수학 기본 실력 100% 충전

수력 충전

개념 충전 » 수능 기초 연산서

미적분

[정답 및 해설]

자이스토리 · 수경출판사

Ⅰ 수열의 극한

Ⅰ-1 수열의 극한

pp. 10~27

01 답 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2^n}\right)=0$
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}=0$

1) n이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{1}{n+1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 0이다.
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

2) n이 한없이 커질 때, 일반항 $-\frac{1}{2^n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 0이다.
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2^n}\right)=0$

3) n이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 0이다.
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}=0$

02 답 1) 1 2) 2 3) 0

1) n이 한없이 커질 때, 일반항 $1+\left(\frac{1}{2}\right)^n$의 값은 1에 한없이 가까워진다.
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1$

2) n이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{2n-1}{n}=2-\frac{1}{n}$의 값은 2에 한없이 가까워진다.
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2$

3) n이 한없이 커질 때, 일반항 $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$의 값은 0에 한없이 가까워진다.
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$

03 답 1) 발산 2) 발산 3) 수렴 4) 발산 5) 수렴
6) 발산 7) 수렴 8) 발산

1) 수열 $\{2n+1\}$은 3, 5, 7, 9, 11, …이므로 양의 무한대로 발산한다.
즉, $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)=\infty$

2) 수열 $\{-2n+1\}$은 -1, -3, -5, -7, …이므로 음의 무한대로 발산한다.
즉, $\lim\limits_{n\to\infty}(-2n+1)=-\infty$

3) n이 한없이 커질 때, 일반항 $1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 이 수열은 1에 수렴한다.
즉, $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1$

4) 수열 $\{2+(-1)^n\}$은 1, 3, 1, 3, 1, …이므로 진동한다. 즉, 발산한다.

5) n이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{1}{n^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.
즉, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

6) n이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{n^2}{2n}=\frac{n}{2}$의 값은 양의 무한대로 발산한다.
즉, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}=\infty$

7) n이 한없이 커져도 주어진 수열의 일반항의 값은 항상 -4로 일정하다. 따라서 이 수열은 -4에 수렴한다.
즉, $\lim\limits_{n\to\infty}(-4)=-4$

8) n이 한없이 커질 때, 일반항 $(-1)^{n+1}\times 4$의 값은 4와 -4의 값이 반복되므로 진동한다. 즉, 발산한다.

04 답 1) 1 2) 발산 3) 발산 4) 0

1) n이 한없이 커질 때, 일반항 $1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n$의 값은 1에 한없이 가까워진다.
따라서 극한값은 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}=1$

2) n이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{-n^2+n}{n}=-n+1$의 값은 음의 무한대로 발산한다.

3) n이 한없이 커질 때, 일반항 $3^n+(-1)^n$의 값은 양의 무한대로 발산한다.

4) n이 한없이 커질 때, 분모 $3^n+(-1)^n$의 값이 한없이 커지므로 일반항 $\frac{1}{3^n+(-1)^n}$의 값은 0에 한없이 가까워진다. 따라서 극한값은 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n+(-1)^n}=0$

05 답 1) 수렴, 극한값, 극한 2) ① ∞ ② $-\infty$ ③ 진동

06 답 1) 2 2) 3 3) 0 4) 0 5) 2 6) 6 7) $\frac{1}{2}$ 8) 2

1) $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}$
$=2+0=2$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n-3}\right)=\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-3}$
$=3-0=3$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}$
$=0+0=0$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$
$=0-0=0$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$
$=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)$
$=\left(\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\right)$
$=(2+0)\times(1-0)=2\times1=2$

6) $\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{5}{n}\right)$
$=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}\right)$
$=\left(\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\right)$
$=(3-0)\times(2+0)=3\times2=6$

7) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$
$=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$

8) $\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n^2}}{1-\frac{3}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}}$
$=\frac{2+0}{1-0}=2$

07 답 1) -3 2) 2 3) 3 4) 16 5) $\frac{9}{2}$

1) $\lim_{n\to\infty}(-2a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(-2a_n)+\lim_{n\to\infty}b_n$
$=-2\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$
$=-2\times2+1=-3$

2) $\lim_{n\to\infty}(2a_n-3b_n+1)=\lim_{n\to\infty}2a_n-\lim_{n\to\infty}3b_n+\lim_{n\to\infty}1$
$=2\lim_{n\to\infty}a_n-3\lim_{n\to\infty}b_n+1$
$=2\times2-3\times1+1=2$

3) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n^2)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n\times\lim_{n\to\infty}b_n$
$=2+1^2=3$

4) $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)^2$
$=\lim_{n\to\infty}(a_n^2+4a_nb_n+4b_n^2)$
$=\lim_{n\to\infty}a_n^2+4\lim_{n\to\infty}a_nb_n+4\lim_{n\to\infty}b_n^2$
$=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}a_n+4\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n$
$+4\lim_{n\to\infty}b_n\times\lim_{n\to\infty}b_n$
$=2^2+4\times2\times1+4\times1^2=16$

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+b_n+2}{a_nb_n}=\frac{3\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}2}{\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n}$
$=\frac{3\times2+1+2}{2\times1}=\frac{9}{2}$

08 답 1) -6 2) 4 3) 31

1) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n+3\lim_{n\to\infty}b_n=-12$이므로
$2\times3+3\lim_{n\to\infty}b_n=-12$
$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=\frac{-12-2\times3}{3}=-6$

2) $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n-2)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}2=10$이므로
$3\times\lim_{n\to\infty}b_n-2=10$
$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=\frac{10+2}{3}=4$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n+1}{a_n^2}=\frac{2\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}a_n}=7$이므로
$\frac{2\lim_{n\to\infty}b_n+1}{3^2}=7$ $\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=\frac{7\times3^2-1}{2}=31$

09 답 1) c 2) $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ 3) $\alpha\beta$ 4) $\frac{\alpha}{\beta}$

10 답 1) $\frac{2}{3}$ 2) 0 3) 2 4) $\frac{1}{2}$

1) 분모와 분자를 분모의 최고차항인 n으로 나누면
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\boxed{\frac{1}{n}}}{3-\boxed{\frac{5}{n}}}=\frac{2+\boxed{0}}{3-\boxed{0}}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

2) 분모와 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 나누면
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n^2-2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0$$

3) 분모와 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 나누면
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{1}=2$$

4) 분모와 분자를 분모의 최고차항인 n^3으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n-1}{2n^3-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{2-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

11 답 1) 2 2) $\frac{1}{2}$ 3) 6 4) $\frac{1}{3}$

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+2}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+2}{n^2+3n+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}$

$=\frac{2-0+0}{1+0+0}=2$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$

$=\frac{1}{2}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(3n+2)}{n(n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+n-2}{n^2+4n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n}}$

$=6$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n^2+n+2}{n^2(3n+5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n^2+n+2}{3n^3+5n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{3+\frac{5}{n}}$

$=\frac{1}{3}$

12 답 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{4}{3}$

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{3}{n^2}}=\frac{1}{2}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$

$=\frac{1}{3}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{(1+2+\cdots+n)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)^2(2n+1)}{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}(2n+1)}{\frac{1}{4}n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$

13 답 1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2+5+8+\cdots+(3n-1)}{2n^2+3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(3k-1)}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sum_{k=1}^{n}k-n}{2n^2+3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n(n+1)}{2}-n}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{2n^2+3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{3}{4}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$

$=\frac{1}{6}\times1\times2+0\times1=\frac{1}{3}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+n(n+2)}{n(n+1)(n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k(k+2)}{n^3+3n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)}{n^3+3n^2+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k}{n^3+3n^2+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\times\frac{1}{2}n(n+1)}{n^3+3n^2+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}$

$=\frac{\frac{1}{6}\times1\times2+0\times1}{1+0+0}=\frac{1}{3}$

14 답 최고차항

15 답 1) 1 2) 2 3) $\frac{3}{2}$ 4) 0 5) $\frac{3}{2}$ 6) $\frac{3}{4}$

1) $\sqrt{n^2+2n}-n=\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{1}$으로 보고 분자를 유리화한다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\boxed{\sqrt{n^2+2n}}+n)}{\boxed{\sqrt{n^2+2n}}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)-n^2}{\boxed{\sqrt{n^2+2n}}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\boxed{\sqrt{n^2+2n}}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\boxed{1+\frac{2}{n}}}+1}=\frac{2}{1+1}=\boxed{1}$$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+1}-n)$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n+1}-n)(\sqrt{n^2+4n+1}+n)}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+4n+1)-n^2}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{4}{1+1}=2$$

3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+6n}-2n)$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+6n}-2n)(\sqrt{4n^2+6n}+2n)}{\sqrt{4n^2+6n}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n-4n^2}{\sqrt{4n^2+6n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{4n^2+6n}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{4+\frac{6}{n}}+2}=\frac{6}{2+2}=\frac{3}{2}$$

4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-1})$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3)-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2-1}}=0$$

5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n})$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n+2}-2n)$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+3n+2}-2n)(\sqrt{4n^2+3n+2}+2n)}{\sqrt{4n^2+3n+2}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n+2}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}$$
$$=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$$

16 답 1) $\frac{2}{3}$ 2) 1 3) -1 4) 2 5) 4

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{\sqrt{n^2+3n}+n}}{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\boxed{\sqrt{n^2+3n}+n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{\sqrt{n^2+3n}+n}}{(n^2+3n)-n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{\sqrt{n^2+3n}+n}}{3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\boxed{1+\frac{3}{n}}}+1}{3}=\frac{1+1}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-\sqrt{n^2-4n}}$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+\sqrt{n^2-4n})}{(n-\sqrt{n^2-4n})(n+\sqrt{n^2-4n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+\sqrt{n^2-4n})}{n^2-(n^2-4n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+n}}$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}}{(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}}{(n^2-n)-(n^2+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}}{-2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{-2}$$
$$=\frac{1+1}{-2}=-1$$

4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1})}{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1})}{(n^2+2n)-(n^2+1)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1})}{2n-1}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{2-\frac{1}{n}}=\frac{2(1+1)}{2}=2$

5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(\sqrt{4n^2+1}-2n)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}+2n}{n(4n^2+1-4n^2)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2}{1}$

$=2+2=4$

17 답 유리화, 최고차항

18 답 1) ∞ 2) $-\frac{3}{2}$ 3) 0 4) ∞ 5) ∞ 6) 3 7) $-\infty$

1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 (분자의 차수) > (분모의 차수)이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n-3}=\boxed{\infty}$

2) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 (분자의 차수) = (분모의 차수)이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n+3n^3}{1-2n^3}=-\frac{3}{2}$

3) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 (분자의 차수) < (분모의 차수)이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+1}}{n+1}=0$

4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3-2n^2)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{2}{n}\right)=\infty$

5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty$

6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-1}=3$

7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n^2)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt{\boxed{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}-1\right)$

$=\boxed{-\infty}$

19 답 1) ① ∞, $-\infty$ ② 최고차항 ③ 0
2) ① 최고차항 ② 유리화

20 답 1) $a=0$, $b=2$ 2) $a=0$, $b=6$ 3) $a=0$, $b=12$

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+3}{(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+bn^2+3}{n^2-2n+1}$ ⋯ ㉠

㉠이 극한값을 가지려면 $a=\boxed{0}$이어야 한다. 이때의 극한값은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2+3}{n^2-2n+1}=\frac{b}{\boxed{1}}=2$이므로 $b=\boxed{2}$

$\therefore a=\boxed{0}$, $b=\boxed{2}$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{3n+2}$이 극한값을 가지려면 $a=0$이어야 한다. 이때의 극한값은

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{b}{3}=2$이므로 $b=6$

$\therefore a=0$, $b=6$

3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{an^2+4n+3}$이 0이 아닌 극한값을 가지려면 $a=0$이어야 한다. 이때의 극한값은

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{4n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{4+\frac{3}{n}}=\frac{b}{4}=3$이므로 $b=12$

$\therefore a=0$, $b=12$

21 답 1) 4 2) 9

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+kn}-n)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+kn}-n)(\sqrt{n^2+kn}+n)}{\sqrt{n^2+kn}+n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+kn)-n^2}{\sqrt{n^2+kn}+n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}+1}=\frac{k}{2}=2$

$\therefore k=4$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+k}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})(\sqrt{n+k}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+k}+\sqrt{n})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+k-n)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(n+1-n)(\sqrt{n+k}+\sqrt{n})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{k(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{k\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}\right)}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}+\sqrt{1}}=\frac{2k}{2}=k=9$

22 답 **2**

$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2n+3}-n-a)$

$=\lim_{n\to\infty} \frac{n\{(n^2+2n+3)-(n+a)^2\}}{\boxed{\sqrt{n^2+2n+3}+n+a}}$

$=\lim_{n\to\infty} \frac{n\{(n^2+2n+3)-(n^2+2an+a^2)\}}{\sqrt{n^2+2n+3}+n+a}$

$=\lim_{n\to\infty} \frac{n\{2(1-a)n+3-a^2\}}{\boxed{\sqrt{n^2+2n+3}+n+a}}$

$=\lim_{n\to\infty} \frac{2(1-a)n+3-a^2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1+\frac{a}{n}}=b$

이므로 $1-a=\boxed{0}$에서 $a=\boxed{1}$이고, 극한값은

$\lim_{n\to\infty} \frac{3-1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1+\frac{1}{n}}=\boxed{1}=b$

$\therefore a+b=1+1=\boxed{2}$

23 답 ① 차수 ② 유리화

24 답 1) **5** 2) **3** 3) **19**

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$

(단, α와 β는 상수)라 하자.

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$

$=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$

$=\boxed{2}\alpha=\boxed{10}$

$\therefore \alpha=\lim_{n\to\infty} a_n=\boxed{5}$

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$

$=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$

$=2\beta=6$

$\therefore \beta=\lim_{n\to\infty} b_n=3$

3) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)=2\alpha+3\beta$

$=2\times5+3\times3=19$

25 답 **5**

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$

(단, α와 β는 상수)라 하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta=3$,

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta=2$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=\alpha^2+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=3^2-2\times2=5$

26 답 1) **0** 2) $-\frac{5}{7}$ 3) $\frac{4}{3}$ 4) **3**

1) $\frac{a_n-1}{2a_n-1}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty} b_n=\boxed{1}$

a_n을 b_n으로 나타내면 $a_n-1=b_n(\boxed{2a_n-1})$에서

$(\boxed{2b_n-1})a_n=b_n-1 \quad \therefore a_n=\boxed{\frac{b_n-1}{2b_n-1}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{b_n-1}{2b_n-1}}$

$=\frac{\lim_{n\to\infty} b_n-1}{2\lim_{n\to\infty} b_n-1}$

$=\frac{1-1}{2\times1-1}=\boxed{0}$

[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$라고 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-1}{2a_n-1}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n-1}{2\lim_{n\to\infty} a_n-1}=\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}=1$

$\alpha-1=2\alpha-1$

$\therefore \alpha=0$, 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

2) $\frac{2a_n+1}{3a_n+2}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty} b_n=3$

a_n을 b_n으로 나타내면 $2a_n+1=b_n(3a_n+2)$에서

$(3b_n-2)a_n=1-2b_n \quad \therefore a_n=\frac{1-2b_n}{3b_n-2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2b_n}{3b_n-2}=\frac{1-2\lim_{n\to\infty} b_n}{3\lim_{n\to\infty} b_n-2}$

$=\frac{1-2\times3}{3\times3-2}=-\frac{5}{7}$

3) $\frac{2a_n-1}{a_n-3}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty} b_n=-1$

a_n을 b_n으로 나타내면 $2a_n-1=b_n(a_n-3)$에서

$(b_n-2)a_n=3b_n-1 \quad \therefore a_n=\frac{3b_n-1}{b_n-2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n-1}{b_n-2}=\frac{3\lim_{n\to\infty} b_n-1}{\lim_{n\to\infty} b_n-2}$

$=\frac{-3-1}{-1-2}=\frac{4}{3}$

4) $\frac{3a_n-1}{a_n+1}=b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty} b_n=2$

a_n을 b_n으로 나타내면 $3a_n-1=b_n(a_n+1)$에서

$(3-b_n)a_n=b_n+1 \quad \therefore a_n=\frac{b_n+1}{3-b_n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+1}{3-b_n}=\frac{2+1}{3-2}=3$

27 답 1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 6 4) 1

1) $(3n-1)a_n=b_n$이라고 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n=2$, $a_n=\frac{b_n}{\boxed{3n-1}}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)\times\frac{b_n}{\boxed{3n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1}\times b_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\boxed{3-\frac{1}{n}}}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=\frac{1}{3}\times 2=\boxed{\frac{2}{3}}$$

2) $(2n+5)a_n=b_n$이라고 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n=1$, $a_n=\frac{b_n}{2n+5}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty}\left(n\times\frac{b_n}{2n+5}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+5}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=\frac{1}{2}\times 1$$
$$=\frac{1}{2}$$

3) $(n^2+1)a_n=b_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n=12$, $a_n=\frac{b_n}{n^2+1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3a_n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2n+1}\times\frac{b_n}{n^2+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(2n+1)(n^2+1)}\times b_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=\frac{1}{2}\times 12$$
$$=6$$

4) $\sqrt{n}a_n=b_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n=3$, $a_n=\frac{b_n}{\sqrt{n}}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)a_n}{\sqrt{n}+\sqrt{4n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n}+\sqrt{4n+1}}\times\frac{b_n}{\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+\sqrt{4n^2+n}}\times b_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=\frac{1}{1+2}\times 3$$
$$=1$$

28 답 1) $\frac{1}{6}$ 2) 3 3) 3 4) 8

1) $\frac{a_n}{n}=b_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{2}$, $a_n=nb_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{nb_n}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

2) $\frac{a_n}{3n-4}=b_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n=1$, $a_n=(3n-4)b_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-4)b_n}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=3\times 1=3$$

3) $\frac{a_n}{n^2+7}=b_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n=3$, $a_n=(n^2+7)b_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2+7)b_n}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{7}{n^2}\right)\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=1\times 3=3$$

4) $\frac{a_n}{\sqrt{n}+2n}=b_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n=4$, $a_n=(\sqrt{n}+2n)b_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_n}{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\sqrt{n}+2n)b_n}{n^2+3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+2\right)}{1+\frac{3}{n}}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=2\times 4=8$$

29 답 극한값

30 답 1) 1 2) 2 3) 14

1) $\frac{n-1}{n}\le a_n\le\frac{n+1}{n}$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\boxed{1}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\boxed{1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{1}$

2) $\frac{2n-1}{n}<a_n<\frac{2n^2+3n+1}{n^2}$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

3) $\frac{10n-2}{n+2}<a_n<\frac{10n+1}{n+1}$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{10n-2}{n+2}=10$, $\lim_{n\to\infty}\frac{10n+1}{n+1}=10$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=10$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+4)=10+4=14$

31 답 1) **3** 2) **3**

1) 부등식의 각 변을 n^2으로 나누면

$\frac{3n^2-2n+1}{n^2}<a_n<\frac{3n^2+2n+3}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\boxed{3}$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+3}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\boxed{3}$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{3}$

2) 부등식의 각 변을 $n+2$로 나누면

$\frac{3n+1}{n+2}<a_n<\frac{3n+3}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2}=3$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{n+2}=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=3$

32 답 1) $\alpha\le\beta$ 2) α

33 답 1) 거짓 2) 거짓 3) 참 4) 거짓 5) 거짓

1) [반례] $a_n=n$, $b_n=-2n$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 거짓

2) [반례] $a_n=\frac{1}{n+1}$, $b_n=\frac{1}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$ $\quad\therefore$ 거짓

3) $c_n=a_n-b_n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$, $b_n=a_n-c_n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}c_n$

$=\alpha-0=\alpha$ $\quad\therefore$ 참

4) [반례] $a_n=n-\frac{1}{n}$, $b_n=n+\frac{1}{n}$, $c_n=n$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이고

$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만

$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$(발산) $\quad\therefore$ 거짓

5) [반례] $a_n=\frac{n-1}{n+1}$, $b_n=\frac{1}{n}$이면

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이지만

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n+1}=\infty$(발산) $\quad\therefore$ 거짓

34 답 ㄴ

ㄱ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n$일 때,

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times n=1$이다. $\quad\therefore$ 거짓

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n}=0$이다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$ $\quad\therefore$ 참

ㄷ. [반례] 수열 $\{a_n\}$이 $1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$일 때,

$\lim_{n\to\infty}|a_n|=1$이지만 수열 $\{a_n\}$은 진동(발산)한다.

$\therefore$ 거짓

ㄹ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$이지만

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}n=\infty$으로 발산한다. $\quad\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

35 답 1) 극한값

2) ① $\infty, -\infty$ ② $\infty, -\infty, -\infty, \infty$ ③ **0, 0**

36 답 1) 수렴 2) 진동(발산) 3) 수렴 4) 발산 5) 수렴 6) 진동(발산)

1) 공비 r가 $-1<r\left(=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<1$이므로 0에 수렴한다.

2) 공비 r가 $r\left(=-\frac{3}{2}\right)<-1$이므로 진동(발산)한다.

3) 공비 r가 $-1<r(=-0.9)<1$이므로 0에 수렴한다.

4) 공비 r가 $r(=1.1)>1$이므로 양의 무한대로 발산한다.

5) 공비 r가 $-1<r\left(=-\frac{1}{3}\right)<1$이므로 0에 수렴한다.

6) 공비 r가 $r\left(=-\frac{9}{8}\right)<-1$이므로 진동(발산)한다.

37 답 1) $-2<x\le2$ 2) $-\frac{3}{2}\le x<\frac{3}{2}$

3) $x=0$ 또는 $1<x\le3$ 4) $0\le x\le2$

1) 공비가 $\frac{x}{2}$인 등비수열이므로 주어진 수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x}{2}\le1$ $\quad\therefore -2<x\le2$

2) (i) 첫째항 : $\frac{2x}{3}=0$ $\quad\therefore x=0$

(ii) 공비 : $-1<-\frac{2x}{3}\le1$ $\quad\therefore -\frac{3}{2}\le x<\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $-\frac{3}{2}\le x<\frac{3}{2}$

3) 수열 $\{x(x-2)^{n-1}\}$은 첫째항이 x이고 공비가 $x-2$인 등비수열이므로 수렴하는 경우는 다음 두 가지이다.

(i) 첫째항 : $x=0$

(ii) 공비 : $-1<x-2\le 1$ $\quad \therefore 1<x\le 3$

(i), (ii)에서 $x=0$ 또는 $1<x\le 3$

4) 수열 $\{(x-1)^{2n-1}\}$은 첫째항이 $x-1$이고 공비가 $(x-1)^2$인 등비수열이므로 수렴하는 경우는 다음 두 가지이다.

(i) 첫째항 : $x-1=0$ $\quad \therefore x=1$

(ii) 공비 : $-1<(x-1)^2\le 1$

$(x-1)^2\le 1$에서 $x^2-2x\le 0$, $x(x-2)\le 0$

$\therefore 0\le x\le 2$

(i), (ii)에서 $0\le x\le 2$

38 답 1) 0 2) 1 3) $\frac{1}{4}$ 4) -5 5) ∞ (발산) 6) 4

1) 분모, 분자를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\boxed{0}$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-3^n}{4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{4}=\frac{1}{4}$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-5\times 3^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-5}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=-5$$

5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}^n+1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\infty$$

6) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+2^n}{4^n-3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{2}{4}\right)^n}{1-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}=4$$

39 답 1) ∞ (발산) 2) 3 3) a

1) $$\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n-2^n)=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$
$$=\infty \text{ (발산)}$$

2) $$\lim_{n\to\infty}(3^n+2^n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[3^n\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\right]^{\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}3\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$$
$$=3$$

3) $b<a$이므로 a^n+b^n에서 a^n으로 묶는다.

$$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[a^n\left\{\boxed{1}+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}\right]^{\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}a\left\{\boxed{1}+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$$
$$=\boxed{a}\left(\because 0<\frac{b}{a}<1\right)$$

40 답 1) ∞ 2) 1 3) 0 4) 진동

41 답 0, $\frac{1}{2}$, 1

(i) $0<r<1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=\boxed{0}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{0}{1+0}=\boxed{0}$$

(ii) $r=1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=\boxed{1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{1}{1+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

(iii) $r>1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=\boxed{\infty}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{1}{0+1}=\boxed{1}$$

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 수는 차례로 $\boxed{0}$, $\boxed{\frac{1}{2}}$, $\boxed{1}$이다.

42 답 $0<r<1$일 때 1에 수렴, $r=1$일 때 0에 수렴, $r>1$일 때 -1에 수렴

(i) $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

따라서 $0<r<1$일 때 1에 수렴, $r=1$일 때 0에 수렴, $r>1$일 때 -1에 수렴한다.

43 답 ㄱ, ㄴ

(i) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+r^2}{r^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{r^2}{r^n}}{1+\frac{2}{r^n}}=1$$

따라서 $r>1$ 또는 $r<-1$이면 극한값은 1이다.

(ii) $r=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^n+1^2}{1^n+2}=\dfrac{2}{3}$

(iii) $|r|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+r^2}{r^n+2}=\frac{r^2}{2}$$

(iv) $r=-1$일 때,

n이 홀수이면 $\dfrac{(-1)^n+(-1)^2}{(-1)^n+2}=\dfrac{-1+1}{-1+2}=0$

n이 짝수이면 $\dfrac{(-1)^n+(-1)^2}{(-1)^n+2}=\dfrac{1+1}{1+2}=\dfrac{2}{3}$

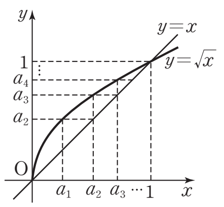
따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n+r^2}{r^n+2}$은 극한값이 없다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

44 답 (i) ∞ (ii) $\mathbf{1}$ (iii) $\mathbf{0}$ (iv) 진동

45 답 $\mathbf{1}$

$a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$이므로



$a_2=\sqrt{a_1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\boxed{\frac{1}{2}}}$

$a_3=\sqrt{a_2}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\boxed{\frac{1}{4}}}$

$a_4=\sqrt{a_3}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\boxed{\frac{1}{8}}}$

$\vdots$

$a_n=\sqrt{a_{n-1}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}$

위의 그림에서 a_n은 $y=x$와 $y=\sqrt{x}$의 그래프의 교점의 x 좌표인 $\boxed{1}$에 가까워진다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\boxed{1}$

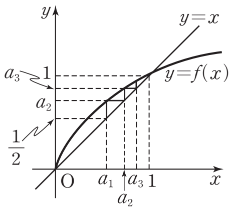
[다른 풀이]

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^0=1$

46 답 $\mathbf{1}$

주어진 수열 $\{a_n\}$을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



따라서 a_1, a_2, a_3, $\cdots$은 $y=x$와 $y=\sqrt{x}$의 교점 $(1,\ 1)$의 x좌표에 가까워진다. 그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$이다.

47 답 $\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:n$으로 내분하는 점 P_n의 좌표는

$\mathrm{P}_n\left(\dfrac{2n}{n+1},\ \dfrac{1}{n+1}\right)$

$k_n=\overline{\mathrm{OP}_n}$

$$=\sqrt{\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{4n^2+1}{(n+1)^2}}=\frac{\sqrt{4n^2+1}}{n+1}$$

$l_n=\overline{\mathrm{AP}_n}$

$$=\sqrt{\left(\frac{2n}{n+1}-2\right)^2+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{(n+1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n\times l_n}{k_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{5}n}{n+1}}{\frac{\sqrt{4n^2+1}}{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{5}n}{\sqrt{4n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}=\sqrt{5}$$

48 답 $\mathbf{2}$

주어진 조건에서 가로의 길이가 n이므로

$\overline{\mathrm{OC}_n}=n$

삼각형 AOC_n은 밑변의 길이가 n, 높이가 4인 직각삼각형이다.

$\therefore \overline{\mathrm{AC}_n}=\sqrt{n^2+4^2}$

삼각형 $\mathrm{AB_1D}_n$과 삼각형 $\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n$은 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{AB}_1}:\overline{\mathrm{B_1D}_n}=\overline{\mathrm{AB}_n}:\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$에서 $1:\overline{\mathrm{B_1D}_n}=n:4$

$\therefore \overline{\mathrm{B_1D}_n}=\dfrac{4}{n}$

따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AC}_n}-\overline{\mathrm{OC}_n}}{\overline{\mathrm{B_1D}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+16}-n}{\frac{4}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+16}-n)(\sqrt{n^2+16}+n)}{\frac{4}{n}(\sqrt{n^2+16}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{4\left(\sqrt{1+\frac{16}{n^2}}+1\right)}$$

$$=\frac{16}{4\times 2}=2$$

Ⅰ-2 급수

pp. 28~39

49 답 1) $1-\frac{1}{n+1}$ 2) $\sqrt{2n+1}-1$

1) 제 n항 a_n이 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{\boxed{n}}-\frac{1}{\boxed{n+1}}$이므로

첫째항부터 제 n항까지의 부분합 S_n은

$$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\boxed{1-\frac{1}{n+1}}$$

2) 제 n항 a_n이

$$a_n=\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}{(2n+1)-(2n-1)}$$
$$=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$$

이므로 첫째항부터 제 n항까지의 부분합 S_n은

$$S_n=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$$
$$=\sqrt{2n+1}-1$$

50 답 1) $\frac{1}{2}$ 2) ∞ (발산)

1) 제 n항을 a_n, 첫째항부터 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\boxed{2n-1}}-\frac{1}{\boxed{2n+1}}\right)$$

이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\boxed{2k-1}}-\frac{1}{\boxed{2k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\boxed{1-\frac{1}{2n+1}}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\boxed{1-\frac{1}{2n+1}}\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

2) 제 n항 a_n이 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$이므로

첫째항부터 제 n항까지의 부분합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty \text{ (발산)}$$

51 답 1) ∞ (발산) 2) $-\infty$ (발산) 3) 1 4) $\frac{3}{4}$ 5) 2 6) 6

1) 제 n항을 a_n, 첫째항부터 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$a_n=2n$$
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2k=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(n^2+n)=\infty \text{ (발산)}$$

2) 제 n항을 a_n, 첫째항부터 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$a_n=\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}$$
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})$$
$$=(1-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{7})+\cdots+(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})$$
$$=1-\sqrt{2n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt{2n+1})=-\infty \text{ (발산)}$$

3) 제 n항을 a_n, 첫째항부터 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$$
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

4) 제 n항을 a_n, 첫째항부터 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$\therefore S=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

5) 제 n항을 a_n, 첫째항부터 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k}=\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

$$=\frac{2}{\boxed{n(n+1)}}=2\left(\frac{1}{\boxed{n}}-\frac{1}{\boxed{n+1}}\right)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{\boxed{k}}-\frac{1}{\boxed{k+1}}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(\boxed{1-\frac{1}{n+1}}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(\boxed{1-\frac{1}{n+1}}\right)=\boxed{2}$$

6) 제 n항을 a_n, 첫째항부터 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$a_n=\frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=\frac{2n+1}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

$$=\frac{6}{n(n+1)}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)}=6\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=6\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=6$$

52 답 1) 급수, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 2) 부분합 3) 수렴, 발산

53 답 1) 발산 2) 발산

1) $a_n=\frac{n+1}{2n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 $\boxed{\text{발산}}$한다.

2) $a_n=\frac{n}{n+1}$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

$\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

54 답 ㄷ

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다. ∴ 발산

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\neq0$

$\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다. ∴ 발산

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

∴ 수렴

따라서 수렴하는 급수는 ㄷ뿐이다.

55 답 1) -1 2) 2

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=\boxed{0}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{-1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=2$

56 답 1) $\frac{2}{3}$ 2) -2

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-2)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+5)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(2a_n+5)=0$

$\lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{5}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-2$

57 답 1) $\frac{5}{8}$ 2) 5 3) 1 4) 9 5) $\frac{1}{5}$ 6) 1

1) $\frac{a_n}{n}-2=b_n$이라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=\boxed{0}$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(b_n+2)=0+2=\boxed{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{5a_n-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a_n}{n}+1}{\frac{5a_n}{n}-2}$$

$$=\frac{2\times2+1}{5\times2-2}=\boxed{\frac{5}{8}}$$

2) $a_n-\dfrac{2n-1}{n}=b_n$이라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

$a_n=b_n+\dfrac{2n-1}{n}$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\dfrac{2n-1}{n}\right)=0+2=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(2a_n+1)=2\times2+1=5$

3) $na_n+2=b_n$이라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(na_n+2)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

$\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty}(b_n-2)=0-2=-2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2a_n+3n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{na_n+3}{1+\dfrac{1}{n}}$

$=\dfrac{-2+3}{1}=1$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{3^n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3^n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n+3^{n+1}-2^{n-1}}{3^{n-1}+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a_n}{3^n}+3-\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}{\dfrac{1}{3}+2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$

$=9$

5) $\dfrac{a_n}{5^n}-1=b_n$이라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{5^n}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{5^n}=\lim_{n\to\infty}(b_n+1)=0+1=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n+4^n}{5^{n+1}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a_n}{5^n}+\left(\dfrac{4}{5}\right)^n}{5+\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$

$=\dfrac{1+0}{5+0}=\dfrac{1}{5}$

6) $\dfrac{a_n}{4^n}-\dfrac{2n}{3n+2}=b_n$이라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{4^n}-\dfrac{2n}{3n+2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\dfrac{2n}{3n+2}\right)=0+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{6a_n-2^n}{4^{n+1}+3^{n+1}+2^{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{6\times\dfrac{a_n}{4^n}-\left(\dfrac{2}{4}\right)^n}{4+3\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+2\left(\dfrac{2}{4}\right)^n}$

$=\dfrac{6\times\dfrac{2}{3}-0}{4+0+0}=1$

58 답 1) 0 2) 발산

59 답 1) -3 2) -1 3) 38 4) 11 5) 13

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}2b_n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\boxed{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=1-2\times2=\boxed{-3}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+4b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+4\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=-3+4\times\dfrac{1}{2}=-1$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(7a_n+3b_n)=7\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=7\times5+3\times1=38$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=2\times4-(-3)=11$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(12a_n+25b_n)=12\sum_{n=1}^{\infty}a_n+25\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=12\times\dfrac{2}{3}+25\times\dfrac{1}{5}=8+5=13$

60 답 1) 8 2) 0

1) 두 급수가 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (단, α와 β는 상수)로 놓자.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=10$에서 $\alpha+2\beta=\boxed{10}$ ⋯ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=2$에서 $2\alpha+\beta=\boxed{2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

㉠+㉡에서 $3\alpha+3\beta=12$, 즉 $\alpha+\beta=4$ ⋯ ㉢

㉡−㉢에서 $\alpha=\boxed{-2}$

㉠−㉢에서 $\beta=\boxed{6}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(5a_n+3b_n)=\boxed{5}\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\boxed{3}\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=\boxed{5}\alpha+\boxed{3}\beta$

$=5\times(-2)+3\times6=\boxed{8}$

2) 두 급수가 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (단, α와 β는 상수)로 놓자.

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)=8$에서 $3\alpha-\beta=8$ ⋯ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=4$에서 $\alpha+\beta=4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

㉠+㉡에서 $4\alpha=12$, 즉 $\alpha=3$

이 값을 ㉡에 대입하면 $\beta=1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}a_n-2b_n\right)=\dfrac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{2}{3}\alpha-2\beta$

$=\dfrac{2}{3}\times3-2\times1=0$

61 답 1) cS 2) $S+T$ 3) $S-T$

62 답 1) 수렴 2) 수렴 3) 발산 4) 수렴 5) 발산 6) 발산 7) 수렴 8) 발산

1) 공비 $-1<r\left(=\boxed{\frac{2}{3}}\right)<1$이므로 수렴

2) 공비 $-1<r\left(=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<1$이므로 수렴

3) 공비 $r(=\sqrt{3})>1$이므로 발산

4) 공비 $-1<r\left(=\frac{1}{2}\right)<1$이므로 수렴

5) 공비 $r=-1$은 $|-1|\geq 1$이므로 발산

6) $\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 3^n=\left(\frac{3}{2}\right)^n$에서 공비 $r\left(=\frac{3}{2}\right)>1$이므로 발산

7) 공비 $r=2-\sqrt{3}$은 $-1<2-\sqrt{3}<1$이므로 수렴

8) 공비 $r(=2+\sqrt{2})>1$이므로 발산

63 답 1) 수렴, 4 2) 발산 3) 수렴, 2 4) 발산

1) 주어진 등비급수는 첫째항이 1, 공비 $r=\frac{3}{4}$이고 $|r|<1$이므로 이 등비급수는 수렴한다.

그 합 S는 $S=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$

2) 주어진 등비급수는 첫째항이 1, 공비 $r=-\sqrt{3}$이고 $|r|\geq 1$이므로 이 등비급수는 발산한다.

3) 주어진 등비급수는 첫째항이 1, 공비 $r=\frac{1}{2}$이고 $|r|<1$이므로 이 등비급수는 수렴한다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

4) 주어진 등비급수는 첫째항이 2, 공비 $r=2$이고 $|r|\geq 1$이므로 이 등비급수는 발산한다.

64 답 1) 등비급수 2) ① $|r|<1$, $\frac{a}{1-r}$ ② $|r|\geq 1$

65 답 1) $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ 2) $0\leq x<4$

1) 공비가 $\frac{3}{2}x$이므로 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{3}{2}x<1$ $\quad\therefore -\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$

2) (i) $x=0$이면 $0+0+0+\cdots$이므로 0에 수렴한다.

(ii) $x\neq 0$이면 첫째항이 x이고, 공비가 $\boxed{\frac{x-2}{2}}$인 등비급수이다. 따라서 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\boxed{\frac{x-2}{2}}<1$에서 $-2<x-2<2$

$\therefore \boxed{0}<x<\boxed{4}$

(i), (ii)에서 주어진 등비급수가 수렴하기 위한 x의 값의 범위는 $\boxed{0\leq x<4}$이다.

66 답 0, 2

(i) $x=0$이면 $0+0+0+\cdots$이므로 0에 수렴한다.

(ii) $x\neq 0$이면 첫째항이 x이고, 공비가 $x-2$인 등비급수이다. 따라서 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<x-2<1$ $\quad\therefore 1<x<3$

(i), (ii)에서 주어진 등비급수가 수렴하기 위한 정수 x의 값은 0, 2이다.

67 답 1) 144 2) $\frac{16}{3}$

1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=\frac{a}{1-\frac{1}{4}}=16$에서 $a=16\times\frac{3}{4}=12$

$\therefore a^2=144$

2) 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2}{1-r}=4$ $\quad\therefore r=\frac{1}{2}$

이때, $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$은 첫째항이 $2^2=4$이고

공비는 $r^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$인 등비급수이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=\frac{4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}$

68 답 1) $-1<r\leq 1$ 2) $-1<r<1$

69 답 1) $\frac{7}{4}$ 2) $\frac{23}{4}$ 3) 5 4) 4 5) $\frac{26}{7}$ 6) $\frac{34}{11}$

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5^n}$은 첫째항이 $\boxed{\frac{3}{5}}$, 공비가 $\boxed{\frac{1}{5}}$인 등비급수이고,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$는 첫째항이 $\boxed{\frac{2}{3}}$, 공비가 $\boxed{\frac{1}{3}}$인 등비급수이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5^n}+\frac{2}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$$

$$=\frac{\boxed{\frac{3}{5}}}{1-\boxed{\frac{1}{5}}}+\frac{\boxed{\frac{2}{3}}}{1-\boxed{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{3}{4}+1=\boxed{\frac{7}{4}}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{3}{5^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}3\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{3}{1-\frac{1}{5}}$$

$$=2+\frac{15}{4}=\frac{23}{4}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{4^n}+\frac{6}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=2+3=5$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=1+3=4$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-2)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n+\left(-\frac{2}{5}\right)^n\right\}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}+\frac{-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}}=4-\frac{2}{7}=\frac{26}{7}$$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}+(-5)^{n-1}}{6^n}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\times\left(\frac{3}{6}\right)^n+\frac{1}{6}\times\left(\frac{-5}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\times\left(-\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{6}}{1+\frac{5}{6}}=3+\frac{1}{11}=\frac{34}{11}$$

70

답 1) c 2) p^n, q^n 3) p^n, q^n

71

답 1) $\frac{73}{99}$ 2) $\frac{109}{999}$ 3) $\frac{229}{990}$ 4) $\frac{623}{990}$

1) $0.\dot{7}\dot{3}=0.73+0.0073+0.000073+\cdots$

$$=\frac{73}{\boxed{10^2}}+\frac{73}{\boxed{10^4}}+\frac{73}{\boxed{10^6}}+\cdots$$

$$=\frac{\boxed{\frac{73}{100}}}{1-\boxed{\frac{1}{100}}}=\boxed{\frac{73}{99}}$$

2) $0.\dot{1}0\dot{9}=0.109+0.000109+0.000000109+\cdots$

$$=\frac{109}{10^3}+\frac{109}{10^6}+\frac{109}{10^9}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{109}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{109}{999}$$

3) $0.2\dot{3}\dot{1}=0.2+0.031+0.00031+0.0000031+\cdots$

$$=\frac{2}{10}+\left(\frac{31}{10^3}+\frac{31}{10^5}+\frac{31}{10^7}+\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{\frac{31}{1000}}{1-\frac{1}{100}}$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{31}{990}=\frac{229}{990}$$

4) $0.6\dot{2}\dot{9}=0.6+0.029+0.00029+0.0000029+\cdots$

$$=\frac{6}{10}+\left(\frac{29}{10^3}+\frac{29}{10^5}+\frac{29}{10^7}+\cdots\right)$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{\frac{29}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{29}{990}=\frac{623}{990}$$

72

답 1) $\frac{10}{3}$ 2) $\frac{13}{3}$

1) $0.\dot{3}\dot{4}=0.343434\cdots$에서 $a_1=a_3=a_5=\cdots=3$, $a_2=a_4=a_6=\cdots=4$이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{3}{2^5}+\frac{4}{2^6}+\cdots$$

$$=\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{\boxed{2^3}}+\frac{3}{\boxed{2^5}}+\cdots\right)+\left(\frac{4}{2^2}+\frac{4}{\boxed{2^4}}+\frac{4}{\boxed{2^6}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\boxed{\frac{3}{2}}}{1-\boxed{\frac{1}{4}}}+\frac{\boxed{1}}{1-\boxed{\frac{1}{4}}}=2+\frac{4}{3}=\boxed{\frac{10}{3}}$$

2) $\frac{5}{11}=0.\dot{4}\dot{5}=0.454545\cdots$

$a_1=a_3=a_5=\cdots=4$, $a_2=a_4=a_6=\cdots=5$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{4}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\frac{4}{2^5}+\frac{5}{2^6}+\cdots$$

$$=\left(\frac{4}{2}+\frac{4}{2^3}+\frac{4}{2^5}+\cdots\right)+\left(\frac{5}{2^2}+\frac{5}{2^4}+\frac{5}{2^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}+\frac{5}{3}=\frac{13}{3}$$

73

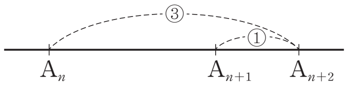
답 $\frac{a}{1-r}$

74

답 1) 1 2) $\frac{1}{2}$ 3) 2

1) $a_1=\overline{A_1A_2}=\boxed{1}$

2) 선분 A_nA_{n+1}을 $3:1$로 외분하는 점을 A_{n+2}라고 하면 점 A_{n+2}는 다음과 같이 그려진다.



즉, $a_n : a_{n+1} = \overline{A_nA_{n+1}} : \overline{A_{n+1}A_{n+2}} = \boxed{2} : 1$

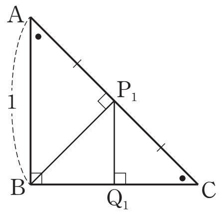
$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_nA_{n+1}}$은 첫째항이 $\boxed{1}$이고 공비가 $\boxed{\dfrac{1}{2}}$인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_nA_{n+1}} = \frac{\boxed{1}}{1-\boxed{\dfrac{1}{2}}} = \boxed{2}$$

75 답 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1

1) 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발 P_1은 변 AC를 수직이등분한다.

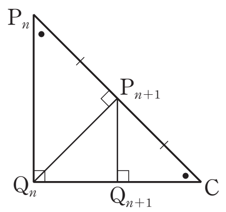


이때 점 P_1에서 변 BC에 내린 수선의 발 Q_1에 대하여 삼각형 ABC와 삼각형 P_1Q_1C는 닮음이므로 두 도형의 닮음비는 $\overline{AC} : \overline{P_1C} = 2:1$이다.

$a_1 = \overline{P_1Q_1}$이므로 $\overline{AB} : \overline{P_1Q_1} = 1 : a_1 = 2 : 1$

즉, $2a_1 = 1$에서 $a_1 = \dfrac{1}{2}$

2) 삼각형 P_nQ_nC와 삼각형 $P_{n+1}Q_{n+1}C$는 모두 직각이등변삼각형이므로 닮음이고, 두 도형의 닮음비는 $\overline{P_nC} : \overline{P_{n+1}C} = 2:1$이다.



따라서

$a_n : a_{n+1} = \overline{P_nQ_n} : \overline{P_{n+1}Q_{n+1}} = 2:1$이므로

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{P_nQ_n}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_nQ_n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

76 답 1) $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$ 2) $\frac{8}{3}$

1) A_1의 넓이: $\dfrac{1}{2} \times 2^2 = 2$

A_2의 넓이: $\dfrac{1}{2} \times \boxed{1}^2 = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

A_3의 넓이: $\dfrac{1}{2} \times \left(\boxed{\dfrac{1}{2}}\right)^2 = \boxed{\dfrac{1}{8}}$

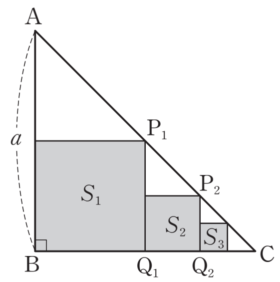
2) 직각이등변삼각형 A_n의 넓이 a_n은 첫째항이 2, 공비가 $\boxed{\dfrac{1}{4}}$인 등비수열이므로

$a_n = 2 \times \left(\boxed{\dfrac{1}{4}}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(\boxed{\frac{1}{4}}\right)^{n-1} = \frac{\boxed{2}}{1-\boxed{\dfrac{1}{4}}} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

77 답 $\frac{1}{3}$

정사각형 S_n의 꼭짓점 중 변 AC 위에 있는 점을 P_n, 변 BC 위에 있는 점을 Q_n이라 하자.



$\overline{P_1Q_1} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = \dfrac{a}{2}$,

$\overline{P_2Q_2} = \dfrac{1}{2}\overline{P_1Q_1}$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{4}$,

$\overline{P_3Q_3} = \dfrac{1}{2}\overline{P_2Q_2} = \dfrac{a}{8}$,

$\vdots$

즉, 이들 정사각형의 한 변의 길이는 첫째항이 $\dfrac{a}{2}$, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로 이들 정사각형의 넓이는 첫째항이 $\dfrac{a^2}{4}$, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이다.

따라서 구하는 넓이의 합은

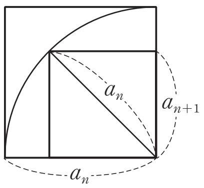
$$\frac{\frac{a^2}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2}{3} \qquad \therefore k = \frac{1}{3}$$

78 답 1) $1-\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $2-\frac{\pi}{2}$

1) 한 변의 길이가 1인 정사각형에 내접하는 사분원의 반지름의 길이가 1이므로 그 넓이는 $\dfrac{\pi}{4}$이다.

따라서 S_1의 넓이는 정사각형의 넓이에서 사분원의 넓이를 뺀 $1-\dfrac{\pi}{4}$이다.

2) n번째 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라고 하면 a_n은 $n+1$번째 정사각형의 대각선의 길이와 같다.



즉, $a_n=\sqrt{2}\,a_{n+1}$

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) 도형 S_1, S_2, S_3, $\cdots$는 닮은꼴이고

이웃하는 도형의 닮음비가 $1:\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로

넓이의 비는 $1:\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1:\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 공비는 $\dfrac{1}{2}$이다.

4) 도형의 넓이의 합은 첫째항이 $1-\dfrac{\pi}{4}$이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비급수이므로 그 합은

$$\frac{1-\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4-\pi}{2}=2-\frac{\pi}{2}$$

79 답 1) $\dfrac{16}{25}$ 2) $\dfrac{12}{25}$ 3) $\left(\dfrac{16}{25},\ \dfrac{12}{25}\right)$

1) 점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\overline{\mathrm{OP}_1}-\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}+\overline{\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5}-\overline{\mathrm{P}_6\mathrm{P}_7}+\cdots$$

$$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{\boxed{2}}+\left(\frac{3}{4}\right)^{\boxed{4}}-\left(\frac{3}{4}\right)^{\boxed{6}}+\cdots$$

$$=\frac{\boxed{1}}{1-\left(\boxed{-\frac{9}{16}}\right)}=\boxed{\frac{16}{25}}$$

2) 점 P_n의 y좌표를 y_n이라 하면

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}-\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}+\overline{\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6}-\overline{\mathrm{P}_7\mathrm{P}_8}+\cdots$$

$$=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^{\boxed{3}}+\left(\frac{3}{4}\right)^{\boxed{5}}-\left(\frac{3}{4}\right)^{\boxed{7}}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\left(\boxed{-\frac{9}{16}}\right)}=\boxed{\frac{12}{25}}$$

3) $\left(\boxed{\dfrac{16}{25}},\ \boxed{\dfrac{12}{25}}\right)$

80 답 1) $x_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 2) $y_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 3) $\dfrac{4}{3}$

1) $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

2) $y_n=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

3) $S_n=\dfrac{1}{2}\times x_n\times y_n$

$$=\frac{1}{2}\times\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

81 답 1) 닮음 2) 등비급수 3) $\dfrac{a}{1-r}$

단원 총정리 문제 정답 Ⅰ 수열의 극한

pp. 40~41

01 ②	02 ④	03 ②	04 ①	05 ④
06 $\frac{2}{5}$	07 ②	08 ①	09 ①	10 ③
11 ①	12 ③	13 $\frac{1}{5}$	14 ④	15 ⑤
16 8				

01 답 ②

ㄱ. $n\to\infty$일 때, $3n+1\to\infty$이므로 주어진 수열은 발산한다.

ㄴ. $n\to\infty$일 때, $\dfrac{-3n+1}{n}=-3+\dfrac{1}{n}\to-3$이므로 주어진 수열은 -3에 수렴한다.

ㄷ. 주어진 수열 $\{(-1)^n\}$은 -1, 1, -1, 1, $\cdots$이므로 진동한다. 즉, 발산한다.

따라서 [보기] 중에서 수렴하는 수열은 ㄴ뿐이다.

02 답 ④

① $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=3+2\times(-2)=-1$

② $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=2\times3-(-2)=8$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}({a_n}^2-{b_n}^2)=3^2-(-2)^2=9-4=5$

④ $\lim\limits_{n\to\infty}2a_nb_n=2\times3\times(-2)=-12$

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n}{3b_n}=\dfrac{2\times3}{3\times(-2)}=-1$

03 답 ②

일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=\dfrac{n(2n-1)}{(n+1)(n+2)}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}=2$$

04 답 ①

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+2n-1}{an^3+bn^2+10n}$의 값이 0이 아니므로

$a=0$이어야 한다. 이때의 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+2n-1}{bn^2+10n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{b+\frac{10}{n}}=\frac{8}{b}=2$$

이므로 $b=4$

$\therefore a^2+b^2=0+4^2=16$

05 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{n^2+n}+n)}{(n^2+n)-n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)$$

$$=2\sqrt{2}$$

06 답 $\frac{2}{5}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (단, α는 상수)로 놓으면 $\dfrac{\alpha+5}{2\alpha+1}=3$

$6\alpha+3=\alpha+5$, $5\alpha=2$

$\therefore \alpha=\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{5}$

07 답 ②

$4n^2+2<a_n<4n^2+3$에서 각 변을 $4n^2+1$로 나누면

$$\frac{4n^2+2}{4n^2+1}<\frac{a_n}{4n^2+1}<\frac{4n^2+3}{4n^2+1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2}{4n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3}{4n^2+1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4n^2+1}=1$$

08 답 ①

ㄱ. [반례] $a_n=n+1$, $b_n=-n$이라 하면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(n+1-n)=1$로 수렴하지만

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\{n+1-(-n)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(2n+1)$$
$$=\infty$$

로 발산한다. $\therefore$ 거짓

ㄴ. [반례] $a_n=b_n=(-1)^n$이라 하면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$이 모두 발산하지만

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$로 수렴한다. $\therefore$ 거짓

ㄷ. [반례] $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=\dfrac{1}{n^2}$이라 하면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$이 모두 0에 수렴하지만

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}n=\infty$로 발산한다.

$\therefore$ 거짓

ㄹ. [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=2$라 하면

$a_n<b_n$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=2$로 수렴하지만

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$은 진동(발산)한다.

따라서 옳은 것은 0개이다.

09 답 ①

분자, 분모를 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^k+9\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}=4^k$$

$4^k=\dfrac{1}{64}=4^{-3}$에서 $k=-3$

10 답 ③

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로 $-1<r\le1$

ㄱ. $0\le r^2\le1$이므로

$r^2=1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n}}{1+r^{2n}}=\frac{1-1}{1+1}=0$ (수렴)

$0\le r^2<1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n}}{1+r^{2n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$ (수렴)

즉, 수열 $\left\{\dfrac{1-r^{2n}}{1+r^{2n}}\right\}$은 수렴한다.

ㄴ. $r=1$일 때, 수열 $\{(-r)^n\}$은 진동한다.

ㄷ. $-1<r\le1$에서 $-3<r-2\le-1$

$\therefore -1<\dfrac{r-2}{3}\le-\dfrac{1}{3}<1$

즉, 수열 $\left\{\left(\dfrac{r-2}{3}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

따라서 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11 답 ①

$2a_n-b_n=c_n$이라고 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}c_n=0$이다.

$b_n=2a_n-c_n$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(2a_n-c_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}c_n$

이때, $\lim_{n\to\infty}a_n=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=2\times2-0=4$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=2\times4=8$

12 답 ③

두 급수가 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (단, α, β는 상수)로 놓자.

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=3$에서 $2\alpha-\beta=3$ ⋯ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=12$에서 $\alpha+\beta=12$ ⋯ ㉡

㉠+㉡에서 $3\alpha=15$, 즉 $\alpha=5$

이 값을 ㉡에 대입하면 $\beta=7$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha+3\beta$

$=5+3\times7=26$

13 답 $\frac{1}{5}$

$\frac{a_n}{2^n}-5=b_n$이라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2^n}-5\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}(b_n+5)=0+5=5$

따라서 구해야 하는 식의 분자와 분모를 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{3^n+2^na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{a_n}{2^n}}=\frac{1+0}{0+5}=\frac{1}{5}$$

14 답 ④

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}$의 합이 4이므로

$0<r^2<1$, $r\neq0$이고, $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}=\frac{r^2}{1-r^2}=4$에서

$r^2=4-4r^2 \qquad \therefore r^2=\frac{4}{5}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^{4n-2}=r^2+r^6+r^{10}+\cdots$은 첫째항이 $r^2=\frac{4}{5}$,

공비가 $r^4=\frac{16}{25}$인 등비급수이므로 구하는 합은

$$\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{16}{25}}=\frac{20}{9}$$

15 답 ⑤

$$\frac{5+1}{6}+\frac{5^2-1}{6^2}+\frac{5^3+1}{6^3}+\frac{5^4-1}{6^4}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+(-1)^{n-1}}{6^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}+\frac{\frac{1}{6}}{1-\left(-\frac{1}{6}\right)}=5+\frac{1}{7}=\frac{36}{7}$$

16 답 8

정사각형 R_1의 한 변의 길이가 2이므로 $S_1=2^2=4$

정사각형 R_2의 한 변의 길이가 $2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$이므로

$S_2=(\sqrt{2})^2=2$

정사각형 R_3의 한 변의 길이가 $\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$이므로

$S_3=1^2=1$

⋮

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=4+2+1+\cdots=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=8$

Ⅱ 미분법

Ⅱ-1 지수함수와 로그함수의 도함수 pp. 46~55

01 답 1) **1** 2) **∞** 3) $\mathbf{\frac{1}{9}}$ 4) **∞** 5) **0** 6) **−5**

1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^0=1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x=\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-2}3^x=3^{-2}=\frac{1}{9}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\infty$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7^x}{3^{2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x=0$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-5\right\}=-5$

02 답 1) **−1** 2) **5** 3) **∞** 4) **−∞**

1) 분모, 분자를 $\boxed{7^x}$으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-7^x}{3^x+7^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\boxed{\frac{2}{7}}\right)^x-1}{\left(\boxed{\frac{3}{7}}\right)^x+1}=\boxed{-1}$$

2) 분모, 분자를 5^x으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^{x+1}-2^x}{5^x+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\left(\frac{2}{5}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^x}=5$$

3) 괄호의 식을 3^x으로 묶으면

$$\lim_{x\to\infty}(3^x-2^x)=\lim_{x\to\infty}3^x\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}=\infty$$

4) 괄호의 식을 5^x으로 묶으면

$$\lim_{x\to\infty}(2^x-5^x)=\lim_{x\to\infty}5^x\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^x-1\right\}=-\infty$$

03 답 1) **∞, 0** 2) **0, ∞**

04 답 1) **2** 2) **0** 3) **−2** 4) **∞** 5) **∞** 6) **−∞**

1) $\lim\limits_{x\to4}\log_2 x=\log_2 4=2$

2) $\lim\limits_{x\to1}\log x=\log 1=0$

3) $\lim\limits_{x\to9}\log_{\frac{1}{3}} x=\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_3 2x=\infty$

5) $\lim\limits_{x\to0+}\log_{\frac{1}{2}} x=\infty$

6) $\lim\limits_{x\to0+}\log x=-\infty$

05 답 1) **2** 2) **1** 3) **−1** 4) **1**

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)-\log_2 x\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\frac{\boxed{4}x+1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\left(\boxed{4}+\frac{1}{x}\right)=\log_2\boxed{4}=\boxed{2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\log(20x+1)-\log 2x\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\log\frac{20x+1}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\log\left(10+\frac{1}{2x}\right)=\log 10=1$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\log_4(x^3+3x+1)-\log_4(4x^3+3)\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\log_4\frac{x^3+3x+1}{4x^3+3}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\log_4\frac{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{4+\frac{3}{x^3}}=\log_4\frac{1}{4}=-1$

4) $2^x+3^x=3^x\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right\}$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_3(2^x+3^x)=\lim\limits_{x\to\infty}\log_3\left[3^x\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\log_3 3=1$

06 답 1) **∞, −∞** 2) **−∞, ∞**

07 답 1) **1** 2) **0** 3) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ 4) **3** 5) **1+ln 3**
6) **−1−ln 10**

3) $\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$

4) $\ln e^3=3\ln e=3$

5) $\ln 3e=\ln 3+\ln e=1+\ln 3$

6) $\ln\frac{1}{10e}=-\ln 10e=-1-\ln 10$

08 답 1) $\mathbf{\frac{1}{3}}$ 2) $\mathbf{\sqrt{2}}$ 3) **3**

1) $e^{\ln\frac{1}{3}}=\left(\boxed{\frac{1}{3}}\right)^{\ln e}=\boxed{\frac{1}{3}}$

2) $e^{\ln\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{\ln e}=\sqrt{2}$

3) $e^{\ln 3}=3^{\ln e}=3$

09 답 1) $\mathbf{e^3}$ 2) $\mathbf{\frac{1}{e}}$ 3) **ln 2** 4) **−ln 3**

1) $\ln x=3\quad\therefore x=e^3$

2) $\ln x=-1\quad\therefore x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

3) $e^x=2\quad\therefore x=\ln 2$

4) $e^x=\frac{1}{3}\quad\therefore x=\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln 3$

10 답 1) e^3 2) e^2 3) $e^{\frac{2}{3}}$ 4) e^5 5) $\frac{1}{e}$ 6) $\frac{1}{e^2}$

7) $e^{\frac{5}{2}}$ 8) $e^{-\frac{1}{9}}$ 9) e^{12}

1) $\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1+3x)^{\frac{1}{\boxed{3x}}}\right\}^{\boxed{3}}=\boxed{e^3}$

2) $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2=e^2$

3) $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$

4) $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{20}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{x}}\right\}^5=e^5$

5) $\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

6) $\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

7) $\lim_{x\to0}(1-3x)^{-\frac{5}{6x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\right\}^{\frac{5}{2}}=e^{\frac{5}{2}}$

8) $\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-\frac{3}{x}}\right\}^{-\frac{1}{3\times3}}=e^{-\frac{1}{9}}$

9) $\lim_{x\to0}\left(1-\frac{3x}{2}\right)^{-\frac{8}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1-\frac{3x}{2}\right)^{-\frac{2}{3x}}\right\}^{4\times3}=e^{12}$

11 답 1) $\sqrt{e}$ 2) e^2 3) $\sqrt{e}$ 4) e^{14} 5) e^{-6}

6) e^3 7) $e^{\frac{2}{3}}$ 8) e^4 9) $e^{-\frac{1}{3}}$

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right\}^2=e^2$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{10}}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{7}{x}\right)^{\frac{x}{7}}\right\}^{2\times7}=e^{14}$

5) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\boxed{\infty}$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2}{t}\right)^{-3t}$

$=\lim_{t\to\boxed{\infty}}\left\{\left(1+\frac{2}{t}\right)^{\frac{t}{2}}\right\}^{\boxed{-6}}=e^{\boxed{-6}}$

6) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{-12x}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{4t}\right)^{4t}\right\}^3=e^3$

7) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{6x}\right)^{-4x}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{6t}\right)^{6t}\right\}^{\frac{4}{6}}=e^{\frac{2}{3}}$

8) $x=-t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-8x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{2t}\right)^{8t}$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2t}\right)^{2t}\right\}^4=e^4$

9) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2}{3t}\right)^{-\frac{t}{2}}$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{3t}\right)^{\frac{3t}{2}}\right\}^{-\frac{1}{3}}=e^{-\frac{1}{3}}$

12 답 1) 2 2) $\frac{3}{2}$ 3) $\frac{3}{\ln 3}$ 4) $\frac{2}{5\ln 2}$ 5) $\frac{2}{\ln 3}$

6) $\frac{2}{3}$ 7) $\frac{1}{16}$

1) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{\boxed{2x}}\times\boxed{2}$

$=1\times\boxed{2}=\boxed{2}$

2) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{2x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3}{2}$

$=1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

3) $\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+3x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+3x)}{3x}\times3$

$=\frac{1}{\ln 3}\times3=\frac{3}{\ln 3}$

4) $\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+4x)}{10x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+4x)}{4x}\times\frac{4}{10}$

$=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5\ln 2}$

5) $\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+2x)}{x^2+x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+2x)}{2x}\times\frac{\boxed{2x}}{x^2+x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+2x)}{2x}\times\lim_{x\to0}\frac{\boxed{2}}{x+1}$

$=\frac{1}{\ln 3}\times2=\boxed{\frac{2}{\ln 3}}$

6) $\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+2x)}{\log_3(1+3x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+2x)}{2x}\times\frac{3x}{\log_3(1+3x)}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{\ln 3}\times\ln 3\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

7) $\lim_{x\to0}\frac{\log_4(1+x)}{\log_2(1+8x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\log_4(1+x)}{x}\times\frac{8x}{\log_2(1+8x)}\times\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{\ln 4}\times\ln 2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2\ln 2}\times\ln 2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$

13 답 1) 2 2) $\frac{4}{5}$ 3) $\frac{\ln 2}{3}$ 4) $\frac{3\ln 5}{7}$ 5) $\frac{3}{2}$ 6) $\frac{\ln 3}{\ln 5}$ 7) $\frac{2\ln 3}{\ln 2}$

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\boxed{2x}}\times\boxed{2}$

$=1\times\boxed{2}=\boxed{2}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{5x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{4}{5}=1\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}\times\frac{1}{3}$

$=\ln 2\times\frac{1}{3}=\frac{\ln 2}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5^{3x}-1}{7x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{7}$

$=\ln 5\times\frac{3}{7}=\frac{3\ln 5}{7}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3x}{x^2+2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{x+2}$

$=1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-1}{5^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}\times\frac{x}{5^x-1}=\frac{\ln 3}{\ln 5}$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\{\log_2(1+2x)\}(3^x-1)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_2(1+2x)}{2x}\times\frac{3^x-1}{x}\times2$

$=\frac{1}{\ln 2}\times\ln 3\times2=\frac{2\ln 3}{\ln 2}$

14 답 1) 2 2) e^2 3) 1

1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\{\ln(x+2)-\ln x\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{x+2}{\boxed{x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\boxed{1}+\frac{2}{\boxed{x}}\right)\cdots$ ㉠

$\boxed{\frac{2}{x}}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때, $t\to0$이므로 ㉠은

$\lim\limits_{t\to0}\frac{\boxed{2}}{t}\times\ln(1+t)=\lim\limits_{t\to0}\boxed{2}\times\frac{\ln(1+t)}{t}$

$=\boxed{2}\times1=\boxed{2}$

2) $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때

$t\to\boxed{0}$이고 $x=\boxed{1+t}$이므로

$\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{2}{x-1}}=\lim\limits_{t\to\boxed{0}}(\boxed{1+t})^{\frac{2}{t}}$

$=\lim\limits_{t\to0}\left\{(\boxed{1+t})^{\frac{1}{t}}\right\}^2=\boxed{e^2}$

3) $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-e^{x-1}}{x-1}=\lim\limits_{t\to0}\frac{(t+1)^2-e^t}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{t^2+2t+1-e^t}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{t^2+2t-(e^t-1)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\left(t+2-\frac{e^t-1}{t}\right)$

$=2-1=1$

15 답 1) $a=1$, $b=3$ 2) $a=\ln 2$, $b=1$

1) $x\to0$일 때, (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to\boxed{0}$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\ln(a+3x)=\boxed{0}$이므로 $\ln a=\boxed{0}$

$\therefore a=\boxed{1}$

이 값을 주어진 식에 대입하면

$b=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\boxed{1}+3x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\boxed{1}+3x)}{3x}\times\boxed{3}=\boxed{1}\times3=\boxed{3}$

$\therefore a=\boxed{1}$, $b=\boxed{3}$

2) $x\to0$일 때, (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이다. 즉,

$\lim\limits_{x\to0}(e^{ax}-b)=1-b=0\qquad\therefore b=1$

$b=1$을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\times a=1\times a=a=\ln 2$

$\therefore a=\ln 2$, $b=1$

16 답 1) $1+x$, $1+\frac{1}{x}$ 2) 자연로그, $\ln x$ 3) 1, $\frac{1}{\ln a}$ 4) 1, $\ln a$

17 답 1) e^{x+2} 2) $3e^{3x}$ 3) $3^{x-2}\ln 3$ 4) $2^{x+1}\ln 2$ 5) $2(1+x)e^x$ 6) $3^x(x\ln 3+1)$ 7) $(x+3)e^{x+1}$

1) $y=\boxed{e^2}\times e^x$이므로

$y'=\boxed{e^2}\times(e^x)'=\boxed{e^2}\times e^{\boxed{x}}=e^{\boxed{x+2}}$

2) $y=(e^3)^x$이므로

$y'=e^{3x}\ln e^3=3e^{3x}$

3) $y=\frac{1}{3^2}\times3^x$이므로

$y'=\frac{1}{3^2}\times(3^x)'=\frac{1}{3^2}\times3^x\times\ln 3=3^{x-2}\ln 3$

4) $y=2\times2^x$이므로

$y'=2\times(2^x)'=2\times2^x\times\ln 2=2^{x+1}\ln 2$

5) 곱의 미분법에 의하여

$y'=(2x)'e^x+2x(e^x)'=2e^x+2xe^x=2(1+x)e^x$

6) 곱의 미분법에 의하여

$y'=(3^x)'x+3^x(x)'=3^x\ln 3\times x+3^x$

$=3^x(x\ln 3+1)$

7) 곱의 미분법에 의하여

$y'=e(x+2)'e^x+e(x+2)(e^x)'=e\times e^x+e(x+2)e^x$

$=(x+3)e^{x+1}$

18 답 1) $\frac{1}{2}e^2-12$ 2) $4e^3$ 3) $5e$ 4) $\frac{\ln 3}{3}-2$ 5) $6(1+\ln 2)$ 6) $-\frac{\sqrt{5}}{4}\ln 5$

1) $f'(x)=\frac{1}{2}e^x-6x$이므로

$f'(2)=\frac{1}{2}e^2-12$

2) $f'(x)=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

이므로 $f'(3)=4e^3$

3) $f'(x)=(x^3+1)'e^x+(x^3+1)(e^x)'$

$=3x^2e^x+(x^3+1)e^x=(x^3+3x^2+1)e^x$

$\therefore f'(1)=5e$

4) $f'(x)=3^x\ln 3+2x$이므로

$f'(-1)=3^{-1}\ln 3-2=\frac{\ln 3}{3}-2$

5) $f'(x)=(3x)'\times2^x+3x\times(2^x)'$

$=3\times2^x+3x\times2^x\ln 2=3\times2^x(1+x\ln 2)$

$\therefore f'(1)=6(1+\ln 2)$

6) $f'(x)=(x^2-x)'\times5^x+(x^2-x)\times(5^x)'$

$=(2x-1)\times5^x+(x^2-x)\times5^x\ln 5$

$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\times5^{\frac{1}{2}}\ln 5=-\frac{\sqrt{5}}{4}\ln 5$

19 답 1) $4e$ 2) $\frac{\ln 2}{2}$ 3) $2(1-\ln 2)$

1) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)-\{f(1-2h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{\boxed{2h}}\times\boxed{2}$

$-\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{\boxed{-2h}}\times(\boxed{-2})$

$=\boxed{2}f'(1)+\boxed{2}f'(1)=\boxed{4}f'(1)$

한편, $f(x)=e^x$에서 $f'(x)=\boxed{e^x}$이므로

구하는 극한값은 $4f'(1)=\boxed{4e}$

2) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)$

한편 $f'(x)=2^x\ln 2+3x^2-3$이므로 구하는 극한값은

$f(-1)=2^{-1}\ln 2+3\times(-1)^2-3=\frac{\ln 2}{2}$

3) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(0)-f(0-2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(0)-f(0-2h)}{2h}\times2=2f'(0)$

한편 $f'(x)=e^x-2^x\ln 2$이므로 구하는 극한값은

$2f'(0)=2(1-\ln 2)$

20 답 1) $a=-2,\ b=2$ 2) $a=-1,\ b=2$

1) 곱의 미분법에서

$f'(x)=(e^x)'(x^2+ax+b)+e^x(x^2+ax+b)'$

$=e^x(x^2+ax+b)+e^x(2x+a)$

$=e^x\{x^2+(a+2)x+(a+b)\}$

$f'(x)=x^2e^x$이므로

$e^x\{x^2+(a+2)x+(a+b)\}=x^2e^x$ ⋯ ㉠

$e^x>0$이므로 ㉠의 양변을 e^x으로 나누면

$x^2+(a+2)x+(a+b)=x^2$

$a+2=0,\ a+b=0$이므로 $a=-2,\ b=2$

2) 곱의 미분법에서

$f'(x)=(x+a)'\times2^{bx}+(x+a)\times(2^{bx})'$

$=2^{bx}+(x+a)\times2^{bx}\ln 2^b$

$=\{1+(x+a)\ln 2^b\}\times2^{bx}$

$=\{1+(x-1)\ln 4\}\times4^x$

이므로 $a=-1$이고 $2^b=4$에서 $b=2$이다.

$\therefore a=-1,\ b=2$

21 답 1) $a=e,\ b=0$ 2) $a=\frac{1}{2e},\ b=-\frac{1}{2}$ 3) $a=\ln 5,\ b=1$

1) $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 $\boxed{\text{연속}}$이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to1+}(ax+b)=\lim\limits_{x\to1-}e^x=\boxed{f(1)}$에서

$a+b=\boxed{e}$ $\therefore a=\boxed{e}-b$ ⋯ ㉠

또, $\boxed{f'(1)}$의 값이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}\boxed{e^x} & (x<1)\\ a & (x>1)\end{cases}$

여기에서 $\lim\limits_{x\to1+}a=\lim\limits_{x\to1-}\boxed{e^x}$

$\therefore a=\boxed{e}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=\boxed{e}$, $b=\boxed{0}$

2) $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

$x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}(x+b)=\lim_{x\to1-}axe^x=f(1)$에서

$1+b=ae$

$\therefore b=ae-1 \cdots$ ㉠

또, $f'(1)$의 값이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases} ae^x+axe^x & (x<1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$

여기에서 $\lim_{x\to1+}1=\lim_{x\to1-}(ae^x+axe^x)=2ae$

$\therefore a=\frac{1}{2e} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=\frac{1}{2e}$, $b=-\frac{1}{2}$

3) $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to0+}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to0-}(5^x+x^2)$에서

$b=5^0=1 \cdots$ ㉠

또, $f'(0)$의 값이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases} 5^x\ln 5+2x & (x<0) \\ 2x+a & (x>0) \end{cases}$

여기에서 $\lim_{x\to0+}(2x+a)=\lim_{x\to0-}(5^x\ln 5+2x)$

$a=5^0\ln 5=\ln 5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=\ln 5$, $b=1$

22 답 1) $\boldsymbol{e^x}$ 2) $\boldsymbol{a^x\ln a}$

23 답 1) $\boldsymbol{\frac{1}{x}}$ 2) $\boldsymbol{\frac{4}{x}}$ 3) $\boldsymbol{-\frac{1}{x\ln 3}}$ 4) $\boldsymbol{\frac{1}{x\ln 2}}$

5) $\boldsymbol{\ln x+1}$ 6) $\boldsymbol{x\left(2\log_5 x+\frac{1}{\ln 5}\right)}$

7) $\boldsymbol{e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)}$

1) $y=\ln 2x=\boxed{\ln 2}+\ln x$이므로

$y'=(\boxed{\ln 2})'+(\ln x)'=\boxed{\frac{1}{x}}$

2) $y=\ln x^4=4\ln x$이므로 $y'=(4\ln x)'=\frac{4}{x}$

3) $y=\log_3\frac{1}{x}=\log_3 x^{-1}=-\log_3 x$이므로

$y'=-(\log_3 x)'=-\frac{1}{x\ln 3}$

4) $y=\log_2 3x=\log_2 3+\log_2 x$이므로

$y'=(\log_2 3)'+(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$

5) 곱의 미분법에 의하며

$y'=(x)'\ln x+x\times(\ln x)'=\ln x+1$

6) 곱의 미분법에 의하여

$y'=(x^2)'\log_5 x+x^2\times(\log_5 x)'$

$=2x\log_5 x+x^2\times\frac{1}{x\ln 5}=x\left(2\log_5 x+\frac{1}{\ln 5}\right)$

7) 곱의 미분법에 의하여

$y'=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'$

$=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

24 답 1) $\boldsymbol{-5}$ 2) $\boldsymbol{e}$ 3) $\boldsymbol{4e^2-2e}$

4) $\boldsymbol{\frac{1}{\ln 5}+5}$ 5) $\boldsymbol{3\left(2+\frac{1}{\ln 10}\right)}$ 6) $\boldsymbol{-\frac{4}{\ln 2}}$

1) $f(x)=\ln x+\ln 3-7x^2$ 에서

$f'(x)=\frac{1}{x}-14x$이므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=2-14\times\frac{1}{2}=-5$

2) $f'(x)=(x+1)'\times\ln x+(x+1)\times\frac{1}{x}=\ln x+1+\frac{1}{x}$

$\therefore f'\left(\frac{1}{e}\right)=f'(e^{-1})=-1+1+e=e$

3) $f'(x)=(x^3)'\ln x+x^3(\ln x)'-2x$

$=3x^2\ln x+x^2-2x$

$\therefore f'(e)=3e^2+e^2-2e=4e^2-2e$

4) $f'(x)=\frac{1}{x\ln 5}-5x^4+10$이므로

$f'(1)=\frac{1}{\ln 5}-5+10=\frac{1}{\ln 5}+5$

5) $f(x)=3x\log x$에서

$f'(x)=3\{(x)'\times\log x+x\times(\log x)'\}$

$=3\left(\log x+x\times\frac{1}{x\ln 10}\right)=3\left(\log x+\frac{1}{\ln 10}\right)$

$\therefore f'(100)=3\left(2+\frac{1}{\ln 10}\right)$

6) $f'(x)=(x^3-6x)'\times\log_2 x+(x^3-6x)\times(\log_2 x)'$

$=(3x^2-6)\times\log_2 x+(x^3-6x)\times\frac{1}{x\ln 2}$

$=(3x^2-6)\times\log_2 x+(x^2-6)\times\frac{1}{\ln 2}$

$\therefore f'(\sqrt{2})=(2-6)\times\frac{1}{\ln 2}=-\frac{4}{\ln 2}$

25 답 1) $\boldsymbol{2(2+e)}$ 2) $\boldsymbol{3\left(\frac{1}{5\ln 3}+\frac{1}{3\ln 5}\right)}$

3) $\boldsymbol{\frac{2}{5}(3e-4)}$

1) $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2=2f'(1)$

한편 $f(x)=2\ln x+e^x$에서 $f'(x)=\frac{2}{x}+e^x$이므로

구하는 극한값은 $2f'(1)=2(2+e)$

2) $\lim_{h\to0}\frac{f(15+h)-f(15-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(15+h)-f(15)-\{f(15-2h)-f(15)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(15+h)-f(15)}{h}$

$-\lim_{h\to0}\frac{f(15-2h)-f(15)}{-2h}\times(-2)$

$=f'(15)+2f'(15)=3f'(15)$

한편 $f(x)=3\log_3 x+5\log_5 x$에서

$f'(x)=\frac{3}{x\ln 3}+\frac{5}{x\ln 5}$이므로 구하는 극한값은

$3f'(15)=3\left(\frac{3}{15\ln 3}+\frac{5}{15\ln 5}\right)$

$=3\left(\frac{1}{5\ln 3}+\frac{1}{3\ln 5}\right)$

3) $\lim_{h\to0}\frac{f(e+2h)-f(e)}{5h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(e+2h)-f(e)}{2h}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}f'(e)$

한편

$f'(x)=(x^2-2x)'\times\ln x+(x^2-2x)\times(\ln x)'$

$=(2x-2)\ln x+(x^2-2x)\times\frac{1}{x}$

$=(2x-2)\ln x+x-2$

이므로 구하는 극한값은

$\frac{2}{5}f'(e)=\frac{2}{5}(2e-2+e-2)$

$=\frac{2}{5}(3e-4)$

26 답 1) $a=3,\ b=2$ 2) $a=-1,\ b=3,\ c=\frac{1}{\ln 10}$

1) $f(x)=b(x+a)\times\ln x$이므로 곱의 미분법에서

$f'(x)=b\{(x+a)'\times\ln x+(x+a)\times(\ln x)'\}$

$=b\left\{\ln x+(x+a)\times\frac{1}{x}\right\}$

$=b\left(\ln x+1+\frac{a}{x}\right)$

$=2\left(\ln x+1+\frac{3}{x}\right)$

$\therefore a=3,\ b=2$

2) 곱의 미분법에서

$f'(x)=(ax^2+bx)'\times\log x+(ax^2+bx)\times(\log x)'$

$=(2ax+b)\times\log x+(ax^2+bx)\times\frac{1}{x\ln 10}$

$=(2ax+b)\times\log x+(ax+b)\times\frac{1}{\ln 10}$

$=(-2x+3)\times\log x+(3-x)\times c$

$\therefore a=-1,\ b=3,\ c=\frac{1}{\ln 10}$

27 답 1) $a=\frac{1}{2},\ b=e^{\frac{3}{2}}$ 2) $a=\frac{1}{e},\ b=0$ 3) $a=e,\ b=\frac{1}{e}$

1) $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

$x=1$에서 $\boxed{\text{연속}}$이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}(\boxed{\ln bx+1})=\lim_{x\to1-}(ax^2+2)=f(1)$

즉, $\boxed{\ln b+1}=a+2$에서

$a=\boxed{\ln b}-1$ ⋯ ㉠

또, $f'(1)$의 값이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}2ax & (x<1)\\ \boxed{\frac{1}{x}} & (x>1)\end{cases}$

여기에서 $\lim_{x\to1+}\boxed{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1-}2ax$

$\therefore \boxed{2a}=1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=\boxed{\frac{1}{2}},\ b=e^{\boxed{\frac{3}{2}}}$

2) $f(x)$가 $x=e$에서 미분가능하려면

$x=e$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to e+}(ax+b)=\lim_{x\to e-}\ln x=f(e)$

$ae+b=1$

$\therefore b=1-ae$ ⋯ ㉠

또, $f'(e)$의 값이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (0<x<e)\\ a & (x>e)\end{cases}$

여기에서 $\lim_{x\to e+}a=\lim_{x\to e-}\frac{1}{x}$

$\therefore a=\frac{1}{e}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=\frac{1}{e},\ b=0$

3) $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}be^x=\lim_{x\to1-}\ln ax=f(1)$

$\therefore be=\ln a$ ⋯ ㉠

또, $f'(1)$의 값이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (0<x<1)\\ be^x & (x>1)\end{cases}$

여기에서 $\lim_{x\to1+}be^x=\lim_{x\to1-}\frac{1}{x}$

$\therefore be=1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=e,\ b=\frac{1}{e}$

28 답 1) $\frac{1}{x}$ 2) $\frac{1}{x\ln a}$

Ⅱ－2 삼각함수의 도함수

pp. 56~64

29 답 1) $\csc\theta=\frac{5}{4}$, $\sec\theta=\frac{5}{3}$, $\cot\theta=\frac{3}{4}$

2) $\csc\theta=2$, $\sec\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\cot\theta=-\sqrt{3}$

3) $\csc\theta=-\frac{\sqrt{10}}{3}$, $\sec\theta=-\sqrt{10}$, $\cot\theta=\frac{1}{3}$

4) $\csc\theta=-\frac{\sqrt{29}}{5}$, $\sec\theta=\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\cot\theta=-\frac{2}{5}$

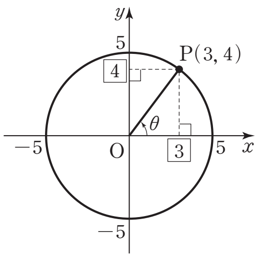
1) $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\boxed{3}^2+4^2}=\boxed{5}$

이므로

$\csc\theta=\boxed{\frac{5}{4}}$,

$\sec\theta=\boxed{\frac{5}{3}}$,

$\cot\theta=\boxed{\frac{3}{4}}$



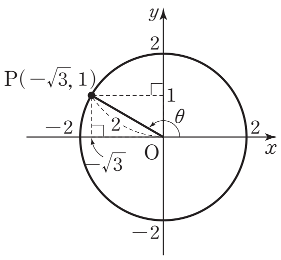
2) $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-\sqrt{3}\,)^2+1^2}=2$

이므로

$\csc\theta=2$,

$\sec\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\cot\theta=-\sqrt{3}$



3) $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}$

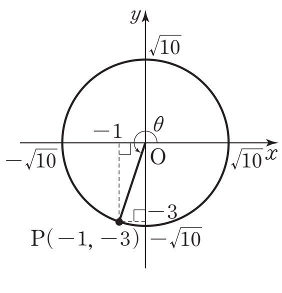
$=\sqrt{10}$

이므로

$\csc\theta=-\frac{\sqrt{10}}{3}$,

$\sec\theta=-\sqrt{10}$,

$\cot\theta=\frac{1}{3}$



4) $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2^2+(-5)^2}$

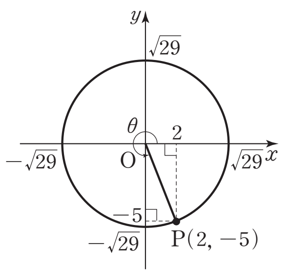
$=\sqrt{29}$

이므로

$\csc\theta=-\frac{\sqrt{29}}{5}$,

$\sec\theta=\frac{\sqrt{29}}{2}$,

$\cot\theta=-\frac{2}{5}$



30 답 1) 2 2) $\sqrt{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 5) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 6) -1

1) $\csc\frac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$

2) $\sec\frac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$

3) $\cot\frac{\pi}{3}=\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{1}{-\sin\frac{\pi}{3}}$

$=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5) $\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6) $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{-\tan\frac{\pi}{4}}=-1$

31 답 1) $2\sec^2\theta$ 2) $2\cot\theta$ 3) 1 4) 2 5) $\sin^2\theta$

1) $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}$

$=\dfrac{(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{\boxed{2}}{1-\sin^2\theta}=\boxed{\dfrac{2}{\cos^2\theta}}=\boxed{2\sec^2\theta}$

2) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta-1}-\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta+1}$

$=\dfrac{\tan\theta(\sec\theta+1)-\tan\theta(\sec\theta-1)}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}$

$=\dfrac{2\tan\theta}{\sec^2\theta-1}=\dfrac{2\tan\theta}{\tan^2\theta}=\dfrac{2}{\tan\theta}=2\cot\theta$

3) $(1+\cot^2\theta)(1-\cos^2\theta)=\csc^2\theta\times\sin^2\theta$

$=\dfrac{1}{\sin^2\theta}\times\sin^2\theta=1$

4) $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta-\tan\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta(\sec\theta+\tan\theta)+\cos\theta(\sec\theta-\tan\theta)}{(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)}$

$=\dfrac{2\cos\theta\sec\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}=2$

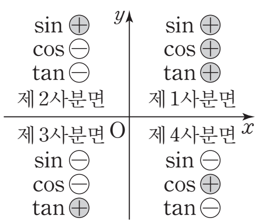
5) $(\sin\theta+\sec\theta)^2-(\tan\theta+1)^2$

$=\sin^2\theta+2\tan\theta+\sec^2\theta-\tan^2\theta-2\tan\theta-1$

$=\sin^2\theta+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)-1$

$=\sin^2\theta+1-1=\sin^2\theta$

32 답 1) 제 2 사분면 2) 제 1 사분면
3) 제 3 사분면 4) 제 4 사분면



1) $\sec\theta<0$, $\cot\theta<0$에서 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로 조건을 만족하는 각 θ는 제 2사분면의 각이다.

2) $\csc\theta>0$, $\sec\theta>0$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로 조건을 만족하는 각 θ는 제 1사분면의 각이다.

3) $\csc\theta\sec\theta>0$에서 $\csc\theta$와 $\sec\theta$의 부호가 같고, $\csc\theta+\sec\theta<0$이므로 $\csc\theta$와 $\sec\theta$의 부호가 모두 음수인 것을 알 수 있다.
즉, $\csc\theta<0$, $\sec\theta<0$에서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로 조건을 만족하는 각 θ는 제 3사분면의 각이다.

4) $\cot\theta\sec\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\dfrac{1}{\cos\theta}=\csc\theta<0$이고
$\csc\theta\sec\theta<0$이므로 $\sec\theta>0$인 것을 알 수 있다.
여기에서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로
조건을 만족하는 각 θ는 제 4사분면의 각이다.

33 답 1) $\dfrac{r}{y}$, $\dfrac{r}{x}$, $\dfrac{x}{y}$
2) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\sin\theta$, $\sec^2\theta$, $\csc^2\theta$
3) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$

34 답 1) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 2) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 3) $2+\sqrt{3}$
4) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 5) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ 6) $-2-\sqrt{3}$

1) $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+\boxed{45^\circ})$

$$=\sin 30^\circ\times\boxed{\cos 45^\circ}+\cos 30^\circ\times\boxed{\sin 45^\circ}$$

$$=\frac{1}{2}\times\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

2) $\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)$

$$=\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3) $\tan 75^\circ=\tan(30^\circ+45^\circ)$

$$=\frac{\tan 30^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 45^\circ}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

4) $\sin 105^\circ=\sin(45^\circ+60^\circ)$

$$=\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

5) $\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)$

$$=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

6) $\tan 105^\circ=\tan(45^\circ+60^\circ)$

$$=\frac{\tan 45^\circ+\tan 60^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 60^\circ}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$$

35 답 1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 2) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 3) $2-\sqrt{3}$

1) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$$=\sin 45^\circ\times\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\times\sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2) $\cos 15^\circ=\cos(60^\circ-45^\circ)$

$$=\cos 60^\circ\times\cos 45^\circ+\sin 60^\circ\times\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

3) $\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)$

$$=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\times\tan 45^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

36 답 1) 1 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\sqrt{3}$

1) $\sin 35^\circ\times\cos 55^\circ+\cos 35^\circ\times\sin 55^\circ$

$$=\sin(35^\circ+55^\circ)=\sin 90^\circ=1$$

2) $\cos 65^\circ\times\cos 20^\circ+\sin 65^\circ\times\sin 20^\circ$

$$=\cos(65^\circ-20^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) $\dfrac{\tan 25^\circ+\tan 35^\circ}{1-\tan 25^\circ\times\tan 35^\circ}=\tan(25^\circ+35^\circ)$

$$=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

37 답 1) $-\dfrac{\sqrt{15}+2\sqrt{6}}{9}$ 2) $-\dfrac{\sqrt{30}+2\sqrt{3}}{9}$
3) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}$

1) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서
$\cos\beta<0$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\boxed{\sin^2\alpha}}=\sqrt{1-\left(\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)^2}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\boxed{\frac{2}{3}}\right)^2}=\boxed{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\boxed{\beta}-\boxed{\cos\alpha}\sin\beta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(\boxed{-\frac{\sqrt{5}}{3}}\right)-\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}\times\frac{2}{3}$$

$$=-\boxed{\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{6}}{9}}$$

2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{\sqrt{30}+2\sqrt{3}}{9}$$

3) $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}$$

38

답 **1)** $\dfrac{16}{65}$ **2)** $-\dfrac{33}{65}$ **3)** $\dfrac{16}{63}$

1) 각 α는 제 1 사분면의 각이므로 $\cos\alpha>0$이고
각 β는 제 4 사분면의 각이므로 $\sin\beta<0$이다.

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\dfrac{5}{13}$

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}+\frac{5}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{65}$$

2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}+\frac{12}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{33}{65}$$

3) $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{12}{5}$

$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{12}{5}+\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\frac{12}{5}\times\left(-\frac{4}{3}\right)}=\frac{16}{63}$$

39

답 **1)** 2 **2)** $\dfrac{4}{5}$ **3)** $\dfrac{11\sqrt{170}}{170}$

1) 두 직선 $y=x+2$, $y=-3x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\boxed{1}$, $\tan\beta=\boxed{-3}$이므로

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{1-(-3)}{1+1\times(-3)}\right|=\left|\frac{4}{-2}\right|=\boxed{2}$$

2) 두 직선 $2x-y-1=0$, $x-2y+6=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

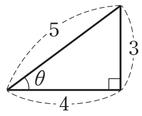
$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}\right|=\frac{3}{4}$$

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\dfrac{9}{16}=\dfrac{25}{16}$이므로 $\cos^2\theta=\dfrac{16}{25}$

이때, θ를 한 각으로 하는 직각삼각형은 오른쪽 그림과 같으므로



$\therefore \cos\theta=\dfrac{4}{5}$

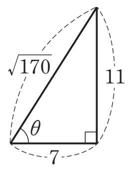
3) 두 직선 $5x-3y-1=0$, $2x+y=0$, 즉 $y=\dfrac{5}{3}x-\dfrac{1}{3}$, $y=-2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\dfrac{5}{3}$, $\tan\beta=-2$이므로

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{5}{3}-(-2)}{1+\frac{5}{3}\times(-2)}\right|=\frac{11}{7}$$

이때, θ를 한 각으로 가지는 직각삼각형은 오른쪽 그림과 같으므로



$\sin\theta=\dfrac{11\sqrt{170}}{170}$

40

답 **1)** ① $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

② $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

③ $\tan\alpha+\tan\beta$, $1-\tan\alpha\tan\beta$, $\tan\alpha-\tan\beta$, $1+\tan\alpha\tan\beta$

2) $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\alpha-\beta$, m_1, m_2, m_1m_2

41

답 **1)** $\dfrac{1}{2}$ **2)** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **3)** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **4)** 2 **5)** 2

1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{5}{4}\pi}\cos x=\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{6}}(\tan x+\cos x)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$=-\tan\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)$

$= 1+\sin\dfrac{\pi}{2} = 1+1 = 2$

5) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to\pi} (1-\cos x)$

$= 1-\cos\pi = 1-(-1) = 2$

42 답 1) 0 2) 0 3) 0

1) $x\neq 0$일 때, $\boxed{-1} \le \sin\dfrac{1}{x} \le \boxed{1}$이므로

$-|x| \le x\sin\dfrac{1}{x} \le |x|$

이때, $\lim\limits_{x\to0}|x| = \lim\limits_{x\to0}(-|x|) = \boxed{0}$이므로

$\lim\limits_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x} = \boxed{0}$

2) $x\neq 0$일 때, $-1 \le \sin\dfrac{1}{x} \le 1$이므로

$-|\tan x| \le \tan x\sin\dfrac{1}{x} \le |\tan x|$

이때, $\lim\limits_{x\to0}|\tan x| = \lim\limits_{x\to0}(-|\tan x|) = 0$이므로

$\lim\limits_{x\to0} \tan x\sin\dfrac{1}{x} = 0$

3) $x\to\infty$이므로 $x>0$이고

$-1 \le \sin x \le 1$이므로 $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}$

이때, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$

43 답 1) $\frac{3}{2}$ 2) $\frac{5}{3}$ 3) 3 4) $\frac{2}{7}$ 5) $\frac{3}{5}$ 6) 3 7) $\frac{1}{2}$ 8) 2 9) $\frac{1}{4}$

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\boxed{3x}} \times \dfrac{\boxed{3}}{2}$

$= 1\times\boxed{\dfrac{3}{2}} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{3x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\times\dfrac{5}{3} = 1\times\dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{3x}\times 3 = 1\times3 = 3$

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{7x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{2x}\times\dfrac{2}{7} = 1\times\dfrac{2}{7} = \dfrac{2}{7}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\times\dfrac{5x}{\sin 5x}\times\dfrac{3}{5}$

$= 1\times1\times\dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 9x}{\tan 3x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 9x}{9x}\times\dfrac{3x}{\tan 3x}\times\dfrac{9}{3}$

$= 1\times1\times3 = 3$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)}{\tan x}\times\dfrac{\tan x}{x}\times\dfrac{1}{2}$

$= 1\times1\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x^2+2x)}{x^2+x}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x^2+2x)}{3x^2+2x}\times\dfrac{3x^2+2x}{x^2+x}$

$= 1\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+2}{x+1} = 1\times2 = 2$

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2x^2(1+\cos x)}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{2x^2(1+\cos x)}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{2x^2(1+\cos x)}$

$= \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\times\dfrac{1}{2(1+\cos x)}$

$= 1\times\dfrac{1}{2\times2} = \dfrac{1}{4}$

44 답 1) $-\frac{\pi}{2}$ 2) 1 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) $-\frac{1}{2\pi}$

1) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$로 놓으면

$x\to\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$일 때 $t\to0$이고 $x=\boxed{\dfrac{\pi}{2}}+t$이므로

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{\left(\boxed{\frac{\pi}{2}}+t\right)\cos\left(\boxed{\frac{\pi}{2}}+t\right)}{t}$

$= -\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\sin t}{t}$

$= -\lim\limits_{t\to0}\left(\boxed{\dfrac{\pi}{2}}+t\right)\times\dfrac{\sin t}{t}$

$= -1\times\dfrac{\pi}{2}\times1 = \boxed{-\dfrac{\pi}{2}}$

2) $\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면

$x\to\infty$일 때 $t\to0$이고 $x=\dfrac{1}{t}$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}\tan t = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{\tan t}{t} = 1$

3) $1-x=t$로 놓으면

$x\to1$일 때 $t\to0$이고 $x=1-t$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}&=\lim_{t\to0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1-t)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\times\frac{\pi}{2}\\&=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

4) $x-\pi=t$로 놓으면

$x\to\pi$일 때 $t\to0$이고 $x=\pi+t$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x^2-\pi^2}&=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{(x+\pi)(x-\pi)}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi+t)}{(2\pi+t)t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{(2\pi+t)t}\\&=-\lim_{t\to0}\frac{1}{(2\pi+t)}\times\frac{\sin t}{t}\\&=-\lim_{t\to0}\frac{1}{2\pi+t}\times\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\\&=-\frac{1}{2\pi}\end{aligned}$$

45

답 1) $a=12$, $b=4$ 2) $a=1$, $b=1$ 3) $a=-2$, $b=2$

1) $\boxed{0}$이 아닌 극한값이 존재하고

$x\to0$일 때 (분자)$\to0$이므로

(분모)$\to\boxed{0}$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-2)=\sqrt{b}-2=\boxed{0}$ $\quad\therefore b=\boxed{4}$

이 값을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{ax+\boxed{4}}-2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{ax+4}+2)\sin 3x}{ax+4-4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{ax+\boxed{4}}+2)\sin 3x}{\boxed{ax}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\boxed{3x}}\times\frac{\boxed{3}}{a}\times(\sqrt{ax+\boxed{4}}+2)\\&=1\times\frac{\boxed{3}}{a}\times\boxed{4}=\frac{\boxed{12}}{a}=1\end{aligned}$$

$\therefore a=\boxed{12}$

2) 0이 아닌 극한값이 존재하고

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\ln(2x+a)=\ln a=0$

$\therefore a=1$

이 값을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{\sin bx}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{2x}\times\frac{bx}{\sin bx}\times\frac{2}{b}\\&=1\times1\times\frac{2}{b}=2\end{aligned}$$

$\therefore b=1$

3) 0이 아닌 극한값이 존재하고

$x\to\frac{\pi}{2}$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+\pi)=\frac{a\pi}{2}+\pi=0$

$\therefore a=-2$

이 값을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2x+\pi}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}$$

이때, $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면

$x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이고 $x=\frac{\pi}{2}+t$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}&=-2\lim_{t\to0}\frac{t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}\\&=-2\lim_{t\to0}\frac{t}{-\sin t}=2\end{aligned}$$

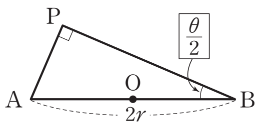
$\therefore b=2$

46

답 1

원 O의 반지름의 길이가 r이므로

$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=\boxed{r\theta}$



$\triangle$PAB는 $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$,

$\angle\mathrm{B}=\boxed{\frac{\theta}{2}}$인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\boxed{2r}\sin\boxed{\frac{\theta}{2}}$

$$\begin{aligned}\therefore\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\boxed{2r}\sin\boxed{\frac{\theta}{2}}}{\boxed{r\theta}}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\boxed{\frac{\theta}{2}}}{\boxed{\frac{\theta}{2}}}=\boxed{1}\end{aligned}$$

47 답 $\frac{2}{7}$

직각삼각형 AHB에서 $\tan 2\theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}$

$\therefore \overline{BH} = \overline{AH} \tan 2\theta$

직각삼각형 AHC에서 $\tan 7\theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{AH}}$

$\therefore \overline{CH} = \overline{AH} \tan 7\theta$

$$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{AH} \tan 2\theta}{\overline{AH} \tan 7\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan 2\theta}{\tan 7\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan 2\theta}{2\theta} \times \frac{7\theta}{\tan 7\theta} \times \frac{2}{7}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$$

48 답 1) ① $\sin a$ ② $\cos a$ ③ $\tan a$

2) ① $1, \frac{b}{a}$ ② $1, \frac{b}{a}$

49 답 1) $y' = \cos x - 2\sin x$ 2) $y' = \frac{1}{x} - \cos x$

3) $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$

4) $y' = -2\sin x \cos x$

5) $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$

6) $y' = e^x(\cos x - \sin x) - 2^x \ln 2$

7) $y' = e^x(3\sin x + 3\cos x + 1)$

1) $y' = (\sin x)' + 2(\cos x)' = \cos x - 2\sin x$

2) $y' = (\ln x)' - (\sin x)' = \frac{1}{x} - \cos x$

3) $y' = (x^2)' \sin x + x^2(\sin x)'$

$= 2x \sin x + x^2 \cos x$

4) $y = \cos^2 x = \cos x \times \cos x$이므로

$y' = (\cos x)' \cos x + \cos x (\cos x)'$

$= -\sin x \times \cos x + \cos x \times (-\sin x)$

$= -2\sin x \cos x$

5) $y' = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)'$

$= \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x)$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

6) $y' = (e^x)' \cos x + e^x(\cos x)' - (2^x)'$

$= e^x \cos x + e^x(-\sin x) - 2^x \ln 2$

$= e^x \cos x - e^x \sin x - 2^x \ln 2$

$= e^x(\cos x - \sin x) - 2^x \ln 2$

7) $y' = (e^x)'(3\sin x + 1) + e^x(3\sin x + 1)'$

$= e^x(3\sin x + 1) + e^x(3\cos x)$

$= e^x(3\sin x + 3\cos x + 1)$

50 답 1) $\pi - 1$ 2) 0 3) $-2\pi + 3$

4) $-\frac{\pi}{12}$ 5) 1 6) $-2e^{\pi}$

1) $f'(x) = (\cos x)' + (x^2 + 1)' = -\sin x + 2x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} + 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi - 1$

2) $f'(x) = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x(\cos x - \sin x)$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}\right) = 0$

3) $f'(x) = (x^2 \cos x)' - (3\sin x)'$

$= 2x \cos x - x^2 \sin x - 3\cos x$

$\therefore f'(\pi) = 2\pi \times (-1) - \pi^2 \times 0 - 3 \times (-1)$

$= -2\pi + 3$

4) $f'(x) = (x)' \cos x + x (\cos x)' - (\sin x)'$

$= \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \times \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{12}$

5) $f(x)' = (3^x + x)' \sin x + (3^x + x)(\sin x)'$

$= (3^x \ln 3 + 1) \sin x + (3^x + x) \cos x$

$\therefore f'(0) = (3^0 + 0) \cos 0 = 1 \times 1 = 1$

6) $f'(x) = (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)'$

$= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$

$= 2e^x \cos x$

$f'(\pi) = 2e^{\pi} \cos \pi = -2e^{\pi}$

51 답 1) $\frac{2}{\pi}$ 2) 6 3) 1

1) $\lim_{h \to 0} \frac{f(2\pi + 5h) - f(2\pi + h)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2\pi + 5h) - f(2\pi + h)}{4h} \times 4 = 4f'(2\pi)$

$f'(x) = (\ln x)' \times (\cos x) + (\ln x) \times (\cos x)'$

$= \frac{1}{x} \times \cos x + (\ln x) \times (-\sin x)$

이므로 구하는 극한값은

$4f'(2\pi) = 4 \times \frac{1}{2\pi} \times \cos 2\pi = \frac{2}{\pi}$

2) $\lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$

$= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

함수 $f(x) = 3x \sin x$를 미분하면

$f'(x) = (3x)' \sin x + 3x (\sin x)'$

$= 3\sin x + 3x \cos x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

따라서 구하는 값은 $2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$

3) $f(x)=e^x \sin x$에서 $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

함수 $f(x)=e^x \sin x$를 미분하면

$f'(x)=(e^x)' \sin x+e^x(\sin x)'$

$=e^x \sin x+e^x \cos x$

$\therefore f'(0)=1$

52 답 1) $a=1,\ b=1$ 2) $a=3,\ b=-4$

1) 곱의 미분법에서

$f'(x)=(ax)'\times \sin x+ax\times(\sin x)'+(b\cos x)'$

$=a\sin x+ax\cos x-b\sin x$

$=(a-b)\sin x+ax\cos x$

$=x\cos x$

이므로 $a=b=1$

2) 곱의 미분법에서

$f'(x)$

$=(e^x)'(a\sin x+b\cos x)+e^x(a\sin x+b\cos x)'$

$=e^x(a\sin x+b\cos x)+e^x(a\cos x-b\sin x)$

$=e^x\{(a-b)\sin x+(a+b)\cos x\}$

$=e^x(7\sin x-\cos x)$

이므로 $a-b=7,\ a+b=-1$

이것을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-4$

53 답 1) $a=1,\ b=1$ 2) $a=1,\ b=1$ 3) $a=-2,\ b=0$

1) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면

$x=0$에서 $\boxed{\text{연속}}$이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}(\boxed{ax+b})=\lim\limits_{x\to 0+}(\boxed{\sin x+1})=\boxed{f(0)}$

$\therefore b=\boxed{1}$

또, $f'(x)=\begin{cases}\boxed{a} & (x<0)\\ \boxed{\cos x} & (x>0)\end{cases}$ 이고

$x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 0-}\boxed{a}=\lim\limits_{x\to 0+}\boxed{\cos x}$

$\therefore a=\boxed{1}$

2) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면

$x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}e^x=\lim\limits_{x\to 0+}(a\cos x+bx)=f(0)$

$\therefore a=1$

또, $f'(x)=\begin{cases}e^x & (x<0)\\ -\sin x+b & (x>0)\end{cases}$ 이고

$x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 0-}e^x=\lim\limits_{x\to 0+}(-\sin x+b)$

$\therefore b=1$

3) $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}\{(x^2-2x+b)e^x\}=\lim\limits_{x\to 0-}(x+a)\sin x$

$\therefore b=0$

$f'(x)=\begin{cases}\sin x+(x+a)\cos x & (x<0)\\ (2x-2)e^x+(x^2-2x)e^x & (x>0)\end{cases}$

즉 $f'(x)=\begin{cases}\sin x+(x+a)\cos x & (x<0)\\ (x^2-2)e^x & (x>0)\end{cases}$

이고 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 0+}(x^2-2)e^x=\lim\limits_{x\to 0-}\{\sin x+(x+a)\cos x\}$

$\therefore a=-2$

54 답 1) $\cos x$ 2) $-\sin x$

Ⅱ-3 여러 가지 미분법

pp. 65~75

55 답 1) $y'=-\frac{7}{(2x+1)^2}$ 2) $y'=\frac{3x^2+6x+2}{(x+1)^2}$

3) $y'=\frac{1}{\cos x-1}$ 4) $y'=\frac{2\cos x}{(\sin x+1)^2}$

5) $y'=\frac{2x-x^2}{e^x}$ 6) $y'=\frac{4e^x}{(e^x+2)^2}$

7) $y'=-\frac{1}{x(\ln x)^2}$ 8) $y'=\frac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}$

1) $y'=\frac{(3x+5)'(2x+1)-(3x+5)(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$=\frac{\boxed{3}(2x+1)-\boxed{2}(3x+5)}{(2x+1)^2}$

$=-\frac{\boxed{7}}{(2x+1)^2}$

2) $y'=\frac{(3x^2-2)'(x+1)-(3x^2-2)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$=\frac{6x(x+1)-(3x^2-2)}{(x+1)^2}=\frac{3x^2+6x+2}{(x+1)^2}$

3) $y'=\frac{(\cos x+1)'\sin x-(\cos x+1)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$

$=\frac{-\sin x\times\sin x-(\cos x+1)\times\cos x}{\sin^2 x}$

$=\frac{-1-\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{-(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$=\frac{1}{\cos x-1}$

4) $y'=\dfrac{(\sin x-1)'(\sin x+1)-(\sin x-1)(\sin x+1)'}{(\sin x+1)^2}$

$=\dfrac{\cos x\times(\sin x+1)-(\sin x-1)\times\cos x}{(\sin x+1)^2}$

$=\dfrac{2\cos x}{(\sin x+1)^2}$

5) $y'=\dfrac{(x^2)'e^x-x^2(e^x)'}{(e^x)^2}=\dfrac{2xe^x-x^2e^x}{e^{2x}}=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$

6) $y'=\dfrac{(e^x-2)'(e^x+2)-(e^x-2)(e^x+2)'}{(e^x+2)^2}$

$=\dfrac{e^x(e^x+2)-(e^x-2)e^x}{(e^x+2)^2}=\dfrac{4e^x}{(e^x+2)^2}$

7) $y'=-\dfrac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}=-\dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

8) $y'=\dfrac{(x^2)'\ln x-x^2(\ln x)'}{(\ln x)^2}$

$=\dfrac{2x\ln x-x^2\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}$

56 답 1) $y'=-\dfrac{3}{x^4}$ 2) $y'=-\dfrac{10}{x^3}$ 3) $y'=\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{6}{x^3}$

4) $y'=-\dfrac{5}{x^6}+\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{2}{x^3}$

5) $y'=-\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{6}{x^7}$ 6) $y'=6x+\dfrac{2}{x^3}$

1) $y'=\boxed{-3}x^{-3-\boxed{1}}=\boxed{-3}x^{\boxed{-4}}=-\dfrac{\boxed{3}}{x^{\boxed{4}}}$

2) $y'=5\times(-2x^{-2-1})=-10x^{-3}=-\dfrac{10}{x^3}$

3) $y=-x^{-4}+3x^{-2}$이므로

$y'=-(-4x^{-4-1})+3\times(-2x^{-2-1})$

$=4x^{-5}-6x^{-3}=\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{6}{x^3}$

4) $y=x^{-5}-x^{-4}+x^{-3}-x^{-2}$이므로

$y'=-5x^{-5-1}-(-4x^{-4-1})-3x^{-3-1}-(-2x^{-2-1})$

$=-5x^{-6}+4x^{-5}-3x^{-4}+2x^{-3}$

$=-\dfrac{5}{x^6}+\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{2}{x^3}$

5) $y=x^{-4}+x^{-6}$이므로

$y'=-4x^{-4-1}-6x^{-6-1}=-4x^{-5}-6x^{-7}$

$=-\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{6}{x^7}$

6) $y=3x^2+1-x^{-2}$이므로

$y'=3\times2x^{2-1}-(-2x^{-2-1})=6x+2x^{-3}$

$=6x+\dfrac{2}{x^3}$

57 답 1) $\dfrac{3}{2}$ 2) $-\dfrac{1}{e}$ 3) 2 4) $-\dfrac{4}{e^4}$

1) $f'(x)=\dfrac{(x^3+x^2)'(x^2+1)-(x^3+x^2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{(3x^2+2x)(x^2+1)-(x^3+x^2)\times2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}$

이므로 $f'(1)=\dfrac{1+3+2}{2^2}=\dfrac{3}{2}$

2) $f'(x)=\dfrac{(e^x)'(x^2+2x)-e^x(x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2}$

$=\dfrac{e^x(x^2+2x-2x-2)}{(x^2+2x)^2}=\dfrac{e^x(x^2-2)}{(x^2+2x)^2}$

이므로 $f'(-1)=\dfrac{e^{-1}(1-2)}{(1-2)^2}=-\dfrac{1}{e}$

3) $f'(x)=\dfrac{(\sin x-\cos x)'e^x-(\sin x-\cos x)(e^x)'}{(e^x)^2}$

$=\dfrac{(\cos x+\sin x-\sin x+\cos x)e^x}{e^{2x}}$

$=\dfrac{2\cos x}{e^x}$

이므로 $f'(0)=2$

4) $f'(x)=-\dfrac{(x^3\ln x)'}{(x^3\ln x)^2}=-\dfrac{(x^3)'\ln x+x^3(\ln x)'}{x^6(\ln x)^2}$

$=-\dfrac{3x^2\ln x+x^3\times\frac{1}{x}}{x^6(\ln x)^2}=-\dfrac{3\ln x+1}{x^4(\ln x)^2}$

이므로 $f'(e)=-\dfrac{3+1}{e^4}=-\dfrac{4}{e^4}$

58 답 1) ① $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$, $\{g(x)\}^2$

② $g'(x)$, $\{g(x)\}^2$

2) nx^{n-1}

59 답 1) $y'=\sec^2 x-2\csc^2 x$

2) $y'=(\tan x+\sec x)\sec x$

3) $y'=\tan x+x\sec^2 x$

4) $y'=x\sec x(2+x\tan x)$

5) $y'=-(\cot^2 x+\csc^2 x)\csc x$

6) $y'=\dfrac{-x\csc^2 x-\cot x}{x^2}$ 7) $y'=\dfrac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$

1) $y'=\sec^2 x+2(-\csc^2 x)$

$=\sec^2 x-2\csc^2 x$

2) $y'=\sec x\tan x+\sec^2 x=(\tan x+\sec x)\sec x$

3) $y'=(x)'\tan x+x(\tan x)'$

$=\tan x+x\sec^2 x$

4) $y'=(x^2)'\sec x+x^2(\sec x)'$

$=2x\sec x+x^2\sec x\tan x$

$=x\sec x(2+x\tan x)$

5) $y'=(\csc x)'\cot x+\csc x(\cot x)'$

$=(\boxed{-\csc x\cot x})\cot x+\csc x(\boxed{-\csc^2 x})$

$=-\csc x\boxed{\cot^2 x}-\csc^{\boxed{3}} x$

$=-(\boxed{\cot^2 x+\csc^2 x})\csc x$

6) $y'=\dfrac{(\cot x)'x-(\cot x)(x)'}{x^2}$

$=\dfrac{-x\csc^2 x-\cot x}{x^2}$

7) $y'=\dfrac{(1+\tan x)'(1-\tan x)-(1+\tan x)(1-\tan x)'}{(1-\tan x)^2}$

$=\dfrac{\sec^2 x(1-\tan x)-(1+\tan x)(-\sec^2 x)}{(1-\tan x)^2}$

$=\dfrac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$

60 답 1) $\boldsymbol{\sec^2 x}$ 2) $\boldsymbol{-\csc^2 x}$ 3) $\boldsymbol{\sec x\tan x}$ 4) $\boldsymbol{-\csc x\cot x}$

61 답 1) $\boldsymbol{y'=6(x+2)(x^2+4x-1)^2}$

2) $\boldsymbol{y'=-\dfrac{2(3x^2+2)}{(x^3+2x)^3}}$ 3) $\boldsymbol{y'=2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}$

4) $\boldsymbol{y'=30x(2x-1)^2(3x+1)}$

1) $y'=\boxed{3}(x^2+4x-1)^{\boxed{2}}(\boxed{x^2}+\boxed{4x}-1)'$

$=\boxed{3}(x^2+4x-1)^{\boxed{2}}(\boxed{2x}+\boxed{4})$

$=\boxed{6}(x+\boxed{2})(x^2+4x-1)^{\boxed{2}}$

2) $y=(x^3+2x)^{-2}$이므로

$y'=-2(x^3+2x)^{-3}\times(x^3+2x)'$

$=-2(x^3+2x)^{-3}\times(3x^2+2)$

$=-\dfrac{2(3x^2+2)}{(x^3+2x)^3}$

3) $y'=2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)'=2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

4) $y'=\{(2x-1)^3\}'(3x+1)^2+(2x-1)^3\{(3x+1)^2\}'$

$=3(2x-1)^2\times2\times(3x+1)^2$

$\qquad+(2x-1)^3\times2(3x+1)\times3$

$=6(2x-1)^2(3x+1)\{(3x+1)+(2x-1)\}$

$=30x(2x-1)^2(3x+1)$

62 답 1) $\boldsymbol{y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$ 2) $\boldsymbol{y'=-\dfrac{5}{2x^3\sqrt{x}}}$

3) $\boldsymbol{y'=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}}$ 4) $\boldsymbol{y'=\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}$

1) $y'=2(x^{\frac{1}{2}})'=2\times\boxed{\dfrac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}-\boxed{1}}=x^{\boxed{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\boxed{\sqrt{x}}}$

2) $y=\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}=x^{-\frac{5}{2}}$이므로

$y'=-\dfrac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}=-\dfrac{5}{2x^3\sqrt{x}}$

3) $y=(x^2+3x)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\dfrac{1}{2}(x^2+3x)^{-\frac{1}{2}}\times(x^2+3x)'=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$

4) $y'=(x)'\sqrt{1+x^2}+x(\sqrt{1+x^2})'$

$=\sqrt{1+x^2}+x\times\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\times2x$

$=\sqrt{1+x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

63 답 1) $\boldsymbol{y'=2\cos(2x+1)}$ 2) $\boldsymbol{y'=3x^2\sec^2 x^3}$

3) $\boldsymbol{y'=\sec^2 x\cos(\tan x)}$

4) $\boldsymbol{y'=\dfrac{\sec^2 x}{2\sqrt{1+\tan x}}}$

1) $y'=\boxed{\cos}(2x+1)(\boxed{2}x+\boxed{1})'$

$=2\boxed{\cos}(2x+\boxed{1})$

2) $y'=\sec^2 x^3\times(x^3)'=3x^2\sec^2 x^3$

3) $y'=\cos(\tan x)\times(\tan x)'=\sec^2 x\cos(\tan x)$

4) $y=(1+\tan x)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\dfrac{1}{2}(1+\tan x)^{\frac{1}{2}-1}\times(1+\tan x)'$

$=\dfrac{1}{2}(1+\tan x)^{-\frac{1}{2}}\times\sec^2 x$

$=\dfrac{\sec^2 x}{2\sqrt{1+\tan x}}$

64 답 1) $\boldsymbol{y'=6x^2\sin x^3\cos x^3}$

2) $\boldsymbol{y'=-9\cos^2(3x+1)\sin(3x+1)}$

3) $\boldsymbol{y'=4(e^x+2)\tan^3(e^x+2x)\sec^2(e^x+2x)}$

1) $y'=\{(\sin x^3)^2\}'=2\sin x^3\times\boxed{\cos x^3}\times(x^3)'$

$=\boxed{6}x^2\sin x^3\boxed{\cos x^3}$

2) $y'=[\{\cos(3x+1)\}^3]'$

$=3\cos^2(3x+1)\times\{-\sin(3x+1)\}\times3$

$=-9\cos^2(3x+1)\sin(3x+1)$

3) $y'=[\{\tan(e^x+2x)\}^4]'$

$=4\tan^3(e^x+2x)\times\sec^2(e^x+2x)\times(e^x+2)$

$=4(e^x+2)\tan^3(e^x+2x)\sec^2(e^x+2x)$

65 답 1) **54** 2) $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi}$

1) $f'(x)=3(x+\sqrt{x^4+3})^2(x+\sqrt{x^4+3})'$

$=3(x+\sqrt{x^4+3})^2\left(1+\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}\right)$

$\therefore f'(1)=3(1+2)^2\times(1+1)=54$

2) $f'(x)=2\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)\times\cos\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)\times\pi$

$\therefore f'\left(\dfrac{2}{3}\right)=2\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\times\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\times\pi$

$=2\pi\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{6}=2\pi\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

66 답 $-\sqrt{2}$

$g'(x)=\dfrac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{1+\{f(x)\}^2}}=\dfrac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+\{f(x)\}^2}}$

$\therefore g'(3)=\dfrac{f(3)f'(3)}{\sqrt{1+\{f(3)\}^2}}=\dfrac{(-1)\times 2}{\sqrt{1+(-1)^2}}=-\sqrt{2}$

67 답 1) $\boldsymbol{\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx},\ f'(g(x))g'(x)}$

① $\boldsymbol{af'(ax+b)}$ ② $\boldsymbol{n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)}$

2) $\boldsymbol{rx^{r-1}}$

68 답 1) $\boldsymbol{y'=3e^{3x+1}}$ 2) $\boldsymbol{y'=2(x+1)e^{x^2+2x}}$

3) $\boldsymbol{y'=5\times 2^{5x-3}\ln 2}$ 4) $\boldsymbol{y'=3^{\sin x}\ln 3\cos x}$

5) $\boldsymbol{y'=e^{3^x}\times 3^x\ln 3}$

1) $y'=e^{3x+1}\times(\boxed{3x+1})'=\boxed{3}e^{3x+1}$

2) $y'=e^{x^2+2x}\times(x^2+2x)'=2(x+1)e^{x^2+2x}$

3) $y'=2^{5x-3}\times\ln 2\times(5x-3)'=5\times 2^{5x-3}\ln 2$

4) $y'=3^{\sin x}\times\ln 3\times(\sin x)'=3^{\sin x}\ln 3\cos x$

5) $y'=e^{3^x}\times(3^x)'=e^{3^x}\times 3^x\ln 3$

69 답 1) $\boldsymbol{y'=\dfrac{4}{4x+1}}$ 2) $\boldsymbol{y'=\dfrac{2x+5}{x^2+5x+10}}$

3) $\boldsymbol{y'=2\cot 2x}$ 4) $\boldsymbol{y'=\dfrac{2}{(x-1)\ln 5}}$

5) $\boldsymbol{y'=\dfrac{e^x}{(e^x+2)\ln 3}}$

1) $y'=\dfrac{(4x+1)'}{4x+1}=\dfrac{4}{4x+1}$

2) $y'=\dfrac{(x^2+5x+10)'}{x^2+5x+10}=\dfrac{2x+5}{x^2+5x+10}$

3) $y'=\dfrac{(\sin 2x)'}{\sin 2x}=\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}=2\cot 2x$

4) $y'=\dfrac{\{(x-1)^2\}'}{(x-1)^2\ln 5}=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2\ln 5}=\dfrac{2}{(x-1)\ln 5}$

5) $y'=\dfrac{(e^x+2)'}{(e^x+2)\ln 3}=\dfrac{e^x}{(e^x+2)\ln 3}$

70 답 1) $\boldsymbol{-9e^2}$ 2) $\boldsymbol{-e}$ 3) $\boldsymbol{2\ln 3+1}$

4) $\boldsymbol{1}$ 5) $\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}}$ 6) $\boldsymbol{\dfrac{2}{\ln 2}}$

1) $f'(x)=-3e^{3x+1}\times(3x+1)'=-9e^{3x+1}$

이므로 $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=-9e^2$

2) $f'(x)=e^{\cos x+1}\times(\cos x+1)'=-e^{\cos x+1}\sin x$

이므로 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-e\sin\dfrac{\pi}{2}=-e$

3) $f'(x)=3^{2x}\ln 3\times(2x)'+1=3^{2x}\times 2\ln 3+1$

이므로 $f'(0)=2\ln 3+1$

4) $f'(x)=\dfrac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}$

이므로 $f'(-1)=\dfrac{-2+4}{1-4+5}=1$

5) $f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(5x^4+7)$에서

$f'(x)=\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}-\dfrac{(5x^4+7)'}{5x^4+7}$

$=\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{20x^3}{5x^4+7}$

이므로 $f'(1)=1-\dfrac{20}{12}=-\dfrac{2}{3}$

6) $f'(x)=\dfrac{(\tan x)'}{\tan x\times\ln 2}=\dfrac{\sec^2 x}{\tan x\times\ln 2}$

이므로 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{\ln 2}$

71 답 1) $\boldsymbol{e^2}$ 2) $\boldsymbol{-2\ln 5}$ 3) $\boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$ 4) $\boldsymbol{2}$

1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(\sqrt{2}+h)-f(\sqrt{2})}{5h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(\sqrt{2}+h)-f(\sqrt{2})}{h}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}f'(\sqrt{2})$

$f'(x)=(x)'e^{x^2}+x(e^{x^2})'$

$=e^{x^2}+x\times 2xe^{x^2}=(1+2x^2)e^{x^2}$

이므로 구하는 극한값은 $\dfrac{1}{5}f'(\sqrt{2})=\dfrac{1}{5}\times 5e^2=e^2$

2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(\pi+3h)-f(\pi+h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(\pi+3h)-f(\pi+h)}{2h}\times 2=2f'(\pi)$

$f'(x)=5^{\sin x}\ln 5\times(\sin x)'=5^{\sin x}\ln 5\times\cos x$

이므로 구하는 극한값은

$2f'(\pi)=2\times(-\ln 5)=-2\ln 5$

3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(\pi)-f(\pi-2h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(\pi)-f(\pi-2h)}{2h}\times 2=2f'(\pi)$

$f'(x)=\dfrac{\left(\cos\dfrac{x}{3}\right)'}{\cos\dfrac{x}{3}}=\dfrac{-\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}}{\cos\dfrac{x}{3}}=-\dfrac{1}{3}\tan\dfrac{x}{3}$

이므로 구하는 극한값은

$2f'(\pi)=-\dfrac{2}{3}\tan\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}\times 2=2f'(1)$

$f'(x)=\dfrac{(x^4+3)'}{x^4+3}=\dfrac{4x^3}{x^4+3}$

이므로 구하는 극한값은 $2f'(1)=2\times\dfrac{4}{4}=2$

72 답 1) $e^{f(x)}f'(x)$, $a^{f(x)}f'(x)\ln a$
2) ① $f'(x)$, $f(x)$ ② $f'(x)$, $f(x)\ln a$

73 답 1) $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}$ 2) $\frac{dy}{dx}=4t$
3) $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos 6t}{t}$ 4) $\frac{dy}{dx}=t(3t^2-2)$

1) $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=3$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3}{2}$$

2) $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=8t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{8t}{2}=4t$$

3) $\frac{dx}{dt}=6t$, $\frac{dy}{dt}=6\cos 6t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6\cos 6t}{6t}=\frac{\cos 6t}{t}$$

4) $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-2}{\frac{1}{t}}=t(3t^2-2)$$

74 답 1) 22 2) e

1) $\frac{dx}{dt}=4t^3-6t^2+3$, $\frac{dy}{dt}=9t^2+12t+1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{9t^2+12t+1}{4t^3-6t^2+3}$$

따라서 $t=1$에서의 미분계수는 $\frac{9+12+1}{4-6+3}=22$

2) $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t}{\frac{1}{t}}=te^t$$

따라서 $t=1$에서의 미분계수는 e

75 답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\times 2t}{(1+t^2)^2}=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2(1+t^2)-2t\times 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1-t^2}{2t}=-\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{x}{y}$$

76 답 dy, dx, $g'(t)$, $f'(t)$

77 답 1) $\frac{dy}{dx}=-2x$ 2) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ $(y\neq 0)$
3) $\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{9y^2}$ $(y\neq 0)$
4) $\frac{dy}{dx}=\frac{2\sin x}{y}$ $(y\neq 0)$
5) $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-2y}{2x-3y^2}$ $\left(x\neq\frac{3}{2}y^2\right)$

1) $x^2+y=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-2x$$

2) $x^2+y^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$

3) $2x^2+3y^3=5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$4x+9y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{9y^2}\ (y\neq 0)$$

4) $4\cos x+y^2=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-4\sin x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2\sin x}{y}\ (y\neq 0)$$

5) $x^3+y^3-2xy=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-2y-2x\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3y^2-2x)\frac{dy}{dx}=-3x^2+2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-2y}{2x-3y^2}\ \left(x\neq\frac{3}{2}y^2\right)$$

78 답 1) -3 2) $-\frac{1}{2}$

1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$x=1$, $y=9$를 대입하면 $\frac{dy}{dx}=-3$

2) $3xy+y^3+3y=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3y+3x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+y^2+1}$$

$x=0$, $y=1$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$

79 답 음함수, (i) nx^{n-1}, $ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$ (ii) y, $x\frac{dy}{dx}$

80 답 1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ 2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x-2}}$

1) 주어진 식의 양변을 5제곱하면 $y^5=\boxed{x}$

양변을 $\boxed{y}$에 대하여 미분하면 $\dfrac{dx}{\boxed{dy}}=\boxed{5y^4}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\boxed{5y^4}}=\dfrac{1}{\boxed{5}\sqrt[5]{\boxed{x^4}}}$

2) 주어진 식의 양변을 세제곱하면

$y^3=x-1$이므로 $x=y^3+1$

양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=3y^2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{3y^2}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

3) 주어진 식의 양변을 4제곱하면

$y^4=(x-2)^3$이므로 $x=y^{\frac{4}{3}}+2$

양변을 y에 대하여 미분하면 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{4}{3}y^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{3}{4y^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{3}{4\sqrt[3]{y}}$

$=\dfrac{3}{4\sqrt[12]{(x-2)^3}}=\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x-2}}$

81 답 1) $\dfrac{1}{2}$ 2) $\dfrac{1}{2}$

1) $g(-3)=a$라고 하면 $f(a)=\boxed{-3}$

$f(a)=a^3+3a^2+5a=\boxed{-3}$

$a^3+3a^2+5a+3=0$에서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ & & -1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

이므로

$(a+\boxed{1})(a^2+\boxed{2}a+\boxed{3})=0$

이때, $a^2+2a+3 > 0$이므로 $a=\boxed{-1}$

즉, $g(-3)=\boxed{-1}$이고

$f'(x)=\boxed{3x^2+6x+5}$이므로

$f'(g(\boxed{-3}))=f'(-1)=\boxed{2}$

$\therefore g'(-3)=\dfrac{1}{f'(\boxed{g(-3)})}=\dfrac{1}{f'(\boxed{-1})}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

2) $g(1)=a$라고 하면 $f(a)=1$

$f(a)=\tan a=1$ $\therefore a=\dfrac{\pi}{4}\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$

즉, $g(1)=\dfrac{\pi}{4}$이고 $f'(x)=\sec^2 x$이므로

$f'(g(1))=f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}}=2$

$\therefore g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{2}$

82 답 1) $f'(y)$, $\dfrac{dx}{dy}$ 2) $f'(g(x))$

83 답 1) $y''=6x-4$ 2) $y''=-e^x(3\cos 2x+4\sin 2x)$

3) $y''=\dfrac{1}{x}$ 4) $y''=-\dfrac{2(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}$

1) $y'=\boxed{3}x^{\boxed{2}}-\boxed{4}x+\boxed{1}$이므로

$y''=\boxed{6}x-\boxed{4}$

2) $y'=(e^x)'\cos 2x+e^x(\cos 2x)'$

$=e^x\cos 2x-2e^x\sin 2x=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)$

이므로

$y''=(e^x)'(\cos 2x-2\sin 2x)+e^x(\cos 2x-2\sin 2x)'$

$=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)+e^x(-2\sin 2x-4\cos 2x)$

$=-e^x(3\cos 2x+4\sin 2x)$

3) $y'=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$이므로

$y''=\dfrac{1}{x}$

4) $y'=2\times\dfrac{(\ln x)'}{\ln x}=\dfrac{2}{x\ln x}$이므로

$y''=\dfrac{-2(x\ln x)'}{(x\ln x)^2}=-\dfrac{2(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}$

84 답 1) 1 2) 2 3) -4

1) $f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}\times(-x)'}{2}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로

$f''(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}\times(-x)'}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\therefore f''(0)=\dfrac{e^0+e^0}{2}=1$

2) $y'=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$

$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$

이므로

$y''=2(e^x)'\cos x+2e^x(\cos x)'$

$=2e^x\cos x-2e^x\sin x$

$=2e^x(\cos x-\sin x)$

$\therefore f''(0)=2$

3) $y'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$이므로

$y''=-\sec^2 x$

$\therefore f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{3}}=-\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=-4$

85 답 $f'(x+\varDelta x)-f'(x)$, 이계도, $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

Ⅱ-4 도함수의 활용

pp. 76~91

86 답 1) $y=x-1$ 2) $y=2x-2$ 3) $y=-x+e$

1) $f(x)=x\ln x$라 하면

$f'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+\boxed{1}$

점 $(1,\ 0)$에서 접선의 기울기는 $f'(1)=\boxed{1}$

$y-\boxed{0}=\boxed{1}\times(x-\boxed{1})$ $\quad\therefore y=\boxed{x-1}$

2) $f(x)=\cos\pi x+x^2$이라 하면

$f'(x)=-\pi\sin\pi x+2x$

점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$

$y-0=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x-2$

3) $f(x)=x-x\ln x$라 하면

$f'(x)=1-\left(\ln x+1\right)=-\ln x$

점 $(e,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=-1$

$y-0=-(x-e)$ $\quad\therefore y=-x+e$

87 답 1) $y=-\dfrac{1}{3e}x+e^2+\dfrac{1}{3}$ 2) $y=x-\dfrac{\pi}{2}+1$

1) $f(x)=x^2\ln x$라 하면

$f'(x)=\boxed{2x}\ln x+x^2\times\boxed{\dfrac{1}{x}}=\boxed{2x\ln x}+x$

점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(e)=\boxed{2e}\ln e+\boxed{e}=\boxed{3e}$

접선과 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$m\times3e=\boxed{-1}$ $\quad\therefore m=\boxed{-\dfrac{1}{3e}}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-\boxed{e^2}=\boxed{-\dfrac{1}{3e}}(x-e)$

$\therefore y=\boxed{-\dfrac{1}{3e}x+e^2+\dfrac{1}{3}}$

2) $f(x)=1+\cos x$라 하면

$f'(x)=-\sin x$

점 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 1이므로

구하는 직선의 방정식은

$y-1=1\times\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore y=x-\dfrac{\pi}{2}+1$

88 답 1) $y=2x+\dfrac{\pi}{2}$ 2) $y=2x-\dfrac{3}{4}$

1) $f(x)=x+\cos x$라 하면 $f'(x)=1-\sin x$

접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$라 하면

접선의 기울기는 $f'(a)$이므로

$f'(a)=1-\sin a=\boxed{2}$

$\sin a=-1$

$\therefore a=\boxed{-\dfrac{\pi}{2}}$

이때, $f(a)=f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}-\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$이므로

접점의 좌표는 $\left(\boxed{-\dfrac{\pi}{2}},\ \boxed{-\dfrac{\pi}{2}}\right)$

따라서 접선의 방정식은

$y-\left(\boxed{-\dfrac{\pi}{2}}\right)=2\left\{x-\left(\boxed{-\dfrac{\pi}{2}}\right)\right\}$

$\therefore y=2x+\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

2) $f(x)=\sqrt{2x-1}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$라 하면

접선의 기울기는 $f'(a)$이므로

$f'(a)=\dfrac{1}{\sqrt{2a-1}}=2$

$\dfrac{1}{2a-1}=4,\ 8a-4=1$

$\therefore a=\dfrac{5}{8}$

이때, $f(a)=f\left(\dfrac{5}{8}\right)=\sqrt{2\times\dfrac{5}{8}-1}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$이므로

접점의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{8},\ \dfrac{1}{2}\right)$

따라서 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2}=2\left(x-\dfrac{5}{8}\right)$

$\therefore y=2x-\dfrac{3}{4}$

89 답 **1)** $\boldsymbol{y=3x}$ **2)** $\boldsymbol{y=-3x-1}$

1) $f(x)=\ln(3x+1)$라 하면 $f'(x)=\dfrac{3}{3x+1}$

접점의 좌표를 $(a, f(a))$라 하면

접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

이 접선과 평행한 직선 $y=3x-1$의 기울기는 3이므로

$f'(a)=\dfrac{3}{3a+1}=3 \quad \therefore a=0$

이때, $f(a)=f(0)=\ln 1=0$이므로

접점의 좌표는 $(0, 0)$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=3x$

2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

접점의 좌표를 $(a, f(a))$이라 하면

접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

이 접선과 수직인 직선 $x-3y+2=0$의 기울기는

$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$에서 $\dfrac{1}{3}$이므로

구하는 직선의 기울기는 -3이다. 즉

$f'(a)=\dfrac{a^2+2a}{(a+1)^2}=-3,\ a^2+2a=-3(a+1)^2$

$4a^2+8a+3=0,\ (2a+1)(2a+3)=0$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}\ (\because a>-1)$

이때, $f(a)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}+1}=\dfrac{1}{2}$이므로

접점의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2}=-3\left\{x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\} \quad \therefore y=-3x-1$

90 답 **1)** $\boldsymbol{y=-x+1}$ **2)** $\boldsymbol{y=\frac{1}{e}x-\frac{3}{e}}$ **3)** $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x}$

1) $f(x)=e^{-x}$이라 하면 $f'(x)=\boxed{-e^{-x}}$

접점의 좌표를 $(t, \boxed{e^{-t}})$이라 하면

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\boxed{-e^{-t}}$

접선의 방정식은

$y-\boxed{e^{-t}}=\boxed{-e^{-t}}(x-\boxed{t}) \cdots ㉠$

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0-e^{-t}=\boxed{-e^{-t}(1-t)}$

$e^{-t}>0$이므로 $-1=-(1-t)$에서 $t=\boxed{0} \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $y=\boxed{-x+1}$

2) $f(x)=\ln(x-3)$이라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x-3}$

접점의 좌표를 $(t, \ln(t-3))$이라 하면

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{t-3}$

접선의 방정식은 $y-\ln(t-3)=\dfrac{1}{t-3}(x-t) \cdots ㉠$

이 직선이 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0-\ln(t-3)=\dfrac{1}{t-3}(3-t)$

$\ln(t-3)=1$이므로 $t=e+3 \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{1}{e}x-\dfrac{3}{e}$

3) $f(x)=\sqrt{x-1}$이라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t-1})$이라 하면

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}$

접선의 방정식은

$y-\sqrt{t-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}(x-t) \cdots ㉠$

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0-\sqrt{t-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}(0-t)$

$2(t-1)=t$이므로 $t=2 \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{1}{2}x$

91 답 $\boldsymbol{\frac{e}{2}}$

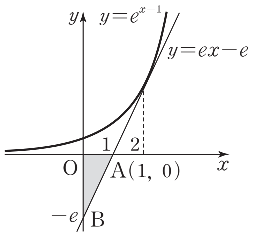
$f(x)=e^{x-1}$이라 하면 $f'(x)=e^{x-1}$

접점의 좌표를 (t, e^{t-1})이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=e^{t-1}$

접선의 방정식은

$y-e^{t-1}=e^{t-1}(x-t) \cdots ㉠$



이 직선이 점 $A(1, 0)$을 지나므로

$0-e^{t-1}=e^{t-1}(1-t)$

$e^{t-1}>0$이므로 $t=2 \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $y=ex-e$

즉, 점 B의 좌표는 $(0, -e)$이므로

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times 1\times e=\dfrac{e}{2}$

92 답 $\sqrt{2}$

$f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x+k$라 하자.
두 곡선의 교점에서 공통인 접선을 가지므로
교점의 x좌표를 a라 하면
$f(a)=\boxed{g(a)}$에서 $\cos a=\boxed{\sin a}+k$ ⋯ ㉠
또한 두 곡선의 교점에서의 기울기가 같으므로
$f'(a)=\boxed{g'(a)}$에서 $-\sin a=\boxed{\cos a}$
$a=\boxed{-\frac{\pi}{4}}\left(\because -\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}\right)$
이 값을 ㉠에 대입하면
$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}+k$
$\therefore k=\boxed{\sqrt{2}}$

93 답 1) $y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$ 2) $y=\frac{1}{2\pi}x-\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{4}$

1) $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(4)=a$로 놓으면
$f(a)=\boxed{4}$에서 $a^3+3a=\boxed{4}$
$(a-\boxed{1})(a^2+a+4)=0$
$\therefore a=\boxed{1}$
즉, $g(4)=\boxed{1}$이다.
한편, $f'(x)=\boxed{3x^2+3}$에서 $f'(\boxed{1})=6$이므로
$g'(4)=\frac{1}{f'(g\boxed{4})}=\frac{1}{f'(\boxed{1})}=\boxed{\frac{1}{6}}$
따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, g(4))$에서의 접선의 방정식은
$y-1=\boxed{\frac{1}{6}}(x-4)$
$\therefore y=\boxed{\frac{1}{6}}x+\boxed{\frac{1}{3}}$

2) $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(1)=a$로 놓으면
$f(a)=1$에서 $\tan \pi a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$
즉, $g(1)=\frac{1}{4}$이다.
한편, $f'(x)=\pi\sec^2 \pi x$에서
$f'\left(\frac{1}{4}\right)=\pi\sec^2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=2\pi$이므로
$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{2\pi}$
따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식은
$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{2\pi}(x-1)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2\pi}x-\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{4}$

94 답 1) $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$ 2) $y=-2x+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

1) $t=1$일 때 $x=\boxed{3}$, $y=\boxed{1}$이므로
접점의 좌표는 $(\boxed{3}, \boxed{1})$이다.
한편, $\frac{dx}{dt}=\boxed{4t}$, $\frac{dy}{dt}=\boxed{3t^2}$이므로
$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\boxed{3t}}{\boxed{4}}\ (t\neq0)$
에서 $t=1$일 때 접선의 기울기는 $\boxed{\frac{3}{4}}$이다.
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-\boxed{1}=\boxed{\frac{3}{4}}(x-\boxed{3})$
$\therefore y=\boxed{\frac{3}{4}}x-\boxed{\frac{5}{4}}$

2) $t=\frac{\pi}{6}$일 때
$x=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
이므로 접점의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.
한편, $\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=2\cos 2t$이므로
$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$
$=-\frac{2\cos 2t}{\sin t}\ (\sin t\neq0)$
에서 $t=\frac{\pi}{6}$일 때 접선의 기울기는
$-\frac{2\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\therefore y=-2x+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

95 답 1) $f'(a)$ 2) $f(a)$, $f'(a)$, a 3) $f'(a)$
4) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 5) ① $g(a)$ ② $g'(a)$

96 답 1) 극댓값 : $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$, 극솟값 : $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$
2) 극솟값 : e

1) $f'(x)=\boxed{1+2\cos x}$

$f'(x)=\boxed{0}$에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\boxed{\frac{2}{3}\pi}$ 또는 $x=\boxed{\frac{4}{3}\pi}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면

x	0	$\cdots$	$\boxed{\frac{2}{3}\pi}$	$\cdots$	$\boxed{\frac{4}{3}\pi}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	$\boxed{\nearrow}$	극대	$\searrow$	극소	$\boxed{\nearrow}$	2π

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$일 때 극대이고

극댓값은 $f\left(\boxed{\frac{2}{3}\pi}\right)=\boxed{\frac{2}{3}\pi}+\sqrt{3}$,

$x=\frac{4}{3}\pi$일 때 극소이고

극솟값은 $f\left(\boxed{\frac{4}{3}\pi}\right)=\boxed{\frac{4}{3}\pi}-\sqrt{3}$

2) $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이고

극솟값은 $f(1)=e$

97 답 1) 극솟값 : $-\frac{1}{e}$ 2) 극솟값 : 0, 극댓값 : $4e^{-2}$

1) $f'(x)=\ln x+\boxed{1}$, $f''(x)=\boxed{\frac{1}{x}}$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{\frac{1}{e}}$

$f''\left(\boxed{\frac{1}{e}}\right)=e>0$

따라서 $x=\boxed{\frac{1}{e}}$일 때, $\boxed{\text{극소}}$이고

$\boxed{\text{극솟}}$값은 $f\left(\boxed{\frac{1}{e}}\right)=\boxed{-\frac{1}{e}}$

2) $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2)$

$f''(x)=-e^{-x}(2x-x^2)+e^{-x}(2-2x)$

$=e^{-x}(x^2-4x+2)$

$f'(x)=-x(x-2)e^{-x}=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f''(0)=2>0$, $f''(2)=-2e^{-2}<0$

따라서 $x=0$일 때 극소이고 극솟값은 $f(0)=0$

$x=2$일 때 극대이고 극댓값은 $f(2)=4e^{-2}$

98 답 $a=1$, $b=1$

$f'(x)=a\cos x-b\sin x$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값 $\sqrt{2}$를 가지므로

$f\left(\boxed{\frac{\pi}{4}}\right)=\sqrt{2}$, $f'\left(\boxed{\frac{\pi}{4}}\right)=0$

$f\left(\boxed{\frac{\pi}{4}}\right)=\sqrt{2}$에서 $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}a+\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}b=\sqrt{2}$

$\therefore a+b=\boxed{2}$ ⋯ ㉠

$f'\left(\boxed{\frac{\pi}{4}}\right)=0$에서 $\frac{\sqrt{2}}{2}a-\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}b=0$

$\therefore a-b=\boxed{0}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\boxed{1}$, $b=\boxed{1}$

99 답 $a=3$, $b=-7$

$f'(x)=2ax+b+\frac{1}{x}$

$x=1$에서 극솟값 -4를 가지므로

$f(1)=-4$, $f'(1)=0$

$f(1)=-4$에서 $a+b+\ln 1=-4$

$\therefore a+b=-4$ ⋯ ㉠

$f'(1)=0$에서 $2a+b+1=0$

$\therefore 2a+b=-1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-7$

100 답 -4

$f'(x)=e^x-9e^{-x}$, $f''(x)=e^x+9e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^x=9e^{-x}$

양변에 e^x을 곱하면 $e^{2x}=9$, 즉 $(e^x)^2=9$

즉, $e^x=3$ ($\because e^x>0$)이므로 $x=\ln 3$

그런데 $f''(\ln 3)=e^{\ln 3}+9e^{-\ln 3}=3+3=6>0$이므로

$x=\ln 3$에서 함수 $f(x)$는 극솟값을 가진다.

$f(\ln 3)=2$이므로

$e^{\ln 3}+9e^{-\ln 3}+a=2$, $3+3+a=2$ $\therefore a=-4$

101 답 1) $k<\frac{13}{4}$ 2) $k<0$

1) $f'(x)=\boxed{-e^{-x}}(x^2-3x+k)+e^{-x}(\boxed{2}x-\boxed{3})$

$=\boxed{e^{-x}}(-x^2+\boxed{5}x-k-\boxed{3})$

$e^{-x}>0$이므로 $f'(x)=0$이려면

$x^2-\boxed{5}x+k+\boxed{3}=0$ ⋯ ㉠

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 ㉠의 $\boxed{\text{실근}}$이 존재하고,

그 x의 값의 좌우에서 $\boxed{f'(x)}$의 부호가 바뀌어야 한다. 즉, ㉠은 $\boxed{\text{서로 다른 두 실근}}$을 가져야 하므로 ㉠

의 판별식을 D라 하면

$D=(\boxed{-5})^2-4(k+\boxed{3})\ >\ 0$ $\quad\therefore k<\boxed{\frac{13}{4}}$

2) $f'(x)=-\frac{k}{x^2}-4=-\frac{4x^2+k}{x^2}$

$f'(x)=0$이려면 $4x^2+k=0$ ⋯ ㉠

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=-16k>0$ $\quad\therefore k<0$

102 답 1) ① 극대, 극댓값 ② 극소, 극솟값
2) ① $<$, $f(a)$ ② $>$, $f(a)$

103 답 1) $(0, 0)$ 2) 없다. 3) (π, π)
4) $(-3, \ln 18)$, $(3, \ln 18)$

1) $f(x)=x^3-4x$라 하면

$f'(x)=\boxed{3x^2-4}$, $f''(x)=\boxed{6x}$

$f''(x)=0$에서 $x=\boxed{0}$

이때, $x=\boxed{0}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면

$x<\boxed{0}$이면 $f''(x)<0$이므로 $\boxed{\text{위로}}$ 볼록하고

$x>\boxed{0}$이면 $f''(x)>0$이므로 $\boxed{\text{아래로}}$ 볼록하다.

$f(0)=0$이므로 변곡점의 좌표는 $\boxed{(0, 0)}$이다.

2) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$이라 하면

$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$f''(x)=0$을 만족하는 x의 값은 없고,

모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 변곡점은 없다.

3) $f(x)=x+\sin x$라 하면

$f'(x)=1+\cos x$, $f''(x)=-\sin x$

$f''(x)=0$에서 $x=\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

이때, $x=\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면

$x<\pi$이면 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고

$x>\pi$이면 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

$f(\pi)=\pi$이므로 변곡점의 좌표는 (π, π)이다.

4) $f(x)=\ln(x^2+9)$라 하면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+9}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+9)-2x(2x)}{(x^2+9)^2}=\frac{-2x^2+18}{(x^2+9)^2}$

$=\frac{-2(x+3)(x-3)}{(x^2+9)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

이때, $x=\pm3$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면

$x<-3$이면 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고

$-3<x<3$이면 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고

$x>3$이면 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

$f(-3)=\ln 18$, $f(3)=\ln 18$이므로

변곡점의 좌표는 $(-3, \ln 18)$과 $(3, \ln 18)$이다.

104 답 $a=2$, $b=6$, $c=-4$

$f'(x)=\boxed{3a}x^2+\boxed{2b}x$

$f''(x)=\boxed{6a}x+\boxed{2b}$

$x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 18이므로

$f'(1)=\boxed{18}$ $\quad\therefore \boxed{3}a+\boxed{2}b=18$ ⋯ ㉠

점 $(-1, 0)$이 변곡점이므로

$f''(-1)=\boxed{0}$ $\quad\therefore \boxed{-6}a+2b=0$ ⋯ ㉡

$f(-1)=\boxed{0}$ $\quad\therefore \boxed{-1}a+b+c=0$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=\boxed{2}$, $b=\boxed{6}$, $c=\boxed{-4}$

105 답 2

$f'(x)=2ax+b-\frac{1}{x}$, $f''(x)=2a+\frac{1}{x^2}$

$x=\frac{1}{2}$에서 극솟값을 가지므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore a+b-2=0$ ⋯ ㉠

변곡점의 x의 좌표가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

$\therefore 2a+2=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$, $b=3$

$f(x)=-x^2+3x-\ln x$이므로

$f'(x)=-2x+3-\frac{1}{x}=\frac{-2x^2+3x-1}{x}$

$=\frac{-(2x-1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$f''(x)=-2+\frac{1}{x^2}$에서 $f''(1)<0$

따라서 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=2$

106 답 $-2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$

$f(x)=3x^4+ax^3+x^2+1$이라 하면

$f'(x)=12x^3+3ax^2+2x$, $f''(x)=36x^2+6ax+2$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 하므로 $f''(x)\ge0$ 또는 $f''(x)\le0$이어야 한다. 즉 방정식 $f''(x)=0$이 중근이나 허근을 가져야 한다.

따라서 $f''(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3a)^2-36\times2\le0$, $a^2-8\le0$

$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})\le0$ $\quad\therefore -2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$

107 답 **1)** ○ **2)** × **3)** × **4)** × **5)** ○

1) $f'(a)=0$이고 $f'(x)$의 부호가 $x=a$의 왼쪽에서는 $-$이고 오른쪽에서는 $+$이므로 $y=f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가진다. (◯)

2) $f'(b)\neq 0$이므로 $y=f(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖지 않는다. (×)

3) $f''(x)=0$인 점의 x좌표는 $x=b$이고, 이 점의 좌우에서 $f'(x)$의 증가와 감소가 바뀌므로 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.
따라서 변곡점은 $(b,\ f(b))$로 1개이다. (×)

4) 구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $(b,\ c)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다. (×)

5) 구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다. (◯)

108 답 **1)** ① 아래 ② 위 **2)** 변곡점 **3)** 변곡점

109 답 **1)** 해설 참조 **2)** 해설 참조

1) ① 정의역 : $\boxed{\text{실수 전체}}$의 집합

② $f(-x)=f(x)$이므로 곡선은 $\boxed{y\text{축}}$에 대하여 대칭

③ $f(0)=\boxed{\frac{2}{3}}$이므로 y절편은 $\boxed{\frac{2}{3}}$이고,

$x^2+3>0$이므로 $\boxed{x}$축과 만나지 않는다.

④ $f'(x)=\dfrac{\boxed{-4x}}{(x^2+3)^{\boxed{2}}}$

$$f''(x)=\frac{-4(x^2+3)^2+4x\times 2(x^2+3)\times 2x}{(x^2+3)^4}$$
$$=\frac{-4(x^2+3)+16x^2}{(x^2+3)^3}$$
$$=\frac{\boxed{12}(x+\boxed{1})(x-\boxed{1})}{(x^2+3)^3}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{0}$,

$f''(x)=0$에서 $x=\boxed{\pm 1}$

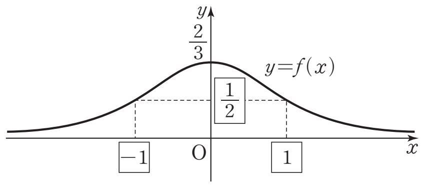
⑤

x	$\cdots$	$\boxed{-1}$	$\cdots$	$\boxed{0}$	$\cdots$	$\boxed{1}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$\boxed{+}$	0	$\boxed{-}$	$-$	$-$
$f''(x)$	$\boxed{+}$	0	$\boxed{-}$	$-$	$\boxed{-}$	0	$\boxed{+}$
$f(x)$	↗	$\boxed{\text{변곡점}}$	↗	극대	↘	$\boxed{\text{변곡점}}$	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $\frac{2}{3}$를 가지고, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$이다.

⑥ $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2+3}=\boxed{0}$, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2+3}=\boxed{0}$이므로 점근선은 $\boxed{x}$축이다.

따라서 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3}$의 그래프는 그림과 같다.



2) ① 정의역 : $x\neq 0$인 모든 실수의 집합

② $f(-x)=-f(x)$이므로 원점에 대하여 대칭이다.

③ $x\neq 0$, $x^2+2\neq 0$이므로 좌표축과 만나지 않는다.

④ $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$

$$f'(x)=1-\frac{2}{x^2}=\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{4}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\sqrt{2}$

$f''(x)\neq 0$이므로 변곡점은 없다.

⑤

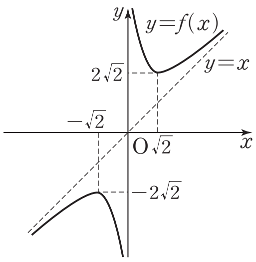
x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$에서 극대, $x=\sqrt{2}$에서 극소이다.

⑥ $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}=x+\dfrac{2}{x}$

이므로 점근선은 $x=0$, $y=x$

따라서 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$의 그래프는 그림과 같다.



110 답 **1)** 해설 참조 **2)** 해설 참조 **3)** 해설 참조

1) ① 정의역 : $\boxed{x\geq 0}$인 모든 실수의 집합

② 대칭성과 주기성은 $\boxed{\text{없다}}$.

③ $f(x)=0$에서 $\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{3})=0$

$x=\boxed{0}$ 또는 $x=\boxed{3}$이므로 x축과의 교점은 $(\boxed{0},\ 0)$, $(\boxed{3},\ 0)$이다.

④ $f'(x)=1-\dfrac{\boxed{3}}{2\sqrt{\boxed{3x}}}$

$f''(x)=\left\{-\dfrac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}\right\}'=\dfrac{3}{4}(3x)^{-\frac{3}{2}}\times 3$

$=\dfrac{\boxed{3}}{4x\sqrt{\boxed{3x}}}$

$f'(x)=0$에서 $\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}=1$ $\quad\therefore x=\boxed{\dfrac{3}{4}}$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 변곡점은 없다.

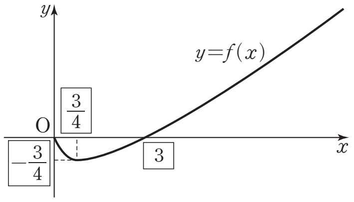
⑤

x	0	$\cdots$	$\boxed{\frac{3}{4}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$\boxed{-}$	0	$\boxed{+}$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\boxed{↘}$	$\boxed{\text{극소}}$	$\boxed{↗}$

$f'(x)$는 $x=\boxed{\dfrac{3}{4}}$에서 극소이다.

⑥ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 점근선은 없다.

따라서 함수 $f(x)=x-\sqrt{3x}$의 그래프는 그림과 같다.



2) ① 정의역 : $0\le x\le 2\pi$인 모든 실수의 집합

② $f(-x)=-f(x)$이므로 원점에 대하여 대칭이다.

③ $f(0)=0$이므로 곡선은 원점을 지난다.

④ $f'(x)=1+\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

$f'(x)=0$에서 $x=\pi$이지만, 그 좌우에서 $f'(x)\ge 0$이므로 극대, 극소인 점은 없다.

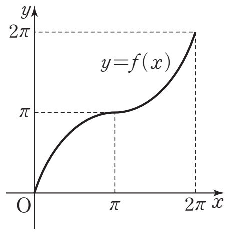
$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$이다.

⑤

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↗	변곡점	↗	2π

변곡점 : (π, π)

따라서 함수 $f(x)=x+\sin x$의 그래프는 그림과 같다.



3) ① 정의역 : $0\le x\le 2\pi$인 모든 실수의 집합

② 대칭성과 주기성은 없다.

③ $f(0)=2$이므로 y절편은 2이다.

④ $f'(x)=1-2\sin x$

$f''(x)=-2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

$f''(x)=0$에서 $\cos x=0$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

⑤

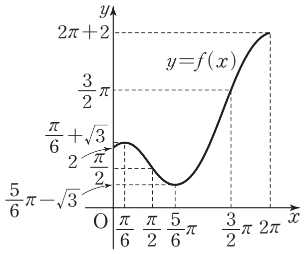
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↗	극대	↘	변곡점	↘

x	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	극소	↗	변곡점	↗	↗

④ $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{6}$에서 극대, $x=\dfrac{5}{6}\pi$에서 극소이고,

변곡점은 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right)$이다.

따라서 함수 $f(x)=x+2\cos x$의 그래프는 그림과 같다.



111 답 1) 해설 참조 2) 해설 참조

1) ① 정의역 : $\boxed{\text{실수 전체}}$의 집합

② 대칭성과 주기성은 없다.

③ $f(0)=0$이므로 곡선은 $\boxed{\text{원점}}$을 지난다.

④ $f'(x)=e^x(\boxed{1}+x)$, $f''(x)=\boxed{e^x}(\boxed{2}+x)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{-1}$

$f''(x)=0$에서 $x=\boxed{-2}$

⑤

x	$\cdots$	$\boxed{-2}$	$\cdots$	$\boxed{-1}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$\boxed{-}$	0	$\boxed{+}$	$+$	$-$
$f''(x)$	$\boxed{-}$	$\boxed{0}$	$\boxed{+}$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	극소	↗	0	↗

$f(x)$는 $x=\boxed{-1}$에서 극소이고, 극솟값은 $\boxed{-\frac{1}{e}}$ 이다.

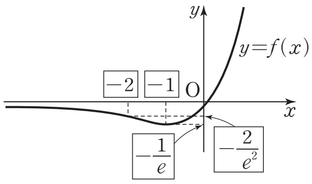
변곡점은 $\left(\boxed{-2}, \boxed{-\frac{2}{e^2}}\right)$이다.

⑥ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{t\to\infty}(-te^{-t})=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-t}{e^t}=\boxed{0}$,

$\lim\limits_{x\to\infty} xe^x=\boxed{\infty}$이므로

$x<0$일 때, 점근선은 $\boxed{x}$축이다.

따라서 함수 $f(x)=xe^x$의 그래프는 그림과 같다.



2) ① 정의역 : $x>0$인 실수 전체의 집합

② 대칭성과 주기성은 없다.

③ $f(e)=0$이므로 x축과의 교점은 $(e, 0)$이다.

④ $f'(x)=1-(\ln x+1)=-\ln x$, $f''(x)=-\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$이고,

$f''(x)<0$이므로 변곡점은 없다.

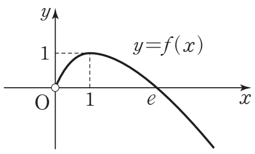
⑤

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘	0	↘

$f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 극댓값은 1이다.

⑥ $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x\ln x)=-\infty$

따라서 함수 $f(x)=x-x\ln x$의 그래프는 그림과 같다.



112 답 1) 정의역, 치역 2) 주기성 3) 교점 4) 감소, 극소 5) 볼록 6) 점근선

113 답 1) 최댓값 : $\mathbf{1}$, 최솟값 : $-\frac{1}{3}$
2) 최댓값 : $\mathbf{8}$, 최솟값 : $\mathbf{7}$

1) $f'(x)=\frac{x^2-x+1-x(\boxed{2x-1})}{(x^2-x+1)^2}$

$=-\frac{\boxed{(x+1)(x-1)}}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	$\boxed{-1}$	$\cdots$	$\boxed{1}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$\boxed{-}$	0	$\boxed{+}$	0	$\boxed{-}$	
$f(x)$	$\boxed{-\frac{2}{7}}$	↘	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	↗	1	↘	$\boxed{\frac{3}{7}}$

극댓값은 $f(\boxed{1})=1$, 극솟값은 $f(\boxed{-1})=\boxed{-\frac{1}{3}}$

양 끝값은 $f(-2)=\boxed{-\frac{2}{7}}$, $f(3)=\boxed{\frac{3}{7}}$

$\therefore$ 최댓값 : $\boxed{1}$, 최솟값 : $\boxed{-\frac{1}{3}}$

2) $f(x)=\frac{(x+2)(x-1)+4}{x-1}=x+2+\frac{4}{x-1}$

이므로

$f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because 2\le x\le 5$)

x	2	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	7	↗	8

극솟값은 $f(3)=7$, 양 끝값은 $f(2)=8$, $f(5)=8$

$\therefore$ 최댓값 : 8, 최솟값 : 7

114 답 1) 최댓값 : $\mathbf{3}$, 최솟값 : $\mathbf{-3}$
2) 최댓값 : $\sqrt{2}$, 최솟값 : $\mathbf{1}$

1) $f'(x)=\sqrt{6-x^2}+\boxed{x}\times\frac{\boxed{-2}x}{2\sqrt{6-x^2}}=\frac{\boxed{6}-\boxed{2}x^2}{\sqrt{6-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\boxed{3}$

x	$\boxed{-\sqrt{6}}$	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\boxed{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\boxed{\sqrt{6}}$
$f'(x)$		$\boxed{-}$	0	$\boxed{+}$	0	$\boxed{-}$	
$f(x)$	0	↘	$\boxed{-3}$	↗	$\boxed{3}$	↘	0

극댓값은 $f(\boxed{3})=\boxed{3}$, 극솟값은 $f(-\sqrt{3})=\boxed{-3}$

양 끝값은 $f(\boxed{-\sqrt{6}})=0$, $f(\boxed{\sqrt{6}})=0$

$\therefore$ 최댓값 : $\boxed{3}$, 최솟값 : $\boxed{-3}$

2) $f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{1-x^2}=x$

양변을 제곱하여 정리하면 $2x^2=1$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because 0\le x\le 1$)

x	0	⋯	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	⋯	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

극댓값은 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$, 양 끝값은 $f(0)=f(1)=1$

∴ 최댓값 : $\sqrt{2}$, 최솟값 : 1

115 답 1) 최댓값 : $\frac{\pi}{2}$, 최솟값 : $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

2) 최댓값 : π, 최솟값 : -2π

1) $f'(x)=\boxed{1-2\sin x}$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\boxed{\frac{1}{2}}$ $\quad\therefore x=\boxed{\frac{5}{6}\pi}$

$\left(\because \frac{\pi}{2}\le x\le \pi\right)$

x	$\frac{\pi}{2}$	⋯	$\boxed{\frac{5}{6}\pi}$	⋯	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\boxed{\frac{\pi}{2}}$	↘	$\boxed{\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}}$	↗	$\boxed{\pi-2}$

극솟값은 $f\left(\boxed{\frac{5}{6}\pi}\right)=\boxed{\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}}$

양 끝값은 $f\left(\boxed{\frac{\pi}{2}}\right)=\boxed{\frac{\pi}{2}}$, $f(\pi)=\boxed{\pi-2}$

∴ 최댓값 : $\boxed{\frac{\pi}{2}}$, 최솟값 : $\boxed{\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}}$

2) $f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

x	0	⋯	π	⋯	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	π	↘	-2π

극댓값은 $f(\pi)=\pi$

양 끝값은 $f(0)=0$, $f(2\pi)=-2\pi$

∴ 최댓값 : π, 최솟값 : -2π

116 답 1) 최댓값 : $7e^6$, 최솟값 : $-e^2$

2) 최댓값 : e^2, 최솟값 : 0

1) $f'(x)=\boxed{2x}e^{-2x}-\boxed{2}(x^2-\boxed{2})e^{-2x}$

$=\boxed{-2}(x^2-x-\boxed{2})e^{-2x}$

$=\boxed{-2}(x+\boxed{1})(x-\boxed{2})e^{-2x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{-1}$ 또는 $x=\boxed{2}$

x	-3	⋯	$\boxed{-1}$	⋯	$\boxed{2}$	⋯	3
$f'(x)$		$\boxed{-}$	0	$\boxed{+}$	0	$\boxed{-}$	
$f(x)$	$\boxed{7e^6}$	↘	$\boxed{-e^2}$	↗	$\boxed{\frac{2}{e^4}}$	↘	$\boxed{\frac{7}{e^6}}$

극댓값은 $f(\boxed{2})=\boxed{\frac{2}{e^4}}$

극솟값은 $f(\boxed{-1})=\boxed{-e^2}$

양 끝값은 $f(-3)=\boxed{7e^6}$, $f(3)=\boxed{\frac{7}{e^6}}$

∴ 최댓값 : $\boxed{7e^6}$, 최솟값 : $\boxed{-e^2}$

2) $f'(x)=3-\ln x-1=2-\ln x$

$f'(x)=0$에서 $x=e^2$

x	1	⋯	e^2	⋯	e^3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↗	e^2	↘	0

극댓값은 $f(e^2)=e^2$, 양 끝값은 $f(1)=3$, $f(e^3)=0$

∴ 최댓값 : e^2, 최솟값 : 0

117 답 2

$f'(x)=\boxed{2x}e^{ax}+\boxed{ax^2}e^{ax}$

$=x(\boxed{2}+\boxed{a}x)e^{ax}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\boxed{-\frac{2}{a}}$

$a>1$이므로 $-2<-\frac{2}{a}<0$이고, $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면

x	-2	⋯	$\boxed{-\frac{2}{a}}$	⋯	0	⋯	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$4e^{-2a}$	$\boxed{\nearrow}$	$\boxed{\frac{4}{a^2e^2}}$	$\boxed{\searrow}$	0	$\boxed{\nearrow}$	$\boxed{4e^{2a}}$

최댓값이 $4e^4$이고 a는 $a>1$인 정수이므로 최댓값은

$f(\boxed{2})=\boxed{4e^{2a}}=4e^4$ $\quad\therefore a=\boxed{2}$

118 답 $1+e^{-2}$

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}+1$

$\quad=\ln x+2$

$f'(x)=0$에서 $x=e^{-2}$

x	0	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-e^{-2}+a$	$\nearrow$

$x=e^{-2}$일 때, 극소이고 최소이다.

최솟값이 1이므로

$f(e^{-2})=-e^{-2}+a=1$

$\therefore a=1+e^{-2}$

119 답 $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

$f'(x)=a-2a\cos 2x$

$f'(x)=0$에서

$\cos 2x=\frac{1}{2}$이므로 $x=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{\pi}{6}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\nearrow$	$\frac{a}{2}\pi$

$a>0$이므로 최댓값은

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a}{2}\pi=\pi$

$\therefore a=2$

최솟값은 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}\times 2-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2$

$\quad=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

120 답 $\frac{1}{e}$

두 곡선 $y=e^{2x}$, $y=e^{-2x}$은 $\boxed{y축}$에 대하여 대칭이므로

점 D의 좌표를 $\mathrm{D}(t,\ e^{-2t})$ $(t>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=\boxed{2t}$, $\overline{\mathrm{DC}}=\boxed{e^{-2t}}$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\boxed{2te^{-2t}}$

$S'(t)=2\boxed{e^{-2t}}-\boxed{4t}e^{-2t}$

$\quad=2\boxed{e^{-2t}}(1-\boxed{2t})$

$S'(t)=0$에서 $t=\boxed{\frac{1}{2}}$

t	0	$\cdots$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$S'(t)$		$\boxed{+}$	0	$\boxed{-}$
$S(t)$		$\boxed{\nearrow}$	$\boxed{\frac{1}{e}}$	$\boxed{\searrow}$

$t=\boxed{\frac{1}{2}}$일 때, $S(t)$는 극대이고 최대이므로

직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $\boxed{\frac{1}{e}}$이다.

121 답 1) 최댓값, 최솟값

2) (i) 극댓값, 극솟값

(ii) $f(a)$, $f(b)$

(iii) 최댓값, 최솟값

122 답 1) 2 2) 1

1) $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$라 놓으면

$f'(x)=\frac{(x^2+4)-x\times 2x}{(x^2+4)^2}$

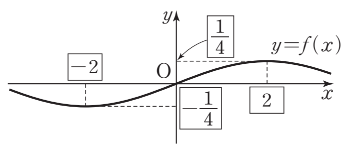
$f'(x)=\frac{-(x+\boxed{2})(x-\boxed{2})}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{-2}$ 또는 $x=\boxed{2}$이고

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표와 그래프는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\boxed{-2}$	$\cdots$	$\boxed{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\boxed{-\frac{1}{4}}$	$\nearrow$	$\boxed{\frac{1}{4}}$	$\searrow$



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{5}$이

$\boxed{서로\ 다른\ 두\ 점}$에서 만나므로

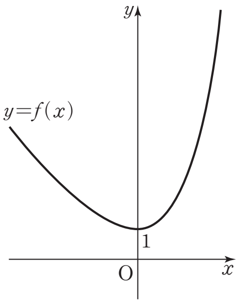
방정식 $\frac{x}{x^2+4}=\frac{1}{5}$의 서로 다른 실근의 개수는 $\boxed{2}$이다.

2) $f(x)=e^x-x$라 놓으면

$f'(x)=e^x-1$이고

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표와 그래프는 다음과 같다.



x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 한 점에서 만나므로 방정식 $e^x-x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

123 답 $k=e$ 또는 $k<0$

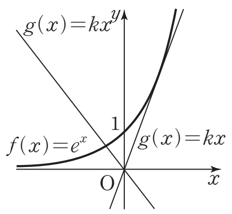
방정식 $e^x=kx$가 오직 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y=e^x$과 직선 $y=kx$가 $\boxed{\text{한}}$ 점에서 만나야 한다.

먼저, 두 함수의 그래프가 접하는 경우를 구해 보자.

$f(x)=e^x$, $g(x)=kx$라 놓으면

$f'(x)=\boxed{e^x}$, $g'(x)=\boxed{k}$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 a라 하면 함숫값이 같으므로



$f(a)=g(a)$에서

$e^a=ka$ ⋯ ㉠

접선의 기울기가 같으므로

$f'(a)=g'(a)$에서

$\boxed{e^a=k}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\boxed{1}$, $k=\boxed{e}$

즉, $k=\boxed{e}$일 때, 두 함수의 그래프가 접한다.

한편, 두 함수의 그래프로부터 $k<0$일 때 교점이 한 개임을 알 수 있다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값 또는 범위는 $k=\boxed{e}$ 또는 $k<0$이다.

124 답 1) 교점의 x좌표 2) 교점의 x좌표

125 답 해설 참조

$f(x)=2e^x-x-1$이라 놓으면

$f'(x)=2\boxed{e^x}-\boxed{1}$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{-\ln 2}$

x	$\cdots$	$\boxed{-\ln 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\boxed{-}$	0	$\boxed{+}$
$f(x)$	$\boxed{\searrow}$	$\boxed{\ln 2}$	$\boxed{\nearrow}$

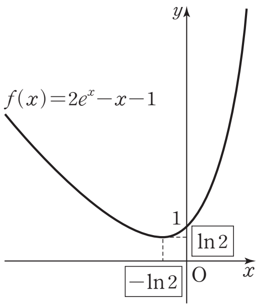
함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 이 함수는

$x=\boxed{-\ln 2}$에서 최솟값

$\boxed{\ln 2}$를 가진다.

$2e^x-x-1\geq\boxed{\ln 2}>0$

$\therefore 2e^x>x+1$



126 답 해설 참조

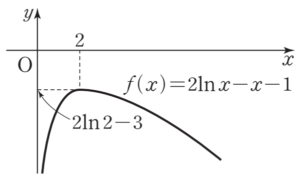
$f(x)=2\ln x-x-1$이라 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2}{x}-1$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$2\ln 2-3$	$\searrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 이 함수는 $x=2$에서 최댓값 $2\ln 2-3$을 가진다.



$2\ln 2-3$

$=\ln 4-\ln e^3<0$

따라서 $2\ln x-x-1<0$이므로 $2\ln x<x+1$이다.

127 답 1

$f(x)=e^x-x-k$라 놓으면

$f'(x)=\boxed{e^x-1}$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{0}$

x	$\cdots$	$\boxed{0}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\boxed{-}$	0	$\boxed{+}$
$f(x)$	$\boxed{\searrow}$	$\boxed{1-k}$	$\boxed{\nearrow}$

함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(\boxed{0})=\boxed{1-k}$이므로

$\boxed{1-k}\geq 0$ $\quad\therefore k\leq\boxed{1}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\boxed{1}$이다.

128 답 1) 최솟값, 최솟값 2) 최댓값, 최댓값 3) $\geq$

129 답 1) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ 2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

3) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -2\sqrt{3}\right)$ 4) $\frac{\sqrt{51}}{2}$

1) $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dx}\right)=\left(\boxed{-\sin t}, \boxed{2\cos 2t}\right)$이므로

$t=\frac{\pi}{6}$를 대입하면 $\left(\boxed{-\frac{1}{2}}, \boxed{1}\right)$

2) $t=\frac{\pi}{6}$에서의 속력은 $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

3) $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt}\right)=\left(\boxed{-\cos t}, \boxed{-4\sin 2t}\right)$이므로

$t=\frac{\pi}{6}$를 대입하면 $\left(\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}, \boxed{-2\sqrt{3}}\right)$

4) $t=\frac{\pi}{6}$에서의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+\left(\boxed{-2\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+12}=\boxed{\frac{\sqrt{51}}{2}}$

130 답 속도 : $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 속력 : $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 가속도 : $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$

가속도의 크기 : $\frac{\sqrt{17}}{4}$

$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{t}\right)$이므로

$t=1$을 대입하면 속도 : $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$t=1$에서의 속력 : $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt}\right)=\left(-\frac{1}{4t\sqrt{t}}, -\frac{1}{t^2}\right)$이므로

$t=1$을 대입하면 가속도 : $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$

$t=1$에서의 가속도의 크기 :

$\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$

131 답 1) ○ 2) ○ 3) × 4) ×

1) $t=a$에서의 속도는 $f'(a)=0$이다. ∴ 참

2) $t=b$일 때 위치는 $f(b)=0$이다. ∴ 참

3) $t=c$의 좌우에서 속도 $f'(t)$의 값이 증가하므로

가속도의 크기는 $f''(t)>0$이다. ∴ 거짓

4) $t=d$일 때 접선의 기울기가 양수이므로

속도는 $f'(d)>0$이다. ∴ 거짓

132 답 1) $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, f', g'$

2) $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2$

3) $\frac{d^2x}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, f'', g''$

4) $\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2, \{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2$

단원 총정리 문제 정답 Ⅱ 미분법

pp. 92~93

01 ②	02 ②	03 ③	04 ④	05 $\frac{1}{2}$
06 ④	07 ⑤	08 ⑤	09 ④	10 ③
11 ⑤	12 $-e$	13 $-\frac{1}{e}$	14 $e^{-\frac{1}{2}}\le a\le e^{\frac{1}{2}}$	
15 ②	16 ①			

01 답 ②

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}=e$

ㄴ. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}=e^{-1}$

ㄷ. $\lim_{x\to0}(1+x)^x\ne\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

ㄹ. $x+2=t$라 하면 $x\to-2$일 때, $t\to0$이므로

$\lim_{x\to-2}(3+x)^{\frac{1}{x+2}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

따라서 극한값이 e인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

02 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{k}{2}$, $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{-\frac{k}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$

$\therefore k=-3$

03 답 ③

두 직선 $4x-y+1=0$, $ax-y+2=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=4$, $\tan\beta=a$

두 직선이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ ($\because 0<a<4$)

따라서 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=1$이므로

$\frac{4-a}{1+4a}=1$

$4-a=1+4a$

$\therefore a=\frac{3}{5}$

04 답 ④

$x-1=t$로 놓으면

$x\to1$일 때 $t\to0$이고 $x=1+t$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{(x+1)(x-1)}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1+t)}{(2+t)t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)}{(2+t)t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}t}{(2+t)t}$$
$$=-\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\times\frac{\frac{\pi}{2}}{(2+t)}$$
$$=-1\times\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$$

05 답 $\frac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta=\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=1-\overline{\mathrm{OC}}=1-\cos\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\theta}$$
$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

06 답 ④

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면

$x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}(3x^2+ax+1)=\lim_{x\to0+}b\cos x=f(0)$

$\therefore b=1$

또, $f'(x)=\begin{cases}6x+a & (x<0)\\ -\sin x & (x>0)\end{cases}$ 이고

$x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to0-}(6x+a)=\lim_{x\to0+}(-\sin x)\qquad \therefore a=0$

$\therefore a+b=1$

07 답 ⑤

$f(x)=x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}+\cdots+x^{-10}$에서

$f'(x)=-x^{-2}-2x^{-3}-3x^{-4}-4x^{-5}-\cdots-10x^{-11}$

$\therefore f'(1)=-1-2-3-4-\cdots-10$

$=-(1+2+3+4+\cdots+10)$

$=-55$

08 답 ⑤

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-h}$$
$$=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$f'(x)=\cos x\tan x+\sin x\sec^2 x$

$=\cos x\times\frac{\sin x}{\cos x}+\sin x\times\frac{1}{\cos^2 x}$

$=\sin x+\tan x\sec x$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\times2=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\therefore 2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$

09 답 ④

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=1$에서

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고,

극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$

$\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}=0$

$\therefore f(1)=3$

미분계수의 정의에 의해

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=1$

마찬가지로 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)+2}{x-3}=-2$에서

$x\to3$일 때, (분모)$\to0$이고,

극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$

$\lim_{x\to3}\{g(x)+2\}=0$

$\therefore g(3)=-2$

미분계수의 정의에 의하여

$\lim_{x\to3}\frac{g(x)+2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$=g'(3)=-2$

합성함수의 미분법을 이용하여

$h(x)=g(f(x))$를 미분하면

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$\therefore h'(1)=g'(f(1))f'(1)=g'(3)f'(1)$

$=-2\times1=-2$

10 답 ③

$f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}+e^{5x})$이므로 $f(0)=\ln 5$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\ln 5}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

$f'(x)=\frac{(e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}+e^{5x})'}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}+e^{5x}}$

$=\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+4e^{4x}+5e^{5x}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}+e^{5x}}$

$\therefore f'(0)=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$

11 답 ⑤

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\frac{1}{3}$에서 $x\to 2$일 때, (분모)$\to 0$이고,

극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$에서 $f(2)=3$이므로 $g(3)=2$

한편 미분계수의 정의에 의하여

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{3}$

$\therefore g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(2)}=3$

12 답 $-e$

$\lim_{h\to 0}\frac{f'\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x)=e^{\sin x}\cos x$이므로

$f''(x)=(e^{\sin x})'\cos x+e^{\sin x}(\cos x)'$

$=e^{\sin x}\cos^2 x-e^{\sin x}\sin x$

$=e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=e(0-1)=-e$

13 답 $-\frac{1}{e}$

$f(x)=\frac{k}{x}$, $g(x)=\ln x$라 하자.

두 곡선의 접점의 x좌표를 a $(a>0)$라 하면

함숫값이 같으므로 $f(a)=g(a)$에서

$\frac{k}{a}=\ln a$ ⋯ ㉠

접선의 기울기가 같으므로 $f'(a)=g'(a)$에서

$-\frac{k}{a^2}=\frac{1}{a}$

$-\frac{k}{a}=1$ $(\because t>0)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\ln a=-1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{e}$

$a=\frac{1}{e}$을 ㉡에 대입하면 $k=-\frac{1}{e}$

14 답 $e^{-\frac{1}{2}}\le a\le e^{\frac{1}{2}}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 하므로 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f'(x)=x^2+(4\ln a)x+1$이고 방정식 $f'(x)=0$이 중근이나 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\ln a)^2-1\le 0$

$(2\ln a+1)(2\ln a-1)\le 0$

$-\frac{1}{2}\le \ln a\le \frac{1}{2}$

$\therefore e^{-\frac{1}{2}}\le a\le e^{\frac{1}{2}}$

15 답 ②

ㄱ. $f'(a)=0$이고 $f'(x)$의 부호가 $x=a$의 왼쪽에서는 $-$이고, 오른쪽에서는 $+$이므로 $x=a$에서 극솟값을 가진다. (참)

ㄴ. $f'(b)\neq 0$이므로 $y=f(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f''(x)=0$인 점은 $(b,\ f(b))$, $(d,\ f(d))$이고, 각각의 점의 좌우에서 $f'(x)$의 증가와 감소가 바뀌므로 $f''(x)$의 부호가 바뀐다. 따라서 변곡점은 2개이다. (참)

ㄹ. 구간 $(c,\ d)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(d,\ e)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16 답 ①

$f(x)=2\sqrt{x+1}-x-a$라 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1$

$0<x<8$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $0<x<8$에서 감소하는 함수이다.

$0<x<8$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립하려면

$f(8)=2\sqrt{9}-8-a=-2-a\ge 0$

$\therefore a\le -2$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다.

Ⅲ 적분법

Ⅲ-1 여러 가지 함수의 부정적분 pp. 98~110

01 답 C는 적분상수일 때,

1) $-\dfrac{1}{x}+C$ 2) $\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$ 3) $-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$

4) $\dfrac{1}{2}x^2-2x-\dfrac{1}{x}+C$ 5) $2x\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-\frac{1}{x}+C$

2) $\displaystyle\int\sqrt[3]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{3}}\,dx=\frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1}+C$

$\displaystyle=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

3) $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}+C$

$\displaystyle=-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

4) $\displaystyle\int\frac{x^3-2x^2+1}{x^2}\,dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{1}{x}+C$

5) $\displaystyle\int\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(3x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$\displaystyle=3\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\times 2x^{\frac{1}{2}}+C$

$=2x\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

02 답 C는 적분상수일 때,

1) $x+\dfrac{1}{3x^3}+C$

3) $x-9\sqrt[3]{x^2}+36\sqrt[3]{x}-8\ln|x|+C$

3) $x^2-\dfrac{2}{x}+C$ 4) $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

1) $\displaystyle\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$\displaystyle=1-\frac{1}{x^4}=1-x^{-4}$

$\displaystyle\therefore\int\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$\displaystyle=\int(1-x^{-4})\,dx=x+\frac{1}{3}x^{-3}+C=x+\frac{1}{3x^3}+C$

2) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt[3]{x}-2)^3}{x}\,dx=\int\frac{x-6\sqrt[3]{x^2}+12\sqrt[3]{x}-8}{x}\,dx$

$\displaystyle=\int\left(1-6x^{-\frac{1}{3}}+12x^{-\frac{2}{3}}-\frac{8}{x}\right)dx$

$=x-9\sqrt[3]{x^2}+36\sqrt[3]{x}-8\ln|x|+C$

3) $\displaystyle\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^2dx+\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2dx$

$\displaystyle=\int\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx+\int\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$\displaystyle=\int\left(2x+\frac{2}{x^2}\right)dx=x^2-\frac{2}{x}+C$

4) $\displaystyle\int\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx-\int\frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx$

$\displaystyle=\int\frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}-1}\,dx=\int\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}\,dx$

$\displaystyle=\int(x+\sqrt{x}+1)\,dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

03 답 1) $\dfrac{1}{r+1}x^{r+1}$ 2) $\ln|x|$

04 답 C는 적분상수일 때,

1) $\tan x+C$ 2) $4\sin x+3\cos x+C$

3) $-\cos x+\tan x+C$ 4) $-\cos x+\sin x+C$

5) $\tan x-x+C$ 6) $-\cot x-x+C$

7) $-\csc x+C$ 8) $x+\sin x+C$ 9) $\sec x+C$

10) $\tan x+\sin x+C$ 11) $-\cot x+C$

12) $\tan x+x+C$ 13) $\tan x+\sec x+C$

14) $-\cot x-\cos x+C$ 15) $-\cot x+C$

1) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int\sec^2 x\,dx=\tan x+C$

2) $\displaystyle\int(4\cos x-3\sin x)\,dx=4\sin x+3\cos x+C$

3) $\displaystyle\int(\sin x+\sec^2 x)\,dx=-\cos x+\tan x+C$

4) $\displaystyle\int(\tan x+1)\cos x\,dx=\int(\sin x+\cos x)\,dx$

$=-\cos x+\sin x+C$

5) $\displaystyle\int\tan^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)\,dx$

$=\tan x-x+C$

6) $\displaystyle\int\cot^2 x\,dx=\int(\csc^2 x-1)\,dx$

$=-\cot x-x+C$

7) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx=\int\frac{1}{\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$\displaystyle=\int\csc x\cot x\,dx$

$=-\csc x+C$

8) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}\,dx$

$\displaystyle=\int\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}\,dx$

$\displaystyle=\int(1+\cos x)\,dx=x+\sin x+C$

9) $\int \frac{1}{\cot x \cos x}\,dx=\int \frac{1}{\cot x}\times\frac{1}{\cos x}\,dx$

$=\int \tan x \sec x\,dx=\sec x+C$

10) $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx=\int (\sec^2 x+\cos x)\,dx$

$=\tan x+\sin x+C$

11) $\int \frac{1}{1-\cos^2 x}\,dx=\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

$=\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$

12) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1-\sin^2 x}\,dx=\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,d$

$=\int (\sec^2 x+1)\,dx$

$=\tan x+x+C$

13) $\int (\sec x+\tan x)\sec x\,dx$

$=\int (\sec^2 x+\sec x\tan x)\,dx$

$=\tan x+\sec x+C$

14) $\int \frac{1+\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\sin x\right)dx$

$=\int (\csc^2 x+\sin x)\,dx$

$=-\cot x-\cos x+C$

15) $\int \cot x \csc x \sec x\,dx$

$=\int \frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{1}{\sin x}\times\frac{1}{\cos x}\,dx$

$=\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

$=\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$

05 답 **1) $-\cos x$ 2) $\sin x$ 3) $\tan x$**
4) $-\cot x$ 5) $\sec x$ 6) $-\csc x$

06 답 C는 적분상수일 때,

1) $e^{x+1}+C$ 2) $e^x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$ 3) $-\frac{2^{-x}}{\ln 2}+C$

4) $\frac{e^2 3^x}{\ln 3}+C$ 5) $\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+C$ 6) $e^{x-1}+C$

7) $\frac{2^{3x}}{6\ln 2}+C$ 8) $\frac{2^x-2^{-x}}{\ln 2}+C$

9) $3e^x-\frac{3^{x+1}}{\ln 3}+C$ 10) 5^x+C

11) $e^{x-1}+\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$

1) $\int e^{x+1}\,dx=e\int e^x\,dx=e\times e^x+C=e^{x+1}+C$

2) $\int (e^x+2^x)\,dx=e^x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$

3) $\int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}+C=-\frac{2^{-x}}{\ln 2}+C$

4) $\int e^2 3^x\,dx=e^2\int 3^x\,dx=\frac{e^2 3^x}{\ln 3}+C$

5) $\int 5^{2x}\,dx=\int 25^x\,dx=\frac{25^x}{\ln 25}+C=\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+C$

6) $\int (\sqrt{e})^{2x-2}\,dx=\int e^{x-1}\,dx=\frac{1}{e}\int e^x\,dx=e^{x-1}+C$

7) $\int 2^{3x-1}\,dx=\int \frac{8^x}{2}\,dx$

$=\frac{1}{2}\times\frac{8^x}{\ln 8}+C=\frac{2^{3x}}{6\ln 2}+C$

8) $\int (2^x+2^{-x})\,dx=\int\left\{2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}dx$

$=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}+C=\frac{2^x-2^{-x}}{\ln 2}+C$

9) $\int (3e^x-3^{x+1})\,dx=\int (3e^x-3\times 3^x)\,dx$

$=3e^x-3\times\frac{3^x}{\ln 3}+C$

$=3e^x-\frac{3^{x+1}}{\ln 3}+C$

10) $\int 5^x \ln 5\,dx=\ln 5\int 5^x\,dx$

$=\ln 5\times\frac{5^x}{\ln 5}+C=5^x+C$

11) $\int (e^{x-1}+3^{2x})\,dx=\int\left(\frac{e^x}{e}+9^x\right)dx$

$=\frac{e^x}{e}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$

$=e^{x-1}+\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$

07 답 C는 적분상수일 때,

1) $\frac{2^{2x}}{2\ln 2}+\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

2) $\frac{1}{2}e^{2x}-2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

3) $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$

4) $x-\frac{1}{4}e^{4x}+C$ 5) $e^x-3x^2-\ln|x|+C$

6) $\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$ 7) $e^x-\frac{1}{2}x^2+C$

8) $\frac{2^{2x}}{2\ln 2}+\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

1) $\int (2^x+1)^2\,dx=\int (4^x+2\times 2^x+1)\,dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}+2\times\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

$=\frac{2^{2x}}{2\ln 2}+\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

2) $\int(e^x-e^{-x})^2\,dx=\int(e^{2x}-2+e^{-2x})\,dx$

$=\int\{(e^2)^x-2+(e^{-2})^x\}\,dx$

$=\dfrac{(e^2)^x}{\ln e^2}-2x+\dfrac{(e^{-2})^x}{\ln e^{-2}}+C$

$=\dfrac{1}{2}e^{2x}-2x-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C$

3) $\int\dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx=\int\dfrac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}\,dx$

$=\int(e^{2x}-e^x+1)\,dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$

4) $\int(1-e^x)(1+e^x)(1+e^{2x})\,dx=\int(1-e^{4x})\,dx$

$=x-\dfrac{1}{4}e^{4x}+C$

5) $\int\dfrac{xe^x-6x^2-1}{x}\,dx=\int\left(e^x-6x-\dfrac{1}{x}\right)dx$

$=e^x-3x^2-\ln|x|+C$

6) $\int\dfrac{9^x+27^x}{3^x}\,dx=\int\left(\dfrac{9^x}{3^x}+\dfrac{27^x}{3^x}\right)dx=\int(3^x+9^x)\,dx$

$=\dfrac{3^x}{\ln 3}+\dfrac{9^x}{\ln 9}+C$

$=\dfrac{3^x}{\ln 3}+\dfrac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$

7) $\int\dfrac{e^{2x}-x^2}{e^x+x}\,dx=\int\dfrac{(e^x+x)(e^x-x)}{e^x+x}\,dx$

$=\int(e^x-x)\,dx$

$=e^x-\dfrac{1}{2}x^2+C$

8) $\int\dfrac{8^x-1}{2^x-1}\,dx=\int\dfrac{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}{2^x-1}\,dx$

$=\int(4^x+2^x+1)\,dx$

$=\dfrac{4^x}{\ln 4}+\dfrac{2^x}{\ln 2}+x+C$

$=\dfrac{2^{2x}}{2\ln 2}+\dfrac{2^x}{\ln 2}+x+C$

08 답 1) e^x 2) $\dfrac{a^x}{\ln a}$

09 답 C는 적분상수일 때,

1) $\dfrac{1}{8}(2x+1)^4+C$ 2) $\dfrac{1}{2}(x^2-3)^6+C$

3) $\dfrac{1}{3}(x^2+x-1)^3+C$ 4) $\dfrac{1}{12}(x^4+2x^2)^3+C$

1) $2x+1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2=\dfrac{dt}{dx}$ $\quad\therefore dx=\dfrac{1}{2}dt$

$\therefore \int(2x+1)^3\,dx=\dfrac{1}{2}\int t^3\,dt=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}t^4+C$

$=\dfrac{1}{8}(2x+1)^4+C$

2) $x^2-3=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x=\dfrac{dt}{dx}$ $\quad\therefore 2x\,dx=dt$

$\therefore \int 6x(x^2-3)^5\,dx=\int 3t^5\,dt=3\times\dfrac{1}{6}t^6+C$

$=\dfrac{1}{2}(x^2-3)^6+C$

3) $x^2+x-1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+1=\dfrac{dt}{dx}$ $\quad\therefore (2x+1)\,dx=dt$

$\therefore \int(2x+1)(x^2+x-1)^2\,dx=\int t^2\,dt=\dfrac{1}{3}t^3+C$

$=\dfrac{1}{3}(x^2+x-1)^3+C$

4) $x^4+2x^2=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x^3+4x=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore (x^3+x)\,dx=\dfrac{1}{4}dt$

$\therefore \int(x^3+x)(x^4+2x^2)^2\,dx=\dfrac{1}{4}\int t^2\,dt$

$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}t^3+C$

$=\dfrac{1}{12}(x^4+2x^2)^3+C$

10 답 C는 적분상수일 때,

1) $-\dfrac{1}{3(x^2+5)^3}+C$ 2) $-\dfrac{2}{x^2-3x+5}+C$

3) $-\dfrac{1}{2(2x^3+x^2+1)}+C$

4) $-\dfrac{1}{4(x^2+2x+2)^2}+C$

1) $x^2+5=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x=\dfrac{dt}{dx}$ $\quad\therefore 2x\,dx=dt$

$\therefore \int\dfrac{2x}{(x^2+5)^4}\,dx=\int\dfrac{1}{t^4}\,dt=\int t^{-4}\,dt$

$=-\dfrac{1}{3}t^{-3}+C=-\dfrac{1}{3(x^2+5)^3}+C$

2) $x^2-3x+5=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-3=\dfrac{dt}{dx}$ $\quad\therefore (2x-3)\,dx=dt$

$\therefore \int\dfrac{4x-6}{(x^2-3x+5)^2}\,dx=2\int\dfrac{1}{t^2}\,dt=-\dfrac{2}{t}+C$

$=-\dfrac{2}{x^2-3x+5}+C$

3) $2x^3+x^2+1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^2+2x=\dfrac{dt}{dx}$ $\quad\therefore (3x^2+x)\,dx=\dfrac{1}{2}dt$

$\therefore \int\dfrac{3x^2+x}{(2x^3+x^2+1)^2}\,dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{t^2}\,dt=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{t}\right)+C$

$=-\dfrac{1}{2(2x^3+x^2+1)}+C$

4) $x^2+2x+2=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore (x+1)\,dx=\frac{1}{2}\,dt$

$$\therefore \int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^3}dt=\frac{1}{2}\int t^{-3}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^{-2}\right)+C$$
$$=-\frac{1}{4(x^2+2x+2)^2}+C$$

5) $\sqrt{e^x+1}=t$로 놓으면 $e^x+1=t^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $e^x=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore e^x\,dx=2t\,dt$

$$\therefore \int \frac{3e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx=\int \frac{3}{t}\times 2t\,dt=\int 6\,dt$$
$$=6t+C=6\sqrt{e^x+1}+C$$

11 답 C는 적분상수일 때,

1) $\mathbf{2\sqrt{x^2+3}+C}$

2) $\mathbf{\frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5-\frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3+C}$

3) $\mathbf{\frac{2}{3}(\sqrt{x+2})^3-4\sqrt{x+2}+C}$

4) $\mathbf{2\sqrt{x+1}+C}$ 5) $\mathbf{6\sqrt{e^x+1}+C}$

1) $\boxed{\sqrt{x^2+3}}=t$로 놓으면 $\boxed{x^2+3}=t^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $\boxed{2x}=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore \boxed{2x}\,dx=2t\,dt$

$$\therefore \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx=\int \boxed{\frac{1}{t}}\times 2t\,dt=\int \boxed{2}\,dt$$
$$=\boxed{2t}+C=\boxed{2\sqrt{x^2+3}}+C$$

2) $\sqrt{x+1}=t$로 놓으면 $x+1=t^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $1=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore dx=2t\,dt$

$$\therefore \int x\sqrt{x+1}\,dx=\int (t^2-1)t\times 2t\,dt$$
$$=\int (2t^4-2t^2)dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C$$
$$=\frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5-\frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3+C$$

3) $\sqrt{x+2}=t$로 놓으면 $x+2=t^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $1=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore dx=2t\,dt$

$$\therefore \int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx=\int \frac{t^2-2}{t}\times 2t\,dt$$
$$=\int (2t^2-4)dt=\frac{2}{3}t^3-4t+C$$
$$=\frac{2}{3}(\sqrt{x+2})^3-4\sqrt{x+2}+C$$

4) $\sqrt{x+1}=t$로 놓으면 $x+1=t^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $1=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore dx=2t\,dt$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int \frac{1}{t}\times 2t\,dt=\int 2\,dt=2t+C$$
$$=2\sqrt{x+1}+C$$

12 답 C는 적분상수일 때,

1) $\mathbf{\frac{1}{3}\sin^3 x+C}$ 2) $\mathbf{-\frac{1}{3}(1+\cos x)^3+C}$

3) $\mathbf{-\frac{1}{4}\cos^4 x+C}$ 4) $\mathbf{\ln|\tan x-1|+C}$

1) $\sin x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\boxed{\cos x}=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore \boxed{\cos x}\,dx=dt$

$$\therefore \int \sin^2 x\cos x\,dx=\int \boxed{t^2}\,dt=\frac{1}{\boxed{3}}t^{\boxed{3}}+C$$
$$=\boxed{\frac{1}{3}\sin^3 x+C}$$

2) $1+\cos x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$-\sin x=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore \sin x\,dx=-dt$

$$\therefore \int \sin x(1+\cos x)^2\,dx=\int t^2\times(-dt)=-\int t^2\,dt$$
$$=-\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=-\frac{1}{3}(1+\cos x)^3+C$$

3) $\cos x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$-\sin x=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore \sin x\,dx=-dt$

$$\therefore \int \cos^3 x\sin x\,dx=\int t^3\times(-dt)=-\int t^3\,dt$$
$$=-\frac{1}{4}t^4+C=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$$

4) $\tan x-1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore \sec^2 x\,dx=dt$

$$\therefore \int \frac{\sec^2 x}{\tan x-1}\,dx=\int \frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+C$$
$$=\ln|\tan x-1|+C$$

13 답 C는 적분상수일 때,

1) $\mathbf{-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C}$ 2) $\mathbf{\frac{2}{3}(\sqrt{e^x+1})^3+C}$

3) $\mathbf{\frac{1}{4}(e^x-1)^4+C}$ 4) $\mathbf{-\cos(\ln x)+C}$

5) $\mathbf{\frac{2}{3}(\sqrt{\ln x+1})^3+C}$ 6) $\mathbf{\frac{1}{5}(\ln x)^5+C}$

1) $\boxed{-x^2}=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\boxed{-2}x=\frac{dt}{dx}\quad \therefore x\,dx=\boxed{-\frac{1}{2}}dt$

$\therefore \int xe^{-x^2}dx=\boxed{-\frac{1}{2}}\int e^t\,dt=\boxed{-\frac{1}{2}}e^t+C$

$=\boxed{-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C}$

2) $e^x+1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x=\frac{dt}{dx}\quad \therefore e^x\,dx=dt$

$\therefore \int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{2}{3}(\sqrt{e^x+1})^3+C$

3) $e^x-1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x=\frac{dt}{dx}\quad \therefore e^x\,dx=dt$

$\therefore \int(e^x-1)^3e^x\,dx=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+C$

$=\frac{1}{4}(e^x-1)^4+C$

4) $\ln x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}\quad \therefore \frac{1}{x}dx=dt$

$\therefore \int\frac{\sin(\ln x)}{x}dx=\int\sin t\,dt$

$=-\cos t+C$

$=-\cos(\ln x)+C$

5) $\ln x+1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}\quad \therefore \frac{1}{x}dx=dt$

$\therefore \int\frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}dx=\int\sqrt{t}\,dt$

$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{2}{3}(\sqrt{\ln x+1})^3+C$

6) $\ln x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}\quad \therefore \frac{1}{x}dx=dt$

$\therefore \int\frac{(\ln x)^4}{x}dx=\int t^4\,dt=\frac{1}{5}t^5+C$

$=\frac{1}{5}(\ln x)^5+C$

14 답 C는 적분상수일 때,

1) $\mathbf{\ln(x^2+1)+C}$ **2)** $\mathbf{\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+3|+C}$

3) $\mathbf{-\ln(2+\cos x)+C}$ **4)** $\mathbf{\ln|\sin x|+C}$

5) $\mathbf{\ln(1+e^x)+C}$

1) $(\boxed{x^2+1})'=2x$이고 $\boxed{x^2+1}>0$이므로

$\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\int\frac{(\boxed{x^2}+1)'}{x^2+1}dx$

$=\boxed{\ln(x^2+1)+C}$

2) $(x^2+4x+3)'=2x+4$이므로

$\int\frac{x+2}{x^2+4x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+4x+3)'}{x^2+4x+3}dx$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+3|+C$

3) $(2+\cos x)'=-\sin x$이고 $2+\cos x>0$이므로

$\int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx=-\int\frac{-\sin x}{2+\cos x}dx$

$=-\int\frac{(2+\cos x)'}{2+\cos x}dx$

$=-\ln(2+\cos x)+C$

4) $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$이고 $(\sin x)'=\cos x$이므로

$\int\cot x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}dx$

$=\ln|\sin x|+C$

5) $(1+e^x)'=e^x$이고 $1+e^x>0$이므로

$\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int\frac{(1+e^x)'}{1+e^x}dx=\ln(1+e^x)+C$

15 답 C는 적분상수일 때,

1) $\mathbf{\frac{1}{18}(3x-1)^6+C}$ **2)** $\mathbf{\frac{1}{3}(\sqrt{2x+3})^3+C}$

3) $\mathbf{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)+C}$

4) $\mathbf{\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 2x+C}$

5) $\mathbf{\frac{1}{3}\tan(3x+1)+C}$ **6)** $\mathbf{\frac{1}{5}e^{5x+2}+C}$

1) $(3x-1)'=\boxed{3}$이므로

$\int(3x-1)^5\,dx=\boxed{\frac{1}{3}}\times\frac{1}{6}(3x-1)^6+C$

$=\boxed{\frac{1}{18}(3x-1)^6}+C$

2) $(2x+3)'=2$이므로

$\int\sqrt{2x+3}\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{1}{3}(\sqrt{2x+3})^3+C$

3) $\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)'=-2$이므로

$\int\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)dx=-\frac{1}{2}\times\left\{-\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)\right\}+C$

$=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)+C$

4) $(3x)'=3$, $(2x)'=2$이므로

$$\int(\cos 3x+\sin 2x)\,dx=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

5) $(3x+1)'=3$이므로

$$\int\sec^2(3x+1)\,dx=\frac{1}{3}\tan(3x+1)+C$$

6) $(5x+2)'=5$이므로

$$\int e^{5x+2}\,dx=\frac{1}{5}e^{5x+2}+C$$

16 답 $-2\ln 2$

$f(x)=\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx=2e^{\frac{1}{2}x}+C$

$f(0)=1$이므로

$2e^0+C=1 \qquad \therefore C=-1$

$\therefore f(x)=2e^{\frac{1}{2}x}-1$

$f(x)=0$에서 $2e^{\frac{1}{2}x}=1$

$e^{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}x=-\ln 2$

$\therefore x=-2\ln 2$

17 답 $\frac{1}{4}$

$f(x)=\int\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+C$

$f\left(\frac{5}{12}\pi\right)=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}\right)+C=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+C=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2} \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$

18 답 1) $\frac{1}{a}F(ax+b)$ 2) $f(t)$ 3) $\ln|f(x)|$

19 답 C는 적분상수일 때,

1) $\ln|x+1|+C$ 2) $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

3) $2\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C$

4) $\ln|x(x+1)(x+2)|+C$

1) $\int\frac{1}{x+1}\,dx=\ln|x+1|+C$

2) $\int\frac{1}{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

3) $\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{3x+2}\right)dx$

$=2\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C$

4) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\ln|x|+\ln|x+1|+\ln|x+2|+C$

$=\ln|x(x+1)(x+2)|+C$

20 답 C는 적분상수일 때,

1) $3x+\ln|x-1|+C$

2) $\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x+2|+C$

3) $x^2+2x+\ln|x+1|+C$

1) $\int\frac{3x-2}{x-1}\,dx=\int\frac{\boxed{3}(x-1)+\boxed{1}}{x}\,dx$

$=\int\left(\boxed{3}+\frac{\boxed{1}}{x-1}\right)dx$

$=\boxed{3x}+\ln\left|x-\boxed{1}\right|+C$

2) $\int\frac{x^2+3x+1}{x+2}\,dx=\int\frac{(x+1)(x+2)-1}{(x+2)}\,dx$

$=\int\left(x+1-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x+2|+C$

3) $\int\frac{2x^2+4x+3}{x+1}\,dx=\int\frac{(2x+2)(x+1)+1}{x+1}\,dx$

$=\int\left(2x+2+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=x^2+2x+\ln|x+1|+C$

21 답 C는 적분상수일 때,

1) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$ 2) $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$

3) $\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$

4) $15\ln|x-3|-11\ln|x-2|+C$

5) $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+2\ln|x-2|+C$

1) $\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{\boxed{4}}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$이므로

$\int\frac{1}{(x-2)(x+2)}\,dx$

$=\frac{1}{\boxed{4}}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\frac{1}{\boxed{4}}\left(\ln|x-2|-\ln|x+2|\right)+C$

$=\frac{1}{\boxed{4}}\ln\left|\frac{x-\boxed{2}}{x+\boxed{2}}\right|+C$

2) $\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{1}{x(x-1)}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\ln|x-1|-\ln|x|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$$

3) $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$
이므로

$$\int\frac{1}{x^2+3x+2}\,dx=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$$

4) $\frac{4x+3}{x^2-5x+6}=\frac{4x+3}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$
로 놓으면

$$\frac{4x+3}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$
$$=\frac{(\boxed{A+B})x-(\boxed{2A+3B})}{(x-3)(x-2)}$$

위의 식은 x에 대한 항등식이므로

$\boxed{A+B}=4$, $\boxed{2A+3B}=-3$

$\therefore A=\boxed{15}$, $B=\boxed{-11}$

$$\therefore \int\frac{4x+3}{x^2-5x+6}\,dx$$
$$=\int\left(\frac{\boxed{15}}{x-3}-\frac{\boxed{11}}{x-2}\right)dx$$
$$=\boxed{15}\ln|x-3|-\boxed{11}\ln|x-2|+C$$

5) $\frac{5x}{2x^2-3x-2}=\frac{5x}{(2x+1)(x-2)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-2}$
로 놓으면

$$\frac{5x}{2x^2-3x-2}=\frac{A(x-2)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)}$$
$$=\frac{(A+2B)x+(-2A+B)}{(2x+1)(x-2)}$$

위의 식은 x에 대한 항등식이므로

$A+2B=5$, $-2A+B=0$

$\therefore A=1$, $B=2$

$$\therefore \int\frac{5x}{2x^2-3x-2}\,dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{x-2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+2\ln|x-2|+C$$

22 답 1) $\ln|x|$ 2) $\frac{1}{a}\ln|ax+b|$

3) ① 몫, 나머지 ② $B-A$, A, B

23 답 C는 적분상수일 때,

1) $-x\cos x+\sin x+C$ 2) $(x+1)e^x+C$

3) $x\ln x-x+C$ 4) $xe^{x+1}-e^{x+1}+C$

5) $\frac{1}{2}x^2\ln 2x-\frac{1}{4}x^2+C$

1) $f(x)=\boxed{x}$, $g'(x)=\boxed{\sin x}$로 놓으면

$f'(x)=\boxed{1}$, $g(x)=\boxed{-\cos x}$이므로

$$\int x\sin x\,dx=\boxed{-x\cos x}+\int\boxed{\cos x}\,dx$$
$$=\boxed{-x\cos x+\sin x+C}$$

2) $f(x)=x+2$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int(x+2)e^x\,dx=(x+2)e^x-\int e^x\,dx$$
$$=(x+2)e^x-e^x+C=(x+1)e^x+C$$

3) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int\ln x\,dx=x\ln x-\int x\times\frac{1}{x}\,dx$$
$$=x\ln x-x+C$$

4) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{x+1}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^{x+1}$이므로

$$\int xe^{x+1}\,dx=xe^{x+1}-\int e^{x+1}\,dx=xe^{x+1}-e^{x+1}+C$$

5) $f(x)=\ln 2x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$\int x\ln 2x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln 2x-\int\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln 2x-\frac{1}{4}x^2+C$$

24 답 C는 적분상수일 때,

1) $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$

2) $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$

3) $\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$

4) $(x^2-3x+3)e^x+C$

5) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

1) $f(x)=x^2$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=\boxed{2x}$, $g(x)=\boxed{\sin x}$이므로

$\int x^2 \cos x\,dx = \boxed{x^2 \sin x} - 2\int x \sin x\,dx$ ⋯ ㉠

한편, $\int x \sin x\,dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=\boxed{1}$, $v(x)=\boxed{-\cos x}$이므로

$$\int x \sin x\,dx = \boxed{-x \cos x} + \int \boxed{\cos x}\,dx$$
$$= \boxed{-x\cos x + \sin x} + C_1 \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int x^2 \cos x\,dx$$
$$= \boxed{x^2 \sin x} - 2\left(\boxed{-x\cos x+\sin x} + C_1\right)$$
$$= (x^2-2)\boxed{\sin x} + 2x\cos x + C$$

2) $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,dx \cdots ㉠$$

한편, $\int x e^{-x}\,dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int x e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C_1 \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1)$$
$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$
$$= -e^{-x}(x^2+2x+2) + C$$

3) $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2$이므로

$$\int x(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \int x \ln x\,dx \cdots ㉠$$

한편, $\int x \ln x\,dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $v(x)=\dfrac{1}{2}x^2$이므로

$$\int x \ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_1 \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int x(\ln x)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_1\right)$$
$$= \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$$

4) $f(x)=x^2-x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x-1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int (x^2-x)e^x\,dx = (x^2-x)e^x - \int (2x-1)e^x\,dx \cdots ㉠$$

$\int (2x-1)e^x\,dx$에서

$u(x)=2x-1$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int (2x-1)e^x\,dx = (2x-1)e^x - \int 2e^x\,dx$$
$$= (2x-3)e^x + C_1 \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int (x^2-x)e^x\,dx = (x^2-x)e^x - \{(2x-3)e^x + C_1\}$$
$$= (x^2-3x+3)e^x + C$$

5) $f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx \cdots ㉠$$

$\int e^x \cos x\,dx$에서

$u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx\right)$$
$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$\therefore \int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

25 답 $\boldsymbol{f(x)g(x)}$, $\boldsymbol{f'(x)g(x)}$

Ⅲ－2 정적분

pp. 111～120

26 답 1) $\dfrac{64}{3}$ 2) 1 3) $\dfrac{1}{2}\ln 5$ 4) $e^2-1+\dfrac{8}{\ln 3}$

1) $$\int_1^9 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \left[\boxed{\frac{2}{3}}x\sqrt{x} + 2\boxed{\sqrt{x}}\right]_1^9$$
$$= (18+\boxed{6}) - \left(\boxed{\frac{2}{3}}+2\right)$$
$$= \boxed{\frac{64}{3}}$$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x)\,dx = \Big[\sin x - \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0-1) = 1$$

3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{2x+3}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln|2x+3|\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 1)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\ln 5$

4) $\displaystyle\int_{0}^{2}(e^x+3^x)\,dx=\left[e^x+\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^2$

$\displaystyle=\left(e^2+\frac{9}{\ln 3}\right)-\left(1+\frac{1}{\ln 3}\right)$

$\displaystyle=e^2-1+\frac{8}{\ln 3}$

27 답 1) 6 2) 4 3) $2\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi$ 4) 0 5) 2

1) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{3}\frac{x^4}{x^2+1}\,dx-\int_{\sqrt{3}}^{3}\frac{1}{x^2+1}\,dx$

$\displaystyle=\int_{\sqrt{3}}^{3}\frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{3}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$

$\displaystyle=\int_{\sqrt{3}}^{3}(x^2-1)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{\sqrt{3}}^{3}$

$=(9-3)-(\sqrt{3}-\sqrt{3})=6$

2) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x-e^{2x})\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+e^{2x})\,dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\{(2\cos x-e^{2x})+(2\cos x+e^{2x})\}\,dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}4\cos x\,dx$

$\displaystyle=\Big[4\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=4$

3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\sec x+1)^2\,dx-\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}(\sec x-1)^2\,dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\sec x+1)^2\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\sec x-1)^2\,dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\{(\sec x+1)^2+(\sec x-1)^2\}\,dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\sec^2 x+2)\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x+1)\,dx$

$\displaystyle=2\Big[\tan x+x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\displaystyle=2\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi$

4) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=-1+1=0$

5) $\displaystyle\int_{2}^{8}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx-\int_{3}^{8}\frac{1}{\sqrt{y+1}}\,dy+\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{z+1}}\,dz$

$\displaystyle=\int_{2}^{8}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx-\int_{3}^{8}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$\displaystyle=\left(\int_{2}^{8}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx+\int_{8}^{3}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx\right)+\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$\displaystyle=\int_{2}^{3}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx+\int_{2}^{3}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{3}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx=\Big[2\sqrt{x+1}\Big]_0^3$

$=4-2=2$

28 답 1) 2 2) $e-3$ 3) $\pi-2+\ln 2$

1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\ln 2}f(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\boxed{0}}f(x)\,dx+\int_{\boxed{0}}^{\ln 2}f(x)\,dx$

$\displaystyle=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\boxed{0}}\boxed{\cos x}\,dx+\int_{\boxed{0}}^{\ln 2}\boxed{e^x}\,dx$

$\displaystyle=\Big[\boxed{\sin x}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\boxed{0}}+\Big[\boxed{e^x}\Big]_{\boxed{0}}^{\ln 2}$

$=\{0-(\boxed{-1})\}+(\boxed{e^{\ln 2}}-1)$

$=1+2-1$

$=\boxed{2}$

2) $\displaystyle\int_{-1}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{0}e^{-x}\,dx+\int_{0}^{\pi}(\cos x-\sin x)\,dx$

$\displaystyle=\Big[-e^{-x}\Big]_{-1}^{0}+\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\pi}$

$=(-1+e)+(-1-1)$

$=e-3$

3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{1}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx$

$\displaystyle=\int_{-\pi}^{0}(\sin x+1)\,dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x+1}\,dx$

$\displaystyle=\Big[-\cos x+x\Big]_{-\pi}^{0}+\Big[\ln(x+1)\Big]_0^1$

$=\pi-2+\ln 2$

29 답 1) 2 2) $2(\sqrt{2}-1)$ 3) $e+\frac{1}{e}-2$

1) $\sqrt{x}-1=0$에서 $\sqrt{x}=\boxed{1}$ $\quad\therefore x=\boxed{1}$

$$|\sqrt{x}-1|=\begin{cases}\sqrt{x}-1 & (x\geq\boxed{1})\\ -\sqrt{x}+1 & (\boxed{0}\leq x<\boxed{1})\end{cases}$$

$\displaystyle\therefore \int_{0}^{4}|\sqrt{x}-1|\,dx$

$\displaystyle=\int_{0}^{\boxed{1}}(-\sqrt{x}+1)\,dx+\int_{\boxed{1}}^{4}(\sqrt{x}-1)\,dx$

$\displaystyle=\left[\boxed{-\frac{2}{3}}x\sqrt{x}+x\right]_0^{\boxed{1}}+\left[\boxed{\frac{2}{3}}x\sqrt{x}-x\right]_{\boxed{1}}^{4}$

$\displaystyle=\left(\boxed{-\frac{2}{3}}+1\right)+\left\{\left(\boxed{\frac{2}{3}}\times 4\sqrt{4}-4\right)-\left(\boxed{\frac{2}{3}}-1\right)\right\}$

$=\boxed{2}$

2) $\cos x-\sin x=0$에서 $x=\frac{\pi}{4}\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

$$|\cos x-\sin x|=\begin{cases}\cos x-\sin x & \left(0\le x<\frac{\pi}{4}\right)\\ -\cos x+\sin x & \left(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x+\sin x)\,dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\sin x-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(-1+\sqrt{2})$$
$$=2(\sqrt{2}-1)$$

3) $e^x-1=0$에서 $e^x=1$ $\quad\therefore x=0$

$$|e^x-1|=\begin{cases}-e^x+1 & (x<0)\\ e^x-1 & (x\ge0)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}|e^x-1|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-e^x+1)\,dx+\int_0^1(e^x-1)\,dx$$
$$=\Big[-e^x+x\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^x-x\Big]_0^1=e+\frac{1}{e}-2$$

30

답 **1)** $\sqrt{2}$ **2)** $e-\frac{1}{e}$ **3)** 0

1) $y=\sin x$는 $\boxed{기}$함수, $y=\cos x$는 $\boxed{우}$함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)\,dx$$
$$=\boxed{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx\left(\because \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx=\boxed{0}\right)$$
$$=\boxed{2}\Big[\boxed{\sin x}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boxed{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{\sqrt{2}}$$

2) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$이라 하면

$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$이므로

$f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=2\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$
$$=\int_0^1(e^x+e^{-x})\,dx=\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1$$
$$=\left(e-\frac{1}{e}\right)-(1-1)=e-\frac{1}{e}$$

3) $f(x)=2^x-2^{-x}$이라 하면

$f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$

이므로 $f(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1}(2^x-2^{-x})\,dx=0$$

31

답 **1)** $b,\ a,\ F(b),\ F(a)$

2) ① k ② $\int_a^b f(x)dx,\ \int_a^b g(x)dx$ ③ $b,\ a$

3) ① $2\int_0^a f(x)dx$ ② 0

32

답 **1)** $\frac{1}{3}$ **2)** $\frac{14}{3}$ **3)** 1 **4)** $e-1$ **5)** $\frac{1}{2}$ **6)** $4-2\sqrt{3}$ **7)** $\frac{1}{2}$ **8)** $\frac{2}{3}$ **9)** 1 **10)** 2 **11)** $\frac{15}{4}$

1) $\boxed{x^2-3}=t$로 놓으면

$\boxed{2x}=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore x\,dx=\boxed{\frac{1}{2}}dt$

$x=2$일 때 $t=\boxed{1}$, $x=\sqrt{3}$일 때 $t=\boxed{0}$

$$\therefore \int_{\sqrt{3}}^{2}x\sqrt{x^2-3}\,dx=\boxed{\frac{1}{2}}\int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}}\sqrt{\boxed{t}}\,dt$$
$$=\boxed{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3}\boxed{t}\sqrt{t}\right]_{\boxed{0}}^{\boxed{1}}$$
$$=\frac{1}{3}(\boxed{1}-\boxed{0})=\boxed{\frac{1}{3}}$$

2) $2-x=t$로 놓으면

$-1=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore dx=-dt$

$x=1$일 때 $t=1$, $x=-2$일 때 $t=4$

$$\therefore \int_{-2}^{1}\sqrt{2-x}\,dx=-\int_4^1\sqrt{t}\,dt=\int_1^4\sqrt{t}\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^4$$
$$=\frac{2}{3}(4\sqrt{4}-1)$$
$$=\frac{14}{3}$$

3) $2x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면

$2=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore 2\,dx=dt$

$x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=\frac{5}{6}\pi$, $x=0$일 때 $t=-\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\cos t\,dt$$
$$=\Big[\sin t\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$$
$$=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

4) $x^2=t$로 놓으면

$2x=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore 2x\,dx=dt$

$x=1$일 때 $t=1$, $x=0$일 때 $t=0$

$$\therefore \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx=\int_0^1 e^t\,dt$$
$$=\Big[e^t\Big]_0^1=e-1$$

5) $\ln x=t$로 놓으면

$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore \frac{1}{x}dx=dt$

$x=e^2$일 때 $t=2$, $x=e$일 때 $t=1$

$$\therefore \int_e^{e^2}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\int_1^2\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$$

6) $\tan x-1=t$로 놓으면

$\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore \sec^2 x\,dx=dt$

$x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\sqrt{3}-1$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=0$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}2(\tan x-1)\sec^2x\,dx=\int_0^{\sqrt{3}-1}2t\,dt=\left[t^2\right]_0^{\sqrt{3}-1}=(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}$$

7) $\boxed{1+\sin x}=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\boxed{\cos x}=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore \boxed{\cos x}\,dx=dt$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=\boxed{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\boxed{\sin^2 x}\right)\cos x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\boxed{\sin x}\right)\cos x\,dx=\int_1^{\boxed{2}}\left(2-\boxed{t}\right)dt=\left[2t-\boxed{\frac{1}{2}t^2}\right]_1^{\boxed{2}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$이므로

$\sin x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\cos x=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore \cos x\,dx=dt$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int_0^1(1-t^2)\,dt=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

9) $e^x+1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore e^x\,dx=dt$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=\ln(2e-1)$일 때 $t=2e$

$$\therefore \int_0^{\ln(2e-1)}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_2^{2e}\frac{1}{t}dt=\left[\ln t\right]_2^{2e}=\ln 2e-\ln 2=1$$

10) $1+2x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore dx=\frac{1}{2}dt$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=9$

$$\int_0^4\frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx=\frac{1}{2}\int_1^9\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_1^9 t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{t}\right]_1^9=3-1=2$$

11) $2+\sin x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\cos x=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore \cos x\,dx=dt$

$x=-\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$, $x=0$일 때 $t=2$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(2+\sin x)^3\cos x\,dx=\int_1^2 t^3\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_1^2=\frac{15}{4}$$

33 답 $\boldsymbol{b,\ a,\ f(t)}$

34 답 1) **1** 2) $\boldsymbol{e}$ 3) **1** 4) $\boldsymbol{1-\frac{3}{e^2}}$ 5) **1** 6) $\boldsymbol{e^2+1}$ 7) $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

1) $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-\left[e^x\right]_0^1=e-(e-1)=1$$

2) $f(x)=1+x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1(1+x)e^x\,dx=\left[(1+x)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=2e-1-\left[e^x\right]_0^1=e$$

3) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\,dx=0+\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

4) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{2}{e^2}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{e^2}=1-\frac{3}{e^2}$$

5) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int_1^e \ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e 1\,dx$$
$$=e-\Big[x\Big]_1^e$$
$$=e-(e-1)=1$$

6) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=4x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=2x^2$이므로

$$\int_1^e 4x\ln x\,dx=\Big[2x^2\ln x\Big]_1^e-\int_1^e 2x\,dx$$
$$=2e^2-\Big[x^2\Big]_1^e$$
$$=e^2+1$$

7) $f(x)=\sin x$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos x\,dx=\Big[\sin^2 x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cos x\,dx$$
$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos x\,dx=\Big[\sin^2 x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos x\,dx=\frac{1}{4}$$

35 답 2

$f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\boxed{1}$, $g(x)=\boxed{e^x}$이므로

$$\int_0^a xe^x\,dx=\Big[\boxed{xe^x}\Big]_0^a-\int_0^a \boxed{e^x}\,dx$$
$$=a\boxed{e^a}-\Big[\boxed{e^x}\Big]_0^a=(\boxed{a-1})e^a+1$$

$\int_0^a xe^x\,dx=e^2+1$이므로

$(\boxed{a-1})e^a+1=e^2+1$, $(\boxed{a-1})e^a=e^2$

$\therefore a=\boxed{2}$

36 답 $1-\frac{2}{e}$

$$\int_0^2 f(x)\,dx-\int_{-2}^2 f(x)\,dx+\int_{-2}^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^{-2} f(x)\,dx+\int_{-2}^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 xe^{-x}\,dx$$

$u(x)=x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,dx$$
$$=-\frac{1}{e}+\Big[-e^{-x}\Big]_0^1=1-\frac{2}{e}$$

37 답 $2\ln 2-\frac{3}{2}$

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 (x-1)\,dx+\int_1^2 \ln x\,dx$$

이때,

$$\int_0^1 (x-1)\,dx=\Big[\frac{1}{2}x^2-x\Big]_0^1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}\ \cdots\ ㉠$$

한편, $\int_1^2 \ln x\,dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int_1^2 \ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^2-\int_1^2 1\,dx$$
$$=2\ln 2-\Big[x\Big]_1^2=2\ln 2-1\ \cdots\ ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 값은 $2\ln 2-\frac{3}{2}$

38 답 1) $e-\frac{1}{e}$ 2) e^3

1) $-1\le x\le 1$에서 $f(x)=1$이므로

$$\int_{-1}^1 e^x f(x)\,dx=\int_{-1}^1 e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_{-1}^1=e-\frac{1}{e}$$

2) $\boxed{x-1}=t$로 놓으면 $x=\boxed{t+1}$이고

$\boxed{1}=\frac{dt}{dx}$ $\quad\therefore dx=\boxed{dt}$

$x=2$일 때, $t=\boxed{1}$

$x=3$일 때, $t=\boxed{2}$

$$\int_2^3 e^x f(x-1)\,dx=\int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} e^{\boxed{t+1}} f(\boxed{t})\,dt$$
$$=\int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} \boxed{e^{t+1}}\,t\,dt$$

$u(t)=t$, $v'(t)=\boxed{e^{t+1}}$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\boxed{e^{t+1}}$이므로

$$\int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} \boxed{e^{t+1}}\,t\,dt=\Big[\boxed{te^{t+1}}\Big]_{\boxed{1}}^{\boxed{2}}-\int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} \boxed{e^{t+1}}\,dt$$
$$=(2e^3-e^2)-(e^3-e^2)$$
$$=\boxed{e^3}$$

39 답 $\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

40 답 1) $f(x)=\sin x+\dfrac{2}{1-\pi}$

2) $f(x)=e^x+2x-e^2-3$

1) $\boxed{\int_0^\pi f(t)dt}=k$($k$는 상수)로 놓으면

$f(x)=\sin x+\boxed{k}$이므로

$k=\int_0^\pi(\sin x+\boxed{k})\,dt=\left[\boxed{-\cos t}+kt\right]_0^\pi$

$=\boxed{2}+k\pi$

$\therefore k=\dfrac{2}{1-\boxed{\pi}}$

$\therefore f(x)=\boxed{\sin x+\dfrac{2}{1-\pi}}$

2) $\int_0^2 f(t)dt=k$(k는 상수)로 놓으면 $f(x)=e^x+2x+k$

$k=\int_0^2(e^t+2t+k)dt=\left[e^t+t^2+kt\right]_0^2=e^2+3+2k$

따라서 $k=-e^2-3$이므로 $f(x)=e^x+2x-e^2-3$

41 답 1) $f(x)=2e^{2x}+e^x$ 2) $f(x)=3^x\ln 3+\dfrac{1}{x}$

3) $f(x)=2\cos 2x-\sqrt{2}\cos x$

1) $\int_0^x f(t)\,dt=e^{2x}+e^x-2$ $\cdots$ ㉠

㉠에서 적분구간에 변수 x가 있으므로 양변을 x에 대하여 $\boxed{\text{미분}}$하면

$f(x)=(e^{2x}+e^x-2)'=\boxed{2e^{2x}+e^x}$

2) $\int_1^x f(t)\,dt=3^x+\ln x-3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3^x\ln 3+\dfrac{1}{x}$

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t)\,dt=\sin 2x+k\sin x$ $\cdots$ ㉠

㉠에 $x=\dfrac{\pi}{4}$를 대입하면

$0=\sin\dfrac{\pi}{2}+k\sin\dfrac{\pi}{4}$, $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}k=0$ $\quad\therefore k=-\sqrt{2}$

k의 값을 ㉠에 대입하면

$\int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t)\,dt=\sin 2x-\sqrt{2}\sin x$

이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\therefore f(x)=2\cos 2x-\sqrt{2}\cos x$

42 답 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x$

$xf(x)=x\ln x+\int_1^x f(t)dt$ $\cdots$ ㉠

㉠에서 적분구간에 변수 x가 있으므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+\boxed{x}f'(x)=\ln x+\boxed{1}+\boxed{f(x)}$

$\therefore \boxed{x}f'(x)=\ln x+\boxed{1}$

$x>0$이므로 $f'(x)=\dfrac{\ln x}{\boxed{x}}+\boxed{\dfrac{1}{x}}$

$f(x)=\int\left(\dfrac{\ln x}{\boxed{x}}+\boxed{\dfrac{1}{x}}\right)dx=\int\dfrac{\ln x}{\boxed{x}}dx+\boxed{\ln x}+C$

이때, $\int\dfrac{\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$ $\quad\therefore \dfrac{1}{x}dx=dt$

즉, $\int\dfrac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt=\dfrac{1}{2}t^2+C=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$

$\therefore f(x)=\boxed{\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x}+C$

㉠의 양변에 $x=\boxed{1}$을 대입하면 $f(1)=\boxed{0}$이므로 $C=\boxed{0}$

$\therefore f(x)=\boxed{\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x}$

43 답 $\dfrac{\pi}{2}$

$f'(x)=(1+\sin x)\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=-1$ 또는 $\cos x=0$

$0<x<\pi$이므로 $x=\dfrac{\pi}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 극댓값을 가지므로 $a=\dfrac{\pi}{2}$

44 답 1) $\dfrac{\pi^2}{2}$ 2) -2

1) $f(x)=x^2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to\pi}\dfrac{1}{x-\pi}\int_\pi^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to\pi}\dfrac{1}{x-\pi}\left[\boxed{F(t)}\right]_\pi^x=\lim_{x\to\pi}\dfrac{\boxed{F(x)}-\boxed{F(\pi)}}{x-\pi}$

$=\boxed{F'}(\pi)$

이때, $F'(t)=\boxed{f}(\pi)$이므로

$F'(t)=\boxed{f}(\pi)=\pi^2\boxed{\sin\dfrac{5}{6}\pi}=\boxed{\dfrac{\pi^2}{2}}$

2) $f(x)=x\cos\pi x$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1+h}^{1+3h}f(x)\,dx&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{1+h}^{1+3h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(1+3h)-F(1+h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(1+3h)-F(1+h)}{2h}\times2\\&=2F'(1)\end{aligned}$$

이때 $F'(x)=f(x)$이므로

$2F'(1)=2f(1)=-2$

45 답 1) $f(x)$ 2) $f(x+a)$, $f(x)$

46 답 1) $\ln 2$ 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 3) $\frac{4}{\pi}$ 4) $1-\frac{1}{e}$

1) $$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\boxed{n}}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\boxed{n}}}+\frac{1}{1+\frac{2}{\boxed{n}}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{\boxed{n}}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\boxed{n}}\,\frac{1}{1+\boxed{\frac{k}{n}}}=\int_0^{\boxed{1}}\frac{1}{1+\boxed{x}}\,dx\\&=\Big[\boxed{\ln(1+x)}\Big]_0^1=\boxed{\ln 2}\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}+\cdots+\sqrt{3n}}{n\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{3}{n}}+\sqrt{\frac{6}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{3n}{n}}\right)\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3k}{n}}\times\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{3x}\,dx\\&=\sqrt{3}\Big[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_0^1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\\&=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx\\&=\frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}-1}+e^{\frac{2}{n}-1}+\cdots+e^{\frac{n}{n}-1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}-1}=\int_0^1e^{x-1}\,dx\\&=\Big[e^{x-1}\Big]_0^1=1-\frac{1}{e}\end{aligned}$$

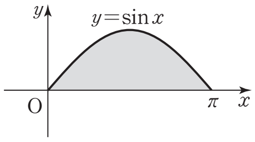
47 답 1) 1, 0 2) b, a 3) p, 0 4) $a+p$, a

Ⅲ-3 정적분의 활용

pp. 121~125

48 답 1) 2 2) e^3-1 3) 2 4) $\frac{1}{e}+e-2$

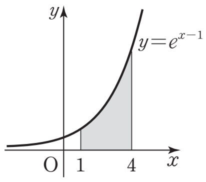
1) $0\le x\le\pi$일 때,



$\sin x\ge0$이므로

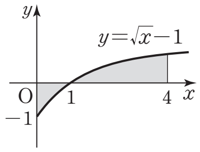
$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\pi}\sin x\,dx\\&=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}\\&=-\cos\pi-(-\cos 0)=2\end{aligned}$$

2) $e^{x-1}>0$이므로



$$\begin{aligned}S&=\int_1^4e^{x-1}\,dx\\&=\Big[e^{x-1}\Big]_1^4\\&=e^3-1\end{aligned}$$

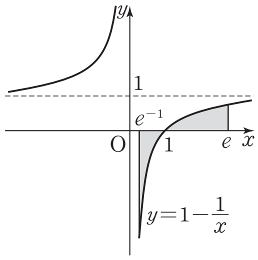
3) $0\le x<1$에서 $\sqrt{x}-1\le0$이고



$x\ge1$에서 $\sqrt{x}-1\ge0$이므로

$$\begin{aligned}S&=\int_0^4|\sqrt{x}-1|\,dx\\&=\int_0^1(1-\sqrt{x})\,dx\\&\quad+\int_1^4(\sqrt{x}-1)\,dx\\&=\Big[x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_0^1+\Big[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x\Big]_1^4\\&=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2\end{aligned}$$

4) $0<x<1$에서



$1-\frac{1}{x}<0$이고

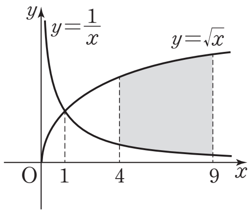
$x\ge1$에서

$1-\frac{1}{x}\ge0$이므로

$$\begin{aligned}S&=\int_{e^{-1}}^{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)dx\\&\quad+\int_1^e\left(1-\frac{1}{x}\right)dx\\&=\Big[\ln x-x\Big]_{e^{-1}}^{1}+\Big[x-\ln x\Big]_1^e\\&=\frac{1}{e}+e-2\end{aligned}$$

49 답 1) $\frac{38}{3}-2\ln\frac{2}{3}$ 2) $e+\frac{1}{e}-2$

1) 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$의



교점의 x좌표를 구하면

$\sqrt{x}=\boxed{\frac{1}{x}}$, $\boxed{x\sqrt{x}}=1$

$\therefore$ $x=\boxed{1}$

$4\le x\le9$일 때

$\sqrt{x}>\dfrac{1}{x}$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_4^9\left(\boxed{\sqrt{x}-\frac{1}{x}}\right)dx=\left[\boxed{\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\ln x}\right]_4^9$$

$$=(18-2\ln 3)-\left(\frac{16}{3}-2\ln 2\right)$$

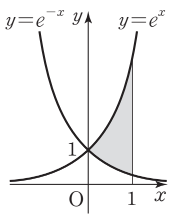
$$=\frac{\boxed{38}}{3}-\boxed{2\ln\frac{2}{3}}$$

2) 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$의 교점의 x좌표를 구하면

$e^x=e^{-x}$, $e^{2x}=1$ $\quad\therefore x=0$

$0\le x\le 1$일 때, $e^{-x}\le e^x$

따라서 구하는 넓이 S는



$$S=\int_0^1|e^x-e^{-x}|\,dx$$

$$=\int_0^1(e^x-e^{-x})\,dx$$

$$=\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1=\left(e+\frac{1}{e}\right)-2=e+\frac{1}{e}-2$$

50 답 $\dfrac{e}{2}-1$

$f(x)=e^x$이라 놓으면 $f'(x)=e^x$

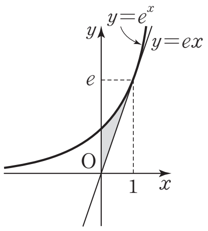
점 $(1, e)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=e$

점 $(1, e)$에서의 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1)$

$\therefore y=ex$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1(e^x-ex)\,dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=\frac{e}{2}-1$$

51 답 $e+1$

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고

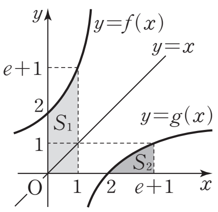
$\int_0^1 f(x)\,dx=S_1$, $\int_2^{e+1} g(x)\,dx=S_2$라 하자.

이때, S_2에 해당하는 부분을 직선 $\boxed{y=x}$에 대하여 대칭이동하면 [그림 2]와 같으므로

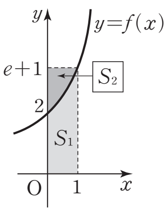
$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_2^{e+1} g(x)\,dx=S_1+S_2$$

$$=\boxed{1\times(e+1)}$$

$$=\boxed{e+1}$$



[그림 1]



[그림 2]

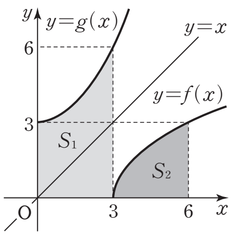
52 답 18

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고 $\int_0^3 g(x)\,dx=S_1$, $\int_3^6 f(x)\,dx=S_2$라 하자.

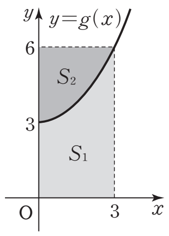
S_2에 해당하는 부분을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 [그림 2]와 같다.

$$\therefore \int_0^3 g(x)\,dx+\int_3^6 f(x)\,dx=S_1+S_2$$

$$=3\times 6=18$$



[그림 1]



[그림 2]

53 답 1) $\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx$ 2) $\displaystyle\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$

54 답 $e^{10}+49$

단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면 $S(x)=e^x+x$

이 입체도형의 부피를 V라고 하면

$$V=\int_0^{10}(e^x+x)\,dx=\left[e^x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{10}$$

$$=e^{10}+49$$

55 답 60

단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x)=\cos\pi x+4$

이 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{15}(\cos\pi x+4)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x+4x\right]_0^{15}=60$$

56 답 $\pi(2e^6+4e^3-3)$

높이 x에서 자른 단면은 반지름의 길이가 $(2e^x+1)$인 원이므로 그 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x)=\pi(2e^x+1)^2=\pi(4e^{2x}+4e^x+1)$

높이가 3일 때의 이 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\pi\int_0^3(4e^{2x}+4e^x+1)\,dx$$

$$=\pi\left[2e^{2x}+4e^x+x\right]_0^3$$

$$=\pi(2e^6+4e^3-3)$$

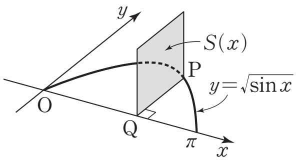
57 답 2

곡선

$y=\sqrt{\sin x}\ (0\le x\le \pi)$

위의 점

$\mathrm{P}\left(x,\ \boxed{\sqrt{\sin x}}\right)$에서



x축에 내린 수선의 발을 Q라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=\boxed{\sqrt{\sin x}}$

x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\left(\boxed{\sqrt{\sin x}}\right)^2=\boxed{\sin x}$

$V=\int_0^{\pi}\boxed{\sin x}\,dx=\left[\boxed{-\cos x}\right]_0^{\pi}=\boxed{2}$

58 답 $\int_a^b S(x)\,dx$

59 답 1) 1 2) 2

1) $t=0$부터 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} v\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\boxed{\cos t}\,dt$$
$$=\left[\boxed{\sin t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0$$
$$=\boxed{1}$$

2) $t=0$부터 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\pi}|v|\,dt=\int_0^{\pi}\boxed{|\cos t|}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\boxed{\cos t}\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\boxed{-\cos t}\right)dt$$
$$=\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)-\left(\sin \pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=1-(-1)=\boxed{2}$$

60 답 1) $\frac{2}{e}-1$ 2) $2-\frac{2}{e}$

먼저 부분적분법을 이용하여 $\int \ln t\,dt$를 구해보자.

$f(t)=\ln t$, $g'(t)=1$로 놓으면

$f'(t)=\frac{1}{t}$, $g(t)=t$이므로

$$\int \ln t\,dt=t\ln t-\int\left(t\times\frac{1}{t}\right)dt=t\ln t-t+C$$

1) $t=\frac{1}{e}$부터 $t=1$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} v\,dt=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln t\,dt$$
$$=\left[t\ln t-t\right]_{\frac{1}{e}}^{1}=\frac{2}{e}-1$$

2) $t=\frac{1}{e}$부터 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|v|\,dt=\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln t|\,dt$$
$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln t\,dt+\int_1^{e}\ln t\,dt$$
$$=-\left(\frac{2}{e}-1\right)+1=2-\frac{2}{e}$$

61 답 $\frac{15}{2}$

$\frac{dx}{dt}=1-t$, $\frac{dy}{dt}=2t^{\frac{1}{2}}$이므로

$t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 실제로 움직인 거리는

$$\int_0^3\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^3\sqrt{(1-t)^2+\left(2t^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^3\sqrt{(1+t)^2}\,dt=\int_0^3(1+t)\,dt$$
$$=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_0^3=3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$$

62 답 1) $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$ 2) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로 곡선의 길이 l은

$$l=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}}\sqrt{1+\left(\boxed{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}(e^x+2+e^{-x})^2}\,dx$$
$$=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}\left(\boxed{e^x+e^{-x}}\right)^2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(e^x+e^{-x})\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\boxed{e^x-e^{-x}}\right]_{\boxed{0}}^{\boxed{1}}$$
$$=\boxed{\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)}$$

2) $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$이므로

곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{9x+4}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}(9x+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$$

63 답 1) πr 2) $\sqrt{2}(1-e^{-\pi})$

1) $\dfrac{dx}{dt}=\boxed{-r\sin t}$, $\dfrac{dy}{dt}=\boxed{r\cos t}$이므로

곡선의 길이 l은

$$l=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}r\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt$$

$$=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}}\boxed{r}\,dt$$

$$=\Big[rt\Big]_0^{\pi}=\boxed{\pi r}$$

2) $\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=-e^{-t}(\sin t-\cos t)$,

$\dfrac{dy}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=-e^{-t}(\sin t+\cos t)$

이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$=e^{-2t}\{(\sin t-\cos t)^2+(\sin t+\cos t)^2\}$$

$$=2e^{-2t}(\sin^2 t+\cos^2 t)=2e^{-2t}$$

$0\le t\le\pi$일 때, 곡선의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{2e^{-2t}}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{2}e^{-t}\,dt$$

$$=\Big[-\sqrt{2}e^{-t}\Big]_0^{\pi}=\sqrt{2}(1-e^{-\pi})$$

64 답 1) ① $f(t)\,dt$ ② $|f(t)|$ 2) $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

3) $\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ 또는 $\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$

4) $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$ 또는 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

단원 총정리 문제 정답 Ⅲ 적분법

pp. 126~127

01 ③	02 ①	03 ④	04 0	05 ②
06 ③	07 ④	08 42	09 ④	10 ⑤
11 $\frac{5}{2}+2\ln 2$		12 ②	13 $6\sqrt{3}$	
14 $-\frac{1}{2}+\ln 3$				

01 답 ③

$f'(t)=1-\dfrac{2}{t}$, 즉 $f'(x)=1-\dfrac{2}{x}$이므로

$$f(x)=\int\left(1-\frac{2}{x}\right)dx=x-2\ln x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 0)$을 지나므로 $f(1)=0$

$1-2\ln 1+C=0$ $\quad\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=x-2\ln x-1$이므로

$f(e)=e-2\ln e-1=e-3$

02 답 ①

$$f(x)=\int\frac{2\cos^2 x}{1+\sin x}dx=\int\frac{2(1-\sin^2 x)}{1+\sin x}dx$$

$$=\int\frac{2(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x}dx$$

$$=\int 2(1-\sin x)\,dx$$

$$=2x+2\cos x+C$$

$f(0)=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $f(0)=2+C=\dfrac{\pi}{3}$ $\quad\therefore C=-2+\dfrac{\pi}{3}$

따라서 $f(x)=2x+2\cos x-2+\dfrac{\pi}{3}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\times\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{3}-2+\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\pi+2\times\frac{1}{2}-2+\frac{\pi}{3}=\pi-1$$

03 답 ④

$(e^{2x}+3)'=2e^{2x}$이고 $e^{2x}+3>0$이므로

$$f(x)=\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(e^{2x}+3)'}{e^{2x}+3}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3)+C$$

$f(0)=\ln 2$이므로

$\dfrac{1}{2}\ln 4+C=\ln 2+C=\ln 2$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+3)$이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln(e+3)$$

04 답 0

$\dfrac{x-1}{x^2-8x+15}=\dfrac{A}{x-5}+\dfrac{B}{x-3}$로 놓으면

$$\dfrac{x-1}{x^2-8x+15}=\dfrac{A(x-3)+B(x-5)}{(x-5)(x-3)}$$
$$=\dfrac{(A+B)x+(-3A-5B)}{(x-5)(x-3)}$$

위의 식은 x에 대한 항등식이므로

$A+B=1$, $-3A-5B=-1$

$\therefore A=2$, $B=-1$

$$f(x)=\int\dfrac{x-1}{x^2-8x+15}dx$$
$$=\int\left(\dfrac{2}{x-5}-\dfrac{1}{x-3}\right)dx$$
$$=2\ln|x-5|-\ln|x-3|+C$$

$f(6)=-\ln 3$이므로

$f(6)=2\ln 1-\ln 3+C=-\ln 3$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=2\ln|x-5|-\ln|x-3|$이므로

$f(7)=2\ln 2-\ln 4=0$

05 답 ②

$\int e^x\cos x\,dx$에서

$f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx \qquad \cdots ㉠$$

$\int e^x\sin x\,dx$에서

$u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx \qquad \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x\,dx+\left(e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx\right)$$

$$\therefore h(x)=\int e^x\cos x\,dx=\dfrac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$$

$h(0)=\dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{1}{2}+C=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $h(x)=\dfrac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$이므로

$h(\pi)=\dfrac{1}{2}e^\pi(\cos\pi+\sin\pi)=-\dfrac{1}{2}e^\pi$

06 답 ③

ㄱ. $F(x)=x^2f(x)$라 하면

$F(-x)=(-x)^2f(-x)=x^2\cdot\{-f(x)\}=-F(x)$

이므로 $F(x)$는 기함수이다.

$\therefore \int_{-1}^{1}x^2f(x)\,dx=0$

ㄴ. $G(x)=\tan f(x)$라 하면

$$G(-x)=\tan f(-x)=\tan(-f(x))$$
$$=-\tan f(x)=-G(x)$$

이므로 $G(x)$는 기함수이다.

$\therefore \int_{-1}^{1}\tan f(x)\,dx=0$

ㄷ. $H(x)=(e^x-e^{-x})f(x)$라 하면

$$H(-x)=(e^{-x}-e^x)f(-x)=(e^{-x}-e^x)\{-f(x)\}$$
$$=(e^x-e^{-x})f(x)=H(x)$$

이므로 $H(x)$는 우함수이다.

$\therefore \int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})f(x)\,dx=2\int_0^1(e^x-e^{-x})f(x)\,dx$

따라서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07 답 ④

$$\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{x^2+5x+6}dx=\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\Big[\ln|x+2|-\ln|x+3|\Big]_{-1}^{0}$$
$$=(\ln 2-\ln 3)-(\ln 1-\ln 2)$$
$$=\ln\dfrac{4}{3}=\ln\dfrac{b}{a}$$

따라서 $a=3$, $b=4$이므로 $a+b=7$

08 답 42

$3x-1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$3=\dfrac{dt}{dx}$ $\qquad\therefore dx=\dfrac{1}{3}dt$

$x=1$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=5$

$$\therefore \int_1^2\sqrt{3x-1}f(3x-1)\,dx=\dfrac{1}{3}\int_2^5\sqrt{t}f(t)dt \cdots ㉠$$

구간 $[2, 5]$에서 $f(x)=x$이므로 ㉠을 구하면

$$\dfrac{1}{3}\int_2^5 t\sqrt{t}\,dt=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_2^5$$
$$=\dfrac{2}{15}(25\sqrt{5}-4\sqrt{2})$$
$$=\dfrac{50\sqrt{5}-8\sqrt{2}}{15}$$

따라서 $a=50$, $b=-8$이므로

$a+b=42$

09 답 ④

ㄱ. $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x^3$으로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{4}x^4$이므로

$$\int_1^2 x^3\ln x\,dx=\left[\dfrac{1}{4}x^4\ln x\right]_1^2-\int_1^2\dfrac{1}{4}x^3\,dx$$
$$=4\ln 2-\left[\dfrac{1}{16}x^4\right]_1^2$$
$$=4\ln 2-\dfrac{15}{16}\ \text{(거짓)}$$

ㄴ. $f(x)=x$, $g'(x)=\sin 2x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4} \text{ (참)}$$

ㄷ. $y=x$는 기함수이고 $y=\cos x$는 우함수이므로

$y=x\cos x$는 기함수이다.

또, $y=x^3$도 기함수이다.

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi}(x\cos x+x^3)\,dx=0 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

10 답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^3\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1(2+3x)^3\,dx=\left[\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}(2+3x)^4\right]_0^1$$

$$=\frac{5^4-2^4}{12}=\frac{625-16}{12}=\frac{203}{4}=\frac{q}{p}$$

따라서 $p=4$, $q=203$이므로 $p+q=207$

11 답 $\frac{5}{2}+2\ln 2$

$g(t)=t+1+\frac{2}{t}$,

$\int g(t)\,dt=G(t)+C$ (C는 적분상수)라 하면,

$$f(x)=\int_x^{x+1}g(t)\,dt=G(x+1)-G(x)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=G'(x+1)-G'(x)=g(x+1)-g(x)$$

$$=\left(x+1+1+\frac{2}{x+1}\right)-\left(x+1+\frac{2}{x}\right)$$

$$=1+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x}=\frac{x^2+x-2}{x(x+1)}=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

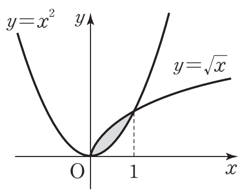
즉, $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f(1)=\int_1^2\left(t+1+\frac{2}{t}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}+t+2\ln t\right]_1^2$$

$$=\frac{5}{2}+2\ln 2$$

12 답 ②

두 곡선 $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$의 교점의 x좌표를 구하면



$x^2=\sqrt{x}$, $x^4-x=0$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

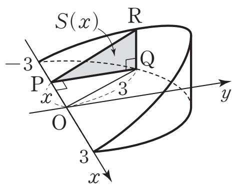
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

13 답 $6\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 작은 입체도형의 밑면의 중심을 원점 O로 하여 좌표축을 정한다. 점 P$(x, 0)$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면을 $\triangle$PQR라 할 때 $\overline{PQ}=\sqrt{9-x^2}$이므로



$$\overline{QR}=\overline{PQ}\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{3}}$$

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\times\sqrt{9-x^2}\times\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{3}}=\frac{9-x^2}{2\sqrt{3}}$$

따라서 작은 입체도형의 부피는

$$\int_{-3}^{3}\frac{9-x^2}{2\sqrt{3}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^3(9-x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=6\sqrt{3}$$

14 답 $-\frac{1}{2}+\ln 3$

곡선의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-(1-x^2)+2}{1-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{-1-\frac{2}{(x+1)(x-1)}\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=\left[-x+\ln|x+1|-\ln|x-1|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}+\ln 3$$