정답 및 해설

I 함수의 극한과 연속

II 미분

III 적분

Ⅰ. 함수의 극한과 연속

1. 함수의 극한

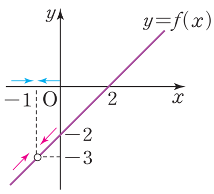
유형 .... pp.13~23

001 정답 (1) **-3에 수렴** (2) **∞로 발산** (3) **0에 수렴**

(1) $x \neq -1$일 때,

$f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+1}=x-2$이고

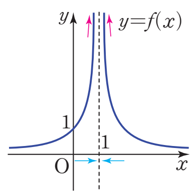
$x=-1$에서는 $f(x)$가 정의되지 않으므로 이 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x \to -1$일 때 $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x+1}=-3$

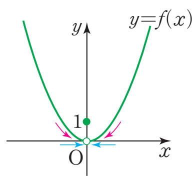
(2) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x \to 1$일 때 $f(x)$의 값은 한없이 커진다.

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{|x-1|}=\infty$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x \to 0$일 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x)=0$

002 정답 (1) **0** (2) **2** (3) **-1** (4) **-1** (5) **없다** (6) **-1** (7) **1**

(1) x가 -2의 오른쪽에서 -2에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x \to -2+} f(x)=0$

(2) x가 -2의 왼쪽에서 -2에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x \to -2-} f(x)=2$

(3) x가 -1의 오른쪽에서 -1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x)=-1$

(4) x가 -1의 왼쪽에서 -1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x \to -1-} f(x)=-1$

(5) $\lim\limits_{x \to -2+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2-} f(x)$이므로 $x=-2$에서의 극한은 존재하지 않는다. 따라서 $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$는 없다.

(6) $\lim\limits_{x \to -1+} f(x)=\lim\limits_{x \to -1-} f(x)=-1$이므로 $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=-1$

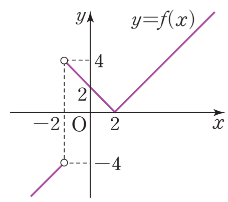
(7) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)=\lim\limits_{x \to 1-} f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=1$

003 정답 (1) **존재하지 않는다.** (2) **6**

(1) $f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$로 놓으면

$f(x)=\begin{cases} x-2 & (x<-2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x+2 & (-2<x<2) \end{cases}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



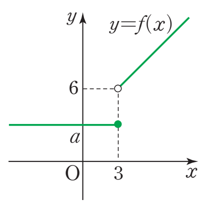
$\lim\limits_{x \to -2+} \dfrac{|x^2-4|}{x+2}=4$, $\lim\limits_{x \to -2-} \dfrac{|x^2-4|}{x+2}=-4$

$x=-2$에서 우극한과 좌극한이 서로 다르므로

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|x^2-4|}{x+2}$의 값은 존재하지 않는다.

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{|x-3|} & (x>3) \\ a & (x \leq 3) \end{cases}$에서 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (x>3) \\ a & (x \leq 3) \end{cases}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



x가 3보다 큰 값을 가지면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 6에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to3+}f(x)=6$$

한편, x가 3 이하의 값을 가질 때 $f(x)$의 값은 a이므로

$$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}a=a$$

이때, $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재하려면 $x=3$에서 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 같아야 하므로

$$a=6$$

004 정답 (1) **5** (2) $-\frac{1}{3}$ (3) **4** (4) $\frac{1}{2}$

(1) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(x+2)=5$

(2) $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x-2)(x+1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{3}$

(3) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{\sqrt{x-1}-1}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-2x)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}x(\sqrt{x-1}+1)$

$=2\times2=4$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+4}+2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{1}{2}$

005 정답 (1) **2** (2) **0** (3) **∞** (4) **1**

(1) 분자와 분모를 x^2으로 나누어 극한을 구하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x-4}{3x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}}{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{6+0-0}{3-0+0}=2$$

(2) 분자와 분모를 x^2으로 나누어 극한을 구하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

$$=\frac{0+0}{3+0+0}=0$$

(3) 분자와 분모를 x로 나누어 극한을 구하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+3}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1+\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}}$$

이때, (분자) $\to\infty$이고 (분모) $\to$ 2이므로 ∞로 발산한다.

(4) 분자와 분모를 x로 나누어 극한을 구하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+3}}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{4}}{2}=1$$

006 정답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) **0** (3) **0** (4) -2

(1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x+2}-1\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\times\frac{2-(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{x+2}=-\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to\infty}(x-1)\left(1-\frac{x^2}{x^2-1}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}(x-1)\cdot\frac{-1}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x+1}=0$

(3) 분자, 분모에 $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$를 각각 곱하여 분자를 유리화하면

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$

$=\frac{0}{1+1}=0$

(4) 분자, 분모에 $\sqrt{x^2-4x}+x$를 각각 곱하여 분자를 유리화하면

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4x}-x)(\sqrt{x^2-4x}+x)}{\sqrt{x^2-4x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1}=\frac{-4}{2}=-2$

007 정답 (1) **2** (2) -4 (3) $-\frac{3}{2}$

(1) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2-5x+1}{3x^2+x-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{6t^2+5t+1}{3t^2-t-1}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6+\frac{5}{t}+\frac{1}{t^2}}{3-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}=\frac{6}{3}=2$$

(2) $x=-t$로 놓으면 $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2}-4}=\lim_{t\to\infty}\frac{-4t}{\sqrt{t^2+2}-4}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1+\frac{2}{t^2}}-\frac{4}{t}}=-4$$

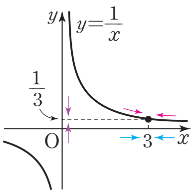
(3) $x=-t$로 놓으면 $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+4}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t+4}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t+4}{\sqrt{t^2-3t+4}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3+\frac{4}{t}}{\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}+1}=-\frac{3}{2}$$

확인문제 pp.13~23

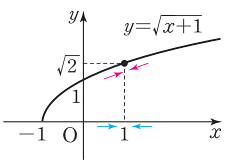
001 정답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) -6

(1)



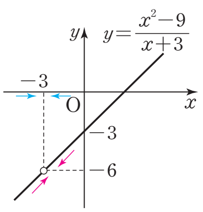
$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$$

(2)



$$\therefore \lim_{x\to1}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$$

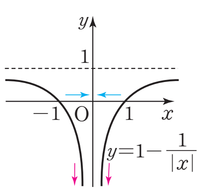
(3)



$$\therefore \lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}=-6$$

002 정답 (1) $-\infty$ (2) 1 (3) 2

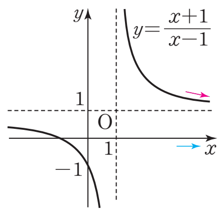
(1) 함수 $f(x)=1-\frac{1}{|x|}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x \to 0$일 때 $f(x)$의 값은 음의 무한대로 발산한다.

$$\therefore \lim_{x\to0}\left(1-\frac{1}{|x|}\right)=-\infty$$

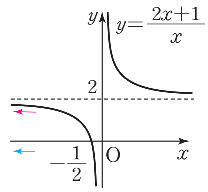
(2) 함수 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x \to \infty$일 때 $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$$

(3) 함수 $f(x)=\frac{2x+1}{x}=\frac{1}{x}+2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x \to -\infty$일 때 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x}=2$$

003 정답 3

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x가 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=1$

또, x가 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.

즉, $\lim_{x\to1+}f(x)=2$

$$\therefore \lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=1+2=3$$

004 정답 (1) 2 (2) 3

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x가 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=1$

또한, 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $x>1$일 때, $g(x)$의 값은 항상 1이므로 $\lim_{x\to1+}g(x)=1$

$$\therefore \lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}g(x)=1+1=2$$

(2) $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=1$

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(1)=2$

$$\therefore \lim_{x\to1}f(x)+f(1)=1+2=3$$

005 정답 **0**

$f(x)=\dfrac{x(x-2)^2}{|x-2|}$으로 놓으면

$$f(x)=\begin{cases} x(x-2) & (x>2) \\ -x(x-2) & (x<2) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{x(x-2)^2}{|x-2|}=\lim_{x\to 2+}x(x-2)=0$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x(x-2)^2}{|x-2|}=\lim_{x\to 2-}\{-x(x-2)\}=0$$

즉, $x=2$에서 우극한과 좌극한이 0으로 같으므로

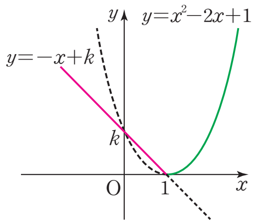
$$\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)^2}{|x-2|}=0$$

006 정답 **1**

$\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재하려면

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)$$

이어야 한다.



이때 위의 그림에서

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-2x+1)=0,$$

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x+k)=-1+k$$

이므로 $-1+k=0$

$\therefore k=1$

007 정답 (1) **4** (2) **2** (3) $\mathbf{\frac{1}{3}}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}(x+3)$

$=1+3=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2}\frac{2}{x-1}=2$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+2}=\frac{1}{3}$

008 정답 (1) $\mathbf{\frac{1}{6}}$ (2) **4** (3) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (4) $\mathbf{\frac{3}{2}}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2}\frac{(x+7)-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}+2)$

$=\sqrt{4}+2=4$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$

$\displaystyle=\frac{1}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{3x+1}+2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{3\times(1+1)}{2+2}=\frac{3}{2}$

009 정답 (1) **3** (2) **0** (3) $\mathbf{-\infty}$

(1) 분자와 분모를 x^2으로 나누어 극한을 구하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x^2+3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{3}{1}=3$$

(2) 분자와 분모를 x^2으로 나누어 극한을 구하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-5}{4x^2-5x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{4-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$$

(3) 분자와 분모를 x^2으로 나누어 극한을 구하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x+2}{1-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{\infty}{-1}=-\infty$$

010 정답 (1) **2** (2) **1** (3) **0**

(1) 분자와 분모를 $\sqrt{x}$로 나누어 극한을 구하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x+1}+2}{\sqrt{x+1}+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\frac{3}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{4+0}}{\sqrt{1+0}}=2$$

(2) 분자와 분모를 x로 나누어 극한을 구하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+4x+3}}{\sqrt{x^2+1}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{4}{x}+\frac{3}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{1}+2}=1$$

(3) 분자와 분모를 x로 나누어 극한을 구하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+1}-2}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{0}{2}=0$$

011 정답 (1) -1 (2) $-\frac{1}{4}$ (3) $-\frac{1}{2}$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\times\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-1}=-1$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{4}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\times\frac{-x^2-4x}{4(x+2)^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-x(x+4)}{4x(x+2)^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-(x+4)}{4(x+2)^2}=-\frac{1}{4}$

(3) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$

$=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{(x-1)\sqrt{x}}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(x-1)\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{-1}{\sqrt{x}+x}=-\frac{1}{2}$

012 정답 (1) 0 (2) $\frac{1}{4}$ (3) 2

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}}=\frac{0}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=0$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=\frac{4}{2}=2$

013 정답 (1) 2 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$

(1) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)(x+1)}{x^2+3x-1}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{x^2+3x-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2-t-1}{t^2-3t-1}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}{1-\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2}}=2$

(2) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+2}{2x+3}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+1}+2}{-2t+3}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+\frac{2}{t}}{-2+\frac{3}{t}}=-\frac{1}{2}$

(3) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-3x}+2x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2+3t}-2t)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2+3t)-(2t)^2}{\sqrt{4t^2+3t}+2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{3t}{\sqrt{4t^2+3t}+2t}$

$=\frac{3}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{4}$

014 정답 ②

$x<0$일 때 $x=-\sqrt{x^2}$이므로

$\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}=-\sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\neq\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$

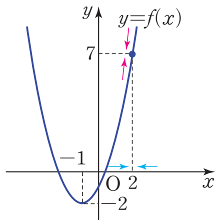
따라서 처음으로 오류가 생긴 부분은 ②이다.

연습문제 I .... pp.24~26

015

정답 (1) **7** (2) **2** (3) **0** (4) **1** (5) $-\infty$ (6) ∞

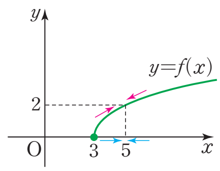
(1) $f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 x가 2에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 7에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)=7$

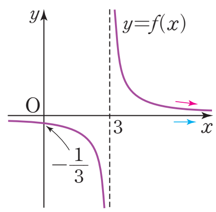
(2) $f(x)=\sqrt{2(x-3)}$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 x가 5에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to 5}\sqrt{2(x-3)}=2$

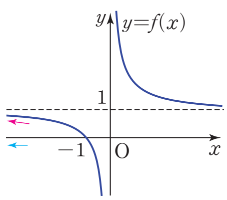
(3) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x\to\infty$일 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-3}=0$

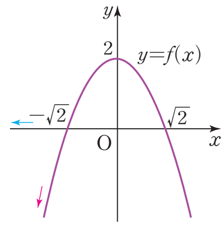
(4) $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



x가 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=1$

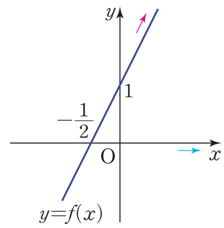
(5) 함수 $f(x)=-x^2+2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x\to-\infty$일 때 $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

$\therefore \lim_{x\to-\infty}(-x^2+2)=-\infty$

(6) 함수 $f(x)=2x+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



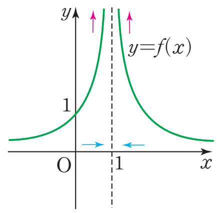
따라서 $x\to\infty$일 때 $f(x)$의 값은 한없이 커진다.

$\therefore \lim_{x\to\infty}(2x+1)=\infty$

016

정답 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) **2**

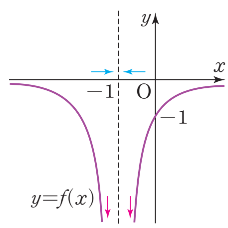
(1) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 x가 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 한없이 커진다.

$\therefore \lim_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|}=\infty$

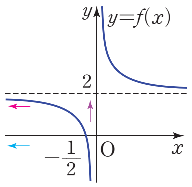
(2) 함수 $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 x가 -1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

$\therefore \lim_{x\to-1}\left\{-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right\}=-\infty$

(3) 함수 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x}=2$$

017 정답 (1) **없다** (2) **0** (3) **0**

(1) $\lim_{x\to1-}f(x)=1,\ \lim_{x\to1+}f(x)=2$에서

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$이므로

$x=1$에서 함수 $f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다.

(2) $\lim_{x\to1+}g(x)=0,\ \lim_{x\to1-}g(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}g(x)=0$$

(3) (i) $\lim_{x\to1+}f(x)=2,\ \lim_{x\to1+}g(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{x\to1+}g(x)=2\times0=0$$

(ii) $\lim_{x\to1-}f(x)=1,\ \lim_{x\to1-}g(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\lim_{x\to1-}g(x)=1\times0=0$$

따라서 $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=0$이므로

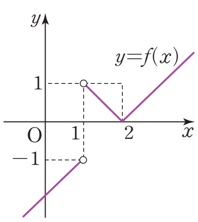
$$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$$

018 정답 **1**

함수 $f(x)=\dfrac{(x-1)|x-2|}{|x-1|}$에서

$$f(x)=\begin{cases}x-2 & (x\geq2)\\ -x+2 & (1<x<2)\\ x-2 & (x<1)\end{cases}$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서

$$\lim_{x\to1+}f(x)=1,\ \lim_{x\to2-}f(x)=0$$

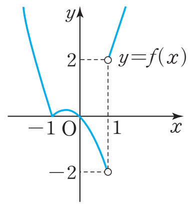
이므로 $a=1,\ b=0$

$$\therefore a+b=1$$

019 정답 ⑤

함수 $f(x)=\dfrac{x|x^2-1|}{x-1}$에서

$f(x)=\begin{cases}x(x+1) & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ -x(x+1) & (-1\leq x<1)\end{cases}$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



그래프에서

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=0,$$

$$\lim_{x\to1+}f(x)=2$$

이므로 $\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=2$

020 정답 **−1**

함수 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (x\geq2)\\ 2x+k & (x<2)\end{cases}$에서

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x^2-1)=3,$$

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(2x+k)=4+k$$

$x=2$에서의 극한값이 존재하려면

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)$이어야 하므로

$3=4+k \qquad \therefore k=-1$

021 정답 (1) **없다** (2) **0**

(1) $\lim_{x\to0-}\dfrac{3x}{2x-|x|}=\lim_{x\to0-}\dfrac{3x}{2x+x}=\lim_{x\to0-}1=1$

$\lim_{x\to0+}\dfrac{3x}{2x-|x|}=\lim_{x\to0+}\dfrac{3x}{2x-x}=\lim_{x\to0+}3=3$

따라서 $\lim_{x\to0}\dfrac{3x}{2x-|x|}$는 존재하지 않는다.

(2) $\lim_{x\to0-}\dfrac{3x^2}{2x-|x|}=\lim_{x\to0-}\dfrac{3x^2}{2x+x}=\lim_{x\to0-}x=0$

$\lim_{x\to0+}\dfrac{3x^2}{2x-|x|}=\lim_{x\to0+}\dfrac{3x^2}{2x-x}=\lim_{x\to0+}3x=0$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{3x^2}{2x-|x|}=0$$

022 정답 (1) **1** (2) **−6**

(1) $\lim_{x\to a}\{2f(x)+g(x)\}=2\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$

$=2\times2+(-3)=1$

(2) $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)$

$=2\times(-3)=-6$

023 정답 1

$2f(x)+g(x)=h(x)$ …… ㉠

$f(x)-2g(x)=k(x)$ …… ㉡

로 놓으면 $\lim_{x\to a}h(x)=3$, $\lim_{x\to a}k(x)=4$

㉠, ㉡을 연립하면

$f(x)=\frac{1}{5}\{2h(x)+k(x)\}$, $g(x)=\frac{1}{5}\{h(x)-2k(x)\}$

$$\therefore\ f(x)+g(x)=\frac{1}{5}\{2h(x)+k(x)\}+\frac{1}{5}\{h(x)-2k(x)\}$$
$$=\frac{1}{5}\{3h(x)-k(x)\}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}\frac{1}{5}\{3h(x)-k(x)\}$$
$$=\frac{1}{5}\times(3\times3-4)=1$$

024 정답 ②

ㄱ. 【반례】 $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$일 때

$\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}=0$이지만

$\lim_{x\to 0}f(x)$, $\lim_{x\to 0}g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$

(α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}}{2}$$
$$=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ㄷ. 【반례】 $f(x)=x$, $g(x)=x^2$일 때

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim_{x\to 0}g(x)=0$이지만

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$은 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

025 정답 (1) 7 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 4 (4) $\frac{1}{2}$

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+5)=7$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+2}=\frac{1}{3}$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}+2)=4$$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}$$

026 정답 (1) 0 (2) $\frac{2}{7}$ (3) $-\infty$ (4) 2

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{3x^3-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{3-\frac{2}{x^3}}=0$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{7x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{7+\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{7}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+x+3}{5x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+1+\frac{3}{x}}{5-\frac{1}{x}}=-\infty$

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}}=\frac{2}{1}=2$

027 정답 (1) 2 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 4 (4) 2

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}-x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+5}-x)(\sqrt{x^2+4x+5}+x)}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+4x+5)-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=2$$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(x+1)}{x\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}=-\frac{1}{2}$$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x-2}\left(\frac{x^2}{x+2}-1\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{4}{x-2}\times\frac{x^2-x-2}{x+2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x-8}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{4}{x}-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=4$$

(4) $\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=2$$

028 정답 $-\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to4}(\sqrt{x}-2)\left(1-\frac{1}{x-4}\right)$

$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(x-5)}{x-4}$

$=\lim_{x\to4}\frac{x-5}{\sqrt{x}+2}=-\frac{1}{4}$

029 정답 (다)

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}-x}$ ……(나)에서

분자, 분모를 x로 나누면

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2x-1}}{x}-1}$

이때, $x<0$에서 $x=-\sqrt{x^2}$이므로

$\frac{\sqrt{x^2+2x-1}}{x}=-\sqrt{\frac{x^2+2x-1}{x^2}}$

즉, (주어진 식)$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-1}$이어야 한다.

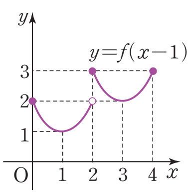
따라서 처음으로 오류가 생긴 부분은 (다)이다.

연습문제 Ⅱ ······ p.27

030 정답 3

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to1-}f(x)=2$

함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $\lim_{x\to1-}f(x-1)=1$이므로

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+f(x-1)\}=2+1=3$

031 정답 ③

$0<x<1$일 때,

$|x^2-1|=-(x^2-1)$, $|x-1|=-x+1$,

$|x|-1=x-1$이므로

$\lim_{x\to1-}\frac{|x^2-1|-2|x-1|}{|x|-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-x^2+1+2(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{-x^2+2x-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)^2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\{-(x-1)\}=0$

032 정답 12

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)x}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}}=\frac{a-b}{2}$

따라서 $\frac{a-b}{2}=6$이므로

$a-b=12$

033 정답 (1) 0 (2) 3

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}-2\sqrt{x})$

$=\lim_{x\to\infty}\{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\right.$

$\left.+\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right\}$

$=0+0=0$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x-2}-1}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3x-2}-1)(\sqrt{3x-2}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{3x-2}+1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{3x-2}+1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{3x-2}+1}=\frac{3(1+1)}{1+1}=3$

034 정답 -1 서술형

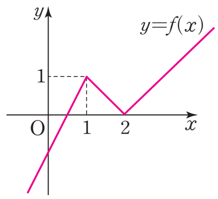
$\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하려면

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)$$

이어야 한다. … ①

함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-3x+2|}{x-1} & (x>1)\\ 2x+k & (x\le 1)\end{cases}$에서

$$f(x)=\begin{cases}x-2 & (x\ge 2)\\ -x+2 & (1<x<2)\\ 2x+k & (x\le 1)\end{cases}$$



위의 그림에서

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(-x+2)=1$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(2x+k)=2+k \quad \cdots ②$$

이므로 $2+k=1$

$\therefore k=-1$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	극한값이 존재할 조건 알기	20%
②	좌극한과 우극한을 각각 구하기	60%
③	k의 값 구하기	20%

2. 함수의 극한의 활용

유형 pp.31~38

001 정답 (1) 2 (2) 2

(1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+1)f(x)}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+1)(x+1)f(x)}{(x+1)(2x+1)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^2+1}{(x+1)(2x+1)}\times(x+1)f(x)\right\}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{(x+1)(2x+1)}=\dfrac{1}{2}$, $\lim_{x\to\infty}(x+1)f(x)=4$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^2+1}{(x+1)(2x+1)}\times(x+1)f(x)\right\}=\frac{1}{2}\times 4=2$$

(2) $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 1}\{2f(x)-g(x)\}=3$에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\left\{2-\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=0\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{f(x)}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{4f(x)+3g(x)}{f(x)+2g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{4+\dfrac{3g(x)}{f(x)}}{1+\dfrac{2g(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{4+3\times 2}{1+2\times 2}=2$$

002 정답 (1) 9 (2) 4

(1) $x-2=t$라 하면 $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=3,\ \text{즉}\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{3x^2+2xf(x)}{xf(x)-2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3+\dfrac{2f(x)}{x}}{\dfrac{f(x)}{x}-2}$$

$$=\frac{3+2\times 3}{3-2}=9$$

(2) $x-1=t$라 하면 $x=t+1$이고, $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)+x^2-1}{f(x-1)-x^2+x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)+(t+1)^2-1}{f(t)-(t+1)^2+(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)+t^2+2t}{f(t)-t^2-t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{f(t)}{t}+t+2}{\dfrac{f(t)}{t}-t-1}$$

$$=\frac{2+0+2}{2-0-1}=4$$

003 정답 (1) **2** (2) **1**

(1) $\lim_{x\to1}(-x^2+x+2)=2$, $\lim_{x\to1}(x^2-3x+4)=2$

그런데 $-x^2+x+2\le f(x)\le x^2-3x+4$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1}f(x)=2$$

(2) $x^2+2x-1\le f(x)\le x^2+2x+3$의 각 변을 x^2+x+1로 나누면

$$\frac{x^2+2x-1}{x^2+x+1}\le\frac{f(x)}{x^2+x+1}\le\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2+x+1}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}=1$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+x+1}=1$$

004 정답 (1) $\boldsymbol{a=-1,\ b=-2}$ (2) $\boldsymbol{a=3,\ b=-3}$ (3) $\boldsymbol{a=4,\ b=-8}$

(1) $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$에서

$4+2a+b=0 \quad \therefore b=-2a-4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$b=-2a-4$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+a+2)=4+a$$

이므로 $4+a=3 \quad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

(2) $x\to1$일 때 (분자) $\to0$이고 극한값이 0이 아닌 상수이므로 (분모) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(ax+b)=0$에서

$a+b=0 \quad \therefore b=-a \quad \cdots\cdots$ ㉠

$b=-a$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{ax-a}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{a(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{a}=-\frac{1}{a}$$

따라서 $-\frac{1}{a}=-\frac{1}{3}$이므로 $a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=-3$

(3) $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+3}+b)=0$에서

$2a+b=0 \quad \therefore b=-2a \quad \cdots\cdots$ ㉠

$b=-2a$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-2a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+3}-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{a}{4}$$

이므로 $\frac{a}{4}=1 \quad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-8$

005 정답 **7**

조건 (가)에서 $x\to\infty$일 때 극한값이 0이 아닌 상수이므로 분자의 차수와 분모의 차수가 같아야 한다.

분모가 이차식이므로 분자인 $f(x)$도 이차식이어야 한다.

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\ne0)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{a}{1}=1$$

에서 $a=1$이므로

$f(x)=x^2+bx+c \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 조건 (나)에 대입하면 $\lim_{x\to1}\frac{x^2+bx+c}{x^2-1}=3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+bx+c)=0$에서

$1+b+c=0 \quad \therefore b=-(c+1) \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-(c+1)x+c}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-c)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-c}{x+1}=\frac{1-c}{2}$$

이므로 $\frac{1-c}{2}=3$, 즉 $c=-5$

$c=-5$를 ㉢에 대입하면 $b=4$

따라서 $f(x)=x^2+4x-5$이므로

$f(2)=4+8-5=7$

006 정답 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

$\mathrm{P}(x,\sqrt{x})$이므로

$l(x)=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x^2+x}$, $S(x)=\triangle\mathrm{OPA}=\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to0+}\frac{S(x)}{l(x)}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}$$

035 정답 **6**

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+f(x)}{5x^2-f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\frac{f(x)}{x^2}}{5-\frac{f(x)}{x^2}}=\frac{2+4}{5-4}=6$$

036 정답 $-\frac{1}{6}$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{3f(x)-2g(x)\}=1$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-2g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\left\{3-2\times\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{5f(x)-4g(x)}{3f(x)+2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-4\times\frac{g(x)}{f(x)}}{3+2\times\frac{g(x)}{f(x)}}=\frac{5-4\times\frac{3}{2}}{3+2\times\frac{3}{2}}=-\frac{1}{6}$$

037 정답 **1**

$x-a=t$라 하면 $x\longrightarrow a$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{2x+3f(x)}{5x^2+4f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\frac{3f(x)}{x}}{5x+\frac{4f(x)}{x}}=\frac{2+3\times 2}{0+4\times 2}=1$$

038 정답 $\frac{1}{2}$

조건 (나)에서 $x+1=t$라 하면 $x=t-1$이고, $x\longrightarrow -1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x+1)+x^2-1}{f(x+1)+x^2+x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)+(t-1)^2-1}{f(t)+(t-1)^2+(t-1)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)+t^2-2t}{f(t)+t^2-t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{f(t)}{t}+t-2}{\frac{f(t)}{t}+t-1}$$
$$=\frac{a+0-2}{a+0-1}=3\ (\because \text{조건 (가)})$$

즉, $a-2=3a-3$이므로 $2a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

039 정답 **3**

$\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$, $\lim_{x\to 2}(x^2-2x+3)=3$이고

$2x-1\le f(x)\le x^2-2x+3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to 2}f(x)=3$

040 정답 **2**

$2x^2+3x+1\le f(x)\le 2x^2+3x+4$의 각 변을 x^2+2로 나누면

$$\frac{2x^2+3x+1}{x^2+2}\le\frac{f(x)}{x^2+2}\le\frac{2x^2+3x+4}{x^2+2}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{x^2+2}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+4}{x^2+2}=2$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2}=2$$

041 정답 (1) $a=2$, $b=-3$ (2) $a=5$, $b=\frac{1}{3}$

(1) $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이다

즉, $\lim_{x\to 1}(ax^2+x+b)=0$에서

$a+1+b=0$ $\quad\therefore b=-a-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 등식에 대입하여 정리하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+x-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(ax+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(ax+a+1)=2a+1$$

이므로 $2a+1=5$ $\quad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

(2) $x\longrightarrow 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x+a}-3)=0$에서

$\sqrt{4+a}-3=0$ $\quad\therefore a=5$

$a=5$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x+5}+3}=\frac{1}{3}$$

이므로 $b=\frac{1}{3}$

042 정답 **0**

$x\longrightarrow 3$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 0이 아닌 상수이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 3}(x^2+ax)=0$에서

$9+3a=0$ $\quad\therefore a=-3$

이때,

$$b=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+6)}{x(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6}{x}=3$$

$\therefore a+b=(-3)+3=0$

043 정답 6

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$에서 다항식 $f(x)$는 일차항의 계수가 3인 일차식임을 알 수 있다.

$f(x)=3x+b$ (b는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(3x+b)=b$$

따라서 $b=3$이므로

$$f(x)=3x+3$$

$$\therefore f(1)=3+3=6$$

044 정답 $f(x)=2x^2-6x+4$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+x+1}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식임을 알 수 있다.

여기서 $f(x)=2x^2+bx+c$ (b, c는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+bx+c}{x-2}=2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때, $x \to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이면 (분자) $\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}(2x^2+bx+c)=8+2b+c=0$$

$$\therefore c=-2b-8 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+bx+c}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+bx-2b-8}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+b+4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(2x+b+4)=b+8$$

이므로 $b+8=2$에서 $b=-6$

$b=-6$을 ㉡에 대입하면 $c=12-8=4$

$$\therefore f(x)=2x^2-6x+4$$

045 정답 $\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(a, \sqrt{a})$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=a$이고

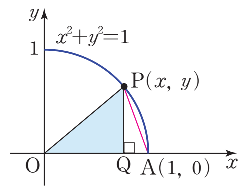
$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(a-1)^2+(\sqrt{a}-0)^2}=\sqrt{a^2-a+1}$이므로

$$\lim_{a\to\infty}(\overline{\mathrm{PH}}-\overline{\mathrm{PA}})=\lim_{a\to\infty}(a-\sqrt{a^2-a+1})$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{a-1}{a+\sqrt{a^2-a+1}}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1-\frac{1}{a}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}}=\frac{1}{2}$$

046 정답 $\frac{1}{2}$



$\mathrm{P}(x, y)$는 원 $x^2+y^2=1$의 제1사분면 위의 점이므로

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

따라서 $\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$,

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(x-1)^2+(1-x^2)}=\sqrt{2-2x}$이므로

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\triangle\mathrm{OPQ}}{\overline{\mathrm{PA}}}=\lim_{x\to 1-}\frac{\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2-2x}}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{\frac{1}{2}x\sqrt{1-x}\times\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}\times\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{\frac{1}{2}x\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

연습문제 I ······························· pp.39~41

047 정답 (1) 2 (2) 1

(1) $\lim_{x\to\infty}(x^2+2)f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2)(x^2+1)f(x)}{x^2+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}\times(x^2+1)f(x)$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=1$, $\lim_{x\to\infty}(x^2+1)f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}\times(x^2+1)f(x)=1\times 2=2$$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+1)f(x)}{2x-1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+1)(x^2+1)f(x)}{(2x-1)(x^2+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{(2x-1)(x^2+1)}\times(x^2+1)f(x)$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{(2x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\infty}(x^2+1)f(x)=2$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{(2x-1)(x^2+1)}\times(x^2+1)f(x)=\frac{1}{2}\times 2=1$$

048 정답 (1) -3 (2) 3

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+f(x)}{x-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{f(x)}{x}}{1-\frac{f(x)}{x}}=\frac{1+2}{1-2}=-3$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+xf(x)}{x^2-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{f(x)}{x}}{1-\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}=\frac{1+2}{1-2\times0}=3$

049 정답 $\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)+g(x)\}=7$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}+1\right\}=0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)+3g(x)}{g(x)-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2f(x)}{g(x)}+3}{1-\frac{f(x)}{g(x)}}=\frac{2\times(-1)+3}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$$

050 정답 (1) 4 (2) 6

(1) $x-1=t$라 하면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=4$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{4f(x)-3x^2}{f(x)+2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{4f(x)}{x}-3x}{\frac{f(x)}{x}+2x}=\frac{16-0}{4+0}=4$$

(2) $x-2=t$라 하면 $x=t+2$이고, $x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)+x^2-4}{f(x-2)-x+2}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)+(t+2)^2-4}{f(t)-(t+2)+2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)+t^2+4t}{f(t)-t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{f(t)}{t}+t+4}{\frac{f(t)}{t}-1}$$
$$=\frac{2+0+4}{2-1}=6$$

051 정답 1

양의 실수 x에 대하여 $\frac{x-1}{x+1}\le\frac{f(x)}{x+1}\le\frac{x+2}{x+1}$이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x+1}=1$$

052 정답 2

모든 양의 실수 x에 대하여 $2x+1>0$이므로

$\frac{4x^2+2x-1}{x+2}<f(x)<\frac{4x^2+3x+2}{x+1}$의 각 변을 $2x+1$로 나누면

$$\frac{4x^2+2x-1}{(x+2)(2x+1)}<\frac{f(x)}{2x+1}<\frac{4x^2+3x+2}{(x+1)(2x+1)}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x-1}{(x+2)(2x+1)}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+2}{(x+1)(2x+1)}=2$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x+1}=2$$

053 정답 (1) $a=-5,\ b=4$ (2) $a=4,\ b=-12$ (3) $a=5,\ b=-2$

(1) $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\longrightarrow0$이므로 (분자)$\longrightarrow0$이다. 즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$에서

$1+a+b=0$ $\quad\therefore a=-(b+1)$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-(b+1)x+b}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-b)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-b}{x-2}=b-1$$

이때, $b-1=3$이므로 $b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면 $a=-5$

(2) $x\longrightarrow2$일 때 극한값이 $\frac{1}{2}$로 일정하고 (분자)$\longrightarrow0$이므로 (분모)$\longrightarrow0$이다.

$\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$에서

$4+2a+b=0$ $\quad\therefore b=-2(a+2)$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax-2(a+2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+a+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x+a+2}=\frac{4}{4+a}$$

이때, $\frac{4}{4+a}=\frac{1}{2}$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-12$

(3) $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 2로 일정하고 (분자)$\longrightarrow0$이므로 (분모)$\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+x+b)=0$에서 $2+b=0$ $\quad\therefore b=-2$

$b=-2$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+(a-1)x-a}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a)}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+a}{x+2}=\frac{1+a}{3}$$

이때, $\frac{1+a}{3}=2$이므로 $a=5$

054 정답 $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$

$x \longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x \to 0}(\sqrt{1+x}+ax+b)=0$에서

$1+b=0 \qquad \therefore b=-1$

$b=-1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{1+x}+ax-1}{x}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+ax-1)(\sqrt{1+x}-ax+1)}{x(\sqrt{1+x}-ax+1)}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{\{1+x-(ax-1)^2\}}{x(\sqrt{1+x}-ax+1)}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{-a^2x^2+(1+2a)x}{x(\sqrt{1+x}-ax+1)}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{-a^2x+(1+2a)}{\sqrt{1+x}-ax+1}=\frac{1+2a}{2}$$

이때, $\frac{1+2a}{2}=1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

055 정답 12

$\lim_{x \to 0}\frac{x^2+ax}{x^2+bx}=3$에서

$$\lim_{x \to 0}\frac{x^2+ax}{x^2+bx}=\lim_{x \to 0}\frac{x(x+a)}{x(x+b)}=\lim_{x \to 0}\frac{x+a}{x+b}=\frac{a}{b}=3$$

$\therefore a=3b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})=3$에서

$$\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})=\lim_{x \to \infty}\frac{(a-b)x}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}$$
$$=\lim_{x \to \infty}\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}}$$
$$=\frac{a-b}{2}=3$$

$\therefore a-b=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=3$

$\therefore a+b=12$

056 정답 2

$f(x)$는 삼차의 다항식이고, 주어진 조건에 의하여 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로

$$f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b) \text{ (단, } a, b\text{는 상수)} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다.

$\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$에 ㉠을 대입하면

$$\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1}=\lim_{x \to 1}(x-2)(ax+b)=2$$

$\therefore a+b=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$\lim_{x \to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-1$에 ㉠을 대입하면

$$\lim_{x \to 2}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-2}=\lim_{x \to 2}(x-1)(ax+b)=-1$$

$\therefore 2a+b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

$$\lim_{x \to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x \to 3}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x \to 3}(x-1)(x-2)=2$$

057 정답 2

$\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서 다항식 $f(x)$는 일차항의 계수가 2인 일차식임을 알 수 있다.

$f(x)=2x+b$ (b는 상수)로 놓으면

$\lim_{x \to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x \to -1}\frac{2x+b}{x+1}=k$에서 $x \longrightarrow -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x \to -1}(2x+b)=-2+b=0$에서 $b=2$

$b=2$를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to -1}\frac{2x+b}{x+1}=\lim_{x \to -1}\frac{2x+2}{x+1}=2$$

$\therefore k=2$

058 정답 4

조건 (가)에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차식이므로 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고 조건 (나)에 대입하면

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x \longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x \to 1}(x^2+ax+b)=0$에서

$1+a+b=0 \qquad \therefore a=-(b+1) \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2-(b+1)x+b}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x-b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1}(x-b)=1-b$$

이때, $1-b=3$이므로 $b=-2$

$b=-2$를 ㉡에 대입하면 $a=1$

따라서 $f(x)=x^2+x-2$이므로

$$\lim_{x \to 2}f(x)=\lim_{x \to 2}(x^2+x-2)=4+2-2=4$$

059 정답 5

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$ …… ㉠, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ …… ㉡

㉠에서 $f(x)-2x^3$은 이차항의 계수가 1인 이차식이므로

$f(x)-2x^3=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=2x^3+x^2+ax+b$이고 이것을 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2+ax+b}{x}=2 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢에서 $x \longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}(2x^3+x^2+ax+b)=0$에서 $b=0$

$b=0$을 ㉢에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2+ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2x^2+x+a)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(2x^2+x+a)=a$$

이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2+2x$이므로

$f(1)=2+1+2=5$

060 정답 $\frac{1}{2}$

$r=\overline{\mathrm{OQ}}$이므로 원의 중심의 좌표는 $\mathrm{Q}(0,\ r)$이다.

여기서 $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ $(x\neq 0)$으로 놓으면 $\overline{\mathrm{QO}}^2=\overline{\mathrm{QP}}^2$이므로

$r^2=x^2+(r-x^2)^2$, $2rx^2=x^2+x^4$

$\therefore r=\frac{1}{2}(1+x^2)$ $(\because x\neq 0)$

점 P가 곡선을 따라 원점 O에 한없이 가까이 가면 $x \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}r=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}(1+x^2)=\frac{1}{2}$$

061 정답 ②

$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(t>0)$으로 놓으면 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t^4}=t\sqrt{1+t^2}$

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(t\sqrt{1+t^2},\ 0)$이고, 직선 PQ의 방정식은

$$y-t^2=\frac{0-t^2}{t\sqrt{1+t^2}-t}(x-t)$$

점 R는 직선 PQ가 y축과 만나는 점이므로 점 R의 y좌표는

$$y=t^2+\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}y=\lim_{t\to 0}\left(t^2+\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{t^2+\frac{t^2(\sqrt{1+t^2}+1)}{(\sqrt{1+t^2}-1)(\sqrt{1+t^2}+1)}\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}(t^2+\sqrt{1+t^2}+1)=2$$

따라서 점 R는 $(0,\ 2)$에 한없이 가까워진다.

062 정답 6

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+ax+1}-bx)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2+ax+1)-b^2x^2}{\sqrt{4x^2+ax+1}+bx}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4-b^2)x+a+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}+b}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $4-b^2=0$이어야 하므로 $b=2$ $(\because b>0)$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}$$
$$=\frac{a}{\sqrt{4}+2}=\frac{a}{4}$$

이때, $\frac{a}{4}=1$이므로 $a=4$

$\therefore a+b=4+2=6$

063 정답 $f(x)=2(x^2-1)$

조건 ㈎의 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

$\therefore f(1)=0$ …… ㉠

조건 ㈏의 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=-4$에서 $x \longrightarrow -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

$\therefore f(-1)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 인수정리에 의하여 다항식 $f(x)$는 $x-1$, $x+1$을 인수로 가진다.

차수가 가장 낮은 다항식을 구하므로

$f(x)=(x+1)(x-1)(ax+b)$

로 놓으면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(ax+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+1)(ax+b)=2(a+b)=4$$

$\therefore a+b=2$ …… ㉢

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)(ax+b)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(x-1)(ax+b)$$
$$=-2(-a+b)=-4$$

$\therefore -a+b=2$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=2$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-1)\times 2=2(x^2-1)$

064 정답 $\frac{1}{2}$

원의 반지름의 길이는 $r(a)=\overline{OA}=\sqrt{a^2+2a}$이므로

$\{r(a)\}^2=a^2+2a$

점 $A(a, \sqrt{2a})$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{AH}=\sqrt{2a}$이므로

$$S(a)=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2a}\times\sqrt{2a}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{a+2}\ (\because a>0)$$

$$\therefore \lim_{a\to0+}\frac{S(a)}{\{r(a)\}^2}=\lim_{a\to0+}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{a+2}}{a^2+2a}=\lim_{a\to0+}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a+2}}{a+2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

065 정답 -1 서술형

(i) $x>1$일 때

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{2x^2-5x+3}{x-1}\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to1+}(x-2)\le\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}\le\lim_{x\to1+}(2x-3)$$

$$-1\le\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}\le-1$$

$$\therefore \lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}=-1 \qquad \cdots ①$$

(ii) $x<1$일 때

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}\ge\frac{f(x)}{x-1}\ge\frac{2x^2-5x+3}{x-1}\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to1-}(x-2)\ge\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}\ge\lim_{x\to1-}(2x-3)$$

$$-1\ge\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}\ge-1$$

$$\therefore \lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}=-1 \qquad \cdots ②$$

(i), (ii)에 의하여

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-1 \qquad \cdots ③$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$x>1$일 때, 극한값 구하기	40%
②	$x<1$일 때, 극한값 구하기	40%
③	구하는 극한값 구하기	20%

3. 함수의 연속

유형 pp.48~53

001 정답 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 연속 (4) 불연속

(1) $f(2)=4$, $\lim_{x\to2}f(x)=4$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 $f(x)=x^2-2x+4$는 $x=2$에서 연속이다.

(2) 주어진 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 정의되어 있지 않다.

따라서 $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$은 $x=2$에서 불연속이다.

(3) $f(2)=0$, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 $f(x)=x|x-2|$는 $x=2$에서 연속이다.

(4) $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$

그런데 $f(2)=2$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)\ne f(2)$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

002 정답 (1) $a=-2$, $b=3$ (2) 5 (3) 1

(1) $x=2$에서 연속이면 $x=2$에서의 극한값이 함숫값 b와 같아야 하므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x+a}{x-2}=b \cdots\cdots ㉠$$

$x\to2$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$,

즉 $\lim_{x\to2}(x^2-x+a)=0$이어야 한다.

즉, $4-2+a=0$ $\quad\therefore a=-2$

이 값을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=3 \qquad \therefore b=3$$

(2) 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이고, $x=2$에서도 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$$

즉, $1^2-1+b=a+1$이므로 $a-b=-1$ $\cdots\cdots ㉠$

또, $x=2$에서도 함수 $f(x)$가 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$$

즉, $2^2-2+b=2a+1$이므로

$2a-b=1$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

(3) $x\ne2$일 때 $f(x)=\frac{x^2+ax+2}{x-2}$이고 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+2}{x-2}$$

이때, $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(x^2+ax+2)=0$이다.

즉, $4+2a+2=0$이므로 $a=-3$

$$\therefore f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=1$$

003 정답 (1) 연속 (2) 불연속

(1) (i) $f(0)g(0)=0\times1=0$

(ii) $\lim\limits_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)\times\lim\limits_{x\to0+}g(x)=1\times0=0$

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)\times\lim\limits_{x\to0-}g(x)$
$=(-1)\times0=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=0$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$이므로 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(2) (i) $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=1$

(ii) $g(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(g(x))$
$=\lim\limits_{t\to0+}f(t)=1$

$x\to0-$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim\limits_{x\to0-}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(g(x))$
$=\lim\limits_{t\to0-}f(t)=-1$

$\lim\limits_{x\to0+}(f\circ g)(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}(f\circ g)(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to0}(f\circ g)(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $y=(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

004 정답 0

$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\geq2)\\ x-1 & (x<2)\end{cases}$에서

$$f(x)g(x)=\begin{cases}(x+1)g(x) & (x\geq2)\\ (x-1)g(x) & (x<2)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=2$에서 연속이면 된다.

함수 $g(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 임의의 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a-}g(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=g(a)$이다.

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to2-}(x-1)g(x)=g(2)$,

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to2+}(x+1)g(x)=3g(2)$,

$f(2)g(2)=3g(2)$

이므로 $\lim\limits_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)g(x)=f(2)g(2)$에서

$3g(2)=g(2)\qquad\therefore g(2)=0$

005 정답 (1) 풀이 참조 (2) 7

(1) 함수 $f(x)=x^4+x^2-4x+1$은 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

$f(0)=1>0,\ f(1)=-1<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 사차방정식 $x^4+x^2-4x+1=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

(2) $h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면 $h(x)=x^3+x+k-3$

이때, $h(x)$는 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여 $h(1)h(2)=(k-1)(k+7)<0$이면 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

$(k-1)(k+7)<0$에서 $-7<k<1$

따라서 정수 k의 개수는 $-6,\ -5,\ \cdots,\ -1,\ 0$의 7개이다.

006 정답 3개

(i) $a=0$일 때, $-4x+2=0$에서 $x=\frac{1}{2}$이므로

$f(0)=1$

(ii) $a\neq0$일 때, 이차방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)=2(a-1)(a-2)$

즉, 이 이차방정식은

$D=0$ ➡ $a=1$ 또는 $a=2$일 때 중근을 가지고,

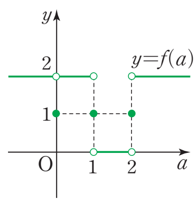
$D<0$ ➡ $1<a<2$일 때 실근을 가지지 않고,

$D>0$ ➡ $a<1$ 또는 $a>2$일 때 서로 다른 두 실근을 가진다.

따라서 함수 $f(a)$는

$$f(a)=\begin{cases}2 & (a>2\ \text{또는}\ 0<a<1\ \text{또는}\ a<0)\\ 1 & (a=0\ \text{또는}\ a=1\ \text{또는}\ a=2)\\ 0 & (1<a<2)\end{cases}$$

따라서 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 $a=0,\ a=1,\ a=2$일 때의 3개이다.



확인문제 pp.48~53

066 정답 (1) 연속 (2) 연속 (3) 연속 (4) 불연속

(1) 함수 $f(x)=3x-9$는 $f(3)=0$, $\lim_{x\to3}(3x-9)=0$이므로

$\lim_{x\to3}(3x-9)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)=|x^2-9|$는 $f(3)=0$, $\lim_{x\to3}|x^2-9|=0$이므로

$\lim_{x\to3}|x^2-9|=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(3) 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x}{x-3} & (x\neq3)\\ 3 & (x=3)\end{cases}$은 $f(3)=3$이고

$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\dfrac{x^2-3x}{x-3}=\lim_{x\to3}\dfrac{x(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to3}x=3$

이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(4) 함수 $f(x)=\begin{cases}2x-3 & (x\geq3)\\ -2x+3 & (x<3)\end{cases}$은

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}(2x-3)=3$,

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}(-2x+3)=-3$

에서 $\lim_{x\to3+}f(x)\neq\lim_{x\to3-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)$은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=\begin{cases}2x-3 & (x\geq3)\\ -2x+3 & (x<3)\end{cases}$은 $x=3$에서 불연속이다.

067 정답 5

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=3$

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$에서 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$, $1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+ax-a-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+a+1)=a+2=3$

따라서 $a=1$, $b=-a-1=-2$이므로

$a^2+b^2=1^2+(-2)^2=5$

068 정답 $a=1$, $b=2$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로 $|x|=1$, 즉 $x=\pm1$에서 연속이다.

(i) $x=1$에서 연속일 때

$f(1)=-1+a+b$이므로

$-1+a+b=\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}x(x+1)=2$

$\therefore a+b=3$ …… ㉠

(ii) $x=-1$에서 연속일 때

$f(-1)=-1-a+b$이므로

$-1-a+b=\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}x(x+1)=0$

$\therefore -a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

069 정답 1

$x\neq1$일 때 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+a}{x-1}$이고, $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+a}{x-1}$

이때, (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2-3x+a)=-2+a=0$ $\therefore a=2$

또, $f(1)=\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x-2)=-1$

이므로

$a+f(1)=2+(-1)=1$

070 정답 6

$\lim_{x\to-1+}f(x)=1\neq-1=\lim_{x\to-1-}f(x)$,

$\lim_{x\to1+}f(x)=0\neq1=\lim_{x\to1-}f(x)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이다.

또, $\lim_{x\to0}f(x)=1\neq0=f(0)$, $\lim_{x\to2}f(x)=1\neq0=f(2)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 극한값은 존재하지만 극한값과 함숫값이 같지 않으므로 불연속이다.

따라서 $a=2$, $b=4$이므로

$a+b=6$

071 정답 (1) 연속 (2) 연속

(1) (i) $f(0)g(0)=(-1)\times0=0$

(ii) $\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)\lim_{x\to0+}g(x)=(-1)\times0=0$,

$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to0-}f(x)\lim_{x\to0-}g(x)=1\times0=0$

이므로 $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$이므로 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

다른 풀이

$f(x)=\begin{cases} x+1\,(-2\le x<0) \\ x-1\,(0\le x\le 2) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -x\ (-2\le x<0) \\ x\quad (0\le x\le 2) \end{cases}$

이므로 $f(x)g(x)=\begin{cases} -x(x+1)\,(-2\le x<0) \\ x(x-1)\ \ (0\le x\le 2) \end{cases}$

(i) $f(0)g(0)=(-1)\times 0=0$

(ii) $\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=(-1)\times 0=0$,

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=1\times 0=0$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=0$

따라서 $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$이므로 함수

$y=f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(2) (i) $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(0)=-1$

(ii) $g(x)=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때, $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to 0+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0+} f(g(x))$$
$$=\lim_{t\to 0+} f(t)=-1$$

$x\to 0-$일 때, $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to 0-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0-} f(g(x))$$
$$=\lim_{t\to 0+} f(t)=-1$$

$\therefore \lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=-1$

따라서 $\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$이므로 함수

$y=(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

072 정답 4

$f(x)=\begin{cases} x+2a\,(x\ge 1) \\ 2x+a\,(x<1) \end{cases}$, $g(x)=3x-a$이므로

$$f(x)g(x)=\begin{cases} (x+2a)(3x-a)\,(x\ge 1) \\ (2x+a)(3x-a)\,(x<1) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=1$에서 연속이면 된다.

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}(2x+a)(3x-a)=(a+2)(3-a)$,

$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}(x+2a)(3x-a)=(2a+1)(3-a)$,

$f(1)g(1)=(2a+1)(3-a)$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=f(1)g(1)$에서

$(a+2)(3-a)=(2a+1)(3-a)$, $(a-1)(3-a)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

따라서 구하는 a의 값의 합은

$1+3=4$

다른 풀이

(i) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면, 연속함수의 성질에 의해 함수 $f(x)g(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이 된다.

즉, $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(2x+a)=a+2$,

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(x+2a)=2a+1$이고 $f(1)=2a+1$이므로 $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$에서

$a+2=2a+1$

$\therefore a=1$

(ii) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 유형 004번의 성질에 의하여 $g(1)=0$이면 함수 $f(x)g(x)$도 실수 전체에서 연속이 된다.

즉, $g(1)=3-a=0$에서 $a=3$

따라서 구하는 a의 값의 합은 $1+3=4$

073 정답 2

$$f(x)=\begin{cases} x+3\,(x>0) \\ k\quad (x=0) \\ x+1\,(x<0) \end{cases}$$에서

$$f(-x)=\begin{cases} -x+3\,(-x>0) \\ k\quad (-x=0) \\ -x+1\,(-x<0) \end{cases}=\begin{cases} -x+1\,(x>0) \\ k\quad (x=0) \\ -x+3\,(x<0) \end{cases}$$이므로

$$g(x)=f(x)+f(-x)=\begin{cases} 4\quad (x>0) \\ 2k\,(x=0) \\ 4\quad (x<0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=0$에서 연속이면 된다.

즉, $\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)$에서 $4=2k$

$\therefore k=2$

074 정답 풀이 참조

함수 $f(x)=x^3-3x+1$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고

$f(0)=1>0$, $f(1)=-1<0$, $f(2)=3>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$과 열린구간 $(1, 2)$에 각각 적어도 하나 존재한다.

따라서 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 적어도 두 개의 실근을 가진다.

075 정답 3개

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고,

$f(0)>0$, $f(1)<0$, $f(2)>0$, $f(4)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가진다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $[0, 4]$에서 적어도 3개의 실근을 가진다.

076 정답 2개

$f(a)$는 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수이다.

(i) $a=0$일 때, $4x=0$에서 $x=0$이므로

$$f(0)=1$$

(ii) $a\neq 0$일 때, 이차방정식 $ax^2+2(a+2)x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+2)^2-a^2=4a+4$$

즉, 이 이차방정식은

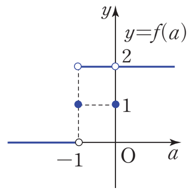
$a=-1$일 때 중근을 가지고,

$a>-1$일 때 서로 다른 두 실근을 가지고,

$a<-1$일 때 실근을 가지지 않는다.

따라서 함수 $f(a)$는

$$f(a)=\begin{cases} 2\ (-1<a<0\ \text{또는}\ a>0) \\ 1\ (a=0\ \text{또는}\ a=-1) \\ 0\ (a<-1) \end{cases}$$

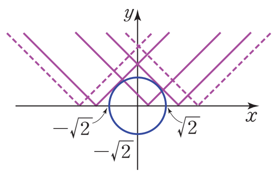


이므로 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 $a=0$, $a=-1$일 때의 2개이다.

077 정답 −2, 2

$$y=|x-a|$$

$$=\begin{cases} x-a\ (x\geq a) \\ -x+a\ (x<a) \end{cases}\text{에서}$$



반직선 $y=-x+a$와 원 $x^2+y^2=2$가 제1사분면에서 접할 때 직선 $x+y-a=0$과 원점 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2},\ \text{즉}\ |-a|=2$$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

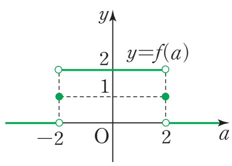
같은 방법으로 반직선 $y=x-a$와 원 $x^2+y^2=2$가 제2사분면에서 접할 때 직선 $x-y-a=0$과 원점 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2},\ \text{즉}\ |-a|=2$$

$\therefore a=-2\ (\because -a>0)$

따라서 함수 $f(a)$와 그 그래프는 다음과 같다.

$$f(a)=\begin{cases} 0\ (a<-2\ \text{또는}\ a>2) \\ 1\ (a=2\ \text{또는}\ a=-2) \\ 2\ (-2<a<2) \end{cases}$$



따라서 함수 $f(a)$는 $a=2$, $a=-2$에서 불연속이다.

078 정답 (가) [조건 2] (나) [조건 1] (다) [조건 3]

(가) $f(a)$의 값은 정의되어 있지만 $\lim\limits_{x\to a-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a+} f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하지 않는다. 따라서 [조건 2]를 만족하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(나) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$의 값은 존재하지만 $f(a)$의 값이 존재하지 않는다. 따라서 [조건 1]을 만족하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(다) $f(a)$의 값이 정의되어 있고, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$의 값도 존재하지만 $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$이다. 따라서 [조건 3]을 만족하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

079 정답 3

$f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=3$$

080 정답 (1) 연속 (2) 불연속

(1) (i) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} (2x-1)=1$,

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} (-2x+3)=1$에서

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

(ii) $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=2-1=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(2) (i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

(ii) $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

081 정답 (1) $[2,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ \infty)$

(1) $3x-6\geq 0$에서 $x\geq 2$　　$\therefore [2,\ \infty)$

(2) $x+3\neq 0$에서 $x\neq -3$　　$\therefore (-\infty,\ -3)\cup(-3,\ \infty)$

082 정답 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $\left[\dfrac{3}{2},\ \infty\right)$ (3) $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$

(1) 이차함수는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\therefore (-\infty,\ \infty)$

(2) $2x-3\geq 0$, 즉 $x\geq\frac{3}{2}$인 범위에서 연속이다.

$\therefore \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

(3) 함수 $f(x)=\frac{x^3+2x}{x}$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

$\therefore (-\infty, 0), (0, \infty)$

083 정답 (1) $a=4$ (2) $a=-1$, $b=\frac{2}{3}$

(1) $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(\sqrt{x+3}+2)=4$

이때, $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=4$

$\therefore a=4$

(2) $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+a}{x^3-1}=b$에서 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(x^3-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(x^2+a)=0$이다.

즉, $1+a=0$에서 $a=-1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+a}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}$$

$\therefore b=\frac{2}{3}$

084 정답 2

$x\neq3$일 때 $f(x)=\frac{x^2-4x+a}{x-3}$이고 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$$f(3)=\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+a}{x-3}$$

이때, $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로 $\lim_{x\to3}(x^2-4x+a)=0$

즉, $9-12+a=0$이므로 $a=3$

$$\therefore f(a)=f(3)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}=2$$

085 정답 5

(i) $x=1$에서 연속이 되려면 $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$이어야 한다.

$g(1)=(1-a)(1-b)f(1)=2(1-a)(1-b)$

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}(x-a)(x-b)f(x)$

$=(1-a)(1-b)\times1=(1-a)(1-b)$

이므로 $2(1-a)(1-b)=(1-a)(1-b)$에서

$(1-a)(1-b)=0$ ······ ㉠

(ii) $x=2$에서 연속이 되려면 $\lim_{x\to2}g(x)=g(2)$이어야 한다.

$g(2)=(2-a)(2-b)f(2)=(2-a)(2-b)$

$\lim_{x\to2+}g(x)=\lim_{x\to2+}(x-a)(x-b)f(x)$

$=(2-a)(2-b)\times2=2(2-a)(2-b)$

이므로 $(2-a)(2-b)=2(2-a)(2-b)$에서

$(2-a)(2-b)=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 이차방정식 $(x-a)(x-b)=0$의 두 근이 $x=1$, $x=2$이므로 $a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=2^2+1^2=5$

086 정답 ①

ㄱ. 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. 【반례】 $f(x)=x$, $g(x)=x^2$은 모두 $x=0$에서 연속이지만 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{x}$은 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. 【반례】 $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x-1$은 모두 $x=1$에서 연속이지만 $(f\circ g)(x)=\frac{1}{x-1}$은 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 $x=a$에서 반드시 연속인 함수는 ㄱ뿐이다.

087 정답 ④

ㄱ. $f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면 $g(x)=h(x)-f(x)$

이때, $f(x)$와 $h(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $g(x)$도 $x=a$에서 연속이다. (참)

ㄴ. 【반례】 $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면 $f(x)$와 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$로 놓으면 $g(x)=f(x)h(x)$

이때, $f(x)$와 $h(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $g(x)$도 $x=a$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

088 정답 2

함수 $g(x)=f(x)\{f(x)-k\}$가 $x=0$에서 연속이 되려면

$g(0)=\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)$이어야 한다.

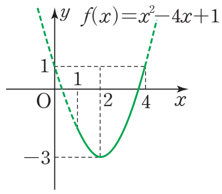
$g(0)=\lim_{x\to0-}g(x)=f(0)\{f(0)-k\}=2(2-k)$,

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)\{f(x)-k\}=0\times(0-k)=0$이므로

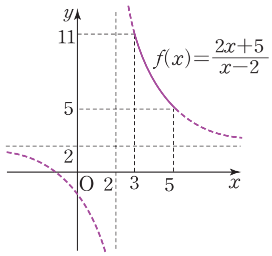
$2(2-k)=0$ $\therefore k=2$

089 정답 (1) 최댓값 : 1, 최솟값 : -3
(2) 최댓값 : 11, 최솟값 : 5

(1) $f(x)=x^2-4x+1$은 구간 $[1,\ 4]$에서 연속이므로 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다.
이때, 최댓값은 $f(4)=1$, 최솟값은 $f(2)=-3$



(2) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-2}$는 구간 $[3,\ 5]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 가진다. 이때, 최댓값은 $f(3)=11$, 최솟값은 $f(5)=5$이다.



090 정답 $-4<a<2$

함수 $f(x)=x^4-3x+a$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이므로 $f(-1)f(1)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$$f(-1)f(1)=(4+a)(-2+a)<0$$
$$\therefore\ -4<a<2$$

091 정답 풀이 참조

함수

$$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$$

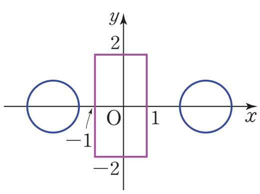
는 닫힌구간 $[a,\ b]$와 $[b,\ c]$에서 모두 연속이고, $a<b<c$이므로

$$f(a)=(a-b)(a-c)>0,\ f(b)=(b-c)(b-a)<0,$$
$$f(c)=(c-a)(c-b)>0$$

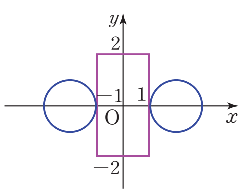
따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(d)=0$인 d가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재하고, $f(e)=0$인 e가 열린구간 $(b,\ c)$에 적어도 하나 존재한다. 이때, 이차방정식의 실근은 2개이므로 이차방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(a,\ b)$와 열린구간 $(b,\ c)$에서 각각 하나의 실근을 가진다.

092 정답 $-2,\ 2$

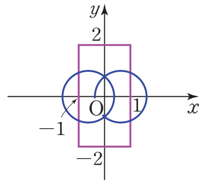
원 K는 중심의 좌표가 $(a,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1이므로



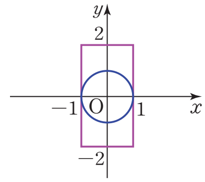
$|a|>2$



$|a|=2$



$|a|<2\ (a\neq0)$



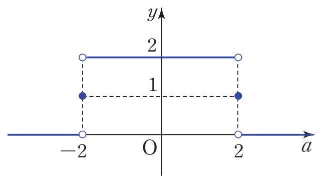
$a=0$

(i) $|a|>2$일 때
➡ 원과 직사각형은 만나지 않으므로 $f(a)=0$

(ii) $|a|=2$일 때
➡ 원과 직사각형은 한 점에서 접하므로 $f(a)=1$

(iii) $|a|<2$일 때
➡ 원과 직사각형은 두 점에서 만나므로 $f(a)=2$

따라서 함수 $y=f(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(a)$는 $a=2$와 $a=-2$에서 불연속이다.



연습문제 II p.57

093 정답 $a=-3,\ b=2,\ c=3$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이면 된다. 즉, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}=c$ ...... ㉠

에서 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0$이므로 다항식 x^3+ax+b는 $(x-1)^2$을 인수로 가져야 한다.

즉, $x^3+ax+b=(x-1)^2(x+k)$의 꼴이어야 한다.

우변을 전개하여 계수를 비교하면

$$x^3+ax+b=x^3+(k-2)x^2+(1-2k)x+k$$

에서 $k=2,\ 1-2k=a,\ b=k$

따라서 $a=-3,\ b=2$이고, 이 값을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+2)=3$$
$$\therefore\ c=3$$

094 정답 3

$f(x-1)=\begin{cases} x & (x\le1) \\ -2x+2+a & (x>1)\end{cases}$이므로

$$g(x)=f(x)f(x-1)$$
$$=\begin{cases}(x+1)x & (x\le0)\\ (-2x+a)x & (0<x\le1)\\ (-2x+a)(-2x+2+a) & (x>1)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위해서는 $x=0,\ x=1$에서도 연속이 되어야 한다.

(i) $x=0$에서 연속이 되려면

$\lim\limits_{x\to0-}g(x)=\lim\limits_{x\to0-}(x+1)x=0$,

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}(-2x+a)x=g(0)=0$

따라서 $\lim\limits_{x\to0-}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}g(x)=g(0)$이므로

함수 $g(x)$는 a의 값에 관계없이 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $x=1$에서 연속이 되려면

$\lim\limits_{x\to1-}g(x)=\lim\limits_{x\to1-}(-2x+a)x=a-2=g(1)$,

$\lim\limits_{x\to1+}g(x)=\lim\limits_{x\to1+}(-2x+a)(-2x+2+a)=a^2-2a$

이므로 $\lim\limits_{x\to1-}g(x)=\lim\limits_{x\to1+}g(x)=g(1)$에서

$a^2-2a=a-2$, $(a-1)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=1$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 a의 값의 합은 $\quad 1+2=3$

095 정답 (가) $f(0)$ (나) $f(1)$ (다) $f(0)$

$g(x)=f(x+1)-f(x)$로 놓으면

(i) $g(0)=0$일 때, $f(0+1)-f(0)=0$에서

$f(1)=\boxed{f(0)}$이므로 $c=0$이다.

(ii) $g(0)\neq0$일 때, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$g(0)=\boxed{f(1)}-f(0)$

$g(1)=f(2)-f(1)=\boxed{f(0)}-f(1)=-g(0)$

이때, $g(0)g(1)=-\{g(0)\}^2<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=0$인 실수 c, 즉 $f(c+1)=f(c)$인 실수 c가 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

096 정답 -1 서술형

$g(x)=x^2+ax+b$(단, a, b는 상수)로 놓을 수 있다. … ①

구간 $(-2, 2)$에서 함수 $f(x)g(x)$가 연속이므로 $x=1$과 $x=-1$에서도 함수 $f(x)g(x)$는 연속이다.

(i) $x=1$에서 연속이면 $f(1)g(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)$이므로

$f(1)g(1)=0\times(1+a+b)=0$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=1\times(1+a+b)=1+a+b$

$\therefore 1+a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠ … ②

(ii) $x=-1$에서 연속이면 $f(-1)g(-1)=\lim\limits_{x\to-1}f(x)g(x)$이므로 $f(-1)g(-1)=0\times(1-a+b)=0$

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)g(x)=(-1)\times(1-a+b)=-1+a-b$

$\therefore -1+a-b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡ … ③

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$

따라서 $g(x)=x^2-1$이므로 $g(0)=-1$ … ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$g(x)=x^2+ax+b$로 놓기	20%
②	$f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속일 조건 구하기	30%
③	$f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속일 조건 구하기	30%
④	$g(0)$의 값 구하기	20%

Ⅱ 미분

4. 미분계수

유형 pp.65~73

001 정답 (1) 9 (2) 1

(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{(3a-28)-(-a)}{4}=a-7=2$

$\therefore a=9$

(2) $f(x)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$이므로

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a+1)-f(a-1)}{a+1-(a-1)}=\dfrac{(a+2)^2-a^2}{2}=2a+2$에서

$2a+2=4 \quad \therefore a=1$

002 정답 (1) ① 12 ② $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (2) 4

(1) ① $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2^3}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x+4)=12$

② $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(2) 함수 $f(x)=x^3+ax+3$에서 미분계수의 정의에 의하여

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^3+ax+3)-3}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x^2+a)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x^2+a)=a$

이고, $f'(0)=1$이므로 $a=1$이다.

즉, $f(x)=x^3+x+3$이므로

$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^3+x+3)-5}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+2)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+2)=4$

003 정답 (1) 1 (2) 4 (3) 4 (4) 4

(1) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{2h}$ ← 먼저 분모가 $\square-\square$꼴이 되도록 변형한다.

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}\times\dfrac{(a+h)-a}{2h}\right\}$ ← $f'(a)\times$(나머지의 극한)으로 나타낸다.

$=f'(a)\times\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(a+h)-a}{2h}=f'(a)\times\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h}{2h}$

$=\dfrac{1}{2}f'(a)=1$

(2) $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(a+2h)-f(a)}{(a+2h)-a} \times \frac{(a+2h)-a}{h} \right\}$

$=f'(a) \times \lim_{h \to 0} \frac{(a+2h)-a}{h}$

$=f'(a) \times \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2f'(a) = 4$

(3) $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+3h)-f(a+h)}{h}$

$=\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(a+3h)-f(a+h)}{(a+3h)-(a+h)} \times \frac{(a+3h)-(a+h)}{h} \right\}$

$=f'(a) \times \lim_{h \to 0} \frac{(a+3h)-(a+h)}{h}$

$=f'(a) \times \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2f'(a) = 4$

(4) $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^2+2h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(a+h^2+2h)-f(a)}{(a+h^2+2h)-a} \times \frac{(a+h^2+2h)-a}{h} \right\}$

$=f'(a) \times \lim_{h \to 0} \frac{(a+h^2+2h)-a}{h}$

$=f'(a) \times \lim_{h \to 0} \frac{h^2+2h}{h}$

$=f'(a) \times \lim_{h \to 0} (h+2) = 2f'(a) = 4$

004 정답 (1) 4 (2) 1 (3) $\frac{3}{2}$

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x \to 1} \left\{ \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \times \frac{x^2-1}{x-1} \right\}$

$=f'(1) \times \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

$=f'(1) \times \lim_{x \to 1} (x+1)$

$=2f'(1) = 4$

(2) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x \to 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{x-1}{x^2-1} \right\}$

$=f'(1) \times \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = f'(1) \times \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{2} f'(1) = 1$

(3) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{f(x)-f(1)}$

$=\lim_{x \to 1} \left\{ \frac{x-1}{f(x)-f(1)} \times \frac{x^3-1}{x-1} \right\}$

$=\lim_{x \to 1} \left\{ \frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}} \times \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \right\}$

$=\frac{1}{f'(1)} \times \lim_{x \to 1} (x^2+x+1)$

$=\frac{3}{f'(1)} = \frac{3}{2}$

005 정답 (1) 2 (2) ㄱ, ㄴ, ㄷ

(1) $f(x)=x^2$으로 놓으면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이므로

$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$

$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x \to a} (x+a)$

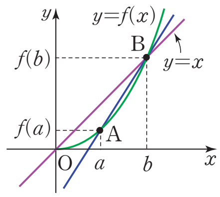
$=2a$

에서 $2a=2$ $\quad \therefore a=1$

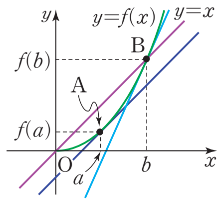
또, 점 (a, b)는 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로 $b=a^2=1$

$\therefore a+b=2$

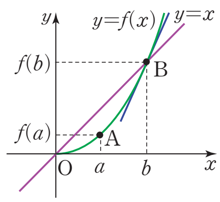
(2) ㄱ. 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 1보다 크므로 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 1$이다. (참)



ㄴ. $f'(a)$, $f'(b)$는 각각 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기이므로 그래프에서 두 점에서의 접선의 기울기를 비교해 보면 $f'(a) < f'(b)$이다. (참)



ㄷ. 점 $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기보다 크므로 $f'(b) > 1$이다. (참)



따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

006 정답 (1) 연속, 미분가능하다. (2) 연속, 미분가능하지 않다.

(1) $f(1)=1^2+2=3$이고

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (x^2+2) = 3$,

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (2x+1) = 3$

이므로 $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$이 되어 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{(x^2+2)-3}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{x^2-1}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1+} (x+1) = 2$

$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{(2x+1)-3}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1-} \frac{2x-2}{x-1} = 2$

즉, $x=1$에서의 좌극한과 우극한이 같으므로

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 존재한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(2) $f(x)=x|x-1|=\begin{cases} x^2-x & (x\ge 1) \\ -x^2+x & (x<1) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$

이므로 함수 $f(x)=x|x-1|$은 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x^2-x)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1+} x=1,$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(-x^2+x)-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}(-x)=-1$$

즉, $x=1$에서의 좌극한과 우극한이 다르므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

007 정답 (1) $a=4$, $b=-3$ (2) 2

(1) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(x)=2^2+1=5$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=2a+b$에서

$2a+b=5$ …… ㉠

또, $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

극한 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 존재한다.

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x^2+1)-5}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+}(x+2)=4$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(ax+b)-5}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{ax-2a}{x-2}$$

($\because$ ㉠에서 $b=5-2a$)

$$=\lim_{x\to 2-}\frac{a(x-2)}{x-2}=a$$

에서 좌극한과 우극한이 같아야 하므로 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이고 극한값이 존재하므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이다.

이때, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$이므로

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

확인문제 pp.65~73

097 정답 1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(9a-2)-a}{2}=4a-1$$에서

$4a-1=3$ $\therefore a=1$

098 정답 2

$f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+2)-f(a)}{(a+2)-a}=\frac{a^2-(a-2)^2}{2}=2a-2$$

에서 $2a-2=2$

$\therefore a=2$

099 정답 (1) 1 (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(1) $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-x^2)-0}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x^2=1$$

(2) $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)-3}{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

100 정답 6

함수 $f(x)=ax^2-2x-3$에서 미분계수의 정의에 의하여

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(ax^2-2x-3)-(a-5)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(ax+a-2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(ax+a-2)=2a-2$$

$f'(1)=2$이므로 $2a-2=2$ $\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x^2-2x-3$이므로

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x^2-2x-3)-1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(2x+2)=6$$

101 정답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) -2 (3) 2 (4) -1

(1) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{3h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}f'(a)=\frac{1}{3}$

(2) $\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)$

$=-2f'(a)=-2$

(3) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a-h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+3h)-f(a-h)}{(a+3h)-(a-h)}\times\frac{(a+3h)-(a-h)}{2h}\right\}$

$=f'(a)\times\lim_{h\to0}\frac{(a+3h)-(a-h)}{2h}=f'(a)\times\lim_{h\to0}\frac{4h}{2h}$

$=2f'(a)=2$

(4) $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{(a+h^2)-(a+h)}\times\frac{(a+h^2)-(a+h)}{h}\right\}$

$=f'(a)\times\lim_{h\to0}\frac{(a+h^2)-(a+h)}{h}$

$=f'(a)\times\lim_{h\to0}\frac{h^2-h}{h}=f'(a)\times\lim_{h\to0}(h-1)$

$=-f'(a)=-1$

102 정답 2

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}=\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times\frac{3h}{2h}\right\}$

$=\frac{3}{2}f'(1)$

이므로 $\frac{3}{2}f'(1)=3$에서 $f'(1)=2$

103 정답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) 12 (3) 1

(1) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{x-2}{x^2-4}\right\}$

$=f'(2)\times\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}$

$=f'(2)\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}$

(2) $\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x-2}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\frac{x^2-4}{x-2}\right\}$

$=f'(4)\times\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$

$=f'(4)\times\lim_{x\to2}(x+2)$

$=4f'(4)=12$

(3) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x-1)}$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x-1}\right\}$

$=f'(2)\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x-1}=f'(2)=1$

104 정답 6

$\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(2)\}^2}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\left[\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\{f(x)+f(2)\}\right]$

$=f'(2)\times\lim_{x\to2}\{f(x)+f(2)\}=f'(2)\times2f(2)=6$

105 정답 2

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1)=4$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$

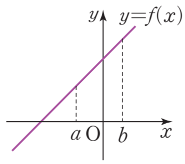
$=f'(1)\times\frac{1}{2}=2$

106 정답 ㄴ

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기이다.

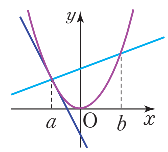
ㄱ. 오른쪽 그림에서

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)$



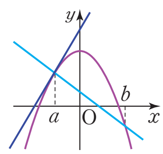
ㄴ. 오른쪽 그림에서

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(a)$



ㄷ. 오른쪽 그림에서

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$



따라서 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 ㄴ뿐이다.

107 정답 연속, 미분가능하다.

$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & (x\ge0) \\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$에서 $\lim_{x\to0}f(x)=0=f(0)$

즉, 함수 $f(x)=x|x|$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to0+}x=0,$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to0-}(-x)=0$

즉, $x=0$에서의 좌극한과 우극한이 같으므로

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

108 정답 연속, 미분가능하지 않다.

$f(1)=1^2-1=0$이고

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x^2-1)=0,\ \lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x-1)=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$이 되어 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x^2-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}1=1$$

즉, $x=1$에서의 좌극한과 우극한이 다르므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

109 정답 4

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=f(1)$이다.

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-x+2)=2$$

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(ax+b)=a+b$$

$\therefore\ a+b=2$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$이다.

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(ax+b)-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{ax-a}{x-1}$$

($\because$ ㉠에서 $b=2-a$)

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x^2-x+2)-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}x=1$$

$\therefore\ a=1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $1+b=2$ $\quad\therefore\ b=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+2 & (x\ge 1)\\ x+1 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(2)=2^2-2+2=4$

110 정답 10

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+a}{2x-6}=5$에서 $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)=0$이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x\to 3}\{f(x)+a\}=0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 3}f(x)=-a$$

이때, 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)=-a$이고,

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)+a}{2x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{2(x-3)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{1}{2}f'(3)$$

에서 $\dfrac{1}{2}f'(3)=5$ $\qquad\therefore\ f'(3)=10$

연습문제 I

pp.75~77

111 정답 (1) 2 (2) $2a+\Delta x$

(1) $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}=\dfrac{\{2(a+\Delta x)+3\}-(2a+3)}{\Delta x}$

$$=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

(2) $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}=\dfrac{\{(a+\Delta x)^2+1\}-(a^2+1)}{\Delta x}$

$$=\frac{2a\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2a+\Delta x$$

112 정답 2

x의 값이 1에서 2까지 변할 때의 평균변화율이 1이므로

$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=1$ $\qquad\therefore\ f(2)-f(1)=1$ $\qquad$ …… ㉠

또, x의 값이 2에서 3까지 변할 때의 평균변화율은 3이므로

$\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=3$ $\qquad\therefore\ f(3)-f(2)=3$ $\qquad$ …… ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 더하면 $f(3)-f(1)=4$

따라서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{4}{2}=2$$

113 정답 ②

주어진 그래프에서 $f(a)=b,\ f(c)=d$이고, $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로

$$g(b)=a,\ g(d)=c$$

따라서 함수 $g(x)$에 대하여 구간 $[b,\ d]$에서의 평균변화율은

$$\frac{g(d)-g(b)}{d-b}=\frac{c-a}{d-b}$$

114 정답 (1) -6 (2) 28

(1) $f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-(3+\Delta x)^2+3\}-(-3^2+3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-6\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-6-\Delta x)$

$=-6$

(2) $f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(3+\Delta x)^3+(3+\Delta x)\}-(3^3+3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{28\Delta x+9(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{28+9\Delta x+(\Delta x)^2\}$

$=28$

115 정답 1

구간 [0, 2]에서의 평균변화율 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$는

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{2^2+2\times 2-0}{2-0}=4$$

또 미분계수의 정의에 의하여 $f'(a)$는

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2+2x)-(a^2+2a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a+2)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}(x+a+2)=2a+2$

따라서 $2a+2=4$이므로 $a=1$

116 정답 (1) 4 (2) $-\frac{3}{2}$ (3) -12

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2-2h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h}\times(-2)\right\}$

$=-2f'(2)=4$

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{4h}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\times\frac{3}{4}\right\}$

$=\frac{3}{4}f'(2)=-\frac{3}{2}$

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2+3h)-f(2-3h)}{(2+3h)-(2-3h)}\times\frac{(2+3h)-(2-3h)}{h}\right\}$

$=f'(2)\times\lim_{h\to 0}\frac{6h}{h}=6f'(2)=-12$

117 정답 4

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-2h)}{4h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a-2h)}{(a+h)-(a-2h)}\times\frac{(a+h)-(a-2h)}{4h}\right\}$

$=f'(a)\times\lim_{h\to 0}\frac{3h}{4h}=\frac{3}{4}f'(a)=3$

$\therefore\ f'(a)=4$

118 정답 (1) $\frac{1}{2a}f'(a)$ (2) $2af'(a^2)$

(1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{1}{x+a}\right\}$

$=\frac{1}{2a}f'(a)$

(2) $\lim_{x\to a}\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x^2-a^2}\times\frac{x^2-a^2}{x-a}\right\}$

$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x^2-a^2}\times(x+a)\right\}$

$=2af'(a^2)$

119 정답 $2\sqrt{3}$

조건 (나)에서

$\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^3-\{f(a)\}^3}{x^3-a^3}$

$=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)-f(a)\}[\{f(x)\}^2+f(x)f(a)+\{f(a)\}^2]}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}$

$=\left[\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{\{f(x)\}^2+f(x)f(a)+\{f(a)\}^2}{x^2+ax+a^2}\right]$

$=f'(a)\times\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2+f(x)f(a)+\{f(a)\}^2}{x^2+ax+a^2}$

$=f'(a)\times\frac{3\{f(a)\}^2}{3a^2}=f'(a)\times\frac{\{f(a)\}^2}{a^2}=1$

조건 (가)에서 $f(a)=2$, $f'(a)=3$이므로

$3\times\frac{2^2}{a^2}=1$, 즉 $a^2=12$

$\therefore\ a=2\sqrt{3}\ (\because\ a>0)$

120 정답 8

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x^3-8}=\frac{1}{3}$에서 $\lim_{x\to 2}(x^3-8)=0$이고 극한값이 존재하므로 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-4\}=0$, 즉 $f(2)-4=0$에서

$f(2)=4$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$=\frac{1}{12}f'(2)=\frac{1}{3}$

즉, $f'(2)=4$이므로 $f(2)+f'(2)=8$

121 정답 3

$f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2+2f(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)\{f(x)+2\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-f(1)\}\{f(x)+2\}}{x-1}\ (\because f(1)=0)$$
$$=f'(1)\{f(1)+2\}=2f'(1)=6$$
$$\therefore f'(1)=3$$

다른 풀이

$f(1)=0$이고 $\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2+2f(x)}{x-1}=6$이므로

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{\{f(x)\}^2+2f(x)}{x-1}\times\frac{f(x)}{\{f(x)\}^2+2f(x)}\right]$$
$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{\{f(x)\}^2+2f(x)}{x-1}\times\frac{1}{f(x)+2}\right]$$
$$=6\times\frac{1}{2}=3$$

122 정답 4

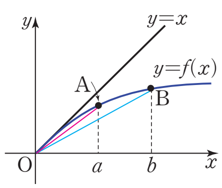
두 점 $\mathrm{P}(1,\ 3)$, $\mathrm{Q}(a,\ 2a^2+1)$을 지나는 직선의 기울기가 $g(a)$이므로

$$g(a)=\frac{(2a^2+1)-3}{a-1}=\frac{2(a^2-1)}{a-1}$$
$$=\frac{2(a+1)(a-1)}{a-1}$$
$$\therefore \lim_{a\to1}g(a)=\lim_{a\to1}\frac{2(a+1)(a-1)}{a-1}=\lim_{a\to1}2(a+1)=4$$

123 정답 ㄱ

ㄱ. 구간 $[0,\ b]$에서의 평균변화율($\overline{\mathrm{OB}}$의 기울기)는 구간 $[0,\ a]$에서의 평균변화율($\overline{\mathrm{OA}}$의 기울기)보다 작다.

$$\therefore \frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}\ (\text{참})$$

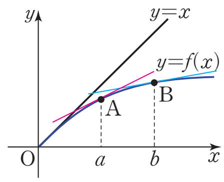


ㄴ. $[a,\ b]$의 평균변화율($\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기)는 $y=x$의 기울기인 1보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$$
$$\therefore f(b)-f(a)<b-a\ (\text{거짓})$$

ㄷ. $x=a$에서의 접선의 기울기 $f'(a)$는 $x=b$에서의 접선의 기울기 $f'(b)$보다 크다.

$$\therefore f'(a)>f'(b)\ (\text{거짓})$$



따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

124 정답 $c=\frac{a+b}{2}$

곡선 $y=x^2$ 위의 두 점 $(a,\ a^2)$, $(b,\ b^2)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{b^2-a^2}{b-a}=a+b\ (\because a\neq b)$$

$f(x)=x^2$에서 점 $(c,\ c^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(c)$와 같으므로

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(c+\Delta x)^2-c^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2c\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(2c+\Delta x)=2c$$

따라서 $a+b=2c$이므로

$$c=\frac{a+b}{2}$$

125 정답 (1) 연속, 미분가능하다.
(2) 연속, 미분가능하지 않다.

(1) $f(x)=(x-1)|x-1|=\begin{cases}(x-1)^2 & (x\ge1)\\ -(x-1)^2 & (x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to1}f(x)=0=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)^2-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x-1)=0$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)^2-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(-x+1)=0$$

즉, 좌극한과 우극한이 같으므로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 존재한다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(2) $f(x)=|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 & (x\ge1 \text{ 또는 } x\le-1)\\ -x^2+1 & (-1<x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to1}f(x)=0=f(1)$이므로 함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{(x^2-1)-0}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1+} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{(-x^2+1)-0}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1-} (-x-1) = -2$$

이므로 $\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 되어

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

126 정답 $a=2$, $b=-1$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$이므로

$\lim_{x \to 1+} (ax+b) = \lim_{x \to 1-} x^2 = 1$에서

$a+b=1$ ······ ㉠

또, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이다.

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{(ax+b)-1}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1+} \frac{ax-a}{x-1}$$
($\because$ ㉠에서 $b=1-a$)
$$= \lim_{x \to 1+} \frac{a(x-1)}{x-1} = a$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1-} (x+1) = 2$$

$\therefore a=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

127 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

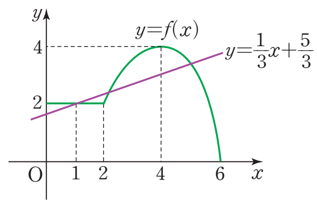
ㄱ. $g(2) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{2-2}{1} = 0$,

$g(4) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$이므로

$\therefore g(2) < g(4)$ (참)

ㄴ. $g(x) = \frac{1}{3}$에서 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{3}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$



따라서 $1 < x \le 6$인 범위에서 $g(x) = \frac{1}{3}$인 x의 값의 개수는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$의 그래프의 $x \neq 1$인 교점의 개수와 같으므로 2개이다. (참)

ㄷ. $g(x)$는 두 점 $(1, f(1))$, $(x, f(x))$를 지나는 직선의 기울기이므로 $x=6$일 때 최솟값을 가진다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

128 정답 4

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} \times 2 - \frac{g(h)}{h} \right\}$$
$$= 2f'(a) - \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$$

그런데 $f'(a)=2$이므로 $4 - \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$

$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 4$

129 정답 (1) -1 (2) 4

(1) $\lim_{x \to 2} \frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{xf(2)-2f(2)+2f(2)-2f(x)}{x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)f(2)-2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2} f(2) - 2\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$= f(2) - 2f'(2)$$
$$= 3 - 2 \times 2 = -1$$

(2) $\lim_{x\to2}\frac{x^2f(2)-2^2f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x^2f(2)-2^2f(2)+2^2f(2)-2^2f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-2^2)f(2)-2^2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+2)f(2)-2^2\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=4f(2)-4f'(2)$

$=4\times3-4\times2=4$

130 정답 5

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy-2$에 $y=0$을 대입하면

$f(x)=f(x)+f(0)-2 \qquad \therefore f(0)=2$

이때, $f'(0)=3$이므로 미분계수의 정의에 의하여

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2}{h}=3$

$\therefore f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2)+f(h)+2h-2\}-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2h-2}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-2}{h}+2\right\}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2$

$=f'(0)+2=5$

131 정답 $a=-1$, $b=5$ ······ 서술형

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\therefore 1+a+b=5$ ······ ㉠ ··· ①

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\therefore 3+2a+b=6$ ······ ㉡ ··· ②

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$ ··· ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$f(x)$가 $x=1$에서 연속임을 이용하기	30%
②	$f(x)$가 $x=1$에서 미분가능함을 이용하기	30%
③	a, b의 값 구하기	40%

5. 도함수

개념 보충

* 미분법의 기본 공식 (2)의 증명 (문제편 p.81)

(1) $y'=\{cf(x)\}'$

$=\lim_{h\to0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{c\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$

$=c\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ← $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재할 때, $\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)$ (단, c는 실수)

$=cf'(x)$

(2) $y'=\{f(x)+g(x)\}'$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=f'(x)+g'(x)$

(3) 마찬가지의 방법으로 하면

$y'=\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

개념 보충

* 미분법의 기본 공식 (3)의 증명 (문제편 p.82)

(1) $y'=\{f(x)g(x)\}'$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to0}g(x+h)$

$\quad+f(x)\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=f'(x)\,g(x)+f(x)g'(x)$ ← 함수 $g(x)$가 미분가능하면 연속이므로 $\lim_{h\to0}g(x+h)=g(x)$

(2) $y'=\{f(x)g(x)h(x)\}'$

$=[\{f(x)g(x)\}h(x)]'$

$=\{f(x)g(x)\}'h(x)+\{f(x)g(x)\}h'(x)$

$=\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

유형 .... pp.83~87

001 정답 (1) $y'=a$ (2) $y'=4x^3+6x$
(3) $y'=8x^3+6x$
(4) $y'=12(3x+2)^3+6x(x^2+1)^2$
(5) $y'=(16x+12)(2x+3)^2$

(1) $y'=a(x)'+(b)'=a+0=a$

(2) $y'=(x^4)'+3(x^2)'+(2)'$
$=4x^3+3\times2x+0$
$=4x^3+6x$

(3) $y'=(x^2+5)'(2x^2-7)+(x^2+5)(2x^2-7)'$
$=2x(2x^2-7)+(x^2+5)\times4x$
$=4x^3-14x+4x^3+20x$
$=8x^3+6x$

(4) $y'=\{(3x+2)^4\}'+\{(x^2+1)^3\}'$
$=4(3x+2)^3\times(3x+2)'+3(x^2+1)^2\times(x^2+1)'$
$=4(3x+2)^3\times3+3(x^2+1)^2\times2x$
$=12(3x+2)^3+6x(x^2+1)^2$

(5) $y'=(2x+1)'(2x+3)^3+(2x+1)\{(2x+3)^3\}'$
$=2(2x+3)^3+(2x+1)\times3(2x+3)^2\times(2x+3)'$
$=2(2x+3)^3+(2x+1)\times3(2x+3)^2\times2$
$=(2x+3)^2\{2(2x+3)+6(2x+1)\}$
$=(16x+12)(2x+3)^2$

다른 풀이

$y=(2x+1)(2x+3)^3=(2x+3-2)(2x+3)^3$
$=(2x+3)^4-2(2x+3)^3$

이므로

$y'=\{(2x+3)^4\}'-2\{(2x+3)^3\}'$
$=4(2x+3)^3\times(2x+3)'-2\times3(2x+3)^2\times(2x+3)'$
$=8(2x+3)^3-12(2x+3)^2$
$=(2x+3)^2\{8(2x+3)-12\}$
$=(16x+12)(2x+3)^2$

002 정답 (1) 5 (2) $a=-2$, $b=2$

(1) $f(0)=2$에서 $b=2$

$f'(x)=3x^2+a$이므로 $f'(0)=3$에서 $a=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$에서 $f'(1)=1$

$f(0)=0$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2$에서

$f'(0)=2$

한편, $f(x)=x^3+ax^2+bx$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=3+2a+b=1$, $f'(0)=b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

003 정답 (1) 220 (2) 12

(1) $\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+3h)-f(1-h)}{(1+3h)-(1-h)}\times\frac{(1+3h)-(1-h)}{h}\right\}$

$=f'(1)\times\lim_{h\to0}\frac{4h}{h}=4f'(1)$

$f'(x)=1+2x+\cdots+10x^9$이므로

$f'(1)=1+2+3+\cdots+10=55$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1-h)}{h}=4f'(1)=4\times55=220$

(2) $f(x)=x^{10}+x^2$으로 놓으면 $f(1)=2$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^{10}+x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
$=f'(1)$

이때, $f'(x)=10x^9+2x$이므로 $f'(1)=12$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^{10}+x^2-2}{x-1}=f'(1)=12$

004 정답 $a=4$, $b=-3$

$f(x)$는 $x=2$를 제외한 모든 x에서 미분가능하므로

$f(x)=\begin{cases}g(x)=x^2+1 & (x\ge2)\\ h(x)=ax+b & (x<2)\end{cases}$로 놓으면

$f'(x)=\begin{cases}g'(x)=2x & (x>2)\\ h'(x)=a & (x<2)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능할 조건은

(i) $g(2)=h(2)$ ← $x=2$에서 연속이다.

(ii) $g'(2)=h'(2)$ ← 좌극한과 우극한이 같다.

$g(2)=h(2)$에서 $5=2a+b$ ...... ㉠

$g'(2)=h'(2)$에서 $4=a$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

다른 풀이

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x^2+1)=5$,

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(ax+b)=2a+b$에서

$2a+b=5$ ...... ㉠

또, $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 극한

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 존재한다.

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x^2+1)-5}{x-2}$
$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$
$=\lim_{x\to2+}(x+2)=4$

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{(ax+b)-5}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{ax-2a}{x-2}$$
($\because$ ㉠에서 $b=5-2a$)
$$=\lim_{x\to2-}\frac{a(x-2)}{x-2}=a$$
즉, 좌극한과 우극한이 같아야 하므로 $a=4$
$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

005 정답 (1) 16 (2) $a=1,\ b=-2$

(1) 주어진 식 $f(x)=2x^3-x^2f'(1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$f'(x)=6x^2-2xf'(1)$$
위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$$f'(1)=6-2f'(1) \qquad \therefore f'(1)=2$$
따라서 $f'(x)=6x^2-4x$이므로
$$f'(2)=24-8=16$$
(2) 다항식 ax^4+bx^2+1이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 몫을 $Q(x)$로 놓으면
$$ax^4+bx^2+1=(x-1)^2Q(x) \qquad \cdots\cdots ㉠$$
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$$a+b+1=0 \qquad \therefore a+b=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$
또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$4ax^3+2bx=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$$
위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$$4a+2b=0 \qquad \therefore 2a+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-2$

확인문제 .... pp.83~87

131 정답 (1) $y'=8x^7-4x-3$ (2) $y'=x^2-2x+5$ (3) $y'=4x^3-6x^2-4x+3$

(1) $y'=(x^8)'-2(x^2)'-3(x)'$
$=8x^7-2\times2x-3=8x^7-4x-3$

(2) $y'=\frac{1}{3}(x^3)'-(x^2)'+5(x)'+(4)'$
$=\frac{1}{3}\times3x^2-2x+5=x^2-2x+5$

(3) $y'=(x-2)'(x^3-2x-1)+(x-2)(x^3-2x-1)'$
$=x^3-2x-1+(x-2)(3x^2-2)$
$=x^3-2x-1+3x^3-6x^2-2x+4$
$=4x^3-6x^2-4x+3$

132 정답 (1) $y'=3(x+1)^2+4(x+2)^3$ (2) $y'=(x+1)^2(x+2)^3(7x+10)$

(1) $y'=\{(x+1)^3\}'+\{(x+2)^4\}'$
$=3(x+1)^2(x+1)'+4(x+2)^3(x+2)'$
$=3(x+1)^2+4(x+2)^3$

(2) $y'=\{(x+1)^3\}'(x+2)^4+(x+1)^3\{(x+2)^4\}'$
$=3(x+1)^2(x+2)^4+(x+1)^3\times4(x+2)^3$
$=(x+1)^2(x+2)^3(3x+6+4x+4)$
$=(x+1)^2(x+2)^3(7x+10)$

133 정답 2

$f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 $f'(x)=2x+a$이므로
$f(1)=3$에서 $1+a+b=3$ $\cdots\cdots$ ㉠
$f'(1)=-2$에서 $2+a=-2$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4,\ b=6$
따라서 $f(x)=x^2-4x+6$이므로
$$f(2)=2^2-4\times2+6=2$$

134 정답 -5

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=1$에서 $f'(1)=1$
한편, $f(x)=x^4+x^2+ax$에서 $f'(x)=4x^3+2x+a$이므로
$$f'(1)=4+2+a=1 \qquad \therefore a=-5$$

135 정답 (1) 4 (2) 8

$f(x)=2x^3+x^2-4x+1$에서
$f'(x)=6x^2+2x-4$이므로 $f'(1)=4$

(1) $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1-h)}{(1+h)-(1-h)}\times\frac{(1+h)-(1-h)}{2h}\right\}$$
$$=f'(1)\times\lim_{h\to0}\frac{2h}{2h}=f'(1)=4$$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\frac{x^2-1}{x-1}\right\}$
$$=f'(1)\times\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$=f'(1)\times\lim_{x\to1}(x+1)=2f'(1)=8$$

136 정답 12

$f(x)=x^6+x^4+x^2$으로 놓으면 $f(1)=3$이므로
$$\lim_{x\to1}\frac{x^6+x^4+x^2-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$
이때, $f'(x)=6x^5+4x^3+2x$이므로 $f'(1)=12$
$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^6+x^4+x^2-3}{x-1}=f'(1)=12$$

137 정답 3

$f(x)$는 $x=1$을 제외한 모든 x에서 미분가능하므로

$f(x)=\begin{cases} g(x)=x^2-x+2 & (x\le 1) \\ h(x)=ax+b & (x>1) \end{cases}$로 놓으면

$$f'(x)=\begin{cases} g'(x)=2x-1 & (x<1) \\ h'(x)=a & (x>1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 조건은

(i) $g(1)=h(1)$ ← $x=1$에서 연속이다.

(ii) $g'(1)=h'(1)$ ← 좌극한과 우극한이 같다.

$g(1)=h(1)$에서 $2=a+b$ …… ㉠

$g'(1)=h'(1)$에서 $1=a$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore f(2)=2+1=3$

다른 풀이

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x^2-x+2)=2$,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(ax+b)=a+b$에서

$a+b=2$ …… ㉠

또, $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 극한

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 존재한다.

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x^2-x+2)-2}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}x=1$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(ax+b)-2}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{ax-a}{x-1}\quad(\because ㉠\text{에서 } b=2-a)$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

즉, 좌극한과 우극한이 같아야 하므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore f(2)=2+1=3$

138 정답 $a=-1,\ b=5$

$f(x)$는 $x=1$을 제외한 모든 x에서 미분가능하므로

$f(x)=\begin{cases} g(x)=3x^2+2 & (x<1) \\ h(x)=x^3+ax^2+bx & (x\ge 1) \end{cases}$로 놓으면

$$f'(x)=\begin{cases} g'(x)=6x & (x<1) \\ h'(x)=3x^2+2ax+b & (x>1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 조건은

(i) $g(1)=h(1)$ ← $x=1$에서 연속이다.

(ii) $g'(1)=h'(1)$ ← 좌극한과 우극한이 같다.

$g(1)=h(1)$에서 $5=1+a+b$이므로

$a+b=4$ …… ㉠

$g'(1)=h'(1)$에서 $6=3+2a+b$ 이므로

$2a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=5$

다른 풀이

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=1$에서도 미분가능하다. 즉, $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^3+ax^2+bx)=1+a+b$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x^2+2)=5$에서 $1+a+b=5$이므로

$a+b=4$ …… ㉠

또, $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 극한

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이 존재한다.

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^3+ax^2+bx)-(1+a+b)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)\{(x^2+x+1)+a(x+1)+b\}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\{(x^2+x+1)+a(x+1)+b\}$$

$$=3+2a+b$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(3x^2+2)-(1+a+b)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1}\quad(\because ㉠)$$

$$=\lim_{x\to1-}3(x+1)=6$$

즉, 좌극한과 우극한이 같아야 하므로

$3+2a+b=6$ $\therefore 2a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=5$

139 정답 9

주어진 식 $f(x)=x^2f'(0)+3x-2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2xf'(0)+3$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f'(0)=3$

따라서 $f'(x)=6x+3$이므로

$f'(1)=6+3=9$

140 정답 $6x-4$

다항식 $x^{10}-2x^2+3$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (단, a, b는 상수)라고 하면

$$x^{10}-2x^2+3=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$2=a+b \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$10x^9-4x=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $6=a$

$a=6$을 ㉡에 대입하면

$$2=6+b \qquad \therefore b=-4$$

따라서 구하는 나머지는 $6x-4$

다른 풀이

다항식 $x^{10}-2x^2+3$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (단, a, b는 상수)라고 하면

$$x^{10}-2x^2+3=(x-1)^2Q(x)+ax+b$$

즉, $x^{10}-2x^2-ax+3-b=(x-1)^2Q(x)$

여기서 $f(x)=x^{10}-2x^2-ax+3-b$로 놓으면

$$f'(x)=10x^9-4x-a$$

이때, $f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$$f(1)=0,\ f'(1)=0$$

$f(1)=0$에서 $-a-b+2=0 \qquad \therefore a+b=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=0$에서 $6-a=0 \qquad \therefore a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

따라서 구하는 나머지는 $6x-4$

연습문제 I ········ pp.88~90

141 정답 $f'(x)=2x+2$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2+2(x+h)+5-(x^2+2x+5)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{(2x+2)h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2x+2+h)\\&=2x+2\end{aligned}$$

142 정답

(1) $y'=-5$
(2) $y'=8x-3$
(3) $y'=-16x^3+12x^2+2x-1$
(4) $y'=8x^3-14x$
(5) $y'=10x^4-3x^2+12x$
(6) $y'=18x^2+14x-3$

(1) $y'=-5$

(2) $y'=8x-3$

(3) $$\begin{aligned}y'&=(x-1)'(x-4x^3)+(x-1)(x-4x^3)'\\&=(x-4x^3)+(x-1)(1-12x^2)\\&=-16x^3+12x^2+2x-1\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}y'&=(2x^2+3)'(x^2-5)+(2x^2+3)(x^2-5)'\\&=4x(x^2-5)+(2x^2+3)\cdot2x\\&=8x^3-14x\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}y'&=(x^3+3)'(2x^2-1)+(x^3+3)(2x^2-1)'\\&=3x^2(2x^2-1)+(x^3+3)\cdot4x\\&=10x^4-3x^2+12x\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}y'&=\{x(2x+3)(3x-1)\}'\\&=(x)'(2x+3)(3x-1)+x(2x+3)'(3x-1)\\&\qquad+x(2x+3)(3x-1)'\\&=1\cdot(2x+3)(3x-1)+x\cdot2\cdot(3x-1)+x(2x+3)\cdot3\\&=18x^2+14x-3\end{aligned}$$

143 정답

(1) $y'=8(x-2)^7$
(2) $y'=12(3x+1)^3$
(3) $y'=(16x+9)(x-1)^4(2x+3)^2$

(1) $y'=8(x-2)^7\times(x-2)'=8(x-2)^7$

(2) $$\begin{aligned}y'&=4(3x+1)^3\times(3x+1)'=4(3x+1)^3\times3\\&=12(3x+1)^3\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}y'&=\{(x-1)^5\}'(2x+3)^3+(x-1)^5\{(2x+3)^3\}'\\&=5(x-1)^4(x-1)'\times(2x+3)^3\\&\qquad+(x-1)^5\times3(2x+3)^2(2x+3)'\\&=5(x-1)^4(2x+3)^3+6(x-1)^5(2x+3)^2\\&=(x-1)^4(2x+3)^2\{5(2x+3)+6(x-1)\}\\&=(16x+9)(x-1)^4(2x+3)^2\end{aligned}$$

144 정답 1

$f(x)=2x^2+4x-3$이라고 하면

$$f'(x)=4x+4$$

점 $(a,\ 2a^2+4a-3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$와 같으므로

$$4a+4=8 \qquad \therefore a=1$$

145 정답 3

곡선 $y=x^3+ax^2+b$가 점 $(1,\ 5)$를 지나므로

$$5=1+a+b \qquad \therefore a+b=4 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

곡선 $y=x^3+ax^2+b$ 위의 x좌표가 -1인 점에서의 접선의 기울기가 1이므로 $y'=3x^2+2ax$에서 $x=-1$을 대입하면

$$3-2a=1 \qquad \therefore a=1$$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

$$\therefore ab=3$$

146 정답 (1) 4 (2) 6

$f(x)=x^4-2x^2+2x-3$에 대하여

$f'(x)=4x^3-4x+2$이므로 $f'(1)=2$

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1-h)}{(1+h)-(1-h)}\times\frac{(1+h)-(1-h)}{h}\right\}$

$=f'(1)\times\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2f'(1)=4$

다른 풀이

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=4$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\frac{x^3-1}{x-1}\right\}$

$=f'(1)\times\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$=f'(1)\times\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3f'(1)=6$

147 정답 1

$f(x)=x^9+2x^6-2x^2+1$로 놓으면 $f(-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^9+2x^6-2x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=f'(-1)$$

이때, $f'(x)=9x^8+12x^5-4x$이므로

$f'(-1)=9-12+4=1$

$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{x^9+2x^6-2x^2+1}{x+1}=f'(-1)=1$

148 정답 5

$f(x)=x^n+5x$로 놓으면 $f(1)=6$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n+5x-6}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때, $f'(x)=nx^{n-1}+5$이므로 $f'(1)=n+5$

$n+5=10 \qquad \therefore n=5$

149 정답 12

$g'(x)=(x^2-4x)'f(x)+(x^2-4x)f'(x)$

$=(2x-4)f(x)+(x^2-4x)f'(x)$

$\therefore g'(2)=0\times f(2)+(-4)\times f'(2)$

$=(-4)\times(-3)=12$

150 정답 6

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+3)}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+3}\right\}$

$=\frac{1}{4}f'(1)=\frac{1}{2}$

$\therefore f'(1)=2$

한편, $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로

$g'(1)=2f(1)+f'(1)=6$

151 정답 4

$f(x)=ax^2+bx+c$ (단, $a\neq 0$이고, a, b, c는 상수)로 놓으면

$f(0)=2$에서 $c=2$

또, $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(0)=-1$에서 $b=-1$

$f'(1)=5$에서 $a=3$

따라서 $f(x)=3x^2-x+2$이므로

$f(1)=3-1+2=4$

152 정답 3

$f(x)=ax^2+bx+c$ (단, $a\neq 0$이고, a, b, c는 상수)로 놓으면 조건 (가)에서

$f(0)=3$에서 $c=3$

또, $f'(x)=2ax+b$이므로 조건 (나)에서

$2(ax^2+bx+3)-(x-1)(2ax+b)=2$

정리하면 $(2a+b)x+6+b=2$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$2a+b=0,\ 6+b=2$

$\therefore b=-4,\ a=2$

따라서 $f(x)=2x^2-4x+3$이므로

$f(2)=8-8+3=3$

153 정답 $a=-1$, $b=4$

$f(x)$는 $x=2$를 제외한 모든 x에서 미분가능하므로

$f(x)=\begin{cases} g(x)=x^3+ax & (x\geq 2) \\ h(x)=bx^2-5x & (x<2)\end{cases}$로 놓으면

$f'(x)=\begin{cases} g'(x)=3x^2+a & (x>2) \\ h'(x)=2bx-5 & (x<2)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능할 조건은

(i) $g(2)=h(2)$ ← $x=2$에서 연속이다.

(ii) $g'(2)=h'(2)$ ← 좌극한과 우극한이 같다.

$g(2)=h(2)$에서 $8+2a=4b-10$

$\therefore a-2b=-9$ ······ ㉠

$g'(2)=h'(2)$에서 $12+a=4b-5$

$\therefore a-4b=-17$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$

154 정답 $4x-4$

다항식 $x^6+2x^5-4x^3+1$을 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(단, a, b는 상수)로 놓으면

$$x^6+2x^5-4x^3+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$6x^5+10x^4-12x^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$a+b=0$, $a=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-4$이므로 구하는 나머지는 $4x-4$이다.

155 정답 $a=11$, $b=12$

다항식 x^8+ax+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$$x^8+ax+b=(x+1)^2Q(x)+3x+5 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$1-a+b=2 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$8x^7+a=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+3$$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-8+a=3$ $\quad \therefore a=11$

$a=11$을 ㉡에 대입하면

$1-11+b=2$ $\quad \therefore b=12$

연습문제 II ······ p.91

156 정답 $g(x)=3x^2-2x+4$

$f'(x)=g(x)$이고 $\{f(x)+g(x)\}'$은 이차함수이므로

$\{f(x)+g(x)\}'=g(x)+g'(x)$에서 $g(x)$는 이차함수이다.

$g(x)=ax^2+bx+c$ (단, $a\neq0$이고, a, b, c는 상수)로 놓으면

$(ax^2+bx+c)+(2ax+b)=3x^2+4x+2$

$ax^2+(2a+b)x+(b+c)=3x^2+4x+2$

$\therefore a=3$, $b=-2$, $c=4$

따라서 구하는 함수는 $g(x)=3x^2-2x+4$

157 정답 $f(x)=3x^2-4x+1$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{2}{3}$에서 극한값이 존재하고 (분모) ⟶ 0이므로 (분자) ⟶ 0이어야 한다. 즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=0$이고 $f(x)$가 연속함수이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$$

$f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=(x-1)(ax+b)$ (단, $a\neq0$이고, a, b는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(ax+b)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{ax+b}{x+2}=\frac{a+b}{3}=\frac{2}{3}$$

$\therefore a+b=2$ ······ ㉠

한편,

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)=4$$

이므로 $f'(2)=8$

그런데

$$f'(x)=(x-1)'(ax+b)+(x-1)(ax+b)'$$

$$=(ax+b)+(x-1)\times a$$

$$=2ax-a+b$$

이므로 $f'(2)=4a-a+b=3a+b$

$\therefore 3a+b=8$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore f(x)=(x-1)(3x-1)=3x^2-4x+1$

158 정답 10

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{x-3}=2$에서 극한값이 존재하고 (분모) ⟶ 0이므로 (분자) ⟶ 0이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to3}\{f(x)-1\}=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to3}f(x)=1$

이때, $f(x)$는 다항함수이므로 $x=3$에서 연속이다.

$$\therefore f(3)=\lim_{x\to3}f(x)=1$$

이때, $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=3$이므로

$f'(3)=3$

마찬가지로 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{g(x)-2}{x-3}=4$에서

$g(3)=2$, $g'(3)=4$

한편, $y=f(x)g(x)$에서 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=3$에서의 미분계수는

$$f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=3\times2+1\times4=10$$

159 정답 풀이 참조

$$f'(-x)=\lim_{h\to0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} \quad \leftarrow f(-x)=f(x)$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\times(-1)\right\}$$
$$=f'(x)\times(-1)=-f'(x)$$

160 정답 (1) 1 (2) 2 (3) $f'(x)=3x+2$ 서술형

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy-1$의 양변에 $y=0$을 대입하면

$f(x)=f(x)+f(0)-1$ $\quad\therefore f(0)=1$ … ①

(2) 미분계수의 정의에 의하여

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=2$$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=2$ … ②

(3) $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy-1$의 양변에 $y=h$를 대입하면

$f(x+h)=f(x)+f(h)+3xh-1$

즉, $f(x+h)-f(x)=f(h)+3xh-1$이므로 도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3xh-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+3x$$
$$=3x+2$$

$\therefore f'(x)=3x+2$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	양변에 $y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값 구하기	20%
②	미분계수의 정의를 이용하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$의 값 구하기	30%
③	도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$ 구하기	50%

6. 접선과 미분

유형 pp.96~103

001 정답 (1) $y=-x+1$ (2) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$ (3) $a=4$, $b=4$

(1) $f(x)=x^3+2x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+4x$

이때, 곡선 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-1$

따라서 구하는 직선은 점 $(-1, 2)$를 지나고 기울기가 -1인 직선이므로

$y-2=-\{x-(-1)\}$ $\quad\therefore y=-x+1$

(2) $f(x)=x^2+2x-1$로 놓으면 $f'(x)=2x+2$에서

곡선 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

따라서 구하는 직선은 점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 직선이므로

$y-2=-\frac{1}{4}(x-1)$, 즉 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$

(3) 곡선 $y=x^3-ax+b$가 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=1-a+b$ $\quad\therefore a-b=0$ …… ㉠

한편, $f(x)=x^3-ax+b$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-a$에서

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-a$이므로

$3-a=-1$ $\quad\therefore a=4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=4$

002 정답 (1) $y=-x+5$, $y=-x+1$ (2) $y=3x-4$, $y=3x$

(1) $f(x)=x^3-4x+3$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-4$

이때, 접점의 좌표를 (t, t^3-4t+3)이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-4$이므로

$3t^2-4=-1$, $3t^2-3=0$, $3(t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 6)$, $(1, 0)$이다.

(i) 곡선 위의 점 $(-1, 6)$에서의 접선의 방정식은

$y-6=-(x+1)$ $\quad\therefore y=-x+5$

(ii) 곡선 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+1$

(2) $f(x)=x^3-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

이때, 접점의 좌표를 (t, t^3-2)라고 하면 $f'(t)=3$이므로

$3t^2=3$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=-1$

(i) $t=1$일 때, 접점의 좌표는 $(1,\ -1)$이므로

$$y-(-1)=3(x-1) \qquad \therefore\ y=3x-4$$

(ii) $t=-1$일 때, 접점의 좌표는 $(-1,\ -3)$이므로

$$y-(-3)=3\{x-(-1)\} \qquad \therefore\ y=3x$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=3x-4 \text{ 또는 } y=3x$$

003 정답 $y=-2x+3$ 또는 $y=6x-21$

$f(x)=x^2-4x+4$로 놓으면 $f'(x)=2x-4$

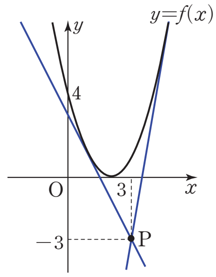
이때, 접점의 좌표를 $(t,\ t^2-4t+4)$라고 하면

$x=t$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2t-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-4t+4)=(2t-4)(x-t)$,

즉 $y=(2t-4)x-t^2+4$



한편, 이 접선이 점 $(3,\ -3)$을 지나므로

$$-3=(2t-4)\times3-t^2+4$$

즉, $t^2-6t+5=0$에서

$(t-1)(t-5)=0$이므로 $t=1$ 또는 $t=5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=-2x+3 \text{ 또는 } y=6x-21$$

004 정답 (1) $a=2,\ b=3,\ c=-1$ (2) $y=-2x-1$

(1) $f(x)=x^3+ax$라고 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$$1+a=3,\ a=2 \qquad \therefore\ f(x)=x^3+2x$$

$g(x)=x^2+bx+c$라고 하면 곡선 $y=g(x)$도 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$$1+b+c=3,\ b+c=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(x)$와 $g'(x)$를 구하면

$$f'(x)=3x^2+2,\ g'(x)=2x+b$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1,\ 3)$에서 공통인 접선을 가지므로 이 점에서의 접선의 기울기가 같다.

즉, $f'(1)=g'(1)$에서

$$5=2+b,\ b=3$$

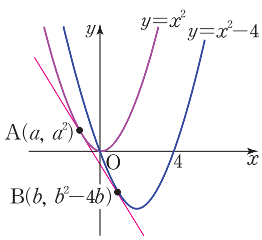
$b=3$을 ㉠에 대입하면 $c=-1$

$$\therefore\ a=2,\ b=3,\ c=-1$$

(2) 곡선 $y=x^2$이 직선과 접하는 점을 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$이라고 하면 $y'=2x$에서 점 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$에서의 접선의 방정식은

$$y-a^2=2a(x-a)$$

$$\therefore\ y=2ax-a^2 \cdots\cdots ㉠$$



또, 곡선 $y=x^2-4x$가 직선과 접하는 점을 $\mathrm{B}(b,\ b^2-4b)$라고 하면 $y'=2x-4$에서 점 $\mathrm{B}(b,\ b^2-4b)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(b^2-4b)=(2b-4)(x-b)$$

$$\therefore\ y=(2b-4)x-b^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$2a=2b-4,\ a^2=b^2$$

이때 $a\neq b$이므로 $a^2=b^2$에서 $b=-a$

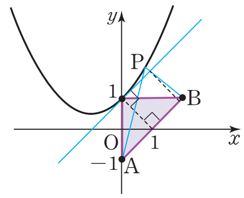
$b=-a$를 $2a=2b-4$에 대입하면 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=-2x-1$$

005 정답 0

오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 길이가 일정하므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리, 즉 삼각형 ABP의 높이가 최소일 때 삼각형 ABP의 넓이도 최소이다.



따라서 삼각형 ABP의 넓이가 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 AB를 평행이동하여 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$과 접할 때의 접점이다. 이때, 점 P에서의 접선의 기울기는 선분 AB의 기울기인 $\frac{1-(-1)}{2-0}=1$과 같으므로

$y'=x+1=1$에서 $x=0$

따라서 구하는 점 P의 x좌표는 0이다.

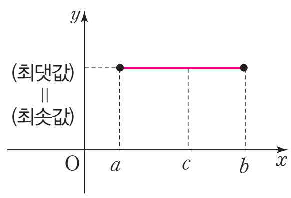
개념 보충

∗ 롤의 정리의 증명 (문제편 p.101)

최대 · 최소 정리에 의하여 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다. 이를 이용하여 롤의 정리를 증명해보자.

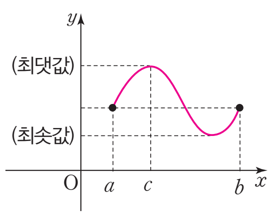
[1] 함수 $f(x)$가 상수함수인 경우

열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 x의 값에 대하여 $f'(x)=0$이므로 열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 c에 대하여 $f'(c)=0$이다.



[2] 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닌 경우

$f(a)=f(b)$이므로 양 끝점 a, b를 제외한 어떤 점 c에서 $f(x)$는 최댓값 또는 최솟값을 가진다.



(ⅰ) $x=c$에서 최댓값 $f(c)$를 가질 때,

$$f(c+h)\le f(c)\ (a<c+h<b)$$

이므로

$$0\le \lim_{h\to 0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h},$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0$$

이다. 이때, $f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하므로 두 극한값이 서로 같아야 한다. 따라서

$$0\le \lim_{h\to 0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0$$

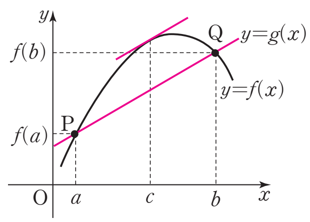
즉 $f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$이다.

(ⅱ) $x=c$에서 최솟값 $f(c)$를 가질 때에도 (ⅰ)과 같은 방법으로 $f'(c)=0$임을 알 수 있다.

개념 보충

*** 평균값 정리의 증명** (문제편 p.101)

롤의 정리를 이용하여 평균값 정리를 증명해보자.



두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이때, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}$$

로 정의하면 함수 $g(x)$는

(ⅰ) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고

(ⅱ) 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며

(ⅲ) $g(a)=g(b)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $g'(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 그러므로

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

이다. 즉,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

를 만족하는 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

006 정답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\sqrt{3}$

(1) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(1)$이므로 $f'(c)=0$인 c가 0과 1 사이에 존재한다.

$f'(x)=3x^2-2x$이므로

$$f'(c)=3c^2-2c=0$$

이때 $0<c<1$이므로 $c=\frac{2}{3}$

(2) 함수 $f(x)=x^3-3x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하다.

$f'(x)=3x^2-3$이고 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{18-0}{3-0}=6$이므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(c)=6\ (0<c<3)$$

인 c가 존재한다.

따라서 $3c^2-3=6$에서 $c=\pm\sqrt{3}$

이때, $0<c<3$이므로 $c=\sqrt{3}$

확인문제

pp.96~103

161 정답 (1) $\boldsymbol{y=3x+6}$ (2) $\boldsymbol{y=-\frac{1}{3}x-4}$

(1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3$으로 놓으면 $f'(x)=x^2+2x$

이때, 곡선 위의 점 $(-3, -3)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(-3)=3$$

따라서 구하는 직선은 점 $(-3, -3)$을 지나고 기울기가 3인 직선이므로

$$y-(-3)=3\{x-(-3)\}\qquad \therefore y=3x+6$$

(2) 곡선 위의 점 $(-3, -3)$에서의 접선의 기울기는 3이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 구하는 직선은 점 $(-3, -3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선이므로

$$y-(-3)=-\frac{1}{3}\{x-(-3)\}\qquad \therefore y=-\frac{1}{3}x-4$$

162 정답 $\boldsymbol{a=2,\ b=-6}$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}$로 놓으면 $f'(x)=x^2$에서 $f'(2)=4$

따라서 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-1=4(x-2)\qquad \therefore y=4x-7\qquad \cdots\cdots ㉠$$

또, $g(x)=x^2+ax+b$로 놓으면 $g'(x)=2x+a$에서
$g'(1)=2+a$이므로 곡선 $y=x^2+ax+b$ 위의 점 $(1, -3)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-3)=(2+a)(x-1)$

$\therefore y=(2+a)x-(5+a)$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같은 직선이므로 $a=2$

한편, 점 $(1, -3)$은 곡선 $y=x^2+ax+b$ 위의 점이므로

$-3=1+a+b$ $\quad\therefore b=-6$

$\therefore a=2,\ b=-6$

다른 풀이

일치하는 접선은 두 점 $(2, 1)$과 $(1, -3)$을 지나므로 그 기울기는 $\dfrac{1-(-3)}{2-1}=4$이다.

$g(x)=x^2+ax+b$로 놓으면 $g'(x)=2x+a$에서
곡선 위의 점 $(1, -3)$에서의 접선의 기울기는 $g'(1)=2+a$이므로

$2+a=4$ $\quad\therefore a=2$

또 점 $(1, -3)$은 곡선 $y=x^2+ax+b$ 위의 점이므로

$-3=1+a+b$ $\quad\therefore b=-6$

$\therefore a=2,\ b=-6$

163 정답 $y=x+2$

$f(x)=x^2-3x+6$으로 놓으면 $f'(x)=2x-3$
접점의 좌표를 $(t,\ t^2-3t+6)$이라 하면 $f'(t)=1$이므로

$2t-3=1$ $\quad\therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 4)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-4=1\times(x-2)$, 즉 $y=x+2$

164 정답 $y=2x$ 또는 $y=2x-4$

$f(x)=x^3-x-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-1$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t-2)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=3t^2-1=2,\ 3t^2-3=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -2)$, $(1, -2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=2\{x-(-1)\}$ 또는 $y-(-2)=2(x-1)$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=2x-4$

165 정답 $y=-x$ 또는 $y=7x$

$f(x)=-x^2+3x-4$로 놓으면 $f'(x)=-2x+3$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+3t-4)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=-2t+3$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-t^2+3t-4)=(-2t+3)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+3)x+t^2-4$ …… ㉠

이 직선이 원점을 지나므로

$t^2-4=0$ $\quad\therefore t=2$ 또는 $t=-2$

따라서 ㉠에 $t=2$, $t=-2$를 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-x$ 또는 $y=7x$

166 정답 $y=-2x+4$ 또는 $y=2x$

$f(x)=-x^2+2x$라고 하면 $f'(x)=-2x+2$
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+2t)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+2t)=(-2t+2)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+2)x+t^2$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=(-2t+2)+t^2,\ t^2-2t=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=0$

따라서 t의 값을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-2x+4$ 또는 $y=2x$

167 정답 $a=10,\ b=6$

$f(x)=x^3+ax$, $g(x)=bx^2+x+4$라 하면 $f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2bx+1$이므로

(i) $f(1)=g(1)$에서

$1+a=b+5$ $\quad\therefore a-b=4$ …… ㉠

(ii) $f'(1)=g'(1)$에서

$3+a=2b+1$ $\quad\therefore a-2b=-2$ …… ㉡

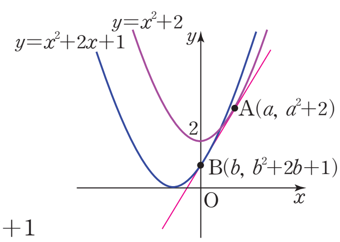
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $b=6$

168 정답 $y=2x+1$

곡선 $y=x^2+2$가 직선과 접하는 점을 $A(a,\ a^2+2)$라고 하면
$y'=2x$이므로 점 $A(a,\ a^2+2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(a^2+2)=2a(x-a)$, 즉 $y=2ax-a^2+2$ …… ㉠

또 곡선 $y=x^2+2x+1$이 직선과 접하는 점을 $B(b,\ b^2+2b+1)$이라고 하면
$y'=2x+2$이므로 점 $B(b,\ b^2+2b+1)$에서의 접선의 방정식은



$y-(b^2+2b+1)$
$=(2b+2)(x-b)$,
즉 $y=(2b+2)x-b^2+1$
…… ㉡

두 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$2a=2b+2,\ -a^2+2=-b^2+1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

$b=0$을 ㉡에 대입하면 구하는 직선의 방정식은 $y=2x+1$

169 정답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

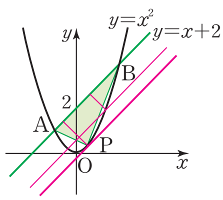
곡선 $y=x^2+x$ 위의 점 중에서 직선 $x+y+4=0$과의 거리가 최소가 되는 점을 P라 하면 점 P는 직선 $x+y+4=0$을 평행이동하여 움직일 때 곡선 $y=x^2+x$과 처음으로 만나는 점, 즉 접점이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 -1이다.

$y'=2x+1=-1$에서 $x=-1$, 즉 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$

따라서 점 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$과 직선 $x+y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1+0+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

170 정답 $\frac{1}{2}$



오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 길이가 일정하므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리(즉, 삼각형 ABP의 높이)가 최대일 때 삼각형 ABP의 넓이도 최대이다.

따라서 삼각형 ABP의 넓이가 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 AB를 평행이동하여 곡선 $y=x^2$과 접할 때의 접점이다.

이때 점 P에서의 접선의 기울기는 직선 $y=x+2$의 기울기와 같으므로

$y'=2x=1$에서 $x=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 점 P의 x좌표는 $\frac{1}{2}$이다.

171 정답 $\frac{4}{3}$

함수 $f(x)=x^3-2x^2+3$은 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)$이므로 $f'(c)=0$인 c가 0과 2 사이에 존재한다.

$f'(x)=3x^2-4x$이므로

$$f'(c)=3c^2-4c=0$$

이때, $0<c<2$이므로 $c=\frac{4}{3}$

172 정답 2

함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하다.

$f'(x)=3x^2-6x+2$이고 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{6-0}{3-0}=2$이므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(c)=2\ (0<c<3)$$

인 c가 존재한다. 즉,

$$3c^2-6c+2=2,\ 3c(c-2)=0$$

$$\therefore c=0 \text{ 또는 } c=2$$

이때, $0<c<3$이므로 $c=2$

연습문제 I pp.104~106

173 정답 (1) $y=9x-7$ (2) $y=-5x$

(1) $f(x)=x^3+3x^2-2$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+6x$$

이므로 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=3\times1^2+6\times1=9$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-2=9(x-1) \qquad \therefore y=9x-7$$

(2) $f(x)=2x^2-x+2$로 놓으면

$$f'(x)=4x-1$$

이므로 점 $(-1,\ 5)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=4\times(-1)-1=-5$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-5=-5\{x-(-1)\} \qquad \therefore y=-5x$$

174 정답 $y=x-1$

$f(x)=x^3-2x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4x$

이때, 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이므로 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지나고 점 A에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 1이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y-0=1\times(x-1),\ \text{즉 } y=x-1$$

175 정답 7

$f(x)=x^3+x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+1$

이때, 점 $(-1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=4$이므로 접선의 방정식은

$$y-(-1)=4\{x-(-1)\},\ \text{즉 } y=4x+3$$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로 $a=7$

176 정답 2

점 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$으로 놓으면 $y'=3x^2$이므로 점 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$에서의 접선의 기울기는 $3a^2$이고 접선의 방정식은

$$y-a^3=3a^2(x-a)$$

$$y=3a^2x-2a^3$$

이 직선의 x축과의 교점의 x좌표는

$3a^2x-2a^3=0$에서 $x=\frac{2}{3}a\ (\because a\neq0)$이고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 P′라 하면

$$\overline{\mathrm{QR}}:\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}:\overline{\mathrm{QP'}}=\frac{2}{3}a:\left(a-\frac{2}{3}a\right)$$

즉, $\overline{\mathrm{QR}}:\overline{\mathrm{PQ}}=2:1$

$$\therefore \frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=2$$

177 정답 **(1) $x=0$ 또는 $x=1$ (2) 3**

(1) $y=x^3-ax^2+ax+1=a(-x^2+x)+x^3+1$에서

$a(-x^2+x)+(x^3+1-y)=0$

이므로 주어진 곡선은 a의 값에 관계없이 $-x^2+x=0$, $x^3+1-y=0$인 점을 지난다.

$-x^2+x=0$에서 $-x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

(2) $f(x)=x^3-ax^2+ax+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-2ax+a$

$x=0$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=a$

$x=1$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-2a+a=3-a$

두 직선이 서로 수직이므로

$a(3-a)=-1$, 즉 $a^2-3a-1=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a의 값들의 합은 3이다.

178 정답 **(1) $y=4x-1$**
(2) $y=4x+4$ 또는 $y=4x$

(1) $f(x)=x^2+2x$로 놓으면 $f'(x)=2x+2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2t)$라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=2t+2=4$에서 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 3)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=4(x-1)$ $\quad\therefore y=4x-1$

(2) $f(x)=x^3+x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+t+2)$라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=3t^2+1=4$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 또는 $(1,\ 4)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=4\{x-(-1)\}$ 또는 $y-4=4(x-1)$

$\therefore y=4x+4$ 또는 $y=4x$

179 정답 **5**

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(x)=3x^2+2ax$에서 $f'(1)=3+2a=-1$

$2a=-4$ $\quad\therefore a=-2$

점 $(1,\ 0)$이 곡선 $f(x)=x^3+ax^2+b$ 위의 점이므로

$1+a+b=0$ $\quad\therefore a+b=-1$

$a=-2$를 대입하면 $(-2)+b=-1$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore a^2+b^2=5$

180 정답 **(1) $y=2x-1$ 또는 $y=-6x+23$**
(2) $y=7x$

(1) $f(x)=-x^2+4x-2$로 놓으면

$f'(x)=-2x+4$

접점의 x좌표를 a라고 하면

$f'(a)=-2a+4$

또, $f(a)=-a^2+4a-2$이므로 $x=a$인 점에서의 접선의 방정식은

$y-(-a^2+4a-2)=(-2a+4)(x-a)$

$\therefore y=(-2a+4)x+a^2-2$

한편, 이 접선이 점 $\mathrm{P}(3,\ 5)$를 지나므로

$5=(-2a+4)\cdot 3+a^2-2$

$a^2-6a+5=0$

$(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2x-1$ 또는 $y=-6x+23$

(2) $f(x)=x^3-2x^2-4$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4x$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a^2-4)$라고 하면

$f'(a)=3a^2-4a$이므로 $x=a$인 점에서의 접선의 방정식은

$y-(a^3-2a^2-4)=(3a^2-4a)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2-4a)x-2a^3+2a^2-4$

한편, 이 접선이 점 $\mathrm{P}(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-2a^3+2a^2-4$

$(a+1)(a^2-2a+2)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because$ a는 실수)

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=7x$

181 정답 **$2\sqrt{5}$**

$f(x)=x^2+2x+3$이라고 하면

$f'(x)=2x+2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2t+3)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2t+3)=(2t+2)(x-t)$

$\therefore y=(2t+2)x-t^2+3$

이 접선이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=-t^2+3$, $t^2-1=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=-1$

따라서 두 접점의 좌표는 각각 $(1,\ 6)$, $(-1,\ 2)$이고, 두 접점을 이은 선분의 길이는

$\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(6-2)^2}=2\sqrt{5}$

182 정답 (1) $a=1$, $b=0$, $c=-2$

(2) $y=3x-4$

(1) $f(x)=x^2+ax-3$이라고 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, -1)$을 지나므로

$$-1=1+a-3 \qquad \therefore a=1$$

$g(x)=x^3+bx+c$라고 하면 곡선 $y=g(x)$가 점 $(1, -1)$을 지나므로

$$-1=1+b+c \qquad \therefore b+c=-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(x)$와 $g'(x)$를 구하면

$$f'(x)=2x+1,\ g'(x)=3x^2+b$$

점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기가 같아야 하므로

$$f'(1)=g'(1)$$

$$3=3+b \qquad \therefore b=0$$

$b=0$을 ㉠에 대입하면 $c=-2$

(2) $f'(1)=g'(1)=3$이므로 공통인 접선의 기울기는 3이다. 따서 점 $(1, -1)$을 지나는 접선의 방정식은

$$y+1=3(x-1) \qquad \therefore y=3x-4$$

183 정답 2

두 곡선 $y=x^2$, $y=2x^3-2x^2+1$이 점 (p, q)를 지나므로

$$p^2=2p^3-2p^2+1$$

$$2p^3-3p^2+1=0,\ (2p+1)(p-1)^2=0$$

$$\therefore p=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } p=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 점 (p, q)에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$2p=6p^2-4p,\ 6p^2-6p=0$$

$$6p(p-1)=0 \qquad \therefore p=0 \text{ 또는 } p=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

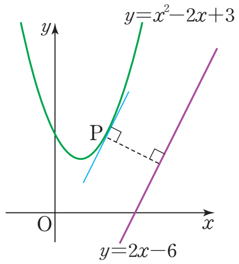
㉠, ㉡을 동시에 만족해야 하므로 $p=1$

점 (p, q)는 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로 $q=1$

$$\therefore p+q=2$$

184 정답 $\sqrt{5}$

곡선 $y=x^2-2x+3$ 위의 점 중에서 직선 $y=2x-6$과의 거리가 최소가 되는 점을 P라 하면 점 P는 직선 $y=2x-6$을 평행이동하여 움직일 때 곡선 $y=x^2-2x+3$과 처음으로 만나는 점, 즉 접점이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 2이다.



$y'=2x-2=2$에서 $x=2$, 즉 P$(2, 3)$

따라서 점 P$(2, 3)$과 직선 $2x-y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times2-3-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

185 정답 $\frac{3}{4}$

삼각형 ABP의 넓이가 최소가 되는 것은 점 P에서 곡선의 접선이 직선 AB와 평행할 때이다.

점 P의 x좌표를 a라고 하면 $y=-x^2+2x$에서 $y'=-2x+2$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $-2a+2$이다.

이때, 직선 AB의 기울기는 $\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$이므로

$$-2a+2=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$$

186 정답 $y=2x-1$

$x \to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x\to1} f(x)=1$$

이때, $f(x)$는 연속함수이므로 $f(1)=1$

또, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=2$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이므로 $f'(1)=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(1)=f'(1)(x-1),\ \text{즉 } y-1=2(x-1)$$

$$\therefore y=2x-1$$

187 정답 5

함수 $f(x)=x^2-6x+1$은 실수 전체에서 연속이고 미분가능하므로 닫힌구간 $[1, a]$에서 평균값 정리를 적용할 수 있다.

평균값 정리를 만족하는 상수 c의 값이 3이므로

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{a^2-6a+5}{a-1}=f'(3)$$

$f'(x)=2x-6$에서 $f'(3)=0$

$$a^2-6a+5=0,\ (a-1)(a-5)=0$$

이때, $a>1$이므로 $a=5$

188 정답 $y=9x-15$

$f(x)=x^3-3x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-3$이므로 점 $(-1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=0$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-3=0\times\{x-(-1)\}, \text{ 즉 } y=3$$

곡선 $y=x^3-3x+1$과 직선 $y=3$의 교점은

$x^3-3x+1=3$ 즉, $x^3-3x-2=0$에서

$$(x+1)^2(x-2)=0 \qquad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 점 P의 좌표는 $(2, 3)$이고, $f'(2)=9$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y-3=9(x-2) \qquad \therefore y=9x-15$$

189 정답 -1

$f(x)=x^2$이라고 하면 $f'(x)=2x$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$

따라서 접선의 방정식은

$$y-1=2(x-1) \qquad \therefore y=2x-1 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$g(x)=x^3+ax-3$이라고 하면

$$g'(x)=3x^2+a$$

곡선 $y=g(x)$와 접선 ㉠의 접점의 좌표를 (t, t^3+at-3)이라고 하면 접선의 기울기가 2이므로

$$g'(t)=3t^2+a=2 \qquad \therefore a=-3t^2+2 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

점 (t, t^3+at-3)은 직선 ㉠ 위의 점이므로

$$t^3+at-3=2t-1$$

위의 식에 ㉡을 대입하면

$$t^3+(-3t^2+2)t-3=2t-1$$

$$2t^3+2=0,\ 2(t+1)(t^2-t+1)=0$$

$$\therefore t=-1$$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면 $a=-1$

190 정답 1

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=-1$이 성립하므로

$$f(2)=1,\ f'(2)=-1$$

한편, $g(x)=x^2-x$에서 $g'(x)=2x-1$이므로

$$g(2)=2,\ g'(2)=3$$

이때, $y=f(x)g(x)$에서 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 점 중 x좌표가 2인 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=(-1)\times2+1\times3=1$$

또, $f(2)g(2)=2$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-2=1\times(x-2), \text{ 즉 } y=x$$

따라서 $a=1$, $b=0$이므로 $a+b=1$

191 정답 $-1<k<3$

함수 $f(x)=x^2+x$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고, 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하므로 닫힌구간 $[-1, 1]$에 속하는 임의의 구간 $[a, b]$에 대하여 평균값 정리를 적용할 수 있다.

즉, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\,(-1<c<1)$인 c가 존재한다.

$f'(x)=2x+1$에서 $f'(c)=2c+1$이고 $-1<c<1$이므로

$$-1<f'(c)<3$$

$$\therefore -1<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k<3$$

192 정답 1 .... 서술형

점 $(1, 0)$에서 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2+k$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{4}a^2+k\right)$라고 하면 $y'=\frac{1}{2}x$이므로 곡선 위의 점 $\left(a, \frac{1}{4}a^2+k\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\left(\frac{1}{4}a^2+k\right)=\frac{1}{2}a(x-a) \qquad \cdots ①$$

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$$0-\left(\frac{1}{4}a^2+k\right)=\frac{1}{2}a(1-a)$$

$$\therefore a^2+4k=-2a(1-a)=-2a+2a^2$$

$$\therefore a^2-2a-4k=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠} \qquad \cdots ②$$

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라고 하면 두 접점의 x좌표가 각각 α, β이므로 두 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$이고, 두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{1}{2}\alpha\times\frac{1}{2}\beta=-1, \text{ 즉, } \alpha\beta=-4 \qquad \cdots ③$$

한편, 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=-4k$$

이므로 $4k=4 \qquad \therefore k=1 \qquad \cdots ④$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	접점의 x좌표를 a라 하고, 접선의 방정식 구하기	30%
②	접선이 점 $(1, 0)$을 지남을 이용하기	30%
③	두 직선이 수직일 조건 이용하기	20%
④	k의 값 구하기	20%

7. 함수의 증가와 감소

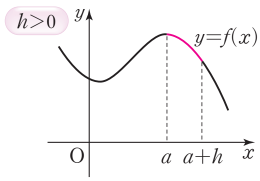
개념 보충

* **극값에서의 미분계수** (문제편 p.112)

함수 $f(x)$가 실수 a를 포함하는 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$임을 알아보자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지면 충분히 작은 $|h|$에 대하여

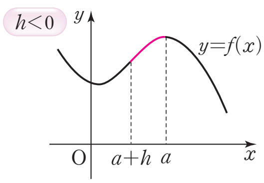
$f(a+h)\le f(a)$이므로



$h>0$이면

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0$$

$h<0$이면



$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ge 0$$

이다.

이때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$$0\le \lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0$$

이다.

즉, $f'(a)=0$이다.

마찬가지 방법으로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 가지는 경우에도 $f'(a)=0$임을 알 수 있다.

유형 pp.114~118

001

정답 (1) **구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$에서 증가, 구간 $[0, 2]$에서 감소**
(2) **구간 $(-\infty, 1]$에서 증가, 구간 $[1, \infty)$에서 감소**

(1) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[0, 2]$에서 감소한다.

(2) $f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	6	↗	7	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1]$에서 증가하고, 구간 $[1, \infty)$에서 감소한다.

002

정답 (1) $\mathbf{0\le a\le 3}$ (2) $\mathbf{-1\le a\le 6}$

(1) 함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=3x^2-2ax+a\ge 0$

이어야 한다. 즉, $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$, $a(a-3)\le 0$

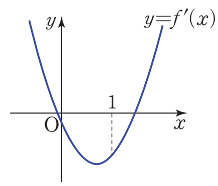
$\therefore 0\le a\le 3$

(2) $f(x)=x^3-2ax^2+(a-6)x$에서

$f'(x)=3x^2-4ax+a-6$

함수 $f(x)$가 구간 $[0, 1]$에서 감소하려면 구간 $[0, 1]$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

오른쪽 그래프에서 $f'(0)\le 0$이고 $f'(1)\le 0$이어야 한다.



(i) $f'(0)\le 0$에서

$a-6\le 0$, 즉 $a\le 6$

(ii) $f'(1)\le 0$에서

$-3a-3\le 0$, 즉 $a\ge -1$

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는 $-1\le a\le 6$

003

정답 (1) **극댓값: 12, 극솟값: -20**
(2) **극값을 갖지 않는다.**
(3) **극댓값: 13, 극솟값: -19, 8**

(1) $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$을 만족하는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

이때 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12	↘	-20	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=12$,

$x=3$에서 극소이고 극솟값은 $f(3)=-20$

(2) $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$

이때, $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗

즉, $f'(x)$의 부호가 바뀌는 점이 없으므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(3) $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

이때, $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	8	↗	13	↘	-19	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-1$에서 극소이고 극솟값은 $f(-1)=8$,

$x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=13$,

$x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=-19$

004 정답 (1) $a=-3$, $b=0$, $c=4$

(2) $a=6$, $b=-9$, 극솟값 -2

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=b=0$, $f'(2)=12+4a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=0$

또, $x=0$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(0)=c=4$

(2) $f(x)=-x^3+ax^2+bx+2$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값 2를 가지므로

$f'(3)=0$이고 $f(3)=2$이다.

$f'(3)=-27+6a+b=0$ $\quad\therefore 6a+b=27$ …… ㉠

$f(3)=-27+9a+3b+2=2$ $\quad\therefore 3a+b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=-9$

즉, $f(x)=-x^3+6x^2-9x+2$이고

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)=0$에서

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가진다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘

따라서 극솟값은 $f(1)=-2$

005 정답 5

$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=-2x^2+2ax+b$

이때, $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 3이므로 $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$에서

$f'(x)=-2(x+1)(x-3)=-2x^2+4x+6$

$\therefore a=2$, $b=6$

즉, $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x+c$이고, $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$의 극댓값이 15이므로

$f(3)=-18+18+18+c=15$에서 $c=-3$

$\therefore a+b+c=2+6+(-3)=5$

확인문제

pp.114~118

193 정답 (1) 구간 $(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$에서 증가, 구간 $[-1, 3]$에서 감소

(2) 구간 $[0, \infty)$에서 증가, 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소

(1) $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$에서 증가, 구간 $[-1, 3]$에서 감소한다.

(2) $f'(x)=4x^3-12x^2+12x=4x(x^2-3x+3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소한다.

194 정답 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소

$f'(x)=-3x^2-12x-12=-3(x+2)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↘

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -2]$, $[-2,\ \infty)$에서 감소한다.
즉, $x=-2$의 좌우에서 감소하므로 이 함수는 실수 전체의 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소한다.

195 정답 $-1\le a\le 0$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f'(x)=-x^2+2ax+a$에서 방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=a^2+a\le 0,\ a(a+1)\le 0$$

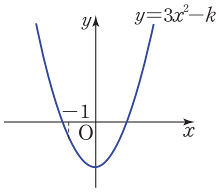
$$\therefore\ -1\le a\le 0$$

196 정답 3

$f(x)=x^3-kx-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-k$

함수 $f(x)$가 구간 $[-1,\ 0]$에서 감소하면 $-1\le x\le 0$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

오른쪽 그래프에서 $f'(-1)\le 0$이고 $f'(0)\le 0$이어야 한다.



(i) $f'(-1)\le 0$에서

$3-k\le 0$, 즉 $k\ge 3$

(ii) $f'(0)\le 0$에서

$-k\le 0$, 즉 $k\ge 0$

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는 $k\ge 3$

따라서 k의 최솟값은 3이다.

197 정답 (1) 극솟값: -2
(2) 극댓값: 3, 극솟값: -1
(3) 극댓값: 없다, 극솟값: -22

(1) $f'(x)=2x+4$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 극소이고, 극솟값은 -2이다.

(2) $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	3	↘

따라서 함수 $f(x)$는

$x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-1$,

$x=2$에서 극대이고 극댓값은 $f(2)=3$

(3) $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	5	↘	-22	↗

따라서 함수 $f(x)$는 극댓값은 존재하지 않고, $x=3$에서 극소이고 극솟값은 $f(3)=-22$이다.

198 정답 (1) 극댓값: 5
(2) 극댓값: 9, 극솟값: 1
(3) 극댓값: 3, 극솟값: 2

(1) $f'(x)=-6x+6$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	5	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극대이고, 극댓값은 $f(1)=5$이다.

(2) $f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)=6(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	9	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=9$

$x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=1$

(3) $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-1$에서 극소이고 극솟값은 $f(-1)=2$,

$x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=3$,

$x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=2$

199 정답 $a=0$, $b=-3$, $c=6$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$가 $x=1$, $x=-1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=3+2a+b=0$, $f'(-1)=3-2a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$

또, $f(-1)=-1+3+c=8$이므로 $c=6$

200 정답 28

$f(x)=x^3+ax^2-9x+b$에서 $f'(x)=3x^2+2ax-9$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -4를 가지므로

$f'(1)=3+2a-9=0$, $f(1)=1+a-9+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

즉, $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$이고

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)=0$에서

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 가진다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28	↘	-4	↗

따라서 극댓값은 $f(-1)=28$

201 정답 7

도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	(없다)	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지고, $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f(1)=8$, $f(2)=1$

$\therefore f(1)-f(2)=8-1=7$

202 정답 12

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 1이므로

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

이때, $f'(-2)=0$, $f'(1)=0$이므로

$f'(x)=6(x+2)(x-1)=6x^2+6x-12$

에서 $a=3$, $b=-12$

또, 함수 $f(x)$의 극솟값이 -15이므로

$f(1)=2+3-12+c=-15$ $\quad\therefore c=-8$

따라서 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-8$이므로 극댓값은

$f(-2)=-16+12+24-8=12$

연습문제 I

pp.119~121

203 정답 (1) 구간 $[-4,\ 2]$에서 증가, 구간 $(-\infty,\ -4]$, $[2,\ \infty)$에서 감소

(2) 구간 $(-\infty,\ -1]$, $\left[\frac{1}{3},\ \infty\right)$에서 증가, 구간 $\left[-1,\ \frac{1}{3}\right]$에서 감소

(1) $f'(x)=-3x^2-6x+24=-3(x+4)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-4,\ 2]$에서 증가하고 구간 $(-\infty,\ -4]$, $[2,\ \infty)$에서 감소한다.

(2) $f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)=x^3+x^2-x+1$은 구간 $(-\infty,\ -1]$, $\left[\frac{1}{3},\ \infty\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[-1,\ \frac{1}{3}\right]$에서 감소한다.

204 정답 (1) $[1, \infty)$ (2) $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$

(1) $f'(x)=4x-4=4(x-1)=0$에서 $x=1$

이때, $f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다.

(2) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

이때, $f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$에서 증가한다.

205 정답 $0<x<200$

(판매 총액)$=$(가격)$\times$(판매량)이므로 판매 총액을 $P(x)$로 놓으면

$$P(x)=x(-10x^2+3000x)=-10x^3+3000x^2$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$P'(x)=-30x^2+6000x=-30x(x-200)$$

한편, $P'(x)>0$일 때, 가격이 증가함에 따라 판매 총액이 증가하므로 구하는 x의 값의 범위는

$$0<x<200$$

206 정답 $0\le a\le 6$

함수 $f(x)=2x^3-ax^2+ax+5$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=6x^2-2ax+a\ge 0$이어야 한다. 이차방정식 $6x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\le 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=a^2-6a\le 0,\ a(a-6)\le 0$$

$$\therefore 0\le a\le 6$$

207 정답 $0\le k\le 3$

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 감소한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-3x^2+2kx-k\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=-3x^2+2kx-k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-3k=k(k-3)\le 0 \qquad \therefore 0\le k\le 3$$

208 정답 (1) 극댓값: 6 (2) 극댓값: 3, 극솟값: -1

(1) $f'(x)=6-3x=0$에서 $x=2$

이때, $f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	6	↘

따라서 함수 $f(x)$는

$x=2$에서 극대이고 극댓값은 $f(2)=6$

(2) $f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$

이때, $f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	3	↘

따라서 함수 $f(x)$는

$x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-1$

$x=3$에서 극대이고 극댓값은 $f(3)=3$

209 정답 (1) 극댓값: $\frac{14}{3}$, 극솟값: -6

(2) 극댓값: 17, 극솟값: -15, 12

(1) $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{14}{3}$	↘	-6	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=\frac{14}{3}$,

$x=3$에서 극소이고 극솟값은 $f(3)=-6$

(2) $f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

$=12(x+1)(x-1)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-15	↗	17	↘	12	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=17$,

$x=-1$에서 극소이고 극솟값은 $f(-1)=-15$,

$x=2$에서 극소이고 극솟값은 $f(2)=12$

210 정답 27

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	21	$\searrow$	-6	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-2$에서 극대이고 극댓값은 $f(-2)=21$,

$x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-6$

이므로 극댓값과 극솟값의 차는 $21-(-6)=27$

211 정답 -2

$f(x)=x^3-6x^2+9x+k$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 극값을 가진다.

이때, 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로 $f(1)+f(3)=0$

즉, $(1-6+9+k)+(27-54+27+k)=0$이므로

$2k+4=0 \qquad \therefore k=-2$

212 정답 8

$f(x)=x^3+ax^2+bx+6$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 4를 가지므로

$f'(1)=3+2a+b=0$, $f(1)=1+a+b+6=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$

즉, $f(x)=x^3-3x+6$이고

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)=0$에서

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가진다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$	4	$\nearrow$

따라서 극댓값은 $f(-1)=8$

213 정답 $f(x)=5x^3+6x^2-3x+1$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$(단, $a\neq0$, a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

곡선 $y=f(x)$는 점 $(0,\ 1)$을 지나고 그 점에서의 접선의 기울기가 -3이므로

$f(0)=1$, $f'(0)=-3 \qquad \therefore d=1$, $c=-3$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 5를 가지므로

$f'(-1)=0$, $f(-1)=5$

$f'(-1)=3a-2b-3=0$에서 $3a-2b=3$ …… ㉠

$f(-1)=-a+b+3+1=5$에서 $a-b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=6$

$\therefore f(x)=5x^3+6x^2-3x+1$

214 정답 4

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+3ax+2$에서 $f'(x)=x^2+2ax+3a$

이때, 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=x^2+2ax+3a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a=a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

215 정답 $0\leq k\leq 12$

$f(x)=x^3+kx^2+4kx+2$에서 $f'(x)=3x^2+2kx+4k$

이때, 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$은 실근을 갖지 않거나 중근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-12k=k(k-12)\leq0 \qquad \therefore 0\leq k\leq12$

216 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	(없다)	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

ㄱ. 함수 $f(x)$가 극대가 되는 x의 값은 -1, 2이다.(참)

ㄴ. $f'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.(참)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 극소가 되는 x의 값은 -2, 0, 4의 3개이다.(참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

217 정답 3

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$에서 $x=0$, 3, 6

주어진 그림에서 $h'(x)$의 부호를 조사하여 $h(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	6	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	(없다)	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$는 $x=3$에서 극대이다.

218 정답 6

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 실수 전체에서 증가하거나 감소하여야 한다.

즉, 실수 전체에서 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

즉, $f'(x)=3x^2-2ax+2a$에서 이차방정식 $f'(x)=0$은 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3\times 2a\le 0,\ a(a-6)\le 0$$

$$\therefore 0\le a\le 6$$

따라서 a의 최댓값은 6이다.

219 정답 ㄴ, ㄷ

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$$h(0)=0,\ h'(x)>0$$

$x<0$이면 $h(x)<0$이고, $x>0$이면 $h(x)>0$이므로

ㄱ. $h(-1)=f(-1)-g(-1)<0$

$\therefore f(-1)<g(-1)$ (거짓)

ㄴ. $h(1)=f(1)-g(1)>0$

$\therefore f(1)<g(1)$ (참)

ㄷ. $h(2)=f(2)-g(2)>0$

$\therefore f(2)<g(2)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

220 정답 4

$f(0)=f(2)=f(4)=k$ (단, k는 상수)로 놓으면 삼차방정식 $f(x)=k$, 즉 $f(x)-k=0$은 세 실근 0, 2, 4를 가지므로

$$f(x)-k=mx(x-2)(x-4)\ (\text{단, } m\text{은 0이 아닌 상수})$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=m\{(x-2)(x-4)+x(x-4)+x(x-2)\}\\&=m(3x^2-12x+8)\end{aligned}$$

이때, 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대이고, $x=\beta$에서 극소이므로 방정식 $f'(x)=0$의 근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$

221 정답 3

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

이때, 삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이고 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이므로 이차방정식 $f'(x)=6x^2+2ax+b=0$의 두 근은 α, $\beta(\alpha<\beta)$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{a}{3},\ \alpha\beta=\frac{b}{6} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=(2\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)-(2\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)\\&=2(\alpha^3-\beta^3)+a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)\\&=(\alpha-\beta)\{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+b\}\\&=(\alpha-\beta)\{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}\quad(\because ㉠)\\&=(\alpha-\beta)(-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2)\\&=-(\alpha-\beta)^3=(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

한편, $f(\alpha)-f(\beta)=27$이므로 $(\beta-\alpha)^3=27$

$$\therefore \beta-\alpha=3$$

개념 보충

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 $x=\alpha$, $x=\beta\ (\alpha<\beta)$에서 극값을 가지면

$$(\text{극댓값과 극솟값의 차})=\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3$$

222 정답 15 서술형

$y=f(x)$의 그래프가 x좌표가 $a(a\ne 0)$인 점에서 x축과 접한다고 하면, $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고 극댓값은 0이다.

$$\therefore f(a)=0,\ f'(a)=0 \quad \cdots ①$$

즉, $f(x)$는 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지므로

$$f(x)=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x \quad \cdots ②$$

이때, $f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(x-a)(3x-a)=0$에서

$$x=a \text{ 또는 } x=\frac{a}{3}$$

이므로 $f(x)$는 $x=\frac{a}{3}$에서 극솟값 -4를 가진다.

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{4}{27}a^3=-4 \qquad \therefore a=-3$$

따라서 $f(x)=x^3+6x^2+9x$이므로 $a=6$, $b=9$

$$\therefore a+b=15 \quad \cdots ③$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$f(x)$의 극값 알아보기	30%
②	$f(x)$의 인수 찾기	30%
③	$a+b$의 값 구하기	40%

8. 함수의 그래프와 최대, 최소

유형 .... pp.127~134

001 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 풀이 참조

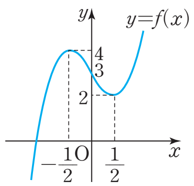
(1) $f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	2	↗

증감표를 이용하여 함수 $f(x)$의 개형을 그리면 다음과 같다.



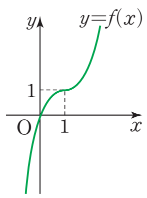
(2) $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗

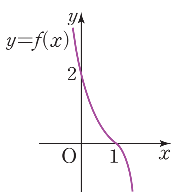
$f(1)=1$이고 함수 $f(x)$는 계속 증가하므로 그래프의 개형은 다음과 같다.



(3) $f'(x)=-3x^2+6x-4=-3(x-1)^2-1<0$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이므로 $f'(x)$는 모든 구간에서 감소하고 극값을 갖지 않는다.

또, $f(0)=2$, $f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



002 정답 (1) 극댓값: 20, 극솟값: 15, -12, 그래프는 풀이 참조
(2) 극댓값: 없다, 극솟값: -24, 그래프는 풀이 참조
(3) 극댓값: 없다, 극솟값: 2, 그래프는 풀이 참조

(1) $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$이므로

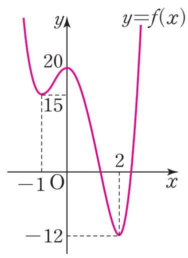
$f'(x)=0$에서

$x=-1$, $x=0$, $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	15	↗	20	↘	-12	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 15, $x=0$에서 극댓값 20, $x=2$에서 극솟값 -12를 갖고, 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(2) $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$이므로

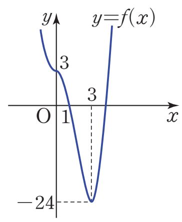
$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	3	↘	-24	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 -24를 갖고, $f(0)=3$, $f(1)=0$이므로 그래프의 개형은 다음과 같다.



(3) $f'(x)=4x^3+4x=4x(x^2+1)$이므로

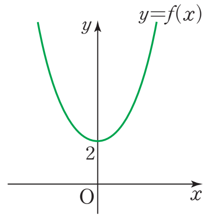
$f'(x)=0$에서

$x=0$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 2를 갖고, 그래프의 개형은 다음과 같다.

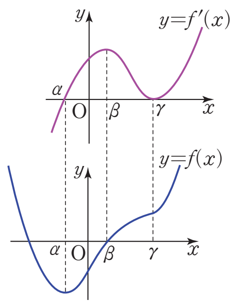


003 정답 ⑤

도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	↗	↗		↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



004 정답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -4

(2) 최댓값: 3, 최솟값: -2

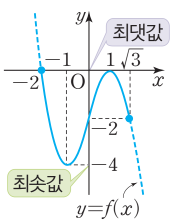
(3) 최댓값: 12, 최솟값: 0

(1) $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[-2, \sqrt{3}]$에서 $f(x)$의 증감표를 이용하여 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	↘	-4	↗	0	↘	-2



따라서 함수 $f(x)$는

$x=-2$ 또는 $x=1$에서 최댓값 0,

$x=-1$에서 최솟값 -4

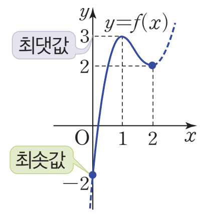
(2) $f'(x)=6x^2-18x+12$

$=6(x-1)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

구간 $[0, 2]$에서 $f(x)$의 증감표를 이용하여 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-2	↗	3	↘	2



따라서 함수 $f(x)$는

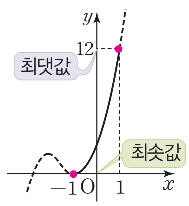
$x=1$에서 최댓값 3, $x=0$에서 최솟값 -2

(3) $f'(x)=3x^2+8x+5=(x+1)(3x+5)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=-\frac{5}{3}$

구간 $[-1, 1]$에서 $f(x)$의 증감표를 이용하여 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	↗	12



따라서 함수 $f(x)$는

$x=1$에서 최댓값 12, $x=-1$에서 최솟값 0

005 정답 (1) 2 (2) 21

(1) $f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$5+k$	↘	k	↗	$1+k$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $5+k$, $x=0$에서 최솟값 k를 갖는다. 이때, 최댓값과 최솟값의 합이 9이므로

$(5+k)+k=9$ $\quad\therefore k=2$

(2) $f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

구간 $[-1,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$5a+b$	↘	b	↘	$-27a+b$	↗	b

$a>0$이므로 $f(x)$의 최댓값은 $5a+b$, 최솟값은 $-27a+b$이다.

즉, $5a+b=25$, $-27a+b=-7$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=20$

$\therefore\ a+b=21$

006 정답 (1) $S(x)=2x(3-x^2)$ $(0<x<\sqrt{3})$ (2) 4

(1) 점 R의 좌표가 $(x,\ 0)$이면 $S(x,\ 3-x^2)$이므로

$\overline{QR}=2\overline{OR}=2x$, $\overline{RS}=3-x^2$

따라서 직사각형 PQRS의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=2x(3-x^2)$ $(0<x<\sqrt{3})$

(2) $S(x)=2x(3-x^2)$ $(0<x<\sqrt{3})$이므로

$S'(x)=6-6x^2=-6(x^2-1)$

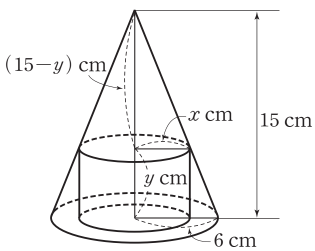
$S'(x)=0$에서 $x=\pm 1$

이때, $0<x<\sqrt{3}$에서 $S'(x)$의 부호의 변화를 조사하여 $S(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$(\sqrt{3})$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	4	↘	

따라서 직사각형 PQRS의 넓이의 최댓값은 4이다.

007 정답 $80\pi\ \text{cm}^3$



내접하는 직원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x cm, 높이를 y cm라 하면 삼각형의 닮음에 의해

$15:6=(15-y):x$ 이므로

$5x+2y=30$

$\therefore\ y=15-\frac{5}{2}x$ $(0<x<6)$

직원기둥의 부피를 $V\ \text{cm}^3$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2\left(15-\frac{5}{2}x\right)=\pi\left(-\frac{5}{2}x^3+15x^2\right)$

$V'(x)=-\frac{15}{2}\pi x(x-4)$이므로 $V'(x)=0$에서 $x=4$

$0<x<6$에서 $V(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(6)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	80π	↘	

따라서 내접하는 직원기둥의 부피의 최대값은 $80\pi\ \text{cm}^3$이다.

확인문제

pp.127~134

223 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

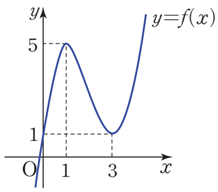
(1) $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

한편, $f(0)=1$이므로 증감표를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



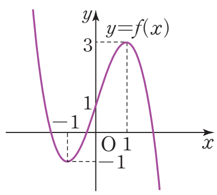
(2) $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	3	↘

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -1을 가지고, $x=1$에서 극댓값 3을 가지므로 그 그래프의 개형은 다음과 같다.



224 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

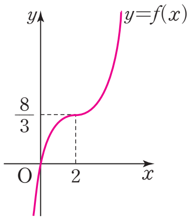
(1) $f'(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=2$

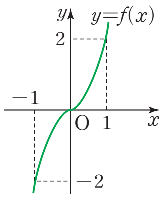
함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{8}{3}$	↗

함수 $f(x)$는 계속 증가하므로 극값을 갖지 않는다.
또, $f(0)=0$이므로 그래프의 개형은 다음과 같다.



(2) $f'(x)=3x^2+1$
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 모든 구간에서 증가하고 극값을 갖지 않는다.
또, $f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

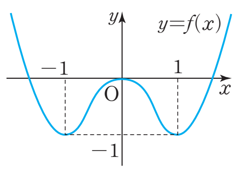


225 정답 (1) **극댓값: 0, 극솟값: -1, 그래프는 풀이 참조**
(2) **극댓값: 없다, 극솟값: $\frac{25}{12}$, 그래프는 풀이 참조**

(1) $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

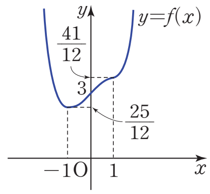
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 극솟값 -1, $x=0$에서 극댓값 0을 갖고, 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(2) $f'(x)=x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{25}{12}$	↗	$\frac{41}{12}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $\frac{25}{12}$를 갖고, 극댓값은 존재하지 않는다.
또, $f(0)=3$이므로 그래프의 개형은 다음과 같다.

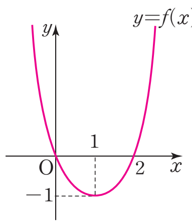


226 정답 **극댓값: 없다, 극솟값: -1, 그래프는 풀이 참조**

$f'(x)=4x^3-12x^2+12x-4=4(x-1)^3$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=1$
함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -1을 가지고, 극댓값은 존재하지 않는다. 또, $f(0)=0$, $f(2)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

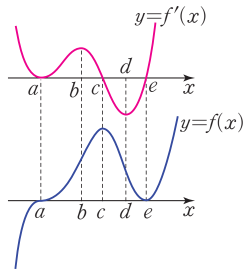


227 정답 **풀이 참조**

도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	c	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗	극대	↘	0 (극소)	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

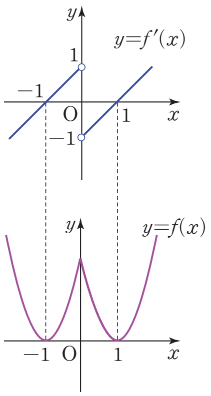


228 정답 풀이 참조

도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0 (극소)	$\nearrow$	극대	$\searrow$	0 (극소)	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



229 정답 13

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	6	$\nearrow$	13	$\searrow$	8

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 13을 갖는다.

230 정답 (1) 최댓값: 21, 최솟값: 1

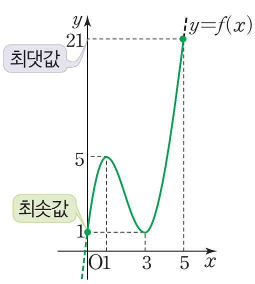
(2) 최댓값: 9, 최솟값: 1

(1) $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

구간 $[0, 5]$에서 $f(x)$의 증감표를 이용하여 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	21



따라서 함수 $f(x)$는

$x=5$에서 최댓값 21,

$x=0$ 또는 $x=3$에서 최솟값 1

을 갖는다.

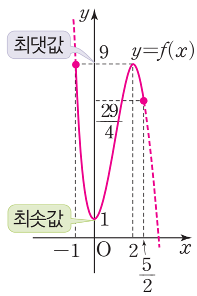
(2) $f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

구간 $\left[-1,\ \frac{5}{2}\right]$에서 $f(x)$의 증감표를 이용하여 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	9	$\searrow$	1	$\nearrow$	9	$\searrow$	$\frac{29}{4}$



따라서 함수 $f(x)$는

$x=-1$ 또는 $x=2$에서 최댓값 9,

$x=0$에서 최솟값 1

을 갖는다.

231 정답 2

$f'(x)=3x^2+6x-24$

$=3(x+4)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=2$ ($\because 1\le x\le 3$)

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-20+a$	$\searrow$	$-28+a$	$\nearrow$	$-18+a$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-28+a$를 가지므로

$-28+a=-8$

$\therefore\ a=20$

이때, 위의 증감표에서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $-18+a$를 가지므로 최댓값은

$-18+a=-18+20=2$

232 정답 10

$f'(x)=3x^2+2ax$에서 $\quad f'(1)=3+2a=9 \quad \therefore a=3$

즉, $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -1\le x\le 2$)

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

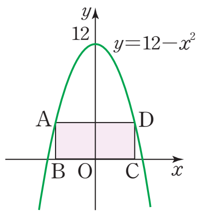
x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b+2$	↘	b	↗	$b+20$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $b+20$을 가지므로

$b+20=21 \quad \therefore b=1$

$\therefore a^2+b^2=3^2+1^2=10$

233 정답 32



점 C의 좌표를 $(x, 0)$으로 놓으면

$D(x, 12-x^2)$이므로

$\overline{BC}=2\overline{OC}=2x$, $\overline{CD}=12-x^2$

직사각형 ABCD의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=2x(12-x^2)$ $(0<x<2\sqrt{3})$

$S'(x)=24-6x^2=-6(x^2-4)$이므로

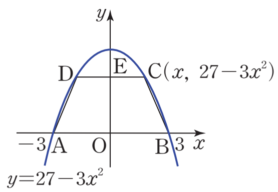
$S'(x)=0$에서 $x=\pm 2$

이때, $S(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	$(2\sqrt{3})$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	32	↘	

따라서 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 32이다.

234 정답 96



점 C의 좌표를

$C(x, 27-3x^2)$이라 하고,

$\overline{CD}$와 y축이 만나는 점을 E라

하면

$\overline{CD}=2x$, $\overline{OE}=27-3x^2$

$(0<x<3)$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{OE}=\frac{1}{2}(6+2x)(27-3x^2)$$

$$=3(-x^3-3x^2+9x+27)$$

$S'(x)=-9x^2-18x+27=-9(x+3)(x-1)$이므로

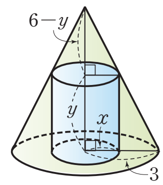
$S'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

$0<x<3$에서 $S(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	96	↘	

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은 96이다.

235 정답 8π



오른쪽 그림과 같이 직원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면

$3:6=x:(6-y)$

$\therefore y=6-2x$ $(0<x<3)$

직원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(6-2x)=2\pi(3x^2-x^3)$

$\therefore V'(x)=2\pi(6x-3x^2)=-6\pi x(x-2)$

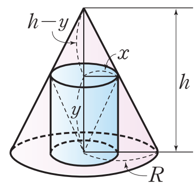
$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<3$)

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	최대	↘	

따라서 $x=2$일 때 $V(x)$는 극대이면서 최대이므로 직원기둥의 부피의 최댓값은

$V(2)=2\pi\times(12-8)=8\pi$

236 정답 $\frac{h}{3}$



원뿔의 부피는 원기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$이므로, 큰 원뿔에 내접하는 원기둥의 부피가 최대일 때 내접하는 작은 직원뿔의 부피도 최대가 된다.

내접하는 직원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면 삼각형의 닮음에 의해

$R:h=x:(h-y)$

즉, $R(h-y)=hx$에서 $x=\frac{R}{h}(h-y)$ $(0<y<h)$

직원기둥의 부피를 V라 하면

$$V(y)=\pi x^2y=\pi\left(\frac{R}{h}\right)^2(h-y)^2y$$

$$=\pi\left(\frac{R}{h}\right)^2(y^3-2hy^2+h^2y)$$

$$V'(y)=\pi\left(\frac{R}{h}\right)^2(3y^2-4hy+h^2)$$

$$=\pi\left(\frac{R}{h}\right)^2(3y-h)(y-h)$$

$V'(y)=0$에서 $y=\frac{h}{3}$ ($\because 0<y<h$)

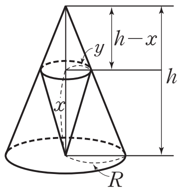
$0<y<h$에서 $V(y)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

y	(0)	$\cdots$	$\frac{h}{3}$	$\cdots$	(h)
$V'(y)$		$+$	0	$-$	
$V(y)$		↗	최대	↘	

즉, 내접하는 직원기둥의 부피는 높이가 $\frac{h}{3}$일 때 최대이다.

따라서 내접하는 작은 직원뿔의 부피 역시 높이가 $\frac{h}{3}$일 때 최대이다.

다른 풀이



그림과 같이 내접하는 직원뿔의 높이를 x, 밑면의 반지름의 길이를 y라 하면

$$y : R=(h-x) : h$$

$$\therefore y=\frac{R(h-x)}{h}$$

내접하는 직원뿔의 부피를 V라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi y^2x=\frac{1}{3}\pi\times\frac{R^2(h-x)^2}{h^2}\times x$$

$$=\frac{\pi R^2}{3h^2}(h-x)^2x$$

$$V'=\frac{\pi R^2}{3h^2}\{-2(h-x)x+(h-x)^2\}$$

$$=\frac{\pi R^2}{3h^2}(x-h)(3x-h)\text{이므로}$$

$V'=0$에서 $x=h$ 또는 $x=\frac{h}{3}$

또, $0<x<h$ 이므로 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{h}{3}$	$\cdots$	(h)
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	최대	↘	

따라서 내접하는 작은 직원뿔의 부피는 높이가 $\frac{h}{3}$일 때 최대가 된다.

연습문제 I .... pp.135~137

237 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

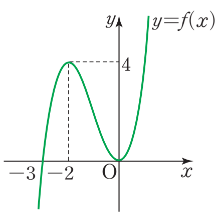
(1) $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-2$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

또, $f(-3)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



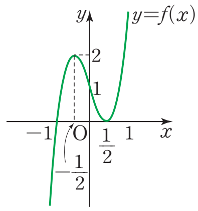
(2) $f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	0	↗

또 $f(-1)=0$, $f(0)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



238 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 풀이 참조

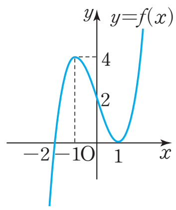
(1) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

또, $f(-2)=0$, $f(0)=2$이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



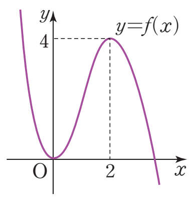
(2) $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘

함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 다음과 같다.



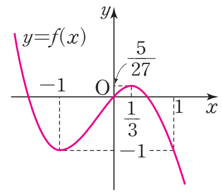
(3) $f'(x)=-3x^2-2x+1=-(x+1)(3x-1)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	$\frac{5}{27}$	↘

또, $f(1)=-1$이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



239 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f'(x)=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하고 극값을 갖지 않는다.

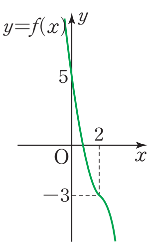
x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3	↘

$f(0)=5$이므로 $f(x)$의 그래프의 개형은 아래의 [그림 1]과 같다.

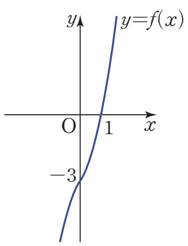
(2) $f'(x)=3x^2+2$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 극값을 갖지 않는다.

$f(0)=-3$, $f(1)=0$이므로 $f(x)$의 그래프의 개형은 아래의 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

240 정답 (1) 극댓값: 1, 극솟값: -1, 그래프는 풀이 참조

(2) 극댓값: $\frac{19}{8}$, 극솟값: 없다,

그래프는 풀이 참조

(3) 극댓값: $\frac{17}{12}$, $\frac{11}{3}$, 극솟값: 1,

그래프는 풀이 참조

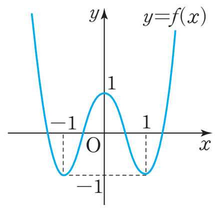
(1) $f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 극솟값 -1, $x=0$에서 극댓값 1을 갖고, 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(2) $f'(x)=-8x^3+12x^2=-4x^2(2x-3)$이므로

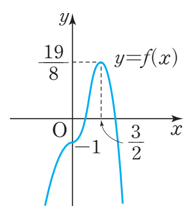
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↗	$\frac{19}{8}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극댓값 $\frac{19}{8}$를 갖고, 극솟값은 존재하지 않는다.

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



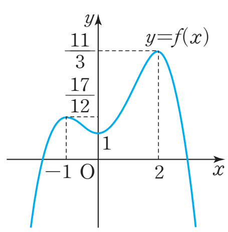
(3) $f'(x)=-x^3+x^2+2x=-x(x+1)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{17}{12}$	↘	1	↗	$\frac{11}{3}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{17}{12}$, $x=2$에서 극댓값 $\frac{11}{3}$, $x=0$에서 극솟값 1을 갖고, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



241 정답 (1) 극댓값: 1, 극솟값: 0, 그래프는 풀이 참조
(2) 극댓값: 없다, 극솟값: -1, 그래프는 풀이 참조

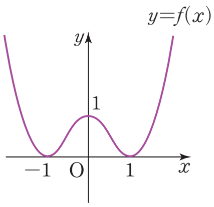
(1) $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극솟값 0을 가지고, $x=0$에서 극댓값 1을 가지므로 그래프의 개형은 다음과 같다.



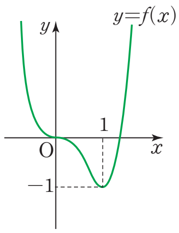
(2) $f'(x)=12x^3-12x^2$
$=12x^2(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	-1	↗

따라서 극댓값은 존재하지 않고, $x=1$에서 극솟값 -1을 갖는다. 이때, $f(0)=0$이므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

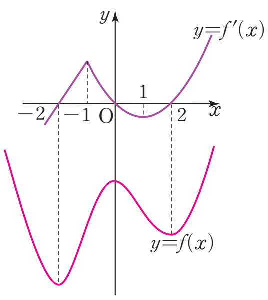


242 정답 풀이 참조

도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



243 정답 (1) 최댓값: 4, 최솟값: -2
(2) 최댓값: 146, 최솟값: -7

(1) $f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗	4

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 4, $x=-1$에서 최솟값 -2를 가진다.

(2) $f'(x)=4x^3+16x=4x(x^2+4)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$

구간 $[-1, 3]$에서 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	-7	↗	146

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 146, $x=0$에서 최솟값 -7을 갖는다.

244 정답 (1) 최댓값: 20, 최솟값: 0
(2) 최댓값: 5, 최솟값: -4

(1) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[1, 3]$에서 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	20

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 0, $x=3$에서 최댓값 20을 갖는다.

(2) $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[-2, 0]$에서 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	↘	-4	↗	-3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 -4, $x=-2$에서 최댓값 5를 갖는다.

245 정답 18

$x^2+2x=(x+1)^2-1$이므로 $x^2+2x=t$로 놓으면

$0\le x\le 1$에서 t의 값의 범위는 $0\le t\le 3$

$g(t)=t^3-3t+1$이라 하면

$g'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

$0\le t\le 3$에서 함수 $g(t)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(t)$	1	↘	-1	↗	19

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값 $M=19$, 최솟값 $m=-1$이므로

$M+m=19+(-1)=18$

246 정답 0

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호의 변화를 조사하여

구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최대이다.

247 정답 2

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[-2, 2]$에서 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$4+k$	↘	$-4+k$	↗	$4+k$	↘	$-4+k$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$와 $x=1$에서 최댓값 $4+k$,

$x=-1$과 $x=2$에서 최솟값 $-4+k$를 갖는다.

이때, 최댓값과 최솟값의 합이 4이므로

$4+k+(-4+k)=4,\ 2k=4 \qquad \therefore k=2$

248 정답 3

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$b-4a$	↗	b	↘	$b-4a$

$a>0$이므로 $f(x)$의 최댓값은 b, 최솟값은 $b-4a$이다.

즉, $b=2$, $b-4a=-2$에서 $a=1$

$\therefore a+b=3$

249 정답 2

곡선 $y=6x-x^2=-(x-3)^2+9$는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$C(t,\ 6t-t^2)\,(0<t<3)$이라고 하면 점 B의 x좌표는 $6-t$이다.

즉, $\overline{OA}=6$, $\overline{BC}=6-2t$이고 사다리꼴 OABC의 높이는 $6t-t^2$이므로 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\{6+(6-2t)\}\times(6t-t^2)=t^3-12t^2+36t$$

$$S'(t)=3t^2-24t+36=3(t-2)(t-6)$$

$S'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because 0<t<3$)

$0<t<3$에서 $S(t)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 사다리꼴의 넓이가 최대일 때는 $t=2$일 때이므로 이때의 변 BC의 길이는

$\overline{BC}=6-2\times 2=2$

250 정답 128 cm³

잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 x의 값의 범위는

$x>0,\ 12-2x>0 \qquad \therefore 0<x<6$

상자의 부피를 $f(x)$라 하면

$f(x)=x(12-2x)^2=4(x^3-12x^2+36x)$

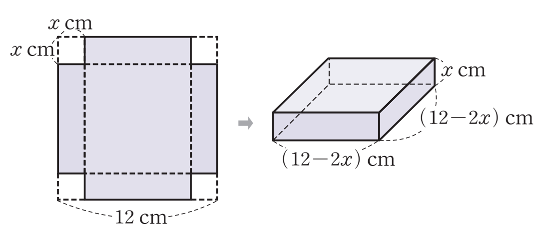
$f'(x)=4(3x^2-24x+36)=12(x-2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<6$)

구간 $(0, 6)$에서 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 부피의 최댓값은 128 (cm³)이다.



251 정답 60 kg

제품 A를 x kg 생산할 때 얻을 수 있는 이익은 $1500x-f(x)$(원)이다.

$g(x)=1500x-f(x)\ (x>0)$으로 놓으면

$$g(x)=1500x-(x^3-90x^2+1500x+30000)$$
$$=-x^3+90x^2-30000$$
$$g'(x)=-3x^2+180x=-3x(x-60)$$

$g'(x)=0$에서 $x=60$ ($\because x>0$)

함수 $g(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	60	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=60$일 때 최대이므로 이익을 최대로 하기 위해서는 제품 A를 하루에 60 kg 생산해야 한다.

연습문제 II

p.138

252 정답 -2

$(f\circ g)(x)=(x^2-4x+5)^3-3(x^2-4x+5)^2+2$에서

$x^2-4x+5=t$라 하면

$t=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$이므로 $t\geq 1$

$f(t)=t^3-3t^2+2\ (t\geq 1)$로 놓으면

$$f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$$

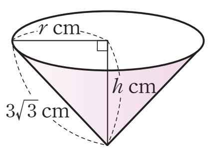
$f'(t)=0$에서 $t=2\ (t\geq 1)$

$t\geq 1$에서 함수 $f(t)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 $t=2$일 때 함수 $f(t)$, 즉 $(f\circ g)(x)$의 최솟값은 -2이다.

253 정답 $3\sqrt{2}$ cm



원뿔 모양의 그릇에서 윗면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라고 하면

$$r^2+h^2=(3\sqrt{3})^2$$
$$\therefore\ r^2=27-h^2 \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

이때, 그릇의 부피 $V\ \text{cm}^3$은

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(27-h^2)h$$
$$=\frac{1}{3}\pi(27h-h^3)\ (0<h<3\sqrt{3})$$

이므로 부피 V의 높이 h에 대한 변화율은

$$\frac{dV}{dh}=\frac{1}{3}\pi(27-3h^2)=\pi(3+h)(3-h)$$

$\dfrac{dV}{dh}=0$에서 $h=3$ ($\because\ 0<h<3\sqrt{3}$)

이때, $\dfrac{dV}{dh}$의 부호의 변화를 조사하여 V의 증감표를 만들면 다음과 같다.

h	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	$(3\sqrt{3})$
$\dfrac{dV}{dh}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 V는 $h=3$일 때 극대이면서 최대이다.

$h=3$을 ㉠에 대입하면 $r^2=18$이므로

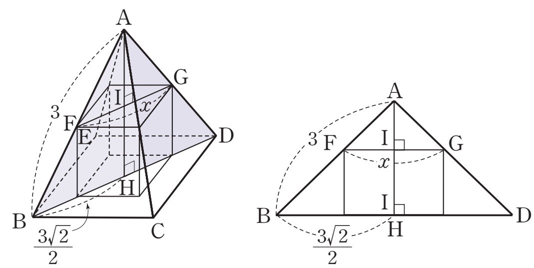
$$r=3\sqrt{2}\ (\text{cm})$$

254 정답 $2\sqrt{2}$

모든 모서리의 길이가 3인 정사각뿔의 높이는 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$이고, 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 밑면은 정사각형이다.

이 정사각형의 한 변의 길이를 x $(0<x<3\sqrt{2})$라 하자.

꼭짓점 A에서 정사각뿔의 밑면에 내린 수선의 발을 H, 직육면체의 윗면에 내린 수선의 발을 I라 하면



$$\overline{AH}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이고 $\overline{FG}\,/\!/\,\overline{BD}$이므로 $\triangle$AFG와 $\triangle$ABD는 닮음이다.

$$\overline{FG}:\overline{BD}=\overline{AI}:\overline{AH}$$
$$x:3\sqrt{2}=\overline{AI}:\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore\ \overline{AI}=\frac{1}{2}x$$

따라서 $\overline{IH}=\overline{AH}-\overline{AI}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{2}(3\sqrt{2}-x)$이고, 대각선의 길이가 x인 정사각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times x\times x=\dfrac{1}{2}x^2$이므로

직육면체의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{2}(3\sqrt{2}-x)=\frac{1}{4}(3\sqrt{2}x^2-x^3)$$
$$V'(x)=\frac{1}{4}(6\sqrt{2}x-3x^2)=-\frac{3}{4}x(x-2\sqrt{2})$$

$V'(x)=0$에서 $x=2\sqrt{2}$ ($\because$ $0<x<3\sqrt{2}$)

x	(0)	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$	$(3\sqrt{2})$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	

따라서 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 부피의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

255 정답 **5** 서술형

$f'(x)=3x^2+2(a-3)x-4a=(x-2)(3x+2a)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=-\dfrac{2}{3}a$ $\cdots$ ①

이때, $a>0$이므로 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	$\searrow$	$-4a+b-4$	$\nearrow$	$-3a+b$

$a>0$이므로 $f(x)$의 최댓값은 b, 최솟값은 $-4a+b-4$이다. $\cdots$ ②

즉, $b=4$, $-4a+b-4=-4$에서 $a=1$

$\therefore$ $a+b=5$ $\cdots$ ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$f'(x)=0$인 x의 값 구하기	20%
②	$f(x)$의 증감표를 만들어 최댓값, 최솟값 구하기	50%
③	$a+b$의 값 구하기	30%

9. 방정식, 부등식과 미분

유형 pp.141~146

001 정답 (1) **3** (2) **2**

(1) $f(x)=x^3-12x+5$로 놓으면

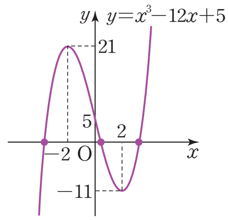
$f'(x)=3x^2-12$
$=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

이때, $f(x)$의 증감표와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	21	$\searrow$	-11	$\nearrow$



$y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 3개의 실근을 가진다.

(2) $f(x)=3x^4-8x^3+6$으로 놓으면

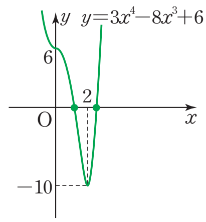
$f'(x)=12x^3-24x^2$
$=12x^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

이때, $f(x)$의 증감표와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	6	$\searrow$	-10	$\nearrow$



$y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 2개의 실근을 가진다.

002 정답 (1) $\boldsymbol{0<k<4}$ (2) $\boldsymbol{k=0}$ **또는** $\boldsymbol{k=4}$
(3) $\boldsymbol{k<0}$ **또는** $\boldsymbol{k>4}$

$f(x)=x^3-6x^2+9x-k$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4-k$	$\searrow$	$-k$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 극댓값 $f(1)=4-k$, 극솟값 $f(3)=-k$를 가진다.

(1) 서로 다른 세 실근을 가지기 위해서는

$$(\text{극댓값})\times(\text{극솟값})<0$$

이어야 하므로 $-k(4-k)<0$, $k(k-4)<0$

$$\therefore\ 0<k<4$$

(2) 하나의 중근과 다른 하나의 실근을 가지기 위해서는

$$(\text{극댓값})\times(\text{극솟값})=0$$

이어야 하므로 $-k(4-k)=0$

$$\therefore\ k=0 \text{ 또는 } k=4$$

(3) 하나의 실근과 두 허근을 가지기 위해서는

$$(\text{극댓값})\times(\text{극솟값})>0$$

이어야 하므로 $-k(4-k)>0$, $k(k-4)>0$

$$\therefore\ k<0 \text{ 또는 } k>4$$

다른 풀이

$x^3-6x^2+9x-k=0$에서 $x^3-6x^2+9x=k$이므로

$f(x)=x^3-6x^2+9x$, $g(x)=k$로 놓으면

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 주어진 방정식의 근이다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x$에서

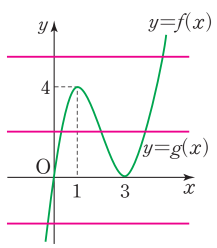
$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서

$$x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$의 증감표와 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$



따라서 위의 그래프에서 방정식 $f(x)=g(x)$가

(1) 서로 다른 세 실근을 가지려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 개의 교점을 가져야 하므로

$$0<k<4$$

(2) 하나의 중근과 다른 하나의 실근을 가지려면 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나야 하므로

$$k=0 \text{ 또는 } k=4$$

(3) 하나의 실근과 두 허근을 가지려면 오직 하나의 교점을 가져야 하므로

$$k<0 \text{ 또는 } k>4$$

003 정답 (1) $-5<a<0$ (2) $a>27$

$x^3+3x^2-9x-a=0$에서 $x^3+3x^2-9x=a$이므로 주어진 방정식의 실근은 곡선 $y=x^3+3x^2-9x$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

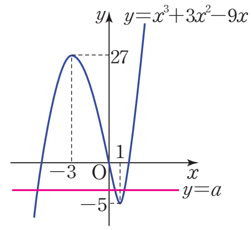
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$

이때, $f(0)=0$이므로 표를 이용하여 그래프를 그리면 다음과 같다.

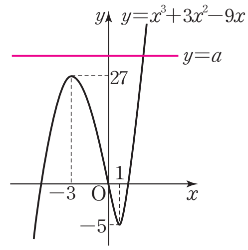
(1) 주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근과 하나의 음근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=a$가 곡선 $y=f(x)$와 $x>0$인 부분의 두 점, $x<0$인 부분의 한 점에서 만나야 한다.



따라서 상수 a의 값의 범위는

$$-5<a<0$$

(2) 하나의 양의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=a$가 곡선 $y=f(x)$와 $x>0$인 부분의 한 점에서만 만나야 하므로 상수 a의 값의 범위는



$$a>27$$

004 정답 (1) 풀이 참조 (2) 1

(1) 주어진 식을 변형하면 $3x^4-4x^3+1\geq 0$

$f(x)=3x^4-4x^3+1$로 놓으면

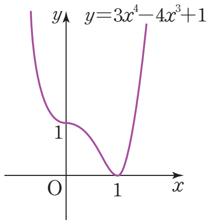
$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 0을 가진다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$, 즉 $3x^4-4x^3+1\geq 0$이므로 $3x^4\geq 4x^3-1$이다.

(2) $f(x)=2x^3-3x^2+k$로 놓으면

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$k-1$	$\nearrow$

$x>0$일 때 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $k-1$을 가진다.

이때, $k-1\geq 0$, 즉 $k\geq 1$이면 $x>0$에서 항상 $f(x)\geq 0$이 성립한다.

따라서 $x>0$일 때 주어진 부등식이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 최솟값은 1이다.

005 정답 (1) $a\geq -2$ (2) 3

(1) $f(x)=x^3-3x^2+4x+a$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 증가하는 함수이다.

그러므로 $f(1)=a+2\geq 0$이면 $x\geq 1$에서 $f(x)\geq 0$이 성립한다.

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $a+2\geq 0$에서

$$a\geq -2$$

(2) 주어진 부등식을 변형하면

$$2x^3+3x^2+k-3\geq 0$$

$f(x)=2x^3+3x^2+k-3$으로 놓으면

$$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$$

$x\geq 0$일 때 $f'(x)=6x(x+1)\geq 0$이므로 $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

그러므로 $f(0)=k-3\geq 0$, 즉 $k\geq 3$이면 $x\geq 0$에서 항상 $f(x)\geq 0$이 성립한다.

따라서 실수 k의 최솟값은 3이다.

확인문제

256 정답 (1) 3 (2) 4

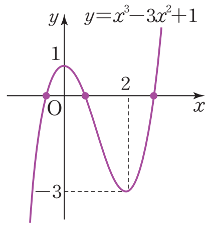
(1) $f(x)=x^3-3x^2+1$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

이때, $f(x)$의 증감표와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$



$y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 3개의 실근을 가진다.

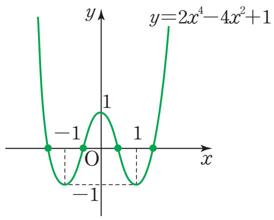
(2) $f(x)=2x^4-4x^2+1$로 놓으면

$$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

이때, $f(x)$의 증감표와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$



$y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 4개의 실근을 가진다.

257 정답 (1) 1 (2) 3

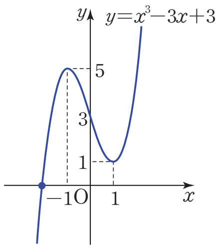
(1) $f(x)=x^3-3x+3$으로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때, $f(x)$의 증감표와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$



$y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근은 1개이다.

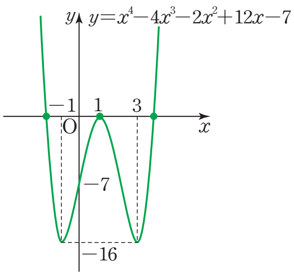
(2) $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x-7$로 놓으면

$$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$$
$$=4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

이때, $f(x)$의 증감표와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-16	↗	0	↘	-16	↗



$y=f(x)$의 그래프는 $x=1$에서 x축과 접하고 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 하나의 중근과 서로 다른 2개의 실근을 가진다. 즉, 서로 다른 실근의 개수는 3개이다.

258 정답 $0<k<1$이면 서로 다른 세 실근, $k=0$ 또는 $k=1$이면 서로 다른 두 실근, $k<0$ 또는 $k>1$이면 하나의 실근

$f(x)=2x^3-3x^2+k$라고 하면 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

이때, $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	k	↘	$k-1$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 극댓값 $f(0)=k$, 극솟값 $f(1)=k-1$을 가진다.

(i) (극댓값)$\times$(극솟값)<0이면 서로 다른 세 실근을 가지므로 $k(k-1)<0$에서

$0<k<1$이면 서로 다른 세 실근

(ii) (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이면 하나의 중근과 다른 하나의 실근을 가지므로 $k(k-1)=0$에서

$k=0$ 또는 $k=1$이면 서로 다른 두 실근

(하나의 중근과 하나의 실근)

(iii) (극댓값)$\times$(극솟값)>0이면 하나의 실근과 두 허근을 가지므로 $k(k-1)>0$에서

$k<0$ 또는 $k>1$이면 하나의 실근

259 정답 $-7<k<20$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$라고 하면

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$k+7$	↘	$k-20$	↗

따라서 서로 다른 세 실근을 가지기 위한 실수 k의 값의 범위는 (극댓값)$\times$(극솟값)<0에서 $(k+7)(k-20)<0$

$\therefore -7<k<20$

260 정답 $-2<a<0$

$x^3-3x+a=0$에서 $x^3-3x=-a$이므로 주어진 방정식의 실근은 곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=x^3-3x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

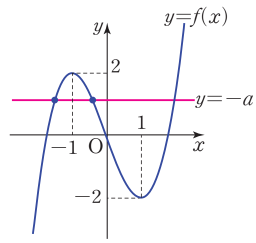
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

이때, $f(0)=0$이므로 표를 이용하여 그래프를 그리면 다음과 같다.

방정식 $x^3-3x+a=0$이 하나의 양의 실근과 서로 다른 두 음의 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-a$가 곡선 $y=f(x)$와 $x>0$인 부분의 한 점, $x<0$인 부분의 두 점에서 만나야 하므로



$0<-a<2 \qquad \therefore -2<a<0$

261 정답 $-5<k<0$

$4x^3-3x^2-6x-k=0$에서 $4x^3-3x^2-6x=k$이므로 주어진 방정식의 실근은 곡선 $y=4x^3-3x^2-6x$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=4x^3-3x^2-6x$라고 하면

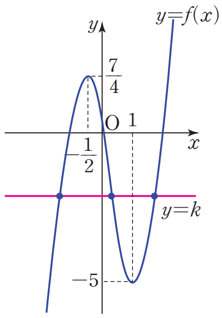
$$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{7}{4}$	↘	-5	↗

이때, $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $4x^3-3x^2-6x=k$가 하나의 음의 실근과 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=k$가 곡선 $y=f(x)$와 $x<0$인 부분의 한 점, $x>0$인 부분의 두 점에서 만나야 한다.

$\therefore -5<k<0$

262 정답 풀이 참조

주어진 부등식을 변형하면 $x^4-4x^3+6x^2-8x+8\geq 0$

$f(x)=x^4-4x^3+6x^2-8x+8$로 놓으면

$$f'(x)=4x^3-12x^2+12x-8=4(x-2)(x^2-x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x^2-x+1>0$)

$f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 0을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-8x+8\geq 0$, 즉 $x^4+6x^2+8\geq 4x^3+8x$이다.

263 정답 -1

주어진 부등식을 변형하면 $x^3-x^2-x-k\geq 0$

$f(x)=x^3-x^2-x-k$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\geq 0$)

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-k$	↘	$-k-1$	↗

$x\geq 0$일 때 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-k-1$을 가진다.

이때, $-k-1\geq 0$, 즉 $k\leq -1$이면 $x\geq 0$에서 항상 $f(x)\geq 0$이 성립한다.

따라서 $x\geq 0$일 때, 주어진 부등식이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 최댓값은 -1이다.

264 정답 3

$f(x)=x^3-x^2+x+k$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-2x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 증가하는 함수이다.

그러므로 $f(-1)=k-3\geq 0$, 즉 $k\geq 3$이면 $x\geq -1$에서 항상 $f(x)\geq 0$이 성립한다.

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 3이다.

265 정답 $k\leq 5$

주어진 부등식을 변형하면 $x^4+4x-k\geq 0$

$f(x)=x^4+4x-k$로 놓으면

$$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$$

이때, $x^2-x+1>0$이므로 $x\geq 1$일 때

$$f'(x)=4(x+1)(x^2-x+1)>0$$

즉, $x\geq 1$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $f(1)=5-k\geq 0$, 즉 $k\leq 5$이면 $x\geq 1$에서 항상 $f(x)\geq 0$이 성립한다.

따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $k\leq 5$이다.

연습문제 I pp.147~149

266 정답 $a>2$

$f(x)=2x^3-3ax^2+8$로 놓으면

$$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)<0, 즉 $f(0)f(a)<0$이어야 하므로

$$8(8-a^3)<0,\ a^3-8>0$$

$$(a-2)(a^2+2a+4)>0$$

이때, 임의의 실수 a에 대하여 항상 $a^2+2a+4>0$이므로

$$a>2$$

267 정답 8

주어진 두 곡선이 오직 한 점에서 만나기 위해서는 방정식 $2x^3-12x=3x^2+k$, 즉 $2x^3-3x^2-12x-k=0$이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-k$라고 하면

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 $7-k$, $x=2$일 때 극솟값 $-20-k$를 가진다.

방정식 $f(x)=0$의 실근이 오직 하나 존재해야 하므로 (극댓값)$\times$(극솟값)>0이어야 한다.

즉, $(7-k)(-20-k)>0$에서 $(k+20)(k-7)>0$이므로

$$k<-20 \text{ 또는 } k>7$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 8이다.

268 정답 3

주어진 그래프를 이용하여 도함수의 부호의 변화를 조사하면 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극소, $x=3$일 때 극대이다.

이때, $f(0)f(3)=(-1)\times 1=-1<0$에서

(극댓값)$\times$(극솟값)<0이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 가진다.

269 정답 6

$f(x)=x^3-3x^2-9x-a$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$5-a$	$\searrow$	$-27-a$	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)>0

이어야 하므로

$$(5-a)(-27-a)>0,\ (a+27)(a-5)>0$$

$$\therefore a<-27 \text{ 또는 } a>5$$

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다.

270 정답 $0<k<5$

주어진 식을 변형하면 $3x^4-16x^3+18x^2=k$이므로

주어진 방정식의 실근은 곡선 $y=3x^4-16x^3+18x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.

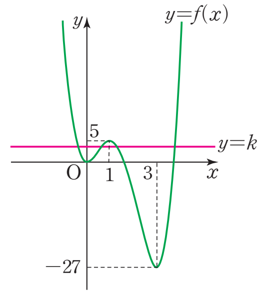
$f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$으로 놓으면

$$f'(x)=12x^3-48x^2+36x=12x(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

$f(x)$의 증감표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$



이때, 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.

따라서 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$이다.

271 정답 3

함수 $y=x^3-3x^2-2$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$$y=x^3-3x^2-2+k$$

이 그래프와 x축의 교점의 개수는 방정식 $x^3-3x^2-2+k=0$의 실근의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-3x^2-2+k$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-2+k$	$\searrow$	$-6+k$	$\nearrow$

따라서 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지기 위한 상수 k의 값의 범위는

$$f(0)f(2)=(k-2)(k-6)<0 \qquad \therefore 2<k<6$$

이때, 정수 k의 값은 3, 4, 5의 3개이다.

272 정답 (1) $k<-2$ 또는 $k>2$
(2) $k=-2$ 또는 $k=2$

(1) 곡선 $y=x^3-2x$와 직선 $y=x+k$가 오직 한 점에서 만나려면 방정식

$$x^3-2x=x+k \Rightarrow x^3-3x-k=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$$f(x)=x^3-3x-k \qquad \cdots\cdots ㉡$$

로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)>0이어야 하므로

$$f(-1)f(1)=(2-k)(-2-k)>0$$
$$(k-2)(k+2)>0$$
$$\therefore k<-2 \text{ 또는 } k>2$$

(2) 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서만 만나려면 직선이 곡선에 접해야 한다.
즉, 방정식 ㉠이 하나의 중근과 다른 하나의 실근을 가져야 한다.
이때, 함수 ㉡의 (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로

$$f(-1)f(1)=0,\ (2-k)(-2-k)=0$$
$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=2$$

273 정답 2

$f(-1)=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 가진다. 또, $f(1)=0$, $f'(1)=0$에서 $f(x)$는 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가진다.

$$\therefore f(x)=a(x+1)(x-1)^2 \ (a\text{는 0이 아닌 상수})$$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $a(x+1)(x-1)^2=0$은 $x=-1$과 $x=1$(중근)의 서로 다른 두 실근을 가진다.

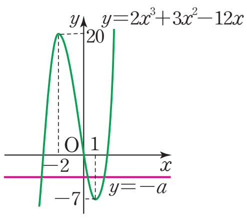
274 정답 $0<a<7$

주어진 방정식의 실근은 곡선 $y=2x^3+3x^2-12x$와 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표와 같다.
$f(x)=2x^3+3x^2-12x$로 놓으면

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표가 방정식 $2x^3+3x^2-12x+a=0$의 근이므로 하나의 음의 실근과 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면

$$-7<-a<0 \qquad \therefore 0<a<7$$

275 정답 -20

주어진 부등식을 변형하면 $2x^3-3x^2-12x-p\geq 0$
$f(x)=2x^3-3x^2-12x-p$로 놓으면

$$f'(x)=6x^2-6x-12$$
$$=6(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-20-p$	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-20-p$를 가지므로 주어진 부등식이 항상 성립하려면

$$f(2)=-20-p\geq 0 \qquad \therefore p\leq -20$$

따라서 실수 p의 최댓값은 -20이다.

276 정답 6

주어진 부등식을 변형하면 $x^3-3x^2+k-2\geq 0$
$f(x)=x^3-3x^2+k-2$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-2$	↘	$k-6$	↗	$k-2$

구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $k-6$을 가진다.
이때, $k-6\geq 0$, 즉 $k\geq 6$이면 구간 $[0, 3]$에서 항상 $f(x)\geq 0$이 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 성립하도록 하는 상수 k의 최솟값은 6이다.

277 정답 -2

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$$h(x)=(x^3+x^2-x)-(x^2+2x+k)=x^3-3x-k$$
$$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\geq 0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$-k$	↘	$-2-k$	↗

$x\geq 0$에서 함수 $h(x)$는 $x=1$일 때 최소이므로 주어진 부등식이 항상 성립하려면

$$h(1)=-2-k\geq 0 \qquad \therefore k\leq -2$$

따라서 실수 k의 최댓값은 -2이다.

278 정답 25

$f(x)=x^4-6x^2-8x+a$로 놓으면

$$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$3+a$	$\searrow$	$-24+a$	$\nearrow$

사차함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-24+a$를 가지므로 주어진 부등식이 항상 성립하려면

$$f(2)=-24+a>0 \qquad \therefore a>24$$

따라서 정수 a의 최솟값은 25이다.

279 정답 8

주어진 부등식을 변형하면 $x^3-2x^2+4x-k>0$

$f(x)=x^3-2x^2+4x-k$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-4x+4=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 항상 증가한다.

즉, $x>2$일 때 $f(x)>0$이려면 $f(2)\geq 0$이어야 한다.

$$f(2)=8-k\geq 0 \qquad \therefore k\leq 8$$

따라서 실수 k의 최댓값은 8이다.

280 정답 풀이 참조

$f(x)=x^n-1-n(x-1)$이라고 하면

$f'(x)=nx^{n-1}-n=n(x^{n-1}-1)$이므로

$f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $f(1)=0$을 가진다.

따라서 $x\geq 0$일 때 $x^{n-1}\geq n(x-1)$이 항상 성립한다.

연습문제 Ⅱ p.150

281 정답 $0<k<16$

$f(x)=x^4-4x^3+kx+1$에서

$$f'(x)=4x^3-12x^2+k$$

$f(x)$가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

여기서 $f'(x)=g(x)=4x^3-12x^2+k$로 놓으면

$$g'(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$-16+k$	$\nearrow$

따라서 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로

$$k(k-16)<0 \qquad \therefore 0<k<16$$

282 정답 21

방정식 $3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$의 실근은 두 함수 $y=3x^4-8x^3-6x^2+24x$, $y=k$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

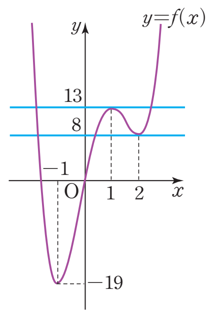
$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$로 놓으면

$$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$$
$$=12(x+1)(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-19	$\nearrow$	13	$\searrow$	8	$\nearrow$



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 그림과 같이

$$k=8 \text{ 또는 } k=13$$

따라서 상수 k의 값의 합은

$$8+13=21$$

283 정답 (1) 풀이 참조 (2) 1

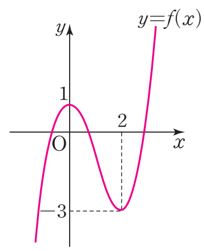
(1) $f(x)=x^3-3x^2+1$에서

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

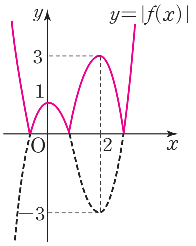
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

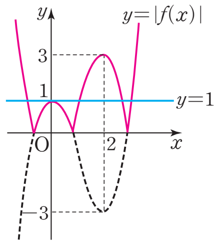


이때, $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 x축 윗부분은 그대로 두고, x축 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



(2) 방정식 $|f(x)|=k$의 실근은 두 함수 $y=|f(x)|$와 $y=k$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수가 5이면 두 그래프가 서로 다른 5개의 점에서 만나야 하므로 그림에서 $k=1$이다.



284 정답 3

$f(x)=x^4+2ax^2+4(a+1)x+a^2$이라고 하면

$$f'(x)=4x^3+4ax+4(a+1)$$
$$=4(x+1)(x^2-x+a+1)$$

이때, $a>0$이므로

$$x^2-x+a+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}>0$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	a^2-2a-3	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 a^2-2a-3을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면

$$a^2-2a-3\geq 0,\ 즉\ (a+1)(a-3)\geq 0$$

그런데 $a>0$이므로 $a\geq 3$

따라서 a의 최솟값은 3이다.

285 정답 $0<k<1$ 서술형

접점의 x좌표를 a라 하면 접점의 좌표는 $(a,\ a^3-3a^2)$이다.

$$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$$

이므로 곡선 $y=x^3-3x^2$ 위의 점 $(a,\ a^3-3a^2)$에서의 접선의 방정식은

$$y-a^3+3a^2=3a(a-2)(x-a) \quad \cdots ①$$

이 직선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로

$$k-a^3+3a^2=-3a^3+6a^2,\ 즉\ k=-2a^3+3a^2 \quad \cdots ②$$

세 개의 접선을 그을 수 있으려면 이 a에 대한 방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. … ③

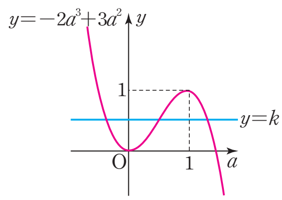
$f(a)=-2a^3+3a^2$이라고 하면

$$f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$$

a	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(a)$	↘	0	↗	1	↘

함수 $y=f(a)$의 그래프와 직선 $y=k$가 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$0<k<1 \quad \cdots ④$$



[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	접점의 x좌표를 a로 놓고 접선의 방정식 구하기	30%
②	접선이 점 $(0,\ k)$를 지남을 이용하기	20%
③	세 접선을 가질 조건 구하기	30%
④	k의 값의 범위 구하기	20%

10. 속도, 가속도와 미분

유형 .... pp.153~157

001 정답 (1) $\mathbf{3}$ (2) $\boldsymbol{v=0,\ a=6}$ (3) **1 또는 3**

(1) 점 P가 원점을 지날 때는 $x=0$이므로

$t^3-6t^2+9t=0$, $t(t-3)^2=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=3$

이때, $t>0$이므로 $t=3$

(2) 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라고 하면

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t+9$, $a(t)=\dfrac{dv}{dt}=6t-12$이므로

$v(3)=27-36+9=0$, $a(3)=18-12=6$

따라서 $t=3$일 때, 속도는 0, 가속도는 6이다.

(3) 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=3$

이때, $t=1$ 및 $t=3$의 좌우에서 속도 v의 부호가 바뀐다.

따라서 운동 방향을 바꾸는 시각은 1 또는 3일 때이다.

002 정답 (1) $\boldsymbol{x=15,\ v=-10}$ (2) $\boldsymbol{t=2,\ x=20}$

(1) 공의 t초 후의 속도를 v라고 하면

$x=20t-5t^2$에서 $v=\dfrac{dx}{dt}=20-10t$이므로

$t=3$일 때, $x=60-45=15\ (\text{m})$,

$v=20-30=-10\ (\text{m/s})$

(2) 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v=20-10t=0 \qquad \therefore t=2$(초)

따라서 최고 높이 x는

$x=20\times2-5\times2^2=20\ (\text{m})$

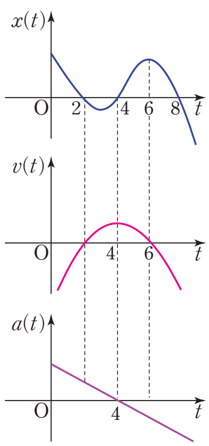
003 정답 ㄷ

점 P의 시각 t에서의 위치가 $x(t)$일 때, 시각 t에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$는

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=x'(t)$,

$a(t)=\dfrac{dv}{dt}=v'(t)$

이므로 위치, 속도, 가속도의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $t=2$일 때 점 P의 속도는 0보다 작다. (거짓)

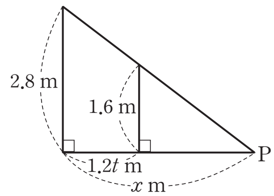
ㄴ. $t=6$일 때, 점 P의 가속도는 0보다 작다. (거짓)

ㄷ. $0<t<8$에서 속도 $v(t)$의 부호가 2번 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 총 2번 바꾼다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

004 정답 (1) **2.8 m/s** (2) **1.6 m/s**

(1) t초 후의 사람과 가로등 사이의 거리는 $1.2t$ m이므로 t초 후의 그림자 끝 점 P와 가로등 사이의 거리를 x m라고 하면



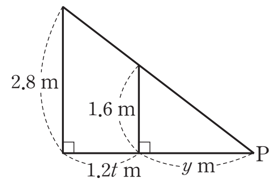
$2.8:1.6=x:(x-1.2t)$, $1.6x=2.8x-2.8\times1.2t$,

$1.2x=2.8\times1.2t$

$\therefore x=2.8t$

따라서 그림자 끝 점 P가 움직이는 속도는 $\dfrac{dx}{dt}=2.8$

(2) t초 후의 그림자의 길이를 y m라고 하면



$2.8:1.6=(1.2t+y):y$, $2.8y=1.6\times1.2t+1.6y$

$1.2y=1.6\times1.2t$

$\therefore y=1.6t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 $\dfrac{dy}{dt}=1.6$

확인문제 .... pp.153~157

286 정답 (1) $\mathbf{2}$ (2) $\boldsymbol{v=8,\ a=12}$

(1) 점 P가 다시 원점을 지날 때의 위치는 0이므로

$t^3-4t=0$, $t(t^2-4)=t(t+2)(t-2)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

(2) 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-4$, $a(t)=\dfrac{dv}{dt}=6t$

따라서 $t=2$일 때의 속도와 가속도는

$v=12-4=8$, $a=12$

287 정답 (1) 2, 4 (2) −6, 6

(1) 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$$

한편, 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v(t)=3(t-2)(t-4)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=4$

이때, $t=2$ 및 $t=4$의 좌우에서 속도 v의 부호가 바뀐다.

따라서 운동 방향이 바뀌는 시각은 2 또는 4일 때이다.

(2) 시각 t에서의 가속도를 $a(t)$라고 하면

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=6t-18$$

따라서 운동 방향을 바꾸는 순간 점 P의 가속도는

$t=2$일 때, $a=6\times2-18=-6$

$t=4$일 때, $a=6\times4-18=6$

288 정답 (1) $t=3$(초), $x=45$ (m) (2) −30 m/s

쏘아 올린 물체의 t초 후의 속도를 v라고 하면

$x=30t-5t^2$에서 $v=\frac{dx}{dt}=30-10t$

(1) 물체가 최고 높이에 도달하면 속도가 0이므로

$30-10t=0 \qquad \therefore t=3$(초)

따라서 최고 높이 x는

$x=30\times3-5\times3^2=45$ (m)

(2) 이 물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0 m이므로 그 때의 시각을 t라 하면

$x=30t-5t^2=0$

$5t(6-t)=0$

$\therefore t=6 (\because t>0)$

$t=6$일 때 속도는 $30-10\times6=-30$

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도는 −30 m/s 이다.

289 정답 −35 m/s

t초 후의 물체의 속도를 $v(t)$라고 하면

$$v(t)=\frac{dh}{dt}=25-10t$$

지상에 도달하는 순간의 높이는 0 m이므로

$h(t)=30+25t-5t^2=0$

$-5(t+1)(t-6)=0$

$\therefore t=6 \ (\because t>0)$

즉, 6초 후에 지상에 도달한다.

따라서 $t=6$일 때의 속도는

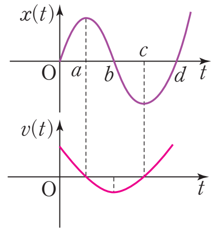
$v(6)=25-10\times6=-35$

290 정답 ㄱ, ㄷ

점 P의 시각 t에서의 위치가 $x(t)$일 때, 시각 t에서의 속도 $v(t)$는

$v(t)=\frac{dx}{dt}=x'(t)$이므로

위치, 속도의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $0<t<d$에서 위치 $x(t)$의 그래프와 t축의 교점의 개수는 1이므로 점 P는 원점을 한 번 지난다. (참)

ㄴ. $t=a$일 때, $v(t)=0$이다. (거짓)

ㄷ. $t=a$와 $t=c$의 좌우에서 속도 v의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=a$와 $t=c$에서 운동 방향을 바꾼다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

291 정답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $t=a$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $t=a$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다. (거짓)

ㄴ. $t=b$에서의 접선의 기울기가 음이므로 가속도는 0보다 작다. (참)

ㄷ. $t=a$에서 $v(t)>0$이므로 양의 방향으로 운동하고, $t=c$에서 $v(t)<0$이므로 음의 방향으로 운동한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

292 정답 −7

t초 후의 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이와 높이는 각각

$(10-t)$ cm, $(10-t)$ cm, $(1+t)$ cm $(0<t<10)$

t초 후의 직육면체의 부피를 $V(t)$ cm^{3}라고 하면

$V(t)=(10-t)(10-t)(1+t)=t^3-19t^2+80t+100$

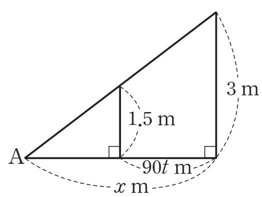
$\therefore \frac{dV}{dt}=V'(t)=3t^2-38t+80$

따라서 $t=3$에서의 부피의 변화율은

$3\times3^2-38\times3+80=-7$

293 정답 (1) 매분 180 m (2) 매분 90 m

(1) t분 후의 학생과 가로등 사이의 거리는 $90t$ m이므로 t분 후의 그림자의 끝 점 A와 가로등 사이의 거리를 x m라고 하면



$3:1.5=x:(x-90t)$, $1.5x=3x-3\times90t$,

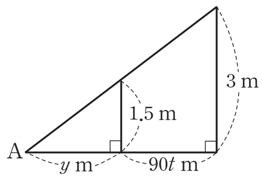
$1.5x=3\times90t$

$\therefore x=180t$

따라서 그림자의 끝 점 A가 움직이는 속도는

$\dfrac{dx}{dt}=180$ (m/분)

(2) t초 후의 그림자의 길이를 y m라고 하면



$3:1.5=(y+90t):y$, $3y=1.5y+1.5\times90t$

$1.5y=1.5\times90t$

$\therefore y=90t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 $\dfrac{dy}{dt}=90$ (m/분)

연습문제 I pp.158~160

294 정답 (1) **속도: 6, 가속도: 2**
(2) **속도: 0, 가속도: −8**

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=2t+2$이므로 $t=2$일 때 $v=6$

$a=\dfrac{dv}{dt}=2$이므로 $t=2$일 때 $a=2$

(2) $v=\dfrac{dx}{dt}=-4t^3+4t$이므로 $t=1$일 때 $v=0$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-12t^2+4$이므로 $t=1$일 때 $a=-8$

295 정답 **24**

점 P의 시각 t에서의 속도 v, 가속도 a는

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2-12t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=12t-12$

$6t^2-12t=18$에서 $t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t\ge0$)

따라서 $t=3$일 때 가속도 a는

$a=12\times3-12=24$

296 정답 **ㄱ, ㄴ**

점 P의 t초 후의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t+3=3(t-1)^2$

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-6$

ㄱ. 시각 $t=3$에서의 위치는 $3^3-3\times3^2+3\times3=9$,
시각 $t=5$에서의 위치는 $5^3-3\times5^2+3\times5=65$이므로
시각 $t=3$에서 시각 $t=5$까지 위치의 변화량은
$65-9=56$ (참)

ㄴ. 시각 $t=2$에서의 가속도는 $a=6\times2-6=6$ (참)

ㄷ. 운동 방향이 바뀌는 순간의 속도는 0이고, 그 전후에 속도의 부호가 바뀌어야 한다.
그런데 $v=3(t-1)^2\ge0$이므로 속도의 부호가 변하지 않는다. 즉, 점 P는 출발 후 운동 방향을 바꾸지 않는다.
(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

297 정답 **0 (원점)**

$t=1$일 때, $x=4$이므로

$4=1+a+b$ $\quad\therefore a+b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

t초 후의 속도를 $v(t)$라고 하면

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=3t^2+2at+b$

$t=1$일 때 방향을 바꾸고, 그때의 속도는 0이므로

$0=3+2a+b$ $\quad\therefore 2a+b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=9$

$\therefore x=t^3-6t^2+9t$, $v(t)=3t^2-12t+9$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-12t+9=0$, $3(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 운동 방향을 두 번째로 바꾸는 시각은 $t=3$일 때이고, 이 순간 점 P의 위치는 $3^3-6\times3^2+9\times3=0$이다.

298 정답 $\mathbf{1<t<2}$

두 점 P, Q의 t초 후의 속도를 각각 v_P, v_Q라고 하면

$v_P=P'(t)=2t-4$, $v_Q=Q'(t)=-4t+4$

움직이는 방향이 서로 같으면 속도의 부호가 같으므로

$v_Pv_Q>0$, 즉 $(2t-4)(-4t+4)>0$

$(t-1)(t-2)<0$

$\therefore 1<t<2$

299 정답 (1) $-\dfrac{9}{4}<k<0$ (2) $-3<k<0$

(1) 두 점 P, Q의 좌표가 같아지면 $x=y$이므로
$t^3-t^2=2t^2+kt$에서 $t(t^2-3t-k)=0$
$t>0$이므로 $t^2-3t-k=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
출발 후 두 점 P, Q의 좌표가 같아지는 때가 두 번 있으려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면 근과 계수의 관계에서

$(\text{두 근의 합})=3>0$

$(\text{두 근의 곱})=-k>0$

$\therefore k<0$

$D=3^2-4\times(-k)>0$에서 $k>-\dfrac{9}{4}$

$\therefore -\dfrac{9}{4}<k<0$

(2) 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라고 하면

$$v_{\mathrm{P}}=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t,\ v_{\mathrm{Q}}=\frac{dy}{dt}=4t+k$$

두 점의 속도가 같은 순간의 t의 값은 $3t^2-2t=4t+k$에서

$3t^2-6t-k=0\ (t>0)$

따라서 이차방정식 $3t^2-6t-k=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가지는 k의 값의 범위를 구하면 된다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$(\text{두 근의 합})=2>0$

$(\text{두 근의 곱})=-\dfrac{k}{3}>0$

$\therefore k<0$

$\dfrac{D}{4}=3^2-3\times(-k)>0$에서 $k>-3$

$\therefore -3<k<0$

300 정답 -30 m/s

공이 지면에 떨어질 때의 높이는 $x=0$이므로

$25+20t-5t^2=0$

$-5(t^2-4t-5)=0$

$-5(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

t초 후의 공의 속도를 v라 하면 $v=\dfrac{dx}{dt}=20-10t$

$t=5$일 때 공의 속도 v는

$20-10\times5=-30\ (\mathrm{m/s})$

301 정답 2

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이고, 그 좌우에서 속도의 부호가 바뀌어야 한다.

속도 $v(t)=0$인 순간은 $t=2$ 또는 $t=4$ 또는 $t=5.5$

그 좌우에서 속도의 부호가 바뀌는 것은 $t=2$ 또는 $t=4$일 때이다.

따라서 점 P는 2번 운동 방향을 바꾼다.

$\therefore k=2$

302 정답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $0<t<7$에서 $x(t)$의 그래프와 t축의 교점의 개수가 3개이므로 점 P는 원점을 3번 지나간다. (참)

ㄴ. 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이고 그 좌우에서 속도의 부호가 바뀌어야 하므로 위치 $x(t)$의 그래프에서 극대 또는 극소인 점들이다. 점 P는 운동 방향을 바꾸는 것은 t가 1, 2, 4, 5, 6일 때이므로 5번 바뀐다. (참)

ㄷ. 출발 후 처음은 음의 방향으로 움직인다. 또, 출발 후 2초부터 4초까지 점 P는 음의 방향으로 움직이므로 처음 운동 방향과 같은 방향으로 움직인다. (거짓)

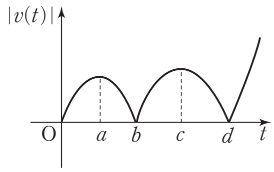
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

303 정답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $v'(a)=0$이므로 $t=a$에서 점 P의 가속도는 0이다. (참)

ㄴ. $t=b$의 좌우에서 속도 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀐다. (참)

ㄷ. 속력 $|v(t)|$의 그래프는 오른쪽과 같다.



$a<t<b$일 때, 점 P의 속력은 감소하지만, $b<t<c$일 때 점 P의 속력은 증가한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

304 정답 분당 -100 L

$$V(t)=2000\left(1-\frac{t}{20}\right)^2=5(t-20)^2$$
$$=5(t^2-40t+400)$$

이므로 $V'(t)=5(2t-40)$

$\therefore V'(10)=-100$

따라서 10분 후 물의 부피의 변화율은 분당 -100 L이다.

305 정답 (1) 20초 (2) 200 m

(1) 제동을 건 후 시각 t에서의 속도를 v라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=20-t$$

이때, 기차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$v=20-t=0$

$\therefore t=20(\text{초})$

(2) 제동을 건 후 20초 후 정지하였으므로 20초간 달린 거리는

$$x=20\times20-\frac{1}{2}\times20^2=400-200=200\ (\mathrm{m})$$

306 정답 $1<t<2$

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=-4t^3+18t^2-24t+5$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-12t^2+36t-24=-12(t-1)(t-2)$$

점 P의 속도가 증가한다는 것은 속도의 변화율, 즉 가속도 a가 0보다 크다는 뜻이다.

$a=-12(t-1)(t-2)>0$에서 $1<t<2$

따라서 점 P의 속도가 증가하는 시각 t의 범위는

$$1<t<2$$

307 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$10\le t\le 30$에서 $f'(t)<g'(t)$이므로 $10\le t\le 30$에서 B의 속도는 A의 속도보다 빠르다.

또, $f(20)=g(20)$이므로 두 자동차 A, B는 20초 후에 만난다.

즉, B가 A보다 빠르게 달려 20초인 순간에 B가 A를 추월하기 시작하므로

ㄱ. $10\le t<20$에서는 A가 B의 앞에 있다. (참)

ㄴ. $20<t\le 30$에서는 B가 A의 앞에 있다. (참)

ㄷ. $10\le t\le 30$에서 B가 A를 한 번 추월한다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

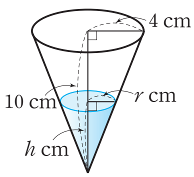
308 정답 (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{4}{5}\pi$ (3) 2π

물을 넣은 지 t초 후의 수면의 높이를 h cm라 하면

$$h=\frac{1}{2}t$$

이므로 $h=5$일 때, $t=10$이다.

(1) t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm라고 하면 오른쪽 그림에서



$$h:10=r:4,\ 10r=4h$$

$$\therefore\ r=\frac{2}{5}h=\frac{1}{5}t,\ \frac{dr}{dt}=\frac{1}{5}$$

이때의 시각에 대한 수면의 반지름의 길이의 변화율은 $\frac{1}{5}$이다.

(2) t초 후의 수면의 넓이를 S cm^{2}라고 하면

$$S=\pi r^2=\pi\left(\frac{1}{5}t\right)^2=\frac{\pi}{25}t^2,\ \frac{dS}{dt}=\frac{2}{25}\pi t$$

따라서 $t=10$일 때의 시각에 대한 수면의 넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt}=\frac{2\pi}{25}\times 10=\frac{4}{5}\pi$$

(3) t초 후의 물의 부피를 V cm^{3}라고 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{1}{5}t\right)^2\times\frac{1}{2}t=\frac{\pi}{150}t^3$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{50}t^2$$

따라서 $t=10$일 때의 시각에 대한 물의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{50}\times 10^2=2\pi$$

309 정답 3 서술형

출발 후 $t(0<t\le 4)$분 동안 두 점이 움직인 거리의 차를 $f(t)$라고 하면

$f(t)=|t^3-3t^2|$ … ①

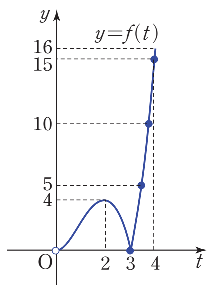
$g(t)=t^3-3t^2$이라고 하면

$$g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$$

$0<t\le 4$이므로 $g'(t)=0$에서 $t=2$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		↘	-4	↗	16

$f(t)=|g(t)|$이므로 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



… ②

이때, 두 점 P, Q는 둘레의 길이가 5 m인 원 위를 움직이므로 거리의 차 $f(t)$가 0 또는 5의 배수가 될 때마다 만난다.

따라서 두 점 P, Q는 출발 후 4분 동안 3번 만난다. … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	두 점 P, Q의 위치의 차를 시각 t의 함수로 나타내기	20 %
②	$y=f(t)$의 그래프의 개형 그리기	50 %
③	두점 P, Q가 만나는 횟수 구하기	30 %

Ⅲ 적분

11. 부정적분

유형 pp.168~174

001 정답 **(1) 7 (2) 5**

(1) $f(x)=(x^3+3x^2-2x+1)'=3x^2+6x-2$이므로

$f(1)=7$

(2) $f(x)=\int(x^2+2x-3)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+2x-3$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=4+4-3=5$

개념 보충

* **함수의 실수배, 합, 차의 부정적분** (문제편 p.169)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $F(x)=\int f(x)dx$,

$G(x)=\int g(x)dx$라 하면

$F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$

이므로 다음을 알 수 있다.

(1) 임의의 상수 k에 대하여

$\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$이므로

$\int kf(x)dx=kF(x)$

이때, $kF(x)=k\int f(x)dx$이므로

$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

(2) $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$이므로

$\int\{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)$

이때, $F(x)+G(x)=\int f(x)dx+\int g(x)dx$이므로

$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(3) $\{F(x)-G(x)\}'=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)$이므로

$\int\{f(x)-g(x)\}dx=F(x)-G(x)$

이때, $F(x)-G(x)=\int f(x)dx-\int g(x)dx$이므로

$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

002 정답 **(1) x^3+x^2+x+C (단, C는 적분상수)**

(2) $\frac{1}{4}x^4+x+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\frac{1}{12}(3x+2)^4+C$ (단, C는 적분상수)

(4) $4x^2+C$ (단, C는 적분상수)

(5) $\frac{1}{2}x^2+2x+C$ (단, C는 적분상수)

(6) $\frac{1}{2}(x^2y+xy^2)+C$ (단, C는 적분상수)

(1) $\int(3x^2+2x+1)dx=3\times\frac{1}{3}x^3+2\times\frac{1}{2}x^2+x+C$

$=x^3+x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\int(x+1)(x^2-x+1)dx=\int(x^3+1)dx$

$=\frac{1}{4}x^4+x+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\int(3x+2)^3dx=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}(3x+2)^4+C$

$=\frac{1}{12}(3x+2)^4+C$ (단, C는 적분상수)

다른 풀이

$\int(3x+2)^3dx=\int(27x^3+54x^2+36x+8)dx$

$=\frac{27}{4}x^4+18x^3+18x^2+8x+C$

(단, C는 적분상수)

(4) $\int(x+2)^2dx-\int(x-2)^2dx=\int\{(x+2)^2-(x-2)^2\}dx$

$=\int 8x\,dx=4x^2+C$

(단, C는 적분상수)

(5) $\int\frac{x^2}{x-2}dx-4\int\frac{1}{x-2}dx=\int\frac{x^2}{x-2}dx-\int\frac{4}{x-2}dx$

$=\int\left(\frac{x^2}{x-2}-\frac{4}{x-2}\right)dx$

$=\int\frac{x^2-4}{x-2}dx=\int(x+2)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+2x+C$

(단, C는 적분상수)

(6) $\int xy\,dx+\int xy\,dy=\frac{y}{2}x^2+\frac{x}{2}y^2+C$

$=\frac{1}{2}(x^2y+xy^2)+C$ ← 적분변수가 아닌 문자는 상수로 취급한다.

(단, C는 적분상수)

003 정답 **(1) 5 (2) 6**

(1) $f(x)=\int f'(x)dx=x^4-4x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=2$에서 $-3+C=2$이므로 $C=5$

따라서 $f(x)=x^4-4x^2+5$이므로

$f(2)=16-16+5=5$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^3-2x+C_1 & (x\ge1) \\ x^2-x+C_2 & (x<1) \end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $x=1$에서도 연속이다. 즉

$$\lim_{x\to1+}(x^3-2x+C_1)=\lim_{x\to1-}(x^2-x+C_2)$$

$\therefore\ -1+C_1=C_2$ …… ㉠

그런데 $f(0)=1$이므로 $C_2=1$

$C_2=1$을 ㉠에 대입하면 $C_1=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^3-2x+2 & (x\ge1) \\ x^2-x+1 & (x<1) \end{cases}$ 이므로

$$f(2)=2^3-2\times2+2=6$$

004 정답 (1) 5 (2) -7

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $f'(x)$이므로 $f'(x)=4x-3$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-3)dx=2x^2-3x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

그런데 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$f(1)=2$, 즉 $2-3+C=2$ $\quad\therefore C=3$

따라서 $f(x)=2x^2-3x+3$이므로

$$f(2)=8-6+3=5$$

(2) 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$는 이차함수이고 주어진 $y=f'(x)$의 그래프가 $f'(-2)=f'(2)=0$이고 아래로 볼록하므로

$$f'(x)=a(x+2)(x-2)\ (a>0)$$

로 놓을 수 있다.

$$\therefore\ f(x)=\int a(x+2)(x-2)dx=\int a(x^2-4)dx=a\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

한편, 도함수 $f'(x)$의 부호를 조사하면 함수 $y=f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 가진다.

극댓값이 20이므로

$f(-2)=a\left(-\frac{8}{3}+8\right)+C=20$ …… ㉠

극솟값이 -12이므로

$f(2)=a\left(\frac{8}{3}-8\right)+C=-12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $C=4$

따라서 $f(x)=x^3-12x+4$이므로

$$f(1)=1-12+4=-7$$

005 정답 $f(x)=3x^2-6x+2$

주어진 식의 양변을 미분하면

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+6x$$

이때, $F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+6x$

$xf'(x)=6x(x-1)$ $\quad\therefore f'(x)=6x-6$

$$\therefore f(x)=\int(6x-6)dx=3x^2-6x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=2$이므로 $C=2$

$\therefore f(x)=3x^2-6x+2$

확인문제 pp.168~174

310 정답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $g(x)$를 미분하면 $f(x)$가 되므로 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 부정적분이다. (참)

ㄴ. $\int xf(x)dx=x^3+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=3x^2$

$\therefore f(x)=3x$ (참)

ㄷ. $\frac{d}{dx}\int x\,dx=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2+C_1\right)=x$ (단, C_1은 적분상수)

$\int\left(\frac{d}{dx}x\right)dx=\int 1\,dx=x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

$\therefore \frac{d}{dx}\int x\,dx\neq\int\left(\frac{d}{dx}x\right)dx$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

311 정답 12

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1-h)}{(1+h)-(1-h)}\times\frac{(1+h)-(1-h)}{h}\right\}$$
$$=f'(1)\times\lim_{h\to0}\frac{2h}{h}$$
$$=2f'(1)$$

$f'(x)=(x+2)(x^2-3x+4)$이므로

$f'(1)=6$

$\therefore 2f'(1)=2\times6=12$

312 정답 (1) x^4-x^3+2x+C (단, C는 적분상수)

(2) $\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-4x+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

(1) $\int(4x^3-3x^2+2)dx=4\times\frac{1}{4}x^4-3\times\frac{1}{3}x^3+2x+C$

$=x^4-x^3+2x+C$ (단, C는 적분상수)

11강

(2) $\int(2x+1)(x-4)\,dx=\int(2x^2-7x-4)dx$

$=2\times\frac{1}{3}x^3-7\times\frac{1}{2}x^2-4x+C$

$=\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-4x+C$

(단, C는 적분상수)

(3) $\int\frac{x^3}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx=\int\frac{x^3-1}{x-1}dx$

$=\int(x^2+x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

(단, C는 적분상수)

313

정답 (1) $-\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$ **(단, C는 적분상수)**

(2) $\frac{1}{2}x^2+2x+C$ **(단, C는 적분상수)**

(3) $x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3+C$ **(단, C는 적분상수)**

(1) $\int(1-2x)^3dx=\int(-2x+1)^3dx$

$=\frac{1}{-2}\times\frac{1}{4}\times(-2x+1)^4+C$

$=-\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\int\frac{x^2}{x+2}dx+4\int\frac{x+1}{x+2}dx$

$=\int\frac{x^2}{x+2}dx+\int\frac{4x+4}{x+2}dx=\int\frac{x^2+4x+4}{x+2}dx$

$=\int\frac{(x+2)^2}{x+2}dx=\int(x+2)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+2x+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\int(x^2+xy+y^2)dy=x^2y+\frac{x}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+C$

$=x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3+C$

(단, C는 적분상수)

314

정답 (1) $f(x)=2x^3-x^2+1$

(2) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2+x-1$

(1) $f(x)=\int(6x^2-2x)dx=2x^3-x^2+C$ (단, C는 적분상수)

에서

$f(1)=2$이므로 $1+C=2$

따라서 $C=1$이므로 $f(x)=2x^3-x^2+1$

(2) $f(x)=\int(2x^3-4x+1)dx=\frac{1}{2}x^4-2x^2+x+C$

(단, C는 적분상수)

에서 $f(2)=1$이므로 $2+C=1$

따라서 $C=-1$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2+x-1$

315

정답 1

$f'(x)=2|x-1|=\begin{cases}2x-2 & (x\ge1)\\ -2x+2 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+C_1 & (x\ge1)\\ -x^2+2x+C_2 & (x<1)\end{cases}$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(0)=-1$이므로 $f(0)=C_2=-1$

한편, $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$1-2+C_1=-1+2+C_2 \qquad \therefore C_1=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1 & (x\ge1)\\ -x^2+2x-1 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(2)=4-4+1=1$

316

정답 $\frac{4}{3}$

$f'(x)=(2x-1)^2$이므로

$f(x)=\int(2x-1)^2dx$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(2x-1)^3+C$

$=\frac{1}{6}(2x-1)^3+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=1$이므로

$\frac{1}{6}\times(-1)^3+C=1 \qquad \therefore C=\frac{7}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{6}(2x-1)^3+\frac{7}{6}$이므로 $f(1)=\frac{4}{3}$

317

정답 $f(x)=-x^3+3x^2$

삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$는 이차함수이고 주어진 $y=f'(x)$의 그래프가 $f'(-2)=f'(2)=0$이고 위로 볼록하므로

$f'(x)=ax(x-2)=a(x^2-2x)\ (a<0)$

로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x)=\int a(x^2-2x)dx=a\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)+C$

(단, C는 적분상수)

한편, 도함수 $f'(x)$의 부호를 조사하면 함수 $y=f(x)$는 $x=0$에서 극솟값, $x=2$에서 극댓값을 가진다.

극솟값이 0이므로 $f(0)=C=0$ …… ㉠

극댓값이 4이므로

$f(2)=a\left(\frac{8}{3}-4\right)+C$

$=-\frac{4}{3}a+C=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $C=0$, $a=-3$

$\therefore f(x)=-x^3+3x^2$

318 정답 **13**

$$\int(4x^3-2x+1)dx=x^4-x^2+x+C_1=f(x)+C$$

(단, C_1은 적분상수)

이므로 $f(x)=x^4-x^2+x+C_2$ (단, $C_2=C_1-C$)

$$\therefore f(2)-f(1)=(16-4+2+C_2)-(1-1+1+C_2)$$
$$=13$$

319 정답 $\boldsymbol{f(x)=3x^2+2x+1}$

$F(x)+2x^3=xf(x)-x^2+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)+6x^2=f(x)+xf'(x)-2x$$

이때, $F'(x)=f(x)$이므로

$$f(x)+6x^2=f(x)+xf'(x)-2x,\ xf'(x)=6x^2+2x$$

따라서 $f'(x)=6x+2$이므로

$$f(x)=\int(6x+2)dx=3x^2+2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때, $f(0)=1$이므로 $C=1$

$$\therefore f(x)=3x^2+2x+1$$

연습문제 I

pp.175~177

320 정답 (1) $\boldsymbol{f(x)=2x-3}$
(2) $\boldsymbol{f(x)=-6x^2+2x-1}$
(3) $\boldsymbol{f(x)=3x^2}$

(1) $\int f(x)dx=x^2-3x+C$이므로

$$f(x)=(x^2-3x+C)'=2x-3$$

(2) $\int f(x)dx=-2x^3+x^2-x+C$이므로

$$f(x)=(-2x^3+x^2-x+C)'=-6x^2+2x-1$$

(3) $\int\{1-3f(x)\}dx=x(1-3x^2)+C$이므로

$$1-3f(x)=\{x(1-3x^2)\}'=(1-3x^2)+x\times(-6x)$$
$$=1-9x^2$$
$$\therefore f(x)=3x^2$$

321 정답 (1) **1** (2) **121**

(1) $(ax)'=a$이므로 $\int a\,dx=ax+C$

$\int a\,dx=bx+C$에서 $ax+C=bx+C$

따라서 $a=b$이고, a가 양수이므로

$$\frac{b}{a}=1$$

(2) $\int x^{10}dx=\frac{1}{11}x^{11}+C=ax^b+C$

따라서 $a=\frac{1}{11}$, $b=11$이므로 $\frac{b}{a}=11^2=121$

322 정답 **6**

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx$에서

$f(x)=x^2-4x+C$ (단, C는 적분상수)

$$=(x-2)^2+C-4$$

$f(x)$의 최솟값이 2이므로

$$C-4=2 \qquad \therefore C=6$$

따라서 $f(x)=x^2-4x+6$이므로 $f(0)=6$

323 정답 **2**

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{x-1}{x^2-1}\right\}$$
$$=f'(1)\times\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}$$
$$=f'(1)\times\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$
$$=f'(1)\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}f'(1)$$

$f(x)=\int(3x^2-4x+5)dx$에서 $f'(x)=3x^2-4x+5$

$$\therefore \frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\times4=2$$

324 정답 (1) $\boldsymbol{2x^2+C}$ **(단, $\boldsymbol{C}$는 적분상수)**
(2) $\boldsymbol{x^2+2x+C}$ **(단, $\boldsymbol{C}$는 적분상수)**

(1) $\int 2f(x)dx=2\int f(x)dx=2(x^2+C_1)=2x^2+2C_1$

여기서 $2C_1$을 C로 놓으면

$$\int 2f(x)dx=2x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

(2) $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

$$=(x^2+C_1)+(2x+C_2)$$
$$=x^2+2x+C_1+C_2$$

여기서 C_1+C_2를 C로 놓으면

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=x^2+2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

325 정답 (1) $\boldsymbol{\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+x+C}$ **(단, $\boldsymbol{C}$는 적분상수)**
(2) $\boldsymbol{x^4+4x^3-x^2-6x+C}$ **(단, $\boldsymbol{C}$는 적분상수)**
(3) $\boldsymbol{\frac{1}{5}x^5-x^3+C}$ **(단, $\boldsymbol{C}$는 적분상수)**
(4) $\boldsymbol{\frac{1}{5}x^5-16x+C}$ **(단, $\boldsymbol{C}$는 적분상수)**
(5) $\boldsymbol{12x^2+C}$ **(단, $\boldsymbol{C}$는 적분상수)**
(6) $\boldsymbol{2x+2y+C}$ **(단, $\boldsymbol{C}$는 적분상수)**
(7) $\boldsymbol{(2x-5)^5+C}$ **(단, $\boldsymbol{C}$는 적분상수)**
(8) $\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C}$ **(단, $\boldsymbol{C}$는 적분상수)**

(1) $\int(x^3+3x+1)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\int(x+3)(4x^2-2)dx=\int(4x^3+12x^2-2x-6)dx$

$=x^4+4x^3-x^2-6x+C$

(단, C는 적분상수)

(3) $\int x(x^3-3x)dx=\int(x^4-3x^2)dx$

$=\frac{1}{5}x^5-x^3+C$ (단, C는 적분상수)

(4) $(x-2)(x+2)(x^2+4)=x^4-16$이므로

$\int(x-2)(x+2)(x^2+4)dx$

$=\int(x^4-16)dx$

$=\frac{1}{5}x^5-16x+C$ (단, C는 적분상수)

(5) $\int(3x+2)^2dx-\int(3x-2)^2dx$

$=\int\{(3x+2)^2-(3x-2)^2\}dx$

$=\int 24x\,dx=12x^2+C$ (단, C는 적분상수)

(6) $\int 2\,dx+\int 2\,dy=2x+2y+C$ (단, C는 적분상수)

(7) $\int 10(2x-5)^4dx=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}(2x-5)^5+C$

$=(2x-5)^5+C$ (단, C는 적분상수)

(8) $\int\frac{x^4+1}{x^2+x+1}dx+\int\frac{x^2}{x^2+x+1}dx$

$=\int\left(\frac{x^4+1}{x^2+x+1}+\frac{x^2}{x^2+x+1}\right)dx$

$=\int\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}dx$

$=\int\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1}dx$

$=\int(x^2-x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

326 정답 -8

$f'(x)=6x^2-4x+k$에서

$f(x)=\int(6x^2-4x+k)dx$

$=2x^3-2x^2+kx+C$ (단, C는 적분상수)

$f(x)$가 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(1)=f(2)=0$

$f(1)=k+C=0$ …… ㉠

$f(2)=8+2k+C=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k=-8$

327 정답 9

$\int\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}dx=\int(4x+2)dx$

$\therefore f(x)+g(x)=2x^2+2x+C_1$ (단, C_1은 적분상수) …… ㉠

$\int\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}dx=\int(-4)dx$

$\therefore f(x)-g(x)=-4x+C_2$ (단, C_2는 적분상수) …… ㉡

$f(0)=2$, $g(0)=1$이므로

㉠에서 $f(0)+g(0)=C_1=3$

㉡에서 $f(0)-g(0)=C_2=1$

$\therefore f(x)+g(x)=2x^2+2x+3,$

$f(x)-g(x)=-4x+1$

두 식을 연립하여 풀면

$f(x)=x^2-x+2$, $g(x)=x^2+3x+1$

$\therefore f(2)+g(1)=4+5=9$

328 정답 ⑤

$f'(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge1)\\ -x & (-1\le x<1)\\ 1 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}-x+C_1 & (x\ge1)\\ -\frac{1}{2}x^2+C_2 & (-1\le x<1)\\ x+C_3 & (x<-1)\end{cases}$

(단, C_1, C_2, C_3는 적분상수)

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서 $C_2=0$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$-\frac{1}{2}+C_2=-1+C_1$

$\therefore C_1=\frac{1}{2}$

$f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$-\frac{1}{2}+C_2=-1+C_3$

$\therefore C_3=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x+\frac{1}{2} & (x\ge1)\\ -\frac{1}{2}x^2 & (-1\le x<1)\\ x+\frac{1}{2} & (x<-1)\end{cases}$

이므로 곡선 $y=f(x)$의 그래프의 모양은 ⑤번이다.

329 정답 22

$f'(x)=3(x-3)(x+1)=3x^2-6x-9$이므로

$$f(x)=\int(3x^2-6x-9)dx$$
$$=x^3-3x^2-9x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

한편, $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로

$f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 가진다.

삼차함수 $f(x)$의 그래프가 x축에 접하려면 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 하므로

$$f(-1)f(3)=0$$
$$(C+5)(C-27)=0$$
$$\therefore C=-5 \text{ 또는 } C=27$$

이때, $f(0)=C$이므로 모든 $f(0)$의 값의 합은 22이다.

330 정답 1

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-3$이므로

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$
$$\therefore f(x)=x^3-3x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$$f(-1)=5, \text{ 즉 } -1+3+C=5 \qquad \therefore C=3$$
$$\therefore f(1)=1-3+3=1$$

331 정답 6

$f'(x)=ax+b$로 놓으면 $f'(0)=2$, $f'(-1)=0$이므로

$$b=2, \ -a+b=0$$
$$\therefore a=2, \ b=2$$

$f'(x)=2x+2$이므로

$$f(x)=\int(2x+2)dx=x^2+2x+C$$
$$=(x+1)^2+C-1 \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

함수 $f(x)$의 최솟값이 2이므로

$$C-1=2 \qquad \therefore C=3$$

따라서 $f(x)=x^2+2x+3$이므로

$$f(1)=6$$

332 정답 $f(x)=x^3-2x^2-2x+9$

$f'(x)=3x^2-4x-2$에서

$$f(x)=\int(3x^2-4x-2)dx=x^3-2x^2-2x+C$$

(단, C는 적분상수)

두 함수 $y=f(x)$와 $y=2x+1$의 그래프의 접점의 좌표를 (α, β)라 하면 접점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$3\alpha^2-4\alpha-2=2$$
$$3\alpha^2-4\alpha-4=0, \ (\alpha-2)(3\alpha+2)=0$$

$\alpha>0$이므로 $\alpha=2$

접선 $y=2x+1$이 점 (α, β)를 지나고 $\alpha=2$이므로 $\beta=5$

또, 점 $(2, 5)$가 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$$f(2)=8-8-4+C=5, \ C=9$$
$$\therefore f(x)=x^3-2x^2-2x+9$$

333 정답 16

$\int\{f(x)+f'(x)\}dx=xf(x)-6x^4+4x^3+6x^2+C$이므로

$$f(x)+f'(x)=\{xf(x)-6x^4+4x^3+6x^2+C\}'$$
$$=f(x)+xf'(x)-24x^3+12x^2+12x$$
$$\therefore (x-1)f'(x)=24x^3-12x^2-12x$$
$$=12x(2x+1)(x-1)$$

위의 식은 x에 대한 항등식이므로

$$f'(x)=12x(2x+1)=24x^2+12x$$

따라서 $f(x)=\int(24x^2+12x)dx=8x^3+6x^2+C_1$

(단, C_1은 적분상수)

이고 $f(0)=2$이므로 $C_1=2$

즉, $f(x)=8x^3+6x^2+2$이므로

$$f(1)=16$$

334 정답 8

$F(x)+2x^3=(x+1)f(x)-3x^2+1$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)+6x^2=f(x)+(x+1)f'(x)-6x$$

이때, $F'(x)=f(x)$이므로

$$f(x)+6x^2=f(x)+(x+1)f'(x)-6x$$
$$(x+1)f'(x)=6x^2+6x, \ f'(x)=6x$$
$$\therefore f(x)=\int 6x\,dx=3x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때, $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=3x^2+1$이므로 $f(1)=4$

한편, ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$F(1)+2=2f(1)-3+1$$

이므로 $F(1)=2f(1)-4=4$

$$\therefore F(1)+f(1)=4+4=8$$

335 정답 ㄷ

$\int\{f(x)-g(x)\}dx=2x+C$이므로 $f(x)-g(x)=2$

ㄱ. $f(-1)-g(-1)=2$이므로

$f(-1)>g(-1)$ (거짓)

ㄴ. $f(x)=g(x)+2$이므로 $f(x)$와 $g(x)$의 차수는 같다. (거짓)

ㄷ. $f(x)-g(x)=2$이므로 $f'(x)-g'(x)=0$

$\therefore f'(x)=g'(x)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

336 정답 3

조건 (가)에서 $g'(x)=(x+2)f(x)$이므로 조건 (나)의 식에 대입하면

$$f'(x)+(x+2)f(x)=x^2+3x+5$$

$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$$\begin{aligned}f'(x)+(x+2)f(x)&=a+(x+2)(ax+b)\\&=ax^2+(2a+b)x+(a+2b)\end{aligned}$$

위의 식이 x^2+4x+5와 같으므로

$a=1$, $b=2$

따라서 $f(x)=x+2$이므로 $f(1)=3$

337 정답 $f(x)=x^3+2x^2-1$

(i) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2+2ax$에서

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=3x^2+2ax$ ...... ㉠

$\therefore f(x)=\int(3x^2+2ax)dx$

$=x^3+ax^2+C$ (단, C는 적분상수) ...... ㉡

(ii) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x+1}=-1$에서 $x\to-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\therefore \lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$

한편, 다항함수는 연속함수이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$

즉, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=-1$이므로

$f'(-1)=-1$

㉠에 $x=-1$을 대입하면 $f'(-1)=3-2a=-1$

$\therefore a=2$

㉡에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=-1+a+C=0$

$\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-1$이다.

338 정답 $f(x)=2x$

$x=0$, $y=0$을 주어진 식에 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0)$이므로 $f(0)=0$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}\ (\because \text{주어진 조건})\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)=2\end{aligned}$$

$f(x)=\int2dx=2x+C$ (단, C는 적분상수)에서

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=2x$

339 정답 2 .... 서술형

$f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$$\begin{aligned}g(x)&=\int\{(1+a)x^2+bx+c\}dx\\&=\frac{1+a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C\ (\text{단, }C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

... ①

$f(x)$가 이차함수이고 $f(x)g(x)$는 사차함수이므로 $g(x)$도 이차함수이다.

$\therefore a=-1$

$f(x)=-x^2+bx+c$, $g(x)=\dfrac{b}{2}x^2+cx+C$이고

$f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$이므로

$$\begin{aligned}&(-x^2+bx+c)\left(\frac{b}{2}x^2+cx+C\right)\\&=-\frac{b}{2}x^4+\left(\frac{b^2}{2}-c\right)x^3+\left(\frac{3bc}{2}-C\right)x^2+(c^2+bC)x+cC\\&=-2x^4+8x^3\end{aligned}$$

양변의 계수를 비교하면 $b=4$, $c=0$, $C=0$ ... ②

따라서 $g(x)=2x^2$이므로 $g(1)=2$ ... ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$f(x)$가 이차함수임을 이용하여 $g(x)$의 식 구하기	30%
②	$g(x)$의 차수를 이용하여 미정계수 구하기	50%
③	$g(1)$의 값 구하기	20%

12. 정적분

개념 보충

*** 정적분의 성질 (1)의 증명** (문제편 p.182)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라 하고, C를 적분상수라 하자.

(1) 임의의 상수 k에 대하여

$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx=kF(x)+C$이므로

$$\int_a^b kf(x)dx=\Big[kF(x)\Big]_a^b=kF(b)-kF(a)$$
$$=k\{F(b)-F(a)\}$$
$$=k\int_a^b f(x)dx$$

(2) $\int\{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)+C$이므로

$$\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx$$
$$=\Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b$$
$$=\{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}$$
$$=\{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\}$$
$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

같은 방법으로

$$\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

가 성립함을 알 수 있다.

*** 정적분의 성질 (2)의 증명** (문제편 p.182)

세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$
$$=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}$$
$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

유형 pp.183~190

001 정답 (1) -2 (2) -14 (3) $\frac{5}{4}$ (4) 2 (5) $\frac{26}{3}$ (6) 16

(1) $\int_{-1}^{1}(4x^3-3x^2+6x)dx=\Big[x^4-x^3+3x^2\Big]_{-1}^{1}$

$=(1-1+3)-(1+1+3)=-2$

(2) $\int_2^0(6t^2+t-2)dt=\Big[2t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\Big]_2^0$

$=0-(16+2-4)=-14$

(3) $\int_{-1}^{0}(3x+2)^3dx=\Big[\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}(3x+2)^4\Big]_{-1}^{0}$

$=\frac{4}{3}-\frac{1}{12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$

(4) $\int_0^2(2x^2+3)dx-2\int_0^2(x^2+x)dx$

$=\int_0^2\{(2x^2+3)-2(x^2+x)\}dx$

$=\int_0^2(-2x+3)dx=\Big[-x^2+3x\Big]_0^2$

$=(-4+6)-0=2$

(5) $\int_0^1(x^2+3x)dx+\int_1^2(x^2+3x)dx$

$=\int_0^2(x^2+3x)dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_0^2$

$=\frac{8}{3}+6=\frac{26}{3}$

(6) $\int_1^3(x+1)^2dx-\int_1^3(y-1)^2dy$

$=\int_1^3(x+1)^2dx-\int_1^3(x-1)^2dx$ $\leftarrow \int_a^b f(y)dy=\int_a^b f(x)dx$

$=\int_1^3\{(x+1)^2-(x-1)^2\}dx$

$=\int_1^3 4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_1^3$

$=18-2=16$

002 정답 (1) 11 (2) 25

(1) $\int_0^1 f(x)dx=A$, $\int_0^1 g(x)dx=B$로 놓으면

$\int_0^1\{f(x)+g(x)\}dx=A+B$

$\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=A-B$

따라서 $A+B=4$, $A-B=2$이므로 $A=3$, $B=1$

$\therefore \int_0^1\{3f(x)+2g(x)\}dx=3A+2B=11$

(2) $\int_{n-1}^{n} f(x)dx=2n-1$의 양변에 $n=1$, 2, 3, 4, 5를 대입하면

$\int_0^1 f(x)dx=1$, $\int_1^2 f(x)dx=3$ $\int_2^3 f(x)dx=5$,

$\int_3^4 f(x)dx=7$, $\int_4^5 f(x)dx=9$

$\therefore \int_0^5 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$+\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx$

$+\int_4^5 f(x)dx$

$=1+3+5+7+9$

$=25$

12강

003 정답 (1) **1** (2) ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{31}{6}$

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$

$$= \int_{-1}^{0}(-x^2+x+1)dx + \int_{0}^{1}(x^2-x+1)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$

(2) ① $|x-2| = \begin{cases} -x+2 & (0 \le x \le 2) \\ x-2 & (2 < x \le 3) \end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{3}|x-2|dx = \int_{0}^{2}(-x+2)dx + \int_{2}^{3}(x-2)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{0}^{2} + \left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{2}^{3}$$

$$= \frac{5}{2}$$

② $|x^2-3x| = |x(x-3)| = \begin{cases} x^2-3x & (-1 \le x \le 0) \\ -x^2+3x & (0 < x \le 2) \end{cases}$

이므로

$$\int_{-1}^{2}|x^2-3x|dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(x^2-3x)dx + \int_{0}^{2}(-x^2+3x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2} = \frac{31}{6}$$

004 정답 (1) $\boldsymbol{f(x)=3x^2-2x-4}$
(2) $\boldsymbol{f(x)=3x^2+2x-1}$

(1) $\int_{0}^{2} f(t)dt = A$ (단, A는 상수)로 놓으면

$f(x)=3x^2-2x+A$이므로

$$A = \int_{0}^{2}(3t^2-2t+A)dt$$

$$= \left[t^3-t^2+At\right]_{0}^{2} = 4+2A$$

따라서 $A=-4$이므로

$$f(x)=3x^2-2x-4$$

(2) $f(x) = 3x^2 + \int_{0}^{1}(2x-1)f(t)dt$

$$= 3x^2 + (2x-1)\int_{0}^{1} f(t)dt$$

에서 $\int_{0}^{1} f(t)dt = A$ (단, A는 상수)로 놓으면

$$f(x) = 3x^2 + A(2x-1) = 3x^2+2Ax-A$$

이때,

$$A = \int_{0}^{1} f(t)dt = \int_{0}^{1}(3t^2+2At-A)dt$$

$$= \left[t^3+At^2-At\right]_{0}^{1} = 1$$

$\therefore f(x)=3x^2+2x-1$

005 정답 (1) $\boldsymbol{f(x)=2x-3,\ a=4}$
(2) $\boldsymbol{f(x)=6x-2}$

(1) 등식 $\int_{a}^{x} f(t)dt = x^2-3x-4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=2x-3$$

주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$$\int_{a}^{a} f(t)dt = a^2-3a-4=0$$

$(a+1)(a-4)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=4$

이때, $a>0$이므로 $a=4$

(2) $\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt = x\int_{1}^{x} f(t)dt - \int_{1}^{x} tf(t)dt$이므로

$$x\int_{1}^{x} f(t)dt - \int_{1}^{x} tf(t)dt = x^3-x^2-x+1$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{1}^{x} f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2-2x-1$$

$$\therefore \int_{1}^{x} f(t)dt = 3x^2-2x-1$$

위의 식을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=6x-2$$

006 정답 (1) **2** (2) **5** (3) **0**

(1) $f(t)=t(3-t)^5$으로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 $F'(t)=f(t)$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x} f(t)dt = \lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$

$$= F'(2)=f(2)=2$$

(2) $f(t)=|t-5|$로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)dt = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$

$$= F'(0)=f(0)=5$$

(3) $f(t)=t^3-2t+1$로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1}^{1+h}(t^3-2t+1)dt = \lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$

$$= F'(1)=f(1)=0$$

확인문제 pp.183~190

340 정답 (1) **4** (2) **4** (3) **0**

(1) $\int_{0}^{1}(3x^2-4x+5)dx = \left[x^3-2x^2+5x\right]_{0}^{1} = 4$

(2) $\int_{-2}^{0}(3y^2+y-1)dy = \left[y^3+\frac{1}{2}y^2-y\right]_{-2}^{0} = 4$

(3) $\int_{0}^{1}(1-2x)^3dx = \int_{0}^{1}(-2x+1)^3dx$

$$= \left[\frac{1}{-2}\times\frac{1}{4}(-2x+1)^4\right]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{8}\right)=0$$

341 정답 (1) 2 (2) 15 (3) 27

(1) $\int_{-1}^{1}(x^5+x^4+1)dx-\int_{-1}^{1}(x^5-4x^4+1)dx$

$=\int_{-1}^{1}\{(x^5+x^4+1)-(x^5-4x^4+1)\}dx$

$=\int_{-1}^{1}5x^4dx=\Big[x^5\Big]_{-1}^{1}$

$=1-(-1)=2$

(2) $\int_{0}^{1}(3x^2-4)dx+\int_{1}^{3}(3x^2-4)dx$

$=\int_{0}^{3}(3x^2-4)dx=\Big[x^3-4x\Big]_{0}^{3}$

$=(27-12)-0=15$

(3) $\int_{0}^{2}(2x^2+3)dx-\int_{3}^{2}(2y^2+3)dy$

$=\int_{0}^{2}(2x^2+3)dx+\int_{2}^{3}(2x^2+3)dx$ ← $\int_{3}^{2}(2y^2+3)dy=\int_{3}^{2}(2x^2+3)dx$

또, $\int_{3}^{2}(2x^2+3)dx=-\int_{2}^{3}(2x^2+3)dx$

$=\int_{0}^{3}(2x^2+3)dx$

$=\Big[\frac{2}{3}x^3+3x\Big]_{0}^{3}=27$

342 정답 2

$\int_{0}^{2}\{f(x)+2g(x)\}dx=\int_{0}^{2}f(x)dx+2\int_{0}^{2}g(x)dx=4$ …… ㉠

$\int_{0}^{2}\{2f(x)-g(x)\}dx=2\int_{0}^{2}f(x)dx-\int_{0}^{2}g(x)dx=3$ …… ㉡

㉠+㉡×2를 하면 $5\int_{0}^{2}f(x)dx=10$

$\therefore \int_{0}^{2}f(x)dx=2$

343 정답 85

$\int_{0}^{5}f(x)dx=5^2+2\times5=35$, $\int_{0}^{10}f(x)dx=10^2+2\times10=120$

이므로

$\int_{5}^{10}f(x)dx=\int_{0}^{10}f(x)dx-\int_{0}^{5}f(x)dx$

$=120-35=85$

344 정답 2

$f(x)=\begin{cases}2x-1 & (x\ge1)\\ 3x^2-2x & (x<1)\end{cases}$에서

$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$

$=\int_{0}^{1}(3x^2-2x)dx+\int_{1}^{2}(2x-1)dx$

$=\Big[x^3-x^2\Big]_{0}^{1}+\Big[x^2-x\Big]_{1}^{2}$

$=0+2=2$

345 정답 (1) 4 (2) 2

(1) $|x-3|=\begin{cases}-x+3 & (1\le x\le3)\\ x-3 & (3<x\le5)\end{cases}$이므로

$\int_{1}^{5}|x-3|dx=\int_{1}^{3}(-x+3)dx+\int_{3}^{5}(x-3)dx$

$=\Big[-\frac{1}{2}x^2+3x\Big]_{1}^{3}+\Big[\frac{1}{2}x^2-3x\Big]_{3}^{5}$

$=4$

(2) $0\le x\le1$일 때 $|x^2-4x+3|=x^2-4x+3$

$1<x\le2$일 때 $|x^2-4x+3|=-x^2+4x-3$

이므로

$\int_{0}^{2}|x^2-4x+3|dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2-4x+3)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+4x-3)dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\Big]_{0}^{1}+\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\Big]_{1}^{2}$

$=2$

346 정답 $f(x)=4x-3$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=A$로 놓으면 $f(x)=4x+3A$이므로

$A=\int_{0}^{1}f(t)dt$

$=\int_{0}^{1}(4t+3A)dt$

$=\Big[2t^2+3At\Big]_{0}^{1}$

$=2+3A$

에서 $A=-1$

$\therefore f(x)=4x-3$

347 정답 $\frac{5}{2}$

$f(x)=2x+(4x-3)\int_{0}^{1}f(t)dt$에서 $\int_{0}^{1}f(t)dt=A$로 놓으면

$f(x)=2x+A(4x-3)$

이때

$A=\int_{0}^{1}\{2t+A(4t-3)\}dt$

$=\Big[t^2+A(2t^2-3t)\Big]_{0}^{1}=1-A$

이므로

$1-A=A$ $\quad\therefore A=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=2x+\frac{1}{2}(4x-3)=4x-\frac{3}{2}$이므로

$f(1)=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

348 정답 $a=1,\ f(x)=2x+1$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면 $\int_2^2 f(t)dt=0$이므로

$$4+2a-6=0 \qquad \therefore a=1$$

또, 주어진 등식을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=2x+1$$

349 정답 5

$$xf(x)=2x^3-4x^2+6+\int_1^x f(t)dt \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=6x^2-8x+f(x)$$

$$\therefore xf'(x)=6x^2-8x$$

이 식은 모든 x에 대하여 성립하므로 $x\neq 0$일 때에도 성립한다. 양변을 x로 나누면 $f'(x)=6x-8$이므로

$$f(x)=\int(6x-8)dx$$

$$=3x^2-8x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수}) \qquad \cdots\cdots \ ㉡$$

한편, ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=4$

㉡에서 $f(1)=3-8+C=4 \qquad \therefore C=9$

따라서 $f(x)=3x^2-8x+9$이므로

$$f(2)=12-16+9=5$$

350 정답 4

$\int_0^x (x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$이므로 주어진 등식은

$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=x^3-x^2$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2x$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt=3x^2-2x$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=6x-2 \qquad \therefore f(1)=4$$

351 정답 (1) -1 (2) 3

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$$=F'(1)=f(1)$$

$$=-1$$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h} f(t)dt=\lim_{h\to0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}$

$$=F'(2)=f(2)=3$$

352 정답 (1) 4 (2) 3

(1) $f(t)=t^3+4t^2+3$으로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\times\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$

$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)=4$$

(2) $f(t)=(t+1)(t-1)^3$으로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^2 f(t)dt=\lim_{h\to0}\frac{F(2)-F(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2-h)-F(2)}{-h}$$

$$=F'(2)=f(2)=3$$

연습문제 I

pp.191~195

353 정답 (1) -9 (2) 2 (3) $\frac{2}{5}$ (4) 0 (5) 28 (6) $\frac{8}{3}$

(1) $\displaystyle\int_0^3(x^2-4x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_0^3=-9$

(2) $\displaystyle\int_1^{-1}(4y^3-3y^2+2y)dy=\left[y^4-y^3+y^2\right]_1^{-1}$

$$=\{1-(-1)+1\}-(1-1+1)$$

$$=2$$

(3) $\displaystyle\int_1^3(x-2)^4dx=\left[\frac{1}{5}(x-2)^5\right]_1^3$

$$=\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}$$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^2(1+3x-x^2)dx+\int_{-1}^2(x^2-x-2)dx$

$$=\int_{-1}^2\{(1+3x-x^2)+(x^2-x-2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^2(2x-1)dx=\left[x^2-x\right]_{-1}^2$$

$$=(4-2)-(1+1)=0$$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^2(2x+5)dx-\int_3^2(2x+5)dx$

$$=\int_{-1}^2(2x+5)dx+\int_2^3(2x+5)dx$$

$$=\int_{-1}^3(2x+5)dx=\left[x^2+5x\right]_{-1}^3$$

$$=(9+15)-(1-5)=28$$

(6) $\int_0^2 \frac{x^3}{x+1}dx-\int_2^0 \frac{1}{y+1}dy$

$=\int_0^2 \frac{x^3}{x+1}dx-\int_2^0 \frac{1}{x+1}dx$

$=\int_0^2 \frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^2 \frac{1}{x+1}dx$ $\leftarrow \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

$=\int_0^2 \frac{x^3+1}{x+1}dx=\int_0^2 (x^2-x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^2=\frac{8}{3}$

354 정답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\int_3^1 f(x)dx=-\int_1^3 f(x)dx$이므로

$\int_3^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$

$=-\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=0$ (참)

ㄴ. $\int_3^5 f(x)dx+\int_7^5 f(x)dx=\int_3^5 f(x)dx-\int_5^7 f(x)dx$,

$\int_3^7 f(x)dx=\int_3^5 f(x)dx+\int_5^7 f(x)dx$

$\therefore \int_3^5 f(x)dx+\int_7^5 f(x)dx\neq\int_3^7 f(x)dx$ (거짓)

ㄷ. $\int_{-1}^1 \{f(x)+g(x)\}dx-\int_{-1}^1 \{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int_{-1}^1 [\{f(x)+g(x)\}-\{f(x)-g(x)\}]dx$

$=\int_{-1}^1 2g(x)dx=2\int_{-1}^1 g(x)dx$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

355 정답 16

$\int_2^5 f(x)dx-\int_3^5 f(x)dx+\int_{-1}^2 f(x)dx$

$=\int_2^5 f(x)dx+\int_5^3 f(x)dx+\int_{-1}^2 f(x)dx$

$=\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx+\int_5^3 f(x)dx$

$=\int_{-1}^3 f(x)dx=\int_{-1}^3 (3x^2-4x+1)dx$

$=\left[x^3-2x^2+x\right]_{-1}^3=12-(-4)=16$

356 정답 1

$\int_0^1 f(x)dx=A$, $\int_0^1 g(x)dx=B$로 놓으면

$\int_0^1 \{f(x)+2g(x)\}dx=A+2B$

$\int_0^1 \{2f(x)-g(x)\}dx=2A-B$

따라서 $A+2B=1$, $2A-B=7$이므로 연립하여 풀면

$A=3$, $B=-1$

$\therefore \int_0^1 \{2f(x)+5g(x)\}dx=2A+5B=6-5=1$

357 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=0$

즉, $\int_0^1 f(x)dx-\int_2^1 f(x)dx=0$이므로

$\int_0^1 f(x)dx=\int_2^1 f(x)dx$ (참)

ㄴ. $\int_2^2 f(x)dx=0$ (참)

ㄷ. $\int_2^0 f(x)dx=-\int_0^2 f(x)dx=0$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

358 정답 $\frac{31}{6}$

$f(x)=\begin{cases} 3-x^2 & (x\le 0) \\ 3-x & (x>0) \end{cases}$이므로

$f(x-1)=\begin{cases} 3-(x-1)^2 & (x-1\le 0) \\ 3-(x-1) & (x-1>0) \end{cases}$

$=\begin{cases} -x^2+2x+2 & (x\le 1) \\ -x+4 & (x>1) \end{cases}$

$\therefore \int_0^2 f(x-1)dx$

$=\int_0^1 f(x-1)dx+\int_1^2 f(x-1)dx$

$=\int_0^1 (-x^2+2x+2)dx+\int_1^2 (-x+4)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_1^2=\frac{31}{6}$

359 정답 $-\frac{2}{3}$

$f(x)=\begin{cases} 2 & (-1\le x\le 0) \\ -2x+2 & (0<x\le 1) \end{cases}$이므로

$\int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^0 2x\,dx+\int_0^1 (-2x^2+2x)dx$

$=\left[x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1=-\frac{2}{3}$

360 정답 (1) 8 (2) $\frac{34}{3}$

(1) $0\le x\le 2$일 때, $|2x-4|=-2x+4$

$2<x\le 4$일 때, $|2x-4|=2x-4$

이므로

$\int_0^4 |2x-4|dx$

$=\int_0^2 (-2x+4)dx+\int_2^4 (2x-4)dx$

$=\left[-x^2+4x\right]_0^2+\left[x^2-4x\right]_2^4=8$

12강

(2) $-2\le x\le -1$일 때, $|x^2-2x-3|=x^2-2x-3$

$-1<x\le 2$일 때, $|x^2-2x-3|=-x^2+2x+3$

이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{2}|x^2-2x-3|dx\\&=\int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)dx+\int_{-1}^{2}(-x^2+2x+3)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{2}\\&=\frac{34}{3}\end{aligned}$$

361 정답 $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}f(t)&=\int_0^t(t-x)dx+\int_t^3(x-t)dx\\&=\left[tx-\frac{1}{2}x^2\right]_0^t+\left[\frac{1}{2}x^2-tx\right]_t^3\\&=t^2-3t+\frac{9}{2}\\&=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\end{aligned}$$

따라서 $f(t)$가 최솟값을 가지도록 하는 t의 값은 $\frac{3}{2}$이다.

362 정답 3

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}(a-|x|)dx&=\int_{-2}^{0}(a+x)dx+\int_0^2(a-x)dx\\&=\left[ax+\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0}+\left[ax-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\\&=4a-4\end{aligned}$$

이므로 $4a-4=8$ $\quad\therefore a=3$

363 정답 2

$|x-1|-|x-2|=\begin{cases}-1 & (0\le x<1)\\ 2x-3 & (1\le x<2)\\ 1 & (2\le x\le 5)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^5(|x-1|-|x-2|)dx\\&=\int_0^1(-1)dx+\int_1^2(2x-3)dx+\int_2^5dx\\&=\Big[-x\Big]_0^1+\Big[x^2-3x\Big]_1^2+\Big[x\Big]_2^5\\&=-1+0+3=2\end{aligned}$$

364 정답 $\frac{2}{3}$

$\int_0^1 f(t)dt=A$로 놓으면

$f(x)=x^2+x\int_0^1 f(t)dt$에서 $f(x)=x^2+Ax$

이때,

$$\begin{aligned}A&=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(t^2+At)dt\\&=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}At^2\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}A\end{aligned}$$

이므로 $A=\frac{2}{3}$

365 정답 15

$f(x)=3-\int_0^2(x-1)f(t)dt=3-(x-1)\int_0^2 f(t)dt$에서

$\int_0^2 f(t)dt=A$로 놓으면

$$f(x)=3-A(x-1)=(3+A)-Ax$$

이때,

$$\begin{aligned}A&=\int_0^2\{(3+A)-At\}dt=\left[(3+A)t-\frac{1}{2}At^2\right]_0^2\\&=6+2A-2A=6\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=9-6x$이므로 $f(-1)=15$

366 정답 -1

$\int_0^1 f(x)dx=1$, $\int_0^1 xf(x)dx=2$, $\int_0^1 x^2f(x)dx=3$이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^1(x-k)^2f(x)dx\\&=\int_0^1(x^2-2kx+k^2)f(x)dx\\&=k^2\int_0^1 f(x)dx-2k\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 x^2f(x)dx\\&=k^2-4k+3=(k-2)^2-1\ge -1\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 -1이다.

367 정답 $f(x)=3x^2-2x$, $a=2$

등식 $\int_a^x f(t)dt=x^3-x^2-4$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$$0=a^3-a^2-4,\ (a-2)(a^2+a+2)=0$$

$$\therefore a=2$$

또, 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=3x^2-2x$$

368 정답 ㄴ

$F(x)=\int_1^x f(x)dx=\int_1^x f(t)dt$이므로

$$F(-x)=\int_1^{-x}f(t)dt=\int_1^{-x}f(x)dx$$

따라서 $F(-x)$와 같은 것은 ㄴ이다.

369 정답 (1) 7　(2) 4

(1) 등식 $\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2+3x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=3x^2-4x+3$$
$$\therefore f(2)=3\times2^2-4\times2+3=7$$

(2) $\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2+3x$에서

$\int_0^2 f(t)dt=2^3-2\times2^2+3\times2=6$,

$\int_0^1 f(t)dt=1-2+3=2$이므로

$$\int_1^2 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt=6-2=4$$

370 정답 1

$$xf(x)=\frac{3}{2}x^4-4x^2+6+\int_2^x f(t)dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=6x^3-8x+f(x)$$
$$\therefore xf'(x)=6x^3-8x$$

이 식은 모든 x에 대하여 성립하므로 $x\neq0$일 때에도 성립한다. 양변을 x로 나누면 $f'(x)=6x^2-8$이므로

$$f(x)=\int(6x^2-8)dx$$
$$=2x^3-8x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수}) \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편, ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(2)=14$　　$\therefore f(2)=7$

㉡에서 $f(2)=16-16+C=7$　　$\therefore C=7$

따라서 $f(x)=2x^3-8x+7$이므로

$$f(1)=2-8+7=1$$

371 정답 ⑤

$F(x)=\int_1^x f(t)dt$에서 $F'(x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다.

$F'(x)=0$을 만족하는 x의 값은 $-3,\ -1,\ 1,\ 3$이므로 함수 $F(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

또, $F(x)=\int_1^x f(t)dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$F(1)=0$이므로 $x=1$에서 함수 $F(x)$는 극댓값 0을 가진다.

따라서 함수 $F(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

372 정답 $a=2,\ f(x)=6x+4$

$\int_1^x (x-t)f(t)dt=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$이므로

$$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3+ax^2-7x+4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2ax-7$$
$$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2+2ax-7$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=6x+2a$$

한편, ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-7+4$　　$\therefore a=2$

$\therefore f(x)=6x+4$

373 정답 (1) 2　(2) 0

$f(x)=\int_1^x (at^2+bt+2)dt$에서 $f'(x)=ax^2+bx+2$이고, $f(1)=0$이므로

(1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f'(x)dx=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=2$

(2) $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_1^{x+1} f(x)dx=\lim_{x\to0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}=F'(1)=f(1)=0$$

374 정답 (1) 1　(2) 6

$f(t)=t^2+3t-2$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$F'(t)=f(t)$이므로

(1) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\times\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)=1$$

(2) $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+2h} f(t)dt$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(1+2h)-F(1-h)}{(1+2h)-(1-h)}\times\frac{(1+2h)-(1-h)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1-h)}{(1+2h)-(1-h)}\times\lim_{h\to0}\frac{3h}{h}$$
$$=3F'(1)=3f(1)=6$$

375 정답 **1**

$F(t)=f(t)f'(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^x F(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x^2+x+1}\times\frac{1}{x-1}\int_1^x F(t)dt\right\}$$
$$=\frac{1}{3}F(1)=\frac{1}{3}f(1)f'(1)$$
$$=\frac{1}{3}\times1\times3=1$$

연습문제 Ⅱ p.196

376 정답 **4**

$$f(x)=2x+\int_0^1(t+x)f(t)dt$$
$$=2x+\int_0^1\{tf(t)+xf(t)\}dt$$
$$=2x+\int_0^1 tf(t)dt+x\int_0^1 f(t)dt$$

$\int_0^1 f(t)dt=A$, $\int_0^1 tf(t)dt=B$로 놓으면

$$f(x)=(2+A)x+B$$

이므로

$$A=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\{(2+A)t+B\}dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}(2+A)t^2+Bt\right]_0^1=1+\frac{1}{2}A+B$$
$$\therefore \frac{1}{2}A-B=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$B=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1\{(2+A)t^2+Bt\}dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}(2+A)t^3+\frac{1}{2}Bt^2\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}A+\frac{1}{2}B$$
$$\therefore \frac{1}{3}A-\frac{1}{2}B=-\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=-14$, $B=-8$

따라서 $f(x)=-12x-8$이므로

$$f(-1)=12-8=4$$

377 정답 **2**

$f(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$이므로 $0\le x\le1$이면 $f(x)\le0$이고, $x>1$이면 $f(x)>0$이다.

$$\therefore \int_0^a|f(x)|dx$$
$$=\int_0^1(-3x^2+2x+1)dx+\int_1^a(3x^2-2x-1)dx$$
$$=\left[-x^3+x^2+x\right]_0^1+\left[x^3-x^2-x\right]_1^a$$
$$=a^3-a^2-a+2$$

따라서 $a^3-a^2-a+2=4$이므로 $a^3-a^2-a-2=0$에서

$$(a-2)(a^2+a+1)=0$$
$$\therefore a=2$$

378 정답 **11**

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=k$라 하면

정적분의 성질에 의하여

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

이므로 $k=k+k$ $\quad\therefore k=0$

즉, $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=0$

$f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$(단, a, b, c는 상수)로 놓으면

$$f(0)=c=-1$$
$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax^2+bx-1)dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_0^1$$
$$=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_{-1}^0(ax^2+bx-1)dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{-1}^0$$
$$=0-\left(-\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1\right)$$
$$=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=3,\ b=0$$

따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로

$$f(2)=11$$

379 정답 **(1) 풀이 참조 (2) $-4\sqrt{3}$**

(1) $\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$$=\int_\alpha^\beta a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$$
$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{(\alpha+\beta)}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$$
$$=a\left\{\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{(\alpha+\beta)}{2}(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)\right\}$$
$$=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\beta+\alpha)^2+6\alpha\beta\}$$
$$=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2)$$
$$=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

다른 풀이

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)dx$$
$$=a\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\}dx$$
$$=a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{(\alpha-\beta)}{2}(x-\alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=a\left\{\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\right\}$$
$$=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 실근이 α, $\beta(\alpha<\beta)$이므로 앞의 (1)의 식에서

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-4x+1)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

이때, 이차방정식 $x^2-4x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$이므로

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2\sqrt{3}$$
$$\therefore \int_{\alpha}^{\beta}(x^2-4x+1)dx=-\frac{1}{6}\times(2\sqrt{3})^3=-4\sqrt{3}$$

380 정답 $\frac{8}{3}$ 서술형

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)=1 \quad \cdots ①$$

즉, $1+a+b=1$에서

$$a+b=0 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ②$$
$$\therefore \int_{0}^{2}f(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{8}{3}+2a+2b$$
$$=\frac{8}{3}+2(a+b)=\frac{8}{3}\ (\because ㉠) \quad \cdots ③$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	주어진 등식으로부터 $f(1)$의 값 구하기	40%
②	a, b의 관계식 구하기	30%
③	$\int_{0}^{2}f(x)dx$의 값 구하기	30%

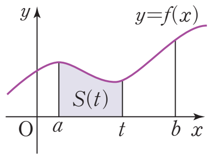
13. 넓이와 적분

개념 보충

* **곡선과 x축 사이의 넓이** (1) (문제편 p.198)

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)\ge0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{a}^{b}f(x)dx$$



함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 구간 $[a, b]$에 속하는 임의의 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=t$로 둘러싸인 도형의 넓이를

$S(t)$

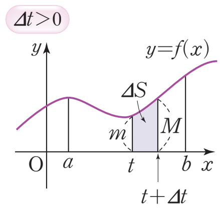
라 하자. 이때, t의 증분 Δt에 대한 $S(t)$의 증분을 ΔS라 하면

$$\Delta S=S(t+\Delta t)-S(t)$$

이다.

(i) $\Delta t>0$일 때

함수 $f(x)$는 구간 $[t, t+\Delta t]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 하면



$$m\Delta t\le\Delta S\le M\Delta t$$

이다. 위의 식의 각 변을 Δt로 나누면

$$m\le\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}\le M$$

(ii) $\Delta t<0$일 때

구간 $[t+\Delta t, t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 하면

$$m(-\Delta t)\le-\Delta S\le M(-\Delta t)$$

이고, $-\Delta t>0$이므로

$$m\le\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}\le M$$

여기서 $\Delta t\longrightarrow0$이면

$$\lim_{\Delta t\to0}m\le\lim_{\Delta t\to0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}\le\lim_{\Delta t\to0}M$$

이고, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이므로

$$\lim_{\Delta t\to0}m=f(t),\ \lim_{\Delta t\to0}M=f(t)$$

이다. 즉, $f(t)\le\lim_{\Delta t\to0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}\le f(t)$이므로

다음이 성립한다.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=f(t),\ S'(t)=f(t)$$

따라서 $S(t)$는 $f(t)$의 한 부정적분이다.

이때, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$S(t)=F(t)+C \ (C\text{는 적분상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있으므로 위의 식의 양변에 $t=a$를 대입하면

$$S(a)=F(a)+C$$

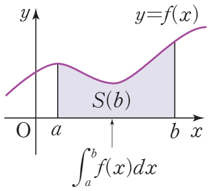
이다. 이때, 넓이의 정의에서 $S(a)=0$이므로

$$0=F(a)+C \qquad \therefore C=-F(a)$$

㉠에 대입하면

$$S(t)=F(t)-F(a) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $t=b$라 하면 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S(b)$는



$$S(b)=F(b)-F(a)$$
$$=\int_a^b f(x)dx$$

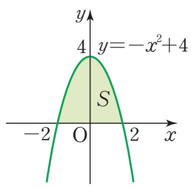
유형 .... pp.200~208

001 정답 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{33}{2}$ (3) $\frac{37}{12}$

(1) $-x^2+4=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

구간 $[-2,\ 2]$에서 $-x^2+4\ge0$이므로 구하는 넓이 S는

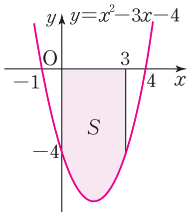


$$S=\int_{-2}^{2}|-x^2+4|dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}$$

(2) $x^2-3x-4=0$, 즉 $(x+1)(x-4)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=4$

구간 $[0,\ 3]$에서 $x^2-3x-4\le0$이므로

구하는 넓이 S는



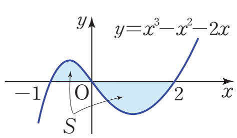
$$S=\int_0^3|x^2-3x-4|dx$$
$$=\int_0^3(-x^2+3x+4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_0^3=\frac{33}{2}$$

(3) $x^3-x^2-2x=0$, 즉

$x(x+1)(x-2)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$

또는 $x=2$



구간 $[-1,\ 0]$에서 $x^3-x^2-2x\ge0$이고, 구간 $[0,\ 2]$에서 $x^3-x^2-2x\le0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{2}|x^3-x^2-2x|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

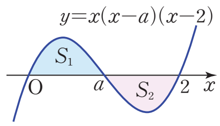
002 정답 (1) S_1-S_2 (2) 1

(1) $S_1=\int_a^c f(x)dx$, $S_2=-\int_c^b f(x)dx$이므로

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$
$$=S_1-S_2$$

(2) 오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이면

$\int_0^2 x(x-a)(x-2)dx=0$이므로



$$\int_0^2 x(x-a)(x-2)dx$$
$$=\int_0^2\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}a=0$$

$\therefore a=1$

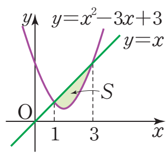
003 정답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) 8

(1) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는

$x^2-3x+3=x$에서

$x=1$ 또는 $x=3$

구간 $[1,\ 3]$에서 $x\ge x^2-3x+3$이므로 구하는 넓이 S는



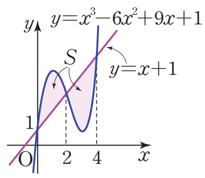
$$S=\int_1^3\{x-(x^2-3x+3)\}dx$$
$$=\int_1^3(-x^2+4x-3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

(2) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 $x^3-6x^2+9x+1=x+1$에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

구간 $[0,\ 2]$에서

$x^3-6x^2+9x+1\ge x+1$,



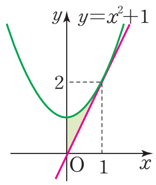
구간 $[2,\ 4]$에서 $x^3-6x^2+9x+1\le x+1$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{0}^{2}\{(x^3-6x^2+9x+1)-(x+1)\}dx$$
$$+\int_{2}^{4}\{(x+1)-(x^3-6x^2+9x+1)\}dx$$
$$=\int_{0}^{2}(x^3-6x^2+8x)dx+\int_{2}^{4}(-x^3+6x^2-8x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-4x^2\right]_2^4$$
$$=4+4=8$$

004 정답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{27}{4}$

(1) $f(x)=x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=2x$에서 $f'(1)=2$이므로 곡선 $y=x^2+1$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$$y=2x$$

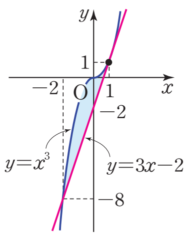


구간 $[0, 1]$에서 $x^2+1\ge 2x$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{0}^{1}(x^2+1-2x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x-x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(2) $f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$에서 $f'(1)=3$이므로 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-1=3(x-1)$$
$$\therefore y=3x-2$$



주어진 곡선과 직선 $y=3x-2$의 교점의 x좌표는

$x^3=3x-2$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

구간 $[-2, 1]$에서 $x^3\ge 3x-2$이므로 구하는 넓이 S는

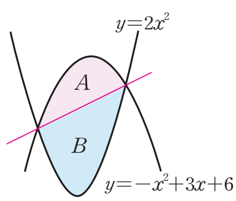
$$S=\int_{-2}^{1}\{x^3-(3x-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1=\frac{27}{4}$$

005 정답 (1) $\frac{27}{2}$ (2) $\frac{11}{6}$ (3) $\frac{9}{4}$

(1) 두 곡선 $y=2x^2$과 $y=-x^2+3x+6$의 교점의 x좌표는

$2x^2=-x^2+3x+6$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

그림과 같이 두 교점을 지나는 직선을 그어 나누어진 영역의 넓이를 각각 A, B라 하면



$$A=\left|\frac{-1}{6}\{2-(-1)\}^3\right|$$
$$=\frac{9}{2}$$
$$B=\left|\frac{2}{6}\times\{(2-(-1)\}^3\right|=9$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$A+B=\frac{9}{2}+9=\frac{27}{2}$$

(2) 주어진 곡선과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$-x^2+3x=x$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로

$$S_1=\left|\frac{-1}{6}\times(2-0)^3\right|=\frac{4}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또, 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2+3x=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$이므로

$$S_1+S_2=\left|\frac{-1}{6}\times(3-0)^3\right|=\frac{9}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $S_1=\frac{4}{3}$, $S_2=\frac{9}{2}-S_1=\frac{19}{6}$이므로

$$S_2-S_1=\frac{19}{6}-\frac{4}{3}=\frac{11}{6}$$

다른 풀이

구간 $[0, 2]$에서 $-x^2+3x\ge x$이므로

$$S_1=\int_{0}^{2}\{(-x^2+3x)-x\}dx=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

또, 구간 $[0, 3]$에서 $-x^2+3x\ge 0$이므로

$$S_1+S_2=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

따라서 $S_1=\frac{4}{3}$, $S_2=\frac{9}{2}-S_1=\frac{19}{6}$이므로

$$S_2-S_1=\frac{19}{6}-\frac{4}{3}=\frac{11}{6}$$

(3) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=x^2-2x$에서

$$f'(0)=0$$

이므로 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-1=0\times(x-0),\ 즉\ y=1$$

또, 방정식 $\frac{1}{3}x^3-x^2+1=1$에서

$$x^3-3x^2=0,\ x^2(x-3)=0$$
$$\therefore x=0(중근)\ 또는\ x=3$$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\left|\frac{1}{12}\times\frac{1}{3}\times(3-0)^4\right|=\frac{9}{4}$$

006 정답 (1) 0 (2) $-\frac{2}{5}$ (3) $\frac{4}{5}$

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x(x^4+x^2+1)dx=\int_{-1}^{1}\underbrace{(x^5+x^3+x)}_{기함수}dx=0$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{0}x(x+1)^4dx=\int_{-1}^{1}(x-1)x^4dx$

$$=\int_{-1}^{1}(x^5-x^4)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-x^4)dx=-\frac{2}{5}$$

(3) $\int_{1}^{3} 2x(x-2)^3 dx = \int_{-1}^{1} 2(x+2)x^3 dx$

$= \int_{-1}^{1} (2x^4 + 4x^3) dx$

$= 2\int_{0}^{1} 2x^4 dx = \frac{4}{5}$

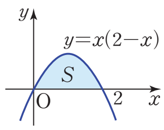
확인문제 pp.200~208

381 정답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) 1 (3) $\frac{1}{2}$

(1) $x(2-x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[0, 2]$에서 $x(2-x) \geq 0$이므로

구하는 넓이 S는



$S = \int_{0}^{2} |x(2-x)| dx$

$= \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x) dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$

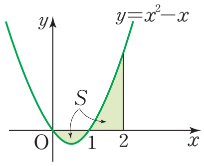
(2) $x^2 - x = 0$, 즉 $x(x-1)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[0, 1]$에서 $x^2 - x \leq 0$이고,

구간 $[1, 2]$에서 $x^2 - x \geq 0$이므로

구하는 넓이 S는



$S = \int_{0}^{2} |x^2 - x| dx$

$= \int_{0}^{1} (-x^2 + x) dx + \int_{1}^{2} (x^2 - x) dx$

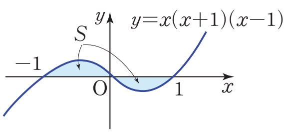
$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2$

$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$

(3) $x(x+1)(x-1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$

또는 $x=1$



구간 $[-1, 0]$에서

$x(x+1)(x-1) \geq 0$이고, 구간 $[0, 1]$에서

$x(x+1)(x-1) \leq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$S = \int_{-1}^{1} |x(x+1)(x-1)| dx$

$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x) dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + x) dx$

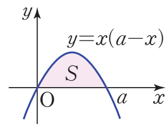
$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

382 정답 2

$x(a-x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

구간 $[0, a]$에서 $x(a-x) \geq 0$이므로 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는



$S = \int_{0}^{a} (ax - x^2) dx$

$= \left[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{1}{6}a^3$

따라서 $\frac{1}{6}a^3 = \frac{4}{3}$에서 $a^3 = 8$이므로

$a = 2$

383 정답 (1) 4 (2) 10

$A=3$에서 $\int_{-2}^{0} f(x) dx = 3$,

$B=7$에서 $\int_{0}^{3} \{-f(x)\} dx = 7$, 즉 $\int_{0}^{3} f(x) dx = -7$

(1) $\int_{-2}^{3} f(x) dx = \int_{-2}^{0} f(x) dx + \int_{0}^{3} f(x) dx$

$= 3 + (-7) = -4$

$\therefore \left|\int_{-2}^{3} f(x) dx\right| = |-4| = 4$

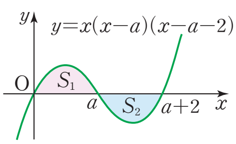
(2) 구간 $[-2, 0]$에서 $f(x) \geq 0$이고,

구간 $[0, 3]$에서 $f(x) \leq 0$이므로

$\int_{-2}^{3} |f(x)| dx = \int_{-2}^{0} f(x) dx + \int_{0}^{3} \{-f(x)\} dx$

$= 3 + 7 = 10$

384 정답 2



그림과 같이 곡선 $y=x(x-a)(x-a-2)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 S_1, S_2라 할 때, $S_1 = S_2$가 되려면

$\int_{0}^{a+2} x(x-a)(x-a-2) dx = 0$

$\therefore \int_{0}^{a+2} x(x-a)(x-a-2) dx$

$= \int_{0}^{a+2} \{x^3 - 2(a+1)x^2 + a(a+2)x\} dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}(a+1)x^3 + \frac{1}{2}a(a+2)x^2\right]_0^{a+2}$

$= \frac{1}{12}(a+2)^3(a-2) = 0$

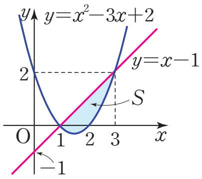
$a > 0$이므로 $a = 2$

385 정답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) 9 (3) $\frac{37}{12}$

(1) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 $x^2-3x+2=x-1$에서

$x=1$ 또는 $x=3$

구간 $[1,\ 3]$에서 $x-1\ge x^2-3x+2$이므로 구하는 넓이 S는

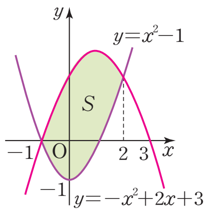


$$S=\int_1^3\{(x-1)-(x^2-3x+2)\}dx$$
$$=\int_1^3(-x^2+4x-3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

(2) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는 $x^2-1=-x^2+2x+3$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

구간 $[-1,\ 2]$에서 $-x^2+2x+3\ge x^2-1$이므로 구하는 넓이 S는

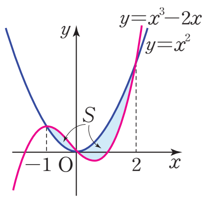


$$S=\int_{-1}^2\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^2(-2x^2+2x+4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^2=9$$

(3) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=x^2$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-1,\ 0]$에서 $x^3-2x\ge x^2$이고, 구간 $[0,\ 2]$에서 $x^3-2x\le x^2$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-1}^0(x^3-2x-x^2)dx+\int_0^2(x^2-x^3+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_0^2=\frac{37}{12}$$

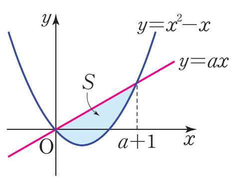
386 정답 5

곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-x=ax$, 즉 $x(x-a-1)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=a+1$

구간 $[0,\ a+1]$에서 $x^2-x\le ax$이므로 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는



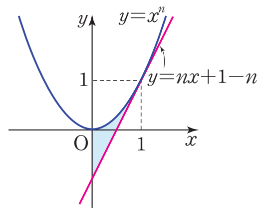
$$S=\int_0^{a+1}\{ax-(x^2-x)\}dx$$
$$=\int_0^{a+1}\{-x^2+(a+1)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+1}{2}x^2\right]_0^{a+1}=\frac{1}{6}(a+1)^3$$

따라서 $\frac{1}{6}(a+1)^3=36$에서 $(a+1)^3=6^3$이므로 $a=5$

387 정답 3

$f(x)=x^n$으로 놓으면

$f'(x)=nx^{n-1}$에서 $f'(1)=n$이므로 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은



$y-1=n(x-1)$

$\therefore\ y=nx+1-n$

곡선과 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1\{x^n-(nx+1-n)\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{n}{2}x^2-(1-n)x\right]_0^1=\frac{n^2-n}{2n+2}$$

따라서 $\frac{n^2-n}{2n+2}=\frac{3}{4}$에서

$2n^2-5n-3=0,\ (2n+1)(n-3)=0$

n은 자연수이므로 $n=3$

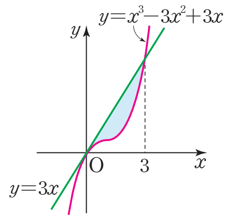
388 정답 $\frac{27}{4}$

$f(x)=x^3-3x^2+3x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+3$에서

$f'(0)=3$

곡선 $y=x^3-3x^2+3x$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은



$y=3x$

또, $x^3-3x^2+3x=3x$, $x^2(x-3)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=3$

곡선과 접선의 교점의 x좌표는 $x=0$(접점) 또는 $x=3$이고 구간 $[0,\ 3]$에서 $x^3-3x^2+3x\le 3x$이므로 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_0^3\{3x-(x^3-3x^2+3x)\}dx$$
$$=\int_0^3(-x^3+3x^2)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}$$

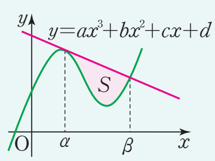
다른 풀이

$$S=\left|\frac{-1}{12}\times(3-0)^4\right|=\frac{27}{4}$$

개념 보충

*** 삼차함수의 그래프와 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이**

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프 위의 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선이 곡선과 만나는 또 다른 점의 x좌표가 β일 때, 삼차함수의 그래프와 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는



$$S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^4}{12}$$

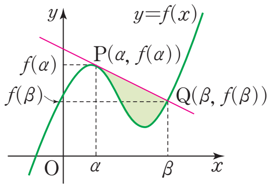
삼차함수

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$(a>0)$의 그래프 위의

점 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접

선의 방정식을 $y=mx+n$



이라고 할 때, 이 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 또 다른 점을 $\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))\,(\alpha<\beta)$라고 하면 삼차방정식 $f(x)=mx+n$의 근은

$$x=\alpha(\text{중근}) \text{ 또는 } x=\beta$$

이다. 즉,

$$f(x)-(mx+n)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

이다. 따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_\alpha^\beta |f(x)-(mx+n)|dx$$
$$=\int_\alpha^\beta |a(x-\alpha)^2(x-\beta)|dx$$

이때, $a>0$이면

$$S=-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta [a(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}]dx$$
$$=-a\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^3+(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\}dx$$
$$=-a\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4+\frac{(\alpha-\beta)}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta$$
$$=-a\left\{\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}+(\alpha-\beta)\times\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}\right\}$$
$$=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

$a<0$인 경우도 마찬가지의 방법으로 구하면

$$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

이 성립한다.

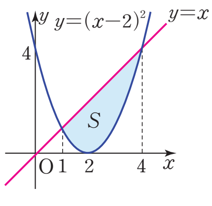
389 정답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{27}{2}$

(1) 곡선 $y=(x-2)^2$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$(x-2)^2=x$에서

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\left|\frac{1}{6}\times(4-1)^3\right|=\frac{9}{2}$$

다른 풀이

$$S=\int_1^4\{x-(x-2)^2\}dx=\int_1^4(-x^2+5x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^4=\frac{9}{2}$$

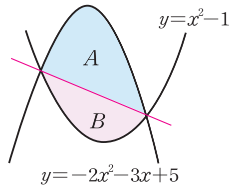
(2) 두 곡선 $y=x^2-1$과 $y=-2x^2-3x+5$의 교점의 x좌표는

$x^2-1=-2x^2-3x+5$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

그림과 같이 두 교점을 지나는 직선을 그어 나누어진 도형의 넓이를 각각 A, B라 하면

$$A=\left|\frac{-2}{6}\times\{1-(-2)\}^3\right|=9$$

$$B=\left|\frac{1}{6}\times\{1-(-2)\}^3\right|$$
$$=\frac{9}{2}$$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$A+B=9+\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$$

390 정답 $\frac{4}{3}$

$f(x)=x^3+x^2$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2x$에서

$f'(-1)=1$이므로 점 $(-1,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$$y=x+1$$

이때, 곡선 $y=x^3+x^2$과 접선의 교점의 x좌표는

$x^3+x^2=x+1$에서 $(x+1)^2(x-1)=0$

$$\therefore x=-1(\text{중근}) \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\left|\frac{1}{12}\times\{1-(-1)\}^4\right|=\frac{4}{3}$$

391 정답 (1) $-\frac{4}{5}$ (2) $\frac{4}{5}$ (3) -128

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3(x-1)^2dx=\int_{-1}^1(x^5-2x^4+x^3)dx$

$$=\int_{-1}^1\overset{\text{우함수}}{\underline{(-2x^4)}}dx+\int_{-1}^1\overset{\text{기함수}}{\underline{(x^5+x^3)}}dx$$
$$=2\int_0^1(-2x^4)dx+0$$
$$=\left[-\frac{4}{5}x^5\right]_0^1=-\frac{4}{5}$$

(2) $\displaystyle\int_0^2 2x(x-1)^3dx=\int_{-1}^1 2(x+1)x^3dx$

$$=\int_{-1}^1(2x^4+2x^3)dx$$
$$=2\int_0^1 2x^4dx=\frac{4}{5}$$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^3 5(x-1)^3(x-2)^2dx$

$$=\int_{-2}^2 5x^3(x-1)^2dx$$
$$=\int_{-2}^2 5x^3(x^2-2x+1)dx$$
$$=\int_{-2}^2\overset{\text{기함수}}{\underline{(5x^5+5x^3)}}dx+\int_{-2}^2\overset{\text{우함수}}{\underline{(-10x^4)}}dx$$
$$=0+2\int_0^2(-10x^4)dx=2\left[-2x^5\right]_0^2=-128$$

392 정답 $\frac{5}{6}$

$\int_{-1}^{1} f(x+1)dx=\int_{0}^{2} f(x)dx$이므로

$$\int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{0}^{1} x^2dx+\int_{1}^{2}(2-x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=\frac{5}{6}$$

연습문제 I ………………………… pp.209~212

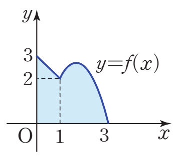
393 정답 $\frac{37}{12}$

구간 $[-2,\ 0]$에서 $x(x-1)(x+2)\ge0$이고,
구간 $[0,\ 1]$에서 $x(x-1)(x+2)\le0$이므로 구하는 넓이는 S는

$$S=\int_{-2}^{1}|x(x-1)(x+2)|dx$$
$$=\int_{-2}^{0} x(x-1)(x+2)dx+\int_{0}^{1}\{-x(x-1)(x+2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1=\frac{37}{12}$$

394 정답 $\frac{35}{6}$

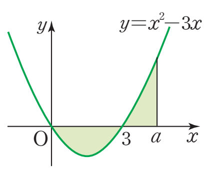
$0\le x\le3$에서 $f(x)\ge0$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{0}^{1}|-x+3|dx+\int_{1}^{3}|-x^2+3x|dx$$
$$=\int_{0}^{1}(-x+3)dx+\int_{1}^{3}(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{10}{3}=\frac{35}{6}$$

395 정답 $\frac{9}{2}$

$$\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$



이므로

$$\int_{3}^{a}(x^2-3x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_3^a=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$

에서 $\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2=0$, 즉 $\frac{1}{6}a^2(2a-9)=0$

$\therefore\ a=\frac{9}{2}$

396 정답 (1) 3 (2) 10

$A=2$에서 $\int_{-1}^{0}\{-f(x)\}dx=2$, 즉 $\int_{-1}^{0} f(x)dx=-2$

$B=5$에서 $\int_{0}^{2} f(x)dx=5$

(1) $\int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$
$$=(-2)+5=3$$
$$\therefore\ \left|\int_{-1}^{2} f(x)dx\right|=3$$

(2) 구간 $[-1,\ 0]$에서 $f(x)\le0$이고, 구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)\ge0$이므로
$$\int_{-1}^{2}\{|f(x)|+f(x)\}dx=2\int_{0}^{2} f(x)dx$$
$$=2\times5=10$$

다른 풀이

$$\int_{-1}^{2}|f(x)|dx=\int_{-1}^{0}\{-f(x)\}dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$$
$$=2+5=7$$
$$\therefore\ \int_{-1}^{2}\{|f(x)|+f(x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}|f(x)|dx+\int_{-1}^{2} f(x)dx$$
$$=7+3=10$$

397 정답 3

두 도형 A, B의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{a}(x-1)(x-a)dx=0$$

이때,

$$\int_{0}^{a}(x-1)(x-a)dx=\int_{0}^{a}\{x^2-(a+1)x+a\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a+1}{2}x^2+ax\right]_0^a$$
$$=-\frac{1}{6}(a^3-3a^2)$$
$$=-\frac{1}{6}a^2(a-3)=0$$

이므로 $a^2(a-3)=0$ $\quad\therefore\ a=3\ (\because\ a>1)$

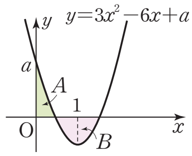
398 정답 $\frac{5}{6}$

$x^2=2-x$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

이때, $x>0$인 두 그래프의 교점의 x좌표는 1이므로 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1} x^2dx+\int_{1}^{2}(2-x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=\frac{5}{6}$$

399 정답 2



$y=3x^2-6x+a=3(x-1)^2+a-3$

이므로 이 곡선은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

따라서 도형 B의 넓이는 직선 $x=1$을 경계로 이등분된다.

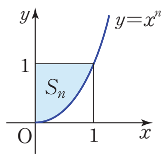
이때, (A의 넓이) : (B의 넓이)$=1:2$

이므로 $\int_0^1(3x^2-6x+a)dx=0$이다.

$$\int_0^1(3x^2-6x+a)dx=\Big[x^3-3x^2+ax\Big]_0^1=1-3+a=0$$

$\therefore a=2$

400 정답 $\frac{1}{100}$



$$S_n=1-\int_0^1 x^n dx$$

$$=1-\Big[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$\therefore S_1\times S_2\times S_3\times\cdots\times S_{99}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{99}{100}$$

$$=\frac{1}{100}$$

401 정답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{64}{3}$

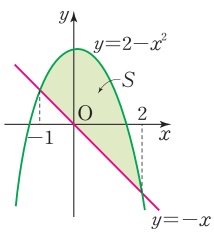
(1) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는

$2-x^2=-x$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

구간 $[-1, 2]$에서 $2-x^2\ge -x$

이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-1}^2|2-x^2-(-x)|dx$$

$$=\int_{-1}^2(-x^2+x+2)dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{-1}^2=\frac{9}{2}$$

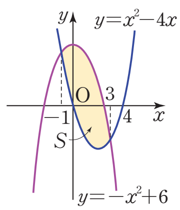
(2) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^2-4x=-x^2+6$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

구간 $[-1, 3]$에서

$-x^2+6\ge x^2-4x$이므로 구하는 넓이 S는

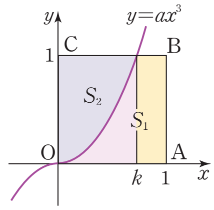


$$S=\int_{-1}^3\{(-x^2+6)-(x^2-4x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^3(-2x^2+4x+6)dx$$

$$=\Big[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\Big]_{-1}^3=\frac{64}{3}$$

402 정답 $\frac{27}{8}$



$S_1=S_2$에서

$$S_1=\frac{1}{2}\times(\square\text{OABC의 넓이})=\frac{1}{2}$$

곡선 $y=ax^3$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표를 k로 놓으면

$ak^3=1$ …… ㉠

또, $S_1=\int_0^k ax^3dx+(1-k)=\frac{1}{2}$에서

$$\frac{ak^4}{4}-k=-\frac{1}{2}$$

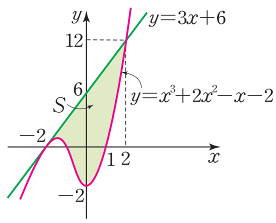
$\therefore k(ak^3-4)=-2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $k=\frac{2}{3}$

$k=\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면 $a\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=1$

$\therefore a=\frac{27}{8}$

403 정답 $\frac{64}{3}$



$y'=3x^2+4x-1$이므로

$x=-2$일 때 $y'=3$

곡선 위의 점 $(-2, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=3(x+2)$

$\therefore y=3x+6$

한편, $x^3+2x^2-x-2=3x+6$, $(x+2)^2(x-2)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

구간 $[-2, 2]$에서 $x^3+2x^2-x-2\le 3x+6$이므로

구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^2\{(3x+6)-(x^3+2x^2-x-2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^2(-x^3-2x^2+4x+8)dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x^2+8x\Big]_{-2}^2=\frac{64}{3}$$

404 정답 $\frac{32}{3}$

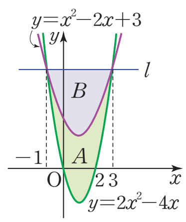
두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

$2x^2-4x=x^2-2x+3$에서 $x^2-2x-3=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

오른쪽 그림과 같이 두 곡선의 교점을 지나는 직선 l을 긋고

곡선 $y=x^2-2x+3$과 직선 l로 둘러싸인 도형의 넓이를 B, 구하는 도형의 넓이를 A라 하면



$$B=\left|\frac{1}{6}\times\{3-(-1)\}^3\right|=\frac{32}{3}$$

$$A+B=\left|\frac{2}{6}\times\{3-(-1)\}^3\right|=\frac{64}{3}$$

$$\therefore A=(A+B)-B=\frac{64}{3}-\frac{32}{3}=\frac{32}{3}$$

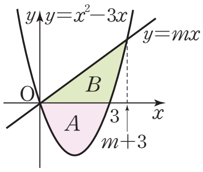
다른 풀이

구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{3}|(2x^2-4x)-(x^2-2x+3)|dx$$

$$=\int_{-1}^{3}|x^2-2x-3|dx=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=\frac{32}{3}$$

405 정답 54



그림과 같이 이등분된 두 도형의 넓이를 각각 A, B라 하면

(i) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$x=0$ 또는 $x=3$이므로

$$A=\left|\frac{1}{6}(3-0)^3\right|=\frac{9}{2}$$

(ii) 곡선 $y=x^2-3x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x=mx$, $x(x-m-3)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=m+3$

$$\therefore A+B=\left|\frac{1}{6}(m+3-0)^3\right|=\frac{(m+3)^3}{6}$$

이때, $A=B$이므로 $2A=\frac{(m+3)^3}{6}$, 즉 $\frac{(m+3)^3}{6}=9$

$\therefore (m+3)^3=54$

다른 풀이

$$\int_0^{m+3}|x^2-3x-mx|dx=2\int_0^3|x^2-3x|dx$$

이때,

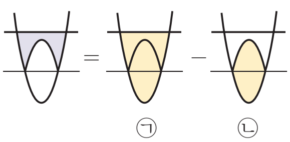
$$(\text{좌변})=\int_0^{m+3}(-x^2+3x+mx)dx$$

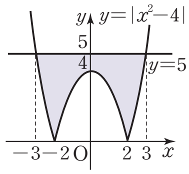
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{m+3}{2}x^2\right]_0^{m+3}=\frac{(m+3)^3}{6}$$

$$(\text{우변})=2\int_0^3(-x^2+3x)dx=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=9$$

이므로 $\frac{1}{6}(m+3)^3=9$ $\quad\therefore (m+3)^3=54$

406 정답 $\frac{44}{3}$





(i) 곡선과 직선 $y=5$의 교점의 x좌표는

$|x^2-4|=5$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

$$(\text{㉠의 넓이})=\left|\frac{1}{6}\times\{3-(-3)\}^3\right|$$

$$=36$$

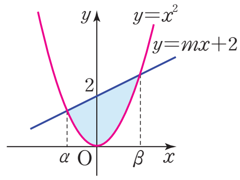
(ii) 곡선과 x축의 교점의 x좌표는

$|x^2-4|=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$$(\text{㉡의 넓이})=2\times\left|\frac{1}{6}\times\{2-(-2)\}^3\right|=\frac{64}{3}$$

따라서 구하는 넓이 S는 $\quad S=36-\frac{64}{3}=\frac{44}{3}$

407 정답 0



곡선 $y=x^2$과 직선 $y=mx+2$의 교점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하고, 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(m)$이라고 하면

$$S(m)=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

이므로 $\beta-\alpha$가 최소일 때 $S(m)$도 최소이다.

이때, α, β는 방정식 $x^2=mx+2$의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=-2$

$$\therefore \beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{m^2+8}\geq\sqrt{8}$$

따라서 $m=0$일 때 넓이가 최소가 된다.

408 정답 $\frac{1}{12}$

$y'=3x^2-8x+3$이므로 점 $(1, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=-2(x-1)$ $\quad\therefore y=-2x+2$

곡선 $y=x^3-4x^2+3x$와 직선 $y=-2x+2$의 교점의 x좌표를 구하면 $x^3-4x^2+3x=-2x+2$에서

$x^3-4x^2+5x-2=0$, $(x-1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=1(\text{중근})$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{12}(2-1)^4=\frac{1}{12}$$

409 정답 $\frac{8}{5}$

곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구하면 $x(x-2)^3=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

이때, 구간 $[0, 2]$에서 $x(x-2)^3\le 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^2 |x(x-2)^3|dx=\int_0^2\{-x(x-2)^3\}dx$$
$$=-\int_0^2 x(x-2)^3dx=-\int_{-2}^0 (x+2)x^3dx$$
$$=-\int_{-2}^0(x^4+2x^3)dx=-\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4\right]_{-2}^0=\frac{8}{5}$$

410 정답 1

조건 (가)에서 $f(x)=f(-x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다.

조건 (나)에서 $\int_{-2}^2 f(x)dx=2\int_0^2 f(x)dx=6$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=3$$

또, $\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$이므로

조건 (다)의 $\int_{-1}^2 f(x)dx=4$에서

$$\int_{-1}^2 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+3=4$$
$$\therefore \int_0^1 f(x)dx=4-3=1$$

411 정답 ③

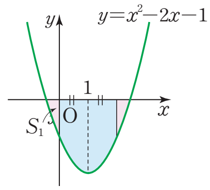
$\int_0^a f(x)dx=\int_0^{-a} f(x)dx$에서

$$\int_0^a f(x)dx-\int_0^{-a} f(x)dx=0$$
$$\int_0^a f(x)dx+\int_{-a}^0 f(x)dx=0$$
$$\therefore \int_{-a}^a f(x)dx=0$$

따라서 $f(x)$는 기함수이고, 기함수의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프로 적합하지 않은 것은 ③이다.

[참고] ③의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 우함수의 그래프이다. 따라서 $\int_0^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx$를 만족한다.

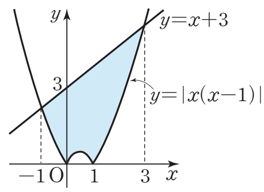
412 정답 $\frac{10}{3}$



곡선 $y=x^2-2x-1$은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 그림에서

$$S_2-S_1$$
$$=2\int_0^1 |x^2-2x-1|dx$$
$$=2\int_0^1(-x^2+2x+1)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^1=\frac{10}{3}$$

413 정답 $\frac{31}{3}$

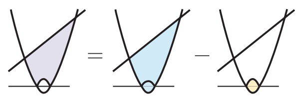


곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하면 $x+3=x(x-1)$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

한편, 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구하면 $x(x-1)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$



이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\frac{1}{6}\times\{3-(-1)\}^3-2\times\frac{1}{6}\times(1-0)^3$$
$$=\frac{32}{3}-\frac{1}{3}=\frac{31}{3}$$

414 정답 6

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이다.

한편, 함수 x^3+x는 기함수이고

(기함수)×(우함수)=(기함수)이므로

$$\int_{-1}^1(x^3+x+1)f(x)dx$$
$$=\underbrace{\int_{-1}^1(x^3+x)f(x)dx}_{\text{기함수}}+\underbrace{\int_{-1}^1 f(x)dx}_{\text{우함수}}$$
$$=2\int_0^1 f(x)dx=6$$

415 정답 $2a$

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_{0}^{1} f(x)dx$$

$g(-x)=-g(x)$에서 $g(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx=0$$

또, $F(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$$F(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-F(x)$$

에서 $F(x)=f(x)g(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=0$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^{1}\{f(x)+g(x)+f(x)g(x)\}dx&=2\int_{0}^{1} f(x)dx\\&=2a\end{aligned}$$

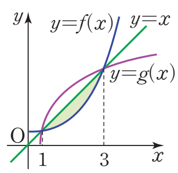
416 정답 $\frac{2}{3}$ 서술형

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다. … ①

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}=x$에서

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ … ②



따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=2\int_{1}^{3}|x-f(x)|dx=2\times\left|\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\times(3-1)^3\right|=\frac{2}{3}$$

… ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	역함수의 그래프의 성질 이용하기	40%
②	곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표 구하기	30%
③	도형의 넓이 구하기	30%

14. 속도와 거리

개념 보충

*** 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 위치의 변화량**

(문제편 p.216)

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때

(1) 점 P의 시각 t에서의 위치 x는

$$x=x_0+\int_{a}^{t} v(t)dt$$

(2) 점 P의 $t=a$에서 $t=b$까지의 위치의 변화량은

$$\int_{a}^{b} v(t)dt$$

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$는

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

이다. 즉, $f(t)$는 $v(t)$의 한 부정적분이므로

$$\int_{a}^{t} v(t)dt=f(t)-f(a)$$

즉, $f(t)=f(a)+\int_{a}^{t} v(t)dt$

이다. 이때, $t=a$에서의 위치가 x_0일 때 $f(a)=x_0$이므로

$$x=f(t)=x_0+\int_{a}^{t} v(t)dt$$

또, 점 P의 $t=a$에서 $t=b$까지의 위치의 변화량은

$$f(b)-f(a)=\int_{a}^{b} v(t)dt$$

이다.

유형 pp.218~221

001 정답 (1) 4 (2) -12 (3) -15 (4) 17

시각 t에서의 점 P의 위치를 $f(t)$라 하면

$$\begin{aligned}f(t)&=f(0)+\int_{0}^{t} v(t)dt=f(0)+\int_{0}^{t}(4-2t)dt\\&=f(0)+\Big[4t-t^2\Big]_{0}^{t}=-t^2+4t+f(0)\end{aligned}$$

이고 $f(0)=0$이므로 $f(t)=-t^2+4t$

(1) $f(t)=-t^2+4t=0$에서 $t=4$

따라서 점 P가 다시 원점을 지나는 시각은 4이다.

(2) $t=6$일 때의 점 P의 위치는

$$f(6)=-6^2+4\times6=-12$$

(3) $t=1$에서 $t=6$까지의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned}\int_{1}^{6} v(t)dt&=\int_{1}^{6}(4-2t)dt\\&=\Big[4t-t^2\Big]_{1}^{6}=-15\end{aligned}$$

(4) $t=1$에서 $t=6$까지의 움직인 거리는 $\int_1^6 |v(t)|dt$이고

$v(t)=4-2t$에서 $1\le t\le 2$일 때 $v(t)\ge 0$이고, $2\le t\le 6$일 때 $v(t)\le 0$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^6 |v(t)|dt&=\int_1^2 v(t)dt+\int_2^6 \{-v(t)\}dt\\&=\int_1^2 (4-2t)dt+\int_2^6 (2t-4)dt\\&=\Big[4t-t^2\Big]_1^2+\Big[t^2-4t\Big]_2^6\\&=17\end{aligned}$$

002 정답 (1) 105 m (2) 145 m (3) 5초 후, 125 m

(1) $\int_0^7 (50-10t)dt=\Big[50t-5t^2\Big]_0^7=105\ (\mathrm{m})$

(2) $$\begin{aligned}\int_0^7 |50-10t|dt&=\int_0^5 (50-10t)dt+\int_5^7 \{-(50-10t)\}dt\\&=\Big[50t-5t^2\Big]_0^5+\Big[-50t+5t^2\Big]_5^7\\&=145\ (\mathrm{m})\end{aligned}$$

(3) 최고 지점에 도달할 때 이 물체의 속도는 0이므로

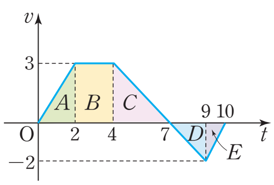
$v(t)=50-10t=0 \qquad \therefore t=5$

이때의 지면으로부터의 높이를 h m라 하면

$$h=\int_0^5 (50-10t)dt=\Big[50t-5t^2\Big]_0^5=125\ (\mathrm{m})$$

003 정답 (1) 9 (2) $\frac{5}{2}$ (3) $\frac{33}{2}$

오른쪽 그림과 같이 5개의 영역의 넓이를 각각 A, B, C, D, E라고 하면



(1) $t=4$일 때 점 P의 위치는 $\int_0^4 v(t)dt$이므로 $A+B$와 같다.

$$\therefore \int_0^4 v(t)dt=A+B=\frac{1}{2}\times(4+2)\times 3=9$$

(2) $t=4$에서 $t=9$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_4^9 v(t)dt$이므로 $C+(-D)$와 같다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_4^9 v(t)dt&=C-D\\&=\frac{1}{2}\times 3\times 3-\frac{1}{2}\times 2\times 2=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

(3) $t=0$에서 $t=10$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_0^{10} |v(t)|dt$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{10} |v(t)|dt&=(A+B+C)+(D+E)\\&=\frac{1}{2}\times(7+2)\times 3+\frac{1}{2}\times 3\times 2\\&=\frac{33}{2}\end{aligned}$$

004 정답 (1) 225 m (2) 36π cm^3

(1) 제동을 건 지 t초 후에 열차가 정지하였다고 하면

$v(t)=30-2t=0 \qquad \therefore t=15$

따라서 제동을 건 후부터 정지할 때까지 15초 동안 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^{15} |v(t)|dt&=\int_0^{15} |30-2t|dt=\int_0^{15} (30-2t)dt\\&=\Big[30t-t^2\Big]_0^{15}=225\ (\mathrm{m})\end{aligned}$$

(2) 물이 멈출 때의 속도는 0이므로

$v(t)=6t-t^2=0$에서 $t=0$ 또는 $t=6$

따라서 6초 후에 물이 멈추고, 물이 멈출 때까지 흘러간 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^6 v(t)dt&=\int_0^6 (6t-t^2)dt\\&=\Big[3t^2-\frac{1}{3}t^3\Big]_0^6=36\ (\mathrm{cm})\end{aligned}$$

이때, 구하는 물의 양은 반지름의 길이가 1 cm인 수도관의 단면의 넓이와 물이 흘러간 거리의 곱이므로

$\pi\times 1^2\times 36=36\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

확인문제 pp.218~221

417 정답 (1) 43 (2) 0 (3) 20

(1) t초 후의 점 P의 위치를 $f(t)$라 하면 $f(0)=3$이므로

$$\begin{aligned}f(4)&=f(0)+\int_0^4 v(t)dt=3+\int_0^4 (20-5t)dt\\&=3+\Big[20t-\frac{5}{2}t^2\Big]_0^4=43\end{aligned}$$

(2) $\int_2^6 (20-5t)dt=\Big[20t-\frac{5}{2}t^2\Big]_2^6=0$

(3) $2\le t\le 4$에서 $20-5t\ge 0$, $4\le t\le 6$에서 $20-5t\le 0$이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned}\int_2^6 |20-5t|dt&=\int_2^4 (20-5t)dt+\int_4^6 (-20+5t)dt\\&=\Big[20t-\frac{5}{2}t^2\Big]_2^4+\Big[-20t+\frac{5}{2}t^2\Big]_4^6\\&=10+10=20\end{aligned}$$

418 정답 (1) $-\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$

(1) $\int_1^2 (t^2-4t+3)dt=\Big[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\Big]_1^2=-\frac{2}{3}$

(2) $1\le t\le 2$에서 $v(t)\le 0$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^2 |t^2-4t+3|dt&=\int_1^2 (-t^2+4t-3)dt\\&=\Big[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\Big]_1^2=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

419 정답 (1) 48 m (2) 53 m (3) 10 m

던지고 나서 t초 후의 물체의 지면으로부터의 높이를 $h(t)$라 하면

$$h(t)=h(0)+\int_0^t (30-10t)\,dt$$
$$=8+\Big[30t-5t^2\Big]_0^t$$
$$=8+30t-5t^2\,(\mathrm{m})$$

(1) $h(2)=8+60-20=48\,(\mathrm{m})$

(2) 최고 지점에서의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$30-10t=0 \qquad \therefore t=3$

$\therefore h(3)=8+90-45=53\,(\mathrm{m})$

(3) 던진 후 2초부터 4초까지의 물체가 실제로 움직인 거리는

$$\int_2^4 |v(t)|\,dt$$

$v(t)=30-10t$에서 $2\le t\le 3$일 때 $v(t)\ge 0$이고, $3\le t\le 4$일 때 $v(t)\le 0$이므로

$$\int_2^4 |v(t)|\,dt=\int_2^4 |30-10t|\,dt$$
$$=\int_2^3 (30-10t)\,dt+\int_3^4 (10t-30)\,dt$$
$$=\Big[30t-5t^2\Big]_2^3+\Big[5t^2-30t\Big]_3^4$$
$$=5+5=10\,(\mathrm{m})$$

420 정답 (1) 61.25 m (2) 6초

(1) 최고 지점에 도달했을 때의 물체의 속도는 0이므로

$v(t)=25-10t=0 \qquad \therefore t=\frac{5}{2}$

따라서 최고 지점의 지면으로부터의 높이 h는

$$h=30+\int_0^{\frac{5}{2}} v(t)\,dt$$
$$=30+\int_0^{\frac{5}{2}} (25-10t)\,dt$$
$$=30+\Big[25t-5t^2\Big]_0^{\frac{5}{2}}$$
$$=\frac{245}{4}=61.25\,(\mathrm{m})$$

(2) 물체가 지면에 떨어질 때 즉 지면으로부터의 높이가 0인 시각을 $t=a$라 하면

$$30+\int_0^a v(t)\,dt=30+\int_0^a (25-10t)\,dt$$
$$=30+\Big[25t-5t^2\Big]_0^a$$
$$=-5a^2+25a+30=0$$

에서 $-5(a+1)(a-6)=0$

이때, $a>0$이므로 $a=6$

따라서 쏘아 올린 후 이 물체가 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 6초이다.

421 정답 (1) 4 (2) 3

(1) 출발 후 점 P가 다시 원점을 지날 때의 시각을 a라 하면

$$\int_0^a v(t)\,dt=0$$

즉, $0\le t\le a$에서 t축 윗부분의 넓이와 아랫부분의 넓이가 같을 때이므로 주어진 그래프에서 $a=4$이다.

(2) $3\le t\le 4$일 때 $v(t)\le 0$이고, $4\le t\le 6$일 때 $v(t)\ge 0$이므로 $t=3$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^6 |v(t)|\,dt=\int_3^4 \{-v(t)\}\,dt+\int_4^6 v(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times2\times2=3$$

422 정답 ㄷ

주어진 그래프의 포물선은 t축과 0, 2에서 만나므로 포물선의 식을

$y=kt(t-2)$(단, k는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다. 이 포물선이 점 $(1,\,1)$을 지나므로

$1=k(1-2)$, 즉 $k=-1$

따라서 포물선의 식이 $y=-t(t-2)$이므로

$$v(t)=\begin{cases} -t^2+2t & (0\le t\le 2) \\ 2-t & (2\le t\le 3) \\ t-4 & (t\ge 3) \end{cases}$$

ㄱ. 시각 t일 때 점 P의 위치를 $f(t)$라 하면 $f(t)=\int_0^t v(t)\,dt$이므로

$$f(1)=\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^1 (-t^2+2t)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+t^2\Big]_0^1=\frac{2}{3}$$

따라서 $t=1$일 때 점 P의 위치는 $\frac{2}{3}$이다. (거짓)

ㄴ. 속도가 음일 때 음의 방향으로 움직이므로 $2<t<4$일 때에만 음의 방향으로 움직인다. (거짓)

ㄷ. $t=1$부터 $t=3$까지의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 v(t)\,dt=\int_1^2 (-t^2+2t)\,dt+\int_2^3 (2-t)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+t^2\Big]_1^2+\Big[2t-\frac{1}{2}t^2\Big]_2^3$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\ (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

423 정답 54 m

$v(t)=18-3t=0$에서 $\qquad t=6$

따라서 전동차는 제동을 건 후 6초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^6 |18-3t|\,dt=\int_0^6 (18-3t)\,dt$$
$$=\Big[18t-\frac{3}{2}t^2\Big]_0^6=54\,(\mathrm{m})$$

424 정답 128π **cm**^{3}

$t=0$에서 $t=8$까지 $v=8-t\ge0$이므로 물이 이동한 거리는

$$\int_0^8|v(t)|dt=\int_0^8(8-t)dt$$
$$=\left[8t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^8=32\ (\text{cm})$$

이때, 흘러나온 물의 양은

(파이프의 단면의 넓이)×(물이 이동한 거리)

이므로 구하는 물의 양은

$\pi\times2^2\times32=128\pi\ (\text{cm}^3)$

연습문제 I

pp.222~224

425 정답 (1) -22 (2) 59

(1) 처음 위치 $x_0=10$이므로 t분 후의 점 P의 위치를 $f(t)$라고 하면

$$f(t)=x_0+\int_0^t v(t)dt$$
$$=10+\int_0^t(-3t^2+24t-36)dt$$
$$=10+\left[-t^3+12t^2-36t\right]_0^t$$
$$=-t^3+12t^2-36t+10$$

이고, 속도 v의 부호가 바뀔 때 운동 방향을 바꾸므로 $v(t)=0$에서

$-3t^2+24t-36=0$

$-3(t-2)(t-6)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=6$

따라서 처음 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=2$이고 그때의 점 P의 위치는

$f(2)=-2^3+12\times2^2-36\times2+10=-22$

(2) $v(t)=-3t^2+24t-36=-3(t-2)(t-6)$에서 $0\le t\le2$일 때 $v(t)\le0$이고, $2\le t\le5$일 때 $v(t)\ge0$이므로 출발 후 5분 동안 움직인 거리는

$$\int_0^5|v(t)|dt=\int_0^2\{-v(t)\}dt+\int_2^5 v(t)dt$$
$$=\int_0^2(3t^2-24t+36)dt$$
$$+\int_2^5(-3t^2+24t-36)dt$$
$$=\left[t^3-12t^2+36t\right]_0^2+\left[-t^3+12t^2-36t\right]_2^5$$
$$=59$$

426 정답 3

점 P가 다시 원점으로 돌아올 때까지 걸리는 시간을 a라 하면 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^a v(t)dt=\int_0^a(-2t^2+4t)dt$$
$$=\left[-\frac{2}{3}t^3+2t^2\right]_0^a$$
$$=-\frac{2}{3}a^3+2a^2$$

점 P가 다시 원점으로 돌아오면 $-\frac{2}{3}a^3+2a^2=0$이므로

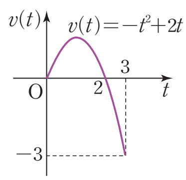
$-\frac{2}{3}a^2(a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=3$

따라서 점 P가 다시 원점으로 돌아올 때까지 걸리는 시간은 3이다.

427 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

점 P의 속도 $v(t)=-t^2+2t$의 그래프는 오른쪽과 같다.



ㄱ. 점 P의 속도 $v(t)=-t^2+2t=0$이 되는 t의 값은 $t=0$ 또는 $t=2$이므로 점 P는 $0<t\le3$에서 한 번 정지한다. (참)

ㄴ. 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^a(-t^2+2t)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^a$$
$$=-\frac{1}{3}a^3+a^2$$

이때, $-\frac{1}{3}a^3+a^2=-\frac{1}{3}a^2(a-3)=0$에서 위치의 변화량이 0이 되는 a의 값은 3이므로 $0<t\le3$에서 점 P는 원점을 한 번 지난다. 즉, $t=3$일 때 점 P는 원점으로 되돌아온다. (참)

ㄷ. $0\le t\le2$에서 $v(t)\ge0$, $2\le t\le3$에서 $v(t)\le0$이므로 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 실제 움직인 거리는

$$\int_0^2(-t^2+2t)dt+\int_2^3(t^2-2t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3=\frac{8}{3}\ (\text{참})$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

428 정답 72.5 m

t초 후 지면으로부터의 공의 높이 x m는

$$x=50+\int_0^t(15-10t)dt=-5t^2+15t+50\ (\text{m})$$

공이 지면에 닿을 때의 높이는 0이므로

$-5t^2+15t+50=0,\ -5(t+2)(t-5)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=5$

이때, $t>0$이므로 $t=5$

따라서 구하는 거리 s는

$$s=\int_0^5 |15-10t|\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{3}{2}}(15-10t)dt+\int_{\frac{3}{2}}^5(10t-15)dt$$
$$=\frac{145}{2}=72.5\,(\mathrm{m})$$

429 정답 10초

a초 후에 지면에 도착한다고 하면 그때의 높이는 0이므로

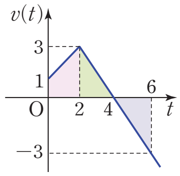
$$490+\int_0^a v(t)dt=490+\int_0^a(-9.8t)dt=490-4.9a^2=0$$

$a^2=100$ $\quad\therefore a=10$ (초)

430 정답 10

$t=0$에서 $t=6$까지 주어진 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 점 P가 움직인 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는



$$\frac{1}{2}\times(1+3)\times2+\frac{1}{2}\times2\times3+\frac{1}{2}\times2\times3=10$$

431 정답 ⑤

ㄱ. 출발 후 1초 동안 속도 $v(t)=0$이 되는 곳이 없으므로 1초 동안 멈춘 적이 없다. (거짓)

ㄴ. 방향을 바꾼 시각은 속도 $v(t)$의 부호가 바뀌는 점, 즉 $t=2$, $t=4$일 때이므로 점 P는 출발 후 운동 방향을 2번 바꾸었다. (참)

ㄷ. t초 후의 위치를 $x(t)$라 하면, 4초 후의 위치는

$x(4)=x(0)+\int_0^4 v(t)dt=0$이므로 점 P는 출발하고 나서 4초 후 원점에 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

432 정답 ㄷ

ㄱ. 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량

$\int_0^6 v(t)dt$는 구간 $[0, 6]$에서 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

따라서 $\frac{1}{2}\times(2+6)\times3=12$이므로 점 P는 출발한 지 6초 후 12의 위치에 있다. (거짓)

ㄴ. 점 P는 위치의 변화량이 최대인 시각 $t=6$에서 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다. (거짓)

ㄷ. $t=4$에서 $t=8$까지의 점 P의 위치의 변화량은 0이므로 그때의 위치는 같다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

433 정답 2

지하철이 제동을 건 후 정지할 때까지 걸리는 시간은

$v(t)=20-at=0$에서 $\quad t=\frac{20}{a}$

따라서 지하철이 제동을 건 후 $\frac{20}{a}$초 후에 정지하므로 완전히 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{20}{a}}(20-at)dt=\left[20t-\frac{a}{2}t^2\right]_0^{\frac{20}{a}}$$
$$=\frac{400}{a}-\frac{200}{a}=\frac{200}{a}$$

즉, $\frac{200}{a}=100$이므로 $\quad a=2$

434 정답 3

A, B의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_A(t)$, $x_B(t)$라 하면

$$x_A(t)=\int_0^t(4t+7)dt=2t^2+7t$$
$$x_B(t)=(-3)+\int_0^t(3t^2-8t+16)dt$$
$$=t^3-4t^2+16t-3$$

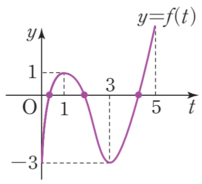
$0<t\le5$일 때 두 점 A, B가 만나는 횟수는 방정식 $x_A(t)=x_B(t)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$$t^3-4t^2+16t-3=2t^2+7t$$
$$t^3-6t^2+9t-3=0$$

여기서 $f(t)=t^3-6t^2+9t-3$으로 놓으면

$$f'(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$$

$f'(t)=0$에서 $t=1$, $t=3$이므로 그래프의 개형은 오른쪽과 같다.



$0<t\le5$에서 방정식 $f(t)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 가지므로 두 점 A, B는 3회 만난다.

435 정답 ③

출발하여 3 km를 달릴 때까지 걸리는 시간을 a분이라고 하면

$\int_0^a |v(t)|dt=3$에서 $\quad \int_0^a\left(\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right)dt=3$

$$\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}a^2=3,\ (a-2)(a^2+3a+6)=0$$
$$\therefore a=2$$

따라서 고속 열차는 출발하여 2분 동안 3 km를 달리고 그 이후부터는 $v(2)$의 일정한 속도로 달린다.

이때, $v(2)=\frac{3}{4}\times2^2+\frac{1}{2}\times2=4$이므로 5분 동안 달린 거리는

$$3+\int_2^5|v(t)|dt=3+\int_2^5 4dt=15\,(\mathrm{km})$$

14강

436 정답 4

물이 멈추었을 때의 속도는 0이므로

$v(t)=-t^2+at=-t(t-a)=0$에서

$t=0$ 또는 $t=a$

이때, $t>0$이므로 $t=a$, 즉 a초 후에 물이 멈추었다.

물이 이동한 거리는

$$\int_0^a(-t^2+at)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}at^2\right]_0^a=\frac{1}{6}a^3$$

따라서 흘러나온 물의 양이 96π cm^{3}이므로

$$\pi\times3^2\times\frac{1}{6}a^3=96\pi,\ a^3=64$$

$\therefore a=4$

연습문제 II ······························ p.225

437 정답 13

2초 후의 높이가 6이므로

$$6=0+\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(a-10t)dt$$

$$=\left[at-5t^2\right]_0^2=2a-20=6$$

$2a=26\qquad\therefore a=13$

438 정답 2초 후

두 점 P, Q의 t초 후의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라고 하면

$$f(t)=\int_0^t 5t(3t-4)dt=5t^3-10t^2$$

$$g(t)=\int_0^t t(2t^2+3t-8)dt=\frac{1}{2}t^4+t^3-4t^2$$

두 점 P, Q가 출발한 후 a초 후에 다시 만난다고 하면

$f(a)=g(a)$에서

$$5a^3-10a^2=\frac{1}{2}a^4+a^3-4a^2$$

$$\frac{1}{2}a^2(a^2-8a+12)=0$$

$$\frac{1}{2}a^2(a-2)(a-6)=0$$

$\therefore a=0$ 또는 $a=2$ 또는 $a=6$

따라서 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 다시 만나는 것은 2초 후이다.

439 정답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b|v(t)|dt$이다.

이때, $a\le t\le b$에서 $v(t)\ge0$이므로

$$\int_a^b|v(t)|dt=\int_a^b v(t)dt\ (\text{참})$$

ㄴ. $\int_0^c v(t)dt=0$이면 $t=0$에서 $t=c$까지 위치의 변화량이 0이므로 $t=c$일 때 점 P는 출발점과 같은 위치에 있다. (참)

ㄷ. $t=b$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=b$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾼다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

440 정답 3 ······························ 서술형

출발한 지 2초 후의 점 A의 위치는

$$\int_0^2(t+a)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+at\right]_0^2=2+2a$$

이므로 $(2+2a,\ 0)$이고, 점 B의 위치는

$$\int_0^2(2t+1)\ dt=\left[t^2+t\right]_0^2=6$$

이므로 $(0,\ 6)$이다. ··· ①

이때, 두 점 $(2+2a,\ 0)$, $(0,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{2+2a}+\frac{y}{6}=1$이고, 이 직선이 점 $(4,\ 3)$을 지나므로 ··· ②

$$\frac{4}{2+2a}+\frac{3}{6}=1,\ \frac{2}{1+a}=\frac{1}{2}$$ ··· ③

$\therefore a=3$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	t초 후 두 점 A, B의 좌표 구하기	40%
②	두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식 구하기	30%
③	a의 값 구하기	30%