수학 기본 실력 100% 충전

수력충전

개념 충전 » 수능 기초 연산서

고등 수학 Ⅱ

[정답 및 해설]

자이스토리 · 수경출판사

Ⅰ 함수의 극한과 연속

Ⅰ－1 함수의 극한

pp. 10~23

01 답 1) 5 2) 4 3) 1 4) 5

1) $f(x)=x+2$라 하면 x의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 5에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 3}(x+2)=5$

2) $f(x)=x^2+3x$라 하면 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 4에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 1}(x^2+3x)=4$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$라 하면 $x\neq -1$일 때,

$f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+1}=\boxed{x+2}$

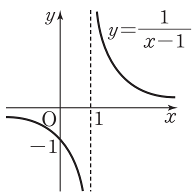
따라서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\boxed{1}$에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}=\boxed{1}$

4) $f(x)=5$라 하면 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 5에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to 0}5=5$

02 답 1) 0 2) -1 3) ∞

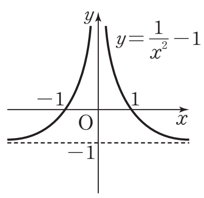
1) $y=\dfrac{1}{x-1}$의 그래프가 그림과 같으므로

$\lim_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$



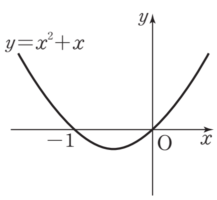
2) $y=\dfrac{1}{x^2}-1$의 그래프가 그림과 같으므로

$\lim_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)=-1$



3) $y=x^2+x$의 그래프가 그림과 같으므로

$\lim_{x\to -\infty}(x^2+x)=\infty$



03 답 수렴, 극한값, 극한

04 답 1) 0 2) -2 3) 1 4) 1

1) x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\boxed{0}$에 가까워지므로 $\lim_{x\to 1+}f(x)=\boxed{0}$

2) x의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -2에 가까워지므로 $\lim_{x\to 1-}f(x)=-2$

3) x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 가까워지므로 $\lim_{x\to 2+}f(x)=1$

4) x의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 가까워지므로 $\lim_{x\to 2-}f(x)=1$

05 답 1) 1 2) -1 3) 2 4) -2

1) $x>1$일 때, $|x-1|=x-1$이므로

$\lim_{x\to 1+}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$

2) $x<1$일 때, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$\lim_{x\to 1-}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1-}\dfrac{x-1}{-(x-1)}=\boxed{-1}$

3) $x>1$일 때, $|x-1|=x-1$이므로

$\lim_{x\to 1+}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(x+1)=2$

4) $x<1$일 때, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$\lim_{x\to 1-}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1-}\dfrac{x^2-1}{-(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1-}\{-(x+1)\}=-2$

06 답 1) 존재하지 않는다. 2) -2
3) 존재하지 않는다. 4) 존재하지 않는다.

1) $\lim_{x\to 0+}\dfrac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\dfrac{x}{x}=\boxed{1}$

$\lim_{x\to 0-}\dfrac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\dfrac{-x}{x}=\boxed{-1}$

즉, $\lim_{x\to 0+}\dfrac{|x|}{x}\neq\lim_{x\to 0-}\dfrac{|x|}{x}$이므로

극한 $\lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$는 $\boxed{\text{존재하지 않는다.}}$

2) $x\neq -2$일 때, $\dfrac{x^2+2x}{x+2}=x$이므로

$\lim_{x\to -2+}\dfrac{x^2+2x}{x+2}=\lim_{x\to -2+}x=-2,$

$\lim_{x\to -2-}\dfrac{x^2+2x}{x+2}=\lim_{x\to -2-}x=-2$

$\therefore \lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x+2}=-2$

3) $\lim_{x\to -2+}\dfrac{x^2+2x}{|x+2|}=\lim_{x\to -2+}x=-2,$

$\lim_{x\to -2-}\dfrac{x^2+2x}{|x+2|}=\lim_{x\to -2-}(-x)=2$

즉, $\lim_{x\to -2+}\dfrac{x^2+2x}{|x+2|}\neq\lim_{x\to -2-}\dfrac{x^2+2x}{|x+2|}$이므로

극한 $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{|x+2|}$는 존재하지 않는다.

4) $\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x+1)=2$,

$\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{-(x-1)}$

$=\lim_{x\to1-}\{-(x+1)\}=-2$

즉, $\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{|x-1|}\neq\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{|x-1|}$이므로

극한 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{|x-1|}$은 존재하지 않는다.

07 답 1) (1) **2** (2) **1** (3) 존재하지 않는다.

2) (1) **0** (2) **1** (3) 존재하지 않는다.

1) (1) $x\to2+$일 때, $2<x<3$이므로 $\lim_{x\to2+}[x]=\boxed{2}$

(2) $x\to2-$일 때, $1<x<2$이므로 $\lim_{x\to2-}[x]=\boxed{1}$

(3) $\lim_{x\to2+}[x]\boxed{\neq}\lim_{x\to2-}[x]$이므로 극한 $\lim_{x\to2}[x]$는

$\boxed{\text{존재하지 않는다.}}$

2) (1) $x\to1+$일 때, $[x]=1$이므로

$\lim_{x\to1+}(x-[x])=\lim_{x\to1+}(x-1)=0$

(2) $x\to1-$일 때, $[x]=0$이므로

$\lim_{x\to1-}(x-[x])=\lim_{x\to1-}x=1$

(3) $\lim_{x\to1+}(x-[x])\neq\lim_{x\to1-}(x-[x])$이므로

극한 $\lim_{x\to1}(x-[x])$는 존재하지 않는다.

08 답 좌극한, 우극한, 존재, α

09 답 1) **6** 2) **9** 3) **−6** 4) **4** 5) $-\frac{2}{3}$ 6) **7**

1) $\lim_{x\to a}2f(x)=2\lim_{x\to a}f(x)=2\times3=6$

2) $\lim_{x\to a}\{f(x)-3g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-3\lim_{x\to a}g(x)$

$=3-3\times(-2)=9$

3) $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)=3\times(-2)=-6$

4) $\lim_{x\to a}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to a}g(x)\times\lim_{x\to a}g(x)$

$=(-2)\times(-2)=4$

5) $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to a}g(x)}{\lim_{x\to a}f(x)}=-\frac{2}{3}$

6) $\lim_{x\to a}\frac{3f(x)-2}{g(x)+3}=\frac{\lim_{x\to a}\{3f(x)-2\}}{\lim_{x\to a}\{g(x)+3\}}$

$=\frac{3\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}2}{\lim_{x\to a}g(x)+\lim_{x\to a}3}$

$=\frac{3\times3-2}{-2+3}=7$

10 답 1) **0** 2) **6** 3) **16** 4) **8**

1) $\lim_{x\to2}(x^2-3x+2)=\lim_{x\to2}x^2-3\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}2$

$=2^2-3\times2+2=0$

2) $\lim_{x\to2}(x+1)(x^2-2)=\lim_{x\to2}(x+1)\times\lim_{x\to2}(x^2-2)$

$=3\times2=\boxed{6}$

[다른 풀이]

$\lim_{x\to2}(x+1)(x^2-2)=\lim_{x\to2}(x^3+x^2-2x-2)$

$=\boxed{2}^3+\boxed{2}^2-2\times\boxed{2}-2=\boxed{6}$

3) $\lim_{x\to4}\frac{x^2}{x-3}=\frac{\lim_{x\to4}x^2}{\lim_{x\to4}(x-3)}=\frac{4^2}{1}=16$

4) $\lim_{x\to5}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{\lim_{x\to5}(x^2-9)}{\lim_{x\to5}(x-3)}=\frac{16}{2}=8$

[다른 풀이]

$\lim_{x\to5}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to5}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to5}(x+3)=8$

11 답 1) $\alpha\pm\beta$ 2) $\alpha\beta$ 3) $\frac{\alpha}{\beta}$

12 답 1) **4** 2) **4** 3) **3** 4) **−2** 5) **2** 6) **6** 7) $\frac{2}{3}$ 8) **8**

1) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(\boxed{x+2})=\boxed{4}$

2) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+3)=4$

3) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{12}{4}=3$

4) $\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$

5) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x(\boxed{\sqrt{x+1}+1})}{(\sqrt{x+1}-1)(\boxed{\sqrt{x+1}+1})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=\boxed{2}$

6) $\lim_{x\to9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$

$=\lim_{x\to9}(\sqrt{x}+3)=6$

7) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2}{3}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}(x+1)(\sqrt{x+3}+2)=2\times4=8$

13

답 1) 인수분해 2) 유리화

14

답 1) 2 2) 1 3) $\frac{1}{2}$ 4) -2 5) 6

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=2$

2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\boxed{\frac{1}{x}}}=\boxed{1}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{2x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{3}{x^2}}=\frac{1}{2}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+5}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\frac{5}{x}}{1+\frac{3}{x}}=-2$

5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+5)(2x-1)}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+7x-5}{x^2+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=6$

15

답 1) 1 2) 1 3) 1 4) 2 5) -2 6) -1

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}}=\boxed{1}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{3x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{4}{3+1}=1$

3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}{2-\frac{3}{x}}=\frac{1+1}{2}=1$

4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\frac{4}{x}}=2$

5) $-x=t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\boxed{\infty}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4t^2+1}}{\boxed{-t+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}}{-1+\frac{1}{t}}=\boxed{-2}$

6) $-x=t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{9x^2-1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t+2}{\sqrt{9t^2-1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3+\frac{2}{t}}{\sqrt{9-\frac{1}{t^2}}}=-1$

16

답 1) $\frac{1}{2}$ 2) 3 3) 2 4) 1

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\boxed{\sqrt{x^2+x}+x})}{(\boxed{\sqrt{x^2+x}+x})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\boxed{\sqrt{x^2+x}+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x}-x)$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+6x}-x)(\sqrt{x^2+6x}+x)}{\sqrt{x^2+6x}+x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1}=\frac{6}{1+1}=3$

3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-2})$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-2})(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2})}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}=2$

4) $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\boxed{\infty}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x}+x)=\lim_{t\to\boxed{\infty}}(\boxed{\sqrt{t^2+2t}-t})$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+2t}-t)(\sqrt{t^2+2t}+t)}{\sqrt{t^2+2t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{\sqrt{t^2+2t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{t}}+1}=\boxed{1}$

17

답 1) -1 2) 2 3) $\frac{1}{5}$ 4) -1

1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{-1}{x+1}=\boxed{-1}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x+1}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x+2}{x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x+2}{(x+1)^2}=2$

3) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{5-x}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{5}(\sqrt{5-x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{5-\sqrt{5x}}=\frac{1}{5}$

4) $\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\boxed{-2x}}{x+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\frac{-2}{1+1}=\boxed{-1}$

18 답 1) 최고차항 2) 유리화

19 답 1) 2 2) 1 2) $\frac{1}{3}$

1) $\frac{2x-3}{x}\le f(x)\le\frac{2x^2+5x}{x^2}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{5}{x}\right)=2$

즉, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x}{x^2}=\boxed{2}$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\boxed{2}$

2) $\frac{x+2}{x+1}<f(x)<\frac{x+1}{x}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

즉, $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$

3) $\frac{x^2+1}{3x^2-4x+1}<f(x)<\frac{2x^2+3x+2}{6x^2+1}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x^2-4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+2}{6x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{6+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{3}$

즉, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x^2-4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+2}{6x^2+1}=\frac{1}{3}$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{3}$

20 답 1) 4 2) 5

1) $2x-1<f(x)<2x+1$의 각 변을 제곱하면

$(2x-1)^2<\{f(x)\}^2<(2x+1)^2$

$x^2-x+1>0$이므로 각 변을 x^2-x+1로 나누면

$\frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2-x+1}<\frac{(2x+1)^2}{x^2-x+1}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x+1}{x^2-x+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$=4$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+1}{x^2-x+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$=4$

즉, $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2-x+1}=\boxed{4}$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2-x+1}=\boxed{4}$

2) $x^2+3x-4\le f(x)\le 4x^2-3x-1$에서

(i) $x>1$일 때 $x-1>0$이므로 양변을 $x-1$로 나누면

$\frac{x^2+3x-4}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{4x^2-3x-1}{x-1}$

이때, $\lim_{x\to1+}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x+4)=5$,

$\lim_{x\to1+}\frac{4x^2-3x-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}(4x+1)=5$이므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}=5$

(ii) $x<1$일 때 $x-1<0$이므로 양변을 $x-1$로 나누면

$\frac{4x^2-3x-1}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{x^2+3x-4}{x-1}$

이때, $\lim_{x\to1-}\frac{4x^2-3x-1}{x-1}=\lim_{x\to1-}(4x+1)=5$,

$\lim_{x\to1-}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to1-}(x+4)=5$이므로

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}=5$

(i), (ii)에 의하여

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}=5$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=5$

21 답 1) $\le$ 2) $\alpha=\beta$

22 답 1) **16** 2) **−5** 3) **−3** 4) **−1** 5) **−5** 6) **−6**

1) $x \to -1$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to \boxed{0}$이어야 한다.

$\lim_{x \to -1}(2x^2+ax+b)=2-a+b=\boxed{0}$

$\therefore b=a-2$ ······ ㉠

$\lim_{x \to -1}\frac{2x^2+ax+b}{x+1}=\lim_{x \to -1}\frac{2x^2+ax+a-2}{x+1}$ (∵ ㉠)

$=\lim_{x \to -1}\frac{(x+1)(2x+a-2)}{x+1}$

$=\lim_{x \to -1}(2x+a-2)$

$=-2+a-2=5$

$\therefore a=\boxed{9}, b=\boxed{7}$ (∵ ㉠)

$\therefore a+b=\boxed{16}$

2) $x \to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4$ ······ ㉠

$\lim_{x \to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$ (∵ ㉠)

$=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$

$=\lim_{x \to 2}(x+a+2)=4+a=5$

따라서 $a=1$, $b=-6$ (∵ ㉠)이므로 $a+b=-5$

3) $x \to 2$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4$ ······ ㉠

$\lim_{x \to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$ (∵ ㉠)

$=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$

$=\lim_{x \to 2}(x+a+2)=a+4=3$

따라서 $a=-1$, $b=-2$ (∵ ㉠)이므로 $a+b=-3$

4) $x \to 1$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ ······ ㉠

$\lim_{x \to 1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\lim_{x \to 1}\frac{x-1}{x^2+ax-a-1}$ (∵ ㉠)

$=\lim_{x \to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$

$=\lim_{x \to 1}\frac{1}{x+a+1}=\frac{1}{2+a}=1$

따라서 $a=-1$, $b=0$ (∵ ㉠)이므로 $a+b=-1$

5) $x \to 2$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4$ ······ ㉠

$\lim_{x \to 2}\frac{x^2-2x}{x^2+ax+b}=\lim_{x \to 2}\frac{x^2-2x}{x^2+ax-2a-4}$ (∵ ㉠)

$=\lim_{x \to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+a+2)}$

$=\lim_{x \to 2}\frac{x}{x+a+2}=\frac{2}{4+a}=\frac{2}{5}$

따라서 $a=1$, $b=-6$ (∵ ㉠)이므로 $a+b=-5$

6) $x \to 2$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 2}(x^2-b)=4-b=0$ $\therefore b=4$

$\lim_{x \to 2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=\lim_{x \to 2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-4}$

$=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(x-a)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x \to 2}\frac{x-a}{x+2}=\frac{2-a}{4}=3$

$\therefore a=-10$

$\therefore a+b=-6$

23 답 1) $\boldsymbol{a=4}$, $\boldsymbol{b=-8}$ 2) $\boldsymbol{a=2}$, $\boldsymbol{b=-2}$

3) $\boldsymbol{a=6}$, $\boldsymbol{b=3}$ 4) $\boldsymbol{a=4}$, $\boldsymbol{b=\frac{1}{2}}$

5) $\boldsymbol{a=-3}$, $\boldsymbol{b=-\frac{3}{4}}$

1) $x \to 4$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 4}(a\sqrt{x}+b)=a\sqrt{4}+b=2a+b=0$

$\therefore b=-2a$ ······ ㉠

$\lim_{x \to 4}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=\lim_{x \to 4}\frac{a\sqrt{x}-\boxed{2a}}{x-4}$ (∵ ㉠)

$=\lim_{x \to 4}\frac{a(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x \to 4}\frac{a}{\sqrt{x}+2}=\frac{a}{\sqrt{4}+2}=\boxed{1}$

$\therefore a=\boxed{4}, b=\boxed{-8}$

2) $x \to 1$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 1}(a\sqrt{x}+b)=a+b=0$ $\therefore b=-a$ ······ ㉠

$\lim_{x \to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{a(\sqrt{x}-a)}{x-1}$ (∵ ㉠)

$=\lim_{x \to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}$

$=a\lim_{x \to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=a\lim_{x \to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}=1$

$\therefore a=2, b=-2$

3) $x \to 3$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 3}(\sqrt{x+a}-b)=\sqrt{3+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{3+a}$ ...... ㉠

$$\lim_{x \to 3}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-3}=\lim_{x \to 3}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a}}{x-3} \ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x \to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})}$$
$$=\lim_{x \to 3}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{3+a}}=\frac{1}{6}$$

$\therefore a=6,\ b=3$

4) $x \to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 0}(\sqrt{ax+4}-\sqrt{2x+a})=\sqrt{4}-\sqrt{a}=0$

$\therefore a=4$ ...... ㉠

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{ax+4}-\sqrt{2x+a}}{x}=\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{4x+4}-\sqrt{2x+4}}{x}$$
$(\because ㉠)$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{(4x+4)-(2x+4)}{x(\sqrt{4x+4}+\sqrt{2x+4})}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{2}{\sqrt{4x+4}+\sqrt{2x+4}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

$\therefore a=4,\ b=\frac{1}{2}$

5) $x \to -2$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to -2}(\sqrt{2x^2+1}+a)=\sqrt{9}+a=0$

$\therefore a=-3$ ...... ㉠

$$\lim_{x \to -2}\frac{x+2}{\sqrt{2x^2+1}+a}=\lim_{x \to -2}\frac{x+2}{\sqrt{2x^2+1}-3} \ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x \to -2}\frac{(x+2)(\sqrt{2x^2+1}+3)}{2x^2-8}$$
$$=\lim_{x \to -2}\frac{(x+2)(\sqrt{2x^2+1}+3)}{2(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x \to -2}\frac{\sqrt{2x^2+1}+3}{2(x-2)}$$
$$=-\frac{3}{4}$$

$\therefore a=-3,\ b=-\frac{3}{4}$

24 답 1) 0 2) 0

25 답 1) $f(x)=x^2+16x+28$ 2) $f(x)=x^2-4x+3$

1) $x \to -2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to -2}f(x)=f(-2)=0$

$\therefore f(x)=(x+2)(x+a)$ (a는 상수)

$$\lim_{x \to -2}\frac{(x+2)(x+a)}{x^2-4}=\lim_{x \to -2}\frac{(x+2)(x+a)}{(x-2)(x+2)}=\frac{a-2}{-4}$$

즉, $\frac{a-2}{-4}=-3$이므로 $a=14$

$\therefore f(x)=(x+2)(x+14)=x^2+16x+28$

2) $\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)}{x^2-x+1}=1$이므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 $\boxed{1}$인 이차함수이다.

또, $\lim_{x \to 3}\frac{f(x)}{x-3}=2$에서 $\lim_{x \to 3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x \to 3}f(x)=f(3)=\boxed{0}$

$\therefore f(x)=(x-3)(x-a)$ (a는 상수)

$$\lim_{x \to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x \to 3}\frac{(x-3)(x-a)}{x-3}=3-a$$

즉, $3-a=2$이므로 $a=\boxed{1}$

$\therefore f(x)=(x-3)(x-1)=\boxed{x^2-4x+3}$

26 답 1) $f(x)=(x+1)(x^2+3)$
2) $f(x)=x^3+x^2+2x$

1) $\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2-1}=1$에서 $f(x)-x^3$은 이차항의 계수가 $\boxed{1}$인 $\boxed{\text{이차함수}}$이므로

$f(x)-x^3=x^2+ax+b$

$\therefore f(x)=x^3+x^2+ax+b$ (a, b는 상수) ...... ㉠

또, $\lim_{x \to -1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-2$에서 $x \to -1$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to \boxed{0}$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x \to -1}f(x)=f(-1)=\boxed{0}$

㉠에 의하여 $-1+1-a+b=0$ $\quad \therefore a=b$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=x^3+x^2+bx+b=(x+1)(x^2+b)$이므로

$$\lim_{x \to -1}\frac{(x+1)(x^2+b)}{x^2-1}=\lim_{x \to -1}\frac{(x+1)(x^2+b)}{(x+1)(x-1)}=\frac{b+1}{-2}$$

즉, $\frac{b+1}{-2}=-2$이므로 $b=\boxed{3}$

$\therefore f(x)=\boxed{(x+1)(x^2+3)}$

2) $\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=1$에서 $f(x)-x^3$은 이차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)-x^3=x^2+ax+b$

$\therefore f(x)=x^3+x^2+ax+b$ (a, b는 상수) ...... ㉠

또, $\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x \to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x \to 0}f(x)=f(0)=0$

즉, ㉠에서 $b=0$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+ax$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(x^2+x+a)=a$$

즉, $a=2$이므로 $f(x)=x^3+x^2+2x$

27 답 1) 3 2) $\frac{7}{4}$

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{f(x)}=2$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $\boxed{1}$인 이차함수이다.

또, $\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{f(x)}=3$에서 $x\to2$일 때, (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to\boxed{0}$이어야 한다.

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=0$에서 함수 $f(x)$는 $\boxed{x-2}$를 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=(x-2)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{f(x)}=\lim_{x\to2}\frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x-a}=\frac{6}{2-a}$$

즉, $\frac{6}{2-a}=3$이므로 $a=\boxed{0}$

따라서 $f(x)=x(x-2)$이므로 $f(3)=\boxed{3}$

2) $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-x-2}=2$에서

$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to2}(ax^2+bx+c)=4a+2b+c=0$ …… ㉠

또, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-x-2}=1$에서

$a=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $c=-2b-4$ …… ㉢

$$\therefore f(x)=\frac{x^2+bx-2b-4}{x^2-x-2}=\frac{(x-2)(x+b+2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x+b+2}{x+1}=\frac{b+4}{3}=2$$

$\therefore b=2$

$b=2$를 ㉢에 대입하면 $c=-8$

따라서 $f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}$이므로

$f(3)=\frac{7}{4}$

28 답 1) $\frac{1}{4}$ 2) 2

1) $x-1=t$라 하면 $x-2=t-1$이고 $x\to1$일 때 $t\to\boxed{0}$, $x\to2$일 때 $t\to\boxed{1}$이다.

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}\times\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{4}\times\lim_{t\to\boxed{1}}\frac{f(\boxed{t}-1)}{\boxed{t}-1}$$

$$=\frac{1}{4}\times\boxed{1}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

2) $$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$$

이때, $x-1=t$라 하면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=4$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x^2-1}=4\times\frac{1}{2}=2$$

29 답 1) $=$ 2) $<$, $>$ 3) $x-a$ 4) $x-a$

30 답 1) $\frac{1}{2}$ 2) 2

1) 점 P$(a,\ b)$가 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로 $b=a^2$

따라서 사각형 OAPB의 넓이와 둘레의 길이는 각각

$S(a)=ab=a\times a^2=a^3$

$L(a)=2(a+b)=2(a+a^2)=2a^2+2a$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{S(a)}{aL(a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{a^3}{2a^3+2a^2}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2+\boxed{\frac{2}{a}}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

2) 점 P$(a,\ b)$가 포물선 $y=2(x+1)^2$ 위의 점이므로

$b=2(a+1)^2$

이때, 점 Q의 좌표는 $(-1,\ 0)$이므로 삼각형 OPQ의 넓이는

$$S(a)=\frac{1}{2}\times\overline{OQ}\times b=\frac{1}{2}\times1\times2(a+1)^2$$

$$=a^2+2a+1$$

$$\therefore \lim_{a\to0}\frac{S(a)-1}{a}=\lim_{a\to0}\frac{a^2+2a}{a}=\lim_{a\to0}(a+2)=2$$

31 답 1) $\frac{1}{2}$ 2) 1

1) 두 점 A$(2,\ 0)$, B$(0,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=-x+2$이다. 이때, 점 P$(a,\ b)$는 선분 AB 위의 점이므로 $b=-a+2\,(0\le a\le2)$

따라서 $\overline{OH}=a$, $\overline{PH}=b=-a+2$이므로 사각형 OHPM의 넓이는

$f(a)=\overline{OH}\times\overline{PH}=a(2-a)$

$$\therefore \lim_{a\to 2-}\frac{f(a)}{4-a^2}=\lim_{a\to 2-}\frac{a(2-a)}{(2+a)(2-a)}$$

$$=\lim_{a\to 2-}\frac{a}{2+a}=\frac{1}{2}$$

2) $\overline{\mathrm{OA}}=a$, $\overline{\mathrm{OB}}=2$이므로

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times a\times 2=a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2}=\sqrt{a^2+4}$이고 삼각형 OAB에 내접하는 원의 중심을 C라 하면 이 원의 반지름의 길이가 $f(a)$이므로

$$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{COA}+\triangle\mathrm{CAB}+\triangle\mathrm{CBO}$$

$$=\frac{1}{2}\times f(a)\times(\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{OB}})$$

$$=\frac{1}{2}\times f(a)\times(a+\sqrt{a^2+4}+2) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠=㉡이므로

$a=\frac{1}{2}\times f(a)\times(a+\sqrt{a^2+4}+2)$에서

$$f(a)=\frac{2a}{a+2+\sqrt{a^2+4}}$$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}f(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{2a}{a+2+\sqrt{a^2+4}}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{a}+\sqrt{1+\frac{4}{a^2}}}$$

$$=\frac{2}{1+0+1}=1$$

32 답 1) $\frac{3}{2}$ 2) 0 3) $\frac{1}{2\pi}$

1) 점 A$(a,\ b)$를 지나는 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+3a}$ ($\because b=\sqrt{3a}$)이고

점 B$(a,\ 0)$을 지나는 원의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OB}}=a$이다.

이때, 두 원의 반지름의 길이의 차 $f(a)$는

$f(a)=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{a^2+3a}-a$이므로

$$\lim_{a\to\infty}f(a)=\lim_{a\to\infty}(\sqrt{a^2+3a}-a)$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{(\sqrt{a^2+3a}-a)(\sqrt{a^2+3a}+a)}{\sqrt{a^2+3a}+a}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{3a}{\sqrt{a^2+3a}+a}=\lim_{a\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{a}}+1}$$

$$=\frac{3}{2}$$

2) 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+y^2=r^2$

점 P$(x,\ y)$는 원과 곡선 $y=\sqrt{x}$의 교점이므로

$x^2+y^2=r^2$, $y=\sqrt{x}$를 연립하여 r를 구하면

$x^2+x=r^2 \qquad \therefore r=\boxed{\sqrt{x^2+x}}$

이때, $\overline{\mathrm{QH}}=r-x=\sqrt{x^2+x}-x$

또, $\overline{\mathrm{PH}}^2=y^2=(\sqrt{x})^2=x$

$$\therefore \lim_{x\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{QH}}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0+}(\boxed{\sqrt{x^2+x}+x})=\boxed{0}$$

3) 점 A의 좌표가 $(t,\ \sqrt{2t})$이므로 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{t^2+2t}$

따라서 원의 넓이는 $S(t)=\pi\overline{\mathrm{OA}}^2=\pi(t^2+2t)$이다.

한편, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OAB의 넓이는

$$T(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{t^2+2t}\times\sqrt{2t}$$

$$=\frac{t\sqrt{2t+4}}{2}$$

이때, $\overline{\mathrm{OA}}\to 0+$이면 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{\overline{\mathrm{OA}}\to 0+}\frac{T(t)}{S(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{t\sqrt{2t+4}}{2}}{\pi(t^2+2t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{2t+4}}{2\pi(t+2)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}$$

33 답 1) $S(a)=4(1-a^2)$ 2) $\frac{1}{8}$

1) 점 A$(a,\ b)$를 지나고 y축과 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=\boxed{b}$이다.

이때, 점 A는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=1$에서 $b^2=\boxed{1-a^2}$

따라서 $b=\sqrt{1-a^2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2b=\boxed{2\sqrt{1-a^2}}$

$\therefore S(a)=\overline{\mathrm{AB}}^2=(2\sqrt{1-a^2})^2=\boxed{4(1-a^2)}$

2)
$$\lim_{a\to 1-}\frac{1-a}{S(a)}=\lim_{a\to 1-}\frac{1-a}{\boxed{4(1-a^2)}}=\lim_{a\to 1-}\frac{1-a}{4(1+a)(1-a)}$$

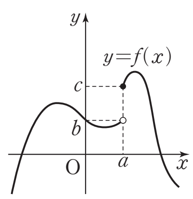
$$=\lim_{a\to 1-}\frac{1}{4(1+a)}=\frac{1}{4\times 2}=\boxed{\frac{1}{8}}$$

Ⅰ-2 함수의 연속

pp. 24~31

34 답 ㄹ

그림에서 $f(a)=c$, $\lim_{x\to a+}f(x)=c$, $\lim_{x\to a-}f(x)=b$이므로 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.



35 답 1) 연속 2) 연속 3) 불연속 4) 불연속 5) 불연속

1) $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^2-1)=0=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

2) $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x^2-2x)=0=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

3) $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$이고

$f(1)=1$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

4) $f(0)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

5) $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}[x]=\boxed{0}$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}[x]=\boxed{1}$

$\therefore \lim_{x\to1-}f(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 $\boxed{\text{불연속}}$이다.

36 답 1) $a=3$, $b=1$ 2) $a=8$, $b=16$ 3) $a=3$, $b=5$

1) $x=2$에서 연속이려면 $f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$이어야 하므로

$b=\lim_{x\to2}\boxed{\frac{x^2-ax+2}{x-2}}$

한편, $x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to2}(x^2-ax+2)=4-2a+2=0$에서

$a=\boxed{3}$

$\therefore b=\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\boxed{1}$

$\therefore a=\boxed{3}$, $b=\boxed{1}$

2) $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1}=2$ …… ㉠

한편, $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+3}-b)=2a-b=0$에서

$b=2a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-2a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+3}-2)}{x-1}$$
$$=a\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=a\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{a}{4}=2$$

$\therefore a=8$, $b=16$

3) $x=1$에서 연속이려면 $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$이어야 하므로

$b=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-4}{x-1}$

한편, $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to1}(x^2+ax-4)=1+a-4=0$에서 $a=3$

$$\therefore b=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+4)=5$$

$\therefore a=3$, $b=5$

37 답 a, $\lim_{x\to a}f(x)$, $a+$, $a-$, $=$

38 답 1) $(-\infty, \infty)$ 2) $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ 3) $(-\infty, 2]$ 4) $(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$

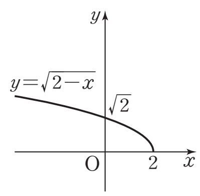
1) 함수 $f(x)=x^2+1$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$이다.

2) 함수 $f(x)=\frac{x}{x-1}$는 분수함수이므로 $x\neq1$일 때 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$이다.

3) $y=\sqrt{2-x}=\sqrt{-(x-2)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 연속인 구간은 $\boxed{(-\infty, 2]}$이다.



4) 함수 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$은 $x^2-2x-3\geq0$, 즉 $(x-3)(x+1)\geq0$에서 $x\leq-1$ 또는 $x\geq3$일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$이다.

39 답 1) $a=2$, $b=3$ 2) $a=0$, $b=1$

1) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$과 $x=2$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$a+1=1^2-1+b$ $\therefore a-b=\boxed{-1}$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$에서

$2a+1=2^2-2+b$ $\therefore 2a-b=\boxed{1}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\boxed{2}$, $b=\boxed{3}$

2) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$에서 $-a+b=1$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+} f(x)=f(1)$에서 $a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=1$

40 답 1) 8 2) 8

1) 함수 $f(x)$가 $x>-1$에서 연속이려면 $x=\boxed{1}$에서 연속이어야 하므로

$f(1)=\displaystyle\lim_{x\to1} f(x)$

$f(1)=k$라 하면 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{ax-4}{\sqrt{x^2+3}-2}=k$ …… ㉠

$x\to1$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}(ax-4)=a-4=0$에서 $a=\boxed{4}$

$a=\boxed{4}$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{4x-4}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4(\sqrt{x^2+3}+2)}{\boxed{x+1}}=\boxed{8}$$

$\therefore f(1)=\boxed{8}$

2) 함수 $f(x)$가 $x=1$과 $x=-1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

$$f(-1)=\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x+3)=2$$

$\therefore f(1)\cdot f(-1)=4\times2=8$

41 답 1) 5 2) $a=-3,\ b=2$

1) $x\neq2$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+x+k}{x-2}$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\boxed{f(2)}=\displaystyle\lim_{x\to2} f(x)$를 만족시켜야 한다.

$x\to2$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2+x+k)=4+2+k=0$에서 $k=\boxed{-6}$

$$\therefore f(2)=\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(\boxed{x+3})=\boxed{5}$$

2) $x\neq-2,\ x\neq1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^3+ax+b}{x^2+x-2}$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$$f(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{x^3+ax+b}{x^2+x-2}$$

$x\to-2$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to-2}(x^3+ax+b)=-8-2a+b=0$에서

$2a-b=-8$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{x^2+x-2}$$

$x\to1$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}(x^3+ax+b)=1+a+b=0$에서

$a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=2$

42 답 연속함수, 연속, $a+$, $f(a)$, $b-$, $f(b)$

43 답 1) $(-\infty,\ \infty)$ 2) $(-\infty,\ \infty)$

3) $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$

4) $(-\infty,\ -2),\ (-2,\ 1),\ (1,\ \infty)$

1) $f(x)+g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ \infty)$이다.

2) $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다. 따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ \infty)$이다.

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 분수함수이므로 $2x-1\neq0$, 즉 $x\neq\boxed{\dfrac{1}{2}}$일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $\left(-\infty,\ \boxed{\dfrac{1}{2}}\right),\ \left(\boxed{\dfrac{1}{2}},\ \infty\right)$이다.

4) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 분수함수이므로 $x^2+x-2\neq0$, 즉 $x\neq-2$, $x\neq1$일 때 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $(-\infty,\ -2),\ (-2,\ 1),\ (1,\ \infty)$이다.

44 답 1) 연속 2) 연속 3) 불연속

1) $g(x)=x,\ h(x)=|x|$라 하면

두 함수 $g(x),\ h(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이므로 함수 $f(x)=g(x)h(x)$도 이 구간에서 연속이다.

2) $g(x)=|x|,\ h(x)=|x-1|$이라 하면

두 함수 $g(x),\ h(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이므로 함수 $f(x)=g(x)+h(x)$도 이 구간에서 연속이다.

3) $g(x)=x^2$, $h(x)=|x|$라 하면 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이지만 함수 $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 구간 $[-1, 1]$에서 불연속이다.

45 답 $g(x)$, 연속

46 답 1) 최댓값 : 12, 최솟값 : 4 2) 최댓값 : 3, 최솟값 : -6 3) 최댓값 : 3, 최솟값 : 1 4) 최댓값 : 6, 최솟값 : 5 5) 최댓값 : 3, 최솟값 : 1

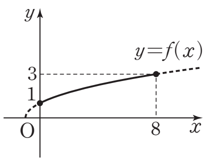
1) $f(x)=x^2+3$은 구간 $[1, 3]$에서 연속이고 $x=3$일 때 최댓값 $\boxed{12}$, $x=1$일 때 최솟값 $\boxed{4}$를 갖는다.

2) $f(x)=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$은 구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 $x=2$일 때 최댓값 3, $x=-1$일 때 최솟값 -6을 갖는다.

3) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$은 구간 $[2, 4]$에서 연속이고 $x=2$일 때 최댓값 3, $x=4$일 때 최솟값 1을 갖는다.

4) $f(x)=\log_{10}x+5$는 구간 $[1, 10]$에서 연속이고 $x=10$일 때 최댓값 6, $x=1$일 때 최솟값 5를 갖는다.

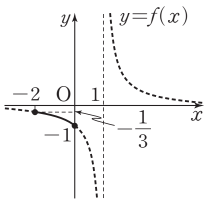
5) 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$은 구간 $[0, 8]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.
구간 $[0, 8]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=8$일 때 최댓값 3, $x=0$일 때 최솟값 1을 갖는다.



47 답 1) 최솟값 : 1 2) 최댓값 : $-\frac{1}{3}$, 최솟값 : -1

1) $f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$은 $x=1$일 때 최솟값 1을 갖고, 최댓값은 없다.

2) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$은 구간 $[-2, 0]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.
구간 $[-2, 0]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 $-\frac{1}{3}$, $x=0$일 때 최솟값 -1을 갖는다.



48 답 1) 최댓값, 최솟값, 최대 · 최소 정리 2) 불연속

49 답 1) 풀이 참조 2) 풀이 참조 3) 풀이 참조

1) $f(x)=x^3+3x-2$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고, $f(-1)=-6\boxed{<}0$, $f(1)=2\boxed{>}0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $\boxed{(-1, 1)}$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^3+3x-2=0$은 열린구간 $\boxed{(-1, 1)}$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

2) $f(x)=x^2+2x-2$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 $f(-1)=-3<0$, $f(2)=6>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^2+2x-2=0$은 열린구간 $(-1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

3) $f(x)=x^4+x-1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 $f(0)=-1<0$, $f(1)=1>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^4+x-1=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

50 답 ㄹ

$f(x)=x^3+3x-3$이라 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-1)=-7<0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{37}{8}<0$

$f(0)=-3<0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{8}<0$

$f(1)=1>0$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{39}{8}>0$ $\quad\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$에서 실근을 갖는다.

51 답 $0<a<7$

$g(x)=f(x)-x^2$이라 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=x^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 방정식 $g(x)=0$이 열린구간 $(-1, 2)$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 $g(-1)g(2)<0$이어야 한다.
$g(-1)=f(-1)-(-1)^2=a+1-1=a$
$g(2)=f(2)-2^2=a-3-4=a-7$
이므로 $g(-1)g(2)=a(a-7)<0$에서 $0<a<7$

52 답 1) 풀이 참조 2) 3 2) 5

1) $f(x)=(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)$

라 하면 함수 $f(x)$는 구간 $[a,\ b]$, $[b,\ c]$에서 연속이다.

(i) $f(a)=(a-b)(a-c)$, $f(b)=(b-c)(b-a)$이고 $f(a)>0$, $f(b)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(ii) $f(b)=(b-c)(b-a)$, $f(c)=(c-a)(c-b)$이고 $f(b)<0$, $f(c)>0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(b,\ c)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때, $f(x)=0$은 이차방정식이고 (i), (ii)에 의하여 구간 $(a,\ b)$, $(b,\ c)$에서 각각 하나의 실근을 갖는다.

2) $f(-2)=-1\ \boxed{<}\ 0$, $f(-1)=1\ \boxed{>}\ 0$이므로

$-2<x<-1$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또한, $f(1)=0$이므로 $x=1$은 하나의 실근이다.

그리고 $f(2)=2\ \boxed{>}\ 0$, $f(3)=-4\ \boxed{<}\ 0$이므로

$2<x<3$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 $-2<x<3$에서 적어도 $\boxed{3}$ 개의 실근을 갖는다.

3) 방정식 $f(x)=0$의 실근은

구간 $(-\infty,\ -3)$에서 적어도 한 개,

구간 $(-3,\ -1)$에서 적어도 한 개,

구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 한 개,

구간 $(2,\ 4)$에서 적어도 한 개,

구간 $(4,\ \infty)$에서 적어도 한 개 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 5개의 실근을 갖는다.

53 답 풀이 참조

희철이와 수현이가 달리기를 시작하여 x분 후의 속력을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 연속이므로 함수 $f(x)-g(x)$도 연속이고,

$f(1)-g(1)=\boxed{20}-\boxed{15}=\boxed{5}>0$,

$f(3)-g(3)=\boxed{17}-\boxed{19}=\boxed{-2}<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 1과 3 사이에

$f(c)-g(c)=0$인 c가 적어도 $\boxed{\text{하나}}$ 존재한다.

따라서 두 사람의 속력이 같아지는 시각이 1분과 3분 사이에 $\boxed{\text{존재}}$한다.

54 답 1) 연속, $\neq$, k 2) <

단원 총정리 문제 정답 Ⅰ 함수의 극한과 연속

pp. 32~33

01 ③	02 ⑤	03 ①	04 55	05 ②
06 ③	07 6	08 8	09 ③	10 ③
11 ②	12 ④			

01 답 ③

ㄱ. $x \to 0+$일 때, $\frac{1}{x}$의 값은 ∞로 발산한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1+}\frac{1}{x}=\infty$

ㄴ. $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

ㄹ. $\lim\limits_{x\to2+}\frac{[x]}{x}=\lim\limits_{x\to2+}\frac{2}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to2-}\frac{[x]}{x}=\lim\limits_{x\to2-}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$

즉, $\lim\limits_{x\to2+}\frac{[x]}{x}\neq\lim\limits_{x\to2-}\frac{[x]}{x}$이므로 $\lim\limits_{x\to2}\frac{[x]}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 답 ⑤

$$a=\lim_{x\to2}(x^2+3x+2)=2^2+3\times2+2=12$$

$$b=\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to4}(x+4)=8$$

$\therefore a+b=12+8=20$

03 답 ①

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}f(x)&=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\\&=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}f(x)&=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}=0\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x\to3}f(x)+\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

04 답 55

다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $g(x)$이므로

$f(x)=(x-3)g(x)+c$ (c는 상수)라 하자.

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-3x}{x-3}=4$에서 $x\to3$일 때, (분모) $\to0$이므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)-3x\}=f(3)-9=0$에서 $f(3)=9$

따라서 $c=9$이므로 $f(x)=(x-3)g(x)+9$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{f(x)-3x}{x-3}&=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)g(x)+9-3x}{x-3}\\&=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)g(x)-3(x-3)}{x-3}\\&=g(3)-3=4\end{aligned}$$

따라서 $g(3)=7$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{\{f(x)-9\}g(x)}{x^2-9}&=\lim_{x\to3}\frac{\{(x-3)g(x)\}g(x)}{(x-3)(x+3)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{\{g(x)\}^2}{x+3}=\frac{\{g(3)\}^2}{6}\\&=\frac{49}{6}=\frac{q}{p}\end{aligned}$$

$\therefore p+q=6+49=55$

05 답 ②

$2x-1<f(x)<2x+1$에서

$2(x^2+1)-1<f(x^2+1)<2(x^2+1)+1$

$2x^2+1<f(x^2+1)<2x^2+3$

$\frac{2x^2+1}{x^2}<\frac{f(x^2+1)}{x^2}<\frac{2x^2+3}{x^2}$ $(\because x^2>0)$

각 변에 $\lim_{x\to\infty}$를 취하하면

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2}\le\lim_{x\to\infty}\frac{f(x^2+1)}{x^2}\le\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2}$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2}=2$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x^2+1)}{x^2}=2$

06 답 ③

$\lim_{x\to1}\frac{2\sqrt{x^2+3}-a}{x-1}=b$에서 $x\to1$일 때, (분모) $\to0$이므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(2\sqrt{x^2+3}-a)=4-a=0$ $\quad\therefore a=4$

$$\begin{aligned}\therefore b&=\lim_{x\to1}\frac{2\sqrt{x^2+3}-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{2(x^2-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{4}{4}=1\end{aligned}$$

$\therefore ab=4\times1=4$

07 답 6

조건 (가)의 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+2x-1}=-3$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 -6인 이차함수이다.

또, 조건 (나)의 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=12$에서 (분모) $\to0$이므로

(분자) $\to0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=0$에서 함수 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=-6(x-2)(x+a)$ (a는 상수)라 하고 조건 (나)에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{-6(x-2)(x+a)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\{-6(x+a)\}\\&=-6(2+a)\end{aligned}$$

즉, $-6(2+a)=12$에서 $a=-4$

따라서 $f(x)=-6(x-2)(x-4)$이므로

$f(3)=-6\times1\times(-1)=6$

08 답 8

점 $\mathrm{P}(t, f(t))$가 곡선 $y=x^3-x^2+1$ 위의 점이므로 점 P의 좌표는 (t, t^3-t^2+1)

따라서 두 점 $\mathrm{A}(2, 5)$와 $\mathrm{P}(t, t^3-t^2+1)$을 지나는 직선 AP의 기울기 $m(t)$는

$m(t)=\frac{(t^3-t^2+1)-5}{t-2}=\frac{t^3-t^2-4}{t-2}$

이때, 점 P가 점 $\mathrm{A}(2, 5)$에 한없이 가까워지면 $t\to2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to2}m(t)&=\lim_{t\to2}\frac{t^3-t^2-4}{t-2}\\&=\lim_{t\to2}\frac{(t-2)(t^2+t+2)}{t-2}\\&=\lim_{t\to2}(t^2+t+2)\\&=2^2+2+2=8\end{aligned}$$

09 답 ③

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$과 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$이 성립한다.

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2+ax+b)=1+a+b$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-ax^2-x+4)=-a-1+4=-a+3$

$f(1)=1+a+b$

즉, $1+a+b=-a+3$에서 $2a+b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$가 성립한다.

$\lim_{x\to2+} f(x) = \lim_{x\to2+} (-ax^2-x+4) = -4a-2+4$
$= -4a+2$

$\lim_{x\to2-} f(x) = \lim_{x\to2-} (x^2+ax+b) = 4+2a+b$

$f(2) = 4+2a+b$

즉, $-4a+2=4+2a+b$에서 $6a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$

$\therefore a+b=(-1)+4=3$

10 답 ③

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$

ㄱ. $\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} f(x)$
$=f(a)\times f(a)=\{f(a)\}^2$

즉, 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\left\{\frac{1}{2}f(x)+4g(x)\right\}=\frac{1}{2}\lim_{x\to a} f(x)+4\lim_{x\to a} g(x)$
$=\frac{1}{2}f(a)+4g(a)$

즉, 함수 $\frac{1}{2}f(x)+4g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. $f(a)=g(a)$이면 $x=a$에서 $\frac{g(x)}{f(x)-g(x)}$가 정의되지 않으므로 $x=a$에서 불연속이다.

따라서 $x=a$에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

11 답 ②

ㄱ. $\lim_{x\to1} f(x)=2$, $f(1)=1$이므로 $\lim_{x\to1} f(x)\neq f(1)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄴ. 구간 [0, 2]에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. 구간 [2, 4]에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

12 답 ④

$f(x)=x^3+2x-10$이라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이고

$f(-2)=-22<0$, $f(-1)=-13<0$,
$f(0)=-10<0$, $f(1)=-7<0$,
$f(2)=2>0$, $f(3)=23>0$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1, 2)$이다.

Ⅱ 미분

Ⅱ-1 미분계수

pp. 38~45

01 답 1) 3 2) -2 3) 8 4) $2a+h$
5) $3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2$

1) 평균변화율은 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$이므로

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{9}{3}=\boxed{3}$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$
$=\frac{(3^2-4\times3)-\{(-1)^2-4\times(-1)\}}{4}=-2$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{(3\times2^2-2)-(3\times1^2-1)}{1}=8$

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$
$=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h$

5) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}=\frac{(a+\Delta x)^3-a^3}{\Delta x}$
$=\frac{3a^2\Delta x+3a(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$
$=3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2$

02 답 1) 7 2) 3

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^2+2a-1)-(1^2+2\times1-1)}{a-1}$
$=\frac{a^2+2a-3}{a-1}=\frac{(a+3)(a-1)}{a-1}=\boxed{a+3}$

즉, $\boxed{a+3}=10$에서 $a=\boxed{7}$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^2+2a)-(1^2+2\times1)}{a-1}$
$=\frac{a^2+2a-3}{a-1}=\frac{(a+3)(a-1)}{a-1}=a+3$

즉, $a+3=6$에서 $a=3$

03 답 $b-a$, $f(b)-f(a)$, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

04 답 1) 3 2) -2 3) 1 4) -2

1) $f'(2)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{3(2+\Delta x)+2\}-(3\times2+2)}{\Delta x}$
$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\boxed{3}\Delta x}{\Delta x}=\boxed{3}$

2) $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}(2+\Delta x)^2-\left(-\frac{1}{2}\times 2^2\right)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\Delta x-2\right)=-2$

3) $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{(2+\Delta x)^2-3(2+\Delta x)\}-(2^2-3\times 2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)=1$

4) $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\{-(2+\Delta x)^2+2(2+\Delta x)\}-(-2^2+2\times 2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-2-\Delta x)=-2$

05 답 1) $\sqrt{7}$ 2) -1 3) -3

1) x의 값이 1부터 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{\boxed{63}}{3}=\boxed{21}$

또, $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)=\boxed{3a^2}$

따라서 $3a^2=21$에서 $a^2=7$

$\therefore a=\boxed{\sqrt{7}}$ ($\because 1<a<4$)

2) x의 값이 -2부터 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{(2-1+1)-(-16+2+1)}{1-(-2)}$

$=\dfrac{15}{3}=5$

또, $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\dfrac{(2x^3-x+1)-(2a^3-a+1)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\dfrac{(x-a)(2x^2+2ax+2a^2-1)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}(2x^2+2ax+2a^2-1)=6a^2-1$

따라서 $6a^2-1=5$에서 $6a^2=6$, $a^2=1$

$\therefore a=-1$ ($\because -2<a<1$)

3) x의 값이 a부터 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(1)-f(a)}{1-a}=\dfrac{2-a^3-a^2}{1-a}=a^2+2a+2$

또, $x=1$에서의 미분계수는

$f'(1)=\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x^2+2x+2)=5$

따라서 $a^2+2a+2=5$에서

$a^2+2a-3=0$, $(a-1)(a+3)=0$

$\therefore a=-3$ ($\because a\neq 1$)

06 답 1) 4 2) -4 3) 6 4) 4

1) $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{\boxed{2}h}\times\boxed{2}$

$=f'(a)\times\boxed{2}=\boxed{4}$

2) $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)$

$=f'(a)\times(-2)=-4$

3) $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\dfrac{f(a-h)-f(a)}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2+\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$

$=2f'(a)+f'(a)=3f'(a)=3\times 2=6$

4) $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-\dfrac{f(a-h)-f(a)}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}+\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$

$=f'(a)+f'(a)$

$=2f'(a)=2\times 2=4$

07 답 1) $-\dfrac{3}{2}$ 2) -6 3) -1

1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\dfrac{1}{x+1}\right\}$

$=f'(1)\times\dfrac{1}{2}=\boxed{-3}\times\dfrac{1}{2}=\boxed{-\dfrac{3}{2}}$

2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$

$=f'(1)\times 2=(-3)\times 2=-6$

3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\dfrac{1}{x^2+x+1}\right\}$

$=f'(1)\times\dfrac{1}{3}=(-3)\times\dfrac{1}{3}=-1$

08 답 평균변화율, 0, Δx, $f(x)-f(a)$

09 답 1) -2 2) -4 3) 2 4) 6 5) 4 6) 0 7) 9 8) 3

1) 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(1+\Delta x)^2-(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\boxed{-2-\Delta x})=\boxed{-2}$$

2) 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$과 같으므로

$$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(-1+\Delta x)^2-2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-4+2\Delta x)=-4$$

3) 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2+3\}-4}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$$

4) 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(1+\Delta x)^2-4\}-(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(6+3\Delta x)=6$$

5) 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)\}-3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$

6) 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같으므로

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2-2(1+\Delta x)\}-(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$$

7) 점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같으므로

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)-5\}-5}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(9+2\Delta x)=9$$

8) 점 $(3,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)$과 같으므로

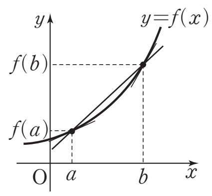
$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(3+\Delta x)^2-3(3+\Delta x)-2\}-(-2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3+\Delta x)=3$$

10 답 6

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$의 값은 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기와 같고, $\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$의 값은 두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}+\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}=3+3=6$$

11 답 $B<A<C$



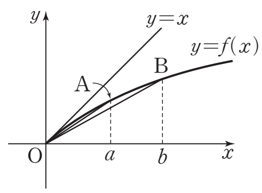
A는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기를 의미한다.

B는 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기를 의미한다.

C는 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기를 의미한다.

따라서 그림에 의하여 $\boxed{B}<\boxed{A}<\boxed{C}$이다.

12 답 ㄷ



두 점 A, B의 자표를 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$라 하면

ㄱ. $\dfrac{f(a)}{a}$는 원점과 점 A를 지나는 직선의 기울기이고,

$\dfrac{f(b)}{b}$는 원점과 점 B를 지나는 직선의 기울기이므로

$\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$ (거짓)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

이때, $b-a>0$이므로 $f(b)-f(a)<b-a$ (거짓)

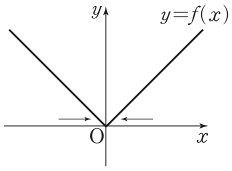
ㄷ. $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로 $f'(a)>f'(b)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

13 답 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 기울기, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$, 기울기

14 답 1) 연속이지만 미분가능하지 않다.
2) 연속이고 미분가능하다.
3) 연속이지만 미분가능하지 않다.
4) 연속이지만 미분가능하지 않다.

1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}|x|=\boxed{0}$,



$f(0)=\boxed{0}$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)=|x|$는

$x=0$에서 $\boxed{연속}$이다.

그런데

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=\boxed{1}$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=\boxed{-1}$$

이므로 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 $\boxed{\text{존재하지 않는다.}}$

따라서 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 $\boxed{연속}$이지만 미분 $\boxed{\text{가능하지 않다.}}$

2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x|x|=0$, $f(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)=x|x|$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0+}x=0$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to0-}(-x)=0$$

이므로 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$이 존재한다.

따라서 함수 $f(x)=x|x|$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

3) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(x+|x|)=0$, $f(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)=x+|x|$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x+|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x+x}{x}=2$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x+|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x-x}{x}=0$$

이므로 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=x+|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

4) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(3x^2+|x|)=0$, $f(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)=3x^2+|x|$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{3x^2+x}{x}=\lim_{x\to0+}(3x+1)=1$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{3x^2-x}{x}=\lim_{x\to0-}(3x-1)=-1$$

이므로 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=3x^2+|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

15 답 1) $a=3$, $b=-2$ 2) $a=2$, $b=-1$ 3) $a=2$, $b=0$
4) $a=2$, $b=0$ 5) $a=-1$, $b=-2$
6) $a=2$, $b=2$

1) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)$에서 $\lim\limits_{x\to1-}(ax+b)=\lim\limits_{x\to1+}x^3$

$\therefore\ \boxed{a+b}=1$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$에서

$$\lim_{x\to1-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$\therefore\ a=\boxed{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\boxed{3}$, $b=\boxed{-2}$

2) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)$에서 $\lim\limits_{x\to1+}x^2=\lim\limits_{x\to1-}(ax+b)$

$\therefore\ a+b=1$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x+1)=2,$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}a=a$$

에서 $a=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=-1$

3) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(-x^2+4x-1)=2$,

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(ax+b)=a+b$

에서 $a+b=2$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-x^2+4x-1-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)(x-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\{-(x-3)\}=2$$
$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{a(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}a=a$$

에서 $a=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=0$

4) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(ax-1)=a-1$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x^2-b)=1-b$

에서 $a-1=1-b$ $\quad\therefore a+b=2$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{ax-1-(a-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{a(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}a=a$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-b-(1-b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x+1)=2$$

에서 $a=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=0$

5) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(ax^2+bx)=a+b$,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(2bx+1)=2b+1$

에서 $a+b=2b+1$ $\quad\therefore a-b=1$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2+bx-(a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(ax+a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(ax+a+b)=2a+b$$
$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{2bx+1-(2b+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{2b(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}2b=2b$$

에서 $2a+b=2b$ $\quad\therefore 2a-b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$, $b=-2$

6) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(ax^2+3)=a+3$,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2+ax+b)=1+a+b$

에서 $a+3=1+a+b$ $\quad\therefore b=2$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2+3-(a+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}a(x+1)=2a$$
$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2+ax+b-(1+a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x+a+1)=a+2$$

에서 $2a=a+2$ $\quad\therefore a=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=2$

16

답 **1)** $\boldsymbol{x=a,\ x=e}$

2) $\boldsymbol{x=a,\ x=b,\ x=c,\ x=e}$

1) 함수 $y=f(x)$가 $x=t$에서 연속이면 $f(t)=\lim_{x\to t}f(x)$를 만족한다.

따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=\boxed{a}$와 $x=\boxed{e}$에서 불연속이다.

2) 함수 $y=f(x)$가 $x=t$에서 미분가능하면 함수 $y=f(x)$는 $x=t$에서 연속이고 $f'(t)$가 존재한다.

따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=\boxed{a}$, $x=\boxed{b}$, $x=\boxed{c}$, $x=\boxed{e}$에서 미분가능하지 않다.

17

답 ㄷ

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ 2 & (0\le x<1)\\ x+1 & (x\ge1)\end{cases}$$

ㄱ. $\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=1$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{0}{h}=0$

즉, $\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\ne\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(거짓)

ㄴ. $g(x)=xf(x)$라 하면

$\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{hf(h)}{h}=\lim_{h\to0+}f(h)=2$

$\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{hf(h)}{h}=\lim_{h\to0-}f(h)=1$

즉, $\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}\neq\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$이므로 함수 $g(x)=xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $h(x)=x^2f(x)$라 하면 $h(0)=0^2f(0)=0$이고

$\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0+}x^2f(x)=0^2\times2=0$,

$\lim_{x\to0-}h(x)=\lim_{x\to0-}x^2f(x)=0^2\times1=0$

즉, $h(0)=\lim_{x\to0}h(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{h(0+h)-h(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2f(h)}{h}=\lim_{h\to0+}hf(h)=0\times2=0$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{h(0+h)-h(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^2f(h)}{h}=\lim_{h\to0-}hf(h)=0\times1=0$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서의 미분계수 $h'(0)$이 존재한다. 즉, 함수 $h(x)=x^2f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

18 답 ㄱ

ㄱ. $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재한다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=5$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점은 3개이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 점은 $x=4$인 점 1개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

19 답 1) 미분가능하다 2) 연속

Ⅱ-2 도함수

pp. 46~52

20 답 1) $f'(x)=0$ 2) $f'(x)=3$ 3) $f'(x)=2x-3$ 4) $f'(x)=4x^3$

1) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-5-(-5)}{h}=0$

2) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{3(x+h)+4\}-(3x+4)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3h}{h}$

$=\lim_{h\to0}3=3$

3) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2-3(x+h)\}-(x^2-3x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{2hx+h^2-3h}{h}$

$=\lim_{h\to0}(2x+h-3)=2x-3$

4) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$

$=\lim_{h\to0}(4x^3+6hx^2+4h^2x+h^3)$

$=4x^3$

21 답 1) $f'(x)=2x+2$, $f'(2)=6$
2) $f'(x)=3$, $f'(2)=3$
3) $f'(x)=2x-1$, $f'(2)=3$

1) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2+2(x+h)\}-(x^2+2x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\boxed{2hx+h^2+2h}}{h}$

$=\lim_{h\to0}(\boxed{2x+h+2})=\boxed{2x+2}$

따라서 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$f'(2)=2\times2+2=\boxed{6}$

2) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{3(x+h)-7\}-(3x-7)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{3h}{h}=3$

따라서 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는 $f'(2)=3$

3) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2-(x+h)\}-(x^2-x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{2hx+h^2-h}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h-1)$

$=2x-1$

따라서 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$f'(2)=2\times2-1=3$

22 답 도함수

23 답 1) $y'=3x^2$ 2) $y'=10x^9$ 3) $y'=0$

1) $y'=3x^{3-1}=3x^2$

2) $y'=10x^{10-1}=10x^9$

3) $y'=0$

24 답 1) $y'=2$ 2) $y'=-2x+4$ 3) $y'=6x^2-8x+3$
4) $y'=x^3+x^2-x-1$

1) $y'=(2x+3)'=(2x)'+(3)'=2$

2) $y'=(-x^2+4x+3)'=(-x^2)'+(4x)'+(3)'$
$=-2x+4$

3) $y'=(2x^3-4x^2+3x+1)'$
$=(2x^3)'-(4x^2)'+(3x)'+(1)'=6x^2-8x+3$

4) $y'=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x\right)'$
$=\left(\frac{1}{4}x^4\right)'+\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(\frac{1}{2}x^2\right)'-(x)'=x^3+x^2-x-1$

25 답 1) $y'=18x^2-6x-4$ 2) $y'=4x+3$
3) $y'=4x^3+9x^2-12x-12$ 4) $y'=8x^3+2x$

1) 곱의 미분법을 이용하면
$y'=\{(3x^2-2)(2x-1)\}'$
$=(3x^2-2)'(2x-1)+(3x^2-2)(2x-1)'$
$=\boxed{6x}(2x-1)+(3x^2-2)\times\boxed{2}$
$=(12x^2-6x)+(6x^2-4)$
$=\boxed{18x^2-6x-4}$

[다른 풀이]
$y=(3x^2-2)(2x-1)=6x^3-3x^2-4x+2$이므로
$y'=(6x^3-3x^2-4x+2)'$
$=\boxed{18x^2-6x-4}$

2) $y'=(x-1)'(2x+5)+(x-1)(2x+5)'$
$=1\times(2x+5)+(x-1)\times2=4x+3$

3) $y'=(x^2+3x-2)'(x^2-4)+(x^2+3x-2)(x^2-4)'$
$=(2x+3)(x^2-4)+(x^2+3x-2)\times2x$
$=4x^3+9x^2-12x-12$

4) $y'=(2x^2+5)'(x^2-2)+(2x^2+5)(x^2-2)'$
$=4x(x^2-2)+(2x^2+5)\times2x=8x^3+2x$

26 답 1) $y'=15x^4-21x^2+6x-6$
2) $y'=5x^4+4x^3+2x+1$
3) $y'=6x^2-14x+5$

1) $y'=(3x^2+2)'(x^3-3x+1)+(3x^2+2)(x^3-3x+1)'$
$=6x(x^3-3x+1)+(3x^2+2)(3x^2-3)$
$=15x^4-21x^2+6x-6$

2) $y'=(x^2+x)'(x^3+1)+(x^2+x)(x^3+1)'$
$=(2x+1)(x^3+1)+(x^2+x)\times3x^2$
$=5x^4+4x^3+2x+1$

3) $y'=(2x-1)'(x^2-3x+1)+(2x-1)(x^2-3x+1)'$
$=2\times(x^2-3x+1)+(2x-1)(2x-3)$
$=6x^2-14x+5$

27 답 1) $y'=18x^2+38x+1$ 2) $y'=9x^2+20x+3$
3) $y'=5x^4-4x^3-3x^2-2x-2$

1) $y'=\{(2x-1)(x+3)(3x+2)\}'$
$=(2x-1)'(x+3)(3x+2)$
$+(2x-1)(x+3)'(3x+2)$
$+(2x-1)(x+3)(3x+2)'$
$=2\times(x+3)(3x+2)+(2x-1)\times1\times(3x+2)$
$+(2x-1)(x+3)\times3$
$=\boxed{18x^2+38x+1}$

2) $y'=x'(x+3)(3x+1)+x(x+3)'(3x+1)$
$+x(x+3)(3x+1)'$
$=1\times(x+3)(3x+1)+x\times1\times(3x+1)$
$+x(x+3)\times3$
$=9x^2+20x+3$

3) $y'=(x^2+1)'(x+1)(x^2-2x)$
$+(x^2+1)(x+1)'(x^2-2x)$
$+(x^2+1)(x+1)(x^2-2x)'$
$=2x(x+1)(x^2-2x)+(x^2+1)\times1\times(x^2-2x)$
$+(x^2+1)(x+1)(2x-2)$
$=5x^4-4x^3-3x^2-2x-2$

28 답 1, k, $\{f(k)\}^kf'(x)$, $k+1$

$y=\{f(x)\}^n$일 때 $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$ …… ㉠

(i) $n=\boxed{1}$일 때, $y=f(x)$에서 $y'=f'(x)$이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=\boxed{k}$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면
$y=\{f(x)\}^k$에서 $y'=k\{f(x)\}^{k-1}f'(x)$
이때, $y=\{f(x)\}^{k+1}=\{f(x)\}^k\cdot f(x)$에서
$y'=[\{f(x)\}^k]'f(x)+\{f(x)\}^kf'(x)$
$=[k\{f(x)\}^{k-1}f'(x)]f(x)+\{f(x)\}^kf'(x)$
$=k\{f(x)\}^kf'(x)+\{f(x)\}^kf'(x)$
$=(k+1)\boxed{\{f(x)\}^kf'(x)}$
따라서 $n=\boxed{k+1}$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

29 답 1) $y'=6(3x-4)$ 2) $y'=3(x-1)^2$
3) $y'=-15(-3x+4)^4$

1) $y'=2(3x-4)(3x-4)'=\boxed{6(3x-4)}$

2) $y'=3(x-1)^2$

3) $y'=5(-3x+4)^4\times(-3)=-15(-3x+4)^4$

30 답 1) $cf'(x)$ 2) $f'(x)+g'(x)$
3) $f'(x)-g'(x)$ 4) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

31 답 1) $a=2,\ b=-1,\ c=-2$ 2) $a=-1,\ b=4,\ c=5$ 3) $a=2,\ b=3,\ c=-1$

1) $f(x)=ax^2+bx+c$에서

$f(0)=-2$이므로 $c=\boxed{-2}$

이때, $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=3$에서 $\boxed{2a+b}=3$ …… ㉠

$f'(-1)=-5$에서 $\boxed{-2a+b}=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\boxed{2}$, $b=\boxed{-1}$

$\therefore a=\boxed{2}$, $b=\boxed{-1}$, $c=\boxed{-2}$

2) $f(x)=ax^2+bx+c$이므로

$f(0)=5$에서 $c=5$

이때, $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=2$에서 $2a+b=2$ …… ㉠

$f'(-1)=6$에서 $-2a+b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=4$

$\therefore a=-1,\ b=4,\ c=5$

3) $f(x)=ax^2+bx+c$이므로

$f(0)=-1$에서 $c=-1$

이때, $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(-1)=-1$에서 $-2a+b=-1$ …… ㉠

$f'(2)=11$에서 $4a+b=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=3$

$\therefore a=2,\ b=3,\ c=-1$

32 답 1) 9 2) 14 3) 26

1) $f(2)=6$에서 $4a+2b+c=6$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(0)=2$에서 $b=2$ …… ㉡

$f'(1)=4$에서 $2a+b=4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=1,\ b=2,\ c=-2$

$\therefore a^2+b^2+c^2=9$

2) $f(2)=13$에서 $4a+2b+c=13$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(0)=1$에서 $b=1$ …… ㉡

$f'(1)=5$에서 $2a+b=5$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=2,\ b=1,\ c=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2=14$

3) $f(1)=-6$에서 $a+b+c=-6$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(2)=-11$에서 $4a+b=-11$ …… ㉡

$f'(-3)=19$에서 $-6a+b=19$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $a=-3,\ b=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $c=-4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=26$

33 답 1) c 2) $b,\ c$

34 답 1) -2 2) 5 3) $\frac{1}{2}$

1) $f(x)=x^2+x$에서 $f'(x)=\boxed{2x+1}$이므로 주어진 등식은

$x(2x+1)+a(x^2+x)+x=0$

$\therefore (a+2)x^2+(a+2)x=0$

위의 식은 x에 대한 항등식이므로 $a+2=0$

$\therefore a=\boxed{-2}$

2) $f(x)=x^3+x$에서 $f'(x)=3x^2+1$이므로 주어진 등식은

$a(x^3+x)=x(3x^2+1+b)$

$\therefore (a-3)x^3+(a-b-1)x=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로 $a-3=0,\ a-b-1=0$

따라서 $a=3,\ b=2$이므로 $a+b=5$

3) $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=2ax+b$이므로 주어진 등식은

$a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)=2a(x+k)+b$

$2ax+a+b=2ax+2ak+b$ $\therefore a=2ak$

그런데 $a\neq0$이므로 $k=\frac{1}{2}$

35 답 1) $f(x)=x^2+2x-1$ 2) $f(x)=x^2+x+1$ 3) $f(x)=x^2+2x$

1) $f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$f'(x)=2x+a$이므로 주어진 등식은

$(x+1)(2x+a)-2(x^2+ax+b)-4=0$

$\therefore (2-a)x+a-2b-4=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$2-a=0,\ a-2b-4=0$

따라서 $a=2,\ b=-1$이므로

$f(x)=x^2+2x-1$

2) $f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$f'(x)=2x+a$이므로 주어진 등식은

$(2x+1)(2x+a)-4(x^2+ax+b)+3=0$

$\therefore -2(a-1)x+(a-4b+3)=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$a-1=0,\ a-4b+3=0$

따라서 $a=1,\ b=1$이므로 $f(x)=x^2+x+1$

3) $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$라 하면

$f'(x)=2ax+b$이므로 주어진 등식은

$x^2(2ax+b)-x(ax^2+bx+c)=x^3$

$\therefore (a-1)x^3-cx=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로 $a-1=0,\ c=0$

$\therefore a=1,\ c=0$

한편, $f'(2)=6$에서 $4+b=6$이므로 $b=2$

$\therefore f(x)=x^2+2x$

36 답 1) 2 2) $f(x)=3x^2-3x+1$

1) $f(x)$를 n차함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차함수이다.
이때, $n=1$이면 좌변은 상수함수이고 우변은 이차함수이므로 $n\geq\boxed{2}$
따라서 좌변의 차수는 $(n-1)+(n-1)$,
우변의 차수는 n이므로 $2n-2=n$ $\quad\therefore n=\boxed{2}$
따라서 다항함수 $f(x)$의 차수는 $\boxed{2}$이다.

2) $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 정수, $a\neq0$)라 하면
$f'(x)=\boxed{2ax+b}$
$f'(x)\{f'(x)+2\}=8f(x)+12x^2-5$에서
$(2ax+b)(2ax+b+2)=8(ax^2+bx+c)+12x^2-5$
$4a^2x^2+4(ab+a)x+b^2+2b$
$=4(2a+3)x^2+8bx+8c-5$
위 식은 x에 대한 항등식이므로
$a^2=2a+3$, $ab+a=2b$, $b^2+2b=8c-5$
위 세 식을 연립하여 풀면
$a=\boxed{3}$, $b=\boxed{-3}$, $c=\boxed{1}$ ($\because$ a, b, c는 정수)
$\therefore f(x)=\boxed{3x^2-3x+1}$

37 답 1) 35 2) 3

1) $f(x)$를 n차함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차함수이므로
$f(x)f'(x)$는 $n+(n-1)=2n-1$에서 $(2n-1)$차함수이다.
이때, $4x+6$은 일차식이므로 $2n-1=1$에서 $n=1$
즉, $f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=ax+b(a\neq0)$이라 하면
$f(x)f'(x)=(ax+b)a=a^2x+ab=4x+6$
계수비교법에 의하여 $a^2=4$, $ab=6$
$\therefore a=\pm2$, $b=\pm3$ (복호동순)
즉, $f(x)=\pm(2x+3)$이므로
$f(1)f(2)=(\pm5)\times(\pm7)$ (복호동순)
$=35$

2) $f(x)$를 n차함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차함수이므로
$f(x)f'(x)$는 $n+(n-1)=2n-1$에서 $(2n-1)$차함수이다. 이때, $2x^3+3x^2-5x-3$은 삼차식이므로
$2n-1=3$에서 $n=2$
즉, $f(x)$는 이차함수이므로 $f(x)=x^2+ax+b$라 하면
$f'(x)=2x+a$이고 주어진 등식은
$(x^2+ax+b)(2x+a)=2x^3+3x^2-5x-3$에서
$2x^3+3ax^2+(a^2+2b)x+ab=2x^3+3x^2-5x-3$
계수비교법에 의하여 $3a=3$, $a^2+2b=-5$, $ab=-3$
따라서 $a=1$, $b=-3$이므로 $f(x)=x^2+x-3$
$\therefore f(2)=2^2+2-3=3$

38 답 1) 차수, $f'(x)$ 2) $n-1$

39 답 1) $5x-4$ 2) 17 3) 0

1) $x^{10}-x^5+1$을 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$,
나머지를 $ax+b$라 하면
$x^{10}-x^5+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\boxed{a+b}=1$ …… ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$10x^9-5x^4=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$ …… ㉢
㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 $10-5=a$
$\therefore a=\boxed{5}$, $b=\boxed{-4}$ ($\because$ ㉡)
따라서 구하는 나머지는 $\boxed{5x-4}$

2) x^{10}을 $x(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,
나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$라 하면
$x^{10}=x(x-1)^2Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=c$
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1=a+b+c$ $\quad\therefore a+b=1$ …… ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$10x^9=(x-1)^2Q(x)+2x(x-1)Q(x)$
$+x(x-1)^2Q'(x)+2ax+b$ …… ㉢
㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 $10=2a+b$ …… ㉣
㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=-8$
따라서 $R(x)=9x^2-8x$이므로 $R(-1)=9+8=17$

3) 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $f(x)=(x-2)^2Q(x)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=0$
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)$ …… ㉡
㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f'(2)=0$
$\therefore 2f(2)+3f'(2)=0$

40 답 1) $a=-30$, $b=40$ 2) $a=3$, $b=-7$
3) $a=20$, $b=1$

1) x^5+ax^2+bx+8을 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$x^5+ax^2+bx+8=(x-2)^2Q(x)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $32+4a+2b+8=0$
$\therefore 2a+b+20=0$ …… ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$5x^4+2ax+b=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)$ …… ㉢
㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면 $80+4a+b=0$ …… ㉣
㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-30$, $b=40$

2) ax^3+x^2+bx-5를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$ax^3+x^2+bx-5=(x+1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $-a+1-b-5=0$

$\therefore a+b=-4$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3ax^2+2x+b=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$3a-2+b=0 \quad \therefore 3a+b=2$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-7$

3) $x^{20}+ax+19$를 $(x+b)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{20}+ax+19=(x+b)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-b$를 대입하면

$b^{20}-ab+19=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$20x^{19}+a=2(x+b)Q(x)+(x+b)^2Q'(x)$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=-b$를 대입하면

$-20b^{19}+a=0 \quad \therefore a=20b^{19}$ …… ㉣

이것을 ㉡에 대입하면 $b^{20}-20b^{20}+19=0$, $b^{20}=1$

$\therefore b=1(\because b>0)$, $a=20(\because$ ㉣$)$

41 답 1) $a\alpha+b$, a 2) 0, 0

Ⅱ-3 도함수의 활용

pp. 53~81

42 답 1) $y=-2x-1$ 2) $y=-3x$ 3) $y=4x-6$ 4) $y=2x-1$ 5) $y=8x+6$ 6) $y=x+2$ 7) $y=x+1$

1) $f(x)=x^2-4x$라 하면 $f'(x)=\boxed{2x-4}$

즉, $f'(1)=-2$이므로 점 $(1, -3)$에서의 접선의 방정식은

$y+3=-2(x-1) \quad \therefore y=\boxed{-2x-1}$

2) $f(x)=x^2-5x+1$이라 하면 $f'(x)=2x-5$

즉, $f'(1)=-3$이므로 점 $(1, -3)$에서의 접선의 방정식은

$y+3=-3(x-1) \quad \therefore y=-3x$

3) $f(x)=x^3-2x^2+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-4x$

즉, $f'(2)=4$이므로 점 $(2, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=4(x-2) \quad \therefore y=4x-6$

4) $f(x)=x^3-2x^2+3x-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-4x+3$

즉, $f'(1)=2$이므로 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1) \quad \therefore y=2x-1$

5) $f(x)=2x^3-x^2+1$이라 하면 $f'(x)=6x^2-2x$

즉, $f'(-1)=8$이므로 점 $(-1, -2)$에서의 접선의 방정식은

$y+2=8(x+1) \quad \therefore y=8x+6$

6) $f(x)=-x^4+2x^3-3x^2+x+2$라 하면

$f'(x)=-4x^3+6x^2-6x+1$

즉, $f'(0)=1$이므로 점 $(0, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=x \quad \therefore y=x+2$

7) $f(x)=x^4+3x^3-6x^2+4$라 하면

$f'(x)=4x^3+9x^2-12x$

즉, $f'(1)=1$이므로 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=1\times(x-1) \quad \therefore y=x+1$

43 답 1) $y=-x+5$ 2) $y=-2x+6$ 3) $y=2x+2$ 또는 $y=2x-2$ 4) $y=x+\frac{5}{3}$ 또는 $y=x-9$

1) $f(x)=-x^2+3x+1$이라 하면 $f'(x)=-2x+3$

이때, 접점의 좌표를 $(a, -a^2+3a+1)$이라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(a)=-2a+3=-1 \quad \therefore a=\boxed{2}$

따라서 접점의 좌표가 $(2, 3)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=-(x-2) \quad \therefore y=\boxed{-x+5}$

2) $f(x)=-x^2+4x-3$이라 하면 $f'(x)=-2x+4$

이때, 접점의 좌표를 $(a, -a^2+4a-3)$이라 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(a)=-2a+4=-2 \quad \therefore a=3$

따라서 접점의 좌표가 $(3, 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=-2(x-3) \quad \therefore y=-2x+6$

3) $f(x)=-x^3+5x$라 하면 $f'(x)=-3x^2+5$

이때, 접점의 좌표를 $(a, -a^3+5a)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로 $f'(a)=-3a^2+5=2$

$\therefore a=1$ 또는 $a=-1$

따라서 접점의 좌표가 $(1, 4)$ 또는 $(-1, -4)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-4=2(x-1)$ 또는 $y+4=2(x+1)$

$\therefore y=2x+2$ 또는 $y=2x-2$

4) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-2x$라 하면 $f'(x)=x^2-2x-2$

이때, 접점의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{3}a^3-a^2-2a\right)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로 $f'(a)=a^2-2a-2=1$에서

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 접점의 좌표가 $\left(-1,\ \frac{2}{3}\right)$ 또는 $(3,\ -6)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{2}{3}=x+1$ 또는 $y+6=x-3$

$\therefore y=x+\frac{5}{3}$ 또는 $y=x-9$

44 답 1) $y=-2x+10$ 2) $y=6x-4$ 또는 $y=6x$ 3) $y=5x-5$ 4) $y=8x+17$ 또는 $y=8x-15$

1) $f(x)=-x^2+4x+1$이라 하면 $f'(x)=-2x+4$

이때, 접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+4a+1)$이라 하면

직선 $y=-2x+7$과 평행한 접선의 기울기는 -2이므로

$f'(a)=-2a+4=-2$ $\quad\therefore a=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3,\ 4)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-4=-2(x-3)$

$\therefore y=-2x+10$

2) $f(x)=x^3+3x-2$라 하면 $f'(x)=3x^2+3$

이때, 접점의 좌표를 $(a,\ a^3+3a-2)$라 하면

직선 $y=6x+1$과 평행한 접선의 기울기는 6이므로

$f'(a)=3a^2+3=6$에서 $3a^2=3$, $a^2=1$

$\therefore a=1$ 또는 $a=-1$

따라서 접점의 좌표가 $(1,\ 2)$, $(-1,\ -6)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=6(x-1)$ 또는 $y+6=6(x+1)$

$\therefore y=6x-4$ 또는 $y=6x$

3) $f(x)=2x^2-3x+3$이라 하면 $f'(x)=4x-3$

이때, 접점의 좌표를 $(a,\ 2a^2-3a+3)$이라 하면 직선 $y=-\frac{1}{5}x+2$에 수직인 직선의 기울기는 5이므로

$f'(a)=4a-3=5$ $\quad\therefore a=2$

따라서 접점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-5=5(x-2)$ $\quad\therefore y=5x-5$

4) $f(x)=x^3-4x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-4$

이때, 접점의 좌표를 $(a,\ a^3-4a+1)$이라 하면 직선 $x+8y-1=0$에 수직인 직선의 기울기는 $\boxed{8}$이므로

$f'(a)=3a^2-4=8$에서 $a^2=4$

$\therefore a=\boxed{-2}$ 또는 $a=\boxed{2}$

따라서 접점의 좌표가 $(-2,\ 1)$ 또는 $(2,\ 1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=8(x+2)$ 또는 $y-1=8(x-2)$

$\therefore y=\boxed{8x+17}$ 또는 $y=\boxed{8x-15}$

45 답 1) $y=-x-3$ 또는 $y=3x-3$ 2) $y=-x+1$ 또는 $y=-5x+1$ 3) $y=x$ 4) $y=-7x$ 또는 $y=x$ 5) $y=x+2$ 6) $y=12x+6$

1) $f(x)=x^2+x-2$라 하면 $f'(x)=2x+1$

이때, 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+t-2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+t-2)=(2t+1)(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$-3-(t^2+t-2)=(2t+1)(0-t)$

$t^2=1$ $\quad\therefore t=\boxed{-1}$ 또는 $t=\boxed{1}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+2=-1\times(x+1)$ 또는 $y-0=3(x-1)$

$y=\boxed{-x-3}$ 또는 $y=\boxed{3x-3}$

2) $f(x)=-x^2-3x$라 하면 $f'(x)=-2x-3$

이때, 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2-3t)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2-3t)=(-2t-3)(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1-(-t^2-3t)=(-2t-3)(0-t)$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2=-(x+1)$ 또는 $y+4=-5(x-1)$

$\therefore y=-x+1$ 또는 $y=-5x+1$

3) $f(x)=x^3-2x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

이때, 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t+2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t+2)=(3t^2-2)(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0-(t^3-2t+2)=(3t^2-2)(0-t)$, $t^3=1$

$\therefore t=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=x-1$

$\therefore y=x$

4) $f(x)=x^2-3x+4$라 하면 $f'(x)=2x-3$

이때, 접점의 좌표를 $(t,\ t^2-3t+4)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-3t+4)=(2t-3)(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0-(t^2-3t+4)=(2t-3)(0-t)$, $t^2=4$

$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-14=-7(x+2)$ 또는 $y-2=1\times(x-2)$

$y=-7x$ 또는 $y=x$

5) $f(x)=x^3-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

이때, 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2-(t^3-2t)=(3t^2-2)(0-t)$, $t^3=-1$

$\therefore\ t=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=1\times(x+1)$

$y=x+2$

6) $f(x)=2x^3-3x^2-1$이라 하면 $f'(x)=6x^2-6x$

이때, 접점의 좌표를 $(t,\ 2t^3-3t^2-1)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=6t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t^3-3t^2-1)=(6t^2-6t)(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\ 6)$을 지나므로

$6-(2t^3-3t^2-1)=(6t^2-6t)(0-t)$, $4t^3-3t^2+7=0$

$(t+1)(4t^2-7t+7)=0$

$\therefore\ t=-1\ (\because\ 4t^2-7t+7>0)$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y+6=12(x+1)$

$\therefore\ y=12x+6$

46 답 1) -1 2) -18 3) $a=0$ 또는 $a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=3$

1) $f(x)=\frac{1}{4}x^2$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{2}x$

이때, 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{4}t^2\right)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{2}t$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{2}t(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1-\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{2}t(0-t)$, $t^2=4$

$\therefore\ t=2$ 또는 $t=-2$

따라서 접선의 기울기는 1 또는 -1이므로

$m_1\times m_2=-1$

2) $f(x)=2x^2-5x$라 하면 $f'(x)=4x-5$

이때, 접점의 좌표를 $(t,\ 2t^2-5t)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=4t-5$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t^2-5t)=(4t-5)(x-t)$

이 접선이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$2-(2t^2-5t)=(4t-5)(-1-t)$

$\therefore\ 2t^2+4t-3=0$ …… ㉠

㉠의 두 근을 $t_1,\ t_2$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $t_1+t_2=-2$

한편, $m_1=4t_1-5$, $m_2=4t_2-5$이므로

$m_1+m_2=4(t_1+t_2)-10=-18$

3) $f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

이때, 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+2)=(3t^2-6t)(x-t)$

이 접선이 점 $(a,\ 2)$를 지나므로

$2-(t^3-3t^2+2)=(3t^2-6t)(a-t)$

$t\{2t^2-3(a+1)t+6a\}=0$ …… ㉠

$\therefore\ t=\boxed{0}$ 또는 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$

한편, 서로 다른 접선이 두 개이려면 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 즉, 이차방정식

$2t^2-3(a+1)t+6a=0$의 서로 다른 두 근 중 하나가 0이거나 두 근이 0이 아닌 중근을 가질 때이므로

(i) 이차방정식이 0을 근으로 가질 때,

$6a=0\quad \therefore\ a=\boxed{0}$

(ii) 이차방정식이 0이 아닌 중근을 가질 때,

$D=9(a+1)^2-48a=0$에서 $3a^2-10a+3=0$

$(3a-1)(a-3)=0\quad \therefore\ a=\boxed{\frac{1}{3}}$ 또는 $a=\boxed{3}$

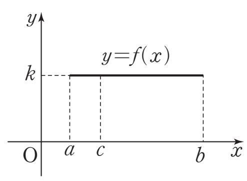
(i), (ii)에 의하여 $a=\boxed{0}$ 또는 $a=\boxed{\frac{1}{3}}$ 또는 $a=\boxed{3}$

47 답 1) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ 2) 접선의 방정식, t, t

48 답 0, 0, 0, 0

[1] $f(x)$가 상수함수인 경우

열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 x의 값에 대하여 $f'(x)=0$이므로 열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 c에 대하여 $f'(c)=\boxed{0}$이다.



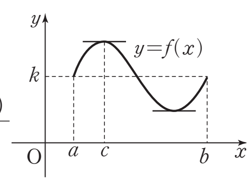
[2] $f(x)$가 상수함수가 아닌 경우

(i) $x=c$에서 함수 $f(x)$가 최댓값 M을 가질 때

$0\le\lim\limits_{h\to0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

이고

$\lim\limits_{h\to0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le0$이다.



이때, $f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하므로

$\boxed{0} \le \lim_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \le \boxed{0}$

따라서 $f'(c)=\boxed{0}$이다.

(ii) $x=c$에서 함수 $f(x)$가 최솟값 m을 가지는 경우에 도 같은 방법으로 $f'(c)=0$이다.

49 답 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 2) $\dfrac{a+b}{2}$

1) 함수 $f(x)=x^3-x$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고, 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하다.

$f(0)\boxed{=}f(1)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-1$에서 $f'(c)=3c^2-1=0$, $c^2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore c=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ ($\because 0<c<1$)

2) 함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하다.

$f(a)=f(b)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-(a+b)$에서 $f'(c)=2c-(a+b)=0$

$\therefore c=\dfrac{a+b}{2}$

50 답 $f'(c)=0$, 롤의 정리

51 답 1) 0 2) $\dfrac{5}{2}$ 3) $\sqrt{3}$

1) 함수 $f(x)=-x^2-2x$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $f'(c)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$인 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=-2x-2$이고 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\boxed{-2}$

이므로 $f'(c)=\boxed{-2}$에서

$-2c-2=\boxed{-2}$ $\quad \therefore c=\boxed{0}$

2) $f(x)=x^2-5x$는 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$f'(c)=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$인 c가 열린구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=2x-5$이고 $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=0$이므로

$f'(c)=0$에서 $2c-5=0$ $\quad \therefore c=\dfrac{5}{2}$

3) $f(x)=2x^3$은 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$f'(c)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}$인 c가 열린구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x)=6x^2$이고 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=18$이므로

$f'(c)=18$에서 $6c^2=18$, $c^2=3$

$\therefore c=\sqrt{3}$ ($\because 0<c<3$)

52 답 $\dfrac{3}{2}$

평균값 정리에 의하여

$g'(c)=\dfrac{g(3)-g(1)}{3-1}=\dfrac{3\times f(3)-1\times f(1)}{2}$

$=\dfrac{3\times 2-1\times 3}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore k=\dfrac{3}{2}$

53 답 30

$f(x)$는 구간 $(x-5,\ x+10)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $f'(c)=\dfrac{f(x+10)-f(x-5)}{(x+10)-(x-5)}$인 상수 $c(x-5<c<x+10)$가 존재한다.

$\therefore f(x+10)-f(x-5)=15f'(c)$

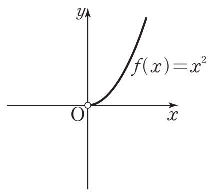
한편, $x \to \infty$일 때, $c \to \infty$이므로

$\lim_{x \to \infty}\{f(x+10)-f(x-5)\}=\lim_{c \to \infty}15f'(c)=15\times 2=30$

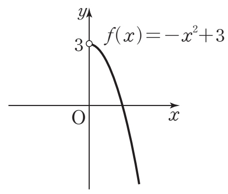
54 답 $f'(c)$, 평균값 정리

55 답 1) 증가 2) 감소 3) 증가 4) 감소

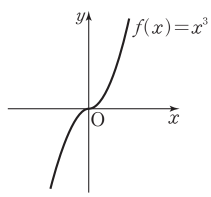
1) 임의의 양수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이므로 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0,\ \infty)$에서 $\boxed{증가}$한다.



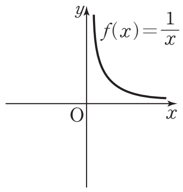
2) 임의의 양수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이므로 함수 $f(x)=-x^2+3$은 구간 $(0,\ \infty)$에서 감소한다.



3) 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이므로 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.



4) 임의의 양수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이므로 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$은 구간 $(0, \infty)$에서 감소한다.



56 답 1) 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가, 구간 $[0, \infty)$에서 감소
2) 구간 $(-\infty, 1]$에서 감소, 구간 $[1, \infty)$에서 증가
3) 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$에서 증가, 구간 $[0, 2]$에서 감소

1) $f(x)=-x^2+1$에서 $f'(x)=-2x$
$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	1	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 $\boxed{\text{증가}}$하고 구간 $[0, \infty)$에서 $f'(x)\le 0$이므로 $\boxed{\text{감소}}$한다.

2) $f(x)=x^2-2x+2$에서 $f'(x)=2x-2$
$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 감소하고, 구간 $[1, \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 증가한다.

3) $f(x)=x^3-3x^2+2$에서
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	−2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 증가하고, 구간 $[0, 2]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 감소한다.

57 답 1) $-3\le a\le 0$ 2) $a\ge 1$ 3) $0\le a\le \frac{3}{4}$

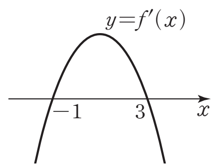
1) $f(x)=ax^3+ax^2-x+1$에서 $f'(x)=3ax^2+2ax-1$
함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소함수이려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ \boxed{\le}\ 0$이어야 한다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $3ax^2+2ax-1\ \boxed{\le}\ 0$이 성립해야 하므로 $a\ \boxed{\le}\ 0$ …… ㉠
또, 이차방정식 $3ax^2+2ax-1=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=a^2+3a\le 0$에서 $a(a+3)\le 0$
$\therefore -3\le a\le 0$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\boxed{-3\le a\le 0}$

2) $f(x)=ax^3-3x^2+3ax-1$에서
$f'(x)=3ax^2-6x+3a$
함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가함수이려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
이때, $a=0$이면 $f'(x)=-6x$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이 성립하지 않는다.
$\therefore a\ne 0$
즉, $f'(x)$는 이차함수이므로 $f'(x)=3ax^2-6x+3a\ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $a>0$ …… ㉠
이어야 한다. 또, 이차방정식 $3ax^2-6x+3a=0$, 즉 $ax^2-2x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=1-a^2\le 0$에서 $(a-1)(a+1)\ge 0$
$\therefore a\le -1$ 또는 $a\ge 1$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a\ge 1$

3) $f(x)=x^3-2ax^2+ax$에서 $f'(x)=3x^2-4ax+a$
함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가함수이려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $3x^2-4ax+a\ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2-4ax+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=4a^2-3a\le 0$에서 $a(4a-3)\le 0$
$\therefore 0\le a\le \frac{3}{4}$

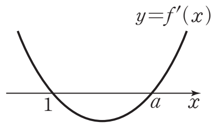
58 답 1) $-1\le x\le 3$ 2) $1\le x\le a$
3) $a=6$, $b=-9$ 4) $a=-3$, $b=-24$

1) $f(x)=-x^3+3x^2+9x+7$에서
$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$
한편, $f'(x)\ge 0$일 때 $f(x)$는 증가하므로
$-3(x+1)(x-3)\ge 0$에서
$-1\le x\le 3$



2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax+3$에서
$f'(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)$

한편, $f'(x)\le 0$일 때 $f(x)$는 감소하므로



$(x-1)(x-a)\le 0$에서

$1\le x\le a$ ($\because$ $a>1$)

3) $f(x)=-x^3+ax^2+bx-1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 $[1, 3]$이므로 이 구간에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b\ge 0$ …… ㉠

이 부등식의 해가 $1\le x\le 3$이므로

$-3(x-1)(x-3)\ge 0$

$\therefore$ $-3x^2+12x-9\ge 0$ …… ㉡

㉠, ㉡은 일치하므로

$2a=12$, $b=-9$

$\therefore$ $a=6$, $b=-9$

4) $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 $[-2, 4]$이므로 이 구간에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b\le 0$ …… ㉠

이 부등식의 해가 $-2\le x\le 4$이므로 $3(x+2)(x-4)\le 0$

$\therefore$ $3x^2-6x-24\le 0$ …… ㉡

㉠, ㉡은 일치하므로

$2a=-6$, $b=-24$

$\therefore$ $a=-3$, $b=-24$

59 답 1) $\boldsymbol{-12\le k\le 0}$ 2) $\boldsymbol{1\le k\le 4}$ 3) $\boldsymbol{-3\le k\le 3}$ 4) $\boldsymbol{0\le k\le 12}$

1) $f(x)=x^3+kx^2-4kx$에서 $f'(x)=3x^2+2kx-4k$

한편, $f(x)$가 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2+2kx-4k\ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2+2kx-4k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=k^2+12k\le 0$, $k(k+12)\le 0$

$\therefore$ $-12\le k\le 0$

2) $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+kx^2-(5k-4)x+2$에서

$f'(x)=-x^2+2kx-5k+4$

한편, $f(x)$가 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시키므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다. 즉, 모든 실수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=-x^2+2kx-5k+4\le 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $-x^2+2kx-5k+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=k^2-5k+4\le 0$, $(k-1)(k-4)\le 0$

$\therefore$ $1\le k\le 4$

3) $f(x)=-x^3+kx^2-3x+3$에서

$f'(x)=-3x^2+2kx-3$

이때, 삼차함수 $f(x)$는 일대일함수이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하여야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-3x^2+2kx-3\le 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $-3x^2+2kx-3=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=k^2-9\le 0$, $(k+3)(k-3)\le 0$

$\therefore$ $-3\le k\le 3$

4) $f(x)=x^3-kx^2+4kx+4$에서 $f'(x)=3x^2-2kx+4k$

이때, 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하여야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2-2kx+4k\ge 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $3x^2-2kx+4k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=k^2-12k\le 0$, $k(k-12)\le 0$

$\therefore$ $0\le k\le 12$

60 답 ㄷ

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

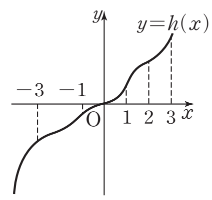
조건 (가)에 의하여 $h(0)=f(0)-g(0)\boxed{=}0$이므로

$y=h(x)$의 그래프는 $\boxed{\text{원점}}$을 지난다.

또, 조건 (나)에 의하여 $h'(x)=f'(x)-g'(x)\boxed{>}0$이므로

$h(x)$는 $\boxed{\text{증가}}$ 함수이다.

따라서 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



ㄱ. $h(-3)<0$이므로 $f(-3)<g(-3)$ (거짓)

ㄴ. $h(-1)<0$이므로 $f(-1)<g(-1)$ (거짓)

ㄷ. $h(1)>0$이므로 $f(1)>g(1)$ (참)

ㄹ. $h(2)>0$이므로 $f(2)>g(2)$ (거짓)

ㅁ. $h(3)>0$이므로 $f(3)>g(3)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

61 답 1) $>$ 2) $<$ 3) 증가 4) 감소

62 답 1) 극댓값 3, 극솟값 -5 2) 극댓값 16, 극솟값 -16
3) 극댓값 4, 극솟값 0 4) 극댓값 21, 극솟값 -6
5) 극댓값 -8, 극솟값 -9

1) $f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{0}$ 또는 $x=\boxed{2}$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\boxed{\nearrow}$	3	$\boxed{\searrow}$	-5	$\boxed{\nearrow}$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=0$일 때 극대이고 극댓값은 $f(0)=\boxed{3}$,

$x=2$일 때 극소이고 극솟값은 $f(2)=\boxed{-5}$

2) $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-3$일 때 극대이고 극댓값은 $f(-3)=16$

$x=1$일 때 극소이고 극솟값은 $f(1)=-16$

3) $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=1$일 때 극대이고 극댓값은 $f(1)=4$,

$x=3$일 때 극소이고 극솟값은 $f(3)=0$

4) $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	21	$\searrow$	-6	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-2$일 때 극대이고 극댓값은 $f(-2)=21$

$x=1$일 때 극소이고 극솟값은 $f(1)=-6$

5) $f'(x)=4x^3-24x^2+44x-24$

$=4(x-1)(x-2)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	-8	$\searrow$	-9	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=2$일 때 극대이고 극댓값은 $f(2)=-8$

$x=1$ 또는 $x=3$일 때 극소이고 극솟값은

$f(1)=f(3)=-9$

63 답 1) 극솟값 $\frac{2}{3}$ 2) 극솟값 -6 3) 극값을 갖지 않는다.
4) 극솟값 $-\frac{27}{16}$

1) $f'(x)=4x^3-4x^2$

$=4x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값은

$f(1)=\frac{2}{3}$

2) $f'(x)=12x^3-24x^2$

$=12x^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	10	$\searrow$	-6	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고, 극솟값은

$f(2)=-6$

3) $f'(x)=3x^2-6x+3$

$=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

4) $f'(x)=4x^3-6x^2+2=2(2x+1)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{27}{16}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$일 때 극소이고 극솟값은

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{16}$

64 답 1) $a=0$, $b=3$, $c=4$ 2) $a=\frac{3}{2}$, $b=-18$, $c=12$

3) $a=9$, $b=-12$, $c=3$ 4) $a=0$, $b=-3$, $c=1$

1) $f'(x)=-3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가

$x=1$, $x=-1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=-3+2a+b=0$ …… ㉠

$f'(-1)=-3-2a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\boxed{0}$, $b=\boxed{3}$

또한, $f(1)=6$이므로 $-1+a+b+c=6$

$\therefore c=\boxed{4}$

2) $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가

$x=-3$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(-3)=27-6a+b=0$, $f'(2)=12+4a+b=0$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=-18$

또한, $f(2)=-10$이므로 $8+4a+2b+c=-10$

$\therefore c=12$

3) $f'(x)=-6x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=-6+2a+b=0$, $f'(2)=-24+4a+b=0$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=-12$

또한, $f(1)=-2$이므로 $-2+a+b+c=-2$ $\therefore c=3$

4) $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=3-2a+b=0$, $f'(1)=3+2a+b=0$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$

또한, $f(-1)=3$이므로 $-1+a-b+c=3$ $\therefore c=1$

65 답 1) 14 2) 1

1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 $f'(1)=0$

또, $x=3$에서 극솟값 10을 가지므로

$f(3)=10$, $f'(3)=0$

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-3$ …… ㉠

$f(3)=10$에서 $27+9a+3b+c=10$

$\therefore 9a+3b+c=-17$ …… ㉡

$f'(3)=0$에서 $27+6a+b=0$

$\therefore 6a+b=-27$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=9$이고 ㉡에 의하여 $c=10$이다.

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x+10$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=14$이다.

2) $f(x)=-x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값 5를 가지므로

$f(2)=5$, $f'(2)=0$

$f(2)=5$에서 $-8+4a+b=5$ $\therefore 4a+b=13$

$f'(2)=0$에서 $-12+4a=0$ $\therefore a=3$

위 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+1$이고

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(0)=1$이다.

66 답 1) 2 2) -1

1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면 $f(0)=2$이므로 $c=2$

즉, $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때, $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(2)=-2$에서 $8+4a+2b+2=-2$

$\therefore 2a+b=-6$ …… ㉠

$f'(2)=0$에서 $12+4a+b=0$

$\therefore 4a+b=-12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=0$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$이고

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=2$이다.

2) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때, $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 3을 가지므로

$f(1)=3$에서 $1+a+b+c=3$

$\therefore a+b+c=2$ …… ㉠

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-3$ …… ㉡

또, $f'(2)=-3$이므로 $12+4a+b=-3$

$\therefore 4a+b=-15$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $a=-6$, $b=9$이고 ㉠에 의하여 $c=-1$이다.

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$이고

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(3)=-1$이다.

67 답 **1)** $a<-3$ 또는 $a>3$ **2)** $a<0$ 또는 $a>3$ **3)** $0\le a\le 3$ **4)** $-9\le a\le 0$

1) $f(x)=x^3+ax^2+3x+4$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖기 위해서는 $f'(x)=0$이 $\boxed{\text{서로 다른 두 실근}}$을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉 $3x^2+2ax+3=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-9\boxed{>}0$, $(a+3)(a-3)>0$

$\therefore a\boxed{<}-3$ 또는 $a\boxed{>}3$

2) $f(x)=-x^3+ax^2-ax+3$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖기 위해서는 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉 $-3x^2+2ax-a=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$, $a(a-3)>0$ $\therefore a<0$ 또는 $a>3$

3) $f(x)=x^3+ax^2+ax-2$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉 $3x^2+2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$, $a(a-3)\le 0$ $\therefore 0\le a\le 3$

4) $f(x)=x^3+ax^2-3ax+2$에서 $f'(x)=3x^2+2ax-3a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$, 즉 $3x^2+2ax-3=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2+9a\le 0$, $a(a+9)\le 0$ $\therefore -9\le a\le 0$

68 답 **1)** 3 **2)** ㄹ **3)** ㄴ, ㄷ, ㅁ

1) x가 증가하면서 $x=a$를 지날 때, $f'(a)=0$이고 $f'(x)$의 부호가 $\boxed{\text{양}}$에서 $\boxed{\text{음}}$으로 바뀌면 $x=a$에서 극대이므로 $x=0$에서 극대이다.

또, $f'(a)=0$이고 $f'(x)$의 부호가 $\boxed{\text{음}}$에서 $\boxed{\text{양}}$으로 바뀌면 $x=a$에서 극소이므로 $x=-2$, $x=3$에서 극소이다.

한편, $x=2$, $x=4$에서는 $f'(x)=0$이지만 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

따라서 x의 값이 $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{3}$인 $\boxed{3}$개의 점에서 극값을 갖는다.

2) ㄱ. $f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. 한편, $f(4)=0$이지만 $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=4$에서 극값을 갖지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$는 한 개의 극값을 갖는다. (거짓)

ㄴ. $x\le 0$일 때 $f'(x)\le 0$이고, $x\ge 0$일 때 $f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x\le 0$에서 감소, $x\ge 0$에서 증가한다. (거짓)

ㄷ. $f'(4)=0$이므로 함수 $f(x)$의 $x=4$에서의 미분계수가 존재한다. 따라서 $f(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다. (거짓)

ㄹ. $1<x<3$에서 $f'(x)=2$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 일차함수이다. (참)

ㅁ. $3<x<4$에서 $f'(x)=-2x+8$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 이차함수이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄹ이다.

3) ㄱ. 구간 $(-3, -2)$에서 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α라 하면 $-3<x\le\alpha$에서 $f'(x)\ge 0$, $\alpha\le x<-2$에서 $f'(x)\le 0$이므로 $f(x)$는 구간 $(-3, \alpha]$에서 증가, 구간 $[\alpha, -2)$에서 감소한다. (거짓)

ㄴ. 구간 $(-2, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 $f(x)$는 감소한다. (참)

ㄷ. $f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄹ. 구간 $(1,\ 3)$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㅁ. 구간 $(3,\ 4)$에서 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 β라 하면 $f'(\beta)=0$이고 $x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

69 답 1) 극대, 극댓값, 극소, 극솟값 2) 0, 극대, 극소

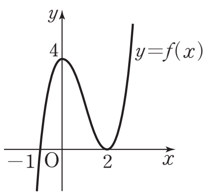
70 답 1) 풀이 참조 2) 풀이 참조 3) 풀이 참조 4) 풀이 참조

1) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=\boxed{0}$에서 $x=0$ 또는 $x=\boxed{2}$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\boxed{4}$	$\searrow$	$\boxed{0}$	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $\boxed{4}$, $x=2$에서 극솟값 $\boxed{0}$을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

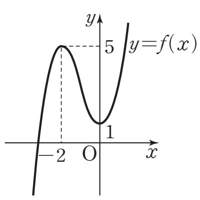


2) $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 5, $x=0$에서 극솟값 1을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

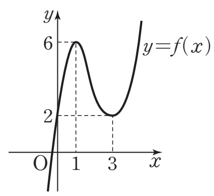


3) $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 6, $x=3$에서 극솟값 2를 갖고 $f(0)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

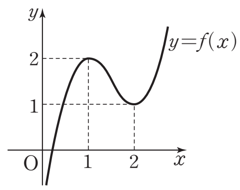


4) $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 2, $x=2$에서 극솟값 1을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



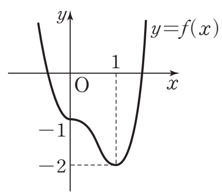
71 답 1) 풀이 참조 2) 풀이 참조 3) 풀이 참조 4) 풀이 참조

1) $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{0}$ 또는 $x=\boxed{1}$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\boxed{-1}$	$\searrow$	$\boxed{-2}$	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않고, $x=1$에서 극솟값 $\boxed{-2}$를 갖는다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

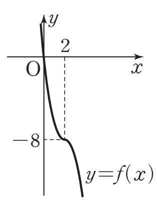
2) $f(x)=-x^3+6x^2-12x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-8	$\searrow$

즉, 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



3) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+8$이라 하면

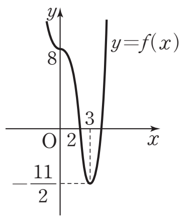
$f'(x)=2x^3-6x^2=2x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	8	↘	$-\frac{11}{2}$	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않고, $x=3$에서 극솟값 $-\frac{11}{2}$을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



4) $f(x)=-3x^4+4x^3-1$이라 하면

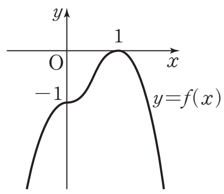
$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↗	0	↘

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않고, $x=1$에서 극댓값 0을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



72 답 도함수 $f'(x)$, 0, 극값, x축 및 y축

73 답 1) 최댓값 6, 최솟값 2 2) 최댓값 24, 최솟값 -8

1) $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{1}$ 또는 $x=\boxed{3}$이므로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\boxed{2}$	↗	$\boxed{6}$	↘	$\boxed{4}$

따라서 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=\boxed{1}$에서 최댓값 $\boxed{6}$을, $x=\boxed{0}$에서 최솟값 $\boxed{2}$를 갖는다.

2) $f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	-8	↗	24	↘	17

따라서 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 24를, $x=-1$에서 최솟값 -8을 갖는다.

74 답 1) 최댓값 3, 최솟값 -2 2) 최댓값 15, 최솟값 -2

1) $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{1}$ 또는 $x=\boxed{2}$이므로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\boxed{-2}$	↗	$\boxed{3}$	↘	$\boxed{2}$

따라서 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=\boxed{1}$에서 최댓값 $\boxed{3}$을, $x=\boxed{0}$에서 최솟값 $\boxed{-2}$를 갖는다.

2) $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	15

따라서 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 15를, $x=1$에서 최솟값 -2를 갖는다.

75 답 1) $a=-1$, $b=3$ 2) $a=2$, $b=5$ 3) -37

1) $f'(x)=3ax^2-9ax=3ax(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{0}$ 또는 $x=\boxed{3}$이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b-26a$	↘	$\boxed{b}$	↗	$b-10a$

이때, $a<0$이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=\boxed{-2}$에서 최댓값 $\boxed{b-26a}$를, $x=\boxed{0}$에서 최솟값 $\boxed{b}$를 갖는다.

즉, $\boxed{b-26a}=29$, $\boxed{b}=3$이므로

$a=\boxed{-1}$, $b=\boxed{3}$

2) $f'(x)=3ax^2+6ax=3ax(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$4a-b$	↘	$-b$	↗	$20a-b$

이때, $a>0$이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $20a-b$를, $x=0$에서 최솟값 $-b$를 갖는다. 즉, $20a-b=35$, $-b=-5$이므로

$a=2$, $b=5$

3) $f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a-40$	↗	a	↘	$a-8$

즉, 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 a를, $x=-2$에서 최솟값 $a-40$을 갖는다.

따라서 $a=3$이므로 최솟값은 $a-40=3-40=-37$이다.

76 답 ㄴ

함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘		↘	극소	↗

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극대점은 1개이다. (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=3$에서 극소이므로 극소점은 2개이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $-1\le x\le 1$에서 증가, $1\le x\le 3$에서 감소하므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)$이고 최솟값은 $f(-1)$, $f(3)$ 중에 작은 값이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

77 답 ⑤

$-3<x<-1$ 또는 $0<x<1$에서 $f'(x)>0$

$x<-3$ 또는 $-1<x<0$ 또는 $x>1$에서 $f'(x)<0$

$x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-3$에서 극값을 갖고 미분가능하므로 $f'(1)=f'(-1)=f'(-3)=0$

한편, $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}>0$이고

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $y=f'(x)$의 그래프로 가장 적합한 것은 ⑤이다.

78 답 1) $\frac{128}{27}$ 2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

1) 곡선 $y=-x^2+4x$ 위의 점 $(a, -a^2+4a)(0<a<4)$에서 x축에 내린 수선의 발 H의 좌표는 $(a, 0)$이므로 삼각형 AOH의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\times a\times(-a^2+4a)=-\frac{1}{2}a^3+2a^2$이고

$S'(a)=-\frac{3}{2}a^2+4a$

$S'(a)=0$에서 $a=\boxed{0}$ 또는 $a=\boxed{\frac{8}{3}}$이므로 구간 $0<a<4$에서 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	(4)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$\boxed{\frac{128}{27}}$	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=\frac{8}{3}$일 때, 극대이면서 최대이므로

삼각형 AOH의 넓이의 최댓값은 $\boxed{\frac{128}{27}}$이다.

2) 점 A의 x좌표를 $a(0<a<4)$라 하면 점 A의 좌표는 $(a, -a^2+16)$이다.

한편, 점 A를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=-x^2+16$과 만나는 점 중 A가 아닌 점 B의 좌표는 $(-a, -a^2+16)$이고 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발 A′, B′의 좌표는 각각 $(a, 0)$, $(-a, 0)$이다.

즉, 직사각형 ABB′A′의 가로의 길이는

$\overline{AB}=a-(-a)=2a$이고 세로의 길이는

$\overline{AA'}=(-a^2+16)-0=-a^2+16$이므로 직사각형 ABB′A′의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\overline{AB}\times\overline{AA'}=2a\times(-a^2+16)=-2a^3+32a$

이고 $S'(a)=-6a^2+32$

$S'(a)=0$에서 $-6a^2+32=0$, $a^2=\frac{16}{3}$

$\therefore a=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 또는 $a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 구간 $(0,\ 4)$에서 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(4)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{256\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	

즉, $S(a)$는 $a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 직사각형 $\mathrm{ABB'A'}$의 넓이가 최대일 때의 점 A의 x좌표는 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다.

79 답 1) 16 2) $\frac{8}{3}$

1) 잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 $x(0<x<3)$, 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(6-2x)^2=4x^3-24x^2+36x$이고

$V'(x)=12x^2-48x+36=12(x-1)(x-3)$

$V'(x)=0$에서 $x=\boxed{1}$ 또는 $x=\boxed{3}$이므로 구간 $(1,\ 3)$에서 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	$\boxed{16}$	$\searrow$	

따라서 $V(x)$는 $x=1$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 상자의 부피의 최댓값은 $\boxed{16}$이다.

2) 만들어진 상자의 밑면은 한 변의 길이가 $16-2x\ (0<x<8)$인 정사각형이고, 높이는 $\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 이다.

이 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}x\times\frac{\sqrt{3}}{4}(16-2x)^2=x^3-16x^2+64x$이고

$V'(x)=3x^2-32x+64=(3x-8)(x-8)$

$V'(x)=0$에서 $x=\frac{8}{3}$ 또는 $x=8$이므로 구간 $(0,\ 8)$에서 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	(8)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	$\frac{2048}{27}$	$\searrow$	

따라서 부피 $V(x)$는 $x=\frac{8}{3}$일 때 극대이면서 최대이다.

80 답 1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 2) 52

1) 정삼각기둥의 겉넓이가 $\sqrt{3}$이므로

$2\times\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+3xy=\sqrt{3}$에서 $3xy=\sqrt{3}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$ ······㉠

$\therefore y=\sqrt{3}\left(\frac{1}{3x}-\frac{x}{6}\right)$

한편, ㉠에서 $3xy=\sqrt{3}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)>0$이므로 $0<x<\sqrt{2}$

이때, 정삼각기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2y=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\times\sqrt{3}\left(\frac{1}{3x}-\frac{x}{6}\right)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{4}x$

이고 $V'(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{4}=-\frac{3}{8}\left(x^2-\frac{2}{3}\right)$

$V'(x)=0$에서 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$ $(\because 0<x<\sqrt{2})$이므로 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$(\sqrt{2})$
$V'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{18}$	$\searrow$	

따라서 $V(x)$는 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$일 때 극대이면서 최대이다.

2) 정사각기둥의 부피를 $V(n)$이라 하면

$V(n)=n^2(n^2-10n+27)=n^4-10n^3+27n^2$이고

$V'(n)=4n^3-30n^2+54n=2n(n-3)(2n-9)$

$V'(n)=0$에서 $n=3$ 또는 $n=\frac{9}{2}$ $(\because n\geq 3)$이므로

$V(n)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

n	3	$\cdots$	$\frac{9}{2}$	$\cdots$
$V'(n)$		$-$	0	$+$
$V(n)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 $V(n)$은 $n=\frac{9}{2}$일 때 극소이면서 최소이다.

이때, n은 자연수이고 $V(4)=48$, $V(5)=50$이므로 정사각기둥의 부피는 $n=4$일 때 최소이고, 이때의 부피는 48이다.

$\therefore \alpha+\beta=4+48=52$

81 답 1) 2 2) $r=2h$

1) 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $x(0<x<3)$라 하면 원기둥의 높이는 $12-4x$이다.

이때, 원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2(12-4x)=-4\pi x^3+12\pi x^2$이고

$V'(x)=-12\pi x^2+24\pi x=-12\pi x(x-2)$

$V'(x)=0$에서 $x=\boxed{2}$ ($\because 0<x<3$)이므로 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\boxed{2}$	$\cdots$	(3)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	$\boxed{16\pi}$	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=\boxed{2}$일 때 극대이면서 최대이다.

2) $r+h=k$($k>0$인 상수) …… ㉠라 하면

$h=k-r$ …… ㉡

한편, $r>0$이고 ㉡에서 $h=k-r>0$이므로 $r<k$

$\therefore 0<r<k$ …… ㉢

이때, 원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\pi r^2\times h=\pi r^2\times(k-r)$

$=k\pi r^2-\pi r^3$

$V'(r)=2k\pi r-3\pi r^2=-\pi r(3r-2k)$

$V'(r)=0$에서 $r=\frac{2}{3}k$ ($\because$ ㉢)이므로 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$	(k)
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(r)$는 $r=\frac{2}{3}k$일 때 극대이면서 최대이므로

㉠에 의하여 원기둥의 부피가 최대일 때

$r=\frac{2}{3}k=\frac{2}{3}(r+h)$에서 $r=2h$

82

답 극댓값, $f(a)$, $f(b)$, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$

83

답 1) 3 2) 3 3) 1 4) 2

1) $f(x)=x^3-3x^2+1$이라 하면

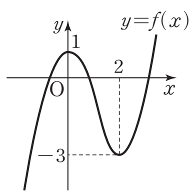
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{0}$ 또는 $x=\boxed{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\boxed{0}$	$\cdots$	$\boxed{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\boxed{1}$	↘	$\boxed{-3}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 x축과 서로 다른 $\boxed{세}$ 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 $\boxed{3}$이다.



2) $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$이라 하면

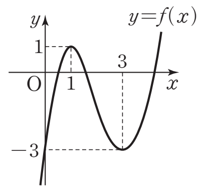
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 3이다.



3) $f(x)=x^3+3x^2+3x+3$이라 하면

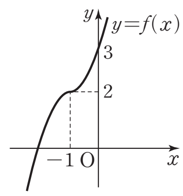
$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 1이다.



4) $f(x)=x^4-2x^2-1$이라 하면

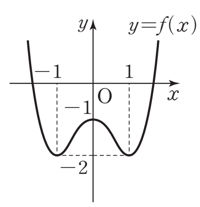
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{-1}$ 또는 $x=\boxed{0}$ 또는 $x=\boxed{1}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\boxed{-1}$	$\cdots$	$\boxed{0}$	$\cdots$	$\boxed{1}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\boxed{-2}$	↗	$\boxed{-1}$	↘	$\boxed{-2}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 x축과 서로 다른 $\boxed{두}$ 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 $\boxed{2}$이다.



84

답 1) 풀이 참조 2) $0<k<4$ 3) $k=0$ 또는 $k=4$ 4) $k<0$ 또는 $k>4$

1) $f(x)=x^3-6x^2+9x$에서

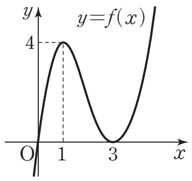
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{1}$ 또는 $x=\boxed{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\boxed{1}$	$\cdots$	$\boxed{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\boxed{4}$	↘	$\boxed{0}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



2) 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 세 점에서 만나야 하므로

$\boxed{0}<k<\boxed{4}$

3) 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 두 점에서 만나야 하므로

$k=\boxed{0}$ 또는 $k=\boxed{4}$

4) 방정식 $f(x)=k$가 한 실근과 두 허근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나야 하므로

$k<\boxed{0}$ 또는 $k>\boxed{4}$

85 답 1) $1<a<5$ 2) $-5<a<-4$

1) $f(x)=x^3-3x+3-a$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$-a+5$	↘	$-a+1$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $-a+5$, $x=1$에서 극솟값 $-a+1$을 갖고 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 극댓값과 극솟값이 서로 다른 $\boxed{\text{부호}}$이어야 하므로 $(-a+5)(-a+1)\boxed{<}0$에서

$(a-5)(a-1)\boxed{<}0$

$\therefore \boxed{1}<a<\boxed{5}$

[다른 풀이]

$x^3-3x+3-a=0$에서 $x^3-3x+3=a$

이때, $g(x)=x^3-3x+3$이라 하면

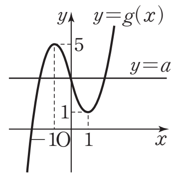
$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	5	↘	1	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위는



$\boxed{1}<a<\boxed{5}$

2) $f(x)=2x^3-9x^2+12x+a$라 하면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+5$	↘	$a+4$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $a+5$, $x=2$에서 극솟값 $a+4$를 갖고 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 극댓값과 극솟값이 서로 다른 부호이어야 하므로

$(a+5)(a+4)<0 \qquad \therefore -5<a<-4$

[다른 풀이]

$2x^3-9x^2+12x+a=0$에서 $2x^3-9x^2+12x=-a$

이때, $g(x)=2x^3-9x^2+12x$라 하면

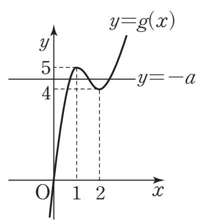
$g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	5	↘	4	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위는



$4<-a<5$에서

$-5<a<-4$이다.

86 답 1) $-1<k<0$ 2) $0<k<7$ 3) $-5<k<0$ 4) $0<k<4$

1) $f(x)=4x^3-3x$라 하면

$f'(x)=12x^2-3$

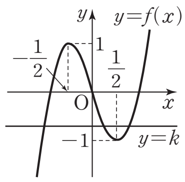
$\quad=3(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{-\frac{1}{2}}$ 또는 $x=\boxed{\frac{1}{2}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\boxed{1}$	$\searrow$	$\boxed{-1}$	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 근과 한 개의 음의 근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는



$\boxed{-1}<k<\boxed{0}$

2) $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$

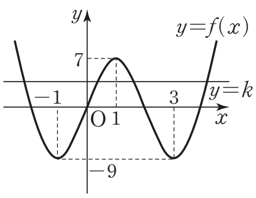
$=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 세 개의 양의 근과 한 개의 음의 근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<7$



3) $x^3-3x^2-9x+k=0$에서

$x^3-3x^2-9x=-k$

$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

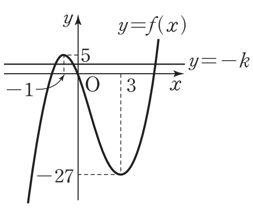
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로 주어진 방정식이 한 개의 양의 근과 서로 다른 두 개의 음의 근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는



$0<-k<5$에서 $-5<k<0$

4) $f(x)=-x^3+3x^2$에서

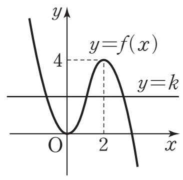
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 개의 양의 근과 한 개의 음의 근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는



$0<k<4$

87 답 **1)** $-4<a<0$ **2)** $0<a<4$

1) 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$x^3-3x^2+9x=3x^2-a$, 즉 $x^3-6x^2+9x+a=0$

이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

이때, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱이 0보다 작아야 하므로 (극댓값)$\times$(극솟값)$\boxed{<}$0에서

$f(1)f(3)=(a+4)\times a\boxed{<}0$

$\therefore \boxed{-4}<a<\boxed{0}$

2) 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$x^3+2x^2-x=5x^2-x-a$, 즉 $x^3-3x^2+a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

이때, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $f(0)f(2)<0$이어야 하므로 $a(a-4)<0$에서

$0<a<4$

88 답 **1)** $a=7$ 또는 $a=-20$ **2)** $a<-5$ 또는 $a>27$

1) 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$3x^3-3x^2-4x=x^3+8x+a$, 즉

$2x^3-3x^2-12x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-a$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$\quad\quad=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 중근과 또 다른 실근을 가지려면 $f(-1)f(2)=0$이어야 한다.

이때, $f(-1)=7-a$, $f(2)=-20-a$이므로

$(7-a)(-20-a)=0$

$\therefore a=7$ 또는 $a=-20$

2) 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식

$x^3-2x^2-5x=-5x^2+4x+a$, 즉

$x^3+3x^2-9x-a=0$이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-a$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$\quad\quad=3(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-3$

따라서 방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(1)f(-3)>0$이어야 한다.

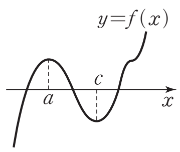
이때, $f(1)=-5-a$, $f(-3)=27-a$이므로

$(-5-a)(27-a)>0$

$\therefore a<-5$ 또는 $a>27$

89 답 ㄷ

$y=f'(x)$의 그래프에서 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 $\boxed{\text{극대}}$이고, $x=c$에서 $\boxed{\text{극소}}$이다.



따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 조건은 $y=f(x)$의 그래프에 의하여

$f(a)>0$, $f(c)<0$

$\therefore f(c)<0<f(a)$

90 답 1) x축 2) 교점 3) $<$, $=$, $>$

91 답 1) 풀이 참조 2) 풀이 참조 3) 풀이 참조 4) 풀이 참조 5) 풀이 참조 6) 풀이 참조

1) $x^3\geq 3x^2-4$에서 $x^3-3x^2+4\geq 0$

이때, $f(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\boxed{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	$\boxed{0}$	↗

즉, $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(2)=0$이므로

$f(x)=x^3-3x^2+4\geq \boxed{0}$이다.

따라서 $x\geq \boxed{0}$일 때, $x^3\geq 3x^2-4$이다.

2) $x^3+4>2x^2$에서 $x^3-2x^2+4>0$

이때, $f(x)=x^3-2x^2+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	$\frac{76}{27}$	↗

즉, $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{76}{27}$이므로

$f(x)=x^3-2x^2+4>0$이다.

따라서 $x\geq 0$일 때, $x^3+4>2x^2$이다.

3) $2x^3>3x^2-2$에서 $2x^3-3x^2+2>0$

이때, $f(x)=2x^3-3x^2+2$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	1	↗

즉, $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(1)=1$이므로

$f(x)=2x^3-3x^2+2>0$이다.

따라서 $x\geq 0$일 때, $2x^3>3x^2-2$이다.

4) $f(x)=x^3-12x+5$라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\leq x\leq 3$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	↘	-11	↗	-4

즉, $1\leq x\leq 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3)=-4$이므로 $f(x)=x^3-12x+5<0$이다.

따라서 $1\leq x\leq 3$일 때, $x^3-12x+5<0$이다.

5) $f(x)=x^4+4x+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

즉, 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(-1)=0$이므로 $f(x)=x^4+4x+3\geq0$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^4+4x+3\geq0$이다.

6) $x^3-x^2>-x+6$에서 $x^3-x^2+x-6>0$

이때, $f(x)=x^3-x^2+x-6$이라 하면

$f'(x)=3x^2-2x+1$

$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\geq\frac{2}{3}$

즉, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 증가함수이다.

이때, $f(2)=0$이므로 $x>2$일 때

$f(x)=x^3-x^2+x-6>0$

$\therefore x^3-x^2>-x+6$

92 답 **1) $k\geq32$ 2) 10 3) 0, 1, 2, 3 4) 29 5) $k\leq3$**

1) $f(x)=4x^3-3x^2-6x+k$라 하면

$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\boxed{k-32}$	↗	$k+\frac{7}{4}$	↘	$k-5$	↗

따라서 $x\geq-2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{k-32}$이므로 부등식 $f(x)\geq0$이 성립하려면

$\boxed{k-32}\geq0$ $\therefore k\geq\boxed{32}$

2) $f(x)=x^3-5x^2+3x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	k	↗	$k+\frac{13}{27}$	↘	$k-9$	↗

즉, $x>0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-9$이므로 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $k-9>0$ $\therefore k>9$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 10이다.

3) $f(x)=2x^3-9x^2+12x+k$라 하면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	k	↗	$k+5$	↘	$k+4$	↗	$k+9$

즉, $0\leq x\leq3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $k+9$, 최솟값은 k이므로 부등식 $0\leq f(x)\leq12$가 성립하려면 $k\geq0$이고 $k+9\leq12$이어야 한다.

$\therefore 0\leq k\leq3$

따라서 구하는 정수 k는 0, 1, 2, 3이다.

4) $x^4-2\geq4x^3-k$에서 $x^4-4x^3+k-2\geq0$

$f(x)=x^4-4x^3+k-2$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	$k-2$	↘	$k-29$

즉, $0\leq x\leq3$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-29$이므로 부등식 $f(x)\geq0$이 성립하려면

$k-29\geq0$ $\therefore k\geq29$

따라서 k의 최솟값은 29이다.

5) $f(x)\geq g(x)$에서 $f(x)-g(x)\geq0$

이때, $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(3x^4-2x+4)-(4x^3-2x+k)$

$=3x^4-4x^3+4-k$

$h'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$4-k$	↘	$3-k$	↗

따라서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $3-k$이므로 부등식 $h(x)\geq0$이 성립하려면

$3-k\geq0$ $\therefore k\leq3$

93 답 **1) $\geq$ 2) 0**

94 답 **1) 속도 : 9, 가속도 : -6 2) 2초 후**

1) t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+12$

t초 후의 가속도를 a라 하면 $a=\dfrac{dv}{dt}=-6t$

따라서 $t=1$일 때의 속도와 가속도는 각각

$v=\boxed{-3}\times1^2+\boxed{12}=\boxed{9}$, $a=\boxed{-6}\times1=\boxed{-6}$

2) 점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때, $v=\boxed{0}$이므로

$v=-3t^2+12=\boxed{0}$에서 $-3(t+2)(t-2)=\boxed{0}$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

$0<t<2$일 때 $v>0$이고, $t>2$일 때 $v<0$이므로 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 시각은 출발한 지 $\boxed{2}$초 후이다.

95 답 **1) 속도 : 9, 가속도 : 12 2) 2초 후**

1) t초 후의 속도를 v라 하면 $v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t$

t초 후의 가속도를 a라 하면 $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-6$

따라서 $t=3$일 때의 속도와 가속도는 각각

$v=3\times3^2-6\times3=9$, $a=6\times3-6=12$

2) 점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때, $v=0$이므로

$v=3t^2-6t=3t(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

$0<t<2$일 때 $v<0$, $t>2$일 때 $v>0$이므로 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 시각은 출발한 지 2초 후이다.

96 답 **1) 12 2) 24**

1) 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-2$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t$

$v=10$에서 $3t^2-2=10$, $t^2=4$ $\quad\therefore t=2$ ($\because t>0$)

즉, 속도가 10이 되는 시각은 $t=2$이므로 구하는 가속도는 $a=6\times2=12$

2) 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-6$

$v=45$에서 $3t^2-6t=45$, $3t^2-6t-45=0$

$3(t-5)(t+3)=0$ $\quad\therefore t=5$ ($\because t>0$)

즉, 점 P의 속도가 45가 되는 시각은 $t=5$이므로 가속도는 $a=6\times5-6=24$

97 답 **1) 1 2) 점 P의 속도 : 4, 점 Q의 속도 : 6**
3) 점 P의 가속도 : 10, 점 Q의 가속도 : 12

1) 두 점 P, Q가 만나면 두 점의 위치 $x_P(t)$, $x_Q(t)$는 같으므로 $x_P(t)=x_Q(t)$에서

$2t^3-t^2=t^3+3t^2-3t$, $t^3-4t^2+3t=t(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=3$

따라서 원점을 출발한 후 처음으로 두 점 P, Q가 만나는 시각은 $t=1$이다.

2) 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면 $v_P(t)=6t^2-2t$, $v_Q(t)=3t^2+6t-3$

따라서 두 점 P, Q가 처음으로 만나는 시각 $t=1$에서의 두 점의 속도는 각각

$v_P(1)=6\times1^2-2\times1=4$,

$v_Q(1)=3\times1^2+6\times1-3=6$

3) 두 점 P, Q의 시각 t에서의 가속도를 각각 $a_P(t)$, $a_Q(t)$라 하면

$a_P(t)=12t-2$, $a_Q(t)=6t+6$

따라서 두 점 P, Q가 처음으로 만나는 시각 $t=1$에서의 두 점의 가속도는 각각

$a_P(1)=12\times1-2=10$,

$a_Q(1)=6\times1+6=12$

98 답 **1) 속도 : 20, 가속도 : -10 2) 45 m**

1) 공의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t)=x'(t)=30-10t$, $a(t)=v'(t)=-10$

따라서 $t=1$일 때의 공의 속도와 가속도는 각각

$v(1)=30-10\times1=20$, $a(1)=-10$

2) 공이 최고 높이에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$30-10t=0$에서 $t=3$

따라서 공이 도달할 수 있는 최고 높이는

$x(3)=30\times3-5\times3^2=45$(m)

99 답 **1) 3 2) 속도 : -8, 가속도 : -4**

1) 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $h(t)=0$에서

$-2t^2+4t+6=0$, $t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

2) t초 후의 물체의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t)=h'(t)=-4t+4$, $a(t)=v'(t)=-4$

따라서 물체가 지면에 떨어지는 시각 $t=3$에서의 속도와 가속도는 각각

$v(3)=-4\times3+4=-8$, $a(3)=-4$

100 답 **1) 2초, 20 m 2) -20 m/초**

1) t초 후의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=20-10t$

최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 $v=\boxed{0}$이므로

$20-10t=\boxed{0}$

$\therefore t=\boxed{2}$(초)

따라서 물체가 최고 높이에 도달하는 데 걸리는 시간은

$\boxed{2}$초이고 그때의 높이는

$x=20\times\boxed{2}-5\times\boxed{2}^2=\boxed{20}$(m)

2) 물체가 지면에 떨어지면 $x=\boxed{0}$이므로

$20t-5t^2=0$에서 $-5t(t-4)=0$

$\therefore t=4$ ($\because t>0$)

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도는

$v=20-10\times4=\boxed{-20}$(m/초)

101 답 1) **4.9 m** 2) **−9.8 m/초**

1) 물체의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dy}{dt}=9.8-9.8t$

물체가 최고 높이에 도달할 때 $v=0$이므로

$9.8-9.8t=0$에서 $t=1$

따라서 물체가 도달할 수 있는 최고 높이는

$9.8\times1-4.9\times1^2=4.9$(m)

2) 지면에 떨어지는 순간 $y=0$이므로

$9.8t-4.9t^2=0$에서 $-4.9t(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

즉, $t=2$일 때 물체가 지면에 떨어진다.

따라서 $t=2$일 때의 물체의 속도는

$9.8-9.8\times2=-9.8$(m/초)

102 답 1) **−10 m/초** 2) 시간 : **1**초, 높이 : **20 m**
3) **−20 m/초**

1) t초 후의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-10t+10$

따라서 뛰어오른 지 2초 후의 속도는

$v=-10\times2+10=-10$(m/초)

2) 가장 높은 곳에서의 속도는 $v=0$이므로

$-10t+10=0$에서 $t=1$

따라서 가장 높은 곳에 도달할 때까지 걸린 시간은 1초이고 그때의 높이는

$x=-5\times1^2+10\times1+15=20$(m)

3) 수면의 높이는 $x=0$이므로

$-5t^2+10t+15=-5(t+1)(t-3)=0$에서

$t=3$ ($\because t>0$)

따라서 수면에 닿는 순간의 속도는

$v=-10\times3+10=-20$(m/초)

103 답 1) **80 m** 2) **−30 m/초**

1) 물로켓의 속도를 v라 하면 $v=\dfrac{dh}{dt}=40-10t$

물로켓이 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 $v=0$이므로

$40-10t=0$에서 $t=4$

따라서 물로켓이 도달할 수 있는 최고 높이는

$h=40\times4-5\times4^2=80$(m)

2) 높이가 35 m이면 $40t-5t^2=35$에서 $t^2-8t+7=0$

$(t-1)(t-7)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=7$

즉, 물로켓이 최고 높이에 올라갔다가 떨어지면서 높이가 35 m가 되는 시각은 $t=7$이므로 이때의 물로켓의 속도는 $v=40-10\times7=-30$(m/초)

104 답 1) 시간 : **30**초, 거리 : **405 m** 2) **27 m** 3) **45 m**

1) 열차가 제동을 건 후 t초 후의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=27-0.9t$

열차가 정지할 때의 속도는 $v=\boxed{0}$이므로

$27-0.9t=0$에서 $t=\boxed{30}$

따라서 $\boxed{30}$초 동안 열차가 움직인 거리는

$27\times30-0.45\times30^2=\boxed{405}$ m

2) 열차가 제동을 건 후 t초 후의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=18-6t$

열차가 정지할 때의 속력은 $v=0$이므로

$18-6t=0$에서 $t=3$

따라서 열차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$18\times3-3\times3^2=27$(m)

3) 열차가 제동을 건 후 t초 후의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-10t+30$

열차가 정지할 때의 속력은 $v=0$이므로

$-10t+30=0$에서 $t=3$

따라서 열차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$-5\times3^2+30\times3=45$(m)

105 답 1) ㄴ, ㄷ 2) ㄹ 3) ㄱ, ㄷ, ㄹ

1) ㄱ. 속력은 속도의 절댓값이고 속도는 접선의 기울기이므로 $t=\boxed{b}$, $t=\boxed{d}$일 때 점 P의 속력이 가장 느리다. (거짓)

ㄴ. $t=\boxed{b}$일 때 $|f(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다. (참)

ㄷ. $t=\boxed{b}$, $t=\boxed{d}$일 때 접선의 기울기가 0이고, 그 좌우에서 접선의 기울기, 즉 $f'(t)$의 부호가 바뀐다.
따라서 $t=\boxed{b}$, $t=\boxed{d}$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾼다. (참)

따라서 옳은 것은 $\boxed{ㄴ}$, $\boxed{ㄷ}$이다.

2) 점 P가 원점을 통과할 때의 위치는 0이므로

$x=f(t)=0$에서 $t=b,\ t=d$

따라서 처음으로 원점을 통과할 때의 시각은 $t=b$이다.

한편, 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$

$\therefore v(b)=f'(b)$

3) ㄱ. $0<t<1$에서 $f'(t)>0$이므로 점 P는 양의 방향으로 움직인다. (참)

ㄴ. $1<t<2$에서 $|f'(t)|$의 값은 증가하므로 속력은 증가한다. (거짓)

ㄷ. $f'(3)=0$이고 $t=3$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=3$에서 운동 방향을 바꾼다. (참)

ㄹ. $t=2$일 때, $\dfrac{d}{dt}f'(t)=0$이므로 가속도는 0이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

106 답 속도, 속도, 가속도, 가속도

단원 총정리 문제 정답 Ⅱ 미분

pp. 82~85

01 ③	02 ①	03 ④	04 ③	05 ①
06 ④	07 ③	08 ①	09 ③	10 ②
11 ①	12 ④	13 ⑤	14 ③	15 ④
16 16	17 ③	18 ②	19 ②	20 ②
21 ②	22 6	23 ⑤	24 ③	25 ④
26 3	27 4	28 28	29 ①	30 ③

01 답 ③

$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=-1$이므로

$\dfrac{9+3p+1-(1+p+1)}{3-1}=p+4=-1 \qquad \therefore p=-5$

02 답 ①

x의 값이 0부터 a까지 변할 때의 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=\dfrac{3a^2-2a}{a}=3a-2$ …… ㉠

한편, $f'(x)=6x-2$이므로 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는 $f'(1)=6\times1-2=4$ …… ㉡

㉠=㉡이므로 $3a-2=4,\ 3a=6 \qquad \therefore a=2$

03 답 ④

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times(-2)$$
$$=-2f'(1)=2$$

04 답 ③

$f(x)=x^2-ax$라 하면 $f'(x)=2x-a$

이때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(1,\ 1-a)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$에서 $2-a=2 \qquad \therefore a=0$

05 답 ①

$g(t)=\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}$이므로

$\displaystyle\lim_{t\to1}g(t)=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(1)$

이때, $f(x)=-2x^2+5x-1$에서 $f'(x)=-4x+5$이므로

$\displaystyle\lim_{t\to1}g(t)=f'(1)=-4\times1+5=1$

[다른 풀이]

$t\neq1$일 때,

$$g(t)=\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=\frac{(-2t^2+5t-1)-2}{t-1}$$
$$=\frac{-2t^2+5t-3}{t-1}=\frac{-(t-1)(2t-3)}{t-1}=-2t+3$$

$\displaystyle\therefore \lim_{t\to1}g(t)=\lim_{t\to1}(-2t+3)=-2\times1+3=1$

06 답 ④

$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(|x|+2x)=0,\ f(0)=|0|+2\times0=0$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\underbrace{\boxed{f(0)}}_{(가)}$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h|+2h}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{3h}{h}=\underbrace{\boxed{3}}_{(나)}$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h|+2h}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h}{h}=\underbrace{\boxed{1}}_{(다)}$$

따라서 극한값 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, 즉 $f'(0)$이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

07 답 ③

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $a=1+b$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{a(1+h)^2-a}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{2ah+ah^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(2a+ah)=2a$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\{(1+h)+b\}-(1+b)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=1$$

$\therefore 2a=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$이므로 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 & (x\le1)\\ x-\dfrac{1}{2} & (x>1)\end{cases}$

$\therefore f(2)=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

08 답 ①

① $f'(a)=0$이므로 $x=a$에서 미분가능하다.

② $f(x)=k|x-a|$ ($k>0$인 상수)의 형태이고

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{k|h|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{kh}{h}=k$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{k|h|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-kh}{h}=-k$$

따라서 $f'(a)$가 존재하지 않으므로 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

③, ④ $x=a$에서 불연속이므로 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

⑤ ②와 같이 따져주면 $f'(a)$가 존재하지 않으므로 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

09 답 ③

$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$라 하면 $f(0)=c=1$

또, $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(0)=b=-5$, $f'(1)=2a+b=1$에서 $a=3$

따라서 $f(x)=3x^2-5x+1$이므로

$f(2)=3\times2^2-5\times2+1=3$

10 답 ②

$f(x)$를 n차함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차함수이므로

$f(x)f'(x)$는 $n+(n-1)=2n-1$에서 $(2n-1)$차함수이다.

이때, $18x^3+9x^2-11x-2$는 삼차식이므로

$2n-1=3$에서 $n=2$

즉, $f(x)$는 이차함수이므로 $f(x)=3x^2+ax+b$라 하면

$f'(x)=6x+a$이고 이 두 식을

$f(x)f'(x)=18x^3+9x^2-11x-2$에 대입하면

$(3x^2+ax+b)(6x+a)=18x^3+9x^2-11x-2$에서

$18x^3+9ax^2+(a^2+6b)x+ab=18x^3+9x^2-11x-2$

계수비교법에 의하여 $9a=9$, $a^2+6b=-11$, $ab=-2$

따라서 $a=1$, $b=-2$이므로 $f(x)=3x^2+x-2$

$\therefore f(1)=3\times1^2+1-2=2$

11 답 ①

$f(x)$는 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$라 하면

$f'(x)=2ax+b$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$x^2(2ax+b)+(1-2x)(ax^2+bx+c)-1=0$

$(a-b)x^2+(b-2c)x+c-1=0$

이것은 x에 대한 항등식이므로

$a-b=0$, $b-2c=0$, $c-1=0$

$\therefore a=2$, $b=2$, $c=1$

따라서 $f(x)=2x^2+2x+1$이므로

$f(1)=2\times1^2+2\times1+1=5$

12 답 ④

$x^{100}-2x^3+4$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고 나머지를 $f(x)=ax+b$라 하면

$x^{100}-2x^3+4=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $3=a+b$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$100x^{99}-6x^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면 $94=a$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $a=94$, $b=-91$

따라서 $f(x)=94x-91$이므로

$f(2)=94\times2-91=97$

13 답 ⑤

$f(x)=2x^3-4x$라 하면 $f'(x)=6x^2-4$

$f'(1)=2$이므로 점 $(1, -2)$에서의 접선의 방정식은

$y+2=2(x-1)$

$\therefore y=2x-4$

따라서 $a=2$, $b=-4$이므로

$a-b=2-(-4)=6$

14 답 ③

$f(x)=x^2-2x+1$이라 하면 $f'(x)=2x-2$

이때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기를 -2라 하면

$f'(t)=-2$에서 $2t-2=-2$, $2t=0$ $\quad\therefore t=0$

따라서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 -2인 직선은 점 $(0, f(0))$, 즉 $(0, 1)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-2(x-0)$

$\therefore y=-2x+1$

15 답 ④

$g(x)=x^3$이라 하면 $g'(x)=3x^2$

이때, 점 $(1, 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 접점을 (t, t^3)이라 하면 접선의 기울기는 $g'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은 $y-t^3=3t^2(x-t)$에서 $y=3t^2x-2t^3$ …… ㉠

이 접선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$3t^2-2t^3=0$, $t^2(3-2t)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{3}{2}$

이것을 각각 ㉠에 대입하면

$y=0$ 또는 $y=\frac{27}{4}x-\frac{27}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{27}{4}x-\frac{27}{4}$이고 직선 $y=f(x)$가 점 $(2, k)$를 지나므로

$k=\frac{27}{4}\times2-\frac{27}{4}=\frac{27}{4}$

16 답 16

$f(x)=x^2+3$이라 하면

$f'(x)=2x$

이때, 점 $\mathrm{P}(0,\ -1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 $(t,\ t^2+3)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은 $y-(t^2+3)=2t(x-t)$에서

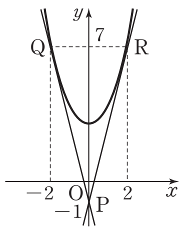
$y=2tx-t^2+3$

이 접선이 점 P를 지나므로

$-1=-t^2+3,\ t^2=4$

$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=2$

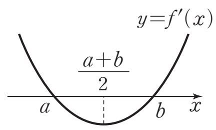
따라서 점 P에서 그은 접선의 접점은 $(-2,\ 7)$, $(2,\ 7)$이므로 그림과 같이 $\mathrm{Q}(-2,\ 7)$, $\mathrm{R}(2,\ 7)$이라 하면



$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\times\{2-(-2)\}\times\{7-(-1)\}=16$

17 답 ③

곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 도함수 $f'(x)$의 함숫값이다. $f'(x)$는 이차함수이고 주어진 그래프에서 $f'(a)=0$, $f'(b)=0$이므로 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때, 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{a+b}{2}$에 대하여 대칭이므로 함수 $f'(x)$가 증가하는 구간은 $x>\frac{a+b}{2}$이다.

18 답 ②

$f(x)=x^3-3ax^2+3ax$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+3a$

이때, 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하여야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2-6ax+3a\geq 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2-6ax+3a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=9a^2-9a\leq 0$에서 $9a(a-1)\leq 0$

$\therefore\ 0\leq a\leq 1$

따라서 실수 a의 최댓값은 1이다.

19 답 ②

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극댓값 $f(0)=0$, $x=2$일 때 극솟값 $f(2)=-4$를 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은 $0+(-4)=-4$이다.

20 답 ②

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$x=0$, $x=1$은 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이다.

$f'(0)=b=0$, $f'(1)=6+2a+b=0$

연립하여 풀면 $a=-3$, $b=0$

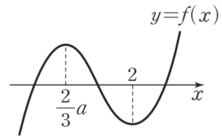
$\therefore\ a+b=(-3)+0=-3$

21 답 ②

$f'(x)=3x^2-2(a+3)x+4a=(x-2)(3x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=\frac{2}{3}a$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이고 $x=2$에서 극솟값을 가져야 하므로



$\frac{2}{3}a<2 \qquad \therefore\ a<3$

22 답 6

$f'(x)=0$인 x의 값은 그래프에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=-2$, $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$\alpha=0,\ \beta=-2,\ \gamma=3(\because\ \beta<\gamma)$

$\therefore\ \alpha-\beta\gamma=0-(-2)\times 3=6$

23 답 ⑤

$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

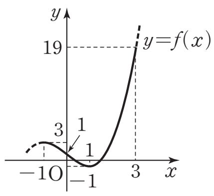
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	-1	↗	19

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 19, $x=1$에서 최솟값 -1을 가지므로 $M=19$, $m=-1$이다.

$\therefore M-m=19-(-1)=20$



24 답 ③

$f(x)=x^3-3x^2+2$에서 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x\ge0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	-2	↗

따라서 $0\le x\le a$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(0)=2$이기 위해서는 $f(a)\le2$이어야 한다.

즉, $a^3-3a^2+2\le2$에서

$a^3-3a^2\le0$, $a^2(a-3)\le0$

$\therefore 0\le a\le3$ ($\because a\ge0$)

25 답 ④

$x^3-3x^2-a=0$에서 $x^3-3x^2=a$

이때, $f(x)=x^3-3x^2$이라 하면

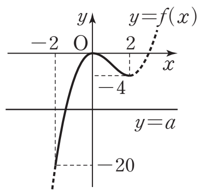
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-20	↗	0	↘	-4

따라서 구간 $[-2, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 방정식 $f(x)=a$가 이 구간에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 하므로 a의 값의 범위는 $-20\le a\le0$이다.



따라서 정수 a의 개수는 -20, -19, $\cdots$, 0으로 21이다.

26 답 3

두 곡선 $y=x^3-4x^2+6x$, $y=2x^2-3x+a$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3-4x^2+6x=2x^2-3x+a$, 즉 $x^3-6x^2+9x-a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때, $f(x)=x^3-6x^2+9x-a$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$4-a$	↘	$-a$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=4-a$, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-a$를 갖고 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱이 음수이어야 한다. 즉, $f(1)f(3)<0$에서

$(4-a)\times(-a)<0$, $a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4$

따라서 주어진 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 a의 개수는 1, 2, 3으로 3이다.

27 답 4

$f(x)\ge g(x)$에서 $f(x)-g(x)>0$

이때,

$$\begin{aligned}F(x)&=f(x)-g(x)\\&=x^4+4x-(-x^2+10x-a)\\&=x^4+x^2-6x+a\end{aligned}$$

라 하면

$F'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$

$F'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 2x^2+2x+3>0$)

함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘	$a-4$	↗

따라서 함수 $F(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최솟값 $a-4$를 가지므로 부등식 $F(x)\ge0$이 모든 실수 x에서 성립하려면 $F(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같아야 한다.

즉, $a-4\ge0$에서 $a\ge4$이므로 실수 a의 최솟값은 4이다.

28 답 28

점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=24-6t-3t^2=-3(t+4)(t-2)$$

$v=0$에서 $t=2$ ($\because t>0$)

즉, 점 P는 출발한 지 2초 후에 운동 방향을 바꾼다.

따라서 $t=2$일 때의 점 P의 위치는

$x=24\times2-3\times2^2-2^3=28$

29 답 ①

물체의 t초 후의 속도를 $v(t)$라 하면

$h(t)=50t-at^2$에서

$v(t)=h'(t)=50-2at$

이때, 물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로 $v(5)=0$에서

$50-10a=0 \quad \therefore a=5$

따라서 $h(t)=50t-5t^2$이므로 물체가 도달하는 최고 높이는

$h(5)=50\times5-5\times5^2=125\,(\text{m})$

30 답 ③

ㄱ. 두 점 P, Q는 $f(t)=g(t)$일 때 만나고 $f(b)=g(b)$, $f(d)=g(d)$이므로 두 점 P, Q는 $t=b$, $t=d$일 때 만난다. 따라서 $0<t<e$에서 두 점 P, Q는 두 번 만난다. (참)

ㄴ. $a<t<c$에서 $f'(t)<0$, $g'(t)>0$이므로 $a<t<c$에서 두 점 P, Q는 서로 반대 방향으로 움직인다. (거짓)

ㄷ. $b<t<c$에서 $f'(t)<0$이고 $c<t<d$에서 $f'(t)>0$이므로 $t=c$에서 점 P의 가속도는 양의 값을 갖는다. 또한, $b<t<c$에서 $g'(t)>0$이고 $c<t<d$에서 $g'(t)<0$이므로 $t=c$에서 점 Q의 가속도는 음의 값을 갖는다.
따라서 $t=c$에서의 두 점 P, Q의 가속도의 곱은 음수이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

Ⅲ 적분

Ⅲ-1 부정적분

pp. 90~95

01 답 1) 참 2) 참 3) 거짓 4) 거짓

1) $(x^5)'=5x^4$이므로 x^5은 $5x^4$의 부정적분이다. (참)

2) $(x^5+3)'=5x^4$이므로 x^5+3은 $5x^4$의 부정적분이다. (참)

3) $(x^5)'=5x^4$이므로 x^5은 $5x^4+3$의 부정적분이 아니다. (거짓)

4) $(x^5+3)'=5x^4$이므로 x^5+3은 $5x^4+3$의 부정적분이 아니다. (거짓)

02 답 1) $f(x)=5$ 2) $f(x)=8x+2$ 3) $f(x)=4x^3+6x^2-8x+3$

1) 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(5x+C)'=\boxed{5}$

2) 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(4x^2+2x+C)'=8x+2$

3) 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(x^4+2x^3-4x^2+3x+C)'$

$=4x^3+6x^2-8x+3$

03 답 1) $2x+C$ 2) $2x^2+C$ 3) x^3+C 4) x^2+x+C

1) $(2x)'=2$이므로 $\int 2dx=2x+C$

2) $(2x^2)'=4x$이므로 $\int 4xdx=\boxed{2x^2+C}$

3) $(x^3)'=3x^2$이므로 $\int 3x^2dx=x^3+C$

4) $(x^2+x)'=2x+1$이므로 $\int(2x+1)dx=x^2+x+C$

04 답 1) 부정적분, $F(x)=\int f(x)dx$ 2) $F(x)$

05 답 1) $5x+C$ 2) $\frac{1}{3}x^3+C$ 3) $\frac{1}{5}x^5+C$ 4) $\frac{1}{6}x^6+C$ 5) $\frac{1}{8}x^8+C$ 6) $\frac{1}{10}x^{10}+C$ 7) $\frac{1}{16}x^{16}+C$ 8) $\frac{1}{100}x^{100}+C$

1) $\int 5dx=5x+C$

2) $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$

3) $\int x^4dx=\frac{1}{5}x^5+C$

4) $\int x^5dx=\frac{1}{6}x^6+C$

5) $\int x^7 dx=\frac{1}{8}x^8+C$

6) $\int x^9 dx=\frac{1}{10}x^{10}+C$

7) $\int x^{15} dx=\frac{1}{16}x^{16}+C$

8) $\int x^{99} dx=\frac{1}{100}x^{100}+C$

06 답 1) x^3+C 2) x^5+C 3) $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C$

4) $\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{5}x^5+C$ 5) $\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+x+C$

6) x^3-2x^2+5x+C

1) $\int 3x^2 dx=3\int x^2 dx$

$=3\times\frac{1}{3}x^3+C=x^3+C$

2) $\int 5x^4 dx=5\int x^4 dx$

$=5\times\frac{1}{5}x^5+C=x^5+C$

3) $\int (x^3+x^2)dx=\int x^3 dx+\int x^2 dx$

$=\boxed{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C}$

4) $\int (x^5-x^4)dx=\int x^5 dx-\int x^4 dx$

$=\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{5}x^5+C$

5) $\int (2x^3-3x+1)dx=\int 2x^3 dx-\int 3x dx+\int 1 dx$

$=2\int x^3 dx-3\int x dx+\int 1 dx$

$=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+x+C$

6) $\int (3x^2-4x+5)dx=\int 3x^2 dx-\int 4x dx+\int 5 dx$

$=3\int x^2 dx-4\int x dx+5\int 1 dx$

$=x^3-2x^2+5x+C$

07 답 1) $\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+C$ 2) $\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x+C$

3) x^3-5x^2+8x+C 4) x^3+x^2+x+C

5) $2x^2+C$

1) $\int (x-1)(2x+3)dx=\int (2x^2+x-3)dx$

$=\boxed{\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+C}$

2) $\int (x-1)(2x-3)dx=\int (2x^2-5x+3)dx$

$=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x+C$

3) $\int (x-2)(3x-4)dx=\int (3x^2-10x+8)dx$

$=x^3-5x^2+8x+C$

4) $\int (2x^2+3x)dx+\int (x^2-x+1)dx$

$=\int (3x^2+2x+1)dx=x^3+x^2+x+C$

5) $\int (x+1)^2 dx-\int (x-1)^2 dx$

$=\int \{(x+1)^2-(x-1)^2\}dx$

$=\int \{(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)\}dx$

$=\int 4x dx=2x^2+C$

08 답 1) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+2$

2) $f(x)=x^3-2x^2-x+3$

3) $f(x)=2x^3-6x^2-2x+6$

4) $f(x)=x^3-6x^2-15x-7$

5) $f(x)=x^3+x^2-x+4$

1) $f'(x)=x^3-2x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x^3-2x)dx$

$=\boxed{\frac{1}{4}x^4-x^2}+C$

이때, $f(0)=2$이므로 $C=\boxed{2}$

$\therefore f(x)=\boxed{\frac{1}{4}x^4-x^2+2}$

2) $f'(x)=3x^2-4x-1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2-4x-1)dx$

$=x^3-2x^2-x+C$

이때, $f(0)=3$이므로 $C=3$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2-x+3$

3) $f'(x)=6x^2-12x-2$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (6x^2-12x-2)dx$

$=2x^3-6x^2-2x+C$

이때, $f(2)=-12+C=-6$이므로 $C=6$

$\therefore f(x)=2x^3-6x^2-2x+6$

4) $f'(x)=3(x+1)(x-5)=3x^2-12x-15$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2-12x-15)dx$

$=x^3-6x^2-15x+C$

이때, $f(-1)=8+C=1$이므로 $C=-7$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2-15x-7$

5) $f'(x)=(x+1)(3x-1)=3x^2+2x-1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2+2x-1)dx$

$=x^3+x^2-x+C$

이때, $f(1)=1+C=5$이므로 $C=4$

$\therefore f(x)=x^3+x^2-x+4$

09 답 1) $f(x)=x^2+2x-3$ 2) $f(x)=x^3-2x^2+3$ 3) $f(x)=x^4+x^2-10$

1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $2x+2$이므로 $f'(x)=2x+2$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+2)dx$$
$$=\boxed{x^2+2x}+C$$

이 곡선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $f(1)=0$에서

$1+2+C=0 \qquad \therefore C=\boxed{-3}$

$\therefore f(x)=\boxed{x^2+2x-3}$

2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-4x$이므로 $f'(x)=3x^2-4x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x)dx$$
$$=x^3-2x^2+C$$

이 곡선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 $f(1)=2$에서

$1-2+C=2 \qquad \therefore C=3$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2+3$

3) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $4x^3+2x$이므로 $f'(x)=4x^3+2x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3+2x)dx$$
$$=x^4+x^2+C$$

이 곡선이 점 $(2,\ 10)$을 지나므로 $f(2)=10$에서

$16+4+C=10 \qquad \therefore C=-10$

$\therefore f(x)=x^4+x^2-10$

10 답 1) 1 2) 1

1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $-2x+1$이므로 $f'(x)=-2x+1$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x+1)dx$$
$$=\boxed{-x^2+x}+C$$

이 곡선이 점 $(2,\ -3)$을 지나므로 $f(2)=-3$에서

$-4+2+C=-3 \qquad \therefore C=\boxed{-1}$

따라서 $f(x)=-x^2+x-1$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 $\boxed{1}$이다.

2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $2x+1$이므로 $f'(x)=2x+1$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$$

이 곡선이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 $f(-1)=1$에서

$1-1+C=1 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=x^2+x+1$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 1이다.

11 답 1) $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ 2) k, $\int g(x)dx$, $\int f(x)dx$

12 답 1) x^3 2) x^3+C 3) $\neq$

1) $$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=\frac{d}{dx}\left\{\int x^3dx\right\}$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\boxed{\frac{1}{4}x^4+C}\right)$$
$$=\boxed{x^3}$$

2) $$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=\int\left(\frac{d}{dx}x^3\right)dx$$
$$=\int\boxed{3x^2}dx=\boxed{x^3+C}$$

3) 1), 2)의 결과에서

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}\neq\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx$$

13 답 1) $3x^2+2x+5$ 2) $3x^2+2x+C$ 3) $\neq$

1) $$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=\frac{d}{dx}\left\{\int(3x^2+2x+5)dx\right\}$$
$$=\frac{d}{dx}(x^3+x^2+5x+C)$$
$$=3x^2+2x+5$$

2) $$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=\int\left\{\frac{d}{dx}(3x^2+2x+5)\right\}dx$$
$$=\int(6x+2)dx$$
$$=3x^2+2x+C$$

3) 1), 2)의 결과에서

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}\neq\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx$$

14 답 1) 1 2) -3 3) 44 4) 5

1) $f(x)=\int(2x^3+3x^2-4x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=2x^3+3x^2-4x$이므로

$f'(1)=2\times1^3+3\times1^2-4\times1=1$

2) $f(x)=\int(x^3-3x^2+1)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=x^3-3x^2+1$이므로

$f'(2)=2^3-3\times2^2+1=-3$

3) $\int\{f(x)+2x\}dx=x^3-6x^2+4x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)+2x=3x^2-12x+4$

따라서 $f(x)=3x^2-14x+4$이므로

$f(-2)=3\times(-2)^2-14\times(-2)+4=44$

4) $\int\{f(x)+x^2\}dx=x^3-x^2+x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)+x^2=3x^2-2x+1$

따라서 $f(x)=2x^2-2x+1$이므로

$f(-1)=2\times(-1)^2-2\times(-1)+1=5$

15 답 1) -7 2) 9

1) $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^3+x^2-3)\right\}dx$에서

$f(x)=2x^3+x^2+C$ (C는 적분상수)

이때, $f(2)=2\times2^3+2^2+C=20+C=10$에서

$C=-10$이므로 $f(x)=2x^3+x^2-10$

$\therefore f(1)=2\times1^3+1^2-10=-7$

2) $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(3x^4-2x^3+3x-1)\right\}dx$에서

$f(x)=3x^4-2x^3+3x+C$ (C는 적분상수)

따라서 $f'(x)=12x^3-6x^2+3$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=12\times1^3-6\times1^2+3=9$

16 답 1) 1 2) $\frac{1}{6}$

1) $\int\{f(x)+1\}dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)+1=x^3-3x$

$\therefore f(x)=x^3-3x-1$

따라서 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 극댓값은

$f(-1)=-1+3-1=1$

2) $F(x)=\int f(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$F'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $F(x)$는 $x=1$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 갖는다. 이때,

$F(x)=\int f(x)dx=\int(x^2-3x+2)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C$ (C는 적분상수)

이므로 함수 $F(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$F(1)-F(2)=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2+C\right)-\left(\frac{8}{3}-6+4+C\right)$

$=\frac{1}{6}$

17 답 1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$

2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+3$ 3) 3

1) 주어진 그래프에서 $f'(x)=ax(x-2)(a>0)$라 하면

$y=f'(x)$의 그래프가 점 $(1, -1)$을 지나므로

$f'(1)=-1$에서 $a\times1\times(-1)=-1$ $\therefore a=1$

따라서 $f'(x)=x(x-2)=x^2-2x$에서

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-2x)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+C$

(C는 적분상수)

한편, $f(0)=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$

2) 주어진 그래프에서

$f'(x)=ax(x-2)=ax^2-2ax(a<0)$라 하면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^2-2ax)dx$

$=\boxed{\frac{1}{3}ax^3-ax^2+C}$ (C는 적분상수)

이때, $y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 $\boxed{\text{극소}}$이고 $x=2$에서 $\boxed{\text{극대}}$이므로 $f(0)=3$, $f(2)=5$ 이다.

$f(0)=3$에서 $C=\boxed{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+\boxed{3}$

$f(2)=5$에서

$\frac{8}{3}a-4a+3=5$

$\frac{4}{3}a=-2$ $\therefore a=\boxed{-\frac{3}{2}}$

$\therefore f(x)=\boxed{-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+3}$

3) 주어진 그래프에서

$f'(x)=ax(x-2)=ax^2-2ax(a>0)$라 하면

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(ax^2-2ax)dx$

$=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+C$ (C는 적분상수)

이때, $y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=2$에서 극소이므로 $f(0)=6$, $f(2)=0$이다.

$f(0)=6$에서 $C=6$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+6$

$f(2)=0$에서

$\frac{8}{3}a-4a+6=0$, $\frac{4}{3}a=6$

$\therefore a=\frac{9}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+6$이므로

$f(1)=\frac{3}{2}-\frac{9}{2}+6=3$

18 답 1) $f(x)$ 2) $f(x)+C$

Ⅲ-2 정적분

pp. 96~106

19 답 1) 6 2) $\frac{3}{2}$ 3) $\frac{15}{4}$ 4) 24 5) 12 6) 88

1) $\int_0^2 3dx=\Big[3x\Big]_0^2=\boxed{6}-\boxed{0}=\boxed{6}$

2) $\int_1^2 xdx=\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

3) $\int_1^2 x^3dx=\Big[\frac{1}{4}x^4\Big]_1^2=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

4) $\int_{-1}^3 (2x+4)dx=\Big[x^2+4x\Big]_{-1}^3=(9+12)-(1-4)$
$=24$

5) $\int_{-1}^2 (3x^2+1)dx=\Big[x^3+x\Big]_{-1}^2=(8+2)-(-1-1)$
$=12$

6) $\int_1^3 (4x^3+2x)dx=\Big[x^4+x^2\Big]_1^3=(81+9)-(1+1)$
$=88$

20 답 1) 0 2) -50 3) 12 4) -2

1) $\int_2^2 (6x^2-2)dx=0$

2) $\int_3^1 (3x^2+6x)dx=\Big[x^3+3x^2\Big]_3^1$
$=(1+3)-(27+27)=-50$

3) $\int_1^{-2} (2x-3x^2)dx=\Big[x^2-x^3\Big]_1^{-2}$
$=(4+8)-(1-1)=12$

4) $\int_0^{-1} 10x^4dx=\Big[2x^5\Big]_0^{-1}=-2$

21 답 $F(x)$, $F(a)$, 0, $-$

22 답 1) $a=-1$, $f(x)=3x^2$ 2) $a=-3$, $f(x)=2x+6$
3) $a=-4$ 또는 $a=1$, $f(x)=2x+3$

1) 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면
$\int_a^a f(t)dt=\boxed{0}$이므로 $a^3+1=0$ $\quad\therefore a=\boxed{-1}$
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여
$f(x)=(x^3+1)'=\boxed{3x^2}$

2) 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면
$\int_a^a f(t)dt=0$이므로
$a^2+6a+9=(a+3)^2=0$ $\quad\therefore a=-3$
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여
$f(x)=(x^2+6x+9)'=2x+6$

3) 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면
$\int_a^a f(t)dt=0$이므로
$a^2+3a-4=(a+4)(a-1)=0$
$\therefore a=-4$ 또는 $a=1$
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여
$f(x)=(x^2+3x-4)'=2x+3$

23 답 1) 5 2) 2

1) 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$\int_1^1 f(t)dt=\boxed{0}$이므로 $0=2-2a$ $\quad\therefore a=\boxed{1}$
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여
$f(x)=4x^3+3x^2-2a=4x^3+3x^2-2$
$\therefore f(1)=4+3-2=\boxed{5}$

2) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$\int_0^0 (t+1)f(t)dt=0$이므로 $a=0$
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여
$(x+1)f(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$
따라서 $f(x)=3x-1$이므로 $f(1)=2$
$\therefore a+f(1)=0+2=2$

24 답 $f(x)$

25 답 1) -8 2) $\frac{16}{3}$ 3) 4 4) 2 5) 212 6) 8

1) $\int_{-1}^3 (2x-3)dx-\int_{-1}^3 (-2x+3)dx$
$=\int_{-1}^3 \{(2x-3)-(-2x+3)\}dx$
$=\int_{-1}^3 (\boxed{4x-6})dx$
$=\Big[\boxed{2x^2-6x}\Big]_{-1}^3$
$=\boxed{0}-\boxed{8}=\boxed{-8}$

2) $\int_0^2 (1+x^2)dx+\int_2^0 (1-x^2)dx$
$=\int_0^2 (1+x^2)dx-\int_0^2 (1-x^2)dx$
$=\int_0^2 \{(1+x^2)-(1-x^2)\}dx$
$=\int_0^2 2x^2dx=\Big[\frac{2}{3}x^3\Big]_0^2=\frac{16}{3}$

3) $\int_0^1 (x+2)^2dx-\int_0^1 (x-2)^2dx$
$=\int_0^1 \{(x+2)^2-(x-2)^2\}dx$
$=\int_0^1 8xdx$
$=\Big[4x^2\Big]_0^1=4$

4) $\int_0^1 (2x-x^2)dx+\int_0^1 (2x+x^2)dx$

$=\int_0^1 \{(2x-x^2)+(2x+x^2)\}dx$

$=\int_0^1 4xdx=\Big[2x^2\Big]_0^1=2$

5) $\int_1^3 (2x+1)^3dx+\int_1^3 (1-2x)^3dx$

$=\int_1^3 (24x^2+2)dx=\Big[8x^3+2x\Big]_1^3$

$=222-10=212$

6) $\int_1^2 (x^2-2x)dx+\int_1^2 (2x^2+2x+1)dx$

$=\int_1^2 (3x^2+1)dx=\Big[x^3+x\Big]_1^2$

$=10-2=8$

26 답 1) $\boldsymbol{k}$ 2) $\int_a^b f(x)dx$ 3) $\int_a^b g(x)dx$

27 답 1) **40** 2) $-\frac{5}{12}$ 3) **88** 4) **48**

1) $\int_{-2}^1 (3x^2+1)dx+\int_1^3 (3x^2+1)dx$

$=\int_{-2}^3 (\boxed{3x^2+1})dx$

$=\Big[\boxed{x^3+x}\Big]_{-2}^3$

$=\boxed{30}-(\boxed{-10})=\boxed{40}$

2) $\int_0^2 (x^3-2x^2)dx+\int_2^1 (x^3-2x^2)dx$

$=\int_0^1 (x^3-2x^2)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1$

$=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=-\frac{5}{12}$

3) $\int_0^2 (9x+4)dx+\int_2^4 (9x+4)dx$

$=\int_0^4 (9x+4)dx$

$=\Big[\frac{9}{2}x^2+4x\Big]_0^4$

$=72+16=88$

4) $\int_1^2 (3x^2-2x)dx+\int_2^3 (3x^2-2x)dx$

$+\int_3^4 (3x^2-2x)dx$

$=\int_1^4 (3x^2-2x)dx$

$=\Big[x^3-x^2\Big]_1^4$

$=(64-16)-(1-1)$

$=48$

28 답 1) **21** 2) **18** 3) $\frac{38}{3}$

1) $\int_0^1 (x+1)^2dx-\int_3^1 (x+1)^2dx$

$=\int_0^1 (x+1)^2dx+\int_{\boxed{1}}^{\boxed{3}} (x+1)^2dx$

$=\int_0^3 (x+1)^2dx$

$=\int_0^3 (x^2+2x+1)dx$

$=\Big[\boxed{\frac{1}{3}x^3+x^2+x}\Big]_0^3$

$=\boxed{9}+\boxed{9}+\boxed{3}=\boxed{21}$

2) $\int_0^2 x(3x-2)dx-\int_3^2 x(3x-2)dx$

$=\int_0^2 (3x^2-2x)dx-\int_3^2 (3x^2-2x)dx$

$=\int_0^2 (3x^2-2x)dx+\int_2^3 (3x^2-2x)dx$

$=\int_0^3 (3x^2-2x)dx=\Big[x^3-x^2\Big]_0^3$

$=27-9=18$

3) $\int_1^2 (x^2+x)dx-\int_3^2 (t^2+t)dt$

$=\int_1^2 (x^2+x)dx-\int_3^2 (x^2+x)dx$

$=\int_1^2 (x^2+x)dx+\int_2^3 (x^2+x)dx=\int_1^3 (x^2+x)dx$

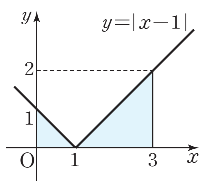
$=\Big[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_1^3=\left(9+\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{38}{3}$

29 답 $\int_a^b f(x)dx$

30 답 1) $\frac{5}{2}$ 2) $\frac{5}{2}$ 3) $\frac{5}{2}$

1) $|x-1|=\begin{cases}1-x & (x\le 1)\\ x-1 & (x>1)\end{cases}$

이므로



$\int_0^3 |x-1|dx$

$=\int_0^1 (1-x)dx+\int_1^3 (x-1)dx$

$=\Big[\boxed{x-\frac{1}{2}x^2}\Big]_0^1+\Big[\boxed{\frac{1}{2}x^2-x}\Big]_1^3$

$=\frac{1}{2}+\boxed{2}=\boxed{\frac{5}{2}}$

2) $|x+1|=\begin{cases}-x-1 & (x\le -1)\\ x+1 & (x>-1)\end{cases}$ 이므로

$\int_{-2}^1 |x+1|dx=\int_{-2}^{-1} (-x-1)dx+\int_{-1}^1 (x+1)dx$

$=\Big[-\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{-2}^{-1}+\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-1}^1$

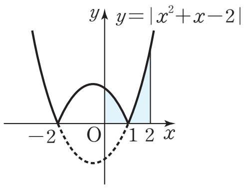
$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

3) $|x-2|=\begin{cases} -x+2 & (x\le2) \\ x-2 & (x>2) \end{cases}$ 이므로

$$\int_0^3|x-2|dx=\int_0^2(-x+2)dx+\int_2^3(x-2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$$
$$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

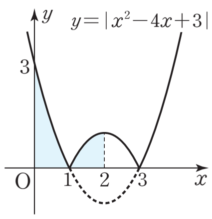
31 답 1) 3 2) 2 3) $\frac{8}{3}$

1) $|x^2+x-2|=\begin{cases} -x^2-x+2 & (-2\le x\le1) \\ x^2+x-2 & (x<-2 \text{ 또는 } x>1) \end{cases}$ 이므로



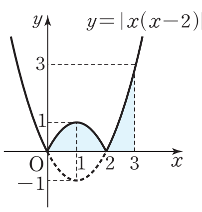
$$\int_0^2|x^2+x-2|dx$$
$$=\int_0^1(\boxed{-x^2-x+2})dx+\int_1^2(\boxed{x^2+x-2})dx$$
$$=\left[\boxed{-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x}\right]_0^1+\left[\boxed{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x}\right]_1^2$$
$$=\boxed{\frac{7}{6}}+\boxed{\frac{11}{6}}=\boxed{3}$$

2) $|x^2-4x+3|=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x<1 \text{ 또는 } x>3) \\ -x^2+4x-3 & (1\le x\le3) \end{cases}$ 이므로



$$\int_0^2|x^2-4x+3|dx$$
$$=\int_0^1(x^2-4x+3)dx+\int_1^2(-x^2+4x-3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^2$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$$

3) $|x(x-2)|=\begin{cases} 2x-x^2 & (0\le x\le2) \\ x^2-2x & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \end{cases}$ 이므로



$$\int_0^3|x(x-2)|dx$$
$$=\int_0^2(2x-x^2)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$$
$$=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

32 답 1) $-\frac{1}{6}$ 2) $\frac{7}{2}$ 3) 2

1) $$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1(x^2-1)dx+\int_1^2(x-1)dx$$
$$=\left[\boxed{\frac{1}{3}x^3-x}\right]_0^1+\left[\boxed{\frac{1}{2}x^2-x}\right]_1^2$$
$$=\boxed{-\frac{2}{3}}+\boxed{\frac{1}{2}}=\boxed{-\frac{1}{6}}$$

2) $$\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^1+\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

3) $f(x-1)=\begin{cases} x-1 & (x<2) \\ -x+3 & (x\ge2) \end{cases}$ 이므로

$$xf(x-1)=\begin{cases} x^2-x & (x<2) \\ -x^2+3x & (x\ge2) \end{cases}$$
$$\int_1^3 xf(x-1)dx$$
$$=\int_1^2(x^2-x)dx+\int_2^3(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_2^3$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{7}{6}=2$$

33 답 1) -8 2) 9

1) $f(x)=\begin{cases} 6 & (x\le0) \\ -3x+6 & (x>0) \end{cases}$ 이므로

$$\int_{-2}^2 xf(x)dx=\int_{-2}^0 6xdx+\int_0^2(-3x^2+6x)dx$$
$$=\left[3x^2\right]_{-2}^0+\left[-x^3+3x^2\right]_0^2$$
$$=-12+4=-8$$

2) $\int_0^6 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^6=f(6)-f(0)$이고

$f'(x)=\begin{cases} x & (x\le3) \\ 6-x & (x>3) \end{cases}$ 이므로

$$\int_0^6 f'(x)dx=\int_0^3 xdx+\int_3^6(6-x)dx$$
$$=\left[\boxed{\frac{1}{2}x^2}\right]_0^3+\left[\boxed{6x-\frac{1}{2}x^2}\right]_3^6$$
$$=\boxed{\frac{9}{2}}+\boxed{\frac{9}{2}}=\boxed{9}$$

$\therefore f(6)-f(0)=\boxed{9}$

34 답 1) 부호 2) $\int_a^b g(x)dx+\int_b^c h(x)dx$

35 답 1) 0 2) 0 3) 2 4) 10 5) 4 6) $\frac{32}{3}$ 7) 0 8) $-\frac{4}{3}$ 9) 20

1) $\int_{-1}^{1}(x^3+3x)dx=0$

2) $\int_{-2}^{2}(x^3-x^2-2x+4)dx=2\int_{0}^{2}(-3x^2+4)dx$

$=2\Big[\boxed{-x^3+4x}\Big]_0^2$

$=\boxed{0}$

3) $\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2+2)dx+\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2)dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2+2)dx=2\int_{0}^{1}(-3x^2+2)dx$

$=2\Big[-x^3+2x\Big]_0^1=2\times1=2$

4) $\int_{-1}^{1}(5x^4-6x^3+3x^2-7x+3)dx$

$=2\int_{0}^{1}(5x^4+3x^2+3)dx=2\Big[x^5+x^3+3x\Big]_0^1$

$=2\times5=10$

5) $\int_{-1}^{0}(1+2x+3x^2+4x^3)dx$

$+\int_{0}^{1}(1+2x+3x^2+4x^3)dx$

$=\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+4x^3)dx$

$=2\int_{0}^{1}(1+3x^2)dx$

$=2\Big[x+x^3\Big]_0^1=2\times2=4$

6) $\int_{0}^{2}(2x^2+2x)dx-2\int_{0}^{-2}(x+x^2)dx$

$=\int_{0}^{2}(2x^2+2x)dx+\int_{-2}^{0}(2x+2x^2)dx$

$=\int_{-2}^{2}(2x^2+2x)dx$

$=2\int_{0}^{2}2x^2dx=2\Big[\frac{2}{3}x^3\Big]_0^2=\frac{32}{3}$

7) $\int_{-1}^{1}(x^2+x+1)dx-\int_{-1}^{1}(x^2-x+1)dx$

$=\int_{-1}^{1}2xdx=0$

8) $\int_{-1}^{1}x(1-x)^2dx=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2+x)dx$

$=2\int_{0}^{1}(-2x^2)dx$

$=2\Big[-\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1=-\frac{4}{3}$

9) $y=|x|$는 y축에 대하여 대칭인 함수이므로

$\int_{-2}^{2}(3x^2+|x|)dx=2\int_{0}^{2}(3x^2+x)dx$

$=2\Big[x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_0^2$

$=2\times10=20$

36 답 1) 0 2) 2

37 답 1) $-\frac{2}{3}$ 2) -2 3) 2 4) $\frac{7}{2}$ 5) -2 6) $-\frac{7}{2}$

1) $\int_{0}^{2}f(t)dt=k$(k는 상수) ⋯⋯㉠

라 하면 $f(x)=x^2-x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{2}(t^2-t+k)dt=k$, $\Big[\boxed{\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+kt}\Big]_0^2=k$

$\frac{8}{3}-2+2k=k$ $\quad\therefore k=\boxed{-\frac{2}{3}}$

따라서 $f(x)=x^2-x+\left(\boxed{-\frac{2}{3}}\right)$이므로 $f(1)=\boxed{-\frac{2}{3}}$

2) $\int_{0}^{2}f(x)dx=k$(k는 상수) ⋯⋯㉠

라 하면 $f(x)=2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{2}(2x+k)dx=k$, $\Big[x^2+kx\Big]_0^2=k$, $4+2k=k$

$\therefore k=-4$

따라서 $f(x)=2x-4$이므로 $f(1)=-2$

3) $\int_{0}^{1}f(t)dt=k$(k는 상수) ⋯⋯㉠

라 하면 $f(x)=12x-2+2k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{1}(12t-2+2k)dt=k$, $\Big[6t^2-2t+2kt\Big]_0^1=k$

$6-2+2k=k$

$\therefore k=-4$

따라서 $f(x)=12x-10$이므로 $f(1)=2$

4) $\int_{0}^{1}f(t)dt=k$(k는 상수) ⋯⋯㉠

라 하면 $f(x)=x^3-4x^2+3kx$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{1}(t^3-4t^2+3kt)dt=k$, $\Big[\frac{1}{4}t^4-\frac{4}{3}t^3+\frac{3}{2}kt^2\Big]_0^1=k$

$\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}k=k$

$\therefore k=\frac{13}{6}$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+\frac{13}{2}x$이므로 $f(1)=\frac{7}{2}$

5) $\int_{0}^{1}f'(y)dy=k$(k는 상수) ⋯⋯㉠

라 하면

$f(x)=x^3-2x+k$에서 $f'(x)=3x^2-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{0}^{1}(3y^2-2)dy=k$

$\therefore k=\Big[y^3-2y\Big]_0^1=-1$

따라서 $f(x)=x^3-2x-1$이므로 $f(1)=-2$

6) $\int_0^1 tf(t)dt=k$(k는 상수) ……㉠

라 하면 $f(x)=x^2-3x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 t(t^2-3t+k)dt=k$, $\int_0^1 (t^3-3t^2+kt)dt=k$

$\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+\frac{1}{2}kt^2\right]_0^1=k$

$\frac{1}{4}-1+\frac{1}{2}k=k$ $\quad\therefore k=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x^2-3x-\frac{3}{2}$이므로 $f(1)=-\frac{7}{2}$

38 답 1) 1 2) 24 3) 9 4) 8 5) 1

1) $x^2f(x)=2x^6-x^4+2\int_1^x tf(t)dt$ ……㉠

의 양변을 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=12x^5-4x^3+2xf(x)$

따라서 $f'(x)=\boxed{12x^3-4x}$이므로

$f(x)=\boxed{3x^4-2x^2}+C$(C는 적분상수) ……㉡

한편, ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-1+2\int_1^1 tf(t)dt=1+0=1$

이므로 ㉡에서 $f(1)=3-2+C=1$ $\quad\therefore C=\boxed{0}$

따라서 $f(x)=3x^4-2x^2$이므로 $f(-1)=\boxed{1}$

2) $xf(x)=x^4-2x^2+\int_a^x tf'(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=4x^3-4x+xf'(x)$

따라서 $f(x)=4x^3-4x$이므로 $f(2)=24$

3) $xf(x)=\frac{2}{3}x^3+\int_a^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2x^2+f(x)$

따라서 $f'(x)=2x$이므로

$f(x)=x^2+C$ (C는 적분상수)

이때, $f(0)=0$이므로 $C=0$에서 $f(x)=x^2$

$\therefore f(3)=9$

4) $\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^4-2x^2+1$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^4-2x^2+1$ ……㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=4x^3-4x$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=4x^3-4x$ ……㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=12x^2-4$이므로 $f(1)=8$

5) $\int_0^1 f(t)dt=k$(k는 상수) ……㉠

라 하면 $f(x)=3x^2+(2x-1)k=3x^2+2kx-k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 (3t^2+2kt-k)dt=k$, $\left[t^3+kt^2-kt\right]_0^1=k$

$1+k-k=k$ $\quad\therefore k=1$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(t)dt=k=1$

39 답 상수, $\int_a^b f(t)dt=k$

40 답 1) $-\frac{7}{6}$ 2) $\frac{5}{3}$ 3) $-\frac{4}{3}$ 4) $-\frac{1}{2}$ 5) $\frac{25}{12}$

1) $f(x)=\int_0^x (t^2+t-2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{-2}$ 또는 $x=\boxed{1}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$\boxed{-2}$	…	$\boxed{1}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 $\boxed{극소}$이므로 극솟값은

$f(1)=\int_0^1 (t^2+t-2)dt=\left[\boxed{\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t}\right]_0^1$

$=\boxed{-\frac{7}{6}}$

2) $f(x)=\int_0^x (t^2-2t-3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-1)=\int_0^{-1} (t^2-2t-3)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_0^{-1}=\frac{5}{3}$

3) $f(x)=\int_1^x (t^2-4t+3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로 극댓값과 극솟값의 합은

$f(1)+f(3)$

$=\int_1^1 (t^2-4t+3)dt+\int_1^3 (t^2-4t+3)dt$

$=0+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_1^3=-\frac{4}{3}$

4) $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

이때, $F'(x)=f(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$

$0<x<1$일 때 $F'(x)>0$

$1<x<3$일 때 $F'(x)<0$

$3<x<5$일 때 $F'(x)>0$

이므로 $F(x)$는 $x=3$일 때 극소이고 극솟값은

$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^2 (1-t)dt+\int_2^3 (t-3)dt$

$=\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}t^2-3t\right]_2^3=-\frac{1}{2}$

5) $f'(x)=2x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 2xdx=x^2+C$ (C는 적분상수)

이때, $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=x^2+2$이므로

$F(x)=\int_0^1 f(x-t)dt=\int_0^1 \{(x-t)^2+2\}dt$

$=\int_0^1 (x^2-2xt+t^2+2)dt$

$=\left[x^2t-xt^2+\frac{1}{3}t^3+2t\right]_0^1$

$=x^2-x+\frac{7}{3}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{12}$

따라서 함수 $F(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{12}$를 갖는다.

41 답 $f'(x)$, $f'(x)=0$

42 답 1) 0 2) −1 3) 8 4) 2 5) 6 6) 30

1) $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\int_1^x f(t)dt=f(\boxed{x})-f(\boxed{1})$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(\boxed{1})=f(\boxed{1})=\boxed{0}$

2) $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=F'(0)=f(0)=-1$

3) $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=f(1)=2^3=8$

4) $f'(x)=3x^2-2x+1$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{2}$

$+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{2}f'(1)=f'(1)$

$=3-2+1=2$

5) $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}f(x)dx=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$

$=F'(1)=f(1)$

$=2+3+1=6$

6) $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x+1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x+1}{x-1}\{F(x^2)-F(1)\}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x^2+3x+1)(x+1)\right\}$

$=F'(1)\times5\times2=10F'(1)=10f(1)$

$=10\times(2-1+2)=30$

43 답 1) $f(0)$ 2) $f(a)$

Ⅲ－3 정적분의 활용

pp. 107~115

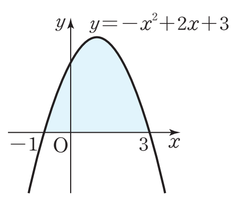
44 답 1) $\frac{32}{3}$ 2) $\frac{4}{3}$ 3) $\frac{4}{3}$

1) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+2x+3=0$에서

$-(x+1)(x-3)=0$ ∴ $x=-1$ 또는 $x=3$

구간 $\boxed{[-1,\ 3]}$에서 $y\ge0$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$S=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)dx$

$=\left[\boxed{-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x}\right]_{-1}^3$

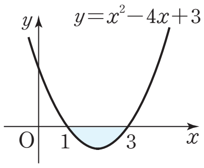
$=\boxed{\frac{32}{3}}$

2) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$

구간 $[1,\ 3]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



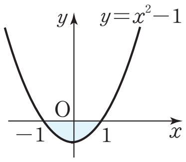
$$S=\int_1^3\{-(x^2-4x+3)\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3$$
$$=(-9+18-9)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)$$
$$=\frac{4}{3}$$

3) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-1=(x+1)(x-1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[-1,\ 1]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

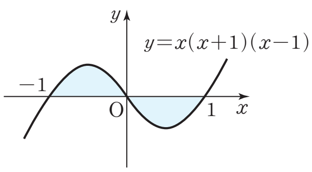


$$S=\int_{-1}^1\{-(x^2-1)\}dx$$
$$=2\int_0^1(-x^2+1)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{3}$$

45 답 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{37}{12}$

1) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는 $x(x+1)(x-1)=0$에서

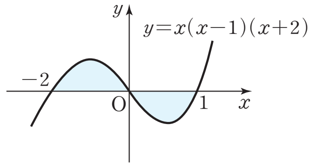
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$



구간 $\boxed{[-1,\ 0]}$에서 $y\ge 0$이고, 구간 $\boxed{[0,\ 1]}$에서 $y\le 0$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^1|x(x+1)(x-1)|dx$$
$$=\int_{-1}^0 x(x+1)(x-1)dx$$
$$+\int_0^1\{-x(x+1)(x-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^0(x^3-x)dx+\int_0^1(-x^3+x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\boxed{\frac{1}{4}}+\boxed{\frac{1}{4}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

2) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는 $x(x-1)(x+2)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$



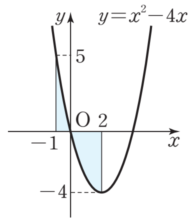
구간 $[-2,\ 0]$에서 $y\ge 0$이고 구간 $[0,\ 1]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^1|x(x-1)(x+2)|dx$$
$$=\int_{-2}^0 x(x-1)(x+2)dx$$
$$+\int_0^1\{-x(x-1)(x+2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^0(x^3+x^2-2x)dx+\int_0^1(-x^3-x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{37}{12}$$

46 답 1) $\frac{23}{3}$ 2) $\frac{31}{6}$ 3) 1

1) $y=x^2-4x$의 그래프는 그림과 같다.

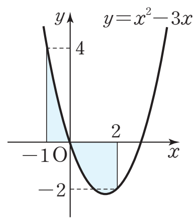
따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-1}^2|x^2-4x|dx$$
$$=\int_{-1}^0(x^2-4x)dx+\int_0^2\left(\boxed{-x^2+4x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^0+\left[\boxed{-\frac{1}{3}x^3+2x^2}\right]_0^2=\boxed{\frac{23}{3}}$$

2) $y=x^2-3x$의 그래프는 그림과 같다.

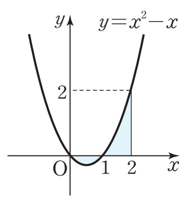
따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-1}^2|x^2-3x|dx$$
$$=\int_{-1}^0(x^2-3x)dx+\int_0^2(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^2=\frac{31}{6}$$

3) $y=x^2-x$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^2|x^2-x|dx$$
$$=\int_0^1(-x^2+x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=1$$

47 답 1) **3** 2) $\mathbf{\frac{2}{3}}$

1) $A=B$이므로

$\int_0^2 |3x^2-6x|dx=\int_2^a |3x^2-6x|dx$에서

$\int_0^2 (-3x^2+6x)dx=\int_2^a (3x^2-6x)dx$

$\int_0^2 (3x^2-6x)dx+\int_2^a (3x^2-6x)dx=0$

$\int_0^a (3x^2-6x)dx=0$

$\left[x^3-3x^2\right]_0^a=0$, $a^3-3a^2=0$, $a^2(a-3)=0$

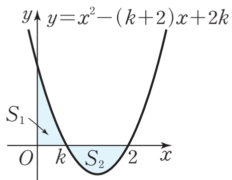
$\therefore a=3$ ($\because a>2$)

2) $y=x^2-(k+2)x+2k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$x^2-(k+2)x+2k=0$에서 $(x-k)(x-2)=0$

$\therefore x=\boxed{k}$ 또는 $x=\boxed{2}$

이때, $0<k<2$이므로 $y=x^2-(k+2)x+2k$의 그래프는 그림과 같고 $S_1=S_2$이므로



$\int_0^k |x^2-(k+2)x+2k|dx$

$=\int_k^2 |x^2-(k+2)x+2k|dx$

$\int_0^k \{x^2-(k+2)x+2k\}dx$

$=\int_k^2 \{-x^2+(k+2)x-2k\}dx$

$\int_0^k \{x^2-(k+2)x+2k\}dx$

$+\int_k^2 \{x^2-(k+2)x+2k\}dx=0$

$\int_0^2 \{x^2-(k+2)x+2k\}dx=\boxed{0}$

$\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{k+2}{2}x^2+2kx\right]_0^2=\boxed{0}$

$\frac{8}{3}-2(k+2)+4k=0$, $2k-\frac{4}{3}=0$

$\therefore k=\boxed{\frac{2}{3}}$

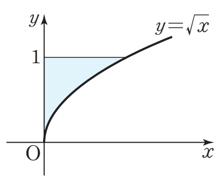
48 답 $\mathbf{\int_a^b |f(x)|dx}$

49 답 1) $\mathbf{\frac{1}{3}}$ 2) $\mathbf{\frac{7}{3}}$ 3) $\mathbf{\frac{5}{6}}$

1) $y=\sqrt{x}$에서 $x=y^2$이므로

$\int_0^1 xdy=\int_0^1 \boxed{y^2}dy$

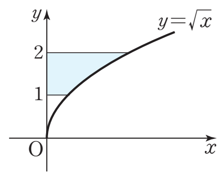
$=\boxed{\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1}=\boxed{\frac{1}{3}}$



2) $\int_1^2 y^2dy=\left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^2$

$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}$

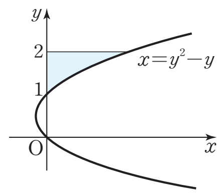
$=\frac{7}{3}$



3) $\int_1^2 (y^2-y)dy=\left[\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2\right]_1^2$

$=\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)$

$=\frac{5}{6}$



50 답 1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ 2) **3**

1) $-1\le y\le 0$일 때 $x\le 0$, $0\le y\le 1$일 때 $x\ge 0$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-1}^1 |y(1-y^2)|dy$

$=\int_{-1}^0 \{-y(1-y^2)\}dy+\int_0^1 y(1-y^2)dy$

$=\left[-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}y^4\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{4}y^4\right]_0^1$

$=\boxed{\frac{1}{4}}+\boxed{\frac{1}{4}}=\boxed{\frac{1}{2}}$

2) 곡선 $x=(y-1)(y-a)$와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$S=-\int_1^a (y-1)(y-a)dy$

$=-\int_1^a \{y^2-(1+a)y+a\}dy$

$=-\left[\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}(1+a)y^2+ay\right]_1^a$

$=\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$에서

$a^3-3a^2+3a-9=0$, $(a-3)(a^2+3)=0$

$\therefore a=3$

51 답 $\mathbf{\int_c^d |g(y)|dy}$

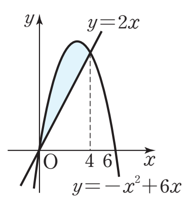
52 답 1) $\mathbf{\frac{32}{3}}$ 2) $\mathbf{\frac{4}{3}}$ 3) $\mathbf{\frac{9}{2}}$ 4) $\mathbf{\frac{4}{3}}$ 5) $\mathbf{\frac{27}{4}}$

1) 곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

$-x^2+6x=2x$에서

$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$

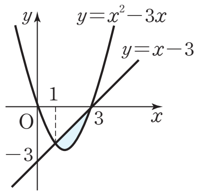
$\therefore x=0$ 또는 $x=4$



이때, 구간 $[0, 4]$에서 $-x^2+6x\ge 2x$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^4 (\boxed{-x^2+6x-2x})dx$$
$$=\int_0^4 (-x^2+\boxed{4x})dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\boxed{2x^2}\right]_0^4=\boxed{\frac{32}{3}}$$

2) 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=x-3$의 교점의 x좌표는



$x^2-3x=x-3$에서

$x^2-4x+3=0$

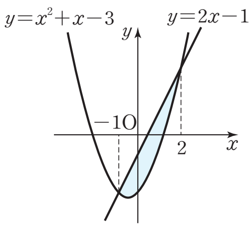
$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이때, 구간 $[1, 3]$에서 $x-3\geq x^2-3x$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_1^3 \{(x-3)-(x^2-3x)\}dx$$
$$=\int_1^3 (-x^2+4x-3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

3) 곡선 $y=x^2+x-3$과 직선 $y=2x-1$의 교점의 x좌표는



$x^2+x-3=2x-1$에서

$x^2-x-2=0$

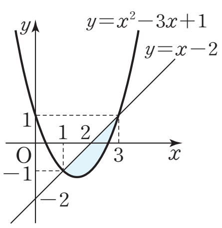
$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때, 구간 $[-1, 2]$에서 $2x-1\geq x^2+x-3$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^2 \{(2x-1)-(x^2+x-3)\}dx$$
$$=\int_{-1}^2 (-x^2+x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2=\frac{9}{2}$$

4) 곡선 $y=x^2-3x+1$과 직선 $y=x-2$의 교점의 x좌표는



$x^2-3x+1=x-2$에서

$x^2-4x+3=0$

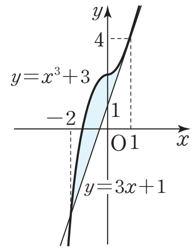
$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이때, 구간 $[1, 3]$에서 $x-2\geq x^2-3x+1$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_1^3 \{(x-2)-(x^2-3x+1)\}dx$$
$$=\int_1^3 (-x^2+4x-3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

5) 곡선 $y=x^3+3$과 직선 $y=3x+1$의 교점의 x좌표는



$x^3+3=3x+1$에서

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

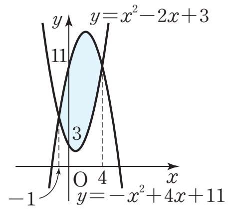
$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

이때, 구간 $[-2, 1]$에서 $x^3+3\geq 3x+1$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^1 \{(x^3+3)-(3x+1)\}dx$$
$$=\int_{-2}^1 (x^3-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1$$
$$=\frac{27}{4}$$

53 답 1) $\frac{125}{3}$ 2) $\frac{27}{2}$ 3) $\frac{8}{3}$

1) 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^2-2x+3=-x^2+4x+11$에서

$x^2-3x-4=0$

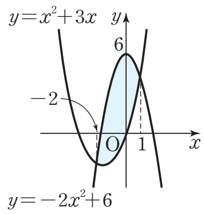
$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

이때, 구간 $[-1, 4]$에서 $-x^2+4x+11\geq x^2-2x+3$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^4 \{(-x^2+4x+11)-(x^2-2x+3)\}dx$$
$$=\int_{-1}^4 (-2x^2+6x+8)dx$$
$$=\left[\boxed{-\frac{2}{3}x^3+3x^2+8x}\right]_{-1}^4=\boxed{\frac{125}{3}}$$

2) 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^2+3x=-2x^2+6$에서

$x^2+x-2=0$

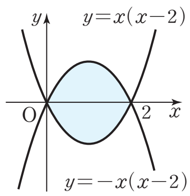
$(x-1)(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

이때, 구간 $[-2, 1]$에서 $-2x^2+6\geq x^2+3x$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^1 \{(-2x^2+6)-(x^2+3x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^1 (-3x^2-3x+6)dx$$
$$=\left[-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-2}^1$$
$$=\frac{27}{2}$$

3) 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x(x-2)=-x(x-2)$에서

$2x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

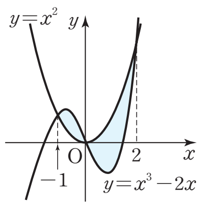
이때, 구간 $[0,\ 2]$에서

$-x(x-2)\ge x(x-2)$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2\{-x(x-2)-x(x-2)\}dx$$
$$=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

54 답 **1)** $\mathbf{\frac{37}{12}}$ **2)** **8** **3)** $\mathbf{\frac{1}{2}}$

1) 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^3-2x=x^2$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

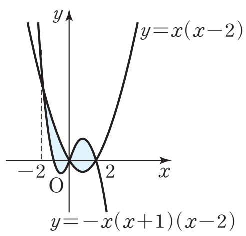
$\therefore x=\boxed{-1}$ 또는 $x=\boxed{0}$

또는 $x=\boxed{2}$

이때, 구간 $[-1,\ 0]$에서 $x^3-2x\ge x^2$이고 구간 $[0,\ 2]$에서 $x^2\ge x^3-2x$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^0\{(x^3-2x)-x^2\}dx+\int_0^2\{x^2-(x^3-2x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^0(x^3-x^2-2x)dx+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)dx$$
$$=\left[\boxed{\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2}\right]_{-1}^0+\left[\boxed{-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2}\right]_0^2$$
$$=\boxed{\frac{37}{12}}$$

2) 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x(x-2)=-x(x+1)(x-2)$

에서 $x(x-2)(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는

$x=2$

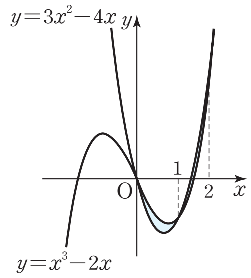
이때, 구간 $[-2,\ 0]$에서

$x(x-2)\ge -x(x+1)(x-2)$이고 구간 $[0,\ 2]$에서

$x(x-2)\le -x(x+1)(x-2)$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^0\{x(x-2)+x(x+1)(x-2)\}dx$$
$$+\int_0^2\{-x(x+1)(x-2)-x(x-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^0(x^3-4x)dx+\int_0^2(-x^3+4x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2=8$$

3) 두 곡선의 교점의 x좌표는



$x^3-2x=3x^2-4x$에서

$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는

$x=2$

이때, 구간 $[0,\ 1]$에서

$x^3-2x\ge 3x^2-4x$이고

구간 $[1,\ 2]$에서 $3x^2-4x\ge x^3-2x$이므로

구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1\{(x^3-2x)-(3x^2-4x)\}dx$$
$$+\int_1^2\{(3x^2-4x)-(x^3-2x)\}dx$$
$$=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx+\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2=\frac{1}{2}$$

55 답 **1)** $\mathbf{\frac{4}{3}}$ **2)** $\mathbf{\frac{32}{3}}$ **3)** **9**

1) 곡선 $y=x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

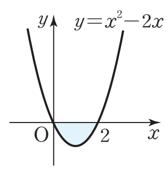
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{|1|(2-0)^3}{6}=\boxed{\frac{4}{3}}$$

[다른 풀이]

구간 $[0,\ 2]$에서 $y\le 0$이므로



$$S=\int_0^2|x^2-2x|dx$$
$$=\int_0^2(\boxed{-x^2+2x})dx$$
$$=\left[\boxed{-\frac{1}{3}x^3+x^2}\right]_0^2$$
$$=-\frac{8}{3}+4=\boxed{\frac{4}{3}}$$

2) 곡선 $y=-x^2+4x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+4x=0$에서 $-x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{|-1|(4-0)^3}{6}=\frac{4^3}{6}=\frac{32}{3}$$

3) 곡선 $y=2x^2+6x$와 x축의 교점의 x좌표는

$2x^2+6x=0$에서 $2x(x+3)=0$

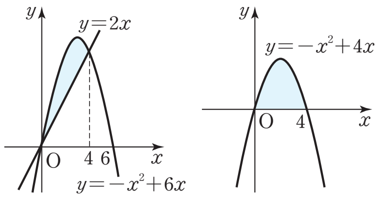
$\therefore x=0$ 또는 $x=-3$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{|2|\{0-(-3)\}^3}{6}=\frac{54}{6}=9$$

56 답 1) $\frac{32}{3}$ 2) $\frac{4}{3}$ 3) $\frac{8}{3}$

1) 곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=2x$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=(-x^2+6x)-2x=-x^2+4x$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.



곡선 $y=-x^2+4x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+4x=0$에서

$-x(x-4)=0$ $\quad\therefore x=\boxed{0}$ 또는 $x=\boxed{4}$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{|-1|\times(4-0)^3}{6}=\frac{\boxed{4^3}}{6}=\frac{\boxed{32}}{3}$

2) 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=x-3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=(x^2-3x)-(x-3)=x^2-4x+3$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

곡선 $y=x^2-4x+3$과 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-4x+3=0$에서

$(x-1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{|1|\times(3-1)^3}{6}=\frac{2^3}{6}=\frac{4}{3}$

3) 곡선 $y=2x^2-x+1$과 직선 $y=3x+1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=(2x^2-x+1)-(3x+1)=2x^2-4x$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

곡선 $y=2x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표는

$2x^2-4x=0$에서

$2x(x-2)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=2$

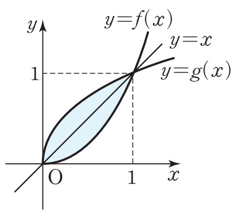
따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{|2|\times(2-0)^3}{6}=\frac{8}{3}$

57 답 1) $\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$ 2) $\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

58 답 1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{24}$

1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 S라 하면 S는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 $\boxed{2}$배이다.



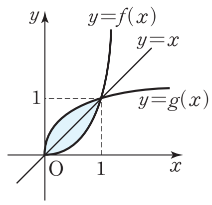
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^2=x$에서 $x(x-1)=0$

$\therefore x=\boxed{0}$ 또는 $x=\boxed{1}$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\boxed{2}\int_0^1(x-x^2)dx=\boxed{2}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{3}}$

2) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 S라 하면 S는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.



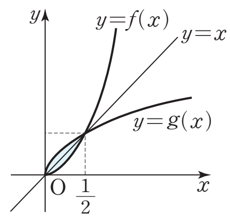
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3=x$에서 $x(x-1)(x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ ($\because x\geq0$)

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=2\int_0^1(x-x^3)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{2}$

3) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 S라 하면 S는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x=x$에서

$\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}x=0$, $x(2x+1)(2x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ ($\because x\geq0$)

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

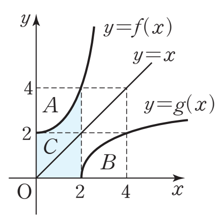
$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{x-\left(\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x\right)\right\}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}x\right)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{6}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{24}$$

59 답 1) 8 2) 20

1) 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2(x\geq0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $\boxed{y=x}$에 대하여 대칭이다.



그림에서

(A의 넓이)=(B의 넓이)이므로

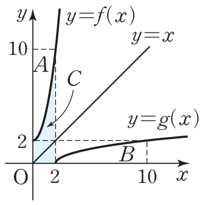
$\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 g(x)dx$

=(C의 넓이)+(B의 넓이)

=(C의 넓이)+($\boxed{A}$의 넓이)

$=2\times4=\boxed{8}$

2) 함수 $f(x)=x^3+2(x\geq0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 그림에서



(A의 넓이)=(B의 넓이)이므로

$\int_0^2 f(x)dx+\int_2^{10} g(x)dx$

=(C의 넓이)+(B의 넓이)

=(C의 넓이)+(A의 넓이)

$=2\times10=20$

60 답 1) $y=x$ 2) 이등분

61 답 1) $\frac{4}{3}$ 2) $\frac{8}{3}$ 3) $\frac{8}{3}$

1) 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_0^1 v(t)dt=\int_0^1(t^2-4t+3)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}$

2) 점 P는 좌표가 2인 점을 출발하므로 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$2+\int_0^2 v(t)dt=2+\int_0^2(t^2-4t+3)dt$

$=2+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^2$

$=2+\left(\frac{8}{3}-8+6\right)$

$=\frac{8}{3}$

3) $1\leq t\leq3$에서 $v(t)\leq0$, $t\geq3$에서 $v(t)\geq0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_1^4|v(t)|dt$

$=\int_1^4|t^2-4t+3|dt$

$=\int_1^3(-t^2+4t-3)dt+\int_3^4(t^2-4t+3)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_3^4$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

62 답 1) $-\frac{4}{3}$ 2) $\frac{13}{6}$ 3) $-\frac{9}{2}$

1) $\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(t^2-2t)dt$

$=\left[\boxed{\frac{1}{3}t^3-t^2}\right]_0^2=\frac{1}{3}\times\boxed{2}^3-\boxed{2}^2$

$=\boxed{-\frac{4}{3}}$

2) $\int_0^1 v(t)dt=\int_0^1(5t-t^2)dt$

$=\left[\frac{5}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=\frac{13}{6}$

3) $\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3(t^2-3t)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_0^3=\frac{1}{3}\times3^3-\frac{3}{2}\times3^2=-\frac{9}{2}$

63 답 1) 4 2) $\frac{27}{2}$ 3) 2

1) 시각 $t=0$에서 위치가 4이므로 $t=3$에서 점 P의 위치를 x라 하면

$x=\boxed{4}+\int_0^3(t^2-2t)dt=\boxed{4}+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^3$

$=\boxed{4}+\frac{1}{3}\times3^3-3^2=\boxed{4}$

2) 시각 $t=0$에서 위치가 0이므로 $t=3$에서 점 P의 위치를 x라 하면

$x=0+\int_0^3(5t-t^2)dt=\left[\frac{5}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3$

$=\frac{5}{2}\times3^2-\frac{1}{3}\times3^3=\frac{27}{2}$

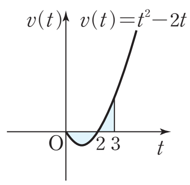
3) 시각 $t=0$에서 위치가 20이므로 $t=3$에서 점 P의 위치를 x라 하면

$x=20+\int_0^3(t^2-6t)dt=20+\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2\right]_0^3$

$=20+\frac{1}{3}\times3^3-3\times3^2=2$

64 답 1) $\frac{8}{3}$ 2) $\frac{43}{2}$ 3) $\frac{19}{3}$

1) $v(t)=t^2-2t=t(t-2)$이므로 구간 $[0,\ 2]$에서 $v(t)\boxed{\leq}0$이고 구간 $[2,\ 3]$에서 $v(t)\boxed{\geq}0$이다. 따라서 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

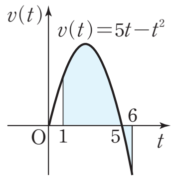


$s=\int_0^3|t^2-2t|dt$

$=\int_0^2(\boxed{-t^2+2t})dt+\int_2^3(\boxed{t^2-2t})dt$

$=\left[\boxed{-\frac{1}{3}t^3+t^2}\right]_0^2+\left[\boxed{\frac{1}{3}t^3-t^2}\right]_2^3=\boxed{\frac{8}{3}}$

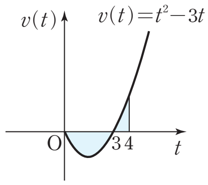
2) $v(t)=5t-t^2=t(5-t)$이므로 구간 $[1,\ 5]$에서 $v(t)\ge 0$이고 구간 $[5,\ 6]$에서 $v(t)\le 0$이다.



따라서 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_1^6 |5t-t^2|dt$$
$$=\int_1^5 (5t-t^2)dt+\int_5^6 (-5t+t^2)dt$$
$$=\left[\frac{5}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_1^5+\left[-\frac{5}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_5^6$$
$$=\frac{43}{2}$$

3) $v(t)=t^2-3t=t(t-3)$이므로 구간 $[0,\ 3]$에서 $v(t)\le 0$이고 구간 $[3,\ 4]$에서 $v(t)\ge 0$이다.



따라서 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^4 |t^2-3t|dt$$
$$=\int_0^3 (-t^2+3t)dt+\int_3^4 (t^2-3t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_3^4$$
$$=\frac{19}{3}$$

65 답 1) 8 2) 4 3) 59

1) $v(t)=0$일 때 점 P가 움직이는 방향이 바뀌므로

$8-4t=0$

$\therefore t=2$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 좌표는

$$0+\int_0^2 (8-4t)dt=\left[8t-2t^2\right]_0^2$$
$$=8$$

2) x초 후에 어떤 물체가 A지점에서 28 m 떨어진 B지점에 도달한다고 하면

$\int_0^x (3+2t)dt=28$에서 $\left[3t+t^2\right]_0^x=28$

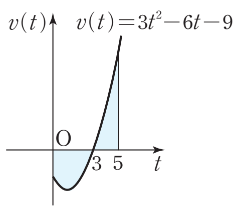
$3x+x^2=28,\ x^2+3x-28=0$

$(x+7)(x-4)=0 \qquad \therefore x=4$

3) 시각 t에서의 점 P의 위치가 $f(t)=t^3-3t^2-9t+2$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)$$
$$=3t^2-6t-9=3(t+1)(t-3)$$

이때, 구간 $[0,\ 3]$에서 $v(t)\le 0$이고 구간 $[3,\ 5]$에서 $v(t)\ge 0$이므로 점 P가 움직인 거리를 s라 하면



$$s=\int_0^5 |v(t)|dt$$
$$=\int_0^5 |3t^2-6t-9|dt$$
$$=\int_0^3 (-3t^2+6t+9)dt+\int_3^5 (3t^2-6t-9)dt$$
$$=\left[-t^3+3t^2+9t\right]_0^3+\left[t^3-3t^2-9t\right]_3^5$$
$$=27+32=59$$

66 답 1) $v(t)$ 2) $\int_a^b v(t)dt$ 3) $|v(t)|$

단원 총정리 문제 정답 Ⅲ 적분

pp. 116~119

01 $\frac{19}{3}$	02 ⑤	03 ③	04 ①	05 ①
06 ④	07 ①	08 5	09 ③	10 ②
11 ④	12 ③	13 ④	14 ③	15 ③
16 ③	17 ③	18 ③	19 ⑤	20 ⑤
21 ③	22 ③	23 ③	24 ④	

01 답 $\frac{19}{3}$

$\int (x^2+3ax+b)dx=cx^3+3x^2+4x+C$에서

$\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}ax^2+bx+C'=cx^3+3x^2+4x+C$

(C'은 적분상수)

따라서 $\frac{1}{3}=c,\ \frac{3}{2}a=3,\ b=4$이므로 $a=2,\ b=4,\ c=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b+c=\frac{19}{3}$

02 답 ⑤

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2-6x+5)dx$

$\quad =x^3-3x^2+5x+C$ (C는 적분상수)

이때, $f(0)=C=2$이므로 $f(x)=x^3-3x^2+5x+2$

$\therefore f(1)=1-3+5+2=5$

03 답 ③

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로 $f'(x)=3x^2+2x$에서

$f(x)=\int (3x^2+2x)dx=x^3+x^2+C$ (C는 적분상수)

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $f(0)=1$에서

$0+0+C=1 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+1$이므로 $f(2)=8+4+1=13$

04 답 ①

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int(ax^2+2x+3)dx=9x^2+bx+c$에서

$ax^2+2x+3=9x^2+bx+c$

위 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=9$, $b=2$, $c=3$

$\therefore a+b+c=9+2+3=14$

05 답 ①

$f(x)=\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^2+2x)\right\}dx=x^2+2x+C$

(C는 적분상수)

이때, $f(2)=3$이므로 $2^2+2\times2+C=3$ $\quad\therefore C=-5$

$\therefore f(x)=x^2+2x-5$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2+2x-5=0$의 해는

$x=-1\pm\sqrt{6}$이므로 구하는 모든 실수 x의 곱은

$(-1+\sqrt{6})(-1-\sqrt{6})=-5$이다.

06 답 ④

삼차함수 $f(x)$의 도함수는 이차함수이므로

$f'(x)=a(x-2)^2-12$라 하면 $y=f'(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 $f'(0)=0$에서

$4a-12=0$, $4a=12$ $\quad\therefore a=3$

즉, $f'(x)=3(x-2)^2-12=3x^2-12x=3x(x-4)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=4$에서 극소이다.

한편,

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int(3x^2-12x)dx$

$=x^3-6x^2+C$ (C는 적분상수)

이고 극댓값이 5이므로 $f(0)=5$에서 $C=5$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+5$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(4)=64-96+5=-27$이다.

07 답 ①

$\displaystyle\int_0^k(x+3)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^k=\frac{1}{2}k^2+3k$

즉, $\dfrac{1}{2}k^2+3k=\dfrac{7}{2}$이므로 $k^2+6k-7=0$

$(k+7)(k-1)=0$

$\therefore k=-7$ 또는 $k=1$

이때, $k>0$이므로 $k=1$

08 답 5

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\{f(x)\}^2$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2f(x)f'(x)$ $\quad\therefore f'(x)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x+C$ (C는 적분상수)

㉠에 의하여 $C=0$ $\quad\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x$

$\therefore f(10)=\dfrac{1}{2}\times10=5$

09 답 ③

$\displaystyle\int_{-1}^1(x+1)^2dx-\int_{-1}^1(x-1)^2dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^1\{(x+1)^2-(x-1)^2\}dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^1\{(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)\}dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^1 4xdx=\left[2x^2\right]_{-1}^1=0$

[다른 풀이]

$y=4x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$\displaystyle\int_{-1}^1(x+1)^2dx-\int_{-1}^1(x-1)^2dx=\int_{-1}^1 4xdx=0$

10 답 ②

$\displaystyle\int_0^5 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx$

$=\displaystyle\int_0^3 f(x)dx+\left\{\int_3^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx\right\}$

$=\displaystyle\int_0^3 f(x)dx-\int_2^3 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$

$=2-1+5=6$

11 답 ④

$\displaystyle\int_{-3}^3(x-2)f(x)dx=\int_{-3}^3 xf(x)dx-2\int_{-3}^3 f(x)dx$

$\cdots\cdots$ ㉠

한편, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$\therefore \displaystyle\int_{-3}^3 f(x)dx=2\int_0^3 f(x)dx=2\times2=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때, $g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=(-x)f(-x)=-xf(x)=-g(x)$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$\therefore \displaystyle\int_{-3}^3 xf(x)dx=\int_{-3}^3 g(x)dx=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\displaystyle\int_{-3}^3(x-2)f(x)dx=0-2\times4=-8$

12 답 ③

$x|x-2|=\begin{cases} x(x-2) & (x\geq 2) \\ x(2-x) & (x<2) \end{cases}$이므로

$$\int_0^4 x|x-2|dx=\int_0^2 x(2-x)dx+\int_2^4 x(x-2)dx$$
$$=\int_0^2 (2x-x^2)dx+\int_2^4 (x^2-2x)dx$$
$$=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^4$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=8$$

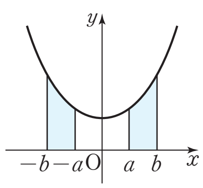
13 답 ④

$f(x)=\begin{cases} x & (0\leq x\leq 1) \\ 2-x & (1<x\leq 2) \end{cases}$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 (2-x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

14 답 ③

$\int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx$를 만족시키는 함수 $f(x)$는 그래프가 y축에 대하여 대칭이다.



따라서 [보기]의 함수에서 y축에 대하여 대칭인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15 답 ③

$$f(x)=9x^2+\int_0^1 (2x-3)f(t)dt$$
$$=9x^2+(2x-3)\int_0^1 f(t)dt$$

이때, $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

라 하면 $f(x)=9x^2+k(2x-3)=9x^2+2kx-3k$

이것을 ㉠에 대입하면 $\int_0^1 (9t^2+2kt-3k)dt=k$

$\left[3t^3+kt^2-3kt\right]_0^1=k$, $3+k-3k=k$ $\quad\therefore k=1$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(t)dt=k=1$

16 답 ③

$\int_0^x (t-1)f(t)dt=\frac{1}{4}x^4-x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x-1)f(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

따라서 $f(x)=x^2+x+1$이므로

$f(1)=1+1+1=3$

17 답 ③

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

$F'(x)=f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-2, 2]$에서 함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0
$F(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $F(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $F(0)$이다.

18 답 ③

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)$$
$$=1+a+b=1$$

$\therefore a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x^2+ax+b)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}a+b=0$$

$\therefore \frac{1}{2}a+b=-\frac{1}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$

$\therefore a-b=\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

19 답 ⑤

S_2는 곡선 $y=x^3$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로

$$S_2=\int_0^1 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

이때, S_1, S_2의 합은 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이이므로

$S_1+S_2=1\times 1=1$에서 $S_1=\frac{3}{4}$

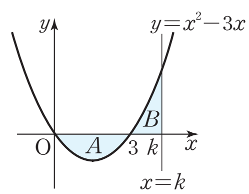
$\therefore S_1 : S_2=\frac{3}{4} : \frac{1}{4}=3 : 1$

20 답 ⑤

곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=0$에서

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$



따라서 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$A=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$이고

곡선과 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$B=\int_{3}^{k}(x^2-3x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_3^k=\frac{1}{3}k^3-\frac{3}{2}k^2+\frac{9}{2}$

이때, $A=B$이므로 $\frac{9}{2}=\frac{1}{3}k^3-\frac{3}{2}k^2+\frac{9}{2}$에서

$2k^3-9k^2=0,\ k^2(2k-9)=0$

$\therefore\ k=\frac{9}{2}\ (\because\ k>3)$

[다른 풀이]

곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 한 교점의 x좌표를 $\alpha(\alpha>0)$라 하면 $A=B$에서

$\int_{0}^{\alpha}(-x^2+3x)dx=\int_{\alpha}^{k}(x^2-3x)dx$

$\int_{0}^{\alpha}(x^2-3x)dx+\int_{\alpha}^{k}(x^2-3x)dx=0$

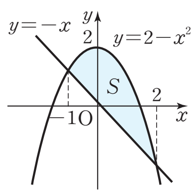
$\int_{0}^{k}(x^2-3x)dx=0,\ \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^k=0$

$\frac{1}{3}k^3-\frac{3}{2}k^2=0,\ 2k^3-9k^2=0,\ k^2(2k-9)=0$

$\therefore\ k=\frac{9}{2}(\because\ k>3)$

21 답 ③

곡선 $y=2-x^2$과 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는 $2-x^2=-x$에서



$x^2-x-2=0,\ (x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

이때, 구간 $[-1,\ 2]$에서

$2-x^2\ge-x$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

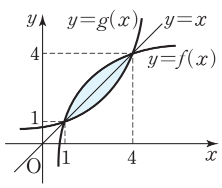
$S=\int_{-1}^{2}\{(2-x^2)-(-x)\}dx$

$=\int_{-1}^{2}(2+x-x^2)dx$

$=\left[2x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$

22 답 ③

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.



따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=2\int_{1}^{4}\{f(x)-x\}dx=2\int_{1}^{4}f(x)dx-2\int_{1}^{4}xdx$

$=2\times9-2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^4=18-2\times\left(8-\frac{1}{2}\right)=3$

23 답 ③

점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=-0.3t^2+3t$이므로 시각 x에서의 위치를 $f(x)$라 하면

$f(x)=0+\int_{0}^{x}(-0.3t^2+3t)dt=\left[-0.1t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^x$

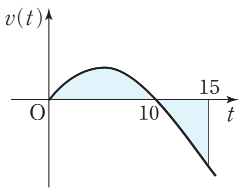
$=-0.1x^3+\frac{3}{2}x^2$

점 P가 원점에 다시 돌아오는 데 걸리는 시각을 t라 하면 $f(t)=0$에서

$-0.1t^3+\frac{3}{2}t^2=0,\ t^3-15t^2=0,\ t^2(t-15)=0$

$\therefore\ t=15\ (\because\ t>0)$

따라서 점 P가 원점에 다시 돌아올 때까지 실제 움직인 거리는



$\int_{0}^{15}|v(t)|dt$

$=\int_{0}^{15}|-0.3t^2+3t|dt$

$=\int_{0}^{10}(-0.3t^2+3t)dt+\int_{10}^{15}(0.3t^2-3t)dt$

$=\left[-0.1t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^{10}+\left[0.1t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_{10}^{15}$

$=50+50=100$

24 답 ④

ㄱ. $0\le t\le4$에서의 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(2+4)\times2=6$이고, $4\le t\le6$에서의 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times1=1$이므로 점 P는 원점을 다시 지나지 않는다. (거짓)

ㄴ. $v(t)$의 부호가 바뀔 때 움직이는 방향이 바뀌므로 점 P는 $t=4$에서 1번 바뀐다. (참)

ㄷ. 점 P가 총 움직인 거리는

$\int_{0}^{6}|v(t)|dt$

$=\int_{0}^{4}|v(t)|dt+\int_{4}^{6}|v(t)|dt$

$=\frac{1}{2}\times(2+4)\times2+\frac{1}{2}\times2\times1=6+1=7$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.