2^2$

밑이 $\boxed{1}$보다 크므로

$x < \frac{1}{2}$ 또는 $x > 4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0 < x < \boxed{\frac{1}{2}}$ 또는 $\boxed{x>4}$

2) 진수 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{3}} x} > \frac{x^2}{27}$의 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}} x^{\log_{\frac{1}{3}} x} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{27}$에서

$\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 < 2\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$로 치환하면

$t^2 - 2t - 3 < 0$

$(t+1)(t-3) < 0$ $\therefore -1 < t < 3$

즉, $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $\frac{1}{27} < x < 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{27} < x < 3$

182 답 1) $1<x\le 8$ 2) $1<x<81$

1) 진수 조건에서 $\log_2 x > 0$, $x>0$이므로

$x > \boxed{1}$ …… ㉠

$\log_3 (\log_2 x) \le 1$에서 $\log_3 (\log_2 x) \le \log_3 \boxed{3}$

밑이 $\boxed{1}$보다 크므로 $\log_2 x \le \boxed{3}$에서

$\log_2 x \le \log_2 \boxed{2^3}$

밑이 1보다 크므로 $x \le \boxed{8}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boxed{1} < x \le \boxed{8}$

2) 진수 조건에서 $\log_3 x > 0$, $x>0$이므로

$x>1$ …… ㉠

$\log_{0.5} (\log_3 x) > -2$에서

$\log_{0.5} (\log_3 x) > \log_{0.5} 0.5^{-2}$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $\log_3 x < 4$에서

$\log_3 x < \log_3 3^4$

밑이 1보다 크므로 $x<81$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x<81$

183 답 진수, 로그, $\log_a x$, 공통 범위

184 답 10^{-5}, 10^7

이차방정식 $x^2 - (\log a + 1)x + (\log a + 9) = 0$의

판별식을 D라고 하면

$D = (\boxed{\log a} + 1)^2 - \boxed{4}(\log a + 9) = 0$

$(\log a)^2 - 2\log a - \boxed{35} = 0$

$\boxed{\log a} = t$로 치환하면

$t^2 - 2t - \boxed{35} = 0$

$(t + \boxed{5})(t - \boxed{7}) = 0$

$\therefore t = \boxed{-5}$ 또는 $t = \boxed{7}$

즉, $\boxed{\log a} = -5$ 또는 $\boxed{\log a} = 7$

$\therefore a = \boxed{10}^{-5}$ 또는 $a = \boxed{10^7}$

185 답 $\frac{1}{4}<a<1024$

이차방정식 $x^2-x\log_2 a+2\log_2 a+5=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(\log_2 a)^2-4(2\log_2 a+5)<0$

$\log_2 a=t$로 치환하면

$t^2-8t-20<0$

$(t+2)(t-10)<0$

$\therefore -2<t<10$

즉, $-2<\log_2 a<10$이므로

$\log_2 2^{-2}<\log_2 a<\log_2 2^{10}$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{4}<a<1024$

186 답 2

방정식 $(\log_5 x)^2-k\log_5 x-6=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha\beta=25$

$\log_5 x=t$로 치환하면 주어진 방정식은

$t^2-kt-6=0$

이 방정식의 두 근은 $\log_5 \alpha$, $\log_5 \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_5 \alpha+\log_5 \beta=k$

$\log_5 \alpha\beta=\log_5 25=2=k$

$\therefore k=2$

187 답 $-12<k<0$

$x^{\log_3 x}>(27x)^k$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}>\log_3 (27x)^k$

$(\log_3 x)^2>\boxed{k}(\boxed{3}+\log_3 x)$

$\log_3 x=t$로 치환하면 $t^2-\boxed{k}t-\boxed{3k}>0$ …… ㉠

양수 x에 대하여 t는 $\boxed{\text{모든 실수}}$이므로

$\boxed{\text{모든 실수}}$ t에 대하여 ㉠이 성립해야 한다.

이차방정식 $t^2-\boxed{k}t-\boxed{3k}=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=k^2-4(\boxed{-3k})=k(k+12)<0$

$\therefore \boxed{-12<k<0}$

188 답 2

$(\log x)^2-k\log x+3-k\geq 0$에서

$\log x=t$로 치환하면

$t^2-kt+3-k\geq 0$ …… ㉠

양수 x에 대하여 t는 모든 실수이므로 모든 실수 t에 대하여 ㉠이 성립해야 한다.

이차방정식 $t^2-kt+3-k=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=k^2-4(3-k)\leq 0$

$k^2+4k-12\leq 0$

$(k+6)(k-2)\leq 0$

$\therefore -6\leq k\leq 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

189 답 20개월 후

처음 상품 생산량을 a라고 하고 매달 4 %씩 증가시킨다고 하면 n개월 후의 상품 생산량은 $a(1+\boxed{0.04})^n$이다.

이것이 처음의 2배가 되려면

$a(1+\boxed{0.04})^n=\boxed{2a}$ …… ㉠

㉠의 양변을 $\boxed{a}$로 나누고 상용로그를 취하면

$\log(1+\boxed{0.04})^n=\boxed{\log 2}$

$\therefore n=\frac{\log \boxed{2}}{\log 1.04}=\frac{\boxed{0.3}}{0.015}=\boxed{20}$

따라서 처음으로 2배가 되는 것은 $\boxed{20}$개월 후이다

190 답 10년 후

n년 후에 A학교의 학생 수가 B학교의 학생 수의 2배 이상이 되려면

$a\times 1.1^n\geq 2\times(a\times 1.02^n)$ …… ㉠

㉠의 양변을 a로 나누고 상용로그를 취하면

$\log 1.1^n\geq \log(2\times 1.02^n)$

$n\log 1.1\geq \log 2+n\log 1.02$

$\therefore n\geq \frac{\log 2}{\log 1.1-\log 1.02}=\frac{0.3010}{0.0414-0.0086}=9.176\cdots$

따라서 A학교의 학생 수가 B학교의 학생 수의 2배 이상이 되는 것은 10년 후부터이다.

191 답 120분 후

$\boxed{20n}$분 후 박테리아의 수는 10×3^n 마리이므로

$10\times 3^n\geq\boxed{10000}$

$3^n\geq 1000$ …… ㉠

㉠의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 3^n\geq \log 1000$

$\boxed{n}\log 3\geq\boxed{3}$

$\therefore n\geq\frac{\boxed{3}}{\log 3}=\frac{\boxed{3}}{0.5}=\boxed{6}$

따라서 박테리아의 수가 10000마리 이상이 되는 것은

$20\times\boxed{6}$분 후, 즉 $\boxed{120}$분 후부터이다.

192 답 1) ① 판별식, 근과 계수의 관계 ② $>$, $\leq$, $>$, $<$

2) 관계식, 상용로그

단원 총정리 문제 I 지수함수와 로그함수

pp. 82~85

01 ③	02 ③	03 ④	04 ①	05 ⑤
06 90	07 51	08 ②	09 ①	10 ⑤
11 ④	12 ⑤	13 7	14 1	15 2
16 ①	17 2	18 1	19 38	20 ①
21 2	22 36	23 6	24 5	25 8
26 8				

01 답 ③

① 125의 세제곱근은 $x^3=125$의 세 근이다.

② 9의 네제곱근은 $x^4=9$의 네 근이다.

④ n이 짝수일 때, 음의 실수 a에 대하여 a의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

⑤ n이 홀수일 때, $x^n=a$를 만족하는 실수 $x=\sqrt[n]{a}$가 존재한다.

02 답 ③

$A=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{6}}=27^{\frac{1}{6}}$

$B=\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{2}{6}}=16^{\frac{1}{6}}$

$C=\sqrt[6]{45}=45^{\frac{1}{6}}$

$\therefore B<A<C$

03 답 ④

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=4$에서 $\frac{1}{5}=4^{\frac{1}{x}}$

$10^y=16$에서 $10=16^{\frac{1}{y}}=4^{\frac{2}{y}}$

$\therefore 4^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}=4^{\frac{1}{x}}\times 4^{\frac{2}{y}}=\frac{1}{5}\times 10=2$

04 답 ①

ㄱ. 밑 조건에서 $a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}>1$

진수 조건에서 $a^2+1\geq 1$

따라서 항상 로그를 정의할 수 있다.

ㄴ. $a=0$일 때, 밑은 $2|a|+1=1$이므로 로그를 정의할 수 없다.

ㄷ. $a=1$일 때, 진수는 $a^2-2a+1=(a-1)^2=0$이므로 로그를 정의할 수 없다.

따라서 항상 로그를 정의할 수 있는 것은 ㄱ뿐이다.

05 답 ⑤

$5^a=2$에서 $a=\log_5 2$, $5^b=3$에서 $b=\log_5 3$이므로

$$\log_6 72=\frac{\log_5 72}{\log_5 6}=\frac{\log_5(2^3\times 3^2)}{\log_5(2\times 3)}$$
$$=\frac{3\log_5 2+2\log_5 3}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{3a+2b}{a+b}$$

06 답 90

$$\frac{1}{\log_3 2}+\frac{1}{\log_5 2}+\frac{1}{\log_6 2}=\log_2 3+\log_2 5+\log_2 6$$
$$=\log_2(3\times 5\times 6)=\log_2 90$$
$$=\frac{1}{\log_{90} 2}=\frac{1}{\log_k 2}$$

$\therefore k=90$

07 답 51

$p=\log_{10}\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{51}{50}\right)=\log_{10} 51$

$\therefore 10^p=10^{\log_{10} 51}=51^{\log_{10} 10}=51$

08 답 ②

$2^a=c$에서 $a=\log_2 c$, $2^b=d$에서 $b=\log_2 d$이므로

ㄱ. $c^b=c^{\log_2 d}=d^{\log_2 c}=d^a$ (참)

ㄴ. $a+b=\log_2 c+\log_2 d=\log_2 cd$ (참)

ㄷ. $\frac{a}{b}=\frac{\log_2 c}{\log_2 d}=\log_d c$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 답 ①

$a=\log_2(\sqrt{2}-1)$에서 로그의 정의에 의하여 $2^a=\sqrt{2}-1$

$2^{-a}=\frac{1}{2^a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}+1$

$\therefore 2^a+2^{-a}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$

10 답 ⑤

ㄱ. $2^x\times 3^y=6^z\times 6^z=36^z$ (참)

ㄴ. $2^z\times 3^{z-y}=\frac{2^z\times 3^z}{3^y}=\frac{6^z}{3^y}=\frac{3^y}{3^y}=1$ (참)

ㄷ. $x+y=1$이므로 $2^x=3^y=3^{1-x}$에서 $6^x=3$

$\therefore x=\log_6 3$

$6^z=2^x=2^{\log_6 3}$의 양변에 밑이 6인 로그를 취하면

$z=\log_6 2^{\log_6 3}=\log_6 2\times\log_6 3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 ④

주어진 식의 분모, 분자에 a^x을 각각 곱하면

$$f(x)=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}$$

$f(\alpha)=2$에서 $\frac{a^{2\alpha}+1}{a^{2\alpha}-1}=2$이므로 $a^{2\alpha}=3$

$f(\beta)=3$에서 $\frac{a^{2\beta}+1}{a^{2\beta}-1}=3$이므로 $a^{2\beta}=2$

$$\therefore f(\alpha+\beta)=\frac{a^{2(\alpha+\beta)}+1}{a^{2(\alpha+\beta)}-1}=\frac{a^{2\alpha+2\beta}+1}{a^{2\alpha+2\beta}-1}$$
$$=\frac{a^{2\alpha}a^{2\beta}+1}{a^{2\alpha}a^{2\beta}-1}=\frac{3\times 2+1}{3\times 2-1}=\frac{7}{5}$$

12 답 ⑤

$f(4)=a^4=\frac{1}{4}$이므로

$f(-8)=a^{-8}=(a^4)^{-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=4^2=16$

13 답 7

함수 $y=2^x$의 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나고

점 $(a, 1)$은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $a=1$

점 (a, b)는 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점이므로

$b=2^a=2^1=2$

점 (b, c)는 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점이므로

$c=2^b=2^2=4$

$\therefore a+b+c=1+2+4=7$

14 답 1

함수 $f(x)=a\times 2^x+b$의 그래프의 점근선의 방정식은

$y=b$이고 이 그래프에서 점근선의 방정식은

$y=-3$이므로 $b=-3$

또, 함수 $f(x)=a\times 2^x-3$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=a\times 2^0-3 \qquad \therefore a=4$

$\therefore a+b=4+(-3)=1$

15 답 2

$y=(2^{x+1}+2^{-x+1})-(4^x+4^{-x})$

$\quad=2(2^x+2^{-x})-(2^x+2^{-x})^2+2$

$2^x+2^{-x}=t$로 치환하면

$y=-t^2+2t+2=-(t-1)^2+3$

그런데 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}=2$

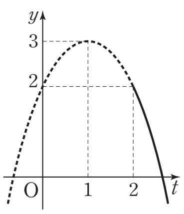
(단, 등호는 $2^x=2^{-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

즉, $t\geq 2$이므로 $y=-(t-1)^2+3$의

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 함수는 $t=2$일 때,

최댓값 2를 갖는다.



16 답 ①

$y=\log_4(x-1)+3$에서

$\log_4(x-1)=y-3$

로그의 정의에 의하여

$x-1=4^{y-3}$에서 $x=(2^2)^{y-3}+1$

x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$y=2^{2x-6}+1$

따라서 $f^{-1}(x)=2^{2x-6}+1$이므로

$f^{-1}(4)=2^2+1=5$

17 답 2

$\mathrm{A}(\log_a 4, \log_a 4)$, $\mathrm{B}(\log_a 4, 0)$, $\mathrm{D}(4, \log_a 4)$,

$\mathrm{C}(4, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_a 4$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=4-\log_a 4$

사각형 ABCD가 정사각형이므로

$\log_a 4=4-\log_a 4$에서

$\log_a 4=2$

$a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

18 답 1

$y=\log_3\frac{2x-8}{27}=\log_3(2x-8)-\log_3 27$

$\quad=\log_3 2(x-4)-\log_3 3^3=\log_3 2(x-4)-3$

함수 $y=\log_3\frac{2x-8}{27}$의 그래프는 함수 $y=\log_3 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로

$f:(x, y)\longrightarrow(x+4, y-3)$

따라서 $a=4$, $b=-3$이므로

$a+b=1$

19 답 38

$y=3(\log_5 x)^2-3\log_{\sqrt{5}} x^2+b$

$\quad=3(\log_5 x)^2-12\log_5 x+b$

$\log_5 x=t$로 치환하면

$y=3t^2-12t+b=3(t-2)^2-12+b$

주어진 함수는 $t=2$, 즉 $x=a$에서 최솟값 1을 가지므로

$t=\log_5 a=2$이고

$-12+b=1 \qquad \therefore a=25, b=13$

$\therefore a+b=38$

20 답 ①

$1<x<2$이므로 $\log_2 1<\log_2 x<\log_2 2$

$\therefore 0<\log_2 x<1$

$A-B=\log_2 x-\log_x 2$

$\quad=\log_2 x-\frac{1}{\log_2 x}$

$\quad=\frac{(\log_2 x)^2-1}{\log_2 x}$

$\quad=\frac{(\log_2 x+1)(\log_2 x-1)}{\log_2 x}<0$

$\therefore A<B$ …… ㉠

$A-C=\log_2 x-(\log_2 x)^3=(\log_2 x)\{1-(\log_2 x)^2\}$

$\quad=(\log_2 x)(1+\log_2 x)(1-\log_2 x)>0$

$\therefore A>C$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$C<A<B$

21 답 **2**

$\left(\frac{4}{9}\right)^{-x^2-2x}<\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}$에서

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2x^2-4x}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-x-2}$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$-2x^2-4x>-x-2$

$2x^2+3x-2<0$

$(x+2)(2x-1)<0$

$\therefore -2<x<\frac{1}{2}$

따라서 정수 x는 -1, 0이므로 구하는 정수 x의 개수는 2이다.

22 답 **36**

방정식 $(\log_2 x)^2+k\log_2 x-3=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha\beta=64$

$\log_2 x=t$로 치환하면 $t^2+kt-3=0$ …… ㉠

㉠의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이고 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=-k$

$\log_2 \alpha\beta=\log_2 64=6=-k \qquad \therefore k=-6$

$\therefore k^2=36$

23 답 **6**

$\frac{1}{9}<x<27$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 \frac{1}{9}<\log_3 x<\log_3 27$에서

$\log_3 3^{-2}<\log_3 x<\log_3 3^3$

$\therefore -2<\log_3 x<3$

$\log_3 x=t$로 치환하면 주어진 부등식은 $t^2+at+b<0$이고, 그 해가 $-2<t<3$이므로

$(t+2)(t-3)<0$에서

$t^2-t-6<0 \qquad \therefore a=-1,\ b=-6$

$\therefore ab=6$

24 답 **5**

$F=-7$을 대입하면 $-7=10\log\frac{B}{A}$이므로

$\log\frac{B}{A}=-\frac{7}{10}$

즉, $\frac{B}{A}=10^{-\frac{7}{10}}=10^{-1}\times 10^{\frac{3}{10}}=\frac{1}{10}\times 2=\frac{1}{5}$

$\therefore B=\frac{1}{5}A$

따라서 벽을 투과한 전파의 세기는 투과하기 전 세기의 $\frac{1}{5}$배이므로 $a=\frac{1}{5}$

$\therefore 25a=5$

25 답 **8**

n년 후 810만 원의 투자 금액의 이익금이 2250만 원 이상이 되므로

$810\times\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{n}{4}}\geq 2250$

$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{n}{4}}\geq\frac{25}{9}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$

밑이 1보다 크므로

$\frac{n}{4}\geq 2 \qquad \therefore n\geq 8$

따라서 최소 8년 후이므로 $n=8$

26 답 **8**

n겹의 차단 필름을 통과한 후 자외선의 양이 처음의 50% 이하가 되어야 하므로

$a\times 0.9^n\leq 0.5a$ …… ㉠

㉠의 양변을 a로 나누고 상용로그를 취하면

$\log 0.9^n\leq\log 0.5$

$n\log\frac{9}{10}\leq\log\frac{1}{2}$

$n(2\log 3-1)\leq -\log 2$

$n(2\times 0.48-1)\leq -0.3$

$0.04n\geq 0.3$

$\therefore n\geq\frac{0.3}{0.04}=7.5$

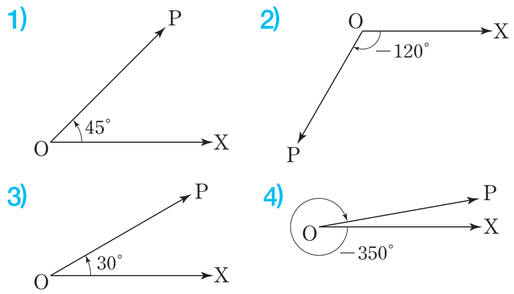
따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

Ⅱ 삼각함수

Ⅱ－1 일반각과 호도법

pp. 90 ~ 94

01 답



02 답 1) $\theta=360^\circ\times n+130^\circ$ (n은 정수)

2) $\theta=360^\circ\times n-50^\circ$ 또는

$\theta=360^\circ\times n+310^\circ$ (n은 정수)

03 답 1) $360^\circ\times n+45^\circ$ (단, n은 정수)

2) $360^\circ\times n+300^\circ$ (단, n은 정수)

3) $360^\circ\times n+60^\circ$ (단, n은 정수)

4) $360^\circ\times n+30^\circ$ (단, n은 정수)

5) $360^\circ\times n-50^\circ$ 또는 $360^\circ\times n+310^\circ$(단, n은 정수)

6) $360^\circ\times n+160^\circ$ (단, n은 정수)

1) $405^\circ=360^\circ\times1+45^\circ$이므로

$360^\circ\times n+45^\circ$ (단, n은 정수)

2) $660^\circ=360^\circ\times1+300^\circ$이므로

$360^\circ\times n+300^\circ$ (단, n은 정수)

3) $420^\circ=360^\circ\times1+60^\circ$이므로

$360^\circ\times n+60^\circ$ (단, n은 정수)

4) $-330^\circ=360^\circ\times(-1)+30^\circ$이므로

$360^\circ\times n+30^\circ$ (단, n은 정수)

5) $-770^\circ=360^\circ\times(-2)-50^\circ$이므로

$360^\circ\times n-50^\circ$ (단, n은 정수)

또는 $-770^\circ=360^\circ\times(-3)+310^\circ$이므로

$360^\circ\times n+310^\circ$ (단, n은 정수)

6) $-200^\circ=360^\circ\times(-1)+160^\circ$이므로

$360^\circ\times n+160^\circ$ (단, n은 정수)

04 답 1) 제3사분면 2) 제4사분면

3) 제1사분면 4) 제2사분면

1) $560^\circ=\boxed{360}^\circ\times1+\boxed{200}^\circ$이므로

560°는 $\boxed{\text{제3사분면}}$ 의 각이다.

2) $-795^\circ=360^\circ\times(-3)+285^\circ$이므로

-795°는 제4사분면의 각이다.

3) $1165^\circ=360^\circ\times3+85^\circ$이므로

1165°는 제1사분면의 각이다.

4) $-225^\circ=360^\circ\times(-1)+135^\circ$이므로

-225°는 제2사분면의 각이다.

05 답 제1사분면, 제3사분면

θ가 제1사분면의 각이므로

$\boxed{360}^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+\boxed{90}^\circ$ (n은 정수)

$\therefore \boxed{180}^\circ\times n<\dfrac{\theta}{2}<180^\circ\times n+\boxed{45}^\circ$

위 식에 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$를 차례로 대입하면

(ⅰ) $n=0$일 때,

$\boxed{0}^\circ<\dfrac{\theta}{2}<\boxed{45}^\circ$이므로 $\dfrac{\theta}{2}$는 제$\boxed{1}$사분면의 각

(ⅱ) $n=1$일 때,

$\boxed{180}^\circ<\dfrac{\theta}{2}<\boxed{225}^\circ$이므로 $\dfrac{\theta}{2}$는 제$\boxed{3}$사분면의 각

$n=2,\ 3,\ 4\ \cdots$에 대해서도 동경의 위치가 제$\boxed{1}$사분면, 제$\boxed{3}$사분면이 반복된다.

따라서 $\dfrac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은

제$\boxed{1}$사분면과 제$\boxed{3}$사분면이다.

06 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $-70^\circ=360^\circ\times(-1)+290^\circ$

ㄴ. $430^\circ=360^\circ\times1+70^\circ$

ㄷ. $-290^\circ=360^\circ\times(-1)+70^\circ$

ㄹ. $1330^\circ=360^\circ\times3+250^\circ$

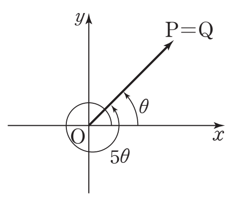
07 답 90°

그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경 OP와 각 5θ를 나타내는 동경 OQ가 서로 일치하므로

$5\theta-\theta=360^\circ\times n$ (단, n은 정수)

$\boxed{4\theta}=360^\circ\times n$

$\therefore \theta=\boxed{90}^\circ\times n$ …… ㉠



$0^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$0^\circ<\boxed{90}^\circ\times n<180^\circ$

$\therefore 0<n<\boxed{2}$

이때, n은 정수이므로 $n=\boxed{1}$

$n=\boxed{1}$을 ㉠에 대입하면 $\theta=\boxed{90}^\circ$

08 답 1) $\angle$XOP 2) 크기, 시초선, 동경

3) $360^\circ\times n+\theta$, 일반각

09

답 1) $\frac{\pi}{6}$ 라디안 2) $\frac{5}{12}\pi$ 라디안

3) $-\frac{2}{3}\pi$ 라디안 4) $-\frac{7}{6}\pi$ 라디안

1) $30^\circ=30\times1^\circ=30\times\boxed{\frac{\pi}{180}}=\boxed{\frac{\pi}{6}}$ (라디안)

2) $75^\circ=75\times1^\circ=75\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{12}\pi$ (라디안)

3) $-120^\circ=-120\times1^\circ=-120\times\frac{\pi}{180}=-\frac{2}{3}\pi$ (라디안)

4) $-210^\circ=-210\times1^\circ=-210\times\frac{\pi}{180}=-\frac{7}{6}\pi$ (라디안)

10

답 1) 108° 2) 150° 3) -60° 4) -315°

1) $\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{5}\pi\times1=\frac{3}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=108^\circ$

2) $\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi\times1=\frac{5}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=150^\circ$

3) $-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}\times1=-\frac{\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=-60^\circ$

4) $-\frac{7}{4}\pi=-\frac{7}{4}\pi\times1=-\frac{7}{4}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-315^\circ$

11

답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

ㄱ. $45^\circ=45\times1^\circ=45\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}$ (참)

ㄴ. $1=\frac{180^\circ}{\pi}$ (거짓)

ㄷ. $240^\circ=240\times1^\circ=240\times\frac{\pi}{180}=\frac{4}{3}\pi$ (거짓)

ㄹ. $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\times1=\frac{\pi}{2}\times\frac{180^\circ}{\pi}=90^\circ$ (참)

ㅁ. $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ (참)

ㅂ. $\frac{7}{10}\pi=\frac{7}{10}\pi\times1=\frac{7}{10}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=126^\circ$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

12

답 1) 1라디안, 호도법 2) $\frac{180^\circ}{\pi}$, $\frac{\pi}{180}$

13

답 1) $l=\frac{\pi}{6}$, $S=\frac{\pi}{12}$ 2) $l=\pi$, $S=\frac{3}{2}\pi$

3) $l=\frac{\pi}{2}$, $S=\frac{\pi}{2}$ 4) $l=\frac{\pi}{3}$, $S=\frac{\pi}{3}$

5) $l=\frac{3}{2}\pi$, $S=\frac{9}{2}\pi$ 6) $l=\frac{8}{3}\pi$, $S=\frac{16}{3}\pi$

1) $l=1\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

$S=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$

2) $l=3\times\frac{\pi}{3}=\pi$

$S=\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$

3) $l=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$S=\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

4) $\theta=30^\circ=30\times1^\circ=30\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$이므로

$l=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$S=\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

5) $\theta=45^\circ=45\times1^\circ=45\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}$이므로

$l=6\times\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$

$S=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi$

6) $\theta=120^\circ=120\times1^\circ=120\times\frac{\pi}{180}=\frac{2}{3}\pi$이므로

$l=4\times\frac{2}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi$

$S=\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi$

14

답 1) $\frac{3}{4}\pi$ 2) $\frac{8}{\pi}$

1) $l=\boxed{r\theta}$이므로

$\pi=r\times\boxed{\frac{2}{3}\pi}$ $\therefore r=\boxed{\frac{3}{2}}$

$S=\boxed{\frac{1}{2}rl}$이므로

$S=\frac{1}{2}\times\boxed{\frac{3}{2}}\times\pi=\boxed{\frac{3}{4}\pi}$

2) $\theta=45^\circ=45\times1^\circ=45\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}$이고, $l=r\theta$이므로

$2=r\times\frac{\pi}{4}$ $\therefore r=\frac{8}{\pi}$

$S=\frac{1}{2}rl$이므로

$S=\frac{1}{2}\times\frac{8}{\pi}\times2=\frac{8}{\pi}$

15

답 1) $\frac{2}{3}\pi$ 2) π

1) 부채꼴의 반지름의 길이를 r라고 하면

$S=\frac{1}{2}\boxed{r^2\theta}$이므로

$\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times r^2\times\boxed{\frac{\pi}{3}}$

$r^2=\boxed{4}$ $\therefore r=\boxed{2}$ $(\because r>0)$

또, $S=\frac{1}{2}\boxed{rl}$이므로

$\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times\boxed{2}\times\boxed{l}$

$\therefore l=\boxed{\frac{2}{3}\pi}$

2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r라고 하면

$\theta=30^\circ=30\times1^\circ=30\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$이고

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$이므로

$3\pi=\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{\pi}{6}$

$r^2=36\quad\therefore r=6\ (\because r>0)$

또, $S=\frac{1}{2}rl$이므로

$3\pi=\frac{1}{2}\times6\times l\quad\therefore l=\pi$

16 답 1) $r=1$, $\theta=\pi$ 2) $r=6$, $\theta=\frac{\pi}{2}$

3) $r=\frac{9}{4}$, $\theta=\frac{8}{9}\pi$

1) $S=\frac{1}{2}rl$이므로

$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\times r\times\boxed{\pi}\quad\therefore r=\boxed{1}$

또, $l=r\theta$이므로

$\pi=\boxed{1}\times\theta\quad\therefore\theta=\boxed{\pi}$

2) $S=\frac{1}{2}rl$이므로

$9\pi=\frac{1}{2}\times r\times3\pi\quad\therefore r=6$

또, $l=r\theta$이므로

$3\pi=6\times\theta\quad\therefore\theta=\frac{\pi}{2}$

3) $S=\frac{1}{2}rl$이므로

$\frac{9}{4}\pi=\frac{1}{2}\times r\times2\pi\quad\therefore r=\frac{9}{4}$

또, $l=r\theta$이므로

$2\pi=\frac{9}{4}\times\theta\quad\therefore\theta=\frac{8}{9}\pi$

17 답 반지름의 길이 : 5, 넓이의 최댓값 : 25

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라고 하면 둘레의 길이가 20이므로

$20=l+2r\quad\therefore l=20-\boxed{2r}$

이때, $r>0$, $l>0$이므로 $0<r<\boxed{10}$ ······ ㉠

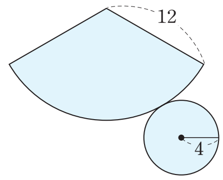
한편, 부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(20-\boxed{2r})=-r^2+10r$

$=-(r-\boxed{5})^2+\boxed{25}$

따라서 $r=\boxed{5}$는 ㉠을 만족하므로 반지름의 길이가 $\boxed{5}$일 때 넓이의 최댓값은 $\boxed{25}$이다.

18 답 64π



원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\times\boxed{4}=\boxed{8}\pi$

옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times12\times\boxed{8}\pi=\boxed{48}\pi$

$\therefore$ (부채꼴의 겉넓이)=(옆면의 넓이)+(밑면의 넓이)

$=\boxed{48}\pi+\pi\times4^2=\boxed{64}\pi$

19 답 1) $r\theta$ 2) $\frac{1}{2}r^2\theta$, $\frac{1}{2}rl$

Ⅱ-2 삼각함수의 뜻

pp. 95~99

20 답 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5) $\frac{1}{2}$ 6) $\sqrt{3}$

1) $\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}}=\frac{1}{2}$

2) $\cos A=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) $\sin C=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\cos C=\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}}=\frac{1}{2}$

6) $\tan C=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\sqrt{3}$

21 답 해설 참조

삼각비 \ 각	$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}(45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}(60^\circ)$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

22 답 1) 1 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\sqrt{2}$ 4) $\sqrt{2}$

1) $\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

2) $\tan\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

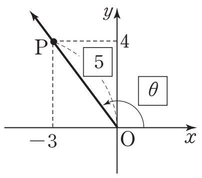
4) $\tan\frac{\pi}{4}\div\sin\frac{\pi}{4}=1\div\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

23 답 1) $\overline{CA}$, $\frac{b}{c}$ 2) $\overline{AB}$, $\frac{a}{c}$ 3) $\overline{CA}$, $\frac{b}{a}$

24 답 **1)** $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

2) $\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\cos\theta=\frac{5}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$

1) 오른쪽 그림과 같이 동경 OP를 나타내면

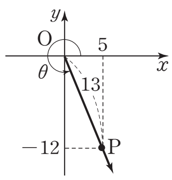


$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3)^2+\boxed{4}^2}=\boxed{5}$

이므로

$\sin\theta=\frac{\boxed{4}}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{\boxed{5}}$, $\tan\theta=\boxed{-\frac{4}{3}}$

2) 오른쪽 그림과 같이 동경 OP를 나타내면



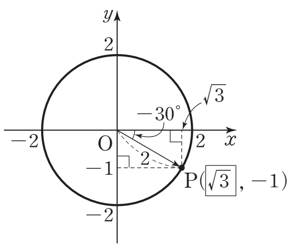
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$이므로

$\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\cos\theta=\frac{5}{13}$,

$\tan\theta=-\frac{12}{5}$

25 답 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원에서 $-30°$를 나타내는 동경 위의 y좌표가 -1인 점 P를 잡으면 점 P는 제 $\boxed{4}$ 사분면 위의 점이고, $\overline{\mathrm{OP}}=\boxed{2}$ 이므로 점 P의 x좌표는



$\sqrt{\boxed{2}^2-(-1)^2}=\boxed{\sqrt{3}}$

따라서 $\mathrm{P}(\boxed{\sqrt{3}}, -1)$이므로 $\sin\theta=\boxed{-\frac{1}{2}}$, $\cos\theta=\frac{\boxed{\sqrt{3}}}{2}$,

$\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

26 답 **1)** $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

2) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

3) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

4) $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

1) $\theta=\frac{5}{12}\pi$는 제 $\boxed{1}$ 사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$

2) $\theta=\frac{3}{4}\pi$는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

3) $\theta=-25°$는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

4) $\theta=210°$는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

27 답 **1)** 제2사분면 **2)** 제3사분면

3) 제1사분면 또는 제3사분면

4) 제3사분면 또는 제4사분면

1) $\sin\theta>0$이면 θ는 제1사분면 또는 제 $\boxed{2}$ 사분면의 각이고 $\cos\theta<0$이면 θ는 제 $\boxed{2}$ 사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 조건을 만족하는 θ는 $\boxed{\text{제2사분면}}$의 각이다.

2) $\sin\theta<0$이면 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고 $\tan\theta>0$이면 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 조건을 만족하는 θ는 제3사분면의 각이다.

3) $\sin\theta\cos\theta>0$이면

(ⅰ) $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$에서 θ는 제1사분면의 각이다.

(ⅱ) $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$에서 θ는 제3사분면의 각이다.

따라서 조건을 만족하는 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

4) $\cos\theta\tan\theta<0$이면

(ⅰ) $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$에서 θ는 제4사분면의 각이다.

(ⅱ) $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$에서 θ는 제3사분면의 각이다.

따라서 조건을 만족하는 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

28 답 **1)** $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$

2) ① +, −, − ② −, −, + ③ −, +, −

29 답 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

$\boxed{\sin^2\theta}+\cos^2\theta=1$이므로

$\boxed{\sin^2\theta}=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\boxed{\frac{9}{25}}$

이때, θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=\boxed{-\frac{3}{5}}$,

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\boxed{-\frac{3}{5}}}{\boxed{\frac{4}{5}}}=\boxed{-\frac{3}{4}}$

30 답 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

이때, θ가 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

31 답 1) 2 2) $\dfrac{1}{\cos\theta}$ 3) $\dfrac{2}{\sin\theta\cos\theta}$

1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$\quad+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

2) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\dfrac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\cos\theta}$

3) $\dfrac{\tan\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta}{1-\cos\theta}$

$=\tan\theta\times\dfrac{(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\tan\theta}{\sin^2\theta}=2\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\sin\theta\cos\theta}$

32 답 1) $-\dfrac{3}{8}$ 2) $-\dfrac{8}{3}$ 3) $-\dfrac{8}{3}$

1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 $\boxed{\text{제곱}}$하면

$\boxed{\sin^2\theta}+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\boxed{\dfrac{1}{4}}$

이때, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=\boxed{1}$이므로

$\boxed{1}+2\sin\theta\cos\theta=\boxed{\dfrac{1}{4}}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\boxed{-\dfrac{3}{8}}$ …… ㉠

2) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\dfrac{8}{3}$ ($\because$ ㉠)

3) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\dfrac{8}{3}$ ($\because$ ㉠)

33 답 $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$

$=1-2\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{2}$

이때, θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ $\therefore \cos\theta-\sin\theta<0$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

34 답 1) $-\dfrac{5}{6}$ 2) $2\sqrt{2}$

1) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{3}$

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{5}{18}$

$\dfrac{k}{3}=-\dfrac{5}{18}$ $\therefore k=-\dfrac{5}{6}$

2) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{k}{4}$, $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{k}{4}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{k^2}{16}$

$1+2\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{k^2}{16}$

$k^2=8$ $\therefore k=2\sqrt{2}$ ($\because k>0$)

35 답 1) y, x, $\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta$

Ⅱ-3 삼각함수의 그래프

pp. 100~121

36 답 1) 1 2) -2 3) 11

1) 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로

$f(x+\boxed{2})=f(x)$

$\therefore f(3)=f(1+\boxed{2})=f(\boxed{1})=\boxed{1}$

2) 함수 $f(x)$의 주기가 3이므로 $f(x+3)=f(x)$

$\therefore f(-5)=f(-2)=f(1)=f(4)=f(7)=f(10)=-2$

3) 함수 $f(x)$의 주기가 5이므로

$f(x+5n)=f(x)$ (단, n은 정수)

$\therefore f(222)=f(2+5\times44)=f(2)=11$

37 답 2

함수 $f(x)$의 주기가 4이므로 $f(x+4)=f(x)$

$\therefore f(13)=f(9)=f(5)=f(1)=1^2+1=2$

38 답 해설 참조

$f(x)=x^2$에서 $f(-x)=(-x)^2=\boxed{x^2}=f(x)$이므로

$f(x)$는 $\boxed{우}$함수이다.

$g(x)=x$에서 $g(-x)=\boxed{-x}=-g(x)$이므로

$g(x)$는 $\boxed{기}$함수이다.

39 답 1) $\boldsymbol{f(x+p)=f(x)}$, 주기함수, 주기, $\boldsymbol{f(x)}$

2) $\boldsymbol{y}$축, $\boldsymbol{f(x)}$, 원점, $\boldsymbol{-f(x)}$

40 답 1) × 2) ○ 3) ○ 4) ○ 5) × 6) × 7) ○

41 답 1) $\sin\frac{\pi}{7}<\sin\frac{\pi}{6}<\sin\frac{\pi}{5}$

2) $\sin 0<\sin\frac{\pi}{4}<\sin 1$

1) $0<\frac{\pi}{\boxed{7}}<\frac{\pi}{\boxed{6}}<\frac{\pi}{\boxed{5}}<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin\frac{\pi}{\boxed{7}} < \sin\frac{\pi}{\boxed{6}} < \sin\frac{\pi}{\boxed{5}}$

2) $0<\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin 0<\sin\frac{\pi}{4}<\sin 1$

42 답 1) 실수 전체 2) $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$ 3) 원점

4) 2π 5) π

43 답 1) × 2) × 3) ○ 4) ○ 5) × 6) × 7) ×

44 답 1) $\cos\frac{\pi}{2}<\cos\frac{\pi}{3}<\cos\frac{\pi}{5}$

2) $\cos\frac{\pi}{2}<\cos 1<\cos 0$

1) $0<\frac{\pi}{\boxed{5}}<\frac{\pi}{\boxed{3}}<\frac{\pi}{\boxed{2}}$

$\therefore \cos\frac{\pi}{\boxed{2}} < \cos\frac{\pi}{\boxed{3}} < \cos\frac{\pi}{\boxed{5}}$

2) $0<1<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos\frac{\pi}{2}<\cos 1<\cos 0$

45 답 1) 실수 전체 2) $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$

3) y축 4) 2π

5) π 6) $-\frac{\pi}{2}$

46 답 1) × 2) × 3) ○ 4) ○ 5) ○

6) × 7) ×

47 답 $\tan\frac{\pi}{5}<\tan\frac{\pi}{4}<\tan\frac{\pi}{3}$

$0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \tan\frac{\pi}{5}<\tan\frac{\pi}{4}<\tan\frac{\pi}{3}$

48 답 해설 참조

함수	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
정의역	실수 전체의 집합	실수 전체의 집합	$n\pi+\frac{\pi}{2}$를 제외한 실수 전체의 집합 (단, n은 정수)
치역	$\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$	$\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$	실수 전체의 집합
대칭성	원점에 대하여 대칭	y축에 대하여 대칭	원점에 대하여 대칭
주기	2π	2π	π

49 답 1) $n\pi+\frac{\pi}{2}$ 2) 실수 전체 3) 원점

4) π 5) $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$

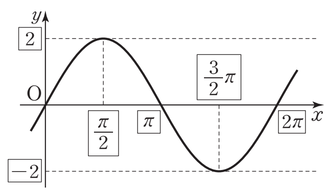
50 답 그래프는 해설 참조

1) 주기 : 2π, 최댓값 : 2, 최솟값 : -2

2) 주기 : π, 최댓값 : 1, 최솟값 : -1

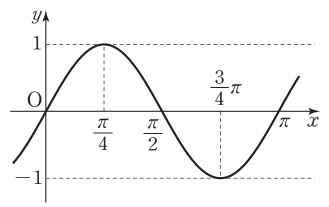
3) 주기 : $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값 : $\frac{1}{2}$, 최솟값 : $-\frac{1}{2}$

1) $y=2\sin x$의 그래프는 그림과 같다.



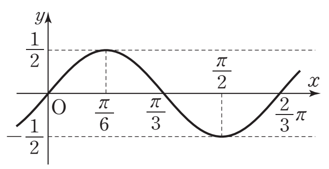
$\therefore$ 주기 : $\boxed{2\pi}$, 최댓값 : $\boxed{2}$, 최솟값 : $\boxed{-2}$

2) $y=\sin 2x$의 그래프는 그림과 같다.



$\therefore$ 주기 : π, 최댓값 : 1, 최솟값 : -1

3) $y=\frac{1}{2}\sin 3x$의 그래프는 그림과 같다.



$\therefore$ 주기 : $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값 : $\frac{1}{2}$, 최솟값 : $-\frac{1}{2}$

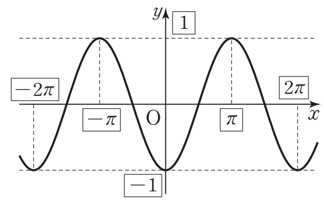
51 답 그래프는 해설 참조

1) 주기 : 2π, 최댓값 : 1, 최솟값 : -1

2) 주기 : $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값 : 1, 최솟값 : -1

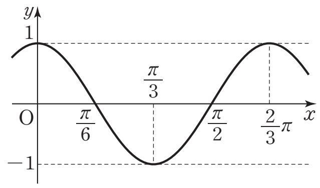
3) 주기 : π, 최댓값 : 2, 최솟값 : -2

1) $y=-\cos x$의 그래프는 그림과 같다.



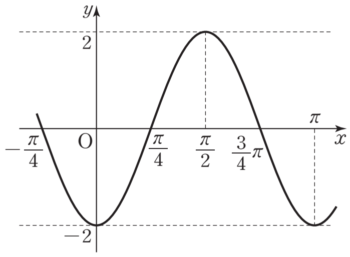
$\therefore$ 주기 : $\boxed{2\pi}$, 최댓값 : $\boxed{1}$, 최솟값 : $\boxed{-1}$

2) $y=\cos 3x$의 그래프는 그림과 같다.



$\therefore$ 주기 : $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값 : 1, 최솟값 : -1

3) $y=-2\cos 2x$의 그래프는 그림과 같다.



$\therefore$ 주기 : π, 최댓값 : 2, 최솟값 : -2

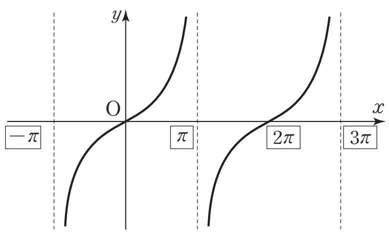
52 답 그래프는 해설 참조

1) 점근선의 방정식 : $x=(2n+1)\pi$ (n은 정수),
주기 : 2π

2) 점근선의 방정식 : $x=2n+1$ (n은 정수), 주기 : 2

3) 점근선의 방정식 : $x=\frac{\pi}{6}(2n+1)$ (n은 정수),
주기 : $\frac{\pi}{3}$

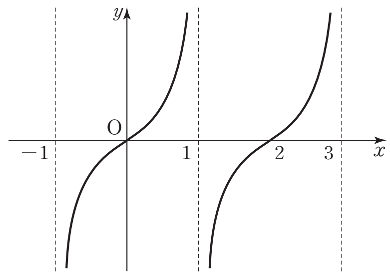
1) $y=\tan\frac{x}{2}$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 점근선의 방정식은 $\frac{\pi}{\boxed{2}}=\boxed{n}\pi+\frac{\pi}{2}$에서

$x=(\boxed{2n+1})\pi$ (단, n은 정수), 주기는 $\boxed{2\pi}$

2) $y=2\tan\frac{\pi}{2}x$의 그래프는 그림과 같다.

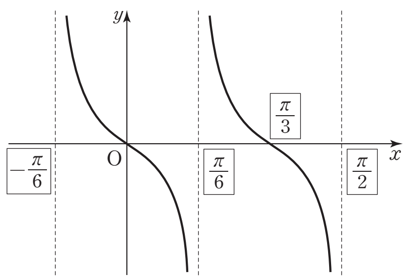


따라서 점근선의 방정식은 $\frac{\pi}{2}x=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서

$x=2n+1$ (단, n은 정수),

주기는 2

3) $y=-2\tan 3x$의 그래프는 $y=2\tan 3x$의 그래프를 $\boxed{x축}$에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y=-2\tan 3x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 점근선의 방정식은 $3x=\boxed{n\pi+\frac{\pi}{2}}$에서

$x=\boxed{\frac{\pi}{6}(2n+1)}$ (단, n은 정수),

주기는 $\boxed{\frac{\pi}{3}}$

53 답 **1)** ① $\frac{2\pi}{|b|}$ ② 실수 전체 ③ $|a|$, $-|a|$

2) ① $\frac{\pi}{|b|}$ ② $\frac{1}{b}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

③ 없다 ④ $\frac{1}{b}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

54 답 **1)** $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$, 최댓값 : 0,
최솟값 : -2, 주기 : 2π

2) $y=-\sin\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)+2$, 최댓값 : 3,
최솟값 : 1, 주기 : π

3) $y=\frac{1}{3}\cos(x+\pi)+\frac{4}{3}$, 최댓값 : $\frac{5}{3}$,
최솟값 : 1, 주기 : 2π

4) $y=-2\cos\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{9}\right)-1$, 최댓값 : 1,
최솟값 : -3, 주기 : 6π

1) $y-(\boxed{-1})=\sin\left(x-\boxed{\frac{\pi}{2}}\right)$에서

$y=\sin\left(x-\boxed{\frac{\pi}{2}}\right)-\boxed{1}$

∴ 최댓값 : $1-\boxed{1}=\boxed{0}$,

최솟값 : $-1-\boxed{1}=\boxed{-2}$,

주기 : $\boxed{2\pi}$

2) $y-2=-\sin 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$에서

$y=-\sin\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)+2$

∴ 최댓값 : $1+2=3$,

최솟값 : $-1+2=1$,

주기 : $\frac{2\pi}{2}=\pi$

3) $y-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}\cos(x+\pi)$에서

$y=\frac{1}{3}\cos(x+\pi)+\frac{4}{3}$

∴ 최댓값 : $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$,

최솟값 : $-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=1$,

주기 : 2π

4) $y+1=-2\cos\frac{1}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$에서

$y=-2\cos\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{9}\right)-1$

∴ 최댓값 : $2-1=1$,

최솟값 : $-2-1=-3$,

주기 : $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$

55 답 1) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+5$,

점근선의 방정식 : $x=n\pi+\frac{2}{3}\pi$ (n은 정수),

주기 : π

2) $y=-\tan(2x-\pi)+2$,

점근선의 방정식 : $x=\frac{\pi}{4}(2n+3)$ (n은 정수),

주기 : $\frac{\pi}{2}$

1) $y-5=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$에서

$y=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+5$

따라서 점근선의 방정식은 $x-\frac{\pi}{6}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서

$x=n\pi+\frac{2}{3}\pi$ (n은 정수), 주기는 π

2) $y-2=-\tan 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$에서

$y=-\tan(2x-\pi)+2$

따라서 점근선의 방정식은 $2x-\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서

$x=\frac{\pi}{4}(2n+3)$ (n은 정수), 주기는 $\frac{\pi}{2}$

56 답 1) $|a|+d$, $-|a|+d$, $\frac{2\pi}{|b|}$

2) $|a|+d$, $-|a|+d$, $\frac{2\pi}{|b|}$

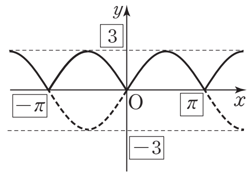
3) 없다, 없다, $\frac{\pi}{|b|}$

57 답 1) 주기 : π, 최댓값 : 3, 최솟값 : 0

2) 주기 : $\frac{\pi}{2}$, 최댓값 : $\frac{1}{2}$, 최솟값 : 0

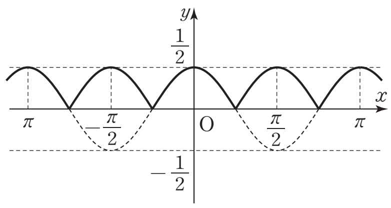
3) 주기 : $\frac{\pi}{3}$, 최댓값 : 없다, 최솟값 : 0

1) $y=|3\sin x|$의 그래프는 그림과 같이 $y=3\sin x$의 그래프에서 $\boxed{x}$축의 아랫부분을 $\boxed{x}$축에 대하여 대칭이동한다.



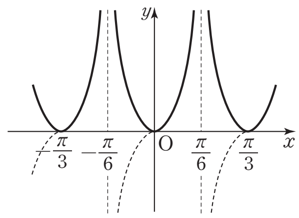
∴ 주기 : $\boxed{\pi}$, 최댓값 : $\boxed{3}$, 최솟값 : $\boxed{0}$

2) $y=\left|\frac{1}{2}\cos 2x\right|$의 그래프는 그림과 같이 $y=\frac{1}{2}\cos 2x$의 그래프에서 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.



∴ 주기 : $\frac{\pi}{2}$, 최댓값 : $\frac{1}{2}$, 최솟값 : 0

3) $y=|2\tan 3x|$의 그래프는 그림과 같이 $y=2\tan 3x$의 그래프에서 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.



∴ 주기 : $\frac{\pi}{3}$, 최댓값 : 없다, 최솟값 : 0

58 답 1) ① 실수 전체의 집합

② $\{y|0\le y\le 1\}$ ③ π ④ 1 ⑤ 0

2) ① $n\pi+\frac{\pi}{2}$ ② $\{y|y\ge 0\}$ ③ π

④ 없다 ⑤ 0

59 답 1) $a=5,\ b=8,\ c=3$ 2) $a=-1,\ b=2,\ c=\sqrt{3}$

1) 주기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{2\pi}{\boxed{|b|}}=\frac{\pi}{\boxed{4}}$ $\therefore b=\boxed{8}$ $(\because b>0)$

최댓값이 8이므로 $\boxed{|a|+c}=8$

$\therefore \boxed{a+c}=8$ $(\because a>0)$ …… ㉠

$f(x)=a\sin \boxed{8}x+c$에서 $f(0)=3$이므로

$f(0)=a\sin 0+c=\boxed{c}=3$ $\therefore c=\boxed{3}$

㉠에 $c=\boxed{3}$을 대입하면 $a=\boxed{5}$

2) 주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore b=2$ $(\because b>0)$

$f(x)=a\tan 2x+c$에서 $f(0)=\sqrt{3},\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$이므로

$f(0)=a\tan 0+c=c=\sqrt{3}$ $\therefore c=\sqrt{3}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\tan\frac{\pi}{3}+c=\sqrt{3}a+\sqrt{3}=0$ $\therefore a=-1$

60 답 1) $a=2,\ b=3,\ c=-1$ 2) $a=4,\ b=2,\ c=-2$

1) 주기가 6π이므로 $\frac{2\pi}{\boxed{\left|\frac{1}{b}\right|}}=6\pi$

$\therefore b=\boxed{3}$ $(\because b>0)$

최댓값이 1이므로 $\boxed{|a|}+c=1$

$\therefore \boxed{a+c}=1$ $(\because a>0)$ …… ㉠

$f(x)=a\cos\left(\pi-\frac{x}{\boxed{3}}\right)+c$에서 $f(\pi)=-2$이므로

$f(\pi)=a\cos\boxed{\frac{2}{3}\pi}+c=\boxed{-\frac{a}{2}}+c=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\boxed{2},\ c=\boxed{-1}$

2) 주기가 π이므로 $\frac{2\pi}{|b|}=\pi$ $\therefore b=2$ $(\because b>0)$

최솟값이 -2이므로 $-|a|-c=-2$

$-a-c=-2$ $(\because a>0)$ $\therefore a+c=2$ …… ㉠

$f(x)=a\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-c$에서 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2$이므로

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a\sin 0-c=-c=2$

$\therefore c=-2,\ a=4$ $(\because$ ㉠$)$

61 답 $a=2,\ b=2,\ c=\frac{\pi}{2},\ d=-1$

주어진 그래프에서 주기가 $\frac{3}{2}\pi-\boxed{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\pi}$이고

$b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\boxed{\pi}$ $\therefore b=\boxed{2}$

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고

$a>0$이므로 $a+\boxed{d}=1,\ \boxed{-a}+d=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\boxed{2},\ d=\boxed{-1}$

주어진 함수의 식은 $y=\boxed{2}\sin(\boxed{2}x+c)-\boxed{1}$이고

그래프가 점 $(0,\ \boxed{1})$을 지나므로

$\boxed{1}=2\sin(\boxed{0}+c)-\boxed{1}$에서 $\sin c=\boxed{1}$

이때, $0<c<\pi$이므로 $c=\boxed{\frac{\pi}{2}}$

62 답 $a=3,\ b=1,\ c=\frac{\pi}{6},\ d=1$

주어진 그래프에서 주기가 $\frac{13}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=2\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=2\pi$ $\therefore b=1$

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 -2이고

$a>0$이므로

$a+d=4,\ -a+d=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ d=1$

주어진 함수의 식은 $y=3\cos(x-c)+1$이고 그래프가

점 $\left(\frac{\pi}{6},\ 4\right)$를 지나므로

$4=3\cos\left(\frac{\pi}{6}-c\right)+1$에서 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-c\right)=1$

이때, $0<c<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{6}-c=0$ $\therefore c=\frac{\pi}{6}$

63 답 $\frac{13}{2}$

주기가 $\frac{\pi}{3}$이고 $b>0$이므로 $\frac{\boxed{\pi}}{b}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore b=\boxed{3}$

최댓값이 $\frac{7}{2}$이고 $a>0$이므로 $\boxed{a+c}=\frac{7}{2}$ …… ㉠

$f(x)=a|\sin \boxed{3}x|+c$에서 $f\left(\frac{\pi}{18}\right)=2$이므로

$f\left(\frac{\pi}{18}\right)=a\left|\sin\boxed{\frac{\pi}{6}}\right|+c=2$

$\therefore \boxed{\frac{1}{2}}a+c=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\boxed{3},\ c=\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore a+b+c=\boxed{\frac{13}{2}}$

64 답 $\frac{9}{2}$

주기가 $\frac{\pi}{4}$이고 $a>0$이므로 $\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{4}$ $\therefore a=4$

최댓값이 5이므로 $1+b=5$ $\therefore b=4$

따라서 $f(x)=|\cos 4x|+4$이므로

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left|\cos\frac{\pi}{3}\right|+4=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$

65 답 1) 주기, 최댓값, 최솟값, 함숫값
2) 주기, 함숫값

66 답 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\sqrt{3}$ 4) 1
5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 6) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

1) $\sin\frac{13}{6}\pi=\sin\left(2\pi+\boxed{\frac{\pi}{6}}\right)=\sin\boxed{\frac{\pi}{6}}=\boxed{\frac{1}{2}}$

2) $\cos\frac{9}{4}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\tan\frac{19}{3}\pi=\tan\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

4) $\sin 450^\circ=\sin(360^\circ+90^\circ)=\sin 90^\circ=1$

5) $\cos 750^\circ=\cos(2\times360^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $\tan 390^\circ=\tan(360^\circ+30^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

67 답 1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $-\sqrt{3}$
4) $-\frac{1}{2}$ 5) $\frac{1}{2}$ 6) -1

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

2) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

4) $\sin\left(-\frac{13}{6}\pi\right)=-\sin\frac{13}{6}\pi=-\sin\left(\boxed{2\pi}+\frac{\pi}{6}\right)$
$=-\boxed{\sin\frac{\pi}{6}}=\boxed{-\frac{1}{2}}$

5) $\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right)=\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)$
$=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

6) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)=-\tan\frac{9}{4}\pi=-\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$
$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

68 답 1) $\sin\theta$ 2) $\cos\theta$ 3) $\tan\theta$
4) $-\sin\theta$ 5) $\cos\theta$ 6) $-\tan\theta$

69 답 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\sqrt{3}$
4) $-\frac{1}{2}$ 5) $-\frac{1}{2}$ 6) 1

1) $\sin\frac{5}{4}\pi=\sin\left(\pi+\boxed{\frac{\pi}{4}}\right)=\boxed{-\sin\frac{\pi}{4}}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

2) $\cos\frac{7}{6}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

4) $\sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$

5) $\cos 240^\circ=\cos(180^\circ+60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

6) $\tan 225^\circ=\tan(180^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ=1$

70 답 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

1) $\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos\frac{3}{4}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\tan\frac{5}{6}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

71 답 1) $-\sin\theta$ 2) $-\cos\theta$ 3) $\tan\theta$
4) $\sin\theta$ 5) $-\cos\theta$ 6) $-\tan\theta$

72 답 1) $\frac{1}{2}$ 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $-\sqrt{3}$
4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 6) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 8) $\sqrt{3}$

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{\cos\frac{\pi}{3}}=\boxed{\frac{1}{2}}$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$

4) $\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\tan 150^\circ=\tan(90^\circ+60^\circ)=-\frac{1}{\tan 60^\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

7) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$

73 답 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) -1 3) 1

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$
$=\boxed{\cos}\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}+\sin\boxed{\frac{\pi}{3}}$
$=\frac{1}{2}-\boxed{\frac{1}{2}}+\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2) $\dfrac{\sin\theta\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}+\cos\theta\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\sin\theta\times\cos\theta\times(-\tan\theta)$

$+\cos\theta\times\dfrac{1}{\tan\theta}\times(-\sin\theta)$

$=\sin\theta\times\cos\theta\times\left(-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

$+\cos\theta\times\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\times(-\sin\theta)$

$=-\sin^2\theta-\cos^2\theta=-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=-1$

3) $\dfrac{\cos(\pi-\theta)\tan(\pi-\theta)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}=\dfrac{-\cos\theta\times(-\tan\theta)}{\sin\theta}$

$=\cos\theta\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\dfrac{1}{\sin\theta}$

$=1$

74

답 1) **5** 2) **1** 3) $\mathbf{\dfrac{19}{2}}$

1) $\cos(90^\circ-\theta)=\boxed{\sin\theta}$이므로

$\cos^2\theta+\cos^2(90^\circ-\theta)=\cos^2\theta+\boxed{\sin^2\theta}=1$

$\therefore \cos^2 0^\circ+\cos^2 10^\circ+\cos^2 20^\circ+\cdots+\cos^2 90^\circ$

$=(\cos^2 0^\circ+\cos^2\boxed{90^\circ})+(\cos^2 10^\circ+\cos^2\boxed{80^\circ})+$

$\cdots+(\cos^2 40^\circ+\cos^2\boxed{50^\circ})$

$=(\cos^2 0^\circ+\sin^2\boxed{0^\circ})+(\cos^2 10^\circ+\sin^2\boxed{10^\circ})+$

$\cdots+(\cos^2 40^\circ+\sin^2\boxed{40^\circ})$

$=1+1+1+1+1=\boxed{5}$

2) $\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$이므로 $\tan\theta\times\tan(90^\circ-\theta)=1$

$\therefore \tan 2^\circ\times\tan 4^\circ\times\cdots\times\tan 86^\circ\times\tan 88^\circ$

$=(\tan 2^\circ\times\tan 88^\circ)\times(\tan 4^\circ\times\tan 86^\circ)\times$

$\cdots\times(\tan 44^\circ\times\tan 46^\circ)$

$=\left(\tan 2^\circ\times\dfrac{1}{\tan 2^\circ}\right)\times\left(\tan 4^\circ\times\dfrac{1}{\tan 4^\circ}\right)\times$

$\cdots\times\left(\tan 44^\circ\times\dfrac{1}{\tan 44^\circ}\right)$

$=1$

3) $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$이므로

$\sin^2 5^\circ+\sin^2 10^\circ+\sin^2 15^\circ+\cdots+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 5^\circ+\sin^2 85^\circ)+(\sin^2 10^\circ+\sin^2 80^\circ)+$

$\cdots+(\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ)+\sin^2 45^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 5^\circ+\cos^2 5^\circ)+(\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ)+$

$\cdots+(\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ)+\sin^2 45^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=1\times8+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1=\dfrac{19}{2}$

75

답 1) $\mathbf{\cos\theta}$ 2) $\mathbf{-\sin\theta}$ 3) $\mathbf{-\dfrac{1}{\tan\theta}}$

4) $\mathbf{\cos\theta}$ 5) $\mathbf{\sin\theta}$ 6) $\mathbf{\dfrac{1}{\tan\theta}}$

76

답 1) 최댓값 : **0**, 최솟값 : **−4**

2) 최댓값 : **4**, 최솟값 : **−2**

1) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\boxed{-\sin x}$

$\boxed{\sin x}=t$로 치환하면

$y=\sin x-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-2$

$=t+\boxed{t}-2=\boxed{2t}-2$

이때, $-1\le t\le 1$이므로

$t=1$일 때, 최댓값은 $\boxed{0}$,

$t=-1$일 때, 최솟값은 $\boxed{-4}$이다.

2) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos x$

$\cos x=t$로 치환하면

$y=2\cos x-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+1$

$=2t+t+1=3t+1$

이때, $-1\le t\le 1$이므로

$t=1$일 때, 최댓값은 4,

$t=-1$일 때, 최솟값은 -2이다.

77

답 1) 최댓값 : **3**, 최솟값 : **1**

2) 최댓값 : **3**, 최솟값 : **−1**

1) $y=|\cos x-1|+1$에서 $\cos x=t$로 치환하면

$y=|t-1|+1$

$t\ge1$일 때, $y=t$

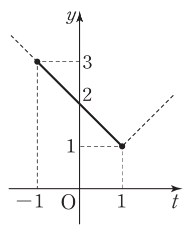
$t<1$일 때, $y=-t+2$

이때, $-1\le t\le 1$이므로

오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값은 3,

$t=1$일 때, 최솟값은 1이다.



2) $y=|2\sin x+4|-3$에서 $\sin x=t$로 치환하면

$y=|2t+4|-3$

$t\ge-2$일 때, $y=2t+1$

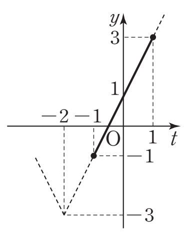
$t<-2$일 때, $y=-2t-7$

이때, $-1\le t\le 1$이므로

오른쪽 그림에서

$t=1$일 때, 최댓값은 3,

$t=-1$일 때, 최솟값은 -1이다.



78

답 1) 최댓값 : **5**, 최솟값 : **−3**

2) 최댓값 : $\mathbf{\dfrac{9}{4}}$, 최솟값 : **0**

3) 최댓값 : **4**, 최솟값 : $\mathbf{\dfrac{7}{4}}$

1) $\sin^2 x+\cos^2 x=\boxed{1}$이므로

$y=2\cos^2 x+4\sin x+1$

$=2(\boxed{1}-\sin^2 x)+4\sin x+1$

$=\boxed{-2}\sin^2 x+4\sin x+\boxed{3}$

$\sin x=t$로 치환하면

$y=\boxed{-2}t^2+4t+\boxed{3}$

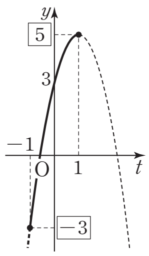
$=-2(t-\boxed{1})^2+\boxed{5}$

이때, $\boxed{-1}\le t\le\boxed{1}$이므로

오른쪽 그림에서

$t=1$일 때, 최댓값은 $\boxed{5}$,

$t=\boxed{-1}$일때, 최솟값은 $\boxed{-3}$이다.



2) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$y=-\sin^2 x+\cos x+\frac{5}{4}$

$=-(1-\cos^2 x)+\cos x+\frac{5}{4}$

$=\cos^2 x+\cos x+\frac{1}{4}$

$\cos x=t$로 치환하면

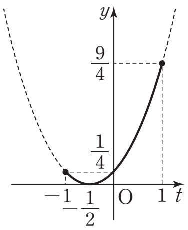
$y=t^2+t+\frac{1}{4}=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2$

이때, $-1\le t\le 1$이므로

오른쪽 그림에서

$t=1$일 때, 최댓값은 $\frac{9}{4}$,

$t=-\frac{1}{2}$일 때, 최솟값은 0이다.



3) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$,

$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$이고,

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+3$

$=-\sin x-\cos^2 x+3$

$=-\sin x-(1-\sin^2 x)+3$

$=\sin^2 x-\sin x+2$

$\sin x=t$로 치환하면

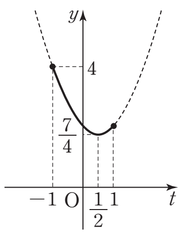
$y=t^2-t+2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

이때, $-1\le t\le 1$이므로

오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때, 최댓값은 4,

$t=\frac{1}{2}$일 때, 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다.



79 답 1) 삼각함수, 삼각함수, 범위, t의 값의 범위

2) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, 삼각함수, 범위, t의 값의 범위

80 답 1) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

2) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

3) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

1) |방법 1|

$0\le x<2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$의 교점의 $\boxed{x}$좌표를 구한다.

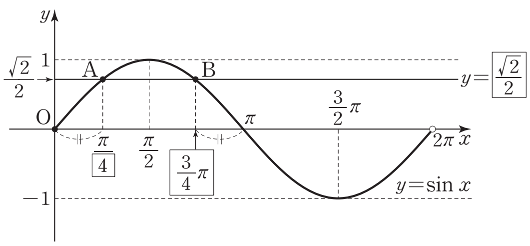
$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 그림과 같이 점 A의 x좌표는

$x=\boxed{\frac{\pi}{4}}$

점 A와 점 B는 직선 $x=\boxed{\frac{\pi}{2}}$에 대하여 대칭이므로

점 B의 x좌표는 $x=\pi-\boxed{\frac{\pi}{4}}=\boxed{\frac{3}{4}\pi}$

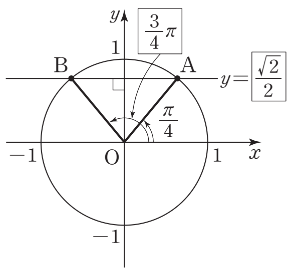
$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\boxed{\frac{3}{4}\pi}$



|방법 2|

그림과 같이 직선 $y=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$와 단위원의 두 교점 A, B에 대하여 두 동경 OA, OB가 나타내는 각의 크기를 구하면

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\boxed{\frac{3}{4}\pi}$



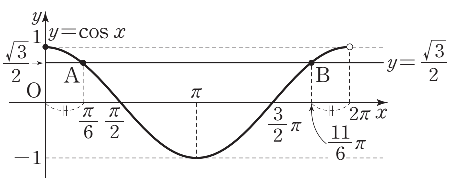
2) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $0\le x<2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표를 구한다.

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 점 A의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{6}$

점 A와 점 B는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

점 B의 x좌표는 $x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

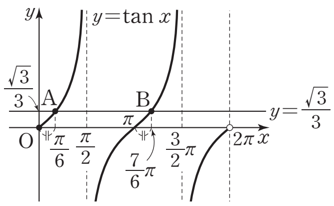


3) $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $0\le x<2\pi$에서 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표를 구한다.

$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 점 A의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{6}$

$y=\tan x$의 그래프의 주기는 π이므로 점 B의 x좌표는

$x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$ $\quad\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$



81 답 1) $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

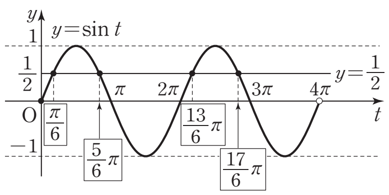
2) $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$

3) $x=-\frac{\pi}{2}$

1) $\sin 2x=\frac{1}{2}$이고 $\boxed{2x}=t$로 치환하면 $\sin\boxed{t}=\frac{1}{2}$

한편, $0\le x<2\pi$이므로 $0\le t<\boxed{4\pi}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 범위에서 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\boxed{\frac{1}{2}}$의 교점의 t좌표를 구하면 $\frac{\pi}{6}$, $\boxed{\frac{5}{6}\pi}$, $\boxed{\frac{13}{6}\pi}$, $\boxed{\frac{17}{6}\pi}$



$\boxed{2}x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\boxed{2}x=\boxed{\frac{5}{6}}\pi$ 또는 $\boxed{2}x=\boxed{\frac{13}{6}}\pi$

또는 $\boxed{2}x=\boxed{\frac{17}{6}}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\boxed{\frac{5}{12}\pi}$ 또는 $x=\boxed{\frac{13}{12}\pi}$

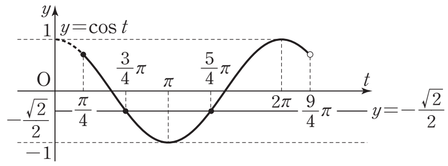
또는 $x=\boxed{\frac{17}{12}\pi}$

2) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$에서

$x+\frac{\pi}{4}=t$로 치환하면 $\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

한편, $0\le x<2\pi$이므로 $\frac{\pi}{4}\le t<\frac{9}{4}\pi$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 범위에서 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 t좌표를 구하면 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$



$x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$

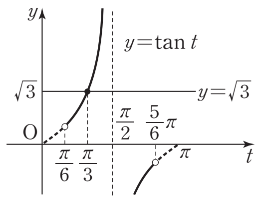
$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$

3) $\tan\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$에서 $\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{2}=t$로 치환하면

$\tan t=\sqrt{3}$

한편, $-\pi<x<\pi$이므로 $\frac{\pi}{6}<t<\frac{5}{6}\pi$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 범위에서 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 t좌표를 구하면 $\frac{\pi}{3}$이므로



$\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore x=-\frac{\pi}{2}$

82 답 1) $\sin x=a$(또는 $\cos x=a$, $\tan x=a$), $y=a$, x좌표

2) 동경

83 답 1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

2) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

3) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

1) $\sin^2 x+\boxed{\cos^2 x}=1$이므로

$2(\boxed{1-\sin^2 x})+3\sin x-3=0$

$\boxed{2\sin^2 x}-3\sin x+\boxed{1}=0$

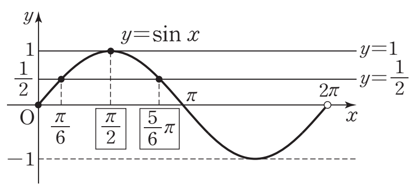
$(\boxed{2\sin x}-1)(\sin x-\boxed{1})=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=\boxed{1}$

$0\le x<2\pi$에서

(i) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\boxed{\frac{5}{6}\pi}$

(ii) $\sin x=\boxed{1}$일 때, $x=\boxed{\frac{\pi}{2}}$



$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\boxed{\frac{\pi}{2}}$ 또는 $x=\boxed{\frac{5}{6}\pi}$

2) $2\cos^2 x - \cos x = 0$

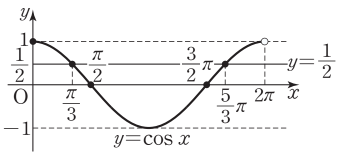
$\cos x(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0$ 또는 $\cos x = \dfrac{1}{2}$

$0 \le x < 2\pi$에서

(i) $\cos x = 0$이면 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x = \dfrac{3}{2}\pi$

(ii) $\cos x = \dfrac{1}{2}$이면 $x = \dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x = \dfrac{5}{3}\pi$



$\therefore x = \dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x = \dfrac{3}{2}\pi$ 또는 $x = \dfrac{5}{3}\pi$

3) $\tan^2 x - (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$

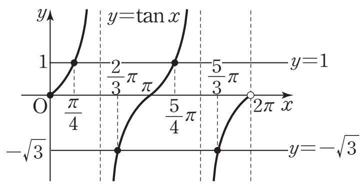
$(\tan x + \sqrt{3})(\tan x - 1) = 0$

$\therefore \tan x = -\sqrt{3}$ 또는 $\tan x = 1$

$0 \le x < 2\pi$에서

(i) $\tan x = -\sqrt{3}$일 때, $x = \dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \dfrac{5}{3}\pi$

(ii) $\tan x = 1$일 때, $x = \dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x = \dfrac{5}{4}\pi$



$\therefore x = \dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x = \dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \dfrac{5}{4}\pi$ 또는 $x = \dfrac{5}{3}\pi$

84 답 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 인수분해

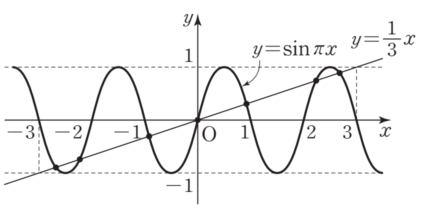
85 답 1) 7 2) 2

1) $\sin \pi x = \dfrac{1}{3}x$의 실근의 개수는 $y = \sin \pi x$의 그래프와

직선 $y = \boxed{\dfrac{1}{3}}x$의 $\boxed{\text{교점}}$의 개수와 같다.

$y = \sin \pi x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\boxed{\pi}} = \boxed{2}$이므로

$y = \sin \pi x$와 $y = \dfrac{1}{3}x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 그림에서 두 그래프의 교점이 $\boxed{7}$개이므로

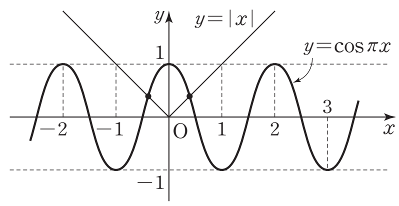
$\sin \pi x = \dfrac{1}{3}x$의 실근의 개수는 $\boxed{7}$이다.

2) $\cos \pi x = |x|$의 실근의 개수는 $y = \cos \pi x$의 그래프와

$y = |x|$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

$y = \cos \pi x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi} = 2$이므로

$y = \cos \pi x$와 $y = |x|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 그림에서 두 그래프의 교점이 2개이므로

$\cos \pi x = |x|$의 실근의 개수는 2이다.

86 답 1) $-3 \le k \le 1$ 2) $-4 \le k \le 4$

1) $\cos^2 x - 2\cos x + k = 0$에서

$-\cos^2 x + 2\cos x = k$

함수 $y = -\cos^2 x + 2\cos x$라고 하고

$\cos x = t$로 치환하면

$\boxed{-1} \le t \le \boxed{1}$이고

$y = -t^2 + 2t$

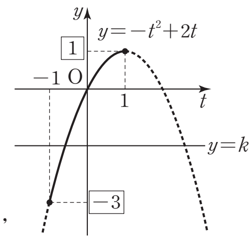
$\quad = -(\boxed{t-1})^2 + 1$

이때, $t = 1$일 때, 최댓값 $\boxed{1}$,

$t = -1$일 때, 최솟값 $\boxed{-3}$

을 가지므로 주어진 방정식이 실근을 가지기 위한 실수 k의 값의 범위는

$\boxed{-3 \le k \le 1}$



2) $\sin^2 x - 4\cos x + k = 0$에서

$(1 - \cos^2 x) - 4\cos x + k = 0$

$\cos^2 x + 4\cos x - 1 = k$

함수 $y = \cos^2 x + 4\cos x - 1$이라고 하고

$\cos x = t$로 치환하면

$-1 \le t \le 1$이고

$y = t^2 + 4t - 1$

$\quad = (t+2)^2 - 5$

이때, $t = 1$일 때, 최댓값 4,

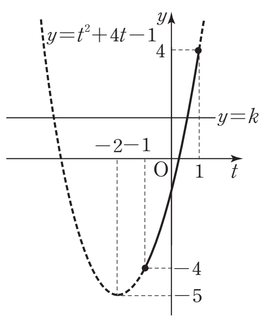
$t = -1$일 때, 최솟값 -4를

가지므로 주어진 방정식이

실근을 가지기 위한 실수

k의 값의 범위는

$-4 \le k \le 4$



87 답 교점, 교점

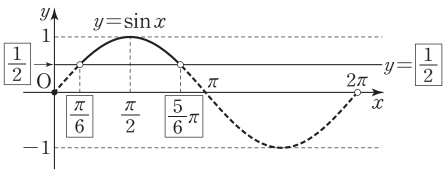
88 답 1) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$ 2) $\frac{3}{4}\pi\le x\le\frac{5}{4}\pi$

3) $\frac{\pi}{2}<x\le\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x\le\frac{11}{6}\pi$

1) 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서

$x=\boxed{\frac{\pi}{6}}$ 또는 $x=\boxed{\frac{5}{6}\pi}$

$\sin x>\frac{1}{2}$의 해는 그림에서 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\boxed{\frac{1}{2}}$보다 $\boxed{위}$쪽(경계선 $\boxed{제외}$)에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $\boxed{\frac{\pi}{6}}<x<\boxed{\frac{5}{6}}\pi$

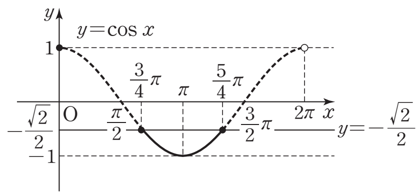


2) 방정식 $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서

$x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

$\sqrt{2}\cos x\le-1$, 즉 $\cos x\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 그림에서 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽(경계선 포함)에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\frac{3}{4}\pi\le x\le\frac{5}{4}\pi$

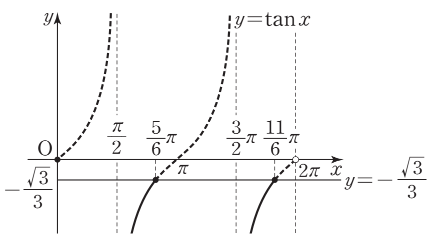


3) 방정식 $\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서

$x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

$\sqrt{3}\tan x+1\le0$, 즉 $\tan x\le-\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 그림에서 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$보다 아래쪽(경계선 포함)에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{2}<x\le\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x\le\frac{11}{6}\pi$



89 답 1) $\frac{7}{6}\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi$

2) $\frac{\pi}{12}<x<\frac{7}{12}\pi$

1) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$에서

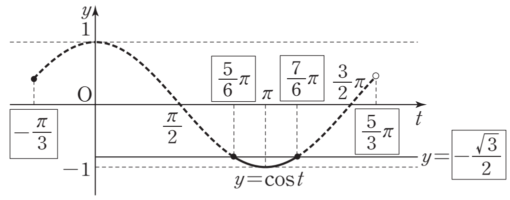
$x-\frac{\pi}{3}=t$로 치환하면 $\cos\boxed{t}\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ...... ㉠

$0\le x<2\pi$이므로 $\boxed{-\frac{\pi}{3}}\le t<\boxed{\frac{5}{3}\pi}$ ...... ㉡

한편, 방정식 $\cos t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 ㉡에서

$t=\boxed{\frac{5}{6}\pi}$ 또는 $t=\boxed{\frac{7}{6}\pi}$

이때, ㉠의 해는 그림에서 $y=\cos t$의 그래프가 직선 $y=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$보다 $\boxed{아래}$쪽(경계선 $\boxed{포함}$)에 있는 부분의 t의 값의 범위이므로 $\boxed{\frac{5}{6}\pi}\le t\le\boxed{\frac{7}{6}\pi}$



$\boxed{\frac{5}{6}\pi}\le x-\frac{\pi}{3}\le\boxed{\frac{7}{6}\pi}$

$\therefore\ \boxed{\frac{7}{6}\pi}\le x\le\boxed{\frac{3}{2}\pi}$

2) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>\sqrt{2}$에서 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$

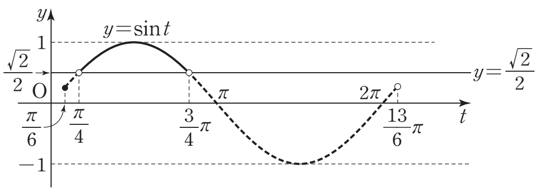
$x+\frac{\pi}{6}=t$로 치환하면 $\sin t>\frac{\sqrt{2}}{2}$ ...... ㉠

$0\le x<2\pi$이므로 $\frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$ ...... ㉡

한편, 방정식 $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 ㉡에서

$t=\frac{\pi}{4}$ 또는 $t=\frac{3}{4}\pi$

이때, ㉠의 해는 그림에서 $y=\sin t$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 위쪽(경계선 제외)에 있는 부분의 t의 값의 범위이므로 $\frac{\pi}{4}<t<\frac{3}{4}\pi$



$\frac{\pi}{4}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{3}{4}\pi$

$\therefore\ \frac{\pi}{12}<x<\frac{7}{12}\pi$

90 답 1) $0\le x<\dfrac{\pi}{3}$

2) $0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

1) $\boxed{\sin^2 x}+\cos^2 x=1$이므로

$2(\boxed{1-\cos^2 x})-3\cos x<0$

$\boxed{2}\cos^2 x+3\cos x-\boxed{2}>0$

$(\boxed{2}\cos x-1)(\cos x+\boxed{2})>0$

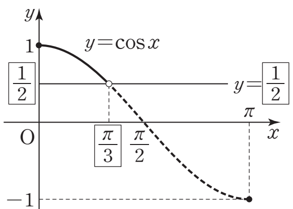
그런데 $\cos x+2$ $>$ 0이므로 $\boxed{2}\cos x-1>0$

$\therefore \cos x>\boxed{\dfrac{1}{2}}$ …… ㉠

한편, 방정식 $\cos x=\dfrac{1}{2}$의 해는 $0\le x\le\pi$에서

$x=\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

이때, ㉠의 해는 그림에서 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\boxed{\dfrac{1}{2}}$보다 $\boxed{\text{위}}$쪽(경계선 $\boxed{\text{제외}}$)에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $\boxed{0}\le x<\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$



2) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이므로 $2\sin^2 x+3\sin x-2\le 0$

$(2\sin x-1)(\sin x+2)\le 0$

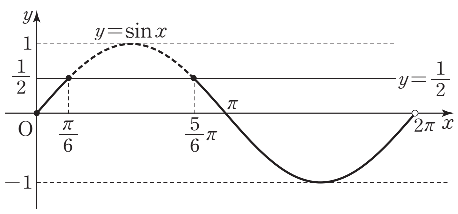
그런데 $\sin x+2>0$이므로

$2\sin x-1\le 0$ $\quad\therefore \sin x\le\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

한편, 방정식 $\sin x=\dfrac{1}{2}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서

$x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

이때, ㉠의 해는 그림에서 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\dfrac{1}{2}$보다 아래쪽(경계선 포함)에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 $0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{5}{6}\pi\le x<2\pi$



91 답 1) ① 위쪽 ② 아래쪽

2) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, 범위

Ⅱ-4 사인법칙과 코사인법칙

pp. 122~131

92 답 1) 원주각, $\dfrac{a}{2R}$, $2R$, $2R$

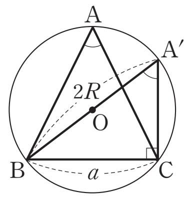
2) $2R$, $2R$, $2R$, a, b, c, $2R$, 그림 : $2R$

3) π, π, A', $\dfrac{a}{2R}$, $2R$, A, B, C

1) $\angle BCA'=\dfrac{\pi}{2}$가 되도록 점 A′을 잡으면

$A=A'$ (∵ 호 BC에 대한 $\boxed{\text{원주각}}$)

직각삼각형 A′BC에서



$\sin A=\sin A'=\boxed{\dfrac{a}{2R}}$

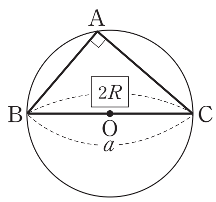
$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\boxed{2R}$

같은 방법으로

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\boxed{2R}$

가 성립함을 알 수 있다.

2) 직각삼각형 ABC에서 $a=\boxed{2R}$이므로



$\sin A=1=\dfrac{a}{\boxed{2R}}$

$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\boxed{2R}$

같은 방법으로

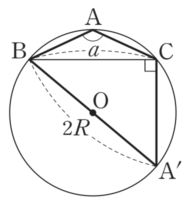
$\dfrac{\boxed{a}}{\sin A}=\dfrac{\boxed{b}}{\sin B}=\dfrac{\boxed{c}}{\sin C}=\boxed{2R}$

가 성립함을 알 수 있다.

3) $\angle BCA'=\dfrac{\pi}{2}$가 되도록 점 A′을 잡으면

$A'+A'=\boxed{\pi}$ (∵ 원의 내접사각형 ABA′C)

직각삼각형 A′CB에서



$\sin A=\sin(\boxed{\pi}-A')$

$=\sin\boxed{A'}=\boxed{\dfrac{a}{2R}}$

$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\boxed{2R}$

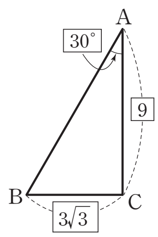
같은 방법으로

$\dfrac{a}{\sin\boxed{A}}=\dfrac{b}{\sin\boxed{B}}=\dfrac{c}{\sin\boxed{C}}=2R$

가 성립함을 알 수 있다.

93 답 1) 60° 2) 45° 3) 15°

1) 사인법칙에 의하여



$\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin\boxed{30^\circ}}=\dfrac{\boxed{9}}{\sin B}$이므로

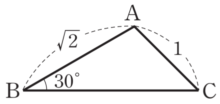
$3\sqrt{3}\sin B=\boxed{9}\times\dfrac{1}{2}$

$\sin B=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore B=\boxed{60^\circ}$

2) 사인법칙에 의하여

$\dfrac{1}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin C}$이므로

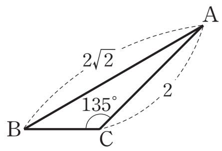


$\sin C=\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ C=45^\circ$

3) 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$이므로



$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ B=30^\circ$ 또는 $B=150^\circ$

그런데 $C=135^\circ$이므로

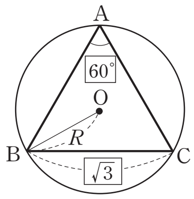
$B=30^\circ$

$\therefore\ A=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=15^\circ$

94 답 1) 1 2) $5\sqrt{2}$

1) 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$이므로



$\dfrac{\boxed{\sqrt{3}}}{\sin 60^\circ}=\boxed{2R}$

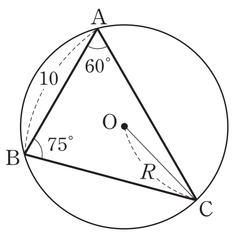
$\therefore\ R=\dfrac{\boxed{\sqrt{3}}}{2\sin 60^\circ}$

$=\boxed{1}$

2) $C=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)$

$=45^\circ$

사인법칙에 의하여



$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$이므로

$\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=2R$

$\therefore\ R=\dfrac{10}{2\sin 45^\circ}$

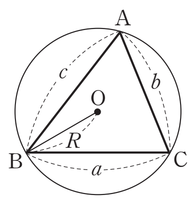
$=5\sqrt{2}$

95 답 $\dfrac{a}{\sin A}$, $\dfrac{b}{\sin B}$, $\dfrac{c}{\sin C}$, 사인

96 답 b, c, $\dfrac{b}{2R}$, $\dfrac{c}{2R}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하자.

사인법칙에 의하여



$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{\boxed{b}}{\sin B}=\dfrac{\boxed{c}}{\sin C}=2R$

를 만족한다.

$\therefore\ \sin A:\sin B:\sin C$

$=\dfrac{a}{2R}:\boxed{\dfrac{b}{2R}}:\boxed{\dfrac{c}{2R}}$

$=a:b:c$

97 답 1) $1:\sqrt{3}:2$ 2) $\dfrac{3}{5}$

1) $A+B+C=180^\circ$이고 $A:B:C=1:2:3$이므로

$A=180^\circ\times\dfrac{\boxed{1}}{6}=\boxed{30^\circ}$

$B=180^\circ\times\dfrac{2}{6}=\boxed{60^\circ}$

$C=180^\circ\times\dfrac{3}{6}=\boxed{90^\circ}$

$\therefore\ \sin A:\sin B:\sin C=\boxed{\dfrac{1}{2}}:\dfrac{\sqrt{3}}{2}:\boxed{1}$

$=\boxed{1}:\sqrt{3}:\boxed{2}$

사인법칙의 변형에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\boxed{1}:\sqrt{3}:\boxed{2}$

2) 1)에서 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$이므로

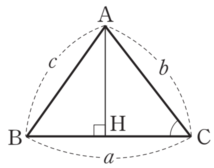
$a=k$, $b=\sqrt{3}k$, $c=2k$ $(k>0)$라고 하자.

$\therefore\ \dfrac{b^2}{a^2+c^2}=\dfrac{3k^2}{k^2+4k^2}=\dfrac{3}{5}$

98 답 a, b, c

99 답 $b\cos C$, $b\sin C$, $b\cos C$, $b\sin C$, a^2+b^2, 0, C $\pi-C$, $b\cos C$, $b\cos C$, $b\sin C$, $2ab$

(i) $0<C<\dfrac{\pi}{2}$일 때,



$\overline{BH}=\overline{BC}-\overline{CH}$

$=a-\boxed{b\cos C}$,

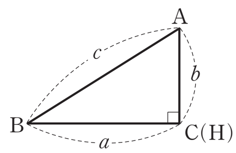
$\overline{AH}=\boxed{b\sin C}$이므로

$c^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$

$=(a-\boxed{b\cos C})^2+(\boxed{b\sin C})^2$

$=\boxed{a^2+b^2}-2ab\cos C$

(ii) $C=\dfrac{\pi}{2}$일 때,

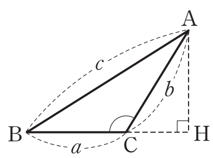


$\cos C=\boxed{0}$이므로

$c^2=a^2+b^2$

$=a^2+b^2-2ab\cos\boxed{C}$

(iii) $\dfrac{\pi}{2}<C<\pi$일 때,



$\overline{BH}=\overline{BC}+\overline{CH}$

$=a+b\cos(\boxed{\pi-C})$

$=a-\boxed{b\cos C}$이므로

$c^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$

$=(a-\boxed{b\cos C})^2+(\boxed{b\sin C})^2$

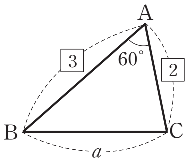
$=a^2+b^2-\boxed{2ab}\cos C$

(i)~(iii)에 의하여 C의 크기에 상관없이

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$가 성립함을 알 수 있다.

100 답 1) $\sqrt{7}$ 2) $2\sqrt{7}$ 3) $\sqrt{29}$

1) 코사인법칙에 의하여



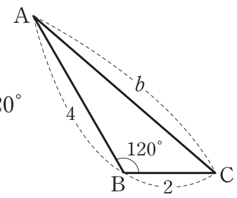
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=2^2+3^2-2\times2\times3\times\boxed{\frac{1}{2}}$

$=\boxed{7}$

따라서 $a>0$이므로 $a=\boxed{\sqrt{7}}$

2) 코사인법칙에 의하여



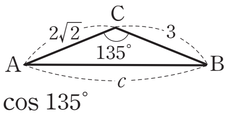
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos120^\circ$

$=4+16-16\times\left(-\frac{1}{2}\right)=28$

따라서 $b>0$이므로 $b=2\sqrt{7}$

3) 코사인법칙에 의하여



$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=3^2+(2\sqrt{2})^2-2\times3\times2\sqrt{2}\times\cos135^\circ$

$=9+8-12\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=29$

따라서 $c>0$이므로 $c=\sqrt{29}$

101 답 $\boldsymbol{b^2+c^2-2bc\cos A,\ a^2+c^2-2ac\cos B,}$
$\boldsymbol{a^2+b^2-2ab\cos C}$, **코사인**

102 답 1) 60° 2) 60° 3) 120°

1) 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-\boxed{a}^2}{2\boxed{bc}}$

$=\dfrac{3^2+8^2-\boxed{7}^2}{2\times\boxed{3\times8}}$

$=\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore A=\boxed{60^\circ}$

2) 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore B=60^\circ$

3) 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\dfrac{8^2+7^2-13^2}{2\times8\times7}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore C=120^\circ$

103 답 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) 사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=\boxed{a}:\boxed{b}:\boxed{c}=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

따라서 $a=k$, $b=\boxed{\sqrt{2}k}$, $c=\sqrt{3}k\ (k>0)$로 놓으면

코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2\boxed{ca}}=\dfrac{(\sqrt{3}k)^2+k^2-(\boxed{\sqrt{2}k})^2}{2\times\sqrt{3}k\times k}$

$=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

2) 사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=1:\sqrt{3}:2$

따라서 $a=k$, $b=\sqrt{3}k$, $c=2k\ (k>0)$로 놓으면

코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(\sqrt{3}k)^2+(2k)^2-k^2}{2\times\sqrt{3}k\times2k}$

$=\dfrac{3k^2+4k^2-k^2}{4\sqrt{3}k^2}=\dfrac{6}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

104 답 $\boldsymbol{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$

105 답 1) $\boldsymbol{a=b}$**인 이등변삼각형**
2) $\boldsymbol{B=90^\circ}$**인 직각삼각형**

1) 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{\boxed{b}}{2R}$

이것을 주어진 식에 대입하면

$a\times\dfrac{a}{2R}=b\times\dfrac{\boxed{b}}{2R}$

$a^2=\boxed{b^2}$ $\therefore a=\boxed{b}\ (\because a>0,\ b>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $a=\boxed{b}$인 $\boxed{\text{이등변}}$삼각형이다.

2) $(\cos A-\cos B)(\cos A+\cos B)=\sin^2(A+B)$

$\cos^2A-\cos^2B=\sin^2(A+B)$

$1-\sin^2A-(1-\sin^2B)=\sin^2(A+B)$

$A+B=180^\circ-C$이므로

$\sin^2B-\sin^2A=\sin^2(180^\circ-C)$

$\sin^2B-\sin^2A=\sin^2C$ …… ㉠

사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

106 답 1) $a=b$인 이등변삼각형
2) $A=90^\circ$인 직각삼각형
3) $a=b$인 이등변삼각형

1) 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$a\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$a^2=b^2$$

$$\therefore a=b\ (\because a>0,\ b>0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

2) 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$a\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$$

$$\therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

3) 사인법칙에 의하여

$$\sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{c}{2R}=2\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{b}{2R}$$

$$a^2=b^2\qquad\therefore a=b\ (\because a>0,\ b>0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

107 답 변의 길이

1) $\frac{a}{2R},\ \frac{b}{2R},\ \frac{c}{2R}$

2) $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

108 답 1) 7 2) $12\sqrt{3}$
3) $16\sqrt{3}$ 4) $\frac{3}{2}$

1) 두 변의 길이가 4, 7이고, 그 끼인각의 크기가 30°인 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times4\times7\times\sin\boxed{30^\circ}=\boxed{7}$$

2) 두 변의 길이가 6, 8이고, 그 끼인각의 크기가 60°인 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin60^\circ=12\sqrt{3}$$

3) 두 변의 길이가 8, 8이고, 그 끼인각의 크기가 120°인 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times8\times8\times\sin120^\circ=16\sqrt{3}$$

4) 두 변의 길이가 $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$이고, 그 끼인각의 크기가 60°인 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\sin60^\circ=\frac{3}{2}$$

109 답 1) $6\sqrt{6}$ 2) $2\sqrt{2}$ 3) $2\sqrt{14}$

1) 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5^2+6^2-\boxed{7^2}}{2\times5\times6}=\boxed{\frac{1}{5}}$$

$\sin^2 C+\cos^2 C=1$이고 $\sin C>0$이므로

$$\sin C=\sqrt{1-\boxed{\cos^2 C}}=\sqrt{1-\left(\boxed{\frac{1}{5}}\right)^2}$$

$$=\boxed{\frac{2\sqrt{6}}{5}}$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\boxed{5}\times\boxed{6}\times\boxed{\frac{2\sqrt{6}}{5}}$$

$$=\boxed{6\sqrt{6}}$$

2) 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+3^2-2^2}{2\times3\times3}=\frac{7}{9}$$

$\sin^2 C+\cos^2 C=1$이고 $\sin C>0$이므로

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=2\sqrt{2}$$

3) 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{6^2+3^2-5^2}{2\times6\times3}=\frac{5}{9}$$

$\sin^2 C+\cos^2 C=1$이고 $\sin C>0$이므로

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times3\times\frac{2\sqrt{14}}{9}=2\sqrt{14}$$

110 답 1) $6\sqrt{6}$ 2) $2\sqrt{2}$ 3) $2\sqrt{14}$

1) 세 변의 길이가 주어졌으므로

$$s=\frac{\boxed{5}+\boxed{6}+\boxed{7}}{2}=\boxed{9}$$

$$\therefore S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{\boxed{9}\times(\boxed{9}-5)\times(\boxed{9}-6)\times(\boxed{9}-7)}$$

$$=\boxed{6\sqrt{6}}$$

2) 세 변의 길이가 주어졌으므로

$s=\dfrac{3+3+2}{2}=4$

$\therefore S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{4\times(4-3)\times(4-3)\times(4-2)}$

$=2\sqrt{2}$

3) 세 변의 길이가 주어졌으므로

$s=\dfrac{6+3+5}{2}=7$

$\therefore S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{7\times(7-6)\times(7-3)\times(7-5)}$

$=2\sqrt{14}$

111 답 1) $\sin C$, $\sin A$, $\sin B$
2) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

112 답 1) 10 2) 4 3) $8\sqrt{2}$

1) 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c라고 하면
삼각형의 넓이가 $S=20$이므로

$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

$=\dfrac{1}{2}\times\boxed{4}\times(a+b+c)=20$

$\therefore a+b+c=\boxed{10}$

따라서 삼각형의 둘레의 길이는 $\boxed{10}$이다.

2) 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c라고 하면
삼각형의 넓이가 $S=10$이므로

$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

$=\dfrac{1}{2}\times5\times(a+b+c)=10$

$\therefore a+b+c=4$

따라서 삼각형의 둘레의 길이는 4이다.

3) 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c라고 하면
삼각형의 넓이가 $S=12\sqrt{2}$이므로

$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times(a+b+c)=12\sqrt{2}$

$\therefore a+b+c=8\sqrt{2}$

따라서 삼각형의 둘레의 길이는 $8\sqrt{2}$이다.

113 답 1) $6\sqrt{3}$ 2) $6\sqrt{2}$ 3) 24

1) 평행사변형의 성질에 의하여

$\overline{CD}=\boxed{\overline{AB}}=\boxed{2}$

$\therefore S=\overline{CD}\times\overline{BC}\times\sin\boxed{C}$

$=\boxed{2}\times6\times\sin\boxed{60^\circ}=\boxed{6\sqrt{3}}$

2) 평행사변형의 성질에 의하여

$\overline{BC}=\overline{AD}=4$

$\therefore S=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$

$=3\times4\times\sin45^\circ=6\sqrt{2}$

3) 평행사변형의 성질에 의하여

$D=B=150^\circ$

$\therefore S=\overline{DA}\times\overline{CD}\times\sin D$

$=8\times6\times\sin150^\circ=24$

114 답 1) 8 2) $3\sqrt{7}$ 3) $8+3\sqrt{7}$

1) $S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\sin\boxed{30^\circ}$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times8\times\boxed{\dfrac{1}{2}}=\boxed{8}$

2) $s=\dfrac{8+8+2}{\boxed{2}}=\boxed{9}$이므로

$S_2=\sqrt{\boxed{9}\times(\boxed{9}-8)\times(\boxed{9}-8)\times(\boxed{9}-2)}$

$=\boxed{3\sqrt{7}}$

3) $S=S_1+S_2=\boxed{8+3\sqrt{7}}$

115 답 1) $4\sqrt{6}$ 2) $14\sqrt{3}$ 3) $4\sqrt{6}+14\sqrt{3}$

1) $s=\dfrac{7+4+5}{2}=8$

$S_1=\sqrt{8\times(8-7)\times(8-4)\times(8-5)}=4\sqrt{6}$

2) $S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{DB}\times\overline{BC}\times\sin B$

$=\dfrac{1}{2}\times7\times8\times\sin60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times7\times8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}$

3) $S=S_1+S_2=4\sqrt{6}+14\sqrt{3}$

116 답 1) $6\sqrt{3}$ 2) 15

1) $S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\boxed{60^\circ}$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times\boxed{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{6\sqrt{3}}$

2) $S=\dfrac{1}{2}\times6\times10\times\sin150^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times6\times10\times\dfrac{1}{2}=15$

117 답 1) $\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

2) ① $ab\sin\theta$ ② 합 ③ $\dfrac{1}{2}pq\sin\theta$

단원 총정리 문제 Ⅱ 삼각함수

pp. 132~135

01 ⑤	02 ④	03 ②	04 ⑤	05 27π
06 2	07 ④	08 ①	09 55	10 ③
11 ⑤	12 ②	13 ②	14 ③	15 ①
16 25	17 ③	18 4	19 ⑤	20 25
21 ①	22 ②	23 ④		

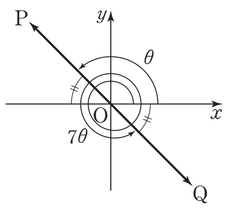
01 답 ⑤

그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경 OP와 각 7θ를 나타내는 동경 OQ가 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$7\theta-\theta=360^\circ\times n+180^\circ$ (단, n은 정수)

$6\theta=360^\circ\times n+180^\circ$

$\therefore\ \theta=60^\circ\times n+30^\circ$ …… ㉠



$90^\circ<\theta<270^\circ$이므로

$90^\circ<60^\circ\times n+30^\circ<270^\circ$

$60^\circ<60^\circ\times n<240^\circ$

$\therefore\ 1<n<4$

이때, n은 정수이므로 $n=2$ 또는 $n=3$

이를 ㉠에 대입하면

$\theta=150^\circ$ 또는 $\theta=210^\circ$

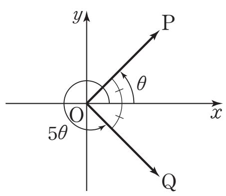
02 답 ④

그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경 OP와 각 5θ를 나타내는 동경 OQ가 x축에 대하여 서로 대칭이므로

$\theta+5\theta=360^\circ\times n$ (단, n은 정수)

$6\theta=360^\circ\times n$

$\therefore\ \theta=60^\circ\times n$ …… ㉠



$0^\circ<\theta<90^\circ$이므로

$0^\circ<60^\circ\times n<90^\circ$

$\therefore\ 0<n<\frac{3}{2}$

n은 정수이므로 $n=1$

$n=1$을 ㉠에 대입하면 $\theta=60^\circ$

03 답 ②

ㄱ. $480^\circ=360^\circ+120^\circ$이므로 제2사분면의 각이다. (참)

ㄴ. $\frac{5}{3}\pi$라디안$=\frac{5}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=300^\circ$ (참)

ㄷ. 1라디안은 $\frac{180^\circ}{\pi}=57.\cdots^\circ$이므로 90°보다 작다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 답 ⑤

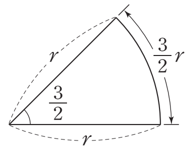
부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라고 하면

$l=r\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}r$이므로

$21=r+r+\frac{3}{2}r \qquad \therefore\ r=6$

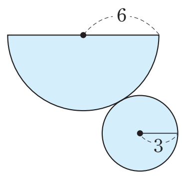
부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{3}{2}=27$



05 답 27π

원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로



$2\pi\times3=6\pi$

옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times6\pi=18\pi$

$\therefore$ (부채꼴의 겉넓이)$=$(옆면의 넓이)$+$(밑면의 넓이)

$=18\pi+\pi\times3^2=27\pi$

06 답 2

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 넓이가 최대일 때의 중심각의 크기를 θ라고 하자.

둘레의 길이가 12이므로 $12=l+2r$

$\therefore\ l=12-2r$

이때, $r>0$, $l>0$이므로 $0<r<6$ …… ㉠

부채꼴의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(12-2r)=-r^2+6r=-(r-3)^2+9$

$r=3$은 ㉠을 만족하므로 반지름의 길이가 3일 때, 넓이의 최댓값은 9이다.

따라서 $9=\frac{1}{2}\times3^2\times\theta$이므로 $\theta=2$

07 답 ④

$\sin\theta\cos\theta<0$이고

$\sin\theta-\cos\theta>0$에서 $\sin\theta>\cos\theta$이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 θ는 제2사분면의 각이므로 $\tan\theta<0$에 의하여

$\tan\theta\cos\theta>0$, $\tan\theta\sin\theta<0$

08 답 ①

직선 $x+2y-3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$에서

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$ $\qquad \therefore \cos^2\theta=\frac{4}{5}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\left(\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

09 답 55

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의 주기가 3이므로

$f(1)=f(4)=\cdots=f(10)=f(13)=f(16)=f(19)$

$f(-1)=f(2)=\cdots=f(11)=f(14)=f(17)=f(20)$

$f(0)=f(3)=\cdots=f(12)=f(15)=f(18)$

조건 (나)에 의하여

$f(1)=2\times1+5=7$,

$f(-1)=2\times(-1)+5=3$,

$f(0)=5$이므로

$f(10)+f(11)+f(12)+\cdots+f(20)$

$=4f(1)+4f(-1)+3f(0)$

$=4\times7+4\times3+3\times5=55$

10 답 ③

함수 $y=a\sin x$의 최댓값이 $\frac{3}{2}$이므로

$|a|=\frac{3}{2}$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ ($\because a>0$)

주기가 $b\pi$이므로 $b\pi=2\pi$ $\qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b=\frac{7}{2}$

11 답 ⑤

$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=f(x)$이므로 $f(x)$는 주기가 $\frac{\pi}{3}$인 주기함수이다.

ㄱ. $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}x$의 주기 : $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$

ㄴ. $f(x)=\cos 6x$의 주기 : $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

ㄷ. $f(x)=\sqrt{3}\tan 3x$의 주기 : $\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

따라서 주기가 $\frac{\pi}{3}$인 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

12 답 ②

ㄱ. $\tan\theta\times\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\tan\theta\times\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)$

$=-1$ (참)

ㄴ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi-\theta)=\cos\theta-\cos\theta=0$ (참)

ㄷ. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta+\sin\theta$

$=2\sin\theta$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

13 답 ②

$5\theta=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\sin 5\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$,

$\cos 5\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\tan 5\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

① $\sin 5\theta=\cos\theta$ (참)

② $\cos\theta+\sin 5\theta=\cos\theta+\cos\theta=2\cos\theta$ (거짓)

③ $\sin^2\theta+\sin^2 5\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ (참)

④ $\sin\theta-\cos(-5\theta)=\sin\theta-\cos 5\theta$

$=\sin\theta-\sin\theta=0$ (참)

⑤ $\tan\theta\tan 5\theta=\tan\theta\times\frac{1}{\tan\theta}=1$(참)

14 답 ③

ㄱ. 주기가 2π인 주기함수이다. (거짓)

ㄴ. $f(x)$의 최댓값은 $1-2=-1$, 최솟값은 $-1-2=-3$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 -4이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

15 답 ①

② $y=\sin 3(x-\pi)$의 그래프는 $y=\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것과 같다.

③ $y=\sin 3(x+5\pi)+2$의 그래프는 $y=\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 -5π만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

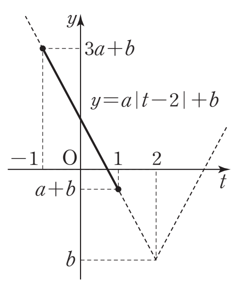
④ $y=-\cos 3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin 3x$

⑤ $y=\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\frac{1}{2}$

$=\sin 3x+\frac{1}{2}$

의 그래프는 $y=\sin 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

16 답 25



$y=a|\cos x-2|+b$에서

$\cos x=t$로 치환하면

$y=a|t-2|+b$

$t\geq2$일 때, $y=at-2a+b$

$t<2$일 때, $y=-at+2a+b$

이때, $a>0$이고 $-1\leq t\leq1$이므로 오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때, 최댓값은 $3a+b$,

$t=1$일 때, 최솟값은 $a+b$이다.

$\therefore 3a+b=5,\ a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-4$ $\qquad \therefore a^2+b^2=25$

17 답 ③

$1=\sin^2 x+\cos^2 x$이므로

$3\cos^2 x+\cos x\sin x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)$

$\cos^2 x+\cos x\sin x-2\sin^2 x=0$

$(\cos x+2\sin x)(\cos x-\sin x)=0$

$\cos x=-2\sin x$ 또는 $\cos x=\sin x$

위의 두 식의 양변을 각각 $\cos x$로 나누면

$1=-2\tan x$ 또는 $1=\tan x$

$\therefore \tan x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\tan x=1$

이때, $0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan x\ge 0$이므로

$\tan x=1 \qquad \therefore x=\frac{\pi}{4}$

18 답 4

$\sin^2 x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+k=0$에서

$(1-\cos^2 x)+2\cos x+k=0$이므로

$\cos^2 x-2\cos x-1=k$

함수 $y=\cos^2 x-2\cos x-1$이라고 하고

$\cos x=t$로 치환하면

$-1\le t\le 1$이고

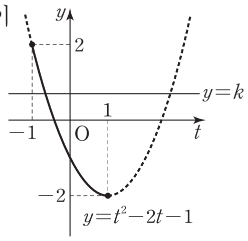
$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면

$-2\le k\le 2$

따라서 $M=2$, $m=-2$이므로

$M-m=4$



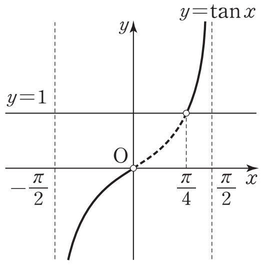
19 답 ⑤

$\tan^2 x-\tan x>0$에서 $\tan x(\tan x-1)>0$

$\therefore \tan x<0$ 또는 $\tan x>1$ …… ㉠

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $y=\tan x$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=1$은 그림과 같으므로 교점의 x좌표는 각각 0, $\frac{\pi}{4}$이다.

부등식 ㉠의 해는 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=1$보다 위쪽(경계선 제외) 또는 직선 $y=0$보다 아래쪽(경계선 제외)에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

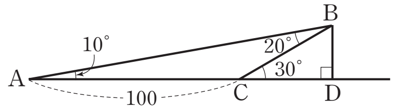


$-\frac{\pi}{2}<x<0$ 또는 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$

따라서 $a=0$, $b=\frac{\pi}{4}$이므로

$a+b=\frac{\pi}{4}$

20 답 25



$\angle ABC=\angle BCD-\angle BAC=30^\circ-10^\circ=20^\circ$

삼각형 ACB에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin 20^\circ}=\frac{\overline{BC}}{\sin 10^\circ}$에서 $\frac{100}{0.34}=\frac{\overline{BC}}{0.17}$

$100\times 0.17=\overline{BC}\times 0.34 \qquad \therefore \overline{BC}=50$

따라서 직각삼각형 BCD에서

$\overline{BD}=\overline{BC}\sin 30^\circ=\frac{50}{2}=25$

21 답 ①

$\sin A:\sin B=\cos A:\cos B$에서

$\sin A\cos B=\sin B\cos A$ …… ㉠

사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$

코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

이것을 ㉠에 대입하면

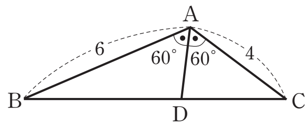
$\frac{a}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{b}{2R}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

위의 식을 정리하면

$a^2=b^2 \qquad \therefore a=b\ (\because a>0,\ b>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

22 답 ②



$\angle CAB=120^\circ$이므로

$\angle DAB=\angle CAD=60^\circ$

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$에서

$\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 6\times\overline{AD}\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times 4\times\overline{AD}\times\sin 60^\circ$

$12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\overline{AD}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\overline{AD}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$5\overline{AD}=12 \qquad \therefore \overline{AD}=\frac{12}{5}$

23 답 ④

$\frac{1}{2}\times 4\times\overline{BD}\times\sin 150^\circ=4\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}\times 4\times\overline{BD}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BD}=4\sqrt{3}$

Ⅲ 수열

Ⅲ-1 등차수열과 등비수열

pp. 140~154

01 답 1) $a_1=1$, $a_5=13$ 2) $a_1=8$, $a_5=20$
3) $a_1=2$, $a_5=30$ 4) $a_1=2$, $a_5=242$

1) $a_n=3n-2$에서 n 대신 1, 5를 각각 대입하면

$a_1=3\times\boxed{1}-2=\boxed{1}$

$a_5=3\times\boxed{5}-2=\boxed{13}$

2) $a_n=3n+5$에서 n 대신 1, 5를 각각 대입하면

$a_1=3\times1+5=8$

$a_5=3\times5+5=20$

3) $a_n=n^2+n$에서 n 대신 1, 5를 각각 대입하면

$a_1=1^2+1=2$

$a_5=5^2+5=30$

4) $a_n=3^n-1$에서 n 대신 1, 5를 각각 대입하면

$a_1=3^1-1=2$

$a_5=3^5-1=243-1=242$

02 답 1) 64 2) $\frac{1}{17}$

1) $a_1=1=1^2$, $a_2=4=2^2$, $a_3=9=3^2$, $a_4=16=4^2$, $\cdots$
따라서 제8항은 $a_8=8^2=64$이다.

2) $a_1=\frac{1}{3}=\frac{1}{2\times1+1}$, $a_2=\frac{1}{5}=\frac{1}{2\times2+1}$,

$a_3=\frac{1}{7}=\frac{1}{2\times3+1}$, $a_4=\frac{1}{9}=\frac{1}{2\times4+1}$, $\cdots$

따라서 제8항은 $a_8=\frac{1}{2\times8+1}=\frac{1}{17}$이다.

03 답 1) $a_n=n^3$ 2) $a_n=n(n+1)$
3) $a_n=(-1)^n$ 4) $a_n=10^n-1$

1) $a_1=1=1^3$, $a_2=8=2^3$, $a_3=27=3^3$, $a_4=64=4^3$, $\cdots$
따라서 일반항은 $a_n=n^3$ 이다.

2) $a_1=1\times2=1\times(1+1)$, $a_2=2\times3=2\times(2+1)$,
$a_3=3\times4=3\times(3+1)$, $a_4=4\times5=4\times(4+1)$, $\cdots$
따라서 일반항은 $a_n=n(n+1)$이다.

3) $a_1=-1$, $a_2=1=(-1)^2$, $a_3=-1=(-1)^3$,
$a_4=1=(-1)^4$, $\cdots$
따라서 일반항은 $a_n=(-1)^n$이다.

4) $a_1=9=10^1-1$, $a_2=99=10^2-1$, $a_3=999=10^3-1$,
$a_4=9999=10^4-1$, $\cdots$
따라서 일반항은 $a_n=10^n-1$이다.

04 답 1) 수열 2) 항 3) 일반항

05 답 1) 3, 3, 8, 11 2) 28, 26

1) $5-2=\boxed{3}$에서 공차가 $\boxed{3}$이므로 주어진 수열은
2, 5, $\boxed{8}$, $\boxed{11}$, 14, $\cdots$

2) $22-24=-2$에서 공차가 -2이므로 주어진 수열은
30, $\boxed{28}$, $\boxed{26}$, 24, 22, $\cdots$

06 답 1) 3 2) -2

1) 공차를 d라고 하면 $a_7=23$에서

$\boxed{5}+(\boxed{7-1})\times d=\boxed{5+6d}=23$

$6d=\boxed{18}$ $\quad\therefore d=\boxed{3}$

2) 공차를 d라고 하면 $a_{10}=-8$에서
$10+(10-1)\times d=10+9d=-8$
$9d=-18$ $\quad\therefore d=-2$

07 답 1) $a_n=-4n+14$ 2) $a_n=2n+2$
3) $a_n=3n-2$ 4) $a_n=3n-10$

1) $a_n=10+(n-1)\times(-4)=-4n+14$

2) $a_n=4+(n-1)\times2=2n+2$

3) 첫째항이 1, 공차가 $4-1=3$이므로
$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

4) 첫째항이 -7, 공차가 $-4-(-7)=3$이므로
$a_n=-7+(n-1)\times3=3n-10$

08 답 1) $a_n=5n-9$, $a_8=31$
2) $a_n=7n-3$, $a_8=53$

1) $a_n=-4+(n-1)\times5=5n-9$, $a_8=5\times8-9=31$

2) 첫째항이 4, 공차가 $11-4=7$이므로
$a_n=4+(n-1)\times7=7n-3$, $a_8=7\times8-3=53$

09 답 1) 46 2) -17 3) 11

1) 첫째항이 1, 공차가 $6-1=5$이므로
$a_n=1+(n-1)\times5=5n-4$
$\therefore a_{10}=5\times10-4=46$

2) 첫째항이 10, 공차가 $7-10=-3$이므로
$a_n=10+(n-1)\times(-3)=-3n+13$
$\therefore a_{10}=-3\times10+13=-17$

3) 첫째항이 -7, 공차가 $-5-(-7)=2$이므로
$a_n=-7+(n-1)\times2=2n-9$
$\therefore a_{10}=2\times10-9=11$

10 답 1) $a_n=-2n+11$ 2) $a_n=4n-5$ 3) 99

1) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=\boxed{a+2d}=5$ ······ ㉠

$a_8=\boxed{a+7d}=-5$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\boxed{9}$, $d=\boxed{-2}$

$\therefore a_n=\boxed{9}+(n-1)\times(\boxed{-2})=\boxed{-2n+11}$

2) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=7$ ······ ㉠

$a_8=a+7d=27$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=4$

$\therefore a_n=-1+(n-1)\times4=4n-5$

3) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_2=a+d=3$ ······ ㉠

$a_7=a+6d=13$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=2$

$\therefore a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$

$\therefore a_{50}=2\times50-1=99$

11 답 1) 등차수열, 공차 2) 공차 d, a_{n+1}, $a_{n+1}=a_n+d$
3) $a_n=a+(n-1)d$

12 답 1) $x=27$, $y=17$ 2) $x=2$, $y=8$
3) $x=17$, $y=9$, $z=1$
4) $x=-7$, $y=5$, $z=17$

1) x는 32와 22의 $\boxed{\text{등차중항}}$이므로

$x=\dfrac{32+22}{\boxed{2}}=\boxed{27}$

y는 22와 $\boxed{12}$의 등차중항이므로

$y=\dfrac{22+\boxed{12}}{2}=\boxed{17}$

$\therefore x=\boxed{27}$, $y=\boxed{17}$

2) x는 -1과 5의 등차중항이므로 $x=\dfrac{-1+5}{2}=2$

y는 5와 11의 등차중항이므로 $y=\dfrac{5+11}{2}=8$

$\therefore x=2$, $y=8$

3) y는 13과 5의 등차중항이므로 $y=\dfrac{13+5}{2}=9$

13은 x와 y의 등차중항이므로 $13=\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x+9}{2}$

$x+9=26$ $\therefore x=17$

5는 y와 z의 등차중항이므로 $5=\dfrac{y+z}{2}=\dfrac{9+z}{2}$

$9+z=10$ $\therefore z=1$

$\therefore x=17$, $y=9$, $z=1$

4) y는 -1과 11의 등차중항이므로 $y=\dfrac{-1+11}{2}=5$

-1은 x와 y의 등차중항이므로 $-1=\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x+5}{2}$

$x+5=-2$ $\therefore x=-7$

11은 y와 z의 등차중항이므로 $11=\dfrac{y+z}{2}=\dfrac{5+z}{2}$

$5+z=22$ $\therefore z=17$

$\therefore x=-7$, $y=5$, $z=17$

13 답 1) $-\dfrac{1}{3}$ 2) -3

1) 다항식 $f(x)=ax^2+x+3$을 $x-1$, $x+1$, $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 각각

$f(\boxed{1})=a+4$, $f(-1)=\boxed{a+2}$, $f(-2)=\boxed{4a+1}$

$a+4$, $\boxed{a+2}$, $\boxed{4a+1}$이 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2(\boxed{a+2})=(a+4)+(\boxed{4a+1})$

$\boxed{2a+4}=5a+5$

$\therefore a=\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

2) 다항식 $f(x)=x^2+ax+a^2$을 $x-1$, $x+1$, $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 각각

$f(1)=1+a+a^2$, $f(-1)=1-a+a^2$,

$f(-2)=4-2a+a^2$

$1+a+a^2$, $1-a+a^2$, $4-2a+a^2$이 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2(1-a+a^2)=(1+a+a^2)+(4-2a+a^2)$

$2-2a+2a^2=5-a+2a^2$

$\therefore a=-3$

14 답 1) 등차중항, $\dfrac{a+c}{2}$ 2) $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

15 답 1) 3, 5, 7 2) 66

1) 구하는 세 수를 $a-d$, a, $\boxed{a+d}$로 놓으면

$(a-d)+a+(\boxed{a+d})=15$ ······ ㉠

$(a-d)\times a\times(\boxed{a+d})=\boxed{105}$ ······ ㉡

㉠에서 $3a=\boxed{15}$이므로 $a=\boxed{5}$

$a=\boxed{5}$를 ㉡에 대입하면

$(\boxed{5}-d)\times\boxed{5}\times(\boxed{5}+d)=105$

$25-d^2=21$, $d^2=\boxed{4}$

$\therefore d=\boxed{\pm2}$

따라서 구하는 세 수는 $\boxed{3, 5, 7}$이다.

2) 구하는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

$(a-d)+a+(a+d)=12$ ⋯⋯ ㉠

$(a-d)\times a\times(a+d)=28$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $3a=12$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면

$(4-d)\times4\times(4+d)=28$

$16-d^2=7$, $d^2=9$

$\therefore d=\pm3$

따라서 세 수는 1, 4, 7이므로

$1^2+4^2+7^2=66$

16 답 0

구하는 네 수를 $a-3d$, $\boxed{a-d}$, $a+d$, $\boxed{a+3d}$로 놓으면

$(a-3d)+(\boxed{a-d})+(a+d)+(\boxed{a+3d})=24$ ⋯⋯ ㉠

$(\boxed{a-d})(a+d)=(a-3d)(\boxed{a+3d})+\boxed{32}$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $4a=24$이므로 $a=\boxed{6}$

$a=\boxed{6}$을 ㉡에 대입하면

$(\boxed{6-d})(6+d)=(6-3d)(\boxed{6+3d})+32$

$36-d^2=36-9d^2+32$

$\boxed{8d^2}=32$

$d^2=\boxed{4}$ $\quad\therefore d=\boxed{\pm2}$

따라서 네 수는 $\boxed{0}$, 4, 8, 12이므로 네 수의 곱은

$\boxed{0}\times4\times8\times12=\boxed{0}$

17 답 1) $a-d$, a, $a+d$

2) $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$

18 답 1) 2500 2) 255 3) 19600 4) 220

1) $S_{50}=\dfrac{50\times(1+99)}{2}=2500$

2) $S_{10}=\dfrac{10\times\{2\times3+(10-1)\times5\}}{2}=255$

3) 첫째항이 -2, 공차가 $\boxed{4}$인 등차수열이므로

394를 제n항이라고 하면

$-2+(\boxed{n-1})\times4=\boxed{394}$에서

$n=\boxed{100}$

$\therefore S_{\boxed{100}}=\dfrac{\boxed{100}\times(-2+\boxed{394})}{2}=\boxed{19600}$

4) 첫째항이 -8, 끝항이 30, 항수가 20인 등차수열의 합

이므로 $S_{20}=\dfrac{20\times(-8+30)}{2}=220$

19 답 1) -2 2) 7 3) 780

1) 등차수열의 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을

S_n이라고 하면

$S_{10}=\dfrac{10\{2\times30+(10-1)d\}}{2}=5(60+9d)=210$

$60+9d=42$ $\quad\therefore d=-2$

2) 등차수열의 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을

S_n이라고 하면

$S_{10}=\dfrac{10\{2\times(-3)+(10-1)d\}}{2}$

$=5(-6+9d)=285$

$-6+9d=57$ $\quad\therefore d=7$

3) 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항

까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{10}=\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=140$

$\therefore 2a+9d=28$ ⋯⋯ ㉠

$S_{20}=\dfrac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=480$

$\therefore 2a+19d=48$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $d=2$

$\therefore S_{26}=\dfrac{26\times\{2\times5+(26-1)\times2\}}{2}=780$

20 답 1) 2550 2) 1683 3) 1050 4) 816

1) 1부터 100까지의 2의 배수는

2, 4, 6, 8, ⋯, 100

으로 첫째항이 $\boxed{2}$, 공차가 $\boxed{2}$인 등차수열이다.

이때, 항수는 $\boxed{50}$이므로 구하는 총합은

$S_{\boxed{50}}=\dfrac{\boxed{50}\times(2+\boxed{100})}{2}=\boxed{2550}$

2) 1부터 100까지의 3의 배수는

3, 6, 9, 12, ⋯, 99

로 첫째항이 3, 공차가 3인 등차수열이다.

이때, 항수는 33이므로 구하는 총합은

$S_{33}=\dfrac{33\times(3+99)}{2}=1683$

3) 1부터 100까지의 5의 배수는 5, 10, 15, 20, ⋯, 100

으로 첫째항이 5, 공차가 5인 등차수열이다.

이때, 항수는 20이므로 구하는 총합은

$S_{20}=\dfrac{20\times(5+100)}{2}=1050$

4) 1부터 100까지의 6의 배수는 6, 12, 18, 24, ⋯, 96

으로 첫째항이 6, 공차가 6인 등차수열이다.

이때, 항수는 16이므로 구하는 총합은

$S_{16}=\dfrac{16\times(6+96)}{2}=816$

21 답 8

S_n이 최대가 되는 것은 일반항 a_n이 $a_n \geq 0$을 만족할 때이다.

첫째항이 15, 공차가 -2인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=15+(n-1)\times(-2)=\boxed{-2n+17}$

$a_n\geq 0$, 즉 $\boxed{-2n+17}\geq 0$에서

$n\leq\boxed{\frac{17}{2}}$ $\quad\therefore n\leq\boxed{8.5}$

한편, n은 자연수이므로 $n=\boxed{8}$일 때, S_n의 값이 최대가 된다.

[다른 풀이]

$S_n=\frac{n\{2\times15+(n-1)\times(-2)\}}{2}$

$=-n^2+16n$

$=-(n-8)^2+64$

따라서 $n=8$일 때, S_n의 값이 최대가 된다.

22 답 442

S_n이 최대가 되는 것은 일반항 a_n이 $a_n\geq 0$을 만족할 때이다.

첫째항이 50, 공차가 -3인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=50+(n-1)\times(-3)=-3n+53$

$a_n\geq 0$, 즉 $-3n+53\geq 0$에서

$n\leq\frac{53}{3}=17.6\cdots$

한편, n이 자연수이므로 $n=17$일 때, S_n의 값이 최대가 된다.

$\therefore S_{17}=\frac{17\times\{2\times50+16\times(-3)\}}{2}=442$

23 답 1) $\frac{n(a+l)}{2}$

2) $\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

24 답 1) 8, 16 2) 1, -1 3) 1, $\frac{1}{3}$

1) $\frac{2}{1}=\boxed{2}$에서 공비가 $\boxed{2}$이므로 주어진 수열은

1, 2, 4, $\boxed{8}$, $\boxed{16}$, 32, $\cdots$

2) $\frac{-1}{1}=-1$에서 공비가 -1이므로 주어진 수열은

-1, $\boxed{1}$, $\boxed{-1}$, 1, -1, 1, $\cdots$

3) $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$에서 공비가 $\frac{1}{3}$이므로 주어진 수열은

9, 3, $\boxed{1}$, $\boxed{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{9}$, $\cdots$

25 답 1) -2 2) 3

1) 공비를 r라고 하면

$a_4=-8$에서 $\boxed{1}\times r^{\boxed{4-1}}=-8$

$r^{\boxed{3}}=-8=(\boxed{-2})^3$ $\quad\therefore r=\boxed{-2}$

2) 공비를 r라고 하면

$a_6=486$에서 $2\times r^{6-1}=486$

$r^5=243=3^5$ $\quad\therefore r=3$

26 답 1) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$, $a_7=\frac{1}{32}$

2) $a_n=(-2)^n$, $a_7=-128$

3) $a_n=2^{n+1}$, $a_7=256$

4) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$, $a_7=\frac{1}{16}$

1) $a_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_7=\left(\frac{1}{2}\right)^{7-2}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

2) $a_n=(-2)\times(-2)^{n-1}=(-2)^n$

$a_7=(-2)^7=-128$

3) 첫째항이 4, 공비가 $\frac{8}{4}=2$이므로

$a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$

$a_7=2^{7+1}=2^8=256$

4) 첫째항이 4, 공비가 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로

$a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

$a_7=\left(\frac{1}{2}\right)^{7-3}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

27 답 1) $a_n=3\times(-2)^{n-1}$ 2) $a_n=(\sqrt{2})^{n-1}$

3) 6

1) 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^{\boxed{2}}=12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a_6=ar^{\boxed{5}}=-96$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠에서 $r^3=\boxed{-8}$이고, 공비 r는 실수이므로

$r=\boxed{-2}$

이것을 ㉠에 대입하면 $\boxed{4}a=12$ $\quad\therefore a=\boxed{3}$

$\therefore a_n=\boxed{3\times(-2)^{n-1}}$

2) 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_3=ar^2=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a_6=ar^5=4\sqrt{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠에서 $r^3=2\sqrt{2}=(\sqrt{2})^3$이고, r는 실수이므로

$r=\sqrt{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 $2a=2$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a_n=(\sqrt{2})^{n-1}$

3) 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_4=ar^3=24$ …… ㉠

$a_8=ar^7=384$ …… ㉡

㉡÷㉠에서 $r^4=16$ $\quad\therefore r=\pm2$

그런데 $r>0$이므로 $r=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $8a=24$ $\quad\therefore a=3$

따라서 $a_n=3\times2^{n-1}$이므로 $a_2=3\times2^{2-1}=6$

28 답 20

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_1+a_2=\boxed{a+ar}=5$ …… ㉠

$a_3+a_4=ar^{\boxed{2}}+ar^{\boxed{3}}=r^2(\boxed{a+ar})=10$ …… ㉡

㉡÷㉠에서 $r^2=\boxed{2}$

$\therefore a_5+a_6=ar^4+ar^5=r^2(\boxed{ar^2+ar^3})$

$=r^2(\boxed{a_3+a_4})=\boxed{2}\times\boxed{10}=\boxed{20}$

29 답 −128

-4와 32 사이에 넣은 두 개의 수를 x, y라고 하면

-4, x, y, 32

이때, 공비를 r라고 하면 첫째항이 $a=-4$, 제4항이 32이므로 $a_4=ar^{\boxed{3}}=\boxed{32}$

$-4r^{\boxed{3}}=\boxed{32}$이므로 $r^3=\boxed{-8}$

$\therefore xy=ar\times\boxed{ar^2}=a^{\boxed{2}}r^{\boxed{3}}=(-4)^2\times(\boxed{-8})$

$=\boxed{-128}$

30 답 78

공비를 r라고 하면 첫째항이 2, 제5항이 162이므로

$a_5=2r^4=162$

$r^4=81$ $\quad\therefore r=3$ ($\because r>0$)

따라서 $a=2r=6$, $b=2r^2=18$, $c=2r^3=54$이므로

$a+b+c=78$

31 답 **1)** 등비수열, 공비 **2)** 공비 r, a_{n+1}, $a_{n+1}=ra_n$ **3)** ar^{n-1}

32 답 **1)** $x=\pm6$, $y=\pm54$ (복호동순) **2)** $x=\pm2$, $y=\pm\frac{1}{2}$, $z=\pm\frac{1}{8}$ (복호동순)

1) x는 2와 18의 $\boxed{\text{등비중항}}$이므로

$x=\pm\sqrt{2\times\boxed{18}}=\pm\sqrt{\boxed{36}}=\boxed{\pm6}$

18은 x와 $\boxed{y}$의 등비중항이므로

$18^{\boxed{2}}=x\times\boxed{y}=\pm\boxed{6y}$ $\quad\therefore y=\boxed{\pm54}$

$\therefore x=\boxed{\pm6}$, $y=\boxed{\pm54}$ (복호동순)

[다른 풀이]

주어진 등비수열을 $\{a_n\}$이라고 하자.

$a_2=\pm\sqrt{2\times18}=\pm\sqrt{36}=\pm6$

$a_2=6$일 때, 공비는 $\frac{6}{2}=3$이므로 $a_4=2\times3^3=54$

$a_2=-6$일 때, 공비는 $\frac{-6}{2}=-3$이므로

$a_4=2\times(-3)^3=-54$

$\therefore x=6$, $y=54$ 또는 $x=-6$, $y=-54$

2) x는 -4와 -1의 등비중항이므로

$x^2=(-4)\times(-1)=4$ $\quad\therefore x=\pm2$

y는 -1과 $-\frac{1}{4}$의 등비중항이므로

$y^2=(-1)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore y=\pm\frac{1}{2}$ …… ㉠

$-\frac{1}{4}$은 y와 z의 등비중항이므로

$\left(-\frac{1}{4}\right)^2=yz$ $\quad\therefore yz=\frac{1}{16}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $z=\pm\frac{1}{8}$

$\therefore x=\pm2$, $y=\pm\frac{1}{2}$, $z=\pm\frac{1}{8}$ (복호동순)

33 답 **1)** 1 **2)** 2

1) $(a+1)^2=(a-2)(a-5)$이므로

$a^2+2a+1=a^2-7a+10$

$9a=9$ $\quad\therefore a=1$

2) $(a-1)^2=3a\times\frac{1}{12}a$이므로 $a^2-2a+1=\frac{1}{4}a^2$

$3a^2-8a+4=0$, $(3a-2)(a-2)=0$

$\therefore a=\frac{2}{3}$ 또는 $a=2$

이때, $a>1$이므로 $a=2$

34 답 **1)** $x=8$, $y=16$ **2)** $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{2}$

1) x, y, 24가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2y=x+24$ …… ㉠

4, x, y가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$x^2=4y$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $x^2=2x+48$

$(x-8)(x+6)=0$

$\therefore x=8$, $y=16$ ($\because xy>0$)

2) 1, a, b가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2a=1+b$ $\quad\therefore b=2a-1$ …… ㉠

a, b, 1이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$b^2=a$ …… ㉡

㉠을 ㉡을 대입하면 $(2a-1)^2=a$에서

$4a^2-5a+1=0$, $(4a-1)(a-1)=0$

$a\neq1$이므로 $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉠)

35 답 1) 등비중항, ac
2) $(a_{n+1})^2=a_na_{n+2}$
3) a, ar, ar^2

36 답 1) 189 2) 99
3) 488 4) $\frac{341}{128}$

1) $S_6=\frac{3\times(2^6-1)}{2-1}=3\times63=189$

2) $S_{11}=9\times11=99$

3) 648을 제n항이라고 하면

$\boxed{8}\times(-3)^{n-1}=648$이므로

$(-3)^{n-1}=\boxed{81}=(-3)^{\boxed{4}}$ $\quad\therefore n=\boxed{5}$

$\therefore S_{\boxed{5}}=\frac{8\times\{1-(-3)^{\boxed{5}}\}}{1-(\boxed{-3})}=\boxed{2}\times(1+3^{\boxed{5}})$

$=\boxed{488}$

4) 첫째항이 4, 공비가 $\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$-\frac{1}{128}$을 제n항이라고 하면

$4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{128}=\left(-\frac{1}{2}\right)^7$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^9$ $\quad\therefore n=10$

$\therefore S_{10}=\frac{4\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$=\frac{8}{3}\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$

$=\frac{341}{128}$

37 답 1) 26 2) 765

1) 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_4=\frac{a(1-r^4)}{1-r}=\boxed{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$S_8=\frac{a(1-r^8)}{1-r}=\frac{a(\boxed{1-r^4})(1+r^4)}{1-r}=\boxed{8}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\boxed{1+r^4}=4$ $\quad\therefore r^4=\boxed{3}$

$\therefore S_{12}=\frac{a(1-r^{12})}{1-r}=\frac{a(1-r^{\boxed{4}})}{1-r}(1+r^4+\boxed{r^8})$

$=S_{\boxed{4}}(1+r^4+\boxed{r^8})$

$=\boxed{2}\times(1+3+3^2)$

$=\boxed{26}$

2) 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_3=\frac{a(r^3-1)}{r-1}=21$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$S_6=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=189$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3+1=9$이므로

$r^3=8=2^3$ $\quad\therefore r=2$ ($\because r$는 실수)

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $7a=21$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore S_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}=\frac{3\times(2^8-1)}{2-1}=765$

38 답 1) 13 2) 73

1) 첫째항을 a, 공비를 $r(r>0)$, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$a_1+a_2=\boxed{a+ar}=1$에서

$a(\boxed{1+r})=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a_3+a_4=\boxed{ar^2+ar^3}=3$에서

$\boxed{ar^2}(1+r)=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=\boxed{3}$ $\quad\therefore r=\boxed{\sqrt{3}}$ ($\because r>0$)

㉠에서 $a(\boxed{1+\sqrt{3}})=1$ $\quad\therefore a=\boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

$\therefore S_6=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\times\frac{3^{\boxed{3}}-1}{\boxed{\sqrt{3}-1}}$

$=\boxed{13}$

2) 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$a_1+a_2+a_3=a+ar+ar^2=1$에서

$a(1+r+r^2)=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a_4+a_5+a_6=ar^3+ar^4+ar^5=8$에서

$ar^3(1+r+r^2)=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\quad\therefore r=2$ ($\because r$는 실수)

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $7a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{7}$

$\therefore S_9=\frac{a(r^9-1)}{r-1}=\frac{1}{7}\times\frac{2^9-1}{2-1}=73$

39 답 7

첫째항이 5, 공비가 2인 등비수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\frac{5(\boxed{2^n-1})}{2-1}=\boxed{5(2^n-1)}$

S_n $\boxed{>}$ 500에서 $\boxed{5(2^n-1)}$ $\boxed{>}$ 500 $\quad\therefore 2^n>\boxed{101}$

그런데 $2^{\boxed{6}}=\boxed{64}$, $2^{\boxed{7}}=128$이므로 $n\geq\boxed{7}$

따라서 $n=\boxed{7}$일 때, 처음으로 500보다 크게 된다.

40 답 8

$$S_n=\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\text{이므로}$$

$$|2-S_n|=\left|2-2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right|=\left|2-2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이때, $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{100}$이므로

$\frac{2}{2^n}<\frac{1}{100}$에서 $\frac{1}{2^n}<\frac{1}{200}$ $\quad\therefore 2^n>200$

그런데 $2^7=128$, $2^8=256$이므로 $n\geq8$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다.

41 답 $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$, na

42 답 1) $a_n=2\times3^{n-1}\,(n\geq1)$ 2) $a_n=4\times5^n\,(n\geq1)$

3) $a_n=2n-6\,(n\geq1)$

4) $a_1=2$, $a_n=2n-6\,(n\geq2)$

1) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-\boxed{S_{n-1}}=3^n-1-(\boxed{3^{n-1}-1})$

$=3^n-3^{n-1}=\boxed{2}\times3^{n-1}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, $a_1=S_1=3-1=2$는 ㉠에 $n=\boxed{1}$을 대입한 것과 같다.

$\therefore a_n=\boxed{2\times3^{n-1}}\,(n\geq1)$

2) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=5^{n+1}-5^n=4\times5^n$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, $a_1=S_1=5^2-5=20$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같다. $\quad\therefore a_n=4\times5^n\ (n\geq1)$

3) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-5n)-\{(n-1)^2-5(n-1)\}$

$=\{n+(n-1)\}\{n-(n-1)\}-5n+5(n-1)$

$=2n-1-5n+5n-5=2n-6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, $a_1=S_1=1^2-5\times1=-4$는 ㉠에서 $n=1$을 대입한 것과 같다. $\quad\therefore a_n=2n-6\ (n\geq1)$

4) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-5n+6)-\{(n-1)^2-5(n-1)+6\}$

$=\{n+(n-1)\}\{n-(n-1)\}-5n+5(n-1)$

$=2n-1-5n+5n-5=2n-6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, $a_1=S_1=1^2-5\times1+6=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로 $a_1=2$, $a_n=2n-6\ (n\geq2)$

43 답 1) -6 2) $p+q=0$

1) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2\times3^{2n+1}+k-2\times3^{2(\boxed{n-1})+1}-k$

$=2\times3^{2n+1}-\boxed{2\times3^{2n-1}}$

$=2\times\boxed{3^{2n-1}}\times(3^2-1)=16\times\boxed{3^{2n-1}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때, $a_1=S_1=2\times3^3+k=54+k$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 $\boxed{16}\times3=\boxed{48}$과 같아야 하므로

$54+k=\boxed{48}$ $\quad\therefore k=\boxed{-6}$

2) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(pr^n+q)-(pr^{n-1}+q)$

$=pr^n-pr^{n-1}=pr^{n-1}(r-1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

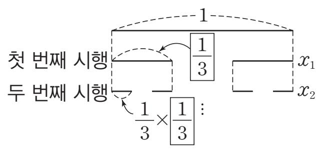
이때, $a_1=S_1=pr+q$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 $p(r-1)$과 같아야 하므로 $pr+q=p(r-1)$에서

$pr+q=pr-p$ $\quad\therefore p+q=0$

44 답 S_1, S_n-S_{n-1}

45 답 $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

n번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합을 x_n이라고 하면



$x_1=\frac{1}{3}\times\boxed{2}=\frac{2}{3}$

$x_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\boxed{4}=\boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

$x_3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\boxed{8}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\boxed{3}}$

$\vdots$

따라서 20번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은

$x_{20}=\boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^{20}}$

46 답 $\left(\frac{8}{9}\right)^n$

1회 시행 후 남은 정사각형들의 넓이의 합은

$\left(1-\frac{1}{9}\right)\times1^2=\frac{8}{9}$

2회 시행 후 남은 정사각형들의 넓이의 합은

$\left(1-\frac{1}{9}\right)\times\frac{8}{9}=\left(\frac{8}{9}\right)^2$

$\vdots$

따라서 n회 시행 후 남은 정사각형들의 넓이의 합은

$\left(1-\frac{1}{9}\right)\times\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}=\left(\frac{8}{9}\right)^n$

47 답 21400대

n개월째의 주문량은 $1000\times1.1^{n-1}$이므로 1년 동안의 총 주문받는 양은

$1000+1000\times1.1+1000\times1.1^2+\cdots+1000\times1.1^{11}$

$=\dfrac{1000\times(1.1^{12}-1)}{1.1-1}=\dfrac{1000\times(3.14-1)}{0.1}$

$=21400$(대)

48 답 4187000원

매년 적립금의 10년 말의 원리합계는 다음 표와 같다.

	처음 1년 말 ⋯ 8년 말 9년 말 10년 말	원리합계
제1회	30 $\xrightarrow{10년}$	$30\times(1+0.06)^{10}$
제2회	30 $\xrightarrow{9년}$	$30\times(1+0.06)^{9}$
⋮	⋮	⋮
제9회	30 $\xrightarrow{\boxed{2년}}$	$30\times(1+0.06)^{2}$
제10회	30 $\xrightarrow{\boxed{1년}}$	$30\times(1+0.06)$

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$30\times(1+0.06)^{10}+\boxed{30\times(1+0.06)^9}+$

$\cdots+\boxed{30\times(1+0.06)^2}+30\times(1+0.06)$

$=\dfrac{30\times1.06\times(\boxed{1.06^{10}}-1)}{1.06-1}$

$=\dfrac{30\times1.06\times(\boxed{1.79}-1)}{0.06}$

$=418.7$(만 원)$=4187000$원

49 답 27만 원

(첫 번째 적립) 1만 원 $\xrightarrow{24개월}$ 1×1.01^{24}

(두 번째 적립) 1만 원 $\xrightarrow{23개월}$ 1×1.01^{23}

(세 번째 적립) 1만 원 $\xrightarrow{22개월}$ 1×1.01^{22}

⋮ ⋮

(마지막 적립) 1만 원 $\xrightarrow{1개월}$ 1×1.01

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$1\times1.01^{24}+1\times1.01^{23}+1\times1.01^{22}+\cdots+1\times1.01$

$=\dfrac{1.01\times(1.01^{24}-1)}{1.01-1}=\dfrac{1.01^{25}-1.01}{0.01}$

$=\dfrac{1.28-1.01}{0.01}$

$=27$(만 원)

50 답 1) 공비

2) ① 원금, 원리합계, 이율, 연이율

② 복리법, $a(1+r)^n$

3) $\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$

Ⅲ－2 수열의 합

pp. 155~161

51 답 1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 2) $\sum_{k=1}^{n}2^k$ 3) $\sum_{k=1}^{5}3$

4) $\sum_{k=1}^{12}(4k-3)$ 5) $\sum_{k=1}^{24}(2k+1)(2k+3)$

1) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$

2) $2+4+8+\cdots+2^n=\sum_{k=1}^{n}2^k$

3) 3이 5개 있으므로

$3+3+3+3+3=\sum_{k=1}^{5}3$

4) $a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$

$4n-3=45 \quad \therefore n=12$

일반항이 $a_n=4n-3$이고, 첫째항부터 제12항까지의 합이므로

$1+5+9+\cdots+45=\sum_{k=1}^{12}(4k-3)$

5) $a_n=(2n+1)(2n+3)$

$2n+1=49 \quad \therefore n=24$

일반항이 $a_n=(2n+1)(2n+3)$이고, 첫째항부터 제24항까지의 합이므로

$3\times5+5\times7+7\times9+\cdots+49\times51$

$=\sum_{k=1}^{24}(2k+1)(2k+3)$

52 답 1) $3+5+7+\cdots+15$

2) $1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+n(n+2)$

3) $3^3+3^4+3^5+3^6+3^7$

1) $k=1, 2, 3, \cdots, 7$이므로

$\sum_{k=1}^{7}(2k+1)=3+5+7+\cdots+15$

2) $k=1, 2, 3, \cdots, n$이므로

$\sum_{k=1}^{n}k(k+2)=1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+n(n+2)$

3) $i=3, 4, 5, 6, 7$이므로

$\sum_{i=3}^{7}3^i=3^3+3^4+3^5+3^6+3^7$

53 답 $\sum_{k=1}^{n}a_k$

54 답 1) 150 2) 20

1) $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=100+50=150$

2) $\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k+2)=\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}2$

$=100-2\times50+2\times10=20$

55 답 1) 18 2) 36 3) 52

1) $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k^{\ 2}+2a_k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k^{\ 2}+2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=4+2\times2+1\times10=18$

2) $\sum_{k=1}^{10}(a_k-2)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k^{\ 2}-4a_k+4)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k^{\ 2}-4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4$

$=4-4\times2+4\times10=36$

3) $\sum_{k=1}^{10}(3a_k-2)^2=\sum_{k=1}^{10}(9a_k^{\ 2}-12a_k+4)$

$=9\sum_{k=1}^{10}a_k^{\ 2}-12\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4$

$=9\times4-12\times2+4\times10=52$

56 답 1) 80 2) 5 3) 401

1) $\sum_{k=1}^{20}(k^2+2)-\sum_{k=1}^{20}(k^2-2)$

$=\sum_{k=1}^{20}\{(k^2+2)-(k^2-2)\}$

$=\sum_{k=1}^{20}4=4\times20=80$

2) $\sum_{k=1}^{20}k^2-\sum_{k=3}^{20}k^2=\sum_{k=1}^{2}k^2=1^2+2^2=5$

3) $\sum_{k=1}^{20}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{19}(k^2+1)$

$=\sum_{k=20}^{20}(k^2+1)=20^2+1=401$

57 답 1) $\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$ 2) $c\sum_{k=1}^{n}a_k$ 3) cn

58 답 1) $\frac{1}{2}n(n+3)$ 2) $\frac{n(2n^2+9n+13)}{6}$ 3) $\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}$

1) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=\frac{n(n+1)}{2}+n$

$=\frac{n}{2}(n+1+2)$

$=\frac{1}{2}n(n+3)$

2) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n(n+1)+n$

$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+6(n+1)+6\}$

$=\frac{n(2n^2+9n+13)}{6}$

3) $\sum_{k=1}^{n}k(k^2+1)=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k$

$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+1\right\}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n^2+n+2}{2}$

$=\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}$

59 답 970

$\sum_{k=1}^{10}(2k-3)^2=\sum_{k=1}^{10}(4k^2-12k+9)$

$=4\sum_{k=1}^{10}k^2-12\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}9$

$=4\times\frac{10\times11\times21}{6}-12\times\frac{10\times11}{2}+9\times10$

$=970$

60 답 1) 117 2) 420 3) 1330

1) $\sum_{k=2}^{10}(3k-5)=\sum_{k=1}^{\boxed{10}}(3k-5)-\sum_{k=1}^{\boxed{1}}(3k-5)$

$=\sum_{k=1}^{\boxed{10}}(3k-5)-(3\times\boxed{1}-5)$

$=\boxed{3}\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}5-(-2)$

$=3\times\frac{\boxed{10\times11}}{2}-\boxed{50}+2$

$=\boxed{117}$

2) $\sum_{k=4}^{10}k(k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}k(k+1)-\sum_{k=1}^{3}k(k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)-\sum_{k=1}^{3}(k^2+k)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{3}k^2-\sum_{k=1}^{3}k$

$=\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}-\frac{3\times4\times7}{6}-\frac{3\times4}{2}$

$=385+55-14-6$

$=420$

3) $\sum_{k=1}^{10}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{11}(k-1)^3$

$=\sum_{k=1}^{10}(k+1)^3-\left\{\sum_{k=1}^{10}(k-1)^3+(11-1)^3\right\}$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k+1)^3-(k-1)^3\}-10^3$

$=\sum_{k=1}^{10}(6k^2+2)-10^3$

$=6\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}2-10^3$

$=6\times\frac{10\times11\times21}{6}+2\times10-1000$

$=1330$

61 답 1) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ 2) $n(n+1)(2n-1)$

3) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

1) 1, 2, 3, $\cdots$, n이라고 하면 2, 3, 4, $\cdots$, $\boxed{n+1}$이므로

$a_n=n(\boxed{n+1})$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k(\boxed{k+1})=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}\boxed{k}$

$=\frac{n(n+1)(\boxed{2n+1})}{6}+\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=\frac{\boxed{n(n+1)}(2n+1+3)}{6}$

$=\boxed{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$

2) 2, 4, 6, 8, $\cdots$, $2n$이라고 하면

1, 4, 7, 10, $\cdots$, $1+3(n-1)=3n-2$이므로

$a_n=2n(3n-2)=6n^2-4n$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(6k^2-4k)=6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k$

$=6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\times\frac{n(n+1)}{2}$

$=n(n+1)(2n+1-2)=n(n+1)(2n-1)$

3) $a_1=1$, $a_2=1+2$, $a_3=1+2+3$, $\cdots$이라고 하면

$a_n=1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

62 답 1) $2^{n+1}-2$ 2) $n^2+n+3\times2^n-3$

3) $\frac{3}{2}(3^{n-1}+n^2-n-5)$

1) 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 합이므로

$\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$

2) $\sum_{k=1}^{n}(2k+3\times2^{k-1})=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3\times2^{k-1}$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3(2^n-1)}{2-1}$

$=n^2+n+3\times2^n-3$

3) $\sum_{k=2}^{n-1}(3^k+3k)=\sum_{k=1}^{n-1}(3^k+3k)-\sum_{k=1}^{1}(3^k+3k)$

$=\sum_{k=1}^{n-1}3^k+3\sum_{k=1}^{n-1}k-(3^1+3\times1)$

$=\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}+\frac{3(n-1)n}{2}-6$

$=\frac{3}{2}(3^{n-1}+n^2-n-5)$

63 답 1) k, $\frac{n(n+1)}{2}$ 2) k^2, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) k^3, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

64 답 1) $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ 2) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

3) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$

4) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

1) $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{(\boxed{k+1})-k}\left(\frac{1}{\boxed{k}}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{k}-\frac{1}{\boxed{k+1}}$

2) $\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{(k+2)-k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

3) $\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{1}{(k+3)-(k+1)}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$

4) $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{(2k+1)-(2k-1)}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

65 답 1) $\frac{n}{n+1}$ 2) $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

3) $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

4) $\frac{n}{2n+1}$

1) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\boxed{\frac{1}{n+1}}=\boxed{\frac{n}{n+1}}$

2) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\right.$

$\left.\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

3) $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

4) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

66 답 1) $\frac{100}{101}$ 2) $\frac{175}{264}$ 3) $\frac{14}{45}$ 4) $\frac{25}{51}$

1) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{\boxed{n+1}}$이라고 하면

항수는 100이므로

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{100\times101}$

$=\sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=1}^{100}\left(\boxed{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$

$=1-\boxed{\frac{1}{101}}=\boxed{\frac{100}{101}}$

2) $a_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$이라고 하면

항수는 10이므로

$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{10\times12}$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{175}{132}=\frac{175}{264}$

3) $a_n=\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$이라고 하면

$n+1=8$에서 $n=7$로 항수는 7이므로

$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{8\times10}$

$=\sum_{k=1}^{7}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{56}{90}$

$=\frac{14}{45}$

4) $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$이라고 하면 $2n-1=49$에서 $n=25$로 항수는 25이므로

$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{49\times51}$

$=\sum_{k=1}^{25}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{25}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{51}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{51}\right)$

$=\frac{25}{51}$

67 답 1) $\frac{n}{2n+1}$ 2) $\frac{2n}{n+1}$

1) $a_n=\frac{1}{(2n)^2-\boxed{1}}$

$=\frac{1}{(2n-1)(\boxed{2n+1})}$

$=\frac{1}{\boxed{2}}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{\boxed{2n+1}}\right)$

이라고 하면

$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\cdots+\frac{1}{(\boxed{2n})^2-1}$

$=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{\boxed{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{\boxed{2k+1}}\right)$

$=\frac{1}{\boxed{2}}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{\boxed{2n+1}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{\boxed{2}}\left(1-\frac{1}{\boxed{2n+1}}\right)$

$=\boxed{\frac{n}{2n+1}}$

2) $a_n=\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n}k}=\dfrac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

이라고 하면

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{2n}{n+1}$$

68 답 1) $\dfrac{1}{B-A}$

2) ① $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ ② $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}$

③ $\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}$

69 답 1) $\dfrac{3\sqrt{a}}{a}$ 2) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

3) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$ 4) $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}$

1) $\dfrac{3}{\sqrt{a}}=\dfrac{3\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\dfrac{3\sqrt{a}}{a}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

4) $\dfrac{1}{a-\sqrt{b}}=\dfrac{a+\sqrt{b}}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}=\dfrac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}$

70 답 1) 9 2) 3

1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$
$$=\sqrt{100}-1$$
$$=9$$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{49}+\sqrt{47}}$
$$=\frac{1}{2}\times\left\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{47})\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{49}-1\right)=3$$

71 답 1) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 2) $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

3) $\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}$

Ⅲ-3 수학적 귀납법

pp. 162~167

72 답 1) 12 2) 5 3) 94

1) $a_1=2$

$a_2=a_1+1=2+1=3$

$a_3=a_2+\boxed{2}=3+\boxed{2}=\boxed{5}$

$a_4=a_3+3=\boxed{5}+3=\boxed{8}$

$a_5=a_4+4=\boxed{8}+4=\boxed{12}$

2) $a_1=1$

$a_2=1$

$a_3=a_2+a_1=1+1=2$

$a_4=a_3+a_2=2+1=3$

$a_5=a_4+a_3=3+2=5$

3) $a_1=1$

$a_2=2a_1+3\times1=2\times1+3\times1=5$

$a_3=2a_2+3\times2=2\times5+3\times2=16$

$a_4=2a_3+3\times3=2\times16+3\times3=41$

$a_5=2a_4+3\times4=2\times41+3\times4=94$

73 답 $\dfrac{1}{210}$

$(\boxed{n+2})a_{n+1}=na_n$이므로 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $\boxed{19}$를 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} 3a_2&=1a_1\\ 4a_3&=2a_2\\ 5a_4&=3a_3\\ &\vdots\\ \boxed{20}a_{19}&=18a_{18}\\ \times)\quad 21a_{20}&=19a_{19}\\ \hline \boxed{20}\times21\times a_{20}&=\boxed{1\times2}\times a_1 \end{aligned}$$

$\therefore a_{20}=\dfrac{a_1}{\boxed{210}}=\boxed{\dfrac{1}{210}}$

74 답 1) 29 2) 14

3) -33 4) 24

1) 첫째항이 $\boxed{2}$, 공차가 $\boxed{3}$인 등차수열이므로

$a_n=\boxed{2}+(n-1)\times\boxed{3}=\boxed{3n-1}$

$\therefore a_{10}=\boxed{29}$

2) 첫째항이 -4, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=-4+(n-1)\times2=2n-6$

$\therefore a_{10}=2\times10-6=14$

3) 첫째항이 3, 공차가 $a_2-a_1=-1-3=-4$인 등차수열이므로

$a_n=3+(n-1)\times(-4)=-4n+7$

$\therefore a_{10}=-4\times10+7=-33$

4) 첫째항이 -3, 공차가 $a_2-a_1=0-(-3)=3$인 등차수열이므로

$a_n=-3+(n-1)\times3=3n-6$

$\therefore a_{10}=3\times10-6=24$

75 답 **1) 32　2) 2　3) 16　4) 8**

1) 첫째항이 $\boxed{2}$, 공비가 $\boxed{2}$인 등비수열이므로

$a_n=2\times\boxed{2}^{n-1}=\boxed{2^n}$

$\therefore a_5=\boxed{32}$

2) 첫째항이 32, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$

$\therefore a_5=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

3) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=-2$인 등비수열이므로

$a_n=1\times(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$

$\therefore a_5=(-2)^4=16$

4) 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=-2$인 등비수열이므로

$a_n=\frac{1}{2}\times(-2)^{n-1}=-(-2)^{n-2}$

$\therefore a_5=-(-2)^3=8$

76 답 **1) ① a_n+d, d**

② a_n+a_{n+2}, $\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$

2) ① ra_n, r

② a_na_{n+2}, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

77 답 ㄱ, ㄴ

$p(1)$이 참이면 $\boxed{p(2)}$의 참, 거짓에 관계없이 $p(3)$이 참이고 $p(3)$이 참이면 $p(4)$가 참이므로 $n\ge\boxed{3}$인 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다.

이것만으로 $p(2)$의 참, 거짓을 따질 수는 없다.

마찬가지로 $p(2)$가 참이라는 사실 하나만으로 $p(1)$의 참, 거짓을 알 수 없으므로 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이려면 $\boxed{p(1)}$과 $\boxed{p(2)}$가 참이어야 한다.

따라서 참이어야 하는 명제는 $\boxed{\text{ㄱ, ㄴ}}$이다.

78 답 **66**

$p(1)$이 참이면 $p(1)$, $p(3)$, $p(9)$, $\cdots$가 참이다. 즉,

$n=\boxed{3^k}$인 $p(n)$이 참이다. $(k=0, 1, 2, \cdots)$ …… ㉠

$p(2)$가 참이면 $p(2)$, $p(6)$, $p(18)$, $\cdots$이 참이다. 즉,

$n=\boxed{2\times3^k}$인 $p(n)$이 참이다. $(k=0, 1, 2, \cdots)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 명제가 참이 되는 $n\le50$인 자연수 n의 값은

1, 3, 9, $\boxed{27}$과 2, 6, $\boxed{18}$

따라서 그 합은 $\boxed{40}+26=\boxed{66}$

79 답 해설 참조

1) (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=\frac{\boxed{1}\times(1+1)}{2}=\boxed{1}$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+2+3+\cdots+k=\boxed{\frac{k(k+1)}{2}}$

양변에 $(k+1)$을 더하면

$1+2+3+\cdots+k+(k+1)$

$=\boxed{\frac{k(k+1)}{2}}+(k+1)$

$=\frac{k(k+1)+\boxed{2(k+1)}}{2}$

$=\boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$

$=\frac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2}$

따라서 $n=\boxed{k+1}$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

2) (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=1^2$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

양변에 $(2k+1)$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$

$=k^2+(2k+1)$

$=(k+1)^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

3) (ⅰ) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=\frac{1}{2}$, $(\text{우변})=\frac{1}{2}$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

양변에 $\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$을 더하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$

$$=\frac{\boxed{k(k+2)}+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(\boxed{k+1})^2}{(k+1)(k+2)}=\boxed{\frac{k+1}{k+2}}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

따라서 $n=\boxed{k+1}$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

4) (ⅰ) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=1$, $(\text{우변})=\frac{1^2\times2^2}{4}=1$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$=\frac{(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2}{4}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

80 답 해설 참조

1) (ⅰ) $n=\boxed{5}$일 때,

$(\text{좌변})=2^{\boxed{5}}=\boxed{32}$,

$(\text{우변})=\boxed{5}^2=25$

따라서 $n=\boxed{5}$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (k\geq5)$일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2$

양변에 2를 곱하면

$2^{\boxed{k+1}}>2k^2$ …… ㉠

한편, $k\geq5$일 때,

$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2>0$ 이므로

$2k^2>(\boxed{k+1})^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{\boxed{k+1}}>(\boxed{k+1})^2$

따라서 $n=\boxed{k+1}$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq\boxed{5}$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

2) (ⅰ) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=3$, $(\text{우변})=1+1=2$

따라서 $n=1$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$3^k>k+1$

양변에 3을 곱하면 $k\geq1$이므로

$3^{k+1}>3(k+1)>(k+1)+1$

$\therefore 3^{k+1}>(k+1)+1$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

3) (ⅰ) $n=2$일 때,

$(\text{좌변})=3^2=9$, $(\text{우변})=3\times2+2=8$

따라서 $n=2$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (k\geq2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $3^k>3k+2$

양변에 3을 곱하면 $k\geq2$이므로

$3^{k+1}>3(3k+2)>3(k+1)+2$

$\therefore 3^{k+1}>3(k+1)+2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

4) (ⅰ) $n=3$일 때,

$(\text{좌변})=2^3=8$, $(\text{우변})=2\times3+1=7$

따라서 $n=3$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (k\geq3)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k>2k+1$

양변에 2를 곱하면 $k\geq3$이므로

$2^{k+1}>2(2k+1)>2(k+1)+1$

$\therefore 2^{k+1}>2(k+1)+1$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq3$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

81 답 해설 참조

1) (i) $n=\boxed{2}$일 때,

$(\text{좌변})=(1+h)^2=1+2h+h^2$,

$(\text{우변})=1+2h$

$h^2>0$이므로 $n=\boxed{2}$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq\boxed{2})$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>\boxed{1+kh}$

양변에 $(1+h)$를 곱하면 $h^2>0$이므로

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}&>(\boxed{1+kh})(1+h)\\&=1+(\boxed{k+1})h+kh^2\\&>1+(\boxed{k+1})h\end{aligned}$$

$\therefore\ (1+h)^{k+1}>\boxed{1+(k+1)h}$

따라서 $n=\boxed{k+1}$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $\boxed{n\geq2}$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

2) (i) $n=\boxed{2}$일 때,

$(\text{좌변})=1+\dfrac{1}{\boxed{2^2}}=\boxed{\dfrac{5}{4}}$,

$(\text{우변})=2-\dfrac{1}{\boxed{2}}=\boxed{\dfrac{3}{2}}$

따라서 $n=2$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\geq\boxed{2})$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}<2-\dfrac{1}{k}$

양변에 $\boxed{\dfrac{1}{(k+1)^2}}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\boxed{\frac{1}{(k+1)^2}}<2-\frac{1}{k}+\boxed{\frac{1}{(k+1)^2}}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

한편, $k\geq2$이므로

$$\begin{aligned}&\left\{\boxed{2-\frac{1}{(k+1)}}\right\}-\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}\\&=-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}\\&=\frac{1}{\boxed{k(k+1)^2}}>0\end{aligned}$$

$$\therefore\ 2-\frac{1}{k+1}\ >\ 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(\boxed{k+1})^2}<2-\frac{1}{\boxed{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq\boxed{2}$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

단원 총정리 문제 Ⅲ 수열

pp. 168 ~ 171

01 ⑤	02 ③	03 7	04 ④	05 ②
06 ⑤	07 ②	08 ①	09 101	10 34
11 ②	12 ⑤	13 10	14 ⑤	15 2
16 ⑤	17 ④	18 ②	19 ①	20 ②

01 답 ⑤

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=47$ ...... ㉠

$a_{10}=a+9d=19$ ...... ㉡

㉡$-$㉠에서

$7d=-28\qquad\therefore\ d=-4$

㉠에서

$a+2\times(-4)=47\qquad\therefore\ a=55$

$\therefore\ a_n=55+(n-1)\times(-4)=-4n+59$

이 항이 음수이기 위해서는

$-4n+59<0$

$\therefore\ n>14.75$

따라서 구하는 항은 제15항이다.

02 답 ③

$\dfrac{2}{b+c}=\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{c+a}$에서

$2(a+b)(c+a)=(b+c)(c+a)+(a+b)(b+c)$

$\therefore\ 2a^2=b^2+c^2$

03 답 7

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$S_3=\dfrac{3(2a+2d)}{2}=6$에서 $a+d=2$ ...... ㉠

$S_6=\dfrac{6(2a+5d)}{2}=3$에서 $2a+5d=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ d=-1$

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\dfrac{n(-n+7)}{2}=0$

$\therefore\ n=7\ (\because\ n>0)$

04 답 ④

첫째항이 11, 공차가 $-\frac{2}{3}$이므로

$a_n=11+(n-1)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}n+\frac{35}{3}\geq 0$

$-2n+35\geq 0 \qquad \therefore n\leq 17.5$

따라서 $n=18$일 때, 일반항 a_n은 음수가 되므로 제17항까지의 합이 최대이다.

05 답 ②

두 개의 양의 실수를 x, y라고 하면

3, x, y가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$x^2=3y$ …… ㉠

x, y, 9가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2y=x+9 \qquad \therefore y=\frac{x+9}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2x^2=3x+27$에서

$2x^2-3x-27=0$

$(2x-9)(x+3)=0 \qquad \therefore x=\frac{9}{2}$ 또는 $x=-3$

그런데 $x>0$이므로 $x=\frac{9}{2}$이고, ㉠에서 $y=\frac{27}{4}$

$\therefore x+y=\frac{45}{4}$

06 답 ⑤

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_1+a_4=a+ar^3=3$ …… ㉠

$a_4+a_7=ar^3+ar^6=r^3(a+ar^3)=24$ …… ㉡

㉡÷㉠에서 $r^3=8 \qquad \therefore r=2$ ($\because r$는 실수)

㉠에서 $a+8a=3 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 $S=\dfrac{\frac{1}{3}\times(2^7-1)}{2-1}=\frac{127}{3}$이므로

$3S=3\times\frac{127}{3}=127$

07 답 ②

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1}$ …… ㉠

$a_1=S_1=2-1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같다.

$\therefore a_n=2^{n-1}\ (n\geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이다.

08 답 ①

n회 시행 후 남아 있는 넓이를 S_n이라고 하면

1회 시행 후 $S_1=\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)$

2회 시행 후 $S_2=\frac{3}{4}S_1=\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)$

3회 시행 후 $S_3=\frac{3}{4}S_2=\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)$

⋮

따라서 10회 반복 시행 후 남아 있는 종이의 넓이 S_{10}은

$S_{10}=\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)=\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

09 답 101

주어진 수열의 일반항은 $a_n=2+3(n-1)=3n-1$

$3n-1=296$에서

$3n=297 \qquad \therefore n=99$

$\therefore 2+5+8+\cdots+296=\sum_{k=1}^{99}(3k-1)$

따라서 $a=3$, $b=-1$, $c=99$이므로

$a+b+c=3-1+99=101$

10 답 34

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{n}(k^2+6)&=\sum_{k=1}^{n}(k^2+6)-\sum_{k=1}^{3}(k^2+6)\\&=\sum_{k=1}^{n}(k^2+6)-\left(\frac{3\times4\times7}{6}+3\times6\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}(k^2+6)-32\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{좌변})&=\sum_{k=1}^{n}(k+2)^2-\sum_{k=1}^{n}(k^2+6)+32\\&=\sum_{k=1}^{n}(4k-2)+32\end{aligned}$$

따라서 $a=4$, $b=-2$, $c=32$이므로

$a+b+c=4-2+32=34$

11 답 ②

ㄱ. $\sum_{i=1}^{j}$의 변수는 i이므로 b_j는 상수이다.

$\therefore \sum_{i=1}^{j}a_ib_j=b_j\sum_{i=1}^{j}a_i$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}$

$\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\neq\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{k=i}^{n} a_k = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_n$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{i-1} + a_i + \cdots + a_n)$
$\qquad - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{i-1})$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{i-1} a_k$ (참)

ㄹ. $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ㄴ뿐이다.

12 답 ⑤

수열 $\{a_n\}$의 제n항 a_n은

$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^k - 1) = \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1$

$= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n$

$= 2^{n+1} - n - 2$

13 답 10

$a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$이라고 하면

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$

$= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{100} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$

$= (1 - 0) + (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) +$
$\qquad \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$

$= \sqrt{100} = 10$

14 답 ⑤

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n(n+1)(n+2)(n+3)$이라고 하면

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)$

$= 4n(n+1)(n+2)$ ...... ㉠

$a_1 = S_1 = 24$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n = 4n(n+1)(n+2)\ (n \geq 1)$

$\therefore \sum_{k=1}^{20} \frac{4k}{a_k} = \sum_{k=1}^{20} \frac{4k}{4k(k+1)(k+2)}$

$= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$= \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{22} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$

15 답 2

$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = \frac{2+1}{3} = 1,$

$a_4 = \frac{1+1}{2} = 1,\ a_5 = \frac{1+1}{1} = 2,$

$a_6 = \frac{2+1}{1} = 3,\ a_7 = \frac{3+1}{2} = 2,\ a_8 = 1,$

$a_9 = 1,\ a_{10} = 2,\ \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 3, 2, 1, 1, 2가 이 순서로 반복하여 나타나는 수열이므로

$a_{100} = a_5 = 2$

16 답 ⑤

$a_1 = 1$

$a_2 = \sqrt{2}$

$a_3 = 2$

$a_4 = 1$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, $\sqrt{2}$, 2가 이 순서로 반복하여 나타나는 수열이므로

$a_{12} = a_3 = 2$

17 답 ④

① $p(1) \Rightarrow p(4) \Rightarrow p(7) \Rightarrow \cdots$
따라서 n이 3으로 나누어 나머지가 1인 자연수일 때, 성립한다.

② $p(2) \Rightarrow p(3) \Rightarrow p(4) \Rightarrow \cdots$
따라서 n이 2 이상인 자연수일 때, 성립한다.

③ $p(1) \Rightarrow p(2) \Rightarrow p(4) \Rightarrow \cdots$
따라서 n이 $2^{k-1}(k=1, 2, \cdots)$일 때, 성립한다.

④ $p(1) \Rightarrow p(2) \Rightarrow p(3) \Rightarrow \cdots$
따라서 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

⑤ $p(1) \Rightarrow p(0) \Rightarrow p(-1) \Rightarrow \cdots$
그런데 n은 자연수이므로 $p(1)$만 참이다.

18 답 ②

홀수는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

(i) $p(1)$이 참임을 증명한다.

k가 홀수이면 그 다음 홀수는 $k+2$이므로

(ii) $p(k)$가 참이라고 가정하면
$p(k+2)$도 참임을 증명해야 한다.

따라서 $l=1$, $m=2$이므로

$l+m=3$

19 답 ①

$a_k=4^{2k-1}+1=5l$이므로

$a_{k+1}=4^{2(k+1)-1}+1$

$=\boxed{4^{2k+1}}+1=4^2\times4^{2k-1}+1$

$=16(4^{2k-1}+1)-15$

$=16\times5l-15$

$=5\times(\boxed{16l-3})$

따라서 $f(k)=4^{2k+1}$, $g(l)=16l-3$이므로

$f(1)+g(2)=4^3+(16\times2-3)=93$

20 답 ②

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$,

(우변)$=a^2+b^2$

따라서 $a>0$, $b>0$에서 $ab>0$이므로

$n=2$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq2)$일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(a+b)^k>a^k+b^k$

양변에 $(a+b)$를 곱하면 $a+b>0$이므로

$(a+b)^{\boxed{k+1}}>(a^k+b^k)(a+b)$

$=a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb$

$>\boxed{a^{k+1}+b^{k+1}}$

$\therefore (a+b)^{\boxed{k+1}}>\boxed{a^{k+1}+b^{k+1}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $a=2$, $b=3$일 때,

$f(k)=k+1$, $g(k)=2^{k+1}+3^{k+1}$이므로

$f(1)\times g(1)=2\times(2^2+3^2)=26$