정답 및 해설

I 경우의 수

II 확률

III 통계

I. 경우의 수

1. 여러 가지 순열

유형 .... pp.12~20

001 정답 (1) **120** (2) **36** (3) **12**

(1) 6명의 학생이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$(가지)

(2) 이웃하여 앉는 여학생 3명을 한 사람으로 생각하면

4명이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!$(가지)

그 각각의 경우에 대하여 여학생 3명이 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $3!$가지

따라서 구하는 경우의 수는 $3!\times 3!=36$(가지)

(3) 먼저 남학생 3명을 앉힌 후 그 사이사이에 여학생 3명을 앉히면 되므로

남학생 3명이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!$(가지) ← 원순열의 수

그 사이사이에 여학생 3명이 앉는 경우의 수는 $3!$가지 직순열의 수

따라서 구하는 경우의 수는 $2!\times 3!=12$(가지)

002 정답 (1) **4** (2) **2** (3) **2**

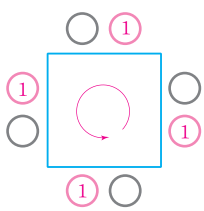
8명의 학생을 일렬로 세우는 순열(직순열)의 수는 $8!$가지

그 각각의 경우에 대하여

(1) 정사각형 모양의 탁자에 배열하여 회전시켰을 때 일치하는 배열의 개수는 4

따라서 구하는 경우의 수는

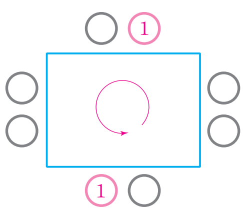
$\dfrac{8!}{4}$가지 $\quad\therefore a=4$



(2) 직사각형 모양의 탁자에 배열하여 회전시켰을 때 일치하는 배열의 개수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

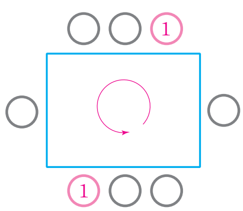
$\dfrac{8!}{2}$가지 $\quad\therefore b=2$



(3) 직사각형 모양의 탁자에 배열하여 회전시켰을 때 일치하는 배열의 개수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

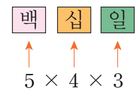
$\dfrac{8!}{2}$가지 $\quad\therefore c=2$



003 정답 (1) **60** (2) **125** (3) **100**

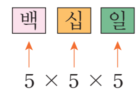
(1) 구하는 자연수의 개수는 5개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_5P_3=5\times 4\times 3=60$(가지)



(2) 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_3=5^3=125$(가지)



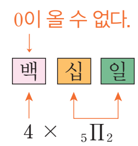
(3) 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이다.

십의 자리와 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4 모두 올 수 있다. 즉, 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_2=5^2=25$(가지)

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\times 25=100$(가지)

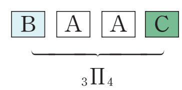


004 정답 (1) **81** (2) **16** (3) **64**

(1) 택한 문자를 차례로 나열하여

BAAC, ACCB, ABAB, ⋯

와 같이 나타낼 수 있다.



즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수이므로

$_3\Pi_4=3^4=81$(가지)

(2) 각 학생에게 배정된 반을 차례로 나열하면

ABBA, BBAB, AAAA, ⋯

와 같이 나타낼 수 있다.

즉, 구하는 경우의 수는 두 문자 A, B 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_4=2^4=16$(가지)

(3) 서로 다른 4개의 바구니를 각각 A, B, C, D라고 하면, 서로 다른 3개의 공이 들어가는 바구니를 차례대로

ABD, BCC, DBB, ⋯

와 같이 나타낼 수 있다.

즉, 구하는 경우의 수는 네 문자 A, B, C, D 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_4\Pi_3=4^3=64$(가지)

005 정답 (1) **50** (2) **10**

(1) (i) $\boxed{1}\square\square\square\square\square$인 경우

나머지 다섯 자리에 0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 순열이므로

$\dfrac{5!}{2!2!}=30$(개) ← 같은 것이 2개, 2개

(ii) $\boxed{2}\square\square\square\square\square$인 경우

나머지 다섯 자리에 0, 1, 1, 1, 2를 일렬로 배열하는 순열이므로

$\dfrac{5!}{3!}=20$(개) ← 같은 것이 3개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$30+20=50$(개)

다른 풀이

6개의 숫자 0, 1, 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!2!}=60$(개)

$\boxed{0}\square\square\square\square\square$인 경우의 수는 나머지 다섯 자리에 1, 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하면 되므로 $\dfrac{5!}{3!2!}=10$(개)

따라서 구하는 자연수의 개수는 $60-10=50$(개)

(2) 빨간색 깃발을 a, 노란색 깃발을 b로 나타내면

a, a, a, b, b

이고, 만들 수 있는 신호의 가짓수는 이를 일렬로 배열하는 순열의 수이므로

$\dfrac{5!}{3!2!}=10$(가지) ← 같은 것이 3개, 2개

006 정답 (1) **360** (2) **180**

(1) 6개의 문자 f, l, o, w, e, r 중에서 순서가 정해진 두 문자 e와 o를 모두 같은 문자 e로 보고 f, l, w, r, e, e를 한 줄로 나열한다.

이때, 각 배열에서 첫 번째 e는 e 그대로, 두 번째 e는 o로 바꾸어 주면 항상 e가 o보다 앞에 오게 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 f, l, w, r, e, e를 배열하는 순열의 수와 같고, 이때 같은 것이 2개이므로

$\dfrac{6!}{2!}=360$(가지)

(2) 각각 순서가 정해진 두 문자 e와 o는 모두 같은 문자 e로, l과 r는 모두 같은 문자 r로 보고 f, w, r, r, e, e를 한 줄로 나열한다.

이때, 각 배열에서 두 번째 e는 o로 바꾸고, 첫 번째 r는 l로 바꾸어 주면 항상 e는 o보다 앞에 오고, r는 l보다 뒤에 오게 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 f, w, r, r, e, e를 배열하는 순열의 수와 같고, 이때 같은 것이 2개, 2개이므로

$\dfrac{6!}{2!2!}=180$(가지)

007 정답 (1) **56** (2) **24** (3) **26**

(1) A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가려면 → 방향으로 5번, ↓ 방향으로 3번 가야 한다.

즉, 5개의 →와 3개의 ↓을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다.

따라서 구하는 방법의 수는 같은 것이 5개, 3개이므로

$\dfrac{8!}{5!3!}=56$(가지)

(2) (i) A지점에서 P지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 3개의 →와 1개의 ↓을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{3!}=4$(가지)

(ii) P지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 2개의 →와 2개의 ↓을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times6=24$(가지)

(3) A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 전체 방법의 수에서 A지점에서 Q지점을 거쳐 B지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 빼면 된다.

A지점에서 Q지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{5!}{3!2!}=10$(가지)

Q지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$(가지)

A지점에서 Q지점을 거쳐 B지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$10\times3=30$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는 $56-30=26$(가지)

확인문제 ······ pp.12~20

001 정답 (1) **48** (2) **24**

(1) 이웃하여 앉는 A, B를 한 사람으로 생각하면 5명이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!$(가지)

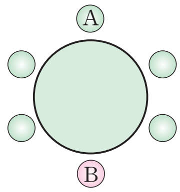
그 각각의 경우에 대하여 A, B가 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2!$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4!\times2!=48$(가지)

(2) A, B가 원형의 탁자에 마주 보고 앉으면 나머지 4명은 A, B를 기준으로 한 줄로 배열하는 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는

$4!=24$(가지)



002 정답 144

안쪽에 있는 4개의 영역에 홀수 1, 3, 5, 7을 써넣는 경우의 수는 서로 다른 4개를 둥글게 배열하는 원순열의 수이므로

$(4-1)!=3!=6$(가지)

그 각각에 대하여 바깥쪽에 있는 4개의 영역에 짝수 2, 4, 6, 8을 써넣는 경우의 수는

$4!=24$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$(가지)

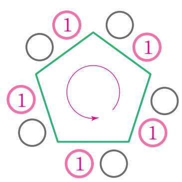
003 정답 ①

10명의 학생을 일렬로 세우는 순열(직순열)의 수는 $10!$

그 각각의 경우에 대하여 주어진 정오각형 모양의 탁자에 배열하여 회전시켰을 때 일치하는 배열의 개수는 5

따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{10!}{5}=\dfrac{10\times9!}{5}=2\times9!$(가지)



004 정답 5

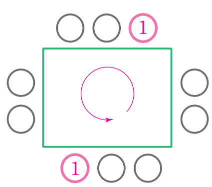
10명의 학생을 일렬로 세우는 순열(직순열)의 수는 $10!$

그 각각의 경우에 대하여 주어진 직사각형 모양의 탁자에 배열하여 회전시켰을 때 일치하는 배열의 개수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{10!}{2}=\dfrac{10\times9!}{2}=5\times9!$(가지)

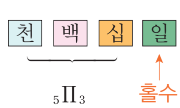
$\therefore n=5$



005 정답 375

일의 자리에는 홀수가 와야 하므로 1, 3, 5의 3가지

십의 자리, 백의 자리, 천의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5 모두 올 수 있으므로 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.



즉, $_5\Pi_3=5^3=125$(가지)

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\times125=375$(가지)

006 정답 162

만의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2의 2가지

나머지 네 개의 자리에는 0, 1, 2 모두 올 수 있으므로 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같다. 즉, $_3\Pi_4=3^4=81$(가지)

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2\times81=162$(가지)

007 정답 (1) 24 (2) 64

(1) 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로

$_4P_3=4\times3\times2=24$(개)

(2) 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수이므로

$_4\Pi_3=4^3=64$(개)

008 정답 8

두 명의 학생을 A, B라고 할 때, 각 볼펜을 받는 학생을 차례로 나열하면

ABB, ABA, AAA, …

와 같이 나타낼 수 있다.

즉, 구하는 경우의 수는 두 개의 문자 A, B 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_3=2^3=8$(가지)

009 정답 (1) 60 (2) 18

(1) (i) $\boxed{1}\square\square\square\square\square$인 경우

나머지 다섯 자리에 0, 0, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 순열이므로

$\dfrac{5!}{2!2!}=30$(개) ← 같은 것이 2개, 2개

(ii) $\boxed{2}\square\square\square\square\square$인 경우

나머지 다섯 자리에 0, 0, 1, 1, 2를 일렬로 배열하는 순열이므로

$\dfrac{5!}{2!2!}=30$(개) ← 같은 것이 2개, 2개

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$30+30=60$(개)

다른 풀이

(전체 경우의 수)−(맨 앞에 0이 오는 경우의 수)

$=\dfrac{6!}{2!2!2!}-\dfrac{5!}{2!2!}$

$=90-30=60$(개)

(2) (i) 1□□□□1인 경우

나머지 네 자리에 0, 0, 2, 2를 일렬로 배열하는 순열이므로

$\frac{4!}{2!2!}=6$(개) ← 같은 것이 2개, 2개

(ii) 2□□□□1인 경우

나머지 네 자리에 0, 0, 1, 2를 일렬로 배열하는 순열이므로

$\frac{4!}{2!}=12$(개) ← 같은 것이 2개

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+12=18$(개)

010 정답 (1) **120** (2) **60**

(1) d, e, e, e, l, t에서 같은 것이 3개이므로 구하는 순열의 수는

$\frac{6!}{3!}=120$(개)

(2) b, a, a, a, n, n에서 같은 것이 3개, 2개이므로 구하는 순열의 수는

$\frac{6!}{3!2!}=60$(개)

011 정답 **20**

5개의 문자 a, b, c, d, e 중에서 순서가 정해진 세 문자 a, b, c를 모두 같은 문자 a로 보고 a, a, a, d, e를 한 줄로 나열한다.

이때, 각 배열에서 첫 번째 a는 a 그대로, 두 번째 a는 b로, 세 번째 a는 c로 바꾸어 주면 항상 a는 b보다 앞에 오고 c는 b보다 뒤에 오게 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 a, a, a, d, e를 배열하는 순열의 수와 같고, 이때 같은 것이 3개이므로

$\frac{5!}{3!}=20$(가지)

012 정답 **210**

7개의 문자 m, i, r, a, c, l, e 중에서 자음인 m, r, c, l은 알파벳 순서인 c, l, m, r로 나열되어야 하므로 c, l, m, r를 모두 같은 문자 m으로 보고 m, m, m, m, i, a, e를 한 줄로 나열한다.

이때, 각 배열에서 첫 번째 m은 c, 두 번째 m은 l, 네 번째 m은 r로 바꾸어 주면 자음은 항상 알파벳 순서로 나열된다.

따라서 구하는 경우의 수는 m, m, m, m, i, a, e를 배열하는 순열의 수와 같고, 이때 같은 것이 4개이므로

$\frac{7!}{4!}=210$(가지)

013 정답 (1) **35** (2) **17**

(1) A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 4개의 →와 3개의 ↑을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

$\frac{7!}{4!3!}=35$(가지)

(2) A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 전체 방법의 수에서 A지점에서 P지점을 거쳐 B지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 빼면 된다.

A지점에서 P지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$(가지)

P지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$(가지)

이므로 A지점에서 P지점을 거쳐 B지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$6\times3=18$(가지)

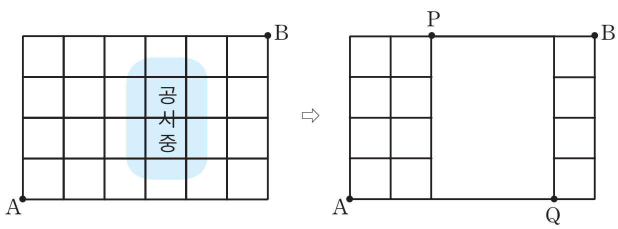
따라서 구하는 방법의 수는 $35-18=17$(가지)

014 정답 **20**

A지점에서 B지점까지 최단 거리로 갈 때, 지날 수 없는 도로를 지우면 다음 그림과 같이

A → P → B 또는 A → Q → B

로 이동해야 한다.



(i) A → P → B로 가는 방법의 수는

$\frac{6!}{2!4!}\times1=15$(가지)

(ii) A → Q → B로 가는 방법의 수는

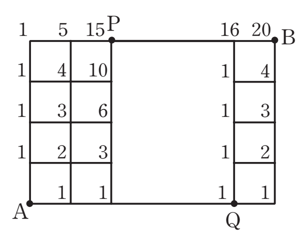
$1\times\frac{5!}{4!}=5$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $15+5=20$(가지)

다른 풀이

최단 경로의 수를 중간에 이르는 각 교차점까지의 경로의 수를 더하여 구할 수 있다.

[바른개념 수학(하) p.199 참조]



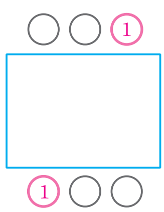
연습문제 I pp.21~23

015 정답 30
가운데의 사각형을 칠하는 경우의 수는 5
그 각각의 경우에 대하여 나머지 도형을 칠하는 경우의 수는
$(4-1)!=6$(가지)
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times6=30$(가지)

016 정답 96
부부를 묶어서 각각 한 사람으로 보면 모두 4명인 경우와 같고, 4명을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(4-1)!=6$(가지)
그 각각의 경우에 대하여 네 쌍의 부부가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!\times2!\times2!\times2!=16$(가지)
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times16=96$(가지)

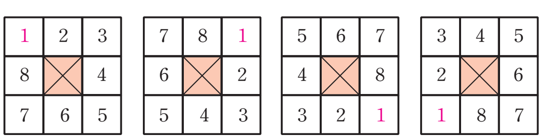
017 정답 ③
먼저 다섯 개의 면에 칠하는 색 5가지를 선택하는 방법의 수는
${}_6C_5=6$(가지)
밑면에 칠할 색을 택하는 방법이 5가지, 그 각각에 대해 옆면에 4가지 색을 칠하는 방법의 수는 원순열의 수이므로
$(4-1)!$ 가지
$\therefore\ {}_6C_5\times5\times(4-1)!=180$(가지)

018 정답 ④
6명의 학생을 일렬로 세우는 순열(직순열)의 수는 $6!$
그 각각의 경우에 대하여 주어진 직사각형 모양의 탁자에 배열하여 회전시켰을 때 일치하는 배열의 개수는 2



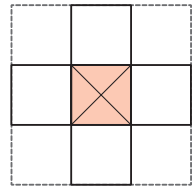
따라서 구하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{2}=360$(가지)

019 정답 ②
8개의 색을 일렬로 배열하는 순열(직순열)의 수는 $8!$
그 각각의 경우에 대하여 둘레에 있는 8개의 칸에 배열하여 회전시켰을 때 일치하는 배열의 개수는 4



따라서 구하는 경우의 수는
$\dfrac{8!}{4}=\dfrac{8\times7!}{4}=2\times7!$(가지)

다른 풀이



먼저 가운데 칸과 인접한 4개의 칸을 칠한 후, 나머지 네 모퉁이 칸을 칠하자.
가운데 칸과 인접한 4개의 칸을 칠할 색을 택하는 경우의 수는 ${}_8C_4$
택한 4개의 색을 인접한 4개의 칸에 칠하는 방법의 수는 원순열의 수이므로
$(4-1)!=3!$(가지)
나머지 4개의 색을 네 모퉁이 칸에 칠하는 방법은 $4!$가지
따라서 구하는 경우의 수는
$${}_8C_4\times3!\times4!={}_8P_4\times3!=\frac{8!}{4}=2\times7!$$

020 정답 16
네 통의 편지 a, b, c, d가 들어가는 우체통을
ABAB, BAAA, BABB, ⋯
와 같이 나타낼 수 있다.
즉, 구하는 경우의 수는 두 문자 A, B 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_4=2^4=16$(가지)

021 정답 (1) 27 (2) 60
(1) ○□◇○와 같은 배열에서
(i) 양 끝에 오는 문자를 정하는 경우의 수는 a, b, c의 3가지
(ii) 가운데 두 곳에 올 문자를 정하는 방법의 수는 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수이므로
${}_3\Pi_2=3^2=9$(개)
따라서 구하는 문자열의 개수는
$3\times9=27$(개)
(2) 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 만들 수 있는 문자열의 개수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$(개)
이때, 다음과 같이 a가 연속되어 있는 경우를 제외해야 한다.
(i) a가 2개 연속되는 경우
aaba, *aabb*, *aabc*, *aaca*, *aacb*, *aacc*, *baab*, *baac*, *caab*, *caac*, *abaa*, *acaa*, *bbaa*, *bcaa*, *cbaa*, *ccaa*의 16개
(ii) a가 3개 연속되는 경우
aaab, *aaac*, *baaa*, *caaa*의 4개
(iii) a가 4개 연속되는 경우
*aaaa*의 1개
따라서 문자 a가 2개 이상 연속되지 않는 문자열의 개수는
$81-(16+4+1)=60$(개)

다른 풀이

(ⅰ) a가 없는 경우

□□□□의 □에 b, c 중에서 중복을 허용하여 만드는 문자열의 개수는 b, c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 경우의 수이므로 ${}_2\Pi_4=2^4=16$(개)

(ⅱ) a가 1개 있는 경우

a□□□, □a□□, □□a□, □□□a의 4가지이고, □에 b, c 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수이므로 $4\times{}_2\Pi_3=4\times2^3=32$(개)

(ⅲ) a가 2개 있는 경우

a□a□, a□□a, □a□a의 3가지이고, □에 b, c 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우의 수이므로 $3\times{}_2\Pi_2=3\times2^2=12$(개)

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $16+32+12=60$(개)

022 정답 500

천의 자리에 2, 4, 6, 8 네 가지의 숫자가 올 수 있고, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 0, 2, 4, 6, 8 다섯 가지 숫자가 올 수 있으므로

천	백	십	일
↑ 4가지	$\underbrace{\quad\quad\quad}_{{}_5\Pi_3\text{가지}}$		

따라서 구하는 수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_3=4\times5^3=500$(개)

023 정답 20

(ⅰ) 2, 2, 2, 3으로 만들 때 $\frac{4!}{3!}=4$(개)

(ⅱ) 2, 2, 2, 6으로 만들 때 $\frac{4!}{3!}=4$(개)

(ⅲ) 2, 2, 3, 6으로 만들 때 $\frac{4!}{2!}=12$(개)

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4+4+12=20$(개)

024 정답 (1) 560 (2) 140

(1) 같은 것이 각각 3개, 2개, 3개이므로 만들 수 있는 서로 다른 장식물의 개수는

$\frac{8!}{3!2!3!}=560$(개) ← 같은 것이 3개, 2개, 3개

(2) (ⅰ) ♡□□□□□□♡인 경우 : ♡▣▣♣♣♣를 배열하는 순열의 수이므로

$\frac{6!}{2!3!}=60$(개) ← 같은 것이 2개, 3개

(ⅱ) ♣□□□□□□♣인 경우: ♡♡♡▣▣♣를 배열하는 순열의 수이므로

$\frac{6!}{3!2!}=60$(개) ← 같은 것이 3개, 2개

(ⅲ) ▣□□□□□□▣인 경우: ♡♡♡♣♣♣를 배열하는 순열의 수이므로

$\frac{6!}{3!3!}=20$(개) ← 같은 것이 3개, 3개

따라서 구하는 개수는 $60+60+20=140$(개)

025 정답 (1) 840 (2) 420

(1) m, m, m, a, x, i, u에서 같은 것이 3개이므로

$\frac{7!}{3!}=840$

(2) m, m, m, i, i, n, u에서 같은 것이 3개, 2개이므로

$\frac{7!}{3!2!}=420$

026 정답 210

2개의 A, 3개의 B, 2개의 C를 배열하는 순열의 수와 같으므로

$\frac{7!}{2!3!2!}=210$(가지)

027 정답 10

순서가 정해진 홀수 1, 3, 5는 모두 같은 문자 a로, 짝수 2, 4는 모두 같은 문자 b로 보고 a, a, a, b, b를 한 줄로 나열한다.
이때, 첫 번째 a는 1, 두 번째 a는 3, 세 번째 a는 5로 바꾸고, 첫 번째 b는 2, 두 번째 b는 4로 바꾸어 주면 홀수는 홀수끼리, 짝수는 짝수끼리 작은 수부터 크기 순으로 나열된다.
따라서 구하는 경우의 수는 a, a, a, b, b를 배열하는 순열의 수와 같고, 이때 같은 것이 3개, 2개이므로

$\frac{5!}{3!2!}=10$(가지)

028 정답 1680

여덟 개의 문자 s, u, n, s, h, i, n, e 중에서 순서가 정해진 모음 u, i, e를 모두 같은 문자 u로 보고
s, s, n, n, h, u, u, u를 한 줄로 나열한다.
이때, 각 배열에서 첫 번째 u는 u 그대로, 두 번째 u는 i로, 세 번째 u는 e로 바꾸어 주면 항상 모음 u, i, e는 이 순서대로 나열된다.
따라서 구하는 경우의 수는 s, s, n, n, h, u, u, u를 배열하는 순열의 수와 같고, 이때 같은 것이 2개, 2개, 3개이므로

$\frac{8!}{2!2!3!}=1680$(가지)

029 정답 (1) 30 (2) 20 (3) 32

(1) A지점에서 P지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{3!2!}=30$(가지)

(2) A지점에서 Q지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!3!}\times1=20(\text{가지})$$

(3) A지점에서 P, Q지점을 모두 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\times1=9(\text{가지})$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$(30-9)+(20-9)=32(\text{가지})$$

연습문제 II p.24

030 정답 240

(i) 안쪽에 있는 3개의 영역에 3가지 색을 칠하는 경우의 수는 6가지 색에서 3가지 색을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3=20(\text{가지})$$

택한 3가지 색을 안쪽에 있는 3개의 영역에 칠하는 경우의 수는 $(3-1)!=2$(가지)

이므로 $20\times2=40$(가지)

(ii) 각 경우에 대하여 나머지 3가지 색을 바깥쪽에 있는 3개의 영역에 칠하는 경우의 수는 $3!=6$(가지)

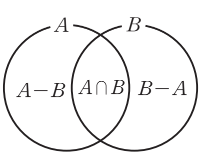
따라서 구하는 경우의 수는 $40\times6=240$(가지)

031 정답 211

먼저 $A\cup B=U$를 만족하는 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수를 구하자.

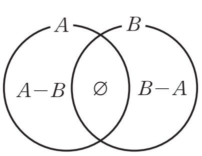
$A\cup B=U$이면 전체집합 U의 원소 $k(k=1, 2, 3, 4, 5)$에 대하여 다음 중 하나만 성립한다.

$$k\in A\cap B,\ k\in A-B,\ k\in B-A$$



이때, k가 $A\cap B$, $A-B$, $B-A$ 중 어느 집합에 속하는가에 따라 순서쌍 (A, B)가 달라지므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_5=3^5=243(\text{개})$$



이 중 $A\cup B=U$이고 $A\cap B=\varnothing$인 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는 서로 다른 두 집합 $A-B$, $B-A$ 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_5=2^5=32(\text{개})$$

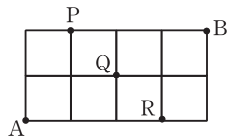
따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$243-32=211(\text{개})$$

032 정답 99

갑과 을이 모두 6칸을 움직여야 하므로 두 사람이 각각 3칸씩 움직인 지점에서 만날 수 있다.

따라서 두 사람이 만날 수 있는 지점은 다음 그림에서 P, Q, R 지점이다.



(i) P지점에서 만나는 경우

$$\underbrace{\left(\frac{3!}{2!}\times1\right)}_{A\to P\to B}\times\underbrace{\left(1\times\frac{3!}{2!}\right)}_{B\to P\to A}=9(\text{가지})$$

(ii) Q지점에서 만나는 경우

$$\underbrace{\left(\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)}_{A\to Q\to B}\times\underbrace{\left(\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)}_{B\to Q\to A}=81(\text{가지})$$

(iii) R지점에서 만나는 경우

$$\underbrace{\left(1\times\frac{3!}{2!}\right)}_{A\to R\to B}\times\underbrace{\left(\frac{3!}{2!}\times1\right)}_{B\to R\to A}=9(\text{가지})$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$9+81+9=99(\text{가지})$$

033 정답 369 서술형

주사위를 네 번 던졌을 때 최댓값이 5가 되는 경우의 수는 네 번 모두 5 이하의 눈이 나오는 경우의 수에서 네 번 모두 4 이하의 눈이 나오는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 네 번 모두 5 이하의 눈이 나오는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_4=5^4(\text{가지})$$ … ①

(ii) 네 번 모두 4 이하의 눈이 나오는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_4=4^4(\text{가지})$$ … ②

따라서 구하는 경우의 수는

$$5^4-4^4=625-256=369(\text{가지})$$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	네 번 모두 5 이하의 눈이 나오는 경우의 수 구하기	40 %
②	네 번 모두 4 이하의 눈이 나오는 경우의 수 구하기	40 %
③	답 구하기	20 %

2. 중복조합

유형 pp.28～32

001 정답 (1) 20 (2) 56

(1) 6개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 세 수를 택하여 세 수를 작은 수부터 차례로 a, b, c로 정하면 된다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로
$_6C_3=20$(가지)

(2) 6개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 세 수를 택한 후, 세 수를 작은 수부터 차례로 a, b, c로 정하면 된다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=56$(가지)

002 정답 (1) 45 (2) 21

(1) 방정식 $x+y+z=8$의 음이 아닌 정수해의 개수는 세 문자 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$(개)

(2) 해가 양의 정수이므로 $x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$이다.
이때, $x'=x-1$, $y'=y-1$, $z'=z-1$,
즉 $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$이라 하면 주어진 방정식은 $(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=8$에서
$x'+y'+z'=5$이고 $x'\geq0$, $y'\geq0$, $z'\geq0$이다.
따라서 구하는 양의 정수해의 개수는 방정식
$x'+y'+z'=5$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
$_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$(개)

003 정답 (1) 21 (2) 50

(1) 다항식 $(a+b+c)^5$의 전개식에서 각 항은
$a^xb^yc^z(x+y+z=5)$ 꼴이므로 서로 다른 항의 개수는 방정식 $x+y+z=5$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.
즉, 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$(개)

(2) 다항식 $(a+b+c)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$(개)
또, 다항식 $(p+q)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 두 문자 p, q 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$(개)
따라서 다항식 $(a+b+c)^3(p+q)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는
$10\times5=50$(개)

004 정답 (1) 36 (2) 15

(1) A, B, C가 받은 사탕의 개수를 각각 a, b, c라고 하면
$a+b+c=7$(a, b, c는 음이 아닌 정수) …… ㉠
따라서 같은 종류의 사탕 7개를 세 사람에게 나누어 주는 모든 방법의 수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.
즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$(가지)

(2) A, B, C가 받은 사탕의 개수를 각각 a, b, c라고 하면
$a+b+c=7$ $(a\geq1,\ b\geq1,\ c\geq1)$ …… ㉡
이므로 같은 종류의 사탕 7개를 세 사람에게 적어도 한 개 이상 나누어 주는 모든 방법의 수는 방정식 ㉡의 양의 정수해의 개수와 같다.
여기서 $a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$로 놓으면 방정식 ㉡은
$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=7$
$(a'\geq0,\ b'\geq0,\ c'\geq0)$
즉, $a'+b'+c'=4$(a', b', c'은 음이 아닌 정수)
…… ㉢
따라서 구하는 방법의 수는 방정식 ㉢의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.
즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$(가지)

다른 풀이
세 사람 모두 적어도 하나의 사탕을 받아야 하므로 먼저 세 사람에게 사탕을 하나씩 나누어 준다.
이때, 남은 사탕 4개를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$(가지)

005 정답 (1) **60** (2) **10** (3) **35**

(1) 주어진 조건을 만족하는 함수는 일대일함수이다.
집합 B의 원소 5개 중에서 3개를 택하여 일렬로 배열하자.
이때, 배열된 순서로 1, 2, 3에 각각 대응시키면 일대일함수 하나가 결정된다.
따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_5P_3=5\times4\times3=60(\text{가지})$$

(2) 집합 B의 원소 5개 중에서 3개를 택하자.
이때, 택한 3개의 수를 크기가 작은 것부터 순서대로 1, 2, 3에 각각 대응시키면 주어진 조건을 만족하는 함수 하나가 결정된다.
따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3=10(\text{가지})$$

다른 풀이

$a<b$이면 $f(a)<f(b)$이므로
$4\le f(1)<f(2)<f(3)\le8$
즉, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 서로 다른 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3=10(\text{가지})$$

(3) 집합 B의 원소 5개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하자.
이때, 택한 3개의 수를 크기가 작은 것부터 순서대로 1, 2, 3에 각각 대응시키면 주어진 조건을 만족하는 함수 하나가 결정된다.
따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35(\text{가지})$$

다른 풀이

$a<b$이면 $f(a)\le f(b)$이므로

$$4\le f(1)\le f(2)\le f(3)\le8$$

즉, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35(\text{가지})$$

확인문제

pp.28~32

034 정답 (1) **56** (2) **120**

(1) 8개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 서로 다른 세 수를 택하여 세 수를 작은 수부터 차례로 a, b, c로 정하면 된다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 8개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_8C_3=56(\text{가지})$$

(2) 8개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 중복을 허용하여 세 수를 택한 후, 세 수를 작은 수부터 차례로 a, b, c로 정하면 된다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 8개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_8H_3={}_{8+3-1}C_3={}_{10}C_3=120(\text{가지})$$

035 정답 **70**

5개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 네 수를 택한 후, 네 수를 작은 수부터 차례로 a, b, c, d로 정하면 된다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_4={}_{5+4-1}C_4={}_8C_4=70(\text{가지})$$

036 정답 (1) **66** (2) **36**

(1) 방정식 $x+y+z=10$의 음이 아닌 정수해의 개수는 x, y, z에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66(\text{개})$$

(2) $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$(x', y', z'은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x+y+z=10$에서

$$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=10$$

즉, $x'+y'+z'=7$(x', y', z'은 음이 아닌 정수) …… ㉠
구하는 해의 개수는 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36(\text{개})$$

037 정답 **56**

순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 x, y, z, w의 4개 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56(\text{개})$$

038 정답 **84**

다항식 $(a+b+c+d)^6$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84(\text{개})$$

039 정답 **45**

다항식 $(a+b)^2$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 a, b 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2=3(\text{개})$$

또, 다항식 $(x+y+z)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 세 문자 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15(\text{개})$$

따라서 다항식 $(a+b)^2(x+y+z)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$$3\times15=45(\text{개})$$

040 정답 (1) 66 (2) 36

(1) A, B, C 세 개의 바구니에 담긴 공의 개수를 각각 a, b, c라고 하면

$$a+b+c=10(a,\ b,\ c\text{는 음이 아닌 정수}) \cdots\cdots ㉠$$

따라서 같은 종류의 공 10개를 세 개의 바구니에 담는 모든 방법의 수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66(\text{가지})$$

(2) 세 개의 바구니에 모두 적어도 하나의 공을 담아야 하므로 먼저 세 개의 바구니에 공을 하나씩 담는다.

이때, 남은 공 7개를 중복을 허용하여 세 개의 바구니에 담는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36(\text{가지})$$

041 정답 455

한 다스에 들어 있는 네 종류의 연필의 개수를 각각 a, b, c, d라고 하면

$$a+b+c+d=12(a,\ b,\ c,\ d\text{는 음이 아닌 정수}) \cdots\cdots ㉠$$

따라서 구성이 서로 다른 경우의 수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_{12}={}_{4+12-1}C_{12}={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3=455(\text{가지})$$

042 정답 (1) 64 (2) 24 (3) 20

(1) 집합 B의 원소 4개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하자.

이때, 배열한 순서대로 1, 2, 3에 각각 대응시키면 함수 하나가 결정된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3=4^3=64(\text{가지})$$

(2) 집합 B의 원소 4개 중에서 3개를 택하여 일렬로 배열하자.

이때, 배열한 순서대로 1, 2, 3에 각각 대응시키면 일대일함수 하나가 결정된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_4P_3=4\times3\times2=24(\text{가지})$$

(3) 집합 B의 원소 4개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하자.

이때, 택한 3개의 수를 크기가 작은 것부터 순서대로 1, 2, 3에 각각 대응시키면 주어진 조건을 만족하는 함수 하나가 결정된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20(\text{가지})$$

043 정답 (1) 120 (2) 126

(1) 주어진 조건을 만족하는 함수는 일대일함수이다.

집합 X의 원소 5개를 일렬로 배열하자. 이때, 배열한 순서대로 1, 2, 3, 4, 5에 각각 대응시키면 일대일함수 하나가 결정된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 5개를 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로

$$5!=5\times4\times3\times2\times1=120(\text{가지})$$

(2) 집합 X의 원소 5개 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하자.

이때, 택한 5개의 수를 크기가 작은 것부터 순서대로 1, 2, 3, 4, 5에 각각 대응시키면 주어진 조건을 만족하는 함수 하나가 결정된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_5={}_{5+5-1}C_5={}_9C_5={}_9C_4=126(\text{가지})$$

연습문제 I ······ pp.33~35

044 정답 ②

${}_4P_2=4\times3=12$, ${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2!}=6$, ${}_4\Pi_2=4^2=16$,

${}_4H_2={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2!}=10$이므로

$${}_4P_2+{}_4C_2+{}_4\Pi_2+{}_4H_2=12+6+16+10=44$$

045 정답 ⑤

${}_nH_2={}_{n+2-1}C_2={}_{n+1}C_2=\dfrac{(n+1)n}{2}=55$에서

$$n(n+1)=110=10\times11 \qquad \therefore n=10$$

046 정답 ④

8개의 자연수 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 중복을 허용하여 네 수를 택한 후, 네 수를 크기가 작은 것부터 차례로 a, b, c, d로 정하면 된다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 8개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_8H_4={}_{8+4-1}C_4={}_{11}C_4=330(\text{가지})$$

047 정답 35

각 구슬이 담기는 상자의 번호를 택하자.
이때, 한 개의 상자에 구슬을 3개까지 넣을 수 있으므로, 구슬 3개를 상자에 넣는 방법의 수는 번호 ①, ②, ③, ④, ⑤ 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35(\text{가지})$$

048 정답 (1) 66 (2) 36 (3) 45 (4) 15

(1) 방정식 $x+y+z=10$의 음이 아닌 정수해의 개수는 세 문자 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 10개를 뽑는 중복조합의 수와 같다. 따라서 구하는 개수는

$${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66(\text{개})$$

(2) $x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$이므로 $x-1\geq0$, $y-1\geq0$, $z-1\geq0$
이때, $x'=x-1$, $y'=y-1$, $z'=z-1$,
즉 $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$이라 하면
주어진 방정식은 $(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=10$에서
$x'+y'+z'=7$이고 $x'\geq0$, $y'\geq0$, $z'\geq0$이다.
따라서 구하는 정수해의 개수는 방정식 $x'+y'+z'=7$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36(\text{개})$$

(3) $x\geq2$, $y\geq0$, $z\geq0$이므로 $x-2\geq0$, $y\geq0$, $z\geq0$
이때, $x'=x-2$, 즉 $x=x'+2$라 하면
주어진 방정식은 $(x'+2)+y+z=10$에서
$x'+y+z=8$이고 $x'\geq0$, $y\geq0$, $z\geq0$이다.
따라서 구하는 정수해의 개수는 방정식 $x'+y+z=8$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45(\text{개})$$

(4) $x\geq1$, $y\geq2$, $z\geq3$이므로 $x-1\geq0$, $y-2\geq0$, $z-3\geq0$
이때, $x'=x-1$, $y'=y-2$, $z'=z-3$,
즉 $x=x'+1$, $y=y'+2$, $z=z'+3$이라 하면
주어진 방정식은 $(x'+1)+(y'+2)+(z'+3)=10$에서
$x'+y'+z'=4$이고 $x'\geq0$, $y'\geq0$, $z'\geq0$이다.
따라서 구하는 정수해의 개수는 방정식 $x'+y'+z'=4$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15(\text{개})$$

049 정답 36

$x=2l$, $y=2m$, $z=2n$(단, l, m, n은 자연수)으로 놓으면 주어진 방정식은

$$2l+2m+2n=20$$
$$l+m+n=10\ (l\geq1,\ m\geq1,\ n\geq1)$$

이때, $l=l'+1$, $m=m'+1$, $n=n'+1$이라 하면
$l'\geq0$, $m'\geq0$, $n'\geq0$이고

$$l'+m'+n'=7$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $l'+m'+n'=7$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36(\text{개})$$

050 정답 (1) 45 (2) 60

(1) 다항식 $(a+b+c)^8$의 전개식에서 각 항은 $a^xb^yc^z$($x+y+z=8$, x, y, z는 음이 아닌 정수) 꼴이므로 서로 다른 항의 개수는 방정식 $x+y+z=8$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.
즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45(\text{개})$$

(2) 다항식 $(a+b)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 a, b 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3=4(\text{개})$$

또, 다항식 $(p+q+r)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 p, q, r 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15(\text{개})$$

따라서 다항식 $(a+b)^3(p+q+r)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$$4\times15=60(\text{개})$$

051 정답 (1) 84 (2) 35

(1) 서로 다른 네 종류의 색에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84(\text{가지})$$

(2) 빨강 색연필과 파랑 색연필을 한 자루씩 미리 골라놓고, 나머지 4자루를 택하면 된다.
따라서 서로 다른 네 종류의 색에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4={}_7C_3=35(\text{가지})$$

052 정답 220

조건 (가)에서 $a\times b\times c$가 홀수이므로 a, b, c는 모두 홀수이다.
이때, 조건 (나)에 의해서 $a\le b\le c\le 20$을 만족하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 10개의 홀수 1, 3, 5, $\cdots$, 19에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_{10}H_3={}_{10+3-1}C_3={}_{12}C_3=220$$

053 정답 15

택한 다섯 개의 수 중에 3이 적어도 1개는 포함되어야 하므로 3, 5, 7에서 중복을 허용하여 다섯 개의 수를 택하는 중복조합의 수에서 3을 제외한 5, 7에서 중복을 허용하여 다섯 개의 수를 택하는 중복조합의 수를 빼면 된다.

$$\therefore {}_3H_5-{}_2H_5={}_7C_5-{}_6C_5={}_7C_2-{}_6C_1=21-6=15(\text{개})$$

054 정답 ④

(ⅰ) 노트 4권을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15(\text{가지})$$

(ⅱ) 연필 2자루를 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6(\text{가지})$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15\times 6=90(\text{가지})$$

055 정답 ②

(ⅰ) 검은 구슬 5개를 네 개의 상자 A, B, C, D에 넣는 방법의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4H_5$가지

(ⅱ) 흰 구슬 3개를 네 개의 상자 A, B, C, D에 넣는 방법의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4H_3$가지

따라서 구하는 방법의 수는

$${}_4H_5\times{}_4H_3={}_8C_5\times{}_6C_3=56\times 20=1120(\text{가지})$$

056 정답 130

(ⅰ) 노트 8권을 4명에게 나누어 주는 모든 방법의 수는

${}_4H_8$가지

(ⅱ) 모두 한 권 이상의 노트를 받도록 나누어 주는 모든 방법의 수는 먼저 4명에게 한 권씩 나누어 준 후, 남은 노트 4권을 4명에게 나누어 주는 방법의 수와 같으므로 ${}_4H_4$가지

따라서 노트를 한 권도 받지 못하는 학생이 생기는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_4H_8-{}_4H_4&={}_{11}C_8-{}_7C_4={}_{11}C_3-{}_7C_3\\&=165-35=130(\text{가지})\end{aligned}$$

057 정답 12

세 명의 어린이가 받은 사탕의 수를 각각 a, b, c라 하면 $a+b+c=5$이므로 가능한 모든 경우의 수는

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21(\text{가지})$$

이때, 네 개 이상 받는 어린이가 생기는 경우를 구하면

(ⅰ) 다섯 개의 사탕을 1개와 4개로 나누어 두 명에게 주는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$(가지)

(ⅱ) 다섯 개의 사탕을 한 명에게 모두 주는 경우의 수는

${}_3C_1=3$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$$21-(6+3)=12(\text{가지})$$

058 정답 126

집합 Y의 원소 6개 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하자.
이때, 택한 4개의 수를 크기가 작은 것부터 순서대로 1, 2, 3, 4에 각각 대응시키면 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$를 만족하는 함수가 결정된다.
따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 6개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_4={}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=126(\text{가지})$$

다른 풀이

$1\le f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le 6$이므로 1에서 6까지의 6개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_6H_4={}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=126(\text{가지})$$

연습문제 Ⅱ

p.36

059 정답 6

$30=2\times3\times5$이므로 선택된 다섯 개의 수의 곱이 30의 배수가 되려면 2, 3, 5를 적어도 하나 이상 택해야 한다.
다섯 개의 수 중에서 2, 3, 5가 택해진 개수를 각각 x, y, z라고 하면 $x+y+z=5$ $(x\ge1,\ y\ge1,\ z\ge1)$이므로 구하는 개수는 방정식 $x+y+z=5$의 양의 정수해의 개수와 같다.
이때,

$$x'=x-1,\ y'=y-1,\ z'=z-1,\ \text{즉}$$
$$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1$$

이라 하면 주어진 방정식은 $(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=5$에서

$$x'+y'+z'=2\text{이고 } x'\ge0,\ y'\ge0,\ z'\ge0$$

이다. 따라서 $x+y+z=5$의 양의 정수해의 개수는 $x'+y'+z'=2$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 구하는 개수는

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6(\text{개})$$

060 정답 ①

(ⅰ) 서로 다른 4개의 상자 중에서 공이 담길 상자 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$(가지)

(ⅱ) (ⅰ)에서 택한 2개의 상자에 4개의 공을 적어도 하나씩 담는 방법의 수는 두 상자에 먼저 공을 하나씩 담은 후 남은 2개의 공을 서로 다른 2개의 상자에 담으면 되므로 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times3=18$(가지)

061 정답 128

모든 사람이 음료수 또는 생수를 적어도 한 개씩 받아야 하므로 먼저 음료수 또는 생수를 한 개씩 세 사람에게 나누어 준다.

세 사람에게 먼저 나누어 준 것과 경우의 수	나머지를 나누어 주는 경우의 수
음료수 3개 : 1가지	${}_3H_3$
음료수 2개, 생수 1개 : ${}_3C_2$	${}_3H_1\times{}_3H_2$
음료수 1개, 생수 2개 : ${}_3C_1$	${}_3H_2\times{}_3H_1$
생수 3개 : 1가지	${}_3H_3$

따라서 구하는 경우의 수는

$1\times{}_3H_3+{}_3C_2\times{}_3H_1\times{}_3H_2+{}_3C_1\times{}_3H_2\times{}_3H_1+1\times{}_3H_3$

$=1\times{}_5C_3+3\times{}_3C_1\times{}_4C_2+3\times{}_4C_2\times{}_3C_1+1\times{}_5C_3$

$=10+54+54+10=128$(가지)

062 정답 20 서술형

$a<b$이면 $f(a)\le f(b)$이므로 $f(2)=6$에서

(ⅰ) 가능한 $f(1)$의 값은 5 또는 6의 2가지 … ①

(ⅱ) 6, 7, 8, 9 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작은 수를 $f(3)$, 큰 수를 $f(4)$의 값으로 정하면 되므로 $f(3)$과 $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수는

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$(가지) … ②

따라서 구하는 함수의 개수는

$2\times10=20$(개) … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$f(1)$의 값이 되는 방법의 수 구하기	30%
②	주어진 조건을 만족하는 $f(3)$, $f(4)$의 값이 되는 방법의 수 구하기	50%
③	답 구하기	20%

3. 이항정리

유형 pp.39~45

001 정답 (1) ${}_6C_r(-1)^rx^r$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 6$), 15

(2) ${}_7C_r2^{7-r}(-1)^rx^{7-r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 7$), -84

(3) ${}_8C_r2^rx^{8-2r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 8$), 448

(4) ${}_7C_rx^{14-3r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 7$), 35

(1) $(1-x)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r1^{6-r}(-x)^r={}_6C_r(-1)^rx^r$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 6$)

여기서 x^2항은 $r=2$일 때이므로 x^2의 계수는

${}_6C_2(-1)^2=15$

(2) $(2x-1)^7$의 전개식에서 일반항은

${}_7C_r(2x)^{7-r}(-1)^r={}_7C_r2^{7-r}(-1)^rx^{7-r}$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 7$)

여기서 x^2항은 $7-r=2$에서 $r=5$일 때이므로 x^2의 계수는

${}_7C_52^2(-1)^5={}_7C_22^2(-1)^5=-84$

(3) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$의 전개식에서 일반항은

${}_8C_rx^{8-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_8C_r2^rx^{8-2r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 8$)

여기서 x^2항은 $8-2r=2$에서 $r=3$일 때이므로 x^2의 계수는

${}_8C_32^3=448$

(4) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^7$의 전개식에서 일반항은

${}_7C_r(x^2)^{7-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_7C_rx^{14-2r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_7C_rx^{14-3r}$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 7$)

여기서 x^2항은 $14-3r=2$에서 $r=4$일 때이므로 x^2의 계수는

${}_7C_4={}_7C_3=35$

002 정답 (1) 2 (2) -42

(1) $\left(ax-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r(ax)^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_ra^{5-r}(-1)^rx^{5-2r}$

(단, $r=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

x의 계수는 $5-2r=1$에서 $r=2$일 때이고, x의 계수가 80이므로

${}_5C_2a^3(-1)^2=80$, ${}_5C_2a^3=80$

$10a^3=80$, $a^3=8$

$\therefore a=2$

(2) 주어진 식의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^8\text{의 상수항}\right\}+2\times\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^8\text{의 }x^2\text{항}\right\}$이다.

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식에서 일반항은

$${}_8C_r x^{8-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_8C_r(-1)^r x^{8-2r}$$

여기서 상수항은 $8-2r=0$에서 $r=4$일 때이므로 상수항은 ${}_8C_4(-1)^4=70$

또, x^2항은 $8-2r=2$에서 $r=3$일 때이므로

$${}_8C_3(-1)^3=-56$$

따라서 $(x^2+2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식에서 x^2의 계수는

$$70+2\times(-56)=-42$$

003 정답 (1) 2^{20} (2) 0 (3) 3^{20} (4) 1

이항정리에 의하여

$$(1+x)^{20}={}_{20}C_0+{}_{20}C_1x+{}_{20}C_2x^2+\cdots+{}_{20}C_{20}x^{20} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

(1) ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$${}_{20}C_0+{}_{20}C_1+{}_{20}C_2+\cdots+{}_{20}C_{20}=2^{20}$$

(2) ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$${}_{20}C_0-{}_{20}C_1+{}_{20}C_2-\cdots+{}_{20}C_{20}=0$$

(3) ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\begin{aligned}&(1+2)^{20}\\&={}_{20}C_0+{}_{20}C_1 2+{}_{20}C_2 2^2+{}_{20}C_3 2^3+\cdots+{}_{20}C_{20}2^{20}\\&={}_{20}C_0+2{}_{20}C_1+2^2{}_{20}C_2+2^3{}_{20}C_3+\cdots+2^{20}{}_{20}C_{20}\end{aligned}$$

$$\therefore\ {}_{20}C_0+2{}_{20}C_1+2^2{}_{20}C_2+2^3{}_{20}C_3+\cdots+2^{20}{}_{20}C_{20}=3^{20}$$

(4) ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$$\begin{aligned}&(1-2)^{20}\\&={}_{20}C_0+{}_{20}C_1(-2)+{}_{20}C_2(-2)^2+\cdots+{}_{20}C_{20}(-2)^{20}\\&={}_{20}C_0-2{}_{20}C_1+2^2{}_{20}C_2-2^3{}_{20}C_3+\cdots+2^{20}{}_{20}C_{20}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &{}_{20}C_0-2{}_{20}C_1+2^2{}_{20}C_2-2^3{}_{20}C_3+\cdots+2^{20}{}_{20}C_{20}\\&=(-1)^{20}=1\end{aligned}$$

004 정답 (1) 2^8 (2) 2^8 (3) 2^8

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $n=9$, $x=1$을 대입하면

$${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+\cdots+{}_9C_8+{}_9C_9=2^9 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠의 양변에 $n=9$, $x=-1$을 대입하면

$${}_9C_0-{}_9C_1+{}_9C_2-{}_9C_3+\cdots+{}_9C_8-{}_9C_9=0 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

(1) ㉡+㉢을 하면

$$2({}_9C_0+{}_9C_2+{}_9C_4+{}_9C_6+{}_9C_8)=2^9$$

$$\therefore\ {}_9C_0+{}_9C_2+{}_9C_4+{}_9C_6+{}_9C_8=2^8$$

(2) ㉡−㉢을 하면

$$2({}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9)=2^9$$

$$\therefore\ {}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9=2^8$$

(3) ${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4=A$라 하면

${}_9C_r={}_9C_{9-r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 9$)이므로

$$\begin{aligned}{}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4&={}_9C_5+{}_9C_6+{}_9C_7+{}_9C_8+{}_9C_9\\&=A\end{aligned}$$

이때, ㉡에서 $2A=2^9$이므로 $A=2^8$

005 정답 (1) 13 (2) 풀이 참조

(1) ${}_{n-1}C_5+{}_{n-1}C_6={}_nC_6$이므로 ${}_nC_7={}_nC_6$

즉, ${}_nC_7={}_nC_{n-7}={}_nC_6$이므로 $n-7=6$

$\therefore\ n=13$

(2) ${}_3C_3={}_4C_4$이므로

(주어진 식)

$$\begin{aligned}&=({}_4C_4+{}_4C_3)+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3 && \leftarrow {}_4C_3+{}_4C_4={}_5C_4\\&=({}_5C_4+{}_5C_3)+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3 && \leftarrow {}_5C_3+{}_5C_4={}_6C_4\\&=({}_6C_4+{}_6C_3)+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3 && \leftarrow {}_6C_4+{}_6C_3={}_7C_4\\&=({}_7C_4+{}_7C_3)+{}_8C_3+{}_9C_3 && \leftarrow {}_7C_4+{}_7C_3={}_8C_4\\&=({}_8C_4+{}_8C_3)+{}_9C_3 && \leftarrow {}_8C_4+{}_8C_3={}_9C_4\\&={}_9C_4+{}_9C_3={}_{10}C_4\end{aligned}$$

확인문제 pp.39~45

063 정답 (1) 60 (2) −720 (3) −10 (4) 210

(1) $(2x+1)^6$의 전개식에서 일반항은

$${}_6C_r(2x)^{6-r}1^r={}_6C_r2^{6-r}x^{6-r} \text{ (단, } r=0, 1, 2, \cdots, 6)$$

여기서 x^2항은 $6-r=2$에서 $r=4$일 때이므로

x^2의 계수는 ${}_6C_4 2^2=15\times4=60$

(2) $(3x-2y)^5$의 전개식에서 일반항은

$${}_5C_r(3x)^{5-r}(-2y)^r={}_5C_r3^{5-r}(-2)^rx^{5-r}y^r$$

(단, $r=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

여기서 x^2y^3항은 $r=3$일 때이므로

x^2y^3의 계수는 ${}_5C_3 3^2(-2)^3=10\times9\times(-8)=-720$

(3) $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 일반항은

$${}_5C_rx^{5-r}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^r={}_5C_r(-2)^rx^{5-3r}$$

(단, $r=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

여기서 x^2항은 $5-3r=2$에서 $r=1$일 때이므로 x^2의 계수는

$${}_5C_1(-2)=5\times(-2)=-10$$

(4) $x\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 x^3의 계수는 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 x^2의 계수와 같다.

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 일반항은

$${}_{10}C_rx^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_{10}C_rx^{10-2r} \text{ (단, } r=0, 1, 2, \cdots, 10)$$

여기서 x^2항은 $10-2r=2$에서 $r=4$일 때이므로 x^2의 계수는 ${}_{10}C_4=210$

064 정답 $x^{10}+10x^8+40x^6+80x^4+80x^2+32$

$$\begin{aligned}(x^2+2)^5&={}_5C_0(x^2)^5+{}_5C_1(x^2)^4 2^1+{}_5C_2(x^2)^3 2^2\\&\quad+{}_5C_3(x^2)^2 2^3+{}_5C_4(x^2)^1 2^4+{}_5C_5 2^5\\&=x^{10}+10x^8+40x^6+80x^4+80x^2+32\end{aligned}$$

065 정답 2

$\left(2x+\dfrac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은

$${}_5C_r(2x)^{5-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_5C_r 2^{5-r}a^r x^{5-2r}$$

(단, $r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)

x의 계수는 $5-2r=1$에서 $r=2$

이때, x의 계수가 320이므로 ${}_5C_2\times2^3\times a^2=320$

$80a^2=320,\ a^2=4\qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

066 정답 168

$(1+x)^3$의 전개식에서 일반항은

${}_3C_a x^a$ (단, $a=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

$(2+x)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4C_b 2^{4-b}x^b$ (단, $b=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)

$(1+x)^3(2+x)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는

(i) $a=0,\ b=2$일 때

${}_3C_0\times{}_4C_2\times2^2=24$

(ii) $a=1,\ b=1$일 때

${}_3C_1\times{}_4C_1\times2^3=96$

(iii) $a=2,\ b=0$일 때

${}_3C_2\times{}_4C_0\times2^4=48$

(i), (ii), (iii)에서

$24+96+48=168$

067 정답 20

이항정리에 의하여

$(1+x)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1x+{}_{10}C_2x^2+\cdots+{}_{10}C_{10}x^{10}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$$\begin{aligned}(1+3)^{10}&={}_{10}C_0+{}_{10}C_1 3+{}_{10}C_2 3^2+{}_{10}C_3 3^3+\cdots+{}_{10}C_{10}3^{10}\\&={}_{10}C_0+3{}_{10}C_1+3^2{}_{10}C_2+3^3{}_{10}C_3+\cdots+3^{10}{}_{10}C_{10}\end{aligned}$$

즉, ${}_{10}C_0+3{}_{10}C_1+3^2{}_{10}C_2+3^3{}_{10}C_3+\cdots+3^{10}{}_{10}C_{10}=4^{10}=2^{20}$

$\therefore n=20$

068 정답 ④

ㄱ. ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}=2^{10}$이고

${}_{10}C_0=1$이므로

${}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}-1$ (참)

ㄴ. $(1+x)^4={}_4C_0+{}_4C_1x+{}_4C_2x^2+{}_4C_3x^3+{}_4C_4x^4$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

${}_4C_0-{}_4C_1+{}_4C_2-{}_4C_3+{}_4C_4=0$ (거짓)

ㄷ. $(1+x)^9={}_9C_0+{}_9C_1x+{}_9C_2x^2+\cdots+{}_9C_9x^9$의 양변에 $x=9$를 대입하면

${}_9C_0+9{}_9C_1+9^2{}_9C_2+\cdots+9^9{}_9C_9=10^9$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

069 정답 12

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ …… ㉠

㉠의 양변에 $n=7,\ x=1$을 대입하면

${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+\cdots+{}_7C_6+{}_7C_7=2^7$ …… ㉡

㉠의 양변에 $n=7,\ x=-1$을 대입하면

${}_7C_0-{}_7C_1+{}_7C_2-{}_7C_3+\cdots+{}_7C_6-{}_7C_7=0$ …… ㉢

㉡+㉢을 하면

$2({}_7C_0+{}_7C_2+{}_7C_4+{}_7C_6)=2^7$

$\therefore {}_7C_0+{}_7C_2+{}_7C_4+{}_7C_6=2^6$

㉡−㉢을 하면

$2({}_7C_1+{}_7C_3+{}_7C_5+{}_7C_7)=2^7$

$\therefore {}_7C_1+{}_7C_3+{}_7C_5+{}_7C_7=2^6$

따라서 주어진 등식의 좌변은

$$\begin{aligned}&({}_7C_0+{}_7C_2+{}_7C_4+{}_7C_6)\times({}_7C_1+{}_7C_3+{}_7C_5+{}_7C_7)\\&=2^6\times2^6=2^{12}\end{aligned}$$

이므로 $n=12$이다.

070 정답 ②

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ …… ㉠

㉠의 양변에 $n=10,\ x=1$을 대입하면

${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}=2^{10}$ …… ㉡

㉠의 양변에 $n=10,\ x=-1$을 대입하면

${}_{10}C_0-{}_{10}C_1+{}_{10}C_2-{}_{10}C_3+\cdots-{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}=0$ …… ㉢

ㄱ. ㉡+㉢을 하면

$2({}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10})=2^{10}$

이때, ${}_{10}C_0=1$이므로

${}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^9-1$ (거짓)

ㄴ. ㉡−㉢을 하면

$2({}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9)=2^{10}$

$\therefore {}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9=2^9$ (참)

ㄷ. ${}_{10}C_r={}_{10}C_{10-r}$ (단, $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$)이므로

$$\begin{aligned}&{}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+{}_{10}C_4\\&={}_{10}C_6+{}_{10}C_7+{}_{10}C_8+{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}\ \text{(거짓)}\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

071 정답 ③

${}_2C_2={}_3C_3$이므로

(주어진 식)

$={}({}_3C_3+{}_3C_2)+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+\cdots+{}_{10}C_2$ $\leftarrow {}_3C_3+{}_3C_2={}_4C_3$

$=({}_4C_3+{}_4C_2)+{}_5C_2+{}_6C_2+\cdots+{}_{10}C_2$ $\leftarrow {}_4C_3+{}_4C_2={}_5C_3$

$=({}_5C_3+{}_5C_2)+{}_6C_2+\cdots+{}_{10}C_2$ $\leftarrow {}_5C_3+{}_5C_2={}_6C_3$

$=({}_6C_3+{}_6C_2)+\cdots+{}_{10}C_2$ $\leftarrow {}_6C_3+{}_6C_2={}_7C_3$

$\cdots$

$={}_{10}C_3+{}_{10}C_2$

$={}_{11}C_3$

072 정답 252

주어진 식의 값을 A라 하면

${}_4C_0={}_5C_0$이므로

$$\begin{aligned}A&=({}_5C_0+{}_5C_1)+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5\\&=({}_6C_1+{}_6C_2)+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5\\&=({}_7C_2+{}_7C_3)+{}_8C_4+{}_9C_5\\&=({}_8C_3+{}_8C_4)+{}_9C_5\\&={}_9C_4+{}_9C_5\\&={}_{10}C_5=252\end{aligned}$$

연습문제 I

pp.46~48

073 정답 (1) $a^5+5a^4+10a^3+10a^2+5a+1$ (2) $a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4$

(1) $(a+1)^5={}_5C_0a^5+{}_5C_1a^4+{}_5C_2a^3+{}_5C_3a^2+{}_5C_4a+{}_5C_5$

$=a^5+5a^4+10a^3+10a^2+5a+1$

(2) $(a-2b)^4={}_4C_0a^4+{}_4C_1a^3(-2b)+{}_4C_2a^2(-2b)^2+{}_4C_3a(-2b)^3+{}_4C_4(-2b)^4$

$=a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4$

074 정답 ③

$(2a+b)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r(2a)^{6-r}b^r={}_6C_r2^{6-r}a^{6-r}b^r$ (단, $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$)

이다. a^2b^4항은 $r=4$일 때이므로 그 계수는

${}_6C_42^2={}_6C_22^2=60$

075 정답 ④

$\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^7$의 전개식에서 일반항은

${}_7C_rx^{7-r}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^r={}_7C_r(-1)^rx^{7-3r}$

(단, $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7$)

여기서 x항은 $7-3r=1$일 때이므로

$r=2$

따라서 x의 계수는

${}_7C_2(-1)^2=21$

076 정답 (1) 20 (2) -10

(1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_rx^{6-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6C_rx^{6-2r}$ (단, $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$)

이고, 상수항은 $6-2r=0$에서 $r=3$일 때이므로

${}_6C_3=20$

(2) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_rx^{5-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_5C_r(-1)^rx^{5-2r}$ (단, $r=0,\ 1,\ \cdots,\ 5$)

이때, $(x+1)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 상수항은

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^{-1}항 또는 상수항이어야 하므로

(i) x^{-1}항 : $5-2r=-1$에서 $r=3$이므로

${}_5C_3(-1)^3=-{}_5C_2=-10$

(ii) 상수항 : $5-2r=0$에서 $r=\dfrac{5}{2}$가 되어 정수가 아니므로

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 상수항은 0이다.

(i), (ii)에서 $(x+1)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 상수항은 -10

이다.

077 정답 (1) 2 (2) 5

(1) $(x-a)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_rx^{6-r}(-a)^r={}_6C_r(-a)^rx^{6-r}$ (단, $r=0,\ 1,\ \cdots,\ 6$)

x^4항은 $6-r=4$에서 $r=2$일 때이고, x^4의 계수가 60이므로

${}_6C_2(-a)^2=60,\ 15a^2=60,\ a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

(2) $(2x+a)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r(2x)^{6-r}a^r={}_6C_r2^{6-r}a^rx^{6-r}$ (단, $r=0,\ 1,\ \cdots,\ 6$)

(i) x의 계수는 $6-r=1$에서 $r=5$

따라서 x의 계수는 ${}_6C_52^1a^5=12a^5$

(ii) x^2의 계수는 $6-r=2$에서 $r=4$

따라서 x^2의 계수는 ${}_6C_42^2a^4=60a^4$

이때, x의 계수와 x^2의 계수가 같으므로

$12a^5=60a^4 \qquad \therefore\ a=5$

078 정답 7

$(x^2+1)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(x^2)^{n-r}1^r={}_nC_rx^{2n-2r}\ (\text{단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

x^4의 계수는 $2n-2r=4$에서 $r=n-2$

이때, x^4의 계수가 21이므로 ${}_nC_{n-2}={}_nC_2=21$

$$\frac{n(n-1)}{2}=21,\ n^2-n-42=0$$

$$(n+6)(n-7)=0 \qquad \therefore n=7\ (\because n\text{은 자연수})$$

079 정답 28

$\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

$${}_nC_r(x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x^5}\right)^r={}_nC_rx^{2n-7r}\ (\text{단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이고, 상수항은 $2n-7r=0$일 때이다.

$n=\frac{7}{2}r$에서 자연수 n이 가장 작을 때는 $r=2$일 때이므로

자연수 n의 최솟값은 7이다.

$$\therefore a=7$$

$n=7$, $r=2$일 때의 상수항은 ${}_7C_2=21$이므로

$$b=21$$

$$\therefore a+b=7+21=28$$

080 정답 9

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$$

따라서 주어진 부등식은

$$500<2^n-1<1000$$

$$\therefore 501<2^n<1001$$

이때, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$$n=9$$

081 정답 ③

${}_{30}C_0-{}_{30}C_1+{}_{30}C_2-\cdots-{}_{30}C_{29}+{}_{30}C_{30}=0$이므로

$$\begin{aligned}{}_{30}C_1-{}_{30}C_2+{}_{30}C_3-{}_{30}C_4+\cdots+{}_{30}C_{29}&={}_{30}C_0+{}_{30}C_{30}\\&=1+1=2\end{aligned}$$

082 정답 1

$$\begin{aligned}11^{100}&=(1+10)^{100}\\&={}_{100}C_0+{}_{100}C_1 10+{}_{100}C_2 10^2+\cdots+{}_{100}C_{100}10^{100}\end{aligned}$$

이때, 세 번째항 이후로는 모두 100으로 나누어떨어지므로 11^{100}을 100으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{100}C_0+{}_{100}C_1 10$을 100으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$${}_{100}C_0+{}_{100}C_1 10=1+1000=1001$$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

083 정답 ③

원소의 개수가 1인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_1$

원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_3$

⋮

원소의 개수가 9인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_9$

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$${}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9=2^9=512$$

084 정답 0

이항정리에 의하여

$$(1+x)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1x+{}_{10}C_2x^2+\cdots+{}_{10}C_{10}x^{10} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$$\begin{aligned}(1-2)^{10}&={}_{10}C_0+{}_{10}C_1(-2)+{}_{10}C_2(-2)^2+{}_{10}C_3(-2)^3\\&\quad+\cdots+{}_{10}C_{10}(-2)^{10}\\&={}_{10}C_0-2{}_{10}C_1+2^2{}_{10}C_2-2^3{}_{10}C_3+2^4{}_{10}C_4\\&\quad-\cdots+2^{10}{}_{10}C_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &2{}_{10}C_1-2^2{}_{10}C_2+2^3{}_{10}C_3-2^4{}_{10}C_4+\cdots-2^{10}{}_{10}C_{10}\\&={}_{10}C_0-(1-2)^{10}\\&=1-1=0\end{aligned}$$

085 정답 91

파스칼의 삼각형의 성질 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$에 의하여

$10+10=A$에서 $A=20$

$10+5=B$에서 $B=15$

$A+B=C$에서 $C=20+15=35$

$B+6=D$에서 $D=15+6=21$

$$\therefore A+B+C+D=20+15+35+21=91$$

086 정답 25

주어진 파스칼의 삼각형에 조합의 수를 대응시켜 보면

제1행	1	1
제2행	1 1	${}_1C_0$ ${}_1C_1$
제3행	1 2 1	${}_2C_0$ ${}_2C_1$ ${}_2C_2$
제4행	1 3 3 1	${}_3C_0$ ${}_3C_1$ ${}_3C_2$ ${}_3C_3$
제5행	1 4 6 4 1	${}_4C_0$ ${}_4C_1$ ${}_4C_2$ ${}_4C_3$ ${}_4C_4$
⋮	⋮	⋮

따라서 제n행의 모든 수의 합은

$${}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}=2^{n-1}$$

$2^{n-1}=8^8=2^{24}$이므로 $n-1=24$

$$\therefore n=25$$

087 정답 ①

$(x+a)^4$, $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^3$의 전개식의 일반항은 각각

$${}_4C_r x^{4-r}a^r \text{ (단, } r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

$${}_3C_s x^{3-s}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^s={}_3C_s(-1)^s x^{3-3s} \text{ (단, } s=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

이므로 $(x+a)^4\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^3$의 전개식에서 x^2항이 생기는 경우는 $s=1$, $r=2$일 때이므로

s	$3-3s$		r
0	3		×
1	0	⇨	2
2	-3		×
3	-6		×

x^2의 계수는

${}_4C_2a^2\times{}_3C_1(-1)^1=-18$에서

$-18a^2=-18$, $a^2=1$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

088 정답 ②

똑같은 상품과 서로 다른 상품을 각각 택하는 개수에 따른 경우는 다음 표와 같다.

서로 다른 상품의 개수	똑같은 상품의 개수
0개	5개
1개	4개
2개	3개
3개	2개
4개	1개
5개	0개

똑같은 상품은 구분이 없으므로 먼저 서로 다른 상품을 택하고 나머지 개수를 똑같은 상품으로 채우면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 상품을 택하는 방법의 수와 같으므로

$${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5$$

이때, ${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}$이고,

${}_{11}C_6={}_{11}C_5$, ${}_{11}C_7={}_{11}C_4$, $\cdots$, ${}_{11}C_{11}={}_{11}C_0$이므로

$${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}$$
$$=2({}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5)$$
$$=2^{11}$$
$$\therefore {}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5=2^{10}$$

089 정답 120

$${}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3+{}_3H_4+{}_3H_5+{}_3H_6+{}_3H_7$$
$$={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7$$
$$={}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2+{}_9C_2 \ (\because {}_2C_0={}_2C_2)$$
$$={}_{10}C_3=120$$

090 정답 228

(ⅰ) ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8={}_{11}C_8$

(ⅱ) ${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9={}_{11}C_9$이므로

$${}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9={}_{11}C_9-{}_1C_0$$

(ⅲ) $1+{}_1C_1+{}_2C_2+{}_3C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}={}_{11}C_{10}={}_{11}C_1=11$이므로

$${}_2C_2+{}_3C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}=9$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 색칠한 부분에 있는 모든 수의 합은

$${}_{11}C_8+({}_{11}C_9-{}_1C_0)+9=165+54+9=228$$

091 정답 254 .... 서술형

$$(x+y)^7\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^3=(x+y)^7\left(\frac{x+y}{xy}\right)^3=\frac{(x+y)^{10}}{x^3y^3} \quad \cdots\cdots ①$$

이므로 x^ny^n항은 $(x+y)^{10}$의 전개식에서 x의 차수와 y의 차수가 같은 항을 x^3y^3으로 나누어 나타낼 수 있다.

$(x+y)^{10}$의 전개식에서 일반항은 ${}_{10}C_rx^{10-r}y^r$이므로 ...... ②

$10-r=r$에서 $r=5$

따라서 x^ny^n항은 $\frac{{}_{10}C_5x^5y^5}{x^3y^3}={}_{10}C_5x^2y^2$이므로 ...... ③

$n=2$, $m={}_{10}C_5=252$

$\therefore m+n=252+2=254$ ...... ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	주어진 식을 변형하기	20 %
②	이항정리를 이용하여 일반항 구하기	30 %
③	x^ny^n항 구하기	30 %
④	$m+n$의 값 구하기	20 %

Ⅱ 확률

4. 확률의 뜻과 활용

유형 pp.56~62

001 정답 (1) $\{1, 5, 7\}$ (2) B와 C (3) 32

표본공간을 S라 하면, $S=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 9, 10\}$이고

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{3, 6, 9\}$, $C=\{5, 10\}$이므로

(1) $A\cup B=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$에서

$(A\cup B)^C=\{1, 5, 7\}$

(2) 서로 배반사건이면 동시에 일어날 수 없으므로 두 사건의 곱사건이 $\varnothing$이다.

$A\cap B=\{6\}$, $A\cap C=\{10\}$, $B\cap C=\varnothing$

이므로 서로 배반사건인 것은 B와 C이다.

(3) 사건 A와 서로 배반인 사건은 $A^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합이다.

따라서 사건 A와 배반인 사건의 개수는 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^5=32$ (개)

002 정답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{11}{18}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$ (가지)

(1) (i) 두 눈의 수의 차가 4인 경우

$(1, 5)$, $(2, 6)$, $(5, 1)$, $(6, 2)$의 4가지

(ii) 두 눈의 수의 차가 5인 경우

$(1, 6)$, $(6, 1)$의 2가지

(i), (ii)에서 두 눈의 수의 차가 4 이상인 경우의 수는

$4+2=6$ (가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(2) 한 주사위의 눈의 수가 다른 주사위의 눈의 수의 배수가 되는 경우는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$ →6가지

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(2, 6)$ →4가지

$(3, 1)$, $(3, 3)$, $(3, 6)$ →3가지

$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$ →3가지

$(5, 1)$, $(5, 5)$ →2가지

$(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 6)$ →4가지

이므로 $6+4+3+3+2+4=22$ (가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$

003 정답 (1) $\frac{18}{35}$ (2) $\frac{1}{35}$

(1) 주머니에서 임의로 3개의 공을 꺼내는 방법의 수는

${}_7C_3=35$ (가지)

흰 공 4개 중에서 2개, 검은 공 3개 중에서 1개를 꺼내는 방법의 수는

${}_4C_2\times{}_3C_1=18$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_4C_2\times{}_3C_1}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$

(2) 모든 문자가 택해질 가능성이 같으므로, 네 개의 a와 두 개의 b를 서로 다른 문자 a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2로 생각하자.

a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, c를 한 줄로 나열하는 경우의 수는 $7!$

이 중에서 a_1, a_2, a_3, a_4가 이웃하지 않는 경우는

□○□○□○□

에서 4개의 □에 a_1, a_2, a_3, a_4를 배열하고 3개의 ○에 b_1, b_2, c를 배열할 때이므로 그 경우의 수는 $4!\times3!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4!\times3!}{7!}=\frac{1}{35}$

다른 풀이

문자 a, a, a, a, b, b, c를 한 줄로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!2!}=105$ (가지)

이 중에서 a끼리 이웃하지 않는 경우는

a□a□a□a

의 □ 안에 b, b, c를 넣을 때이므로 그 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$ (가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{105}=\frac{1}{35}$

004 정답 (1) $\frac{13}{100}$ (2) 5

(1) 임의로 한 고객을 택할 때, 이 고객이 서비스에 매우 만족하였을 확률은

$\frac{65}{500}=\frac{13}{100}$

(2) 주머니에서 공을 3개씩 꺼내어 보고 다시 넣는 시행을 반복할 때 12번에 1번 꼴로 3개 모두 흰 공이었으므로 3개 모두 흰 공이 나올 통계적 확률은 $\frac{1}{12}$이다.

따라서 주머니 속에 들어 있는 흰 공의 개수를 n이라고 하면 3개 모두 흰 공이 나올 수학적 확률은 $\frac{{}_nC_3}{{}_{10}C_3}$이므로

$\frac{{}_nC_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{12}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{720}=\frac{1}{12}$

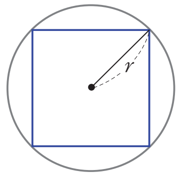
$n(n-1)(n-2)=60=5\times4\times3$

$\therefore n=5$

따라서 주머니 안에 흰 공이 5개 들어 있다고 볼 수 있다.

005 정답 $\dfrac{2}{\pi}$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 구하는 확률은



$$\frac{(\text{원에 내접하는 정사각형의 넓이})}{(\text{원의 넓이})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times 2r\times 2r}{\pi r^2}=\frac{2}{\pi}$$

확인문제 pp.56~62

092 정답 (1) $\{1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ (2) 8

(1) $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$에서 $A\cap B=\{2,\ 3\}$이므로

$$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$$

(2) 사건 A와 서로 배반인 사건은 $A^C=\{4,\ 5,\ 7\}$의 부분집합이다.

따라서 사건 A와 배반인 사건의 개수는 집합 $\{4,\ 5,\ 7\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^3=8(\text{개})$$

093 정답 ㄴ

$A=\{2,\ 3,\ 5\}$, $B=\{3,\ 6\}$, $C=\{1,\ 2,\ 4\}$에서

$$A\cap B=\{3\},\ B\cap C=\varnothing,\ A\cap C=\{2\}$$

따라서 서로 배반인 사건은 B와 C이다.

094 정답 (1) $\dfrac{3}{8}$ (2) $\dfrac{1}{2}$

서로 다른 네 개의 동전을 동시에 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$$2\times 2\times 2\times 2=16\ (\text{가지})$$

(1) 앞면이 두 개 나오는 경우는

HHTT, HTHT, HTTH,
THHT, THTH, TTHH

의 6가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

(2) 앞면이 2회 이상 연속해서 나오는 경우는

앞면이 4회 ⇨ HHHH
앞면이 3회 ⇨ HHHT, HHTH, HTHH, THHH
앞면이 2회 ⇨ HHTT, THHT, TTHH

의 8가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$

095 정답 $\dfrac{1}{9}$

모든 경우의 수는 ${}_{10}C_2=45$ (가지)

한쪽의 수가 다른 쪽의 수의 2배가 되는 경우는

1, 2 / 2, 4 / 3, 6 / 4, 8 / 5, 10

의 5가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$$

096 정답 (1) $\dfrac{1}{15}$ (2) $\dfrac{1}{5}$

6개의 문자 중에서 임의로 4개를 택하여 한 줄로 배열하는 모든 경우의 수는 ${}_6P_4$이다.

(1) A, B를 양 끝에 배열하는 경우의 수는 $2!$이고, A, B를 제외한 4개의 문자 중에서 2개를 택하여 가운데에 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_2$이므로 구하는 확률은

$$\frac{2!\times {}_4P_2}{{}_6P_4}=\frac{1}{15}$$

(2) A, B를 제외한 4개의 문자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$이고, 그 각각의 경우에 대하여 A, B를 포함한 4개의 문자를 A, B가 이웃하도록 배열하는 경우의 수는 $3!\times 2!$이므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_4C_2\times 3!\times 2!}{{}_6P_4}=\frac{1}{5}$$

097 정답 $\dfrac{5}{54}$

한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$$6\times 6\times 6=6^3\ (\text{가지})$$

이때, $a<b<c$인 경우의 수는 6개의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_6C_3$가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_6C_3}{6^3}=\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$$

098 정답 0.265

고등학생 1000명 중 가장 큰 고민이 외모인 학생은 265명이다.

따라서 어떤 한 고등학생의 가장 큰 고민이 외모일 확률은

$$\frac{265}{1000}=0.265$$

099 정답 3

주머니에서 2개의 당첨 제비를 꺼낼 때 12번에 1번 꼴로 2개 모두 당첨 제비가 나왔으므로 2개의 제비를 꺼낼 때 2개 모두 당첨 제비가 나올 통계적 확률은 $\frac{1}{12}$이다.

이때, 주머니 속에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라고 하면 2개 모두 당첨 제비가 나올 수학적 확률은 $\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$이므로

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{n(n-1)}{72}=\frac{1}{12}$$

$$n^2-n-6=0$$

$$(n+2)(n-3)=0$$

$$\therefore n=3\ (\because n>0)$$

따라서 주머니 속에 당첨 제비가 3개 들어 있다고 볼 수 있다.

100 정답 $\frac{3}{16}$

전체 영역은 반지름의 길이가 4인 원이므로

전체 영역의 넓이는

$$\pi\times4^2=16\pi$$

9점인 영역의 넓이는

$$\pi\times2^2-\pi\times1^2=3\pi$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{3\pi}{16\pi}=\frac{3}{16}$$

101 정답 $\frac{3}{4}$

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-2)x+a^2-6a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a^2-6a)=2a+4$$

이차방정식이 실근을 가지려면 $D\geq0$이어야 하므로

$$2a+4\geq0$$

$$\therefore a\geq-2$$

따라서 수직선에서 a의 값이 가질 수 있는 전체 영역의 길이는 8이고, 주어진 이차방정식이 실근을 가지도록 하는 a의 값이 가질 수 있는 영역의 길이는 6이므로 구하는 확률은

$$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

연습문제 Ⅰ

pp.63~65

102 정답 ④

$A=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$,

$B=\{(1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3)\}$,

$C=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

에서

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반이다.

ㄴ. $A\cap C=\{(3, 3)\}$이므로 두 사건 A와 C는 서로 배반이 아니다.

ㄷ. $B\cap C=\varnothing$이므로 사건 B와 C는 서로 배반이다.

따라서 서로 배반사건인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

103 정답 16

표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고 $A=\{3, 6\}$이다.

이때, 사건 A와 서로 배반인 사건을 B라 하면

$A\cap B=\varnothing$이므로 B는 $A^C=\{1, 2, 4, 5\}$의 부분집합이다.

따라서 사건 A와 서로 배반인 사건의 개수는 A^C의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^4=16$ (개)

104 정답 ③

두 사건 A, B와 모두 배반사건인 사건 C는

$A^C\cap B^C=\{4, 6\}$의 부분집합이다.

따라서 사건 C의 개수는 집합 $\{4, 6\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^2=4$ (개)

105 정답 $\frac{1}{4}$

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$의 모든 부분집합의 개수는

$$2^5=32\ (\text{개})$$

그 중 a_1, a_2를 모두 원소로 가지는 부분집합의 개수는

$$2^{5-2}=2^3=8\ (\text{개})$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$

106 정답 $\frac{1}{18}$

주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$$6\times6=36\ (\text{가지})$$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가지려면 판별식 $D=0$이어야 하므로

$$D=a^2-4b=0,\ \text{즉}\ a^2=4b$$

에서 (a, b)는 $(2, 1)$, $(4, 4)$의 2가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

107 정답 $\frac{3}{16}$

게임을 3번 시행할 때 나오는 점수를 차례로 a, b, c라고 하면 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$4\times4\times4=64$ (가지)

이 중에서 합이 7이 되는 경우는

(i) 세 수가 1, 2, 4일 때: $3!=6$ (가지)

(ii) 세 수가 1, 3, 3일 때: $\frac{3!}{2!}=3$ (가지)

(iii) 세 수가 2, 2, 3일 때: $\frac{3!}{2!}=3$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{6+3+3}{64}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$

108 정답 (1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{1}{5}$

(1) 6명의 학생이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$ (가지)

남학생과 여학생이 교대로 앉는 경우는 먼저 남학생 3명을 앉힌 후 그 사이사이에 여학생 3명을 앉히면 되므로

(i) 남학생 3명이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!$ (가지) ← 원순열의 수

(ii) 그 사이사이에 여학생 3명이 앉는 경우의 수는

$3!$가지 ← 직순열의 수

남학생과 여학생이 교대로 앉는 경우의 수는

$2!\times3!=12$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{2!\times3!}{5!}=\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

(2) a, b, c, 1, 2, 3을 한 줄로 나열하여 만들 수 있는 모든 암호의 개수는 $6!$

그 중에서 a, b, c를 묶어서 하나로 보고 나열하는 방법의 수는 $4!$개이고, 그 각각에 대하여 a, b, c가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수가 $3!$개이므로 a, b, c가 이웃해 있는 암호의 개수는

$4!\times3!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4!\times3!}{6!}=\frac{1}{5}$

109 정답 $\frac{7}{15}$

10짝의 젓가락 중에서 2짝의 젓가락을 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$ (가지)

이때, 나무무늬 젓가락 2짝이 나오는 경우의 수는

${}_4C_2=6$ (가지)

꽃무늬 젓가락 2짝이 나오는 경우의 수는

${}_6C_2=15$ (가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{6+15}{45}=\frac{7}{15}$

110 정답 $\frac{16}{35}$

두 상자 A, B에 4개씩 임의로 나누어 담는 전체 경우의 수는

${}_8C_4=70$ (가지)

두 상자 안에 담긴 공에 적힌 수의 합이 각각 홀수이려면 각 상자 안에 홀수가 적힌 공이 홀수 개 있어야 한다.

(i) 상자 A에 홀수가 적힌 공 1개와 짝수가 적힌 공 3개가 담기는 경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_4C_3=16$ (가지)

(ii) 상자 A에 홀수가 적힌 공 3개와 짝수가 적힌 공 1개가 담기는 경우의 수는 ${}_4C_3\times{}_4C_1=16$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{16+16}{70}=\frac{16}{35}$

111 정답 $\frac{36}{55}$

12개의 공에서 3개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_{12}C_3=220$ (가지)

이때, 색이 같은 2개의 공과 색이 다른 1개의 공의 색을 정하는 경우의 수는

${}_3P_2=6$ (가지)

각 경우에 대하여 같은 색 공 2개와 나머지 색 공 1개가 나오는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_4C_1=24$ (가지)

따라서 2개만 같은 색인 경우의 수는 $24\times6=144$이므로

구하는 확률은 $\frac{144}{220}=\frac{36}{55}$

다른 풀이

전체 경우의 수에서 3개 모두 같은 색이거나 3개 모두 다른 색인 경우의 수를 빼자.

12개의 공에서 3개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_{12}C_3=220$(가지)

(i) 3개 모두 다른 색을 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_1=4\times4\times4=64$ (가지)

(ii) 3개 모두 같은 색을 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_3+{}_4C_3+{}_4C_3=4+4+4=12$ (가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{220-(64+12)}{220}=\frac{144}{220}=\frac{36}{55}$

112 정답 $\frac{2}{5}$

6명을 2명씩 3팀으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15 \text{ (가지)}$$

세 팀 모두 남학생 1명, 여학생 1명으로 구성하는 경우의 수는 남학생 3명을 먼저 배치한 후

(남1, ○), (남2, ○), (남3, ○)

3개의 ○에 여학생을 1명씩 배치하면 되므로 그 경우의 수는

$$3! = 6 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

113 정답 $\frac{1}{8}$

10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = 120 \text{ (가지)}$$

이 중에서 7이 최댓값이 되는 경우는 1에서 6까지 적힌 공 중에서 2개를 꺼내고, 7이 적힌 공 1개를 꺼내는 경우이므로

$${}_6C_2 \times 1 = 15 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

114 정답 $\frac{39}{100}$

전체 공기청정기의 수는 $53+78+47+22=200$ (천 대)이고, B사에서 생산된 청정기의 수는 78 (천 대)이므로 구하는 확률은

$$\frac{78}{200} = \frac{39}{100}$$

115 정답 7

주머니에서 2개의 바둑돌을 꺼낼 때 4번에 3번 꼴로 2개 모두 흰 바둑돌이 나왔으므로 2개의 바둑돌을 꺼낼 때 2개 모두 흰 바둑돌이 나올 통계적 확률은 $\frac{3}{4}$이다.

따라서 주머니에 들어 있는 흰 바둑돌의 개수를 n개라고 하면 2개 모두 흰 바둑돌이 나올 수학적 확률은 $\frac{{}_nC_2}{{}_8C_2}$이므로

$$\frac{{}_nC_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{4},\ \frac{n(n-1)}{56} = \frac{3}{4}$$

$$n^2 - n - 42 = 0,\ (n+6)(n-7) = 0$$

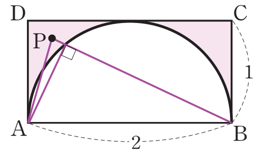
$$\therefore n = 7\ (\because n > 0)$$

따라서 주머니 안에 흰 바둑돌이 7개 들어 있다고 볼 수 있다.

116 정답 $1-\frac{\pi}{4}$

원의 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 점 P가 변 AB를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때 삼각형 PAB는 직각삼각형이다.

그러므로 이 반원의 외부에 점 P를 잡으면 삼각형 PAB는 예각삼각형이 된다.



따라서 삼각형 PAB가 예각삼각형이 되려면 점 P가 그림의 색칠한 부분에 존재해야 하므로 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})} = \frac{2 - \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2}{2}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

연습문제 Ⅱ ········· p.66

117 정답 $\frac{2}{5}$

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 3개의 수를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ (가지)}$$

세 자리의 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수이어야 한다.

1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 3개의 수를 택할 때, 그 수의 합이 3의 배수인 경우는

1, 2, 3 / 1, 2, 6 / 1, 3, 5 / 1, 5, 6,
2, 3, 4 / 2, 4, 6 / 3, 4, 5 / 4, 5, 6

의 8가지이다.

따라서 3의 배수의 개수는 위의 각 경우를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$$8 \times {}_3P_3 = 8 \times 3! = 48 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

118 정답 $\frac{5}{27}$

먼저 윤서가 2개의 주사위를 던지고, 다음에 서연이가 1개의 주사위를 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6^2\times6=216$ (가지)

윤서가 던진 주사위의 눈의 수를 각각 a, b라 하고, 서연이가 던진 주사위의 눈의 수를 c라고 하면 서연이가 이기는 경우는 $a<c<b$ 또는 $b<c<a$일 때이다.

위의 조건을 만족하는 a, b, c를 정하는 경우의 수는 1에서 6까지의 여섯 개의 수 중에서 서로 다른 세 수 a, b, c를 정하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_3\times2=40$ (가지)

따라서 구하는 확률은

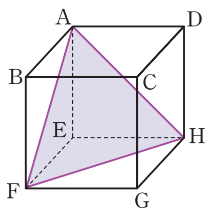
$$\frac{40}{216}=\frac{5}{27}$$

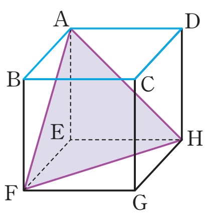
119 정답 $\frac{1}{7}$

정육면체의 8개의 꼭짓점에서 3개를 택하는 경우의 수는

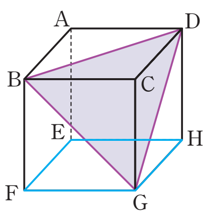
${}_8C_3=56$ (가지)

정육면체의 두 밑면 중 면 ABCD를 윗면, 면 EFGH를 아랫면으로 구분하자.





[그림 1]



[그림 2]

(i) 정삼각형의 세 꼭짓점이 놓이는 위치가 윗면에 1개, 아랫면에 2개인 경우

[그림 1]과 같이 윗면의 꼭짓점이 될 수 있는 것은 A, B, C, D의 4가지

(ii) 정삼각형의 세 꼭짓점이 놓이는 위치가 윗면에 2개, 아랫면에 1개인 경우

[그림 2]와 같이 아랫면의 꼭짓점이 될 수 있는 것은 E, F, G, H의 4가지

(i), (ii)에서 정삼각형이 되는 경우의 수는 8이므로 구하는 확률은 $\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$

120 정답 6

전체 10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼낼 때 일어나는 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_3$가지

3개 모두 흰 공이 나오는 경우의 수는 ${}_nC_3$가지

이때, 3개 모두 흰 공을 꺼낼 확률이 $\frac{1}{6}$이므로

$$\frac{{}_nC_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$$

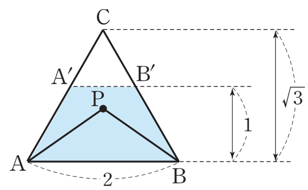
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{10\times9\times8}=\frac{1}{6}$$

$$n(n-1)(n-2)=6\times5\times4$$

$$\therefore n=6$$

121 정답 $\frac{2\sqrt{3}-1}{3}$ 서술형

삼각형 PAB의 넓이가 1 이하인 경우는 변 AB를 밑변으로 생각할 때, 높이가 1 이하인 경우, 즉 오른쪽 그림에서 점 P가 색칠한 부분(□ABB′A′)에 있는 경우이다. …… ①



한 변의 길이가 2인 정삼각형의 높이는 $\sqrt{3}$이므로

$$(\triangle\text{ABC의 넓이})=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

이때, 닮은 도형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱이므로 $\triangle\text{ABC}\backsim\triangle\text{A}'\text{B}'\text{C}$에서

$$\triangle\text{ABC} : \triangle\text{A}'\text{B}'\text{C}=(\sqrt{3})^2 : (\sqrt{3}-1)^2$$

이므로

$$\triangle\text{A}'\text{B}'\text{C}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2}\times\triangle\text{ABC}$$

$$=\frac{4-2\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}-2$$

$\therefore$ (□ABB′A′의 넓이)

$=(\triangle\text{ABC의 넓이})-(\triangle\text{A}'\text{B}'\text{C의 넓이})$

$=\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}+2=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$ …… ②

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{□ABB}'\text{A}'\text{의 넓이})}{(\triangle\text{ABC의 넓이})}=\frac{2-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-1}{3}$$ …… ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	점 P가 존재하는 영역 구하기	30 %
②	점 P가 존재하는 영역의 넓이 구하기	50 %
③	삼각형 PAB의 넓이가 1 이하일 확률 구하기	20 %

5. 확률의 덧셈정리

개념 보충

* 확률의 덧셈정리의 증명

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수를 각각 $n(A)$, $n(B)$라고 하면

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

이므로 두 사건 A 또는 B가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

특히, 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

유형 pp.70~73

001 정답 (1) 0.5 (2) 0.3

(1) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$0.7=0.3+\mathrm{P}(B)-0.1$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=0.5$$

(2) $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=0.3$에서

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$

즉, $0.3=1-\mathrm{P}(A\cup B)$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=0.7$$

이때, 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B),\ 0.7=0.4+\mathrm{P}(B)$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=0.3$$

002 정답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{7}{10}$

(1) 3의 배수인 사건을 A, 4의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 12의 배수인 사건이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{33}{100},\ \mathrm{P}(B)=\frac{25}{100},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{100}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{33}{100}+\frac{25}{100}-\frac{8}{100}=\frac{1}{2}$$

(2) 다섯 장의 카드 중에서 2장을 택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2$이다. 이때 a가 적힌 카드를 택하는 사건을 A, e가 적힌 카드를 택하는 사건을 B라 하면 a가 적힌 카드와 e가 적힌 카드를 모두 택하는 사건은 $A\cap B$이다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

003 정답 (1) $\frac{3}{7}$ (2) $\frac{2}{9}$

(1) 2개가 모두 흰 공인 사건을 A, 2개가 모두 검은 공인 사건을 B라 하면 2개가 모두 같은 색의 공인 사건은 $A\cup B$이다. 이때

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$$

(2) 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$ (가지)

두 눈의 수의 합 중에서 10의 약수인 것은 2, 5, 10이다.

(i) 두 눈의 수의 합이 2인 경우는

(1, 1)의 1가지이므로 그 확률은 $\frac{1}{36}$

(ii) 두 눈의 수의 합이 5인 경우는

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지이므로 그 확률은 $\frac{4}{36}$

(iii) 두 눈의 수의 합이 10인 경우

(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지이므로 그 확률은 $\frac{3}{36}$

(i), (ii), (iii)의 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

004 정답 (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{5}{9}$

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$ (가지)

(1) 두 눈의 수가 서로 다른 사건은 두 눈의 수가 같은 사건의 여사건이다.

두 눈의 수가 서로 같은 경우는

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)

의 6가지이므로 두 눈의 수가 서로 같을 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

(2) 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건은 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건의 여사건이다.

두 눈의 곱이 홀수가 되는 경우는

$(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)$

의 9가지이므로 두 눈의 곱이 홀수일 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(3) 적어도 한 눈의 수가 3의 배수인 사건의 여사건은 두 눈이 모두 3의 배수가 아닌 사건이다.

3의 배수가 아닌 눈의 수는 1, 2, 4, 5의 4가지이므로

두 눈이 모두 3의 배수가 아닌 경우의 수는

$4\times4=16$ (가지)이므로 두 눈이 모두 3의 배수가 아닐 확률은

$$\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

확인문제

pp.70~73

122 정답 0.4

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
$$0.7=0.3+P(B)$$
$$\therefore P(B)=0.4$$

123 정답 0.4

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$$0.9=2p+0.5-p$$
$$\therefore p=0.4$$

124 정답 $\frac{13}{18}$

9개의 공에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_9C_2$이다.

이때, 흰 공이 1개 나오는 사건을 A, 검은 공이 1개 나오는 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나오는 사건이다.

$$P(A)=\frac{{}_4C_1\times{}_5C_1}{{}_9C_2}=\frac{5}{9},\ P(B)=\frac{{}_3C_1\times{}_6C_1}{{}_9C_2}=\frac{1}{2},$$
$$P(A\cap B)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_9C_2}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{5}{9}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{13}{18}$$

125 정답 $\frac{11}{20}$

두 주머니 A, B에서 임의로 각각 한 장씩 카드를 꺼내는 모든 경우의 수는

$5\times4=20$ (가지)

두 수의 합이 5 이하인 사건을 X, 두 수의 합이 짝수인 사건을 Y라고 하면

$$X=\{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 2)\},$$
$$Y=\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (4, 8)\}$$

이고, $X\cap Y$는 두 수의 합이 5 이하의 짝수인 사건이므로

$$X\cap Y=\{(2, 2)\}$$
$$\therefore P(X)=\frac{4}{20},\ P(Y)=\frac{8}{20},\ P(X\cap Y)=\frac{1}{20}$$

따라서 두 카드에 적힌 숫자의 합이 5 이하이거나 짝수일 확률은

$$P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)$$
$$=\frac{4}{20}+\frac{8}{20}-\frac{1}{20}=\frac{11}{20}$$

126 정답 $\frac{1}{6}$

나온 눈의 수의 합이 3의 약수인 사건을 A, 4의 약수인 사건을 B라 하면

$$A=\{(1, 2), (2, 1)\}$$

이므로 $P(A)=\frac{2}{36}$

$$B=\{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

이므로 $P(B)=\frac{4}{36}$

그런데 $A\cap B=\varnothing$이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
$$=\frac{2}{36}+\frac{4}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

127 정답 $\frac{1}{4}$

2개 모두 흰 공일 사건을 A, 2개 모두 빨간 공일 사건을 B, 2개 모두 검은 공일 사건을 C라 하면

$$P(A)=\frac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{12},\ P(B)=\frac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{12},$$
$$P(C)=\frac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{12}$$

세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

128 정답 $\frac{31}{35}$

7개의 공 중에서 임의로 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_7\mathrm{C}_3=35 \text{ (가지)}$$

3개의 공이 모두 흰 공인 사건을 A라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$$

따라서 적어도 1개가 검은 공인 사건은 A^C이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$$

129 정답 $\frac{23}{28}$

삼각형이 되는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 삼각형이 만들어지지 않는 사건이다.

이때, 삼각형이 만들어지지 않으려면 한 직선 위의 5개의 점 중 3개의 점을 택하면 되므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{28}=\frac{23}{28}$$

연습문제 I .... pp.74~76

130 정답 ④

$A\cap B=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

이때, $A\cup B=S$이고, $\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(S)=2\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B)=1$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$$

131 정답 ④

$\mathrm{P}(B)=0.4$에서

$$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-0.4=0.6$$

확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B^C)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=0.5+0.6-0.4=0.7\end{aligned}$$

132 정답 $\frac{14}{15}$

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{14}{15}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{14}{15}$이다.

133 정답 (1) $\frac{13}{20}$ (2) $\frac{2}{5}$

(1) 2의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건을 A, 3의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건을 B라고 하면 $A\cap B$는 6의 배수가 나오는 사건이므로

$$n(A)=10,\ n(B)=6,\ n(A\cap B)=3$$

즉, $\mathrm{P}(A)=\frac{10}{20}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{20}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{20}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{10}{20}+\frac{6}{20}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}\end{aligned}$$

(2) 3의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건을 A, 7의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

이때, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

134 정답 $\frac{1}{2}$

임의로 택한 한 가구가 A 마트를 이용하는 사건을 A, B 마트를 이용하는 사건을 B 라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{40}{100},\ \mathrm{P}(B)=\frac{25}{100},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{15}{100}$$

임의로 택한 한 가구가 A 마트 또는 B 마트를 이용할 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{40}{100}+\frac{25}{100}-\frac{15}{100}\\&=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

135 정답 $\frac{3}{4}$

한 학생이 A 영화를 관람하는 사건을 A, B 영화를 관람하는 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$$

임의로 택한 한 학생이 A 영화 또는 B 영화를 관람하였을 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{3}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

136 정답 $\frac{3}{4}$

동전의 앞면을 H, 동전의 뒷면을 T로 나타낼 때, 표본공간을 S라고 하면

$$S=\{\text{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}\},$$
$$A=\{\text{HTT, THT, TTH}\},$$
$$B=\{\text{HHT, HTH, THH}\}$$

이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}$이다.

이때, $A\cap B=\varnothing$, 즉 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

137 정답 48

(ⅰ) $\sqrt{x}$의 정수 부분이 2인 경우

$2\le\sqrt{x}<3$에서 $4\le x<9$이므로 정수 x는 5개이다.

따라서 $\sqrt{x}$의 정수 부분이 2일 확률은 $\frac{5}{n}$이다.

(ⅱ) $\sqrt{x}$의 정수 부분이 3인 경우

$3\le\sqrt{x}<4$에서 $9\le x<16$이므로 정수 x는 7개이다.

따라서 $\sqrt{x}$의 정수 부분이 3일 확률은 $\frac{7}{n}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\sqrt{x}$의 정수 부분이 2 또는 3일 확률은

$$\frac{5}{n}+\frac{7}{n}=\frac{12}{n}$$

이므로 $\frac{12}{n}=\frac{1}{4}$에서 $n=48$

138 정답 $\frac{3}{44}$

전체 12명의 학생 중에서 3명의 대표를 선발하는 경우의 수는

$${}_{12}\mathrm{C}_3=220\ (\text{가지})$$

선발될 대표가 모두 같은 학년인 경우는 모두 1학년이거나 모두 2학년이거나 모두 3학년인 경우이다.

이때, 3명의 대표가 모두 1학년인 사건을 A, 모두 2학년인 사건을 B, 모두 3학년인 사건을 C라고 하면 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B\cup C)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)\\&=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}\\&=\frac{10}{220}+\frac{4}{220}+\frac{1}{220}=\frac{15}{220}=\frac{3}{44}\end{aligned}$$

139 정답 $\frac{8}{15}$

10개의 제비 중에서 2개의 제비를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_2=45\ (\text{가지})$$

적어도 1개가 당첨 제비인 사건을 A라 하면, A^C은 2개 모두 당첨 제비가 아닌 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

140 정답 $\frac{3}{5}$

도서관에 가는 날짜 중 겹치는 날이 있는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 겹치는 날이 없는 사건이다.

두 사람이 각각 도서관에 가는 날짜를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_2$이고, 두 사람이 겹치는 날이 없도록 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{90}{225}=\frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

141 정답 $\frac{29}{36}$

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$$6\times6=36\ (\text{가지})$$

이차방정식 $x^2-2ax+b=0$이 실근을 가지는 사건을 A라고 하면 A^C은 허근을 가지는 사건이다.

이차방정식 $x^2-2ax+b=0$이 허근을 가지려면 판별식 $D<0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=a^2-b<0,\ \text{즉}\ a^2<b$$

에서 $(a,\ b)$는 $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$, $(1,\ 6)$, $(2,\ 5)$, $(2,\ 6)$의 7가지이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{7}{36}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{36}=\frac{29}{36}$$

142 정답 $\frac{4}{9}$

한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$$6\times6\times6=216\ (\text{가지})$$

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$인 사건의 여사건은

$(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$, 즉 $x\neq y$, $y\neq z$, $z\neq x$이다.

이때, 주사위의 눈의 수 x, y, z가 서로 다른 경우의 수는

$$6\times5\times4=120\ (\text{가지})$$

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{120}{216}=\frac{96}{216}=\frac{4}{9}$

143 정답 $\frac{46}{51}$

전체 18명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{18}C_2$가지

여학생이 포함되거나 1학년 학생이 포함되는 사건을 A라고 하면, 그 여사건 A^C은 2학년 남학생 중에서 2명의 대표가 모두 뽑히는 사건이다.

이때, $P(A^C)=\frac{{}_6C_2}{{}_{18}C_2}=\frac{15}{153}=\frac{5}{51}$이므로

구하는 확률은

$$P(A)=1-\frac{5}{51}=\frac{46}{51}$$

연습문제 II

p.77

144 정답 $\frac{11}{12}$

$P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{3}$에서

$$P(A^C)=1-P(A)=\frac{3}{4},\ P(B^C)=1-P(B)=\frac{2}{3}$$

이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A^C\cup B^C)=P(A^C)+P(B^C)-P(A^C\cap B^C)$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{11}{12}$$

다른 풀이

$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=\frac{1}{2}$이므로

$$P(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

확률의 덧셈정리에 의하여

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

즉, $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-P(A\cap B)$이므로

$$P(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

$$\therefore P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)$$
$$=1-P(A\cap B)$$
$$=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

145 정답 $\frac{13}{24}$

집합 A의 부분집합은 16개이므로 이 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 택하는 경우의 수는

$${}_{16}C_2=120\ (\text{가지})$$

선택한 두 집합을 X, Y (단, $n(X)\le n(Y)$)라고 하자.

한 집합이 다른 집합의 진부분집합이 되는 경우는 $X\subset Y$이고 $X\ne Y$인 경우이므로

(i) $n(Y)=4$일 때,

집합 Y를 정하는 방법의 수는 ${}_4C_4$

집합 X는 집합 Y의 부분집합 중 $X=Y$인 경우를 제외하면 되므로 정하는 방법의 수는 2^4-1

따라서 그 확률은 $\frac{{}_4C_4\times(2^4-1)}{120}=\frac{1}{8}$

(ii) $n(Y)=3$일 때, 같은 방법으로 하면

$$\frac{{}_4C_3\times(2^3-1)}{120}=\frac{7}{30}$$

(iii) $n(Y)=2$일 때, $\frac{{}_4C_2\times(2^2-1)}{120}=\frac{3}{20}$

(iv) $n(Y)=1$일 때, $\frac{{}_4C_1\times(2-1)}{120}=\frac{1}{30}$

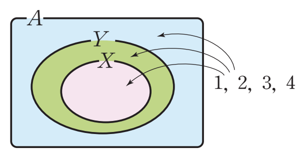
(i)~(iv)의 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{8}+\frac{7}{30}+\frac{3}{20}+\frac{1}{30}=\frac{13}{24}$$

다른 풀이

집합 A의 부분집합은 16개이므로 이 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 택하는 경우의 수는

$${}_{16}C_2=120\ (\text{가지})$$



$X\subset Y\subset A$인 집합 X, Y를 정하는 방법의 수는 오른쪽 그림에서 색이 다른 세 영역에 1, 2, 3, 4를 각각 배치하는 방법의 수와 같으므로

$$3\times3\times3\times3=3^4$$

이 중 $X=Y$인 경우는 부분집합 Y의 개수와 같으므로

2^4가지

즉, $X\subset Y\subset A$이고 $X\ne Y$인 두 집합 X, Y를 정하는 방법의 수는 3^4-2^4가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{3^4-2^4}{{}_{16}C_2}=\frac{13}{24}$$

146 정답 $\frac{5}{12}$

2개의 주사위를 동시에 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$ (가지)

(i) 눈의 수의 곱이 6인 경우

(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)의 4가지

(ii) 눈의 수의 곱이 12인 경우

(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)의 4가지

(iii) 눈의 수의 곱이 18인 경우

(3, 6), (6, 3)의 2가지

(iv) 눈의 수의 곱이 24인 경우

(4, 6), (6, 4)의 2가지

(v) 눈의 수의 곱이 30인 경우
　(5, 6), (6, 5)의 2가지
(vi) 눈의 수의 곱이 36인 경우
　(6, 6)의 1가지
(i)~(vi)의 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{4+4+2+2+2+1}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

다른 풀이

2개의 주사위를 동시에 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$$6\times6=36 \text{ (가지)}$$

2개의 주사위를 던질 때 나오는 눈의 수의 곱이 6의 배수인 사건의 여사건은 눈의 수의 곱이 2의 배수가 아니거나 3의 배수가 아닌 사건이다.

(i) 눈의 수의 곱이 2의 배수가 아닌 사건의 확률은 $\frac{3^2}{36}$

(ii) 눈의 수의 곱이 3의 배수가 아닌 사건의 확률은 $\frac{4^2}{36}$

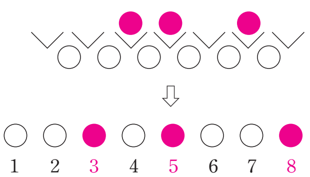
(iii) 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 사건의 확률은 $\frac{2^2}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$1-\left(\frac{3^2}{36}+\frac{4^2}{36}-\frac{2^2}{36}\right)=\frac{5}{12}$$

147 정답 $\frac{7}{12}$

적어도 두 수가 연속하는 자연수인 사건을 A라 하면
A^C은 세 수 모두 연속하지 않는 수, 즉 서로 이웃하지 않는 세 수를 뽑는 사건이다.
1부터 9까지의 자연수 중 서로 이웃하지 않는 세 수를 뽑는 경우의 수는 흰 공 6개와 빨간 공 3개를 한 줄로 배열할 때 빨간 공이 이웃하지 않도록 배열하는 방법의 수와 같다.



6개의 흰 공 사이와 양 끝의 7개의 자리 중에서 3개를 택하는 방법의 수와 같으므로 그 경우의 수는 ${}_7C_3$이다. 즉,

$$P(A^C)=\frac{{}_7C_3}{{}_9C_3}=\frac{35}{84}=\frac{5}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

다른 풀이

적어도 두 수가 연속이 되는 경우의 수를 구하자.
(i) 1, 2, □인 경우 : □에 3~9가 들어갈 수 있으므로 7가지
(ii) 2, 3, □인 경우 : □에 4~9가 들어갈 수 있으므로 6가지
(iii) 3, 4, □인 경우 : □에 1, 5~9가 들어갈 수 있으므로 6가지
(iv) 4, 5, □인 경우 : □에 1, 2, 6~9가 들어갈 수 있으므로 6가지
(v) 5, 6, □인 경우 : □에 1~3, 7~9가 들어갈 수 있으므로 6가지
(vi) 6, 7, □인 경우 : □에 1~4, 8, 9가 들어갈 수 있으므로 6가지
(vii) 7, 8, □인 경우 : □에 1~5, 9가 들어갈 수 있으므로 6가지
(viii) 8, 9, □인 경우 : □에 1~6이 들어갈 수 있으므로 6가지
즉, 적어도 두 수가 연속이 되는 경우의 수는

$$7+6\times7=49 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{49}{{}_9C_3}=\frac{49}{84}=\frac{7}{12}$$

148 정답 $\frac{3}{4}$ 서술형

9장의 카드에서 2장의 카드를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_2=36 \text{ (가지)}$$

한편, 카드에 적힌 두 수가 서로소가 아닌 경우는 2를 공약수로 가지거나 3을 공약수로 가지는 경우이다. … ①
(i) 2를 공약수로 가지는 경우
　2, 4, 6, 8의 4장의 카드 중에서 2장을 택하는 방법의 수는
　${}_4C_2=6$ (가지)이므로 그 확률은 $\frac{6}{36}$
(ii) 3을 공약수로 가지는 경우
　3, 6, 9의 3장의 카드 중에서 2장을 택하는 방법의 수는
　${}_3C_2=3$ (가지)이므로 그 확률은 $\frac{3}{36}$
따라서 카드에 적힌 두 수가 서로소가 아닐 확률은

$$\frac{6}{36}+\frac{3}{36}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ②$$

이므로 카드에 적힌 두 수가 서로소일 확률은

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots ③$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	두 수의 공약수가 될 수 있는 수 알기	20%
②	두 수가 서로소가 아닐 확률 구하기	60%
③	두 수가 서로소일 확률 구하기	20%

6. 조건부확률

개념 보충

$*\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$의 증명

표본공간 S에서 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

이다. 그런데 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$ 이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

가 성립한다.

유형 pp.81~86

001 정답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{7}{12}$

(1) $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=1-\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-0.8=0.2$$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.2}{0.4}=\frac{1}{2}$$

(2) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

이때, $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

002 정답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{2}{3}$

6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 홀수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\},\ B=\{1,\ 3,\ 5\},\ A\cap B=\{1,\ 3\}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

(1) 구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{2}$$

(2) 구하는 확률은 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{2}{3}$$

003 정답 (1) $\frac{1}{15}$ (2) $\frac{7}{30}$

A가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, B가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하자.

(1) A가 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$$

A가 당첨 제비를 뽑았을 때, B도 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{9}$$

따라서 A, B 모두 당첨될 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$$

(2) A가 당첨 제비를 뽑지 않을 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{7}{10}$$

A가 당첨 제비를 뽑지 않았을 때, B가 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

따라서 A는 당첨되지 않고 B는 당첨될 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{30}$$

004 정답 $\frac{1}{3}$

A가 흰 공을 꺼내는 사건을 A, B가 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하자.

B가 흰 공을 꺼내는 경우는

(i) A는 흰 공을 꺼내고 B도 흰 공을 꺼내거나

(ii) A는 흰 공을 꺼내지 않고(검은 공을 꺼내고) B는 흰 공을 꺼내는

경우이다.

(i) A가 흰 공을 꺼내고 B도 흰 공을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{12}$$

(ii) A는 흰 공을 꺼내지 않고 B는 흰 공을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

이고, 두 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

005 정답 (1) $\frac{13}{30}$ (2) $\frac{9}{13}$

A 주머니에서 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, B 주머니에서 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하자.

(1) B 주머니에서 흰 공을 꺼내는 경우는

(i) A 주머니에서 흰 공을 꺼내어 B 주머니에 넣고 B 주머니에서 흰 공을 꺼내거나

(ii) A 주머니에서 검은 공을 꺼내어 B 주머니에 넣고 B 주머니에서 흰 공을 꺼내는

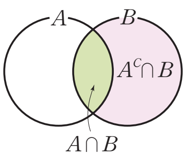
경우이다.

(i)의 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{10}$$

(ii)의 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$$
$$=\frac{2}{5}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{15}$$



두 사건 (i), (ii)는 서로 배반사건이므로 B 주머니에서 나온 공이 흰 공일 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{3}{10}+\frac{2}{15}=\frac{13}{30}$$

(2) 구하는 확률은 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부 확률이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{13}{30}}=\frac{9}{13}$$

확인문제 pp.81~86

149 정답 $\frac{2}{3}$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=0.3+0.4-0.5=0.2$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}$$

150 정답 $\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)\qquad\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

151 정답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$

짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$$A=\{2,\ 4,\ 6\},\ B=\{2,\ 3,\ 5\},\ A\cap B=\{2\}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

(1) 구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부 확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{3}$$

(2) 구하는 확률은 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부 확률이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{3}$$

152 정답 $\frac{5}{9}$

주어진 상황을 표로 나타내면 아래와 같다.

	남학생	여학생	합계
A영화를 관람한 학생	7	4	11
A영화를 관람하지 않은 학생	5	4	9
계	12	8	20

A영화를 관람한 사건을 X, 남학생인 사건을 Y라고 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X^C)=\frac{\mathrm{P}(Y\cap X^C)}{\mathrm{P}(X^C)}=\frac{\frac{5}{20}}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}$$

153 정답 $\frac{1}{21}$

처음 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하자.

처음 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{7}$$

처음 꺼낸 공이 흰 공일 때, 두 번째 꺼낸 공도 흰 공일 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{6}$$

따라서 두 공 모두 흰 공일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{21}$$

다른 풀이

7개의 공에서 2개를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2=21$ (가지)

2개의 흰 공에서 흰 공 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_2=1$ (가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{21}$이다.

154 정답 $\frac{3}{28}$

윤서가 기념품이 포함된 상품을 택하는 사건을 A, 서연이가 기념품이 포함된 상품을 택하는 사건을 B라 하자.
윤서가 기념품이 포함된 상품을 택할 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$$

윤서가 기념품이 포함된 상품을 택했을 때 서연이가 기념품이 포함된 상품을 택할 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$$

155 정답 $\frac{2}{7}$

두 번째로 쪽지를 꺼낸 사람이 '당번'이 쓰여진 쪽지를 꺼내는 경우는
(i) 첫 번째로 쪽지를 꺼낸 사람이 '당번'이 쓰여진 쪽지를 꺼내고, 두 번째로 쪽지를 꺼낸 사람도 '당번'이 쓰여진 쪽지를 꺼내거나
(ii) 첫 번째로 쪽지를 꺼낸 사람은 깨끗한 쪽지를 꺼내고 두 번째로 쪽지를 꺼낸 사람이 '당번'이 쓰여진 쪽지를 꺼내는 경우이다.

(i)의 확률은 $\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{21}$

(ii)의 확률은 $\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{21}$

두 사건 (i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{21}+\frac{5}{21}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

156 정답 $\frac{1}{2}$

A 주머니를 선택하는 사건을 A, B 주머니를 선택하는 사건을 B, 흰 공이 나오는 사건을 H라 하자.
흰 공이 나오는 경우는
(i) A 주머니를 선택하고 그 주머니에서 나온 공이 흰 공이거나
(ii) B 주머니를 선택하고 그 주머니에서 나온 공이 흰 공인 경우이다.

(i)의 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap H)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(H|A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{7}$$

(ii)의 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap H)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(H|B)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{14}$$

두 사건 (i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(H)=\mathrm{P}(A\cap H)+\mathrm{P}(B\cap H)=\frac{1}{7}+\frac{5}{14}=\frac{1}{2}$$

157 정답 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{2}{7}$

첫 번째 사람이 꺼낸 복권이 당첨 복권일 사건을 A, 두 번째 사람이 꺼낸 복권이 당첨 복권일 사건을 B라 하자.
(1) 두 번째 사람이 꺼낸 복권이 당첨 복권인 경우는
(i) 첫 번째 사람이 꺼낸 복권이 당첨 복권이고 두 번째 사람이 꺼낸 복권도 당첨 복권이거나
(ii) 첫 번째 사람이 꺼낸 복권이 당첨 복권이 아니고 두 번째 사람이 꺼낸 복권이 당첨 복권인
경우이다.

(i)의 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$$

(ii)의 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\ \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$$

이고, 두 사건은 서로 배반사건이므로 두 번째 사람이 꺼낸 복권이 당첨 복권일 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{3}{28}+\frac{15}{56}=\frac{3}{8}$$

(2) 구하는 확률은 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부 확률이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{3}{28}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{7}$$

158 정답 (1) $\frac{5}{12}$ (2) $\frac{2}{5}$

A 주머니를 선택하는 사건을 A, B 주머니를 선택하는 사건을 B, 흰 공을 꺼내는 사건을 H라 하자.
(1) 흰 공이 나오는 경우는
(i) A 주머니를 선택하고 그 주머니에서 꺼낸 공이 흰 공이거나
(ii) B 주머니를 선택하고 그 주머니에서 꺼낸 공이 흰 공인 경우이다.

(i)의 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap H)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(H|A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

(ii)의 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap H)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(H|B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

두 사건 (i), (ii)는 서로 배반사건이므로 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$\mathrm{P}(H)=\mathrm{P}(A\cap H)+\mathrm{P}(B\cap H)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

(2) 구하는 확률은 사건 H가 일어났을 때의 사건 A의 조건부 확률이므로

$$\mathrm{P}(A|H)=\frac{\mathrm{P}(A\cap H)}{\mathrm{P}(H)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{5}$$

159 정답 $\frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

160 정답 $\frac{1}{54}$

$$\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}+\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\left\{\frac{1}{\mathrm{P}(B)}+\frac{1}{\mathrm{P}(A)}\right\}\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=(5+4)\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=9\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{54}$$

161 정답 $\frac{4}{9}$

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{4}$에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{3}$에서

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$$

이때, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{4}\mathrm{P}(B),\ \frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}$$

162 정답 ④

임의로 뽑은 한 명이 여학생인 사건을 A, 안경을 쓴 학생인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{25},\ \mathrm{P}(A)=\frac{12}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{8}{25}}{\frac{12}{25}}=\frac{2}{3}$$

163 정답 $\frac{1}{5}$

짝수가 적힌 카드가 나오는 사건을 A, 3의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건을 B라고 하면

$$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\},\ B=\{3,\ 6,\ 9\},\ A\cap B=\{6\}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$$

구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{5}$$

164 정답 $\frac{2}{5}$

첫 번째 나온 눈의 수가 두 번째 나온 눈의 수보다 큰 경우는 1부터 6까지의 6개의 수에서 두 수를 택하여 큰 수를 첫 번째 나온 눈의 수로 하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2=15$(가지)이다.

따라서 사건 A가 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{36}=\frac{5}{12}$

사건 $A\cap B$가 일어나는 경우는 $(3,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 1)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 2)$, $(6,\ 4)$의 6가지이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{5}$$

165 정답 ④

$a<4$인 사건 A를 구하면 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$a<4$, $|a-b|<4$를 모두 만족하는 a, b의 경우는

$a=1$일 때 $b=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$a=2$일 때 $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$a=3$일 때 $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

에서 $4+5+6=15$(가지)이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{6}$$

166 정답 $\frac{1}{990}$

11장의 카드 중 m, i, n, a가 쓰여진 카드가 각각 1장, 2장, 2장, 2장이 있다.

첫 번째로 m이 쓰여진 카드를 뽑을 확률은 $\frac{1}{11}$

두 번째로 남은 10장의 카드 중에서 i가 쓰여진 카드를 뽑을 확률은 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

세 번째로 남은 9장의 카드 중에서 n이 쓰여진 카드를 뽑을 확률은 $\frac{2}{9}$

네 번째로 남은 8장의 카드 중에서 a가 쓰여진 카드를 뽑을 확률은 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{11}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{990}$$

167 정답 ④

다음 각 경우로 나누어 구하자.

(i) A 주머니에서 꺼낸 구슬이 2개 모두 흰 구슬일 때, B 주머니에서 검은 구슬을 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{25}$$

(ii) A 주머니에서 꺼낸 구슬이 흰 구슬 1개, 검은 구슬 1개일 때, B 주머니에서 검은 구슬을 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

(iii) A 주머니에서 꺼낸 구슬이 2개 모두 검은 구슬일 때, B 주머니에서 검은 구슬을 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{25}$$

(i), (ii), (iii)은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{3}{25}+\frac{9}{25}+\frac{2}{25}=\frac{14}{25}$$

168 정답 ③

처음 5번의 검사에서 불량품을 1개만 발견할 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_8C_4}{{}_{10}C_5}=\frac{5}{9}$$

6번째 검사에서 불량품을 발견할 확률은 $\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5}{9}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{9}$$

169 정답 $\frac{7}{15}$

10개의 제품이 합격품으로 인정받으려면 7개의 합격품 중 2개를 뽑아야 한다.

처음 꺼낸 제품이 합격품일 확률은 $\frac{7}{10}$

처음 꺼낸 제품이 합격품일 때, 두 번째 꺼낸 제품도 합격품일 확률은 $\frac{6}{9}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{7}{15}$

170 정답 ⑤

상자 C에서 공을 1개 꺼낼 때, 그것이 검은 공인 경우는 다음 3가지의 경우로 나눌 수 있다.

(i) 두 상자 A, B에서 모두 검은 공을 꺼내어 상자 C에 넣은 경우

$$\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{35}$$

(ii) 상자 A에서 검은 공, 상자 B에서 흰 공을 꺼내어 상자 C에 넣은 경우

$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$$

(iii) 상자 A에서 흰 공, 상자 B에서 검은 공을 꺼내어 상자 C에 넣은 경우

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{35}$$

따라서 상자 C에서 1개를 꺼낼 때 검은 공이 나올 확률은

$$\frac{9}{35}\times1+\frac{12}{35}\times\frac{1}{2}+\frac{6}{35}\times\frac{1}{2}=\frac{18}{35}$$

171 정답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$

첫 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하자.

(1) 첫 번째 꺼낸 공이 흰 공일 때, 주머니에 남아있는 공은 흰 공 3개와 검은 공 6개이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

(2) 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 경우는

(i) 첫 번째 꺼낸 공이 흰 공이고 두 번째 꺼낸 공도 흰 공이거나

(ii) 첫 번째 꺼낸 공이 검은 공이고 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 경우이다.

(i)의 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$$

(ii)의 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$$

두 사건 (i), (ii)는 서로 배반사건이므로 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$$
$$=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

따라서 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률을 구하면

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{3}$$

172 정답 ②

주사위 A를 택하는 사건을 A, 주사위 B를 택하는 사건을 B라 하고, 택한 주사위를 한 번 던져서 1이 적힌 면이 나오는 사건을 C라고 하자.

$$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

173 정답 $\frac{5}{7}$

처음에 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 검은 공인 사건을 B라 하고, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 E라 하자.
두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 경우는 처음에 흰 공이 나와서 3개의 흰 공을 다시 넣은 후 꺼낸 공이 흰 공이거나 처음에 검은 공이 나와서 3개의 검은 공을 다시 넣은 후 꺼낸 공이 흰 공인 경우이므로 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률 $P(E)$는

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{21}{35}=\frac{3}{5}$$

따라서 구하는 확률은 사건 E가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률이므로

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{7}$$

연습문제 Ⅱ p.90

174 정답 $\frac{1}{3}$

$P(B^C|A)=\frac{P(B^C\cap A)}{P(A)}$이므로

$$P(B^C\cap A)=P(A)P(B^C|A)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$$

이때, $P(B^C\cap A)=P(A)-P(A\cap B)$이므로

$$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^C)=\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$$

175 정답 $\frac{2}{3}$

나중에 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 경우는 다음 2가지가 있다.

(i) 처음 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 때

$$\frac{{}_5C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{10}{15}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}$$

(ii) 처음 꺼낸 2개의 공이 흰 공 1개, 검은 공 1개일 때

$$\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_4C_2}=\frac{5}{15}\times1=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

176 정답 (1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{10}{21}$

(1) 세 번째에 흰 공이 나오는 경우는
(흰 공, 흰 공, 흰 공), (흰 공, 검은 공, 흰 공),
(검은 공, 흰 공, 흰 공), (검은 공, 검은 공, 흰 공)
의 4가지가 있다.

(i) (흰 공, 흰 공, 흰 공)일 확률은 $\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{5}{14}$

(ii) (흰 공, 검은 공, 흰 공)일 확률은 $\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{28}$

(iii) (검은 공, 흰 공, 흰 공)일 확률은 $\frac{2}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{28}$

(iv) (검은 공, 검은 공, 흰 공)일 확률은 $\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}\times\frac{6}{6}=\frac{1}{28}$

이고, 각 사건은 서로 배반사건이므로 세 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$\frac{5}{14}+\frac{5}{28}+\frac{5}{28}+\frac{1}{28}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$$

(2) 세 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 흰 공이 2개째 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

이때, 세 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률 $P(A)$는 (1)에 의하여

$$P(A)=\frac{3}{4}$$

세 번째 꺼낸 공이 2개째 나온 흰 공인 경우는 (1)에서 (ii), (iii)인 경우이므로 그 확률 $P(A\cap B)$는

$$P(A\cap B)=\frac{5}{28}+\frac{5}{28}=\frac{5}{14}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{14}}{\frac{3}{4}}=\frac{10}{21}$$

177 정답 ①

한 사람이 암에 걸린 사건을 A, 검사 결과 양성이 나오는 사건을 B라 하자.

$$\mathrm{P}(A)=0.005$$

임의의 한 사람이 이 검사를 받았을 때 결과가 양성으로 나오는 경우는 다음의 2가지가 있다.

(i) 암에 걸린 사람이 검사를 받아 양성으로 나오거나

(ii) 암에 걸리지 않은 사람이 검사를 받아 양성으로 나오는 경우이고, 두 사건은 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=0.005\times0.98+0.995\times0.02\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|B)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}\\&=\frac{0.005\times0.98}{0.005\times0.98+0.995\times0.02}\\&=\frac{0.0049}{0.0248}=0.1957\times\times\times\end{aligned}$$

에서 약 20 %이다.

178 정답 $\frac{23}{100}$ 서술형

오늘 비가 왔을 때, 모레 비가 오는 경우는 다음 2가지로 나눌 수 있다.

오늘	내일	모레
비○	비○	비○
	비×	비○

(i) 내일 비가 오고 모레도 비가 오거나

(ii) 내일 비가 오지 않고 모레 비가 오는 경우 … ①

이때, 어느 날 비가 오면 그 다음 날 비가 오지 않을 확률은 $\frac{7}{10}$이고, 비가 오지 않으면 그 다음 날 비가 올 확률은 $\frac{2}{10}$이므로

(i)의 확률은

$$\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$$ … ②

(ii)의 확률은

$$\frac{7}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{14}{100}$$ … ③

두 사건 (i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{9}{100}+\frac{14}{100}=\frac{23}{100}$$ … ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	모레 비가 오는 경우를 각각 구하기	20%
②	내일 비가 오고 모레도 비가 올 확률 구하기	30%
③	내일 비가 오지 않고 모레 비가 올 확률 구하기	30%
④	오늘 비가 왔을 때 모레 비가 올 확률 구하기	20%

7. 독립사건과 종속사건

개념 보충

두 사건 A, B가 서로 독립이면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ \cdots\cdots(*)$$

(1) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ (\because (*))\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A^C, B는 서로 독립이다.

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ (\because (*))\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A, B^C은 서로 독립이다.

(3) $$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A^C\cap B^C)\\&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}\ (\because (*))\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}-\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A)\}\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A^C, B^C은 서로 독립이다.

유형 pp.95~99

001 정답 (1) 독립 (2) 독립 (3) 종속

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{3, 6\}$, $C=\{2, 3, 5\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$$

(1) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이고,

$A\cap B=\{6\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(2) $\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$이고,

$B\cap C=\{3\}$에서 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 독립이다.

(3) $P(A)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이고,

$A\cap C=\{2\}$에서 $P(A\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$$P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 종속이다.

002 정답 (1) **0.504** (2) **0.398**

세 선수 A, B, C가 명중하는 사건을 각각 A, B, C라고 하면

$$P(A)=0.8,\ P(B)=0.9,\ P(C)=0.7$$

이때, $P(A^C)=0.2$, $P(B^C)=0.1$, $P(C^C)=0.3$이고 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로

(1) 세 명 모두 명중할 확률은

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$
$$=0.8\times0.9\times0.7=0.504$$

(2) 두 명만 명중할 확률은

$$P(A\cap B\cap C^C)+P(A\cap B^C\cap C)+P(A^C\cap B\cap C)$$
$$=P(A)P(B)P(C^C)+P(A)P(B^C)P(C)+P(A^C)P(B)P(C)$$
$$=0.8\times0.9\times0.3+0.8\times0.1\times0.7+0.2\times0.9\times0.7$$
$$=0.398$$

003 정답 $\frac{16}{27}$

이 선수의 자유투 성공률이 $\frac{2}{3}$이므로 성공하지 못할 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 자유투 4번 중

3번 성공할 확률은 ${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$

4번 모두 성공할 확률은 ${}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4$

따라서 3번 이상 성공할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)+{}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4=4\times\frac{8}{27}\times\frac{1}{3}+\frac{16}{81}$$
$$=\frac{16}{27}$$

004 정답 $\frac{1}{3}$

8번의 독립시행에서 사건 A가 2번 일어날 확률은

$$P_2={}_8C_2p^2(1-p)^6$$

8번의 독립시행에서 사건 A가 3번 일어날 확률은

$$P_3={}_8C_3p^3(1-p)^5$$

두 확률이 같으므로

$${}_8C_2p^2(1-p)^6={}_8C_3p^3(1-p)^5$$
$$28(1-p)=56p$$
$$1-p=2p$$
$$\therefore p=\frac{1}{3}$$

확인문제 pp.95~99

179 정답 **종속**

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{3, 6, 9\}$이므로

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{3}{10}$$

이때, $P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$이고,

$A\cap B=\{6\}$에서 $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$이므로

$$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

180 정답 (1) **독립** (2) **독립** (3) **독립**

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 할 때, 10원짜리 동전 1개와 100원짜리 동전 1개를 던지는 시행에서 표본공간 S는

$$S=\{HH, HT, TH, TT\}$$

이때, $A=\{HH, HT\}$, $B=\{HT, TT\}$, $C=\{HH, TT\}$이므로 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{2}$

(1) $P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이고,

$A\cap B=\{HT\}$에서 $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(2) $P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이고,

$B\cap C=\{TT\}$에서 $P(B\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 독립이다.

(3) $P(A)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이고,

$C\cap A=\{HH\}$에서 $P(C\cap A)=\frac{1}{4}$이므로

$$P(C\cap A)=P(C)P(A)$$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

181 정답 **0.46**

A가 성공하는 사건을 A, B가 성공하는 사건을 B라 하면 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$P(A)=0.6,\ P(B)=0.7,\ P(A^C)=0.4,\ P(B^C)=0.3$$

이때, A만 성공할 확률은

$$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)=0.6\times0.3=0.18$$

B만 성공할 확률은

$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)=0.4\times0.7=0.28$$

따라서 두 명 중 한 명만 성공할 확률은

$$P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)=0.18+0.28=0.46$$

182 정답 $\frac{13}{32}$

세 학생 A, B, C가 시험에 합격하는 사건을 각각 A, B, C 라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{3}{4}$$

이때, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C^C)=\frac{1}{4}$이고 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로 이 시험에 두 사람만 합격할 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B\cap C^C)+\mathrm{P}(A\cap B^C\cap C)+\mathrm{P}(A^C\cap B\cap C)$$
$$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C^C)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$$
$$=\frac{1+3+9}{32}=\frac{13}{32}$$

183 정답 ⑤

공을 한 개 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$이다.

따라서 9회의 시행 중 흰 공이 2회 나올 확률은

$${}_9\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^7=36\times\frac{3^7}{4^9}=\frac{3^9}{4^8}$$

184 정답 4

주사위를 한 번 던졌을 때 3의 배수가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로

주사위를 6번 던졌을 때

3의 배수가 2번 나올 확률은 $a={}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4$

3의 배수가 4번 나올 확률은 $b={}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4}{{}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2^4}{2^2}=4$$

185 정답 $\frac{4}{7}$

6번의 독립시행에서 사건 A가 3번 일어날 확률은

$${}_6\mathrm{C}_3p^3(1-p)^3$$

6번의 독립시행에서 사건 A가 4번 일어날 확률은

$${}_6\mathrm{C}_4p^4(1-p)^2$$

두 확률이 같으므로

$${}_6\mathrm{C}_3p^3(1-p)^3={}_6\mathrm{C}_4p^4(1-p)^2$$
$$20(1-p)=15p,\ 7p=4$$
$$\therefore p=\frac{4}{7}$$

186 정답 5

매회의 시행에서 검은 공이 나올 확률은 $\frac{k}{3+k}$이므로

7회의 시행에서 검은 공이 4번 나올 확률은

$${}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{k}{3+k}\right)^4\left(\frac{3}{3+k}\right)^3$$

7회의 시행에서 검은 공이 5번 나올 확률은

$${}_7\mathrm{C}_5\left(\frac{k}{3+k}\right)^5\left(\frac{3}{3+k}\right)^2$$

두 확률이 서로 같으므로

$${}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{k}{3+k}\right)^4\left(\frac{3}{3+k}\right)^3={}_7\mathrm{C}_5\left(\frac{k}{3+k}\right)^5\left(\frac{3}{3+k}\right)^2$$
$$35\times\frac{3}{3+k}=21\times\frac{k}{3+k}$$
$$\therefore k=5$$

연습문제 I ······ pp.100~101

187 정답 독립

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

이때, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$이고,

$A\cap B=\{2,\ 6\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

188 정답 (1) 독립 (2) 종속 (3) 종속

표본공간을 S라고 하면 $n(S)=2\times2\times2=8$

이때, 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$$A=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{HTT}\},$$
$$B=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HTT},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{TTH}\},$$
$$C=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{THH}\}$$

이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

(1) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이고,

$A\cap B=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HTT}\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(2) $\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이고,

$B\cap C=\{\mathrm{HHH}\}$에서 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

(3) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이고,

$A\cap C=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH}\}$에서

$\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{3}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 C와 A는 서로 종속이다.

189 정답 ⑤

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 표본공간 S는

$$S=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{THH},\ \mathrm{HTT},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{TTH},\ \mathrm{TTT}\}$$

이때, $A=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{HHT},\ \mathrm{HTH},\ \mathrm{THH}\}$,

$B=\{\mathrm{HHH},\ \mathrm{TTT}\}$이므로

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $A\cap B=\{\mathrm{HHH}\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

즉, 두 사건 A와 B는 서로 독립이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

190 정답 $\frac{1}{2}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이때, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}\qquad\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$

191 정답 ③

두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C와 B도 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$$

$$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$$

$$1-\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

192 정답 22

남자인 사건을 A, 미혼인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{55}{100}=\frac{11}{20}$$

이때, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$$\frac{a}{100}=\frac{2}{5}\times\frac{11}{20}\qquad\therefore\ a=22$$

193 정답 ②

모든 사람이 각 층에서 내릴 확률이 $\frac{1}{4}$이므로

3층에서 4명 중 2명이 내릴 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{6\times3^2}{4^4}=\frac{27}{128}$$

194 정답 $\frac{255}{256}$

적어도 한 명이 완치될 사건을 A라고 하면 A^C은 한 명도 완치되지 않는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$

$$=1-\frac{1}{256}$$

$$=\frac{255}{256}$$

195 정답 ①

문제를 읽지 않고 답을 선택하여 정답을 맞힐 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

이때, 이 시험에서 합격하려면 4문제 또는 5문제의 정답을 맞혀야 하므로 구하는 확률은

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{5}\right)^4\times\frac{4}{5}+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{5}\right)^5=\frac{20}{5^5}+\frac{1}{5^5}=\frac{21}{5^5}$$

196 정답 $\frac{7}{8}$

세 문제를 모두 맞히지 못할 경우 부활하지 못한다.

패자부활전에 참가한 학생이 세 문제를 모두 맞히지 못할 확률은 ${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

따라서 그 학생이 부활할 확률은

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

연습문제 Ⅱ

p.102

197 정답 $\frac{5}{9}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cup B^C)&=\mathrm{P}((A\cap B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=1-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=1-\{\mathrm{P}(A)\}^2=\frac{8}{9}\end{aligned}$$

이므로 $\{\mathrm{P}(A)\}^2=\frac{1}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로

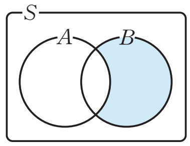
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

198 정답 풀이 참조

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

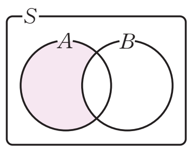
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

(1) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$



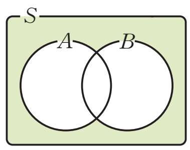
따라서 두 사건 A^C, B는 서로 독립이다.

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$



따라서 두 사건 A, B^C은 서로 독립이다.

(3) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}(A^C)-\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A^C)-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A^C)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$



따라서 두 사건 A^C, B^C은 서로 독립이다.

199 정답 ⑤

ㄱ. 두 사건 A, B가 독립이므로 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$ (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

또, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B|A)$ (참)

ㄷ. $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cup B^C)&=\mathrm{P}((A\cap B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=1-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ (\text{참})\end{aligned}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

200 정답 $\frac{17}{27}$

유권자 5명 중에서 3표 이상 얻어야 과반수 득표가 된다.

후보 A가 과반수 득표를 할 확률은

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{17}{81}$$

마찬가지로 두 후보 B, C가 과반수 득표를 할 확률도 각각 $\frac{17}{81}$로 같다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{17}{81}\times 3=\frac{17}{27}$$

201 정답 $\frac{5}{16}$ 서술형

동전을 5번 던져 앞면이 x번, 뒷면이 y번 나왔다고 하면

$x+y=5$ …… ㉠

이때, 점 P의 위치는 $x-y$이므로

$x-y=1$ …… ㉡ … ①

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=2$

즉, 동전을 5번 던졌을 때, 점 P가 수직선 위의 1에 오는 것은 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나올 때이다. … ②

따라서 구하는 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	앞면과 뒷면이 나오는 횟수를 각각 x, y로 놓고 식 세우기	40 %
②	x, y의 값 구하기	20 %
③	점 P가 수직선 위의 1에 올 확률 구하기	40 %

Ⅲ 통계

8. 확률분포

개념 보충

$$
\begin{aligned}
V(X)&=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+(x_3-m)^2p_3+\\
&\qquad\cdots+(x_n-m)^2p_n\\
&=(x_1^2p_1+x_2^2p_2+x_3^2p_3+\cdots+x_n^2p_n)\\
&\quad-2m(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n)\\
&\quad+m^2(p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n)\\
&=(x_1^2p_1+x_2^2p_2+x_3^2p_3+\cdots+x_n^2p_n)-2m^2+m^2\\
&=(x_1^2p_1+x_2^2p_2+x_3^2p_3+\cdots+x_n^2p_n)-m^2\\
&=E(X^2)-\{E(X)\}^2
\end{aligned}
$$

개념 보충

확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때,
확률변수 $aX+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)의 평균, 분산, 표준편차를 각각 구해보자.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

(1) $E(aX+b)=(ax_1+b)p_1+(ax_2+b)p_2+(ax_3+b)p_3+\cdots+(ax_n+b)p_n$

$$
\begin{aligned}
&=(ax_1p_1+ax_2p_2+ax_3p_3+\cdots+ax_np_n)+b(p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n)\\
&=a(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n)+b(p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n)\\
&=aE(X)+b \leftarrow x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n=E(X),\ p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1
\end{aligned}
$$

(2) $V(aX+b)=E((aX+b)^2)-\{E(aX+b)\}^2$ $\leftarrow V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$
\begin{aligned}
&=E(a^2X^2+2abX+b^2)-\{aE(X)+b\}^2 \leftarrow \text{(1)에서 } E(aX+b)=aE(X)+b\\
&=a^2E(X^2)+2abE(X)+b^2-[a^2\{E(X)\}^2+2abE(X)+b^2]\\
&=a^2E(X^2)-a^2\{E(X)\}^2\\
&=a^2[E(X^2)-\{E(X)\}^2] \leftarrow V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\
&=a^2V(X)
\end{aligned}
$$

(3) $\sigma(aX+b)=\sqrt{V(aX+b)}$ $\leftarrow \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{a^2V(X)} \leftarrow \text{(2)에서 } V(aX+b)=a^2V(X)\\
&=|a|\sigma(X) \leftarrow \sqrt{a^2}=|a|
\end{aligned}
$$

유형 pp.110~122

001 정답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{5}{12}$

(1) 확률의 총합은 1이므로

$$a^2+\frac{1}{6}+\frac{a}{2}+\frac{1}{3}=1$$
$$2a^2+a-1=0$$
$$(2a-1)(a+1)=0$$
$$\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$$

(2) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 3, 5, 7이고,
그 중 $2\le X\le6$을 만족하는 값은 3, 5뿐이므로

$$
\begin{aligned}
P(2\le X\le6)&=P(X=3)+P(X=5)\\
&=\frac{1}{6}+\frac{a}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\\
&=\frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

002 정답 (1) $\frac{1}{15}$
(2) $P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

(1) 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=5)=1$$

에서 $k+2k+3k+4k+5k=1$

$$15k=1$$
$$\therefore k=\frac{1}{15}$$

(2) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고,
주사위를 1회 던졌을 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 독립시행의 확률에 의하여 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

003 정답 (1) $\frac{1}{10}$ (2) 1

(1) 확률의 총합은 1이므로 $\frac{1}{10}+a+b+\frac{2}{5}=1$에서

$$a+b=\frac{1}{2} \quad\cdots\cdots ㉠$$

$E(X)=10\times\frac{1}{10}+20\times a+30\times b+40\times\frac{2}{5}=30$에서

$$20a+30b=13 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{5},\ b=\frac{3}{10}$$
$$\therefore b-a=\frac{1}{10}$$

(2) X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\times{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{5},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_4C_1}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 확률변수 X의 기댓값은

$$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$$

004 정답 (1) 1 (2) $\frac{35}{12}$

(1) 확률의 총합은 1이므로 $\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+p+\frac{2}{5}=1$에서

$$p=\frac{3}{10}$$

$$E(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{2}{5}=3,$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{2}{5}=10$$

이므로 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=10-3^2=1$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{1}=1$$

(2) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X)=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2},$$

$E(X^2)=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6}=\frac{91}{6}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

005 정답 (1) 90 (2) 10

(1) $\sigma(X)=3$에서 $V(X)=3^2=9$이고, $E(X)=6$이므로

$$E(Y)=E(3X-15)=3E(X)-15$$
$$=3\times6-15=3$$
$$V(Y)=V(3X-15)=3^2V(X)=9\times9=81$$

한편, $V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$이므로

$$E(Y^2)=V(Y)+\{E(Y)\}^2=81+3^2=90$$

(2) X : 1, 2, 3, 4, 5

Y : 112, 114, 116, 118, 120

이라고 하면

$$E(X)=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3,$$

$E(X^2)=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5}=11$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=11-3^2=2$$

$$\therefore a=2$$

이때, $Y=2X+110$이므로

$$V(Y)=V(2X+110)$$
$$=2^2V(X)=4\times2=8$$

따라서 $b=8$이므로

$$a+b=10$$

006 정답 (1) $B\left(20, \frac{1}{8}\right)$

(2) $P(X=x)={}_{20}C_x\left(\frac{1}{8}\right)^x\left(\frac{7}{8}\right)^{20-x}$

$(x=0, 1, 2, \cdots, 20)$

(1) 서로 다른 동전 3개를 동시에 던지는 시행을 20번 반복하는 것, 즉 20회의 독립시행이므로 $n=20$

서로 다른 동전 3개를 동시에 던질 때 모두 앞면이 나올 확률은 ${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$이므로 $p=\frac{1}{8}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{8}\right)$을 따른다.

(2) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, $\cdots$, 20이고, 독립시행의 확률에 의하여 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{20}C_x\left(\frac{1}{8}\right)^x\left(\frac{7}{8}\right)^{20-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 20)$$

007 정답 (1) 20 (2) $\frac{1}{10}$

(1) 확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$V(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}n$$

한편, $\sigma(X)=3$에서 $V(X)=\{\sigma(X)\}^2=9$이므로

$$\frac{3}{16}n=9 \qquad \therefore n=48$$

따라서 확률변수 X가 이항분포 $B\left(48, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$E(X)=48\times\frac{1}{4}=12$$

$$\therefore E(2X-4)=2E(X)-4=24-4=20$$

(2) 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로

$$E(X)=np=10,$$
$$V(X)=np(1-p)=10(1-p)$$

한편, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$10(1-p)=109-10^2=9,\ 1-p=\frac{9}{10}$$

$$\therefore p=\frac{1}{10}$$

008 정답 3000원

한 개의 주사위를 90번 던졌을 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 1회의 시행에서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, $\leftarrow p=\frac{1}{3}$

90번의 독립시행이므로 $\leftarrow n=90$

X는 이항분포 $B\left(90, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=90\times\frac{1}{3}=30$$

이때, 상금의 액수를 Y라고 하면 $Y=100X$이므로

상금의 기댓값은

$$E(Y)=E(100X)=100E(X)$$
$$=100\times30=3000(\text{원})$$

확인문제 pp.110~122

202 정답 $\frac{3}{7}$

확률의 총합은 1이므로 $2a+\frac{a}{2}+a=1$에서

$\frac{7}{2}a=1 \qquad \therefore a=\frac{2}{7}$

$X\geq0$을 만족하는 X의 값은 0 또는 1이므로

$$P(X\geq0)=P(X=0)+P(X=1)$$
$$=\frac{a}{2}+a=\frac{3}{2}a=\frac{3}{2}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$$

203 정답 $\frac{5}{8}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+a+b+\frac{1}{4}=1 \qquad \therefore a+b=\frac{5}{8}$

$1\leq X\leq2$를 만족하는 X의 값은 1 또는 2이므로

$$P(1\leq X\leq2)=P(X=1)+P(X=2)$$
$$=a+b=\frac{5}{8}$$

204 정답 $\frac{12}{25}$

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$$

$a+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{4}=1,\ \frac{25}{12}a=1$

$\therefore a=\frac{12}{25}$

205 정답 $P(X=x)=\frac{{}_3C_x\times{}_4C_{3-x}}{{}_7C_3}$ $(x=0, 1, 2, 3)$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 모든 경우의 수는 ${}_7C_3$이므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\frac{{}_3C_x\times{}_4C_{3-x}}{{}_7C_3}\ (x=0, 1, 2, 3)$$

206 정답 3

확률의 총합은 1이므로 $\frac{2}{5}+a+\frac{1}{5}+b=1$에서

$a+b=\frac{2}{5} \qquad \cdots\cdots ㉠$

$E(X)=1\times\frac{2}{5}+4\times a+9\times\frac{1}{5}+16\times b=5$에서

$10a+40b=7 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{10}$, $b=\frac{1}{10}$

$$\therefore 100ab=100\times\frac{3}{10}\times\frac{1}{10}=3$$

207 정답 $\frac{40}{3}$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 10, 15, 20이고

$$P(X=10)=\frac{{}_4C_2\times{}_2C_0}{{}_6C_2}=\frac{6}{15},$$
$$P(X=15)=\frac{{}_4C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15},$$
$$P(X=20)=\frac{{}_4C_0\times{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10	15	20	합계
$P(X=x)$	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$\therefore E(X)=10\times\frac{6}{15}+15\times\frac{8}{15}+20\times\frac{1}{15}$$
$$=\frac{200}{15}=\frac{40}{3}$$

208 정답 $\sqrt{2}$

확률의 총합은 1이므로 $\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}=1$에서

$a=\frac{1}{2}$

$E(X)=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{4}=3,$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{2}+5^2\times\frac{1}{4}=11$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=11-3^2=2$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{2}$$

209 정답 $\frac{2}{5}$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고,

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5},$$
$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{3}{5},$$
$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_3C_0}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}$$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1,$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{1}{5}=\frac{7}{5}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{7}{5}-1^2=\frac{2}{5}$$

210 정답 29

$E(-2X+20)=-2E(X)+20=10$에서

$$E(X)=5$$

$V(-2X+20)=(-2)^2V(X)=4V(X)=16$에서

$$V(X)=4$$

한편, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=4+5^2=29$$

211 정답 20

X : 1, 2, 3, 4

Y : 654, 658, 662, 666

이라고 하면

$E(X)=\frac{1+2+3+4}{4}=\frac{5}{2},$

$E(X^2)=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4}=\frac{15}{2}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{15}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

이때, $Y=4X+650$이므로

$$V(Y)=V(4X+650)=4^2V(X)=16\times\frac{5}{4}=20$$

212 정답 25

두 주사위의 눈의 수의 곱이 홀수가 되려면 각 주사위에서 모두 홀수가 나와야 하므로 두 주사위의 눈의 수의 곱이 홀수인 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

이때, 확률변수 X의 분포는 독립시행의 확률을 따르므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

따라서 $n=100$, $p=\frac{1}{4}$이므로

$$np=100\times\frac{1}{4}=25$$

213 정답 502

확률변수 X의 확률질량함수 $P(X=x)={}_{50}C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{50-x}$은 1회의 시행에서 사건이 일어날 확률이 $\frac{1}{5}$인 독립시행을 50회 시행하였을 때의 독립시행의 확률이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(50, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

따라서 $n=50$, $p=\frac{1}{5}$이므로

$$10(n+p)=10\left(50+\frac{1}{5}\right)=502$$

214 정답 3

확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$E(X)=n\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}n,\ V(X)=n\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}n$$

확률변수 Y는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$E(Y)=n\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3},\ V(Y)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$$

따라서 $\frac{E(X)}{E(Y)}=2=a$, $\frac{V(X)}{V(Y)}=1=b$이므로

$$a+b=2+1=3$$

215 정답 29

$E(X)=25p=5$에서 $p=\frac{1}{5}$

$V(X)=25\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=4$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=4+5^2=29$$

216 정답 2500원

동전 50개를 동시에 던졌을 때 앞면이 나온 동전의 개수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(50, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$E(X)=50\times\frac{1}{2}=25$$

이때, 상금의 액수를 Y라고 하면 $Y=100X$이므로

$$E(Y)=E(100X)=100E(X)$$
$$=100\times25=2500(\text{원})$$

217 정답 20

임의로 선택한 100개의 달걀 중 최상품의 개수를 확률변수 X라고 하자.

임의로 선택한 한 개의 달걀이 최상품일 확률은 $\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{5}=20$$

따라서 최상품의 개수의 기댓값은 20이다.

연습문제 I pp.123~125

218 정답 ③

확률의 총합은 1이므로

$a+2a+3a+b=1$

$6a+b=1$ …… ㉠

$\mathrm{P}(X=4)=3\mathrm{P}(X=2)$

$b=6a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{12},\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(X=3)=3a=3\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

219 정답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{5}{6}$

(1) 확률의 총합은 1이므로

$a^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{a}{3}=1$

$12a^2+4a-5=0$

$(2a-1)(6a+5)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$

(2) $X^2-6X+8\le 0$에서 $(X-2)(X-4)\le 0$

$\therefore 2\le X\le 4$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고, 그 중 $2\le X\le 4$를 만족하는 값은 2, 3, 4이므로

$\mathrm{P}(X^2-6X+8\le 0)$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=a^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

220 정답 $\frac{3}{10}$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

에서 $a+2a+3a+4a=1$

$\therefore a=\frac{1}{10}$

이때, $\mathrm{P}(0\le X\le 10a)=\mathrm{P}(0\le X\le 1)$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=a+2a=3a$

$=3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$

221 정답 $\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\frac{1}{8}+b+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$에서 $b=\frac{1}{2}$

한편, 확률의 총합은 1이므로 $a+\frac{1}{8}+b+\frac{1}{8}=1$에서

$a=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{E}(X)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

222 정답 (1) 풀이 참조 (2) 1

(1) 1, 2, 3, 4, 5가 적힌 5장의 카드 중 2장을 뽑는 경우의 수는

$_5\mathrm{C}_2=10$(가지)

뽑은 2장의 카드 중 큰 수 X가 될 수 있는 값은

2, 3, 4, 5

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{2}{5}=4$,

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{3}{10}+5^2\times\frac{2}{5}=17$

이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=17-4^2=1$

$\therefore \sigma(X)=1$

다른 풀이

$\mathrm{V}(X)$는 편차의 제곱의 평균이므로

$$\mathrm{V}(X)=(2-4)^2\times\frac{1}{10}+(3-4)^2\times\frac{1}{5}+(4-4)^2\times\frac{3}{10}+(5-4)^2\times\frac{2}{5}$$

$=4\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{5}+0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{2}{5}$

$=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

223 정답 **평균 : $\frac{6}{5}$, 분산 : $\frac{14}{25}$**

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.
5개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_5C_2=10(\text{가지})$$

(i) $X=0$일 때, ①, ① 또는 ③, ③이 나오는 경우이므로

$$P(X=0)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

(ii) $X=1$일 때, ①, ② 또는 ②, ③이 나오는 경우이므로

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times1+{}_2C_1\times1}{{}_5C_2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

(iii) $X=2$일 때, ①, ③이 나오는 경우이므로

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{2}{5}=2$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$$

224 정답 ①

$E(Y)=aE(X)+b=20a+b=0$ …… ㉠

$\sigma(Y)=|a|\sigma(X)=5|a|=1$

$a>0$이므로 $a=\frac{1}{5}$

$a=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

$\therefore 5ab=5\times\frac{1}{5}\times(-4)=-4$

225 정답 ④

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=25-16=9$이므로

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=3$

$\therefore \sigma(-3X+4)=|-3|\sigma(X)=3\times3=9$

226 정답 **$a=2$, $b=20$**

$V(X)=\{\sigma(X)\}^2=5^2=25$이므로

$V(aX+b)=a^2V(X)=25a^2=100$

즉, $a^2=4$이고, $a>0$이므로 $a=2$

또, $E(X)=40$이므로

$E(aX+b)=aE(X)+b=2\times40+b=100$

$\therefore b=20$

227 정답 ④

확률변수 X가 이항분포 $B\left(72, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$E(X)=72\times\frac{1}{6}=12$,

$V(X)=72\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=10$

한편, $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=10+12^2=154$

228 정답 ①

확률변수 X는 이항분포 $B\left(18, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{18\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}=\sqrt{4}=2$

$\therefore \sigma(3X+2)=|3|\sigma(X)=3\times2=6$

229 정답 ②

이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}={}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$(x=0, 1, 2, \cdots, n)$

이므로 $P(X=2)=10P(X=1)$에서

${}_nC_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=10{}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\frac{n(n-1)}{2}=10n$

$\therefore n=21$

230 정답 ③

이항분포 $B(4, p)$를 따르는 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_xp^x(1-p)^{4-x}$ $(x=0, 1, 2, 3, 4)$

이므로

$P(X=0)={}_4C_0p^0(1-p)^4=\frac{1}{16}$

즉, $(1-p)^4=\frac{1}{16}$에서

$(1-p)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^4$, $1-p=\frac{1}{2}$

$\therefore p=\frac{1}{2}$

231 정답 **20**

답을 임의로 하나씩만 택할 때 맞힌 문항의 개수를 확률변수 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(25, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=25\times\frac{1}{5}=5$

이때, 얻을 수 있는 점수를 Y라고 하면 $Y=4X$이므로 얻을 수 있는 점수의 기댓값은

$E(Y)=E(4X)=4E(X)=4\times5=20$

232 정답 (1) 풀이 참조 (2) $\frac{35}{18}$

(1) 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

각 경우에 대하여 두 눈의 수의 차를 조사하면 다음 표와 같다.

차	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

따라서 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이고 각 확률을 조사하여 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

(2) 위의 확률분포를 나타낸 표에 의하여

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{9}+5\times\frac{1}{18}$$
$$=\frac{35}{18}$$

233 정답 2

$\mathrm{E}(Y)=6$, $\mathrm{E}(Y^2)=52$이므로

$$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=52-6^2=16$$
$$\therefore\ \sigma(Y)=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{16}=4$$

이때, $Y=2X+1$에서 $X=\frac{1}{2}Y-\frac{1}{2}$이므로

$$\sigma(X)=\sigma\left(\frac{1}{2}Y-\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}\right|\sigma(Y)=\frac{1}{2}\times4=2$$

다른 풀이

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=52-6^2=16$이고

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X+1)=2^2\mathrm{V}(X)=16$이므로

$$\mathrm{V}(X)=4$$
$$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{4}=2$$

234 정답 $\frac{1}{2}$

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100, p)$를 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=100p(1-p)=100(-p^2+p)$$
$$=100\left\{-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}$$

따라서 $\mathrm{V}(X)$는 $p=\frac{1}{2}$일 때 최대이다.

235 정답 11 .... 서술형

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np=6$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=2$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6(1-p)=2$

$1-p=\frac{1}{3}$

즉, $p=\frac{2}{3}$이므로 ㉠에 대입하면 $n=9$ … ①

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(9, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_9\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{9-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 9)$$

… ②

따라서 $\mathrm{P}(X=2)={}_9\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^7=36\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{2^4}{3^7}$이므로

$a=4$, $b=7$

$\therefore\ a+b=11$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$의 값을 이용하여 n, p의 값 구하기	40%
②	X의 확률질량함수 구하기	30%
③	$a+b$의 값 구하기	30%

9. 정규분포

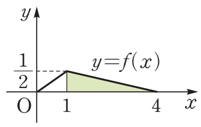
유형 .... pp.129~139

001 정답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{4}$

(1) $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\times 4\times a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

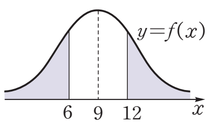
(2) $\mathrm{P}(1\le X\le 4)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\mathrm{P}(1\le X\le 4)$$
$$=\frac{1}{2}\times(4-1)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

002 정답 (1) **24** (2) $\boldsymbol{p-2q}$

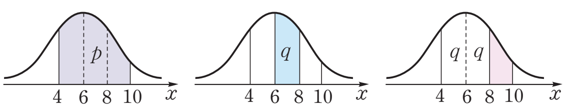
(1) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(9,\ \sigma^2)$을 따르므로 X의 정규분포곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=9$에 대하여 대칭이다.



따라서 $\mathrm{P}(X\le 6)=\mathrm{P}(X\ge 12)$이므로

$$\frac{a}{2}=12 \qquad \therefore a=24$$

(2) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 2^2)$을 따르므로 X의 정규분포곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=6$에 대하여 대칭이다.



따라서 $\mathrm{P}(6\le X\le 8)=\mathrm{P}(4\le X\le 6)=q$이므로

$$\mathrm{P}(8\le X\le 10)=\mathrm{P}(4\le X\le 10)-\mathrm{P}(4\le X\le 8)$$
$$=p-2q$$

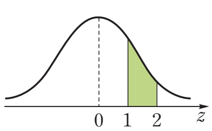
003 정답 (1) **0.1359** (2) **0.1587** (3) **0.8664**

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따를 때,

확률변수 $Z=\frac{X-20}{4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

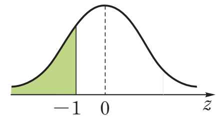
따라서 확률변수 X를 표준화하고 주어진 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구하면

(1) $\mathrm{P}(24\le X\le 28)$



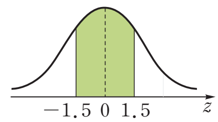
$$=\mathrm{P}\left(\frac{24-20}{4}\le Z\le\frac{28-20}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.4772-0.3413=0.1359$$

(2) $2X-6\le 26$에서 $X\le 16$이므로



$$\mathrm{P}(2X-6\le 26)$$
$$=\mathrm{P}(X\le 16)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{16-20}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le -1)=\mathrm{P}(Z\ge 1)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5-0.3413$$
$$=0.1587$$

(3) $|X-20|\le 6$에서 $14\le X\le 26$이므로



$$\mathrm{P}(|X-20|\le 6)$$
$$=\mathrm{P}(14\le X\le 26)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{14-20}{4}\le Z\le\frac{26-20}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)$$
$$=2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$$
$$=2\times 0.4332$$
$$=0.8664$$

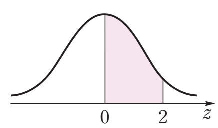
004 정답 (1) **48 %** (2) **20명**

학생들의 통학 시간을 확률변수 X라고 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르므로

확률변수 $Z=\frac{X-20}{5}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

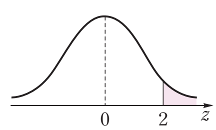
(1) $\mathrm{P}(20\le X\le 30)$



$$=\mathrm{P}\left(\frac{20-20}{5}\le Z\le\frac{30-20}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.48$$

따라서 통학 시간이 20분 이상 30분 이하인 학생은 전체의 48 %이다.

(2) $\mathrm{P}(X\ge 30)$



$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{30-20}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.48=0.02$$

즉, 통학 시간이 30분 이상 걸리는 학생은 전체 1000명 중 2 %이므로

$$1000\times\frac{2}{100}=20(\text{명})$$

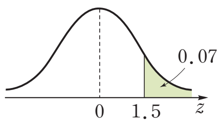
005 정답 77점

응시자 800명의 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(62,\ 10^2)$을 따른다.

입사 시험에 합격하기 위해서는 800명 중 상위 56등 이내에 들어야 하므로 점수 a점 이상이 상위 56등 이내에 든다고 하면

$$P(X \ge a) \le \frac{56}{800} = 0.07$$

인 a의 최솟값을 구하면 된다.



$$\begin{aligned} &P(X \ge a) \\ &= P\left(Z \ge \frac{a-62}{10}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \le Z \le \frac{a-62}{10}\right) \le 0.07 \\ &\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{a-62}{10}\right) \ge 0.43 \end{aligned}$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \le Z \le 1.5) = 0.43$이므로

$$\frac{a-62}{10} \ge 1.5 \qquad \therefore a \ge 62 + 1.5 \times 10 = 77$$

따라서 입사 시험에 합격하기 위한 최저 점수는 77점이다.

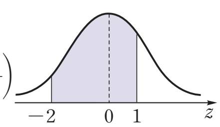
006 정답 0.8185

한 개의 주사위를 720번 던질 때 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로 평균 m과 분산 σ^2은

$$m = 720 \times \frac{1}{6} = 120,\ \sigma^2 = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 100$$

이때, n이 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(120,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은



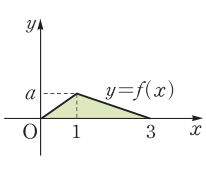
$$\begin{aligned} &P(100 \le X \le 130) \\ &= P\left(\frac{100-120}{10} \le Z \le \frac{130-120}{10}\right) \\ &= P(-2 \le Z \le 1) \\ &= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \end{aligned}$$

확인문제 pp.129~139

236 정답 ③

$f(x)$가 확률밀도함수이므로 $a > 0$이다.

따라서 $y = f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이가 1이므로

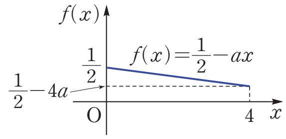


$$\frac{1}{2} \times 3 \times a = 1$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

237 정답 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{3}{4}$

(1) 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

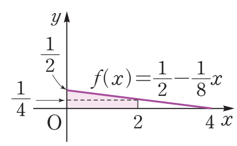


이때, $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times \left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 4a\right)\right\} \times 4 = 1,\ 2 - 8a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}$$

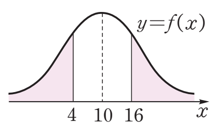
(2) $P(0 \le X \le 2)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\begin{aligned} &P(0 \le X \le 2) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times 2 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

238 정답 4

확률변수 X가 정규분포 $N(10,\ 4^2)$을 따르므로 X의 정규분포곡선 $y = f(x)$는 직선 $x = 10$에 대하여 대칭이다.



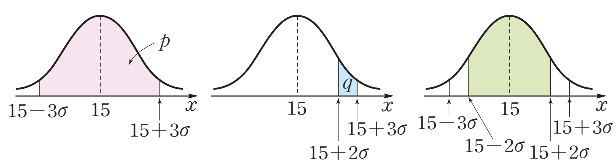
그림에서 $P(X \le 4) = P(X \ge 16)$이므로

$1 - P(X \le 4) = 1 - P(X \ge 16)$, 즉 $P(X \ge 4) = P(X \le 16)$

$\therefore a = 4$

239 정답 $p - 2q$

확률변수 X가 정규분포 $N(15,\ \sigma^2)$을 따르므로 X의 정규분포곡선 $f(x)$는 직선 $x = 15$에 대하여 대칭이다.



따라서

$$P(15+2\sigma \le X \le 15+3\sigma) = P(15-3\sigma \le X \le 15-2\sigma) = q$$

이므로

$$\begin{aligned} &P(15-2\sigma \le X \le 15+2\sigma) \\ &= P(15-3\sigma \le X \le 15+3\sigma) \\ &\qquad - 2P(15+2\sigma \le X \le 15+3\sigma) \\ &= p - 2q \end{aligned}$$

240 정답 (1) **0.5** (2) **0.1574** (3) **0.8185**

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따를 때,

확률변수 $Z=\dfrac{X-50}{5}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

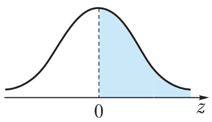
따라서 확률변수 X를 표준화하고 주어진 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구하면

(1) $\mathrm{P}(X\geq 50)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq \dfrac{50-50}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)$

$=0.5$



(2) $\mathrm{P}(55\leq X\leq 65)$

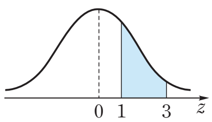
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{55-50}{5}\leq Z\leq \dfrac{65-50}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(1\leq Z\leq 3)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 3)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.4987-0.3413$

$=0.1574$



(3) $\mathrm{P}(45\leq X\leq 60)$

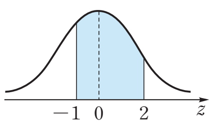
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{45-50}{5}\leq Z\leq \dfrac{60-50}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 2)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$



241 정답 (1) **120** (2) **1**

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 10^2)$을 따를 때,

확률변수 $Z=\dfrac{X-100}{10}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

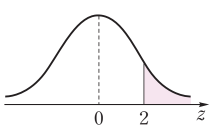
(1) $\mathrm{P}(X\geq k)=\mathrm{P}\left(Z\geq \dfrac{k-100}{10}\right)=0.0228$이고

오른쪽 그림에서

$\mathrm{P}(Z\geq 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$



이므로

$\dfrac{k-100}{10}=2 \qquad \therefore\ k=100+10\times 2=120$

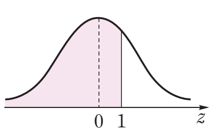
(2) $\mathrm{P}\left(\dfrac{X-100}{10}\leq k\right)=\mathrm{P}(Z\leq k)=0.8413$이고

오른쪽 그림에서

$\mathrm{P}(Z\leq 1)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.5+0.3413=0.8413$



이므로

$k=1$

242 정답 (1) **68 %** (2) **35명**

학생들의 키를 확률변수 X라 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(172,\ 4^2)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(168\leq X\leq 176)$

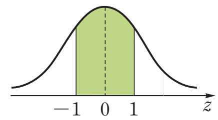
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{168-172}{4}\leq Z\leq \dfrac{176-172}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 1)$

$=2\times \mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=2\times 0.34$

$=0.68$



따라서 키가 168 cm 이상 176 cm 이하인 학생은 전체의 68 %이다.

(2) $\mathrm{P}(X\geq 178)$

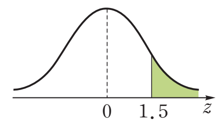
$=\mathrm{P}\left(Z\geq \dfrac{178-172}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.5-0.43$

$=0.07$



즉, 키가 178 cm 이상인 학생은 전체 500명 중 7 %이므로

$500\times \dfrac{7}{100}=35$ (명)

243 정답 **0.7745**

이 공장에서 생산되는 음료수 한 병의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 10^2)$을 따르므로

확률변수 $Z=\dfrac{X-240}{10}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(225\leq X\leq 250)$

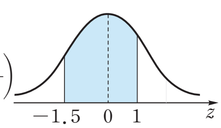
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{225-240}{10}\leq Z\leq \dfrac{250-240}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 1)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.4332+0.3413$

$=0.7745$



244 정답 **86점**

학생 250명의 수학 점수를 확률변수 X라 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(58,\ 16^2)$을 따른다.

이때, 수학 석차가 10등인 학생이 받은 수학 점수를 a점이라고 하면

$\mathrm{P}(X\geq a)=\dfrac{10}{250}=0.04$

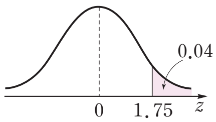
를 만족하는 a의 값을 구하면 된다.

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a-58}{16}\right)$$
$$= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-58}{16}\right) = 0.04$$

에서 $P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-58}{16}\right) = 0.46$

주어진 표준정규분포표에서

$P(0 \leq Z \leq 1.75) = 0.46$이므로



$$\frac{a-58}{16} = 1.75$$

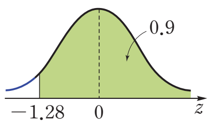
$\therefore\ a = 58 + 16 \times 1.75 = 86$

245 정답 872

제품 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(1000,\ 100^2)$을 따르고, $P(X \geq a) = 0.90 > 0.5$이므로 $a < 1000$이다.

이때, 확률변수 $Z = \frac{X-1000}{100}$은

표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로



$$P(X \geq a)$$
$$= P\left(Z \geq \frac{a-1000}{100}\right)$$
$$= P\left(\frac{a-1000}{100} \leq Z \leq 0\right) + P(Z \geq 0)$$
$$= P\left(0 \leq Z \leq -\frac{a-1000}{100}\right) + 0.5 = 0.9$$
$$\therefore\ P\left(0 \leq Z \leq -\frac{a-1000}{100}\right) = 0.4$$

한편, 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1.28) = 0.4$이므로

$$-\frac{a-1000}{100} = 1.28$$

$\therefore\ a = 1000 - 100 \times 1.28 = 872$

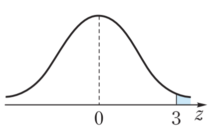
246 정답 0.0013

답을 임의로 하나씩 체크할 때 정답을 맞힌 문항의 개수를 확률변수 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 평균 m과 분산 σ^2은

$$m = 100 \times \frac{1}{2} = 50,\ \sigma^2 = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$$

이때, 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 시험에 합격할 확률은



$$P(X \geq 65)$$
$$= P\left(Z \geq \frac{65-50}{5}\right)$$
$$= P(Z \geq 3)$$
$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 3)$$
$$= 0.5 - 0.4987 = 0.0013$$

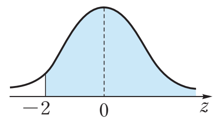
247 정답 0.9772

신약을 투여한 100명 중에서 완치된 환자의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B(100,\ 0.9)$를 따르므로 평균 m과 분산 σ^2은

$$m = 100 \times 0.9 = 90,\ \sigma^2 = 100 \times 0.9 \times 0.1 = 9$$

이때, n이 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(90,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은



$$P(X \geq 84)$$
$$= P\left(Z \geq \frac{84-90}{3}\right)$$
$$= P(Z \geq -2)$$
$$= P(Z \leq 2)$$
$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 2)$$
$$= 0.5 + 0.4772$$
$$= 0.9772$$

연습문제 I .... pp.140~142

248 정답 $\frac{3}{10}$

함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

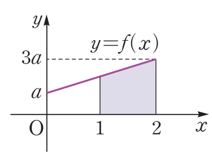
$$\frac{1}{2} \times (1+4) \times k = 1,\ \frac{5}{2}k = 1$$
$$\therefore\ k = \frac{2}{5}$$

여기서 $0 \leq x \leq 2$일 때, $f(x) = \frac{1}{5}x$이므로

$$P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) \times 1 = \frac{3}{10}$$

249 정답 ③

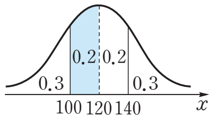
확률밀도함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로



$$\frac{1}{2} \times (a + 3a) \times 2 = 1\text{에서}$$
$$a = \frac{1}{4}$$
$$\therefore\ P(X \geq 1) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \times 1 = \frac{5}{8}$$

250 정답 **0.7**

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ \sigma^2)$을 따르므로 X의 정규분포곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=120$에 대하여 대칭이다.



따라서 $\mathrm{P}(100 \le X \le 120)=0.2$이므로

$\mathrm{P}(120 \le X \le 140)=0.2$

$\therefore\ \mathrm{P}(X \le 140)=\mathrm{P}(X \le 120)+\mathrm{P}(120 \le X \le 140)$

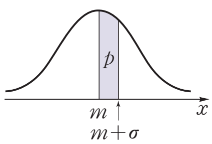
$=0.5+0.2$

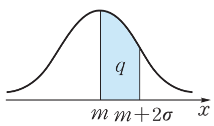
$=0.7$

251 정답 (1) $\boldsymbol{2p}$ (2) $\boldsymbol{0.5-q}$ (3) $\boldsymbol{q-p}$

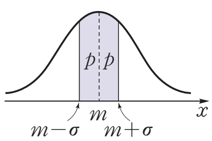
확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 X의 정규분포곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$\mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)=p,\ \mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)=q$

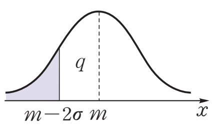




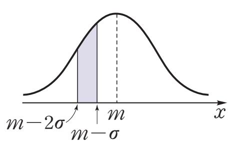
(1) $\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m+\sigma)=2p$



(2) $\mathrm{P}(X \le m-2\sigma)=0.5-q$



(3) $\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m-\sigma)=q-p$



252 정답 (1) **0.8185** (2) **0.1587** (3) **0.3830**

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 6^2)$을 따를 때,

확률변수 $Z=\dfrac{X-80}{6}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 확률변수 X를 표준화하고 주어진 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구하자.

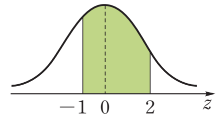
(1) $\mathrm{P}(74 \le X \le 92)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{74-80}{6} \le Z \le \dfrac{92-80}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$



(2) $\dfrac{X-6}{2} \ge 40$에서 $X \ge 86$이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{X-6}{2} \ge 40\right)$

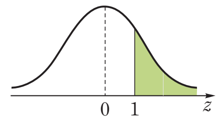
$=\mathrm{P}(X \ge 86)$

$=\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{86-80}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \ge 1)$

$=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$



(3) $|X-80| \le 3$에서 $77 \le X \le 83$이므로

$\mathrm{P}(|X-80| \le 3)$

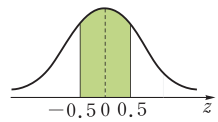
$=\mathrm{P}(77 \le X \le 83)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{77-80}{6} \le Z \le \dfrac{83-80}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 0.5)$

$=2 \times \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$

$=2 \times 0.1915=0.3830$



253 정답 ①

$\mathrm{P}(50 \le X \le n)=\mathrm{P}\left(\dfrac{50-n}{\dfrac{n}{2}} \le Z \le 0\right)$

$=\mathrm{P}\left(0 \le Z \le -\dfrac{100-2n}{n}\right)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

따라서 $-\dfrac{100-2n}{n}=1$이므로

$-100+2n=n$

$\therefore\ n=100$

254 정답 **12**

$\mathrm{P}(|X-50| \le k)=\mathrm{P}(-k \le X-50 \le k)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{k}{8} \le \dfrac{X-50}{8} \le \dfrac{k}{8}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{k}{8} \le Z \le \dfrac{k}{8}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{k}{8}\right)$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{k}{8}\right)=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$에서

$\dfrac{k}{8}=1.5 \qquad \therefore\ k=8 \times 1.5=12$

255 정답 20

확률변수 X가 정규분포 $N(18,\ 3^2)$을 따를 때,

확률변수 $Z=\dfrac{X-18}{3}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(12\le X\le 21)=P\left(\frac{12-18}{3}\le Z\le\frac{21-18}{3}\right)$$
$$=P(-2\le Z\le 1)$$

확률변수 Y가 정규분포 $N(25,\ 5^2)$을 따를 때,

확률변수 $Z=\dfrac{Y-25}{5}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(a\le Y\le 35)=P\left(\frac{a-25}{5}\le Z\le\frac{35-25}{5}\right)$$
$$=P\left(\frac{a-25}{5}\le Z\le 2\right)$$

즉, $P(-2\le Z\le 1)=P\left(\dfrac{a-25}{5}\le Z\le 2\right)$이고,

$P(-2\le Z\le 1)=P(-1\le Z\le 2)$이므로

$P(-1\le Z\le 2)=P\left(\dfrac{a-25}{5}\le Z\le 2\right)$에서

$$\frac{a-25}{5}=-1 \qquad \therefore\ a=25+5\times(-1)=20$$

256 정답 0.7745

공장에서 생산되는 제품 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(400,\ 10^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-400}{10}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(385\le X\le 410)=P\left(\frac{385-400}{10}\le Z\le\frac{410-400}{10}\right)$$
$$=P(-1.5\le Z\le 1)$$
$$=P(0\le Z\le 1.5)+P(0\le Z\le 1)$$
$$=0.4332+0.3413=0.7745$$

257 정답 121

X가 정규분포 $N(100,\ 25^2)$을 따르므로 $P(X\ge k)=0.2$에서 $P(100\le X\le k)=0.3$인 k의 값을 구하면 된다.

$P(100\le X\le k)=P\left(0\le Z\le\dfrac{k-100}{25}\right)=0.3$이고,

주어진 표준정규분포표에서 $P(0\le Z\le 0.84)=0.3$이므로

$$\frac{k-100}{25}=0.84 \qquad \therefore\ k=100+25\times 0.84=121$$

258 정답 84명

학생 400명이 일주일 동안 휴대폰을 사용한 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(20,\ 5^2)$을 따르므로

$$P(X\ge 24)=P\left(Z\ge\frac{24-20}{5}\right)=P(Z\ge 0.8)$$
$$=0.5-0.29=0.21$$

따라서 전체 400명 중 일주일 동안 휴대폰을 사용한 시간이 24시간 이상인 학생의 수는 $0.21\times 400=84$(명)

259 정답 85점

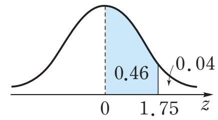
수학 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(50,\ 20^2)$을 따른다.

1등급을 받으려면 상위 4 % 이내에 들어야 하므로

점수 a점 이상이 상위 4 % 이내에 든다고 하면

$$P(X\ge a)\le 0.04$$

인 a의 최솟값을 구하면 된다.



$$P(X\ge a)=P\left(Z\ge\frac{a-50}{20}\right)$$
$$=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-50}{20}\right)\le 0.04$$

에서 $P\left(0\le Z\le\dfrac{a-50}{20}\right)\ge 0.46$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0\le Z\le 1.75)=0.46$이므로

$$\frac{a-50}{20}\ge 1.75 \qquad \therefore\ a\ge 50+20\times 1.75=85$$

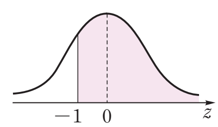
따라서 1등급을 받을 수 있는 최저 점수는 85점이다.

260 정답 0.84

확률변수 X는 이항분포 $B\left(192,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따르므로 평균 m과 분산 σ^2은

$$m=192\times\frac{1}{4}=48,\ \sigma^2=192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=36=6^2$$

이때, n이 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(48,\ 6^2)$을 따른다.



$$\therefore\ P(X\ge 42)$$
$$=P\left(Z\ge\frac{42-48}{6}\right)$$
$$=P(Z\ge -1)$$
$$=0.5+P(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5+0.34=0.84$$

261 정답 480

확률변수 X는 이항분포 $B\left(900,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로 평균 m과 분산 σ^2은

$$m=900\times\frac{1}{2}=450,\ \sigma^2=900\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=225=15^2$$

이때, n이 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(450,\ 15^2)$을 따른다.

$P(X\le k)=P\left(Z\le\dfrac{k-450}{15}\right)=0.9772$에서

$$P\left(0\le Z\le\frac{k-450}{15}\right)=0.9772-0.5=0.4772$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$$\frac{k-450}{15}=2 \qquad \therefore\ k=450+15\times 2=480$$

연습문제 Ⅱ p.143

262 정답 6명

각 학생의 하루 수면 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 0.75^2)$을 따른다.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X\le 4.5)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{4.5-6}{0.75}\right)\\ &=\mathrm{P}(Z\le -2)\\ &=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\ &=0.5-0.48=0.02 \end{aligned}$$

따라서 어떤 학생의 하루 수면 시간이 4.5시간 이하일 확률은 0.02이므로 3학년 학생 300명 중 수면 부족으로 인하여 의학적 문제가 발생할 가능성이 있는 학생의 수는

$$300\times 0.02=6$$

에서 약 6명이다.

263 정답 ⑤

민서의 점수를 각 과목별로 표준화하면 과목별로 민서의 점수의 상대적 위치를 파악할 수 있다.

A, B, C 세 과목의 민서의 점수를 표준화한 값을 각각 Z_{A}, Z_{B}, Z_{C}라고 하면

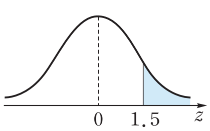
$$Z_{\mathrm{A}}=\frac{78-66}{12}=1,\ Z_{\mathrm{B}}=\frac{80-72}{16}=0.5,\ Z_{\mathrm{C}}=\frac{71-59}{8}=1.5$$

에서 $Z_{\mathrm{C}}>Z_{\mathrm{A}}>Z_{\mathrm{B}}$이므로 민서의 성적이 상대적으로 상위권에 속하는 과목을 순서대로 배열하면 C, A, B이다.

264 정답 14

지원자의 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(290,\ 14^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-290}{14}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X\ge 311)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{311-290}{14}\right)\\ &=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\ &=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\ &=0.5-0.43=0.07 \end{aligned}$$



따라서 이 학과에 합격할 확률이 0.07이므로

$$\frac{n}{200}=0.07 \qquad \therefore\ n=200\times 0.07=14$$

265 정답 0.0122 서술형

100회의 시행에서 5점을 얻는 횟수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로 평균 m과 분산 σ^2은

$$m=100\times\frac{1}{5}=20,\ \sigma^2=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$$

이때, n이 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다. … ①

0점 이상을 얻기 위해서 5점을 얻는 횟수를 X라고 하면 2점을 잃는 횟수는 $100-X$이므로

$$5X-2(100-X)\ge 0$$

$$\therefore\ X\ge 29\ (\because\ X=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100) \qquad \cdots ②$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X\ge 29)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{29-20}{4}\right)\\ &=\mathrm{P}(Z\ge 2.25)\\ &=0.5-0.4878=0.0122 \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	5점을 얻는 횟수를 확률변수 X라 하고, X의 분포 구하기	30%
②	100회 시행 후 점수가 0점 이상이기 위한 X의 범위 구하기	40%
③	점수가 0점 이상일 확률 구하기	30%

10. 통계적 추정

개념 보충

* 모평균의 신뢰구간

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르므로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z와 양수 k에 대하여

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(-k\le Z\le k)\\&=\mathrm{P}\left(-k\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le k\right)\quad\leftarrow \text{정규분포의 표준화}\\&=\mathrm{P}\left(-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\overline{X}-m\le k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\quad\leftarrow \text{식의 변형}\\&=\mathrm{P}\left(-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

이때, $k=1.96$이면 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.4750$이므로

$$\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$$

즉, $\mathrm{P}\left(\overline{X}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$이다.

이것은 모평균 m이

$$\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

인 범위에 포함될 확률이 95 %임을 나타낸다.

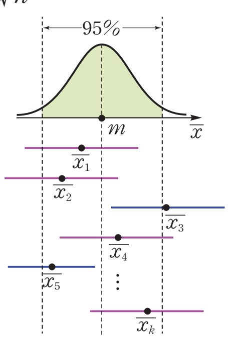
여기서 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라고 할 때,

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

를 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이라 한다.

마찬가지로 $k=2.58$이면 $\mathrm{P}(-2.58\le Z\le 2.58)=0.99$이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



이때, 표본평균 $\overline{X}$는 확률변수이므로 추출되는 표본에 따라 표본평균의 값 $\overline{x}$가 달라지고, 이에 따라 신뢰구간도 달라진다. 이렇게 구한 신뢰구간 중에는 오른쪽 그림과 같이 모평균 m을 포함하는 것과 포함하지 않는 것이 있을 수 있다.

즉, '모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간'의 뜻은 모집단으로부터 크기가 n인 표본을 추출하여 신뢰구간을 만드는 일을 여러 번 반복할 때, 구한 신뢰구간 중에서 약 95 %는 모평균 m을 포함한다는 뜻이다.

유형 pp.150~154

001 정답 $\mathrm{E}(\overline{X})=20,\ \mathrm{V}(\overline{X})=15$

모집단의 평균을 m, 표준편차를 σ라 하면

$$m=10\times0.3+20\times0.4+30\times0.3=20$$
$$\sigma^2=10^2\times0.3+20^2\times0.4+30^2\times0.3-20^2=60$$

이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m=20,$$
$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{60}{4}=15$$

002 정답 0.0228

이 공장에서 생산하는 제품 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 10^2)$을 따르므로 이 제품 중에서 임의추출한 4개의 제품의 무게의 평균 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(100,\ \dfrac{10^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(100,\ 5^2)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\le 90)&=\mathrm{P}(Z\le -2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

003 정답 (1) $392.16\le m\le 407.84$ (2) $389.68\le m\le 410.32$

$n=25,\ \overline{x}=400,\ \sigma=20$이므로

(1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$400-1.96\frac{20}{\sqrt{25}}\le m\le 400+1.96\frac{20}{\sqrt{25}}$$
$$400-7.84\le m\le 400+7.84$$
$$\therefore\ 392.16\le m\le 407.84$$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$400-2.58\frac{20}{\sqrt{25}}\le m\le 400+2.58\frac{20}{\sqrt{25}}$$
$$400-10.32\le m\le 400+10.32$$
$$\therefore\ 389.68\le m\le 410.32$$

004 정답 (1) 25 (2) 6

(1) 모표준편차 $\sigma=5$, 표본의 크기는 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2\frac{5}{\sqrt{n}}$$

이다. 즉,

$$2\times2\frac{5}{\sqrt{n}}=4,\ \sqrt{n}=5$$
$$\therefore\ n=25$$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times3\frac{5}{\sqrt{25}}=6$$

확인문제 pp.150~154

266 정답 $\mathrm{E}(\overline{X})=2$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{1}{6}$

주머니에서 한 개의 공을 임의추출할 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라고 하면

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1\times2+2\times4+3\times2}{8}=2,$$

$$\mathrm{E}(X^2)=\frac{1^2\times2+2^2\times4+3^2\times2}{8}=\frac{9}{2}$$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\dfrac{9}{2}-2^2=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=2,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{3}=\frac{1}{6}$$

267 정답 100

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{10}{\sqrt{n}}\le1$에서 $\sqrt{n}\ge10$이므로 $n\ge100$

따라서 n의 최솟값은 100이다.

268 정답 0.8351

정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 20^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 25인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \dfrac{20^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(120,\ 4^2)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(116\le\overline{X}\le130)&=\mathrm{P}(-1\le Z\le2.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)\\&=0.3413+0.4938=0.8351\end{aligned}$$

269 정답 28

크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(25,\ \dfrac{6^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(25,\ 2^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge a)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-25}{2}\right)$$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{a-25}{2}\right)\le0.0668$이기 위해서는

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-25}{2}\right)\le0.0668$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-25}{2}\right)\ge0.4332$이어야 한다.

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{a-25}{2}\ge1.5\qquad\therefore\ a\ge25+2\times1.5=28$$

따라서 실수 a의 최솟값은 28이다.

270 정답 $590.2\le m\le609.8$

$n=9$, $\overline{x}=600$, $\sigma=15$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$600-1.96\frac{15}{\sqrt{9}}\le m\le600+1.96\frac{15}{\sqrt{9}}$$

$$600-9.8\le m\le600+9.8$$

$$\therefore\ 590.2\le m\le609.8$$

271 정답 (1) $63.04\le m\le66.96$ (2) $62.42\le m\le67.58$

$n=100$, $\overline{x}=65$, $\sigma=10$이므로

(1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$65-1.96\frac{10}{\sqrt{100}}\le m\le65+1.96\frac{10}{\sqrt{100}}$$

$$65-1.96\le m\le65+1.96$$

$$\therefore\ 63.04\le m\le66.96$$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$65-2.58\frac{10}{\sqrt{100}}\le m\le65+2.58\frac{10}{\sqrt{100}}$$

$$65-2.58\le m\le65+2.58$$

$$\therefore\ 62.42\le m\le67.58$$

272 정답 196

모표준편차 $\sigma=7$, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2\frac{7}{\sqrt{n}}$$

즉, $2\times2\dfrac{7}{\sqrt{n}}=2$이므로 $\sqrt{n}=14$

$$\therefore\ n=196$$

273 정답 3.92

모표준편차를 모르므로 표본표준편차를 대신 이용한다.

표본의 크기 $n=36$, 표본표준편차 $S=6$이므로 모평균에 대하여 95 %의 신뢰도로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\frac{S}{\sqrt{n}}=2\times1.96\frac{6}{\sqrt{36}}=3.92$$

연습문제 Ⅰ pp.155~156

274 정답 $\mathrm{E}(\overline{X})=3$, $\mathrm{V}(\overline{X})=1$

모집단의 평균을 m, 표준편차를 σ라 하면

$$m=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{6}=3$$

$$\sigma^2=2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{3}+6^2\times\frac{1}{6}-3^2=2$$

이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m=3,$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

275 정답 17

모평균 $m=15$, 모분산 $\sigma^2=8^2$, 표본의 크기 $n=16$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m=15,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{8^2}{16}=4,$$

$$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})}=\sqrt{4}=2$$

따라서 $a=15$, $b=2$이므로

$$a+b=17$$

276 정답 104

모평균 $m=10$, 모분산 $\sigma^2=36$, 표본의 크기 $n=9$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m=10,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{36}{9}=4$$

$$\therefore \mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$$
$$=4+10^2=104$$

277 정답 1

전체 신입생의 키를 X, 임의추출한 64명의 신입생의 키의 평균을 $\overline{X}$라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 4^2)$을 따르므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 0.5^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(170-a\le\overline{X}\le170+a)=\mathrm{P}(-2a\le Z\le 2a)$$
$$=2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 2a)$$
$$=0.954$$

에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2a)=0.477$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.477$이므로

$$2a=2 \qquad \therefore a=1$$

278 정답 100

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3000,\ 200^2)$을 따르고,

이 모집단에서 임의추출한 크기 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3000,\ \frac{200^2}{n}\right)$을 따르므로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z에 대하여

$$\mathrm{P}(2800\le X\le 3200)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$

$$\mathrm{P}(2980\le\overline{X}\le 3020)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{2980-3000}{\frac{200}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{3020-3000}{\frac{200}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{10}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)$$
$$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)$$

따라서 $2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)$에서

$$\frac{\sqrt{n}}{10}=1 \qquad \therefore n=100$$

279 정답 (1) $342.16\le m\le 357.84$
(2) $339.68\le m\le 360.32$

$n=16$, $\overline{x}=350$, $\sigma=16$이므로

(1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$350-1.96\frac{16}{\sqrt{16}}\le m\le 350+1.96\frac{16}{\sqrt{16}}$$
$$350-7.84\le m\le 350+7.84$$
$$\therefore 342.16\le m\le 357.84$$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$350-2.58\frac{16}{\sqrt{16}}\le m\le 350+2.58\frac{16}{\sqrt{16}}$$
$$350-10.32\le m\le 350+10.32$$
$$\therefore 339.68\le m\le 360.32$$

280 정답 $1.6\le m\le 2.0$

모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기 $n=9$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$1.8-2\frac{\sigma}{\sqrt{9}}\le m\le 1.8+2\frac{\sigma}{\sqrt{9}}$$

이때, 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 0.3을 이용하면

$$1.8-2\frac{0.3}{\sqrt{9}}\le m\le 1.8+2\frac{0.3}{\sqrt{9}}$$
$$1.8-0.2\le m\le 1.8+0.2$$
$$\therefore 1.6\le m\le 2.0$$

281 정답 2

모집단의 표준편차를 σ라 하면 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.6)=0.495$이므로 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2\times 2.6\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=4$$

한편, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.3)=0.400$이므로 신뢰도 80 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2\times 1.3\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times\left(2.6\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(2\times 2.6\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=4\times\frac{1}{2}=2$$

282 정답 ⑤

양의 상수 k에 대하여 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이므로 신뢰구간의 길이 l은 k에 비례하고 $\sqrt{n}$에 반비례한다.

ㄱ. 신뢰도, 즉 k가 일정할 때, 표본의 크기 n을 크게 하면 신뢰구간의 길이 l은 짧아진다. (거짓)

ㄴ. 표본의 크기 n이 일정할 때, 신뢰도, 즉 k를 크게 하면 신뢰구간의 길이 l은 길어진다. (참)

ㄷ. 신뢰구간의 길이 l이 일정할 때, 표본의 크기 n을 크게 하면 k도 커지므로 신뢰도가 커진다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

연습문제 Ⅱ p.157

283 정답 64

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 20^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{20^2}{n}\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}(|Z|\le 2)=0.95$에서

$$\mathrm{P}\left(m-2\times\frac{20}{\sqrt{n}}\le\overline{X}\le m+2\times\frac{20}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

이 식을 변형하면 $\mathrm{P}\left(|\overline{X}-m|\le 2\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}\right)=0.95$

이때, 표본평균 $\overline{X}$의 값과 모평균 m의 차가 5분 이내일 확률이 0.95 이상이 되려면

$$2\times\frac{20}{\sqrt{n}}\le 5,\ \sqrt{n}\ge 8 \qquad \therefore\ n\ge 64$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 64이다.

284 정답 ②

$f(n)=1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{n}}=\dfrac{39.2}{\sqrt{n}}$이므로

ㄱ. $f(100)=\dfrac{39.2}{\sqrt{100}}=3.92$ (참)

ㄴ. $\sqrt{n}f(n)=\sqrt{n}\times\dfrac{39.2}{\sqrt{n}}=39.2$ (참)

ㄷ. $f(m)=\dfrac{39.2}{\sqrt{m}},\ f(n)=\dfrac{39.2}{\sqrt{n}}$이므로

$m<n$이면 $f(m)>f(n)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

285 정답 90

표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$$

라 하면 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 16인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{16}\right)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-k\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x}+k\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$\overline{x}-\frac{k\sigma}{4}\le m\le\overline{x}+\frac{k\sigma}{4}$$

이다.

따라서 $\dfrac{k\sigma}{4}=0.41\sigma$에서 $k=1.64$이고, 주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-1.64\le Z\le 1.64)=0.9$이므로

$$0.9=\frac{\alpha}{100} \qquad \therefore\ \alpha=90$$

286 정답 200 서술형

표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$$

라 하면 표본의 크기가 50일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{50}}=6 \qquad \cdots ①$$

표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{50}}\times\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{n}}=6\times\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{n}}$$

이므로 $6\times\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{n}}\le 3$에서

$\sqrt{n}\ge 2\sqrt{50}$

$\therefore\ n\ge 200$ … ②

따라서 n의 최솟값은 200이다. … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	표본의 크기가 50일 때 신뢰구간의 길이 구하기	40 %
②	신뢰구간의 길이가 3 이하가 되기 위한 n의 값의 범위 구하기	40 %
③	n의 최솟값 구하기	20 %