THE FIRST CLASS MATHEMATICS

1 일등급 수학 · 고등 **수학** (하)

[해설편]

Ⅳ 집합과 명제

Ⅴ 함수

Ⅵ 경우의 수

빠른 정답 찾기

Ⅳ 집합과 명제

01 집합

01 7	02 ④	03 32	04 ①
05 7	06 ③	07 15	08 ②
09 ③	10 3	11 5	12 9
13 ④	14 ⑤	15 ③	16 ②
17 ③	18 ⑤	19 ②	20 ④
21 ⑤	22 24	23 4	24 40
25 14	26 115	27 ④	28 ⑤
29 ②	30 ③	31 ③	32 ②
33 ③	34 ③	35 ③	36 ③
37 64	38 ①	39 ④	40 ②
41 ④	42 2	43 ⑤	44 27
45 10	46 ④	47 ②	48 13
49 7	50 ③	51 12	52 31
53 15	54 3	55 8	56 8
57 24	58 16	59 336	60 33
61 46	62 ②	63 ④	64 7
65 14	66 70		

02 명제

01 ⑤	02 ③	03 ⑤	04 4
05 ④	06 ⑤	07 ②	08 ②
09 ②	10 ④	11 ②	12 ③
13 ④	14 ⑤	15 ⑤	16 165
17 2	18 ③	19 ②	20 ③
21 ③	22 ③	23 ③	24 ③
25 ②	26 ③	27 ①	28 ④
29 ①	30 ⑤	31 ④	32 ④
33 ⑤	34 ⑤	35 2	36 ④
37 ②	38 8	39 ⑤	40 5
41 6	42 ②	43 ④	44 ③
45 ④	46 ⑤	47 ①	48 ②
49 ②	50 A	51 ④	52 700원
53 1	54 16	55 1	56 ④
57 ②	58 12	59 ②	60 ④
61 ⑤	62 ②	63 34	64 10
65 ②	66 3		

03 명제의 증명과 절대부등식

01 ⑤	02 ④	03 ④	04 15
05 ④	06 ⑤	07 ②	08 풀이 참조
09 ④	10 풀이 참조	11 ③	12 풀이 참조
13 ①	14 22	15 25	16 ③
17 16	18 20	19 ⑤	20 18
21 3	22 ③	23 ④	24 ④
25 ③	26 ⑤	27 12	28 6
29 ②	30 8	31 ④	32 ②
33 ①	34 80	35 9	36 ⑤
37 6	38 51	39 ㄱ, ㄷ	40 4
41 7	42 5	43 6	44 ③
45 ⑤	46 ①	47 10	48 16
49 6	50 ③	51 ⑤	

V 함수

04 함수

01 ③	02 1	03 7	04 10
05 ③	06 0	07 6	08 42
09 12	10 25	11 ②	12 ③
13 4	14 ③	15 2	16 ④
17 1	18 ⑤	19 3	20 8
21 12	22 ④	23 ③	24 ④
25 ④	26 72	27 16	28 48
29 ③	30 ⑤	31 9	32 ②
33 ①	34 ①	35 ①	36 ①
37 2	38 ③	39 ⑤	40 1
41 1	42 ①	43 ③	44 22
45 ②	46 6	47 9	48 ②
49 ③	50 2	51 5	52 50
53 ④	54 ①	55 4	56 8
57 ③	58 ②	59 22	60 ②
61 10	62 8	63 1	64 42
65 ④	66 ③	67 ②	68 ②
69 16	70 ③	71 ⑤	72 ⑤
73 15	74 ⑤	75 288	

05 유리식과 유리함수

01 ①	02 8	03 ④	04 3
05 2	06 ④	07 ⑤	08 2
09 ②	10 1	11 ⑤	12 2
13 ③	14 ⑤	15 ④	16 12
17 ④	18 5	19 5	20 16
21 ④	22 10	23 ③	24 10
25 ③	26 ④	27 7	28 21
29 ①	30 4	31 ⑤	32 4
33 ③	34 9	35 12	36 ⑤
37 ④	38 4	39 1	40 11
41 12	42 ⑤	43 ①	44 ③
45 ④	46 ②	47 20	48 6
49 1	50 5	51 ⑤	52 16

06 무리식과 무리함수

01 ②	02 10	03 17	04 16
05 8	06 5	07 ④	08 ⑤
09 ②	10 ⑤	11 ③	12 6
13 ⑤	14 ③	15 ②	16 ①
17 4	18 40	19 6	20 ④
21 ⑤	22 ①	23 5	24 15
25 16	26 9	27 2	28 ④
29 ②	30 ④	31 ④	32 ③
33 15	34 2	35 ④	36 755
37 ⑤	38 ①	39 6	40 40
41 27	42 ③	43 ④	44 ②
45 16	46 6	47 10	48 2
49 ④	50 120	51 85	52 3
53 4			

빠른 정답 찾기

Ⅵ 경우의 수

07 경우의 수

01 27	02 24	03 6	04 67
05 ④	06 10	07 42	08 ④
09 6	10 ④	11 40	12 ②
13 48	14 ⑤	15 ⑤	16 ④
17 ⑤	18 12	19 ①	20 18
21 17	22 70	23 202	24 ②
25 42	26 ④	27 ②	28 ⑤
29 308	30 ②	31 ③	32 ①
33 100	34 45	35 ②	36 ③
37 30	38 ④	39 46	40 ③
41 121	42 300	43 40	44 18
45 ②	46 20	47 ⑤	48 64
49 ②	50 126	51 89	52 ③
53 ②	54 30		

08 순열과 조합

01 ②	02 3	03 144	04 ④
05 4	06 ③	07 ⑤	08 60
09 ②	10 8	11 720	12 96
13 36	14 ④	15 ②	16 12
17 100	18 185	19 157	20 ⑤
21 288	22 ④	23 48	24 54
25 26	26 ③	27 105	28 210
29 370	30 17	31 60	32 120
33 48	34 19	35 171	36 70
37 343	38 315	39 ①	40 ⑤
41 ④	42 ⑤	43 81	44 864
45 7	46 88	47 ③	48 ③
49 30	50 ②	51 ④	52 ③
53 72	54 ⑤	55 ③	56 41

Ⅳ 집합과 명제

01 집합

문제편 8P

01 답 7

집합 A를 원소나열법으로 나타내면

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, \cdots\}$이므로

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

$\therefore n(B)=7$

02 답 ④

ㄱ. 【반례】 $A=\{x|x$는 유리수$\}$, $B=\{x|x$는 무리수$\}$이면

$A\cup B=R$이지만 두 집합 A, B는 모두 무한집합이다. (거짓)

ㄴ. $A\subset B$이면 $A\cup B=B$이므로 $B=R$이다. (참)

ㄷ. $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=\varnothing$이고

$A\cup B=R$이므로 $A=B^C$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

03 답 32

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A=\{2, 3, 5, 7\}$

$A\subset B$이므로 B는 2, 3, 5, 7을 반드시 원소로 가지는 U의 부분집합이다.

따라서 집합 B의 개수는

$2^{9-4}=2^5=32$

04 답 ①

$B^C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A^C=\{4, 5, 7, 8, 9, 10\}$이므로

$B^C-A^C=\{2, 6\}$

따라서 집합 B^C-A^C의 모든 원소의 합은 8이다.

05 답 7

$A\cap B^C=A-B=\{6, 7\}$이므로 $3\in B$

따라서 $a-4=3$이므로 $a=7$

06 답 ③

$A^C=\{4, 5, 7, 8, 9\}$, $B^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$에서

$A^C\cup B^C=\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $A^C\cap B^C=\{5, 7, 9\}$이므로

$A^C\triangle B^C=(A^C\cup B^C)-(A^C\cap B^C)$

$=\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}-\{5, 7, 9\}$

$=\{1, 3, 4, 8\}$

따라서 $A^C\triangle B^C$의 모든 원소의 합은

$1+3+4+8=16$

[다른 풀이]

$A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$에서

$A^C\triangle B^C=(A^C\cup B^C)-(A^C\cap B^C)$

$=(A\cap B)^C-(A\cup B)^C$

$=(A\cap B)^C\cap(A\cup B)$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=A\triangle B \cdots$ ㉠

이때, $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$에서

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $A\cap B=\{2, 6\}$이므로

㉠에 의하여

$A^C\triangle B^C=A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}-\{2, 6\}=\{1, 3, 4, 8\}$

따라서 $A^C\triangle B^C$의 모든 원소의 합은

$1+3+4+8=16$

07 답 15

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=8$이므로

$n(A)=11$, $n(B)=n(A)-4=7$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=11+7-3=15$

08 답 ②

논술과 수학을 신청한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면

$n(A\cup B)=80$, $n(A)=54$, $n(B)=47$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=54+47-80=21$

$\therefore n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=47-21=26$

따라서 수학만 신청한 학생은 26명이다.

09 답 ③

$P=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2=1,\ x+y=1,\ x, y$는 실수$\}$에서

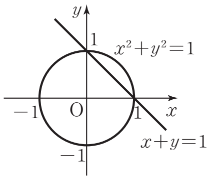
집합 P는 $x^2+y^2=1$과 $x+y=1$을 동시에 만족시키는 점 (x, y)의 집합이다.

즉, 원 $x^2+y^2=1$과

직선 $x+y=1$의 교점이므로

오른쪽 그림에서 교점의 좌표는

$(1, 0)$, $(0, 1)$



$\therefore P=\{(1, 0), (0, 1)\}$

따라서 집합 P의 원소의 개수는 2이다.

10 답 3

$A=\{i, -1, -i, 1\}$이고

$z\in A$이면 $z^2=1$ 또는 $z^2=-1$이므로

$B=\{z_1^2+z_2^2\,|\,z_1\in A,\ z_2\in A\}=\{-2, 0, 2\}$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 3이다.

11 답 5

집합 $A=\{x_1, x_2, x_3\}$이라 하면

$x_1+x_2+x_3=19$

집합 $B=\left\{\frac{x_1+a}{2}, \frac{x_2+a}{2}, \frac{x_3+a}{2}\right\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은 $\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)+\frac{3}{2}a=\frac{1}{2}\times19+\frac{3}{2}a=\frac{19+3a}{2}$

집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합에서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합을 뺀 것과 같으므로

$29=19+\frac{19+3a}{2}-7$, $3a=15$

$\therefore a=5$

12 답 9

$C\subset A$, $C\subset B$이므로 $C\subset(A\cap B)$이다.

$A\cap B=\{-1, 1, 3, 5\}$이므로 $C=\{1, 3, 5\}$일 때

원소의 합이 최대가 된다.

따라서 집합 C의 원소의 합의 최댓값은 $1+3+5=9$

13 답 ④

$A=\{x-1\,|\,-4<x\leq3\}$이므로

$-4<x\leq3$에서 $-5<x-1\leq2$

$\therefore A=\{x\,|\,-5<x\leq2\}$

또한, $B=\{x\,|\,-1\leq x+a<7\}$이므로

$-1\leq x+a<7$에서

$-1-a\leq x<7-a$ $\quad\therefore B=\{x\,|\,-1-a\leq x<7-a\}$

이때, $A\subset B$가 되려면 $-1-a\leq-5$이고 $2<7-a$이어야 하므로

$4\leq a<5$

14 답 ⑤

벤다이어그램에서 세 집합 A, B, C의 포함 관계는

ㄱ. $C^C\subset B^C$에서 $B\subset C$ (참)

ㄴ. $C^C\subset A$에서 $A^C\subset C$ (참)

ㄷ. $A^C\subset B$에서 $B^C\subset A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15 답 ③

조건 (가)에서 $1\in X$, $2\in X$

조건 (나)에서 $5\notin X$, $7\notin X$

즉, 집합 X는 집합 B에서 원소 1, 2, 5, 7을 제외한

집합 $\{3, 4, 6, 8\}$의 부분집합에 원소 1, 2를 넣은 집합과 같다.

따라서 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 $2^4=16$이다.

16 답 ②

집합 C를 원소나열법으로 나타내면

$C=\{0, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

$B\cup X=C$에서 집합 X는 집합 C의 부분집합 중에서

원소 0, 6, 8, 10을 반드시 원소로 가지는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $a=2^3=8$

또한, $A-B=\{0, 1, 2\}$이므로 집합 $A-B$의 진부분집합의 개수는 $b=2^3-1=7$

$\therefore a+b=8+7=15$

17 답 ③

$$\begin{aligned}(A^C\cup B)\cap A&=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)\\&=\varnothing\cup(B\cap A)\\&=B\cap A\end{aligned}$$

이때, $B\cap A=\{3\}$이므로 집합 B는 원소 3은 원소로 가지고

원소 2는 원소로 가지지 않는 U의 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 B의 개수는 집합 $\{0, 1, 4\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^3=8$이다.

18 답 ⑤

ㄱ. $(A\cap B)-(A\cap C)$

$$\begin{aligned}&=(A\cap B)\cap(A\cap C)^C\\&=(A\cap B)\cap(A^C\cup C^C)\\&=(A\cap B\cap A^C)\cup(A\cap B\cap C^C)\\&=\varnothing\cup(A\cap B\cap C^C)\\&=A\cap B\cap C^C\\&=A\cap(B\cap C^C)\\&=A\cap(B-C)\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. $$\begin{aligned}(A-B)\cup(A-C)&=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)\\&=A\cap(B^C\cup C^C)\\&=A\cap(B\cap C)^C\\&=A-(B\cap C)\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄷ. $$\begin{aligned}(A-B)-C&=(A\cap B^C)-C\\&=(A\cap B^C)\cap C^C\\&=A\cap(B^C\cap C^C)\\&=A\cap(B\cup C)^C\\&=A-(B\cup C)\ (\text{참})\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19 답 ②

색칠한 부분은 $A-B$와 $A\cap C$의 합집합이므로

$$\begin{aligned}(A-B)\cup(A\cap C)&=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)\\&=A\cap(B^C\cup C)\end{aligned}$$

20 답 ④

$(M_{18}\cup M_{36})\cap(M_{36}\cup M_{24})$
$=M_{36}\cup(M_{18}\cap M_{24})$
$=M_{36}\cup M_{72}$ ⇦ (18과 24의 최소공배수)$=72$
$=M_{36}$ ⇦ $M_{72}\subset M_{36}$

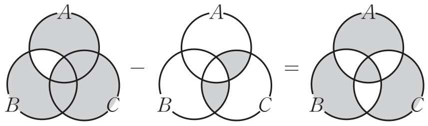
21 답 ⑤

ㄱ. $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$
$=(B-A)\cup(A-B)=B\triangle A$ (참)

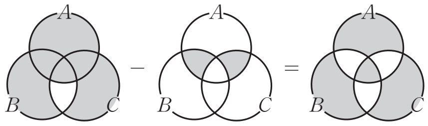
ㄴ. $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$

이므로 벤 다이어그램으로 나타내면

(ⅰ) $(A\triangle B)\triangle C$, 즉 $\{(A\triangle B)\cup C\}-\{(A\triangle B)\cap C\}$는



(ⅱ) $A\triangle(B\triangle C)$, 즉 $\{A\cup(B\triangle C)\}-\{A\cap(B\triangle C)\}$는



$\therefore (A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$ (참)

ㄷ. $A\triangle\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A$
$A\triangle A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$ (참)

ㄹ. $A\triangle B=C$이면
$A\triangle C=A\triangle(A\triangle B)=(A\triangle A)\triangle B$ ($\because$ ㄴ)
$=\varnothing\triangle B$ ($\because$ ㄷ)$=B$ ($\because$ ㄷ) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

22 답 24

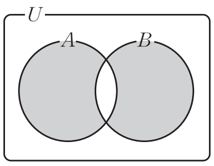
$A\triangle C=B$에서 $A\triangle B=C$이므로
$C=(A-B)\cup(B-A)$
$=\{1, 4\}\cup\{2, 8, 9\}$
$=\{1, 2, 4, 8, 9\}$

따라서 집합 C의 모든 원소의 합은 $1+2+4+8+9=24$

23 답 4

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$이고

벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$(A-B)\cup(B-A)$의 원소가 1, 2, 7이고

$n(A)=3$, $n(B)=2$이므로 $n(A\cap B)=1$이어야 한다.

$\therefore a-1\in A\cap B$

(ⅰ) $a-1=a+3$을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a-1=a^2-3a-1$이고 $a+3=7$일 때, $a=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=4$

24 답 40

반 전체 학생 수를 x, A를 읽은 학생의 집합을 A, B를 읽은 학생의 집합을 B라 하면

$n(A)=\frac{1}{2}x$, $n(B)=\frac{3}{5}x$, $n(A\cap B)=\frac{3}{10}x$,

$n((A\cup B)^C)=8$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}x-\frac{3}{10}x=\frac{4}{5}x$

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=x-\frac{4}{5}x=\frac{1}{5}x=8$

$\therefore x=40$

따라서 반 전체 학생 수는 40명이다.

25 답 14

$n(U)=35$, $n(A)=20$, $n(B)=29$라 하면

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\le n(U)$이므로

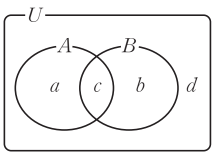
$20+29-n(A\cap B)\le 35$

$\therefore n(A\cap B)\ge 14$

따라서 두 과목 모두 신청한 학생 수의 최솟값은 14이다.

26 답 115

이 학교 학생 전체의 집합을 U, 두 체험 활동 A, B를 신청한 학생의 집합을 각각 A, B라 하고, 그림과 같이 벤다이어그램에서 각 영역의 학생 수를 각각 a, b, c, d라 하면



전체 학생 수가 200명이므로 $a+b+c+d=200$ ⋯ ㉠

조건 (가)에서 $a+c=b+c+20$

즉, $a=b+20$ ⋯ ㉡

조건 (나)에서 $d=a+b+c-80$ ⋯ ㉢

조건 (다)에서 $a+b=c$ ⋯ ㉣

㉠, ㉢에서 $d=60$, $a+b+c=140$ ⋯ ㉤

㉣, ㉤에서 $c=70$, $a+b=70$ ⋯ ㉥

㉡을 ㉥에 대입하면 $a=45$

따라서 체험 활동 A를 신청한 학생의 수는

$a+c=45+70=115$

27 답 ④

두 집합 B, C의 원소를 구하는 표를 만들면 다음과 같다.

$x \backslash y$	1	2	3
1	0	-1	-2
2	1	0	-1
3	2	1	0

$x \backslash y$	1	2	3
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
2	2	1	$\frac{2}{3}$
3	3	$\frac{3}{2}$	1

즉, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, $C=\left\{\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ 3\right\}$

$\therefore C-B=\left\{\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ 3\right\}$

따라서 집합 $C-B$의 모든 원소의 합은 6이다.

28 답 ⑤

$A=\{1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$이므로 A의 부분집합은

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{\{1,\ 2\}\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ \{1,\ 2\}\}$, $\{2,\ \{1,\ 2\}\}$, A

$\therefore P(A)=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{\{1,\ 2\}\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ \{1,\ 2\}\},$
$\{2,\ \{1,\ 2\}\},\ A\}$

⑤ $A\in P(A)$

29 답 ②

$x\in A$이면 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$에서 $2<\frac{1}{x}<3$

즉, $\frac{1}{x}$의 정수 부분은 2이므로

$\left\langle\frac{1}{x}\right\rangle=\frac{1}{x}-2$

$\left\langle\frac{1}{x}\right\rangle=x$에서 $\frac{1}{x}-2=x$

$x^2+2x-1=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}$

이때 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$이므로 $x=-1+\sqrt{2}$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 1이다.

30 답 ③

$0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$라 하면 집합 P의 원소 중 가장 작은 수는 $\alpha+\beta$, 가장 큰 수는 $\gamma+\delta$이고, 집합 Q의 원소 중 가장 작은 수는 $\alpha\beta$, 가장 큰 수는 $\gamma\delta$이다.

$\therefore \alpha+\beta=8$ ⋯ ㉠, $\alpha\beta=15$ ⋯ ㉡

$\gamma+\delta=15$ ⋯ ㉢, $\gamma\delta=56$ ⋯ ㉣

㉠, ㉡에서 α, β는 $t^2-8t+15=0$의 두 근이므로

$\alpha=3$, $\beta=5$

㉢, ㉣에서 γ, δ는 $t^2-15t+56=0$의 두 근이므로

$\gamma=7$, $\delta=8$

$\therefore S=\{3,\ 5,\ 7,\ 8\}$

따라서 집합 S의 원소가 아닌 것은 ③ 6이다.

31 답 ③

$\{x\,|\,x$는 a의 양의 약수$\}\subset\{y\,|\,y$는 10의 양의 약수$\}$를 만족시키려면 a가 10의 약수이어야 한다.

따라서 구하는 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2+5+10=18$

32 답 ②

집합에서 같은 원소는 중복해서 쓰지 않으므로

집합 A에서 $a\neq 0$, $a\neq -2$

$A\subset B$이면 A에 속하는 모든 원소가 B에 속하므로

$a\in B$, $a+2\in B$

(ⅰ) $a=-1$이면 $a+2=1\in B$이므로 $A\subset B$

(ⅱ) $a=1$이면 $a+2=3\in B$이므로 $A\subset B$

(ⅲ) $a=2$이면 $a+2=4\notin B$이므로 $A\not\subset B$

(ⅳ) $a=3$이면 $a+2=5\notin B$이므로 $A\not\subset B$

따라서 구하는 a의 값은 -1, 1의 2개이다.

33 답 ③

두 수 m, n의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라 하면

$(A_m\cap A_n)=A_L$, $(A_m\cup A_n)\subset A_G$이다.

$(A_4\cap A_6)=A_{12}\supset A_p$이므로 p는 12의 배수이다.

한편, $(A_8\cup A_{12})\subset A_4$인데 $(A_8\cup A_{12})\subset A_q$이려면 q는 4의 약수이어야 한다.

$\therefore p=12k$ (k는 자연수), $q=1,\ 2,\ 4$

따라서 $p+q$는 $12k+1$, $12k+2$, $12k+4$의 꼴로 나타낼 수 있는데, ③ 20은 이 꼴로 나타낼 수 없다.

34 답 ③

$S=\{x,\ y,\ z\}=\{xy,\ yz,\ zx\}$이므로

두 집합의 원소를 모두 곱하면

$xyz=xy\times yz\times zx=(xyz)^2$, $xyz(xyz-1)=0$

$\therefore xyz=1$ ($\because xyz\neq 0$)

ㄱ. 두 집합의 원소를 모두 더하면

$x+y+z=xy+yz+zx$에서 $xy+yz+zx=4$

$xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=4$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$ (참)

ㄴ. $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=16-8=8$ (참)

ㄷ. $x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)\{(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\}+3xyz$

$=4\times(8-4)+3=19$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

35 답 ③

$\{1, 2\}\cap X\neq\varnothing$을 만족시키려면 집합 X가 1 또는 2를 원소로 가져야 한다.

1 또는 2를 원소로 가지는 부분집합의 개수는 전체 부분집합에서 1과 2를 모두 원소로 가지지 않는 부분집합을 제외한 개수와 같으므로

1 또는 2를 포함하는 U의 부분집합의 개수는

$2^5-2^3=32-8=24$

36 답 ③

$(B\cap X)\subset(A\cap X)$에서 $x\in(B\cap X)$이면

$x\in(A\cap X)$이므로 집합 X의 원소 x가 $x\in B$이면

$x\in A$이어야 한다.

만약, 집합 X의 원소 x가 $x\in B$이고 $x\notin A$이면

$x\in(B\cap X)$이지만 $x\notin(A\cap X)$이므로

$(B\cap X)\not\subset(A\cap X)$이다.

따라서 집합 B의 원소 중에서 집합 A의 원소가 아닌 것은 집합 X의 원소가 될 수 없으며 그 밖의 집합 U의 원소는 집합 X의 원소가 될 수 있다.

즉, 집합 X는 집합 U에서 $B-A=\{c, d\}$를 제외한 집합 $\{a, b, e\}$의 부분집합이므로 그 개수는 $2^3=8$이다.

37 답 64

$A\cup C=B\cup C$에서

$A\subset(B\cup C)$이고 $B\subset(A\cup C)$

(i) $A\subset(B\cup C)$에서

$2\notin B$, $4\notin B$이고 $2\in A$, $4\in A$이므로

$2\in C$, $4\in C$

(ii) $B\subset(A\cup C)$에서

$7\notin A$, $9\notin A$이고 $7\in B$, $9\in B$이므로

$7\in C$, $9\in C$

(i), (ii)에서 집합 C는 2, 4, 7, 9를 반드시 원소로 갖는 U의 부분집합이다.

따라서 집합 C의 개수는 1, 3, 5, 6, 8, 10을 원소로 갖는 집합의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^6=64$

38 답 ①

$(A\cup B)-(B\cup C)$

$=(A\cup B)\cap(B\cup C)^C$

$=\{A\cap(B\cup C)^C\}\cup\{B\cap(B\cup C)^C\}$ ← 분배법칙

$=\{A\cap(B\cup C)^C\}\cup\{B\cap(B^C\cap C^C)\}$ ← 드모르간의 법칙

$=\{A-(B\cup C)\}\cup\{(B\cap B^C)\cap C^C\}$ ← 결합법칙

$=\{A-(B\cup C)\}\cup(\varnothing\cap C^C)$

$=\{A-(B\cup C)\}\cup\varnothing$

$=A-(B\cup C)$

39 답 ④

$A^C\cup C=U$에서 $A\cap C^C=\varnothing$

즉, $A-C=\varnothing$이므로 $A\subset C$

$B\cup C=B$에서 $C\subset B$이므로 $B\cap C=C$

$\therefore A\cup(B\cap C)=A\cup C=C$

40 답 ②

ㄱ. 집합 N_4와 N_2를 원소나열법으로 나타내면

$N_4=\{1, 5, 9\}$, $N_2=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

이므로 $N_4\subset N_2$ (참)

ㄴ. $N_1=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}=U$이므로 임의의 자연수 k에 대하여

$N_k\subset N_1$이다. (참)

ㄷ. 【반례】 $p=2$, $q=3$이면

$N_2=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $N_3=\{1, 4, 7, 10\}$

$\therefore N_2\cap N_3=\{1, 7\}\neq\varnothing$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

41 답 ④

$A\cap(B^C\cup C)=A\cap(B\cap C^C)^C$

$=A-(B\cap C^C)$

$=A-(B-C)$

이때,

$A=(A\cup C)-(C-A)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}-\{4, 6\}$

$=\{1, 2, 3, 5\}$

$\therefore A\cap(B^C\cup C)=A-(B-C)=\{1, 2, 3, 5\}-\{2\}$

$=\{1, 3, 5\}$

42 답 2

$f_{A-B}(m)=1$에서 $m\in(A-B)$

즉, $m\in A$이고 $m\notin B$이므로

$f_A(m)=1$, $f_B(m)=-1$

$\therefore f_A(m)-f_B(m)=1-(-1)=2$

43 답 ⑤

ㄱ. $A^C \triangle B^C = (A^C \cup B^C) \cap (A^C \cap B^C)^C$

$\qquad = (A \cap B)^C \cap (A \cup B) = A \triangle B$ (참)

ㄴ. $A \triangledown B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^C$

$\qquad = \{(A \cap B)^C \cap (A \cup B)\}^C = (A \triangle B)^C$ (참)

ㄷ. $A^C \triangledown B^C = (A^C \cap B^C) \cup (A^C \cup B^C)^C$

$\qquad = (A \cup B)^C \cup (A \cap B) = A \triangledown B$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

44 답 27

조건 (가)에서

$(A \triangle B) \triangle A = (B \triangle A) \triangle A = B \triangle (A \triangle A)$

$\qquad = B \triangle \varnothing = B$

$\therefore B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

조건 (나)에서 $(A \triangle B) \triangle B = A \triangle (B \triangle B) = A \triangle \varnothing = A$

$\therefore A = \{3, 4, 5, 6\}$

즉, $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$이므로

$A \triangle B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} - \{3, 5\} = \{1, 4, 6, 7, 9\}$

따라서 집합 $A \triangle B$의 모든 원소의 합은 27이다.

45 답 10

$X \triangle Y = (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^C = (X - Y) \cup (Y - X)$이므로

대칭차집합의 연산의 성질에 의해

$(X \triangle Y) \triangle X = (Y \triangle X) \triangle X$

$\qquad = Y \triangle (X \triangle X)$

$\qquad = Y \triangle \varnothing = Y$

즉, 집합 Y를 구하면 된다.

$X^C \cap Y^C = (X \cup Y)^C = \{5, 7\}$에서

$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

$X^C \cup Y = (X \cap Y^C)^C = (X - Y)^C = \{1, 3, 5, 6, 7\}$에서

$X - Y = \{2, 4, 8\}$

이때, $Y = (X \cup Y) - (X - Y)$이므로

$Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} - \{2, 4, 8\} = \{1, 3, 6\}$

따라서 집합 Y의 모든 원소의 합은

$1 + 3 + 6 = 10$

46 답 ④

$n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B)$이므로

$15 = 50 - n(A \cup B)$

$\therefore n(A \cup B) = 35$

또, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$이므로

$35 = n(A) + n(B) - 18$

$\therefore n(A) + n(B) = 53$

47 답 ②

$100 = 2^2 \times 5^2$이므로 a가 100과 서로소이려면 a는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니어야 한다.

따라서 자연수 k의 배수의 집합을 N_k라 하면

$n(S) = n(N_2{}^C \cap N_5{}^C) = n((N_2 \cup N_5)^C)$

$\qquad = n(U) - n(N_2 \cup N_5)$

$\qquad = 100 - \{n(N_2) + n(N_5) - n(N_2 \cap N_5)\}$

$\qquad = 100 - \{n(N_2) + n(N_5) - n(N_{10})\}$

$\qquad = 100 - (50 + 20 - 10) = 40$

48 답 13

$20 = 2^2 \times 5$이므로 집합 B의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니다.

조건 (나)에서 $X \cap B = \varnothing$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수이거나 5의 배수이어야 한다.

조건 (다)에서 $45 = 3^2 \times 5$이므로 집합 X의 모든 원소는 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아니다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 50 이하의 2의 배수 중에서 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수이다.

50 이하의 2의 배수인 수의 개수는 25개

50 이하의 2의 배수 중에서

3의 배수인 수의 개수는 8개

5의 배수인 수의 개수는 5개

15의 배수인 수의 개수는 1개

따라서 집합 X의 원소의 개수의 최댓값은

$25 - (8 + 5 - 1) = 13$

49 답 7

세 권의 책 A, B, C를 읽은 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

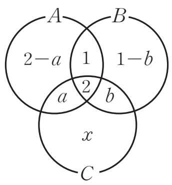
$n(A) = 5$, $n(B) = 4$, $n(C) = 7$, $n(A \cap B \cap C) = 2$

$n(A \cap B) = 3 = n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap C^C)$

$\therefore n(A \cap B \cap C^C) = 1$

여기서 C만 읽은 학생의 수를 x라 하고

벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$n(A) = 5$이므로 $0 \le a \le 2$

$n(B) = 4$이므로 $0 \le b \le 1$

이때, $n(C) = x + 2 + a + b = 7$이므로

$x = 5 - (a + b)$

(i) $a + b$가 최소일 때, x의 값이 최대이므로

$a = b = 0$일 때 x의 최댓값은 5이다.

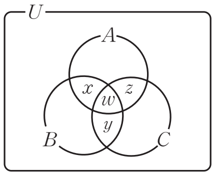
(ii) $a + b$가 최대일 때, x의 값이 최소이므로

$a = 2$, $b = 1$일 때 x의 최솟값은 2이다.

따라서 C만 읽은 학생 수의 최댓값과 최솟값의 합은 7이다.

50 답 ③

A, B, C 신문을 보는 가구의 집합을 각각 A, B, C라 하고 오른쪽 그림과 같이 A와 B, B와 C, C와 A의 두 신문만 보는 가구의 수를 각각 x, y, z, 세 신문을 모두 보는 가구의 수를 w라 하면 조건에서



$x+y+z=9$

$\therefore n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=15+12+20-(x+w)-(y+w)-(z+w)+w$

$=47-(x+y+z)-2w$

$=47-9-2w$

$=38-2w$

따라서 $38-2w=30$이므로

$w=4$

51 답 12

이 학교 학생 전체의 집합을 U, 두 영화 A, B를 관람한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면 두 영화를 모두 관람한 학생의 집합은 $A\cap B$이고, 어느 영화도 관람하지 않은 학생의 집합은 $A^C\cap B^C$이다.

$n(U)=30$

$n(A)=n(B)$ ⋯ ㉠

$n(A\cap B)=n(A^C\cap B^C)-6$ ⋯ ㉡

이때, $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$에서

$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=30-n(A\cup B)$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$n(A\cap B)=24-n(A\cup B)$에서

$n(A\cup B)+n(A\cap B)=24$ ⋯ ㉣

한편, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cup B)+n(A\cap B)=n(A)+n(B)$이므로

㉠, ㉣에서

$24=2n(A)$

$\therefore n(A)=12$

52 답 31

$n\in S$이면 $\frac{36}{n}\in S$이고, 집합 S의 원소는 자연수이므로

$\frac{36}{n}$은 자연수이어야 한다.

따라서 n은 36의 양의 약수이므로 가능한 n은

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36의 9개이다. ⓐ

(ⅰ) $1\in S$이면 $36\in S$, $36\in S$이면 $1\in S$

(ⅱ) $2\in S$이면 $18\in S$, $18\in S$이면 $2\in S$

(ⅲ) $3\in S$이면 $12\in S$, $12\in S$이면 $3\in S$

(ⅳ) $4\in S$이면 $9\in S$, $9\in S$이면 $4\in S$

(ⅴ) $6\in S$이면 $6\in S$

즉, (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9)는 항상 쌍으로 집합 S에 속해야 하므로 집합 S는 5개의 집합

$\{1, 36\}$, $\{2, 18\}$, $\{3, 12\}$, $\{4, 9\}$, $\{6\}$

의 전부 또는 일부를 이용한 합집합이다. ⓑ

이때, $S\neq\varnothing$이므로 집합 S의 개수는 $2^5-1=31$이다. ⓒ

채점기준

ⓐ 가능한 n의 값을 구한다.	[30%]
ⓑ 집합 S의 조건을 구한다.	[50%]
ⓒ 집합 S의 개수를 구한다.	[20%]

53 답 15

a를 원소로 가지고 원소가 3개인 A의 부분집합은

$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$,

$\{a, d, e\}$의 6개이므로 a는 총 6번 더해진다. ⓐ

마찬가지로 다른 원소 역시 6번 더해지므로

원소가 3개인 A의 부분집합들의 원소의 총합은

$6(a+b+c+d+e)=90$ ⓑ

$\therefore a+b+c+d+e=15$ ⓒ

채점기준

ⓐ a가 총 6번 더해짐을 안다.	[40%]
ⓑ 다른 원소 역시 6번 더해짐을 안다.	[40%]
ⓒ $a+b+c+d+e$의 값을 구한다.	[20%]

54 답 3

$A_2=\{x\,|\,f(2x)=0,\ 0\le x\le 1\}$에서

$f(2x)=2x-[2x]=0$

$2x=[2x]$

이때, $[2x]$는 정수이므로 $2x$도 정수이다.

$0\le x\le 1$에서 $0\le 2x\le 2$이므로

$2x=0,\ 1,\ 2\qquad \therefore x=0,\ \frac{1}{2},\ 1$

$\therefore A_2=\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$ ⓐ

마찬가지 방법으로 $A_4=\left\{0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1\right\}$ ⓑ

따라서 $A_2\cap A_4=A_2=\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$이므로

$n(A_2\cap A_4)=3$ ⓒ

채점기준

ⓐ 집합 A_2를 구한다.	[50%]
ⓑ 집합 A_4를 구한다.	[30%]
ⓒ 집합 $A_2\cap A_4$의 원소의 개수를 구한다.	[20%]

55 답 8

$X=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a+1, a+3, a+5\}$이므로

$n(X)=10$이 되기 위해서는

$a+3<2$, $a+5\geq 2$ 또는 $a+1\leq 9$, $a+3>9$

$\therefore -3\leq a<-1$ 또는 $6<a\leq 8$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a는 7, 8이므로 자연수 a의 최댓값은 8이다.

56 답 8

$X\cup A=X$에서 $A\subset X$

$X\cap B^C=X$에서 $X\subset B^C$

$\therefore A\subset X\subset B^C$

$A=\{1, 2\}$이고 $B^C=U-B=\{1, 2, 6, 7, 8\}$

따라서 집합 X는 원소 1, 2를 반드시 가지는 집합 $\{1, 2, 6, 7, 8\}$의 부분집합이므로 집합 X의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$

[다른 풀이]

$X\cup A=X$에서 $A\subset X$

$X\cap B^C=X-B=X$에서 $X\cap B=\varnothing$

즉, 집합 X는 집합 A의 원소 1, 2를 반드시 가지고 집합 B의 원소 3, 4, 5를 가지지 않아야 하므로 집합 X의 개수는

$2^{8-2-3}=2^3=8$

57 답 24

$A\cap B=\{3, 5\}$에서 $S(A\cap B)=8$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{1, 7\}$이므로

$A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$에서

$S(A\cup B)=28$

$\therefore S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)=36$

이때, $S(A)=2S(B)$에서

$S(A)+S(B)=S(A)+\frac{1}{2}S(A)=\frac{3}{2}S(A)=36$이므로

$S(A)=24$

58 답 16

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$에서

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A\cap B=\{2, 3\}$이므로

$P=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$\quad=(A\cup B)-(A\cap B)=\{1, 4, 5\}$

이때, $P\subset X\subset U$에서

$\{1, 4, 5\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$이므로

집합 X는 1, 4, 5를 반드시 원소로 갖는 전체집합 U의 부분집합이므로 이것을 만족시키는 집합 X의 개수는

$2^{7-3}=2^4=16$

59 답 336

$n(P\cap A)=2$에서 집합 A에 속하는 4개의 원소 중 오직 2개만 집합 P에 속한다. 즉, 집합 A의 원소 중 집합 P에 속하는 원소들의 합의 최댓값은 $3+4=7$, 최솟값은 $1+2=3$이다.

따라서 집합 A에 속하지 않는 집합 P의 원소들의 합은 21 이상 25 이하이다. ⋯ ㉠

$P-B=\varnothing$에서 $P\subset B$이고 집합 B의 원소 중 집합 A에 속하는 원소를 제외한 나머지 원소들의 집합은 $\{5, 6, 7, 8\}$이다.

(i) $\{5, 6, 7, 8\}$이 집합 P에 포함되는 경우 이 원소들의 합은 26이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $\{5, 6, 7, 8\}$의 부분집합 중 세 원소로 이루어진 집합이 집합 P에 포함되는 경우 부분집합의 원소의 합의 최솟값은 $5+6+7=18$, 최댓값은 $6+7+8=21$이므로 ㉠을 만족시키는 집합은 $\{6, 7, 8\}$이고 조건 (다)에 의하여 $\{3, 4, 6, 7, 8\}$은 집합 P가 될 수 있다.

(iii) $\{5, 6, 7, 8\}$의 부분집합 중 두 원소로 이루어진 집합은 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에 의해 $P=\{3, 4, 6, 7, 8\}$이고

$P-A=\{6, 7, 8\}$이다.

따라서 집합 $P-A$의 모든 원소의 곱은 336이다.

60 답 33

수학문제집 A, B, C를 구매한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

조건 (가)에 의하여

$n(A\cap B)=15$, $n(B\cap C)=12$, $n(C\cap A)=11$

조건 (나)에 의하여

$n(A\cup B)=55$, $n(B\cup C)=54$, $n(C\cup A)=51$

따라서

$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=55+15=70$

$n(B)+n(C)=n(B\cup C)+n(B\cap C)=54+12=66$ ⋯ ㉠

$n(C)+n(A)=n(C\cup A)+n(C\cap A)=51+11=62$

세 식을 변끼리 더하면

$2\{n(A)+n(B)+n(C)\}=198$에서

$n(A)+n(B)+n(C)=99$

이 식에 ㉠을 대입하면 $n(A)=99-66=33$

61 답 46

$2^{14}-2^{10}=2^{10}(2^4-1)=2^{10}(2-1)(2^3+2^2+2+1)$

$\quad=2^{13}+2^{12}+2^{11}+2^{10}$

$\therefore A(2^{14}-2^{10})=\{10, 11, 12, 13\}$

따라서 집합 $A(2^{14}-2^{10})$의 모든 원소의 합은

$10+11+12+13=46$

62 답 ②

집합 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{31} 중에서

(i) 최소인 원소가 1인 집합은 1이 속하는 집합이므로
부분집합의 개수는 $2^4=16$

(ii) 최소인 원소가 2인 집합은 2는 속하고 1은 속하지 않는 집합이므로 부분집합의 개수는 $2^3=8$

(iii) 최소인 원소가 3인 집합은 3은 속하고 1, 2는 속하지 않는 집합이므로 부분집합의 개수는 $2^2=4$

(iv) 최소인 원소가 4인 집합은 4는 속하고 1, 2, 3은 속하지 않는 집합이므로 부분집합의 개수는 $2^1=2$

(v) 최소인 원소가 5인 집합은 5만 속하는 집합이므로
부분집합의 개수는 1

따라서 구하는 원소의 합은

$1\times16+2\times8+3\times4+4\times2+5\times1=57$

63 답 ④

ㄱ. $x\in X$이고 $x\notin(A\cup B)$이면
$x\in(A\cup X)$이지만 $x\notin B$이므로 $(A\cup X)\subset B$가 항상 성립하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 조건 (나)에서 $(B\cap X)\subset(A\cap X)$이고,
$(A\cap X)\subset A$이므로
$(B\cap X)\subset A$이다. (참)

ㄷ. $(A-X)\subset(A\cup X)$이고, 조건 (가)에서
$(A\cup X)\subset(B\cup X)$이므로
$(A-X)\subset(B\cup X)$
즉, $x\in(A-X)$이면 $x\in(B\cup X)$이다.
이때, $x\in(A-X)$에서 $x\notin X$이므로 $x\in B$이다.
$\therefore (A-X)\subset B$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

64 답 7

집합 N을 원소나열법으로 나타내면

$N=\{a+p,\ b+p,\ c+p,\ d+p,\ e+p\}$

집합 A에 속하는 모든 원소의 합을 $f(A)$라 하면

$f(M)=27$, $f(M\cap N)=13$, $f(M\cup N)=61$이다.

또한, $f(M\cup N)=f(M)+f(N)-f(M\cap N)$에서

$61=27+f(N)-13$

$\therefore f(N)=47$

$f(N)=27+5p=47$에서 $p=4$

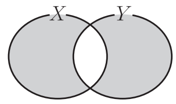
또한, $6\in M$, $7\in M$이므로 $6+4=10\in N$, $7+4=11\in N$이고 $6\in N$, $7\in N$이므로 집합 N은 6, 7, 10, 11을 원소로 갖는다.

이때, $f(N)=47$이므로 나머지 원소는 13이다.

$\therefore N=\{6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 13\}$

따라서 집합 N의 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 차는 $13-6=7$이다.

65 답 14



$X\triangle Y$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$n(X\triangle Y)=n(X)+n(Y)-2\times n(X\cap Y)$

이므로 이를 이용하여 주어진 조건을 간단히 하면

$n(A\triangle B)=27=n(A)+n(B)-2\times n(A\cap B)$ $\cdots$ ㉠

$n(B\triangle C)=49=n(B)+n(C)-2\times n(B\cap C)$ $\cdots$ ㉡

$n(C\triangle A)=46=n(C)+n(A)-2\times n(C\cap A)$ $\cdots$ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$$122=2\{n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\}$$

$$\therefore n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)=61$$

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

에서 $75=61+n(A\cap B\cap C)$

$\therefore n(A\cap B\cap C)=14$

66 답 70

먼저 최댓값을 구해 보자.

세 카페 모두 회원으로 가입한 학생 수가 가장 많으려면 가입자 수가 가장 작은 C카페에 가입한 학생이 A, B카페에도 모두 가입하는 경우이므로 세 카페에 모두 회원으로 가입한 학생 수의 최댓값은 55명이다.

한편, 최솟값을 구하기 위하여 각 학생이 모두 2개의 카페에만 가입하였다고 가정하자.

그러면 100명의 학생이 2개의 카페에만 가입하였으므로 세 카페에 가입한 총 학생 수는 200명이 되어야 한다.

그런데 세 카페의 학생 수의 합은 $90+70+55=215$(명)이므로 적어도 15명은 세 카페에 모두 가입해야 된다.

따라서 세 카페에 모두 회원으로 가입한 학생 수의 최솟값은 15명이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $55+15=70$이다.

일등급 UP

* 교집합의 원소의 개수의 최대, 최소

(1) 두 집합의 교집합의 원소의 개수
전체집합 U의 부분집합을 A, B라 하면
$n(A)+n(B)-n(U)\le n(A\cap B)\le \min(n(A),\ n(B))$
(단, $\min(x,\ y)$는 x, y 중 크지 않은 수를 나타낸다.)

(2) 세 집합의 교집합의 원소의 개수
전체집합 U의 부분집합을 A, B, C라 하면
$n(A)+n(B)+n(C)-2\times n(U)\le n(A\cap B\cap C)$
$\le\min(n(A),\ n(B),\ n(C))$
(단, $\min(x,\ y,\ z)$는 x, y, z 중 크지 않은 수를 나타낸다.)

01 답 ⑤

ㄱ. $a<b<0$이면 $ab>0$이므로

$a<b<0$의 각 변을 ab로 나누면 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$이다. (참)

ㄴ. $a<0$이고 $b<0$일 때만 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로

$a\geq 0$ 또는 $b\geq 0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다. (참)

ㄷ. $|a|+|b|=|a+b|$의 양변을 제곱하면

$(|a|+|b|)^2=|a+b|^2$

$|a|^2+2|ab|+|b|^2=a^2+2ab+b^2$

즉, $|ab|=ab$이므로 $ab\geq 0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

02 답 ③

조건 p : $x(x-10)\geq 0$에서 $\sim p$: $x(x-10)<0$이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은

$\{x\,|\,x(x-10)<0,\ x\text{는 정수}\}=\{x\,|\,0<x<10,\ x\text{는 정수}\}$

따라서 조건 $\sim p$의 진리집합의 원소는 1, 2, 3, $\cdots$, 9의 9개이다.

03 답 ⑤

주어진 벤다이어그램에서 두 집합 P, R의 포함 관계는 $R\subset P$이다.

따라서 $P^C\subset R^C$이므로 ⑤ $\sim p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

04 답 4

모든 양의 실수 x에 대하여 $x+4>a$이므로

$x>a-4$에서 $a-4\leq 0$ $\quad\therefore a\leq 4$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

[다른 풀이]

x는 양의 실수이므로 $x>0$

양변에 4를 더하면 $x+4>4$

따라서 $a\leq 4$이므로 자연수 a는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

05 답 ④

명제 '$\sim p$이면 q이다.'가 거짓이 되려면 $\sim p$이지만 q가 아닌 경우, 즉 '$\sim p$이고 $\sim q$'인 것이 있으면 된다.

조건 '$\sim p$이고 $\sim q$'의 진리집합은 $P^C\cap Q^C$이므로

반례가 속하는 집합은 $P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$이다.

06 답 ⑤

ㄱ. '$a=b=c$'의 부정은 '$a\neq b$이거나 $b\neq c$이거나 $c\neq a$'이므로

$a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$가 부정과 같은 것은 아니다.

ㄴ. 조건 '$a=b=c$'는 '$a=b$이고 $b=c$이고 $c=a$'와 같으므로 그 부정은 '$a\neq b$이거나 $b\neq c$이거나 $c\neq a$', 즉 'a, b, c 중에서 서로 다른 것이 있다.'이다.

ㄷ. '$a=b$이고 $b=c$이고 $c=a$'는

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$과 같으므로

그 부정은 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$이다.

따라서 조건 '$a=b=c$'의 부정과 서로 같은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

07 답 ②

주어진 명제 '$x^2-5x+6\neq 0$이면 $x-a\neq 0$이다.'가 참이 되기 위해서 이 명제의 대우 '$x-a=0$이면 $x^2-5x+6=0$이다.'가 참이 되어야 한다.

$x=a$일 때, 즉 방정식 $a^2-5a+6=0$을 만족시키는 모든 a의 값이 주어진 명제를 참이 되게 하는 값이므로 모든 상수 a의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 5이다.

08 답 ②

조건 p에서

(i) $x\geq 1$일 때, $x-1\geq 0$이므로 $2|x-1|<4-x$에서

$2(x-1)<4-x$, $3x<6$ $\quad\therefore x<2$

따라서 부등식의 해는 $1\leq x<2$

(ii) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로 $2|x-1|<4-x$에서

$-2(x-1)<4-x$ $\quad\therefore x>-2$

따라서 부등식의 해는 $-2<x<1$

(i), (ii)에 의하여 $-2<x<2$

이때, p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 $a=-2$, $b=2$이다.

$\therefore b-a=2-(-2)=4$

09 답 ②

ㄱ. 【반례】 $a=0$, $b=0$, $c=1$이면 ab, bc, ca가 모두 0이지만 c는 0이 아니다. (거짓)

ㄴ. $a+b=0$, $b+c=0$, $c+a=0$ $\cdots$ ㉠의 세 식을 모두 더하면

$(a+b)+(b+c)+(c+a)=0$, $2(a+b+c)=0$

$\therefore a+b+c=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=b=c=0$ (참)

ㄷ. 【반례】 $a=-1$, $b=-2$이면 $ab>1$이지만 $a<1$이고 $b<1$이다. (거짓)

따라서 참인 명제는 ㄴ이다.

10 답 ④

p : $abc=0 \Longleftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$ 또는 $c=0$

q : $|a-b|+|b-c|+|c-a|=0 \Longleftrightarrow a=b=c$

r : $(a-b)(b-c)(c-a)=0 \Longleftrightarrow a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

따라서 반드시 참인 명제는 $q\longrightarrow r$이다.

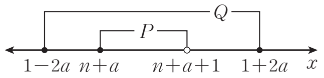
11 답 ②

p : $[x-a]=n$에서 $n\le x-a<n+1$

$\therefore n+a\le x<n+a+1$

q : $|x-1|\le 2a$에서 $-2a\le x-1\le 2a$

$\therefore 1-2a\le x\le 1+2a$



두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 그림에서 $1-2a\le n+a$, $n+a+1\le 1+2a$이어야 한다.

$1-2a\le n+a$에서 $1-3a\le n$, $n+a+1\le 1+2a$에서 $n\le a$

즉, $1-3a\le n\le a$ … ㉠이므로

$1-3a\le a$에서 $a\ge\frac{1}{4}$ … ㉡

한편, ㉠에서 정수 n이 존재할 조건은 $a\ge\frac{1}{3}$ … ㉢

㉡, ㉢에 의하여 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

12 답 ③

$P\cap Q=Q$에서 $Q\subset P$

$Q^C\subset R^C$에서 $R\subset Q$

따라서 $R\subset Q\subset P$이므로

$r\Longrightarrow q\Longrightarrow p$, $\sim p\Longrightarrow \sim q\Longrightarrow \sim r$

따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

13 답 ④

조건 $p(x)$의 진리집합이 $\{1, 3\}$이므로 조건 $p(1)$, $p(3)$은 참이고, $p(2)$, $p(4)$, $p(5)$는 거짓이다.

따라서 $\sim p(1)$, $\sim p(3)$은 거짓이고, $\sim p(4)$는 참이다.

14 답 ⑤

$(P-Q)\cup(Q-R)=\varnothing$에서

$P-Q=\varnothing$이고 $Q-R=\varnothing$

즉, $P\subset Q$이고 $Q\subset R$이므로

$P\subset Q\subset R$

$\therefore p\Longrightarrow q\Longrightarrow r$, $\sim r\Longrightarrow \sim q\Longrightarrow \sim p$

따라서 항상 참인 명제는 ⑤ $\sim r\longrightarrow \sim p$이다.

15 답 ⑤

조건 p의 부정 $\sim p$는

$\sim p$: x는 2의 배수이고 3의 배수이다.

즉, x는 6의 배수이다.

100 이하의 6의 배수의 개수는 16이다.

$\sim(\sim p)=p$이므로 조건 p를 만족시키는 100 이하의 자연수의 개수는 100 이하의 자연수에서 6의 배수를 뺀 수의 개수이다. 즉, 100 이하의 자연수의 개수에서 $\sim p$인 것을 제외하면 되므로 구하는 개수는 $100-16=84$이다.

16 답 165

조건 p의 부정 $\sim p$는

$\sim p$: 제곱수이고 짝수가 아니다. 즉, 제곱수이고 홀수이다.

이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은 $\{1, 9, 25, 49, 81\}$이다.

따라서 구하는 원소의 합은 $1+9+25+49+81=165$이다.

17 답 2

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

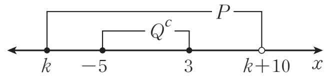
명제 $\sim p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$, 즉 $Q^C\subset P$이어야 한다.

p : $k\le x<k+10$에서 $P=\{x\,|\,k\le x<k+10\}$

q : $x^2+2x-15>0$에서

$Q=\{x\,|\,x<-5$ 또는 $x>3\}$이므로

$Q^C=\{x\,|\,-5\le x\le 3\}$



즉, $Q^C\subset P$이려면 그림에서 $k\le -5$이고 $3<k+10$이어야 한다.

$\therefore -7<k\le -5$

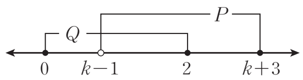
따라서 정수 k는 -6, -5의 2개이다.

18 답 ③

명제 '$k-1<x\le k+3$인 어떤 실수 x에 대하여 $0\le x\le 2$이다.'에서 조건 $k-1<x\le k+3$의 진리집합을 $P=\{x\,|\,k-1<x\le k+3\}$, 조건 $0\le x\le 2$의 진리집합을 $Q=\{x\,|\,0\le x\le 2\}$라 하자.

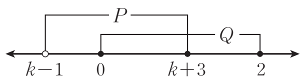
주어진 명제가 참이 되려면 진리집합 P에 속하는 원소 중 진리집합 Q에 속하는 원소가 존재하므로 $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 한다.

(i) $k-1\ge 0$일 때, $k-1<2$



$\therefore 1\le k<3$

(ii) $k-1<0$일 때, $0\le k+3$



$\therefore -3\le k<1$

(i), (ii)에 의하여 $-3\le k<3$

따라서 주어진 명제가 참이 되게 하는 정수 k는 -3, -2, -1, 0, 1, 2의 6개이다.

19 답 ②

'어떤 x에 대하여 $p(x)$'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p(x)$'이므로 '우리 반 학생 중 어떤 학생은 안경을 썼다.' 의 부정은 '우리 반 학생은 모두 안경을 쓰지 않았다.'이다.

20 답 ③

ㄱ. '어떤 x에 대하여 $p(x)$이다.'가 참이므로 P에는 적어도 하나의 원소가 존재한다. 따라서 $P \neq \varnothing$이다. (참)

ㄴ. '모든 x에 대하여 $p(x)$이다.'가 참이므로 전체집합 U의 모든 x에 대하여 조건 $p(x)$가 참이다. 따라서 $P=U$이다. (참)

ㄷ. '모든 x에 대하여 $p(x)$이다.'가 거짓이므로 $P \neq U$이다. 따라서 항상 $P=\varnothing$인 것은 아니다. (거짓)

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

21 답 ③

ㄱ. $x>0$이고 $y>0 \overset{\circ}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}} x+y>0$이고 $xy>0$

(→의 증명) (양수)+(양수)=(양수),

(양수)×(양수)=(양수)

(←의 증명) $xy>0$이면 x, y는 같은 부호이고,

$x+y>0$이므로 $x>0$이고 $y>0$이다.

ㄴ. $0<x<y \overset{\circ}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} x^3y<xy^3$

(→의 증명) $0<x<y$이면

$x^3y-xy^3=xy(x^2-y^2)<0$이므로 $x^3y<xy^3$

(←의 【반례】) $x=-1$이고 $y=-3$이면

$x^3y<xy^3$이지만 $y<x$이다.

ㄷ. $x^2+y^2 \neq 0 \overset{\circ}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}} x \neq 0$이거나 $y \neq 0$

(→의 증명) 대우 '$x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다.' 가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

(←의 증명) 역의 대우 '$x^2+y^2=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다.'가 참이므로 역도 참이다.

따라서 주어진 명제와 그 명제의 역이 모두 참인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22 답 ③

ㄱ. $p: a^2+b^2=0 \overset{\circ}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} q: a^2=b^2$

(→의 증명) $a^2+b^2=0$이면 $a^2=0$, $b^2=0$이므로

$a^2=b^2$

(←의 【반례】) $a^2=b^2=1$이면 $a^2+b^2 \neq 0$이다.

ㄴ. $p: ab<0 \overset{\circ}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} q: a<0$ 또는 $b<0$

(→의 증명) $ab<0$이면 $a>0$, $b<0$ 또는 $a<0$, $b>0$이므로

$a<0$ 또는 $b<0$이다.

(←의 【반례】) $a<0$, $b<0$이면 $ab>0$이다.

ㄷ. $p: a=b \overset{\circ}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}} q: a^3=b^3$

(→의 증명) $a=b$이면 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$에서

$a^3=b^3$이다.

(←의 증명) $a^3=b^3$이면

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$이므로 $a=b$이다.

따라서 명제 $p \longrightarrow q$는 참이지만 그 역은 거짓인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

23 답 ③

하림이의 결론 ' 키가 175 cm 이상인 학생의 몸무게는 65 kg 이상이다.'가 참이면 키가 175 cm 이상인 학생의 몸무게는 반드시 65 kg 이상이어야 하므로 ㄱ. 키가 180 cm인 학생의 몸무게가 65 kg 이상인지 반드시 확인해야 한다.

또한, 하림이의 결론이 참이면 대우 ' 몸무게가 65 kg 미만인 학생의 키는 175 cm 미만이다'도 참이므로 ㄹ. 몸무게가 60 kg인 학생의 키가 175 cm 미만인지 확인해야 한다.

따라서 하림이의 결론이 참인지 알아보기 위해 반드시 확인해야 하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

24 답 ③

$x^2-3|x| \le 0$에서 $|x|(|x|-3) \le 0$

$0 \le |x| \le 3$이므로 $-3 \le x \le 3$

즉, $\{x \mid -3 \le x \le 3\} \subset \{x \mid x \le \alpha\}$에서 $\alpha \ge 3$

또, $\{x \mid \beta \le x \le 0\} \subset \{x \mid -3 \le x \le 3\}$에서 $-3 \le \beta \le 0$

$\therefore |\alpha-\beta| \ge 3$

따라서 $|\alpha-\beta|$의 최솟값은 3이다.

25 답 ②

ㄱ. $x+y=xy \overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ $\quad\therefore$ 필요조건

(→의 【반례】) $x=0$, $y=0$일 때, $x+y=xy$이지만

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$은 성립하지 않는다.

(←의 증명) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$의 양변에 xy를 곱하면

$x+y=xy$

ㄴ. $(A \cup B) \cap (A^C \cap B^C)=\varnothing \overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}} A=B$

$\therefore$ 필요조건

(→의 【반례】) $A=\{1\}$, $B=\varnothing$ 일 때

$(A \cup B) \cap (A^C \cap B^C)=\varnothing$ 이지만 $A \neq B$이다.

(←의 증명) $A=B$일 때,

$$(A \cup B) \cap (A^C \cap B^C)=(A \cup A) \cap (A \cup A)^C$$
$$=A \cap A^C=\varnothing$$

ㄷ. $A \subset B$ 또는 $A \subset C \overset{\circ}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} A \subset (B \cup C)$

$\therefore$ 충분조건

(→의 증명) $\alpha \in A$이면 $\alpha \in B$ 또는 $\alpha \in C$이므로

$\alpha \in (B \cup C)$

따라서 $A \subset B$ 또는 $A \subset C$이면 $A \subset (B \cup C)$이다.

(←의 【반례】) $A=\{2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{1, 3\}$일 때,

$A \subset (B \cup C)$이지만 $A \not\subset B$이고 $A \not\subset C$이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

ㄴ. $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$이므로 임의의 집합 A, B에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^C \cap B^C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)^C = \varnothing$이 항상 성립한다.

즉, $(A \cup B) \cap (A^C \cap B^C) = \varnothing$이면 항상 $A = B$인 것은 아니다.

26 답 ③

$||x| - |y|| = |x - y|$의 양변을 제곱하면

$(|x| - |y|)^2 = (x - y)^2$

$|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| = x^2 + y^2 - 2xy$

$|xy| = xy$

$\therefore xy \geq 0$

[다른 풀이]

$||x| - |y|| = |x - y|$ ⋯ ㉠

(i) ㉠이 충분조건일 때

$||x| - |y|| = |x - y|$에서 $|x| - |y| = \pm(x - y)$

ⓘ $|x| - |y| = x - y$이면

$x \geq 0$, $y \geq 0$ 또는 $x = y$

ⓘⓘ $|x| - |y| = -x + y$이면

$x \leq 0$, $y \leq 0$ 또는 $x = y$

ⓘ, ⓘⓘ에 의하여 $xy \geq 0$

(ii) ㉠이 필요조건일 때

$xy \geq 0$에서

ⓘ $x \geq 0$, $y \geq 0$이면

$||x| - |y|| = |x - y|$

ⓘⓘ $x \leq 0$, $y \leq 0$이면

$||x| - |y|| = |-x + y| = |x - y|$

ⓘⓘⓘ $x = y$이면 (좌변)$=0=$(우변)이므로 주어진 식이 성립한다.

ⓘ~ⓘⓘⓘ에 의하여 $||x| - |y|| = |x - y|$

$\therefore ||x| - |y|| = |x - y| \Longleftrightarrow xy \geq 0$

27 답 ①

ㄱ. $|a| + |b| > |a + b|$의 양변을 제곱하면

$(|a| + |b|)^2 > |a + b|^2$

$|a|^2 + 2|ab| + |b|^2 > a^2 + 2ab + b^2$

$\therefore |ab| > ab$

이때 $ab = 0$이면 $|ab| = ab = 0$이 되어 성립하지 않는다.

$\therefore ab \neq 0$ (참)

ㄴ. 【반례】 $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{2}$이면 $a + b = 2$, $ab = -1$로 모두 정수이지만 a, b는 정수가 아니다. (거짓)

ㄷ. 【반례】 $a = 4$, $b = \frac{1}{2}$이면 $a + b > 2$, $ab > 1$이지만 $b < 1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

[다른 풀이]

ㄱ. 대우 '$ab = 0$이면 $|a| + |b| \leq |a + b|$'가 참임을 보이자.

$ab = 0$이면 $a = 0$ 또는 $b = 0$이므로

(i) $a = 0$일 때

$|a| + |b| = |b|$, $|a + b| = |b|$

$\therefore |a| + |b| \leq |a + b|$

(ii) $b = 0$일 때도 (i)과 마찬가지로 하면

$|a| + |b| \leq |a + b|$

따라서 대우가 참이므로 원래 명제도 참이다. (참)

28 답 ④

조건 q : $A \cap B = A \cap C$에 조건 r를 적용하면

$A - B = A - (A \cap B) = A - (A \cap C) = A - C$

$\therefore q \Longrightarrow r$

①, ②의 【반례】 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$

③, ⑤의 【반례】 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, 4\}$

29 답 ①

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 문제의 조건에서

$(P^C \cup Q^C) \subset R \subset P$

이때, U를 전체집합이라 하면 $P^C \subset P$에서

$P = U$이므로 조건 p는 항상 참이다.

한편, Q, R는 전체집합이 아닐 수 있으므로 조건 q, r는 항상 참이라 할 수 없다.

30 답 ⑤

ㄱ. $a < b$일 때, $x = \frac{a+b}{2}$라 하면 $a < x$와 $x < b$를 만족시킨다. (참)

ㄴ. $a < x$와 $x < b$를 만족시키는 실수 x가 있으면

$x - a > 0$, $b - x > 0$이므로 $b - a = (b - x) + (x - a) > 0$

$\therefore a < b$ (참)

ㄷ. $a \leq x$와 $x \leq b$를 만족시키는 실수 x가 있으면

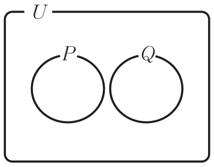
$x - a \geq 0$, $b - x \geq 0$이므로 $b - a = (b - x) + (x - a) \geq 0$

$\therefore a \leq b$ (참)

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

31 답 ④

$P \cap Q = \varnothing$이고 $P \cup Q \neq U$이므로 두 집합 P, Q 사이의 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



즉, $Q \subset P^C$, $P \subset Q^C$이므로

$q \Longrightarrow \sim p$, $p \Longrightarrow \sim q$이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

32 답 ④

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 성립하지 않는 예는 $\sim p$이면서 q가 아닌 경우, 즉 집합 $P^C \cap Q^C$에 속하는 원소이다.

한편, 주어진 벤다이어그램에서 $d \in (P^C \cap Q^C)$이므로 d는 명제 $\sim p \longrightarrow q$의 반례이다.

33 답 ⑤

$p \Longrightarrow \sim q$, $\sim p \Longrightarrow r$, $q \Longrightarrow p$에서 각 명제의 대우 역시 참이므로

$q \Longrightarrow \sim p$, $\sim r \Longrightarrow p$, $\sim p \Longrightarrow \sim q$이다.

$q \Longrightarrow \sim p$, $\sim p \Longrightarrow r$에서 $Q \subset P^C \subset R$

$q \Longrightarrow p$, $q \Longrightarrow \sim p$에서 $Q \subset P$이고 $Q \subset P^C$이므로 $Q = \varnothing$

ㄱ. $Q = \varnothing$ 이므로

$P \cap Q = \varnothing$ (참)

ㄴ. $P^C \subset R$이므로

$R - P = R \cap P^C = P^C$ (참)

ㄷ. $Q^C = U$이므로

$Q^C \cap R = U \cap R = R$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

34 답 ⑤

$P - Q = Q^C$에서 $P \cap Q^C = Q^C$이므로 $Q^C \subset P$이다.

또, $P \cap R = \varnothing$ 에서 $P \subset R^C$, $R \subset P^C$이다.

ㄱ. $Q^C \subset P$에서 $P^C \subset Q$이므로 $\sim p \Longrightarrow q$ (참)

ㄴ. $Q^C \subset P$, $P \subset R^C$에서 $Q^C \subset R^C$이므로 $\sim q \Longrightarrow \sim r$ (참)

ㄷ. $R \subset P^C$에서 $r \Longrightarrow \sim p$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

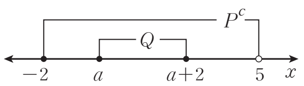
35 답 2

주어진 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 대우 $q \longrightarrow \sim p$가 참이면 된다.

즉, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $Q \subset P^C$이어야 한다.

$\sim p$: $-2 \le x < 5$에서 $P^C = \{x \mid -2 \le x < 5\}$

q : $a \le x \le a+2$에서 $Q = \{x \mid a \le x \le a+2\}$



따라서 $Q \subset P^C$이려면 $-2 \le a$이고 $a+2 < 5$이어야 한다.

즉, $-2 \le a < 3$이므로 정수 a의 최댓값은 2이다.

36 답 ④

주어진 조건 '집합 A의 원소 중 적어도 3개는 3보다 크다.'는 '집합 A의 원소 중 3보다 큰 원소가 3개 이상이다.'로 나타낼 수 있다.

따라서 조건 p의 부정 $\sim p$는 '집합 A의 원소 중 3보다 큰 원소가 2개 이하이다.'이다.

37 답 ②

어떤 명제를 부정할 때는 그 명제의 전체집합은 부정하지 않는다.

즉, 주어진 명제의 전체집합은 그대로 두고 결론을 부정한다.

'$\underbrace{x \ge 2\text{인 실수 } x}_{\text{전체집합}}$에 대하여 $\underbrace{\text{모두 } x-1>0}_{\text{결론}}$이다.'

부정: '$\underbrace{x \ge 2\text{인 실수 } x}_{\text{전체집합}}$에 대하여 $\underbrace{\text{어떤 것은 } x-1 \le 0}_{\text{결론의 부정}}$이다.'

즉, '$x \ge 2$인 어떤 실수 x에 대하여 $x-1 \le 0$이다.'가 주어진 명제의 부정이다.

일등급 UP

*** 명제의 부정**

다음과 같이 그 명제의 전체집합까지 부정을 하는 경우가 많다.

부정 : '$x < 2$인 어떤 실수 x에 대하여 $x-1 \le 0$이다.'

이 경우 $x=1$이면 성립하므로 명제의 부정이 참이 된다. 주어진 명제가 참이고, 참인 명제를 부정하면 거짓이어야 하는데 참인 명제의 부정 역시 참이 되는 것은 부정을 잘못한 것이다.

38 답 8

주어진 명제가 참이 되려면 조건 $|x| < 1$의 진리집합이 조건 $|x-2| < k$의 진리집합에 포함되어야 한다.

조건 $|x| < 1$의 진리집합은 $\{x \mid -1 < x < 1\}$

조건 $|x-2| < k$의 진리집합은 $\{x \mid 2-k < x < 2+k\}$

즉, $\{x \mid -1 < x < 1\} \subset \{x \mid 2-k < x < 2+k\}$ 에서

$2-k \le -1$이고 $2+k \ge 1$ $\qquad \therefore k \ge 3$

그런데 k는 10 이하의 자연수이므로 $3 \le k \le 10$이다.

따라서 구하는 자연수 k는 3, 4, $\cdots$, 10의 8개이다.

39 답 ⑤

조건 (가)에서 집합 B에 속하지 않는 원소 중 집합 A에 속하면서 집합 C에 속하지 않는 원소가 적어도 하나 존재하므로 집합 A에만 속하는 원소가 최소한 1개 존재한다.

즉, $B^C \cap A \cap C^C \neq \varnothing$ 에서 $(B \cup C)^C \cap A \neq \varnothing$

$\therefore A - (B \cup C) \neq \varnothing$

조건 (나)에서 집합 C에 속하면서 집합 A에 속하지 않는 모든 원소는 집합 B에 속하므로 $(C \cap A^C) \subset B$에서 $(C - A) \subset B$

따라서 두 명제 (가), (나)를 모두 참이 되도록 하는 벤 다이어그램은 ⑤이다.

40 답 5

ㄱ. $a > b \overset{\times}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} a^2 > b^2$

($\longrightarrow$의 【반례】) $a = -1$, $b = -2$

($\longleftarrow$의 【반례】) $a = -2$, $b = 1$

ㄴ. 삼각형 ABC가 이등변삼각형이다. $\overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}}$ $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$

($\longrightarrow$의 【반례】) $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AB}} \neq \overline{\mathrm{AC}}$

ㄷ. 정수 n에 대하여 n^2이 짝수이다. $\underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ n이 짝수이다.

($\longrightarrow$의 증명) 대우 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'가 참이므로 원래 명제도 참이다.

($\longleftarrow$의 증명) $n=2k$(k는 정수)라 하면 $n^2=4k^2=2\times(2k^2)$이므로 n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.

ㄹ. x, y가 실수일 때, $x+y>0$ $\underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ $x>-1$ 또는 $y>1$

($\longrightarrow$의 증명) 대우 '$x\leq-1$이고 $y\leq1$이면 $x+y\leq0$이다.'가 참이므로 원래 명제도 참이다.

($\longleftarrow$의 【반례】) $x=-5$, $y=2$

ㅁ. $xy\neq6$ $\underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ $x\neq2$ 또는 $y\neq3$

($\longrightarrow$의 증명) 대우 '$x=2$이고 $y=3$이면 $xy=6$이다.'가 참이므로 원래 명제도 참이다.

($\longleftarrow$의 【반례】) $x=1$, $y=6$

ㅂ. $x+y$가 유리수이다. $\underset{\times}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ x, y 중 적어도 하나는 유리수이다.

($\longrightarrow$의 【반례】) $x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$

($\longleftarrow$의 【반례】) $x=1+\sqrt{2}$, $y=2$

따라서 참인 명제는 ㄷ, ㄹ, ㅁ의 3개이므로 $p=3$이고

역이 참인 명제는 ㄴ, ㄷ의 2개이므로 $q=2$

$\therefore p+q=3+2=5$

41 답 6

명제의 역 '$xy>3$이면 $x^2+y^2>k$이다.'가 참이 될 조건을 찾아보자.

x, y가 실수이므로 $(x-y)^2\geq0$에서 $x^2+y^2\geq2xy$

이때, $xy>3$이면 $x^2+y^2\geq2xy$에서 $x^2+y^2>6$

즉, $x^2+y^2>6\geq k$이면 명제의 역이 참이 된다.

따라서 $k\leq6$에서 k의 최댓값은 6이다.

42 답 ②

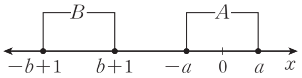
$A=\{x\,|\,(x-a)(x+a)\leq0\}=\{x\,|\,-a\leq x\leq a\}$

$B=\{x\,|\,|x-1|\leq b\}=\{x\,|\,-b\leq x-1\leq b\}$

$\quad=\{x\,|\,-b+1\leq x\leq b+1\}$

$A\cap B=\varnothing$이기 위해서는

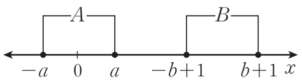
(i) 그림과 같이



$b+1<-a$이어야 하는데

a, b는 양수이므로 $b+1<-a$일 수 없다.

(ii) 그림과 같이



$a<-b+1$에서 $a+b<1$

이때, a, b는 양수이므로 $a+b>0$이고 (ii)에 의하여

$A\cap B=\varnothing$이기 위한 필요충분조건은 $0<a+b<1$이다.

43 답 ④

ㄱ. $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac=0$이므로

중근 $x=-\dfrac{b}{2a}$를 갖는다.

또한, $x=-\dfrac{b}{2a}$를 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\dfrac{b}{2a}\right)+c=0$에서 $\dfrac{-b^2+4ac}{4a}=0$

$\therefore b^2-4ac=0$

즉, 필요충분조건이다.

ㄴ. $a>0$이고 $D=b^2-4ac=0$이므로 $ax^2+bx+c>0$의 해는

$x\neq-\dfrac{b}{2a}$인 모든 실수이다.

또한, $a>0$일 때, $ax^2+bx+c>0$의 해가 모든 실수이면

$D=b^2-4ac<0$이다.

ㄷ. $a>0$이고 $D=b^2-4ac=0$이므로 $ax^2+bx+c\leq0$의 해는

$x=-\dfrac{b}{2a}$의 단 하나이다.

또한, $a>0$일 때, $ax^2+bx+c\leq0$이 단 하나의 해를 가지려면

$D=b^2-4ac=0$이어야 한다.

즉, 필요충분조건이다.

따라서 필요충분조건인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

44 답 ③

ㄱ. 두 조건

p : m, n은 모두 자연수이다.

q : $m+n$, $m-n$은 모두 자연수이다.

에 대하여 $p \underset{\times}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} q$

($\longrightarrow$의 【반례】) $m=1$, $n=2$이면 $m-n$은 자연수가 아니다.

($\longleftarrow$의 【반례】) $m=2$, $n=-1$이면 $m+n$, $m-n$은 모두 자연수이지만 n은 자연수가 아니다.

ㄴ. 두 조건

p : m, n은 모두 정수이다.

q : $m+n$, $m-n$은 모두 정수이다.

에 대하여 $p \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} q$

($\longrightarrow$의 증명) 정수끼리 더하거나 뺀 값은 정수이다.

($\longleftarrow$의 【반례】) $m=\dfrac{3}{2}$, $n=\dfrac{1}{2}$이면 $m+n$, $m-n$은 모두 정수이지만 m과 n은 정수가 아니다.

ㄷ. 두 조건

p : m, n은 모두 유리수이다.

q : $m+n$, $m-n$은 모두 유리수이다.

에 대하여 $p \underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} q$

($\longrightarrow$의 증명) 유리수끼리 더하거나 뺀 값은 유리수이다.

($\longleftarrow$의 증명) 유리수 k, l에 대하여 $m+n=k$, $m-n=l$이라 하면 $m=\dfrac{k+l}{2}$, $n=\dfrac{k-l}{2}$

이때, k, l이 유리수이고 유리수끼리 더하거나 뺀 값을 2로 나눈 값도 유리수이므로 m, n도 유리수이다.

따라서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄷ이다.

45 답 ④

네 조건 p, q, r, s의 진리집합을 각각 P, Q, R, S라 하면

p는 q이기 위한 필요조건이므로

$Q \subset P$

r는 q이기 위한 충분조건이므로

$R \subset Q$

r는 s이기 위한 필요조건이므로

$S \subset R$

q는 s이기 위한 충분조건이므로

$Q \subset S$

즉, $S \subset R \subset Q \subset S$, $Q \subset P$

$\therefore Q=R=S \subset P$

이때, 조건 'p 또는 q'의 진리집합은 $P \cup Q=P$이고, $P \supset Q$이므로 $(P \cup Q) \supset Q$이다. 따라서 'p 또는 q'는 r이기 위한 $\underbrace{\text{필요}}_{\text{(가)}}$조건이다.

또한, 두 조건 'p이고 q'와 'r 또는 s'의 진리집합은 각각 $P \cap Q=Q$, $R \cup S=Q$ ($\because Q=R=S$)이므로 'p이고 q'는 'r 또는 s'이기 위한 $\underbrace{\text{필요충분}}_{\text{(나)}}$조건이다.

따라서 (가), (나)에 알맞은 것은 차례로 필요, 필요충분이다.

46 답 ⑤

'$p(x)$는 $q(x)$의 충분조건이 아니다.'에서

$p(x) \not\Rightarrow q(x)$이므로

$p(x)$이지만 $q(x)$가 아닌 것이 있다.

즉, 어떤 x에 대하여 $p(x)$이고 $\sim q(x)$이다.

47 답 ①

ㄱ. $x+y \geq 2 \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$이므로

p는 q이기 위한 충분조건이다.

($\rightarrow$의 증명) 대우 '$x<1$이고 $y<1$이면 $x+y<2$이다.'가 참이므로 원래 명제도 참이다.

($\leftarrow$의 【반례】) $x=3$, $y=-2$이면 $x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$이지만 $x+y<2$이다.

ㄴ. $xy>x+y>4 \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} x>2$이고 $y>2$이므로

p는 q이기 위한 필요조건이다.

($\rightarrow$의 【반례】) $x=4$, $y=\dfrac{3}{2}$이면

$xy>x+y>4$이지만 $x>2$이고 $y<2$이다.

($\leftarrow$의 증명) $x>2$이고 $y>2$에서

$x-1>1$이고 $y-1>1$

$(x-1)+(y-1)>2$이고 $(x-1)(y-1)>1$

$x+y>4$이고 $xy-x-y+1>1$

$x+y>4$이고 $xy>x+y$

$\therefore xy>x+y>4$

ㄷ. $xy+1>x+y>2 \underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} x>1$이고 $y>1$이므로

p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

(증명) $x>1$이고 $y>1$에서

$x-1>0$이고 $y-1>0$

$(x-1)+(y-1)>0$이고 $(x-1)(y-1)>0$

$x+y>2$이고 $xy-x-y+1>0$

$x+y>2$이고 $xy+1>x+y$

$\therefore xy+1>x+y>2$

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ㄱ이다.

48 답 ②

a, b가 실수일 때

$|a|+|b|=0 \Longleftrightarrow a=0$, $b=0$

ㄱ. $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0$, $b=0$

ㄴ. $a^2-ab+b^2=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2$

$=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2$

이므로 $a-\dfrac{b}{2}=0$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=0$

$\therefore a=0$, $b=0$

ㄷ. $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=0$이므로 $a=b$

따라서 필요충분조건인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

49 답 ②

주어진 조건을 s라 하면

$s:(a-1)(b-1)(c-1)>0$에서

$a-1$, $b-1$, $c-1$ 모두 0보다 크거나 한 개만 0보다 크고 두 개는 0보다 작다.

즉, a, b, c 모두 1보다 크거나 한 개만 1보다 크고 두 개는 1보다 작다.

이때, [보기]의 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 조건을 순서대로 p, q, r라 하면

ㄱ. $p \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} s$에서 p는 s이기 위한 필요조건이다.

($\rightarrow$의 【반례】) $a>1$, $b>1$, $c<1$

ㄴ. $q \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} s$에서 q는 s이기 위한 필요조건이다.

($\rightarrow$의 【반례】) $a=3$, $b=2$, $c=-1$

ㄷ. $r \underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} s$에서 r는 s이기 위한 충분조건이다.

($\rightarrow$의 증명) a, b, c의 최솟값이 1보다 크다.

a, b, c 모두 1보다 크다.

$a-1$, $b-1$, $c-1$ 모두 0보다 크다.

$(a-1)(b-1)(c-1)>0$

($\leftarrow$의 【반례】) $a=0$, $b=0$, $c=2$

따라서 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

50 답 A

A의 말의 앞 진술이 참인 경우와 뒷 진술이 참인 경우로 나누어 보자.

(i) A의 말의 앞 진술이 참인 경우

A의 말에서 A가 3위이면 D가 2위가 아니고, D의 말에서 D는 3위가 아니므로(∵ A가 3위) E는 5위이다. 또한, E의 말에서 E는 4위가 아니고(∵ E는 5위) A가 1위인데 이는 A의 말과 모순이다. 즉, A의 말의 앞 진술은 거짓이다.

(ii) A의 말의 뒷 진술이 참인 경우

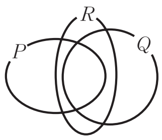
A의 말에서 A가 3위가 아니고 D가 2위이며, D의 말에서 D는 3위가 아니고(∵ D는 2위) E는 5위이다. 또한, E의 말에서 E는 4위가 아니고(∵ E는 5위) A가 1위이며, B의 말에서 B는 2위가 아니고(∵ D가 2위) C가 3위이다. 마지막으로 C의 말에서 C는 1위가 아니고(∵ A가 1위) B는 4위임을 알 수 있다.

(i), (ii)에 의하여 1위는 A, 2위는 D, 3위는 C, 4위는 B, 5위는 E이다.

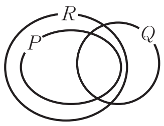
51 답 ④

전체집합을 U, 네 조건 p, q, r, s의 진리집합을 각각 P, Q, R, S라 하고 벤다이어그램을 그려보자.

조건 (가)에 의하여 $(P\cap Q)\subset R$이므로 이것을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



조건 (나)에 의하여 $P\subset(Q\cup R)$이므로 이것을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$\therefore P\subset R$ ⋯ ㉠

조건 (다)에 의하여 $R\subset S$이므로 $P\subset R\subset S$ (∵ ㉠) ⋯ ㉡

조건 (라)에 의하여 $P^C\subset S$이므로 $S=U$ (∵ ㉡)

따라서 조건 s는 항상 참이다.

[다른 풀이 ①]

전체집합을 U라 하고 네 조건 p, q, r, s의 진리집합을 각각 P, Q, R, S라 하면

조건 (가)에서 $(P\cap Q)\subset R$이므로

$(P\cap Q)-R=(P\cap Q)\cap R^C=P\cap Q\cap R^C=\varnothing$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 $P\subset(Q\cup R)$이므로

$P-(Q\cup R)=P\cap(Q\cup R)^C=P\cap Q^C\cap R^C=\varnothing$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $(P\cap Q\cap R^C)\cup(P\cap Q^C\cap R^C)=\varnothing$에서

$(P\cap R^C)\cap(Q\cup Q^C)=\varnothing$, $(P\cap R^C)\cap U=\varnothing$

즉, $P\cap R^C=\varnothing$이므로 $P\subset R$

한편, 조건 (다)에서 $R\subset S$이므로

$P\subset R\subset S$

$\therefore P\subset S$

또, 조건 (라)에서 $P^C\subset S$이므로 $P\subset S$에 의하여 $S=U$

즉, 조건 s는 항상 참이다.

[다른 풀이 ②]

조건 (나)에서 $a\in P$일 때 $a\notin R$라 하면 $a\in Q$

$\therefore a\in(P\cap Q)$

그런데 조건 (가)에서 $a\in(P\cap Q)$이면 $a\in R$가 되어 모순이다.

$\therefore P\subset R$

조건 (다)에서 $R\subset S$이므로 $P\subset S$

또한, 조건 (라)에서 $P^C\subset S$이므로 S는 전체집합이다.

따라서 항상 참인 것은 s이다.

52 답 700원

B를 샀다면 두 조건 (다), (라)에 의하여 C와 D를 모두 사지 않아야 하고 조건 (나)에 의하여 E를 사야 한다.

그러면 조건 (마)에 의하여 A와 D도 꼭 사야 되므로 모순이 된다.

따라서 B는 사지 않았다.

마찬가지로 C를 사지 않았다면 조건 (라)에 의해 D를 사지 않아야 하고 조건 (나)에 의해 E를 샀다.

그러면 조건 (마)에 의해 A와 D도 꼭 사야 되므로 모순이 된다.

따라서 C는 샀다.

이때, 조건 (라)에 의하여 D도 샀고, 조건 (가)에 의하여 A는 사지 않았고, 조건 (마)에 의하여 E 역시 사지 않았다.

따라서 손님이 산 물건은 C와 D이므로 지불한 금액은

$300+400=700$(원)이다.

53 답 1

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

명제 $q \longrightarrow p$가 참이려면 $Q\subset P$가 성립해야 한다.

$P=\{x\mid 1<x<6\}$, $Q=\{x\mid |x-2|<a\}$에서

(i) $a<0$이면 $Q=\varnothing$이므로 $Q\subset P$가 항상 성립한다. ⓐ

(ii) $a\geq 0$이면 $-a<x-2<a$에서

$2-a<x<2+a$

$\therefore Q=\{x\mid 2-a<x<2+a\}$

이때, $Q\subset P$이기 위해서는

$2-a\geq 1$이고, $2+a\leq 6$에서 $a\leq 1$이고 $a\leq 4$

$\therefore 0\leq a\leq 1$ ⓑ

(i), (ii)에 의하여 $a\leq 1$이므로 실수 a의 최댓값은 1이다. ⓒ

채점기준

ⓐ $a<0$일 때, $Q\subset P$가 항상 성립함을 보인다.	[30%]
ⓑ $a\geq 0$일 때, a의 값의 범위를 구한다.	[50%]
ⓒ 실수 a의 최댓값을 구한다.	[20%]

54 답 16

두 조건 p, q의 진리집합 P, Q는

$P=\{2, 3, 5, 7\}$, $Q=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$이다. ---------- ⓐ

한편, 명제 'p 또는 $\sim q$이면 r이다.'가 참이기 위해서는

$(P\cup Q^C)\subset R$ ⋯ ㉠이어야 한다.

이때, $Q^C=\{3, 6, 9\}$이므로

$P\cup Q^C=\{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$이고 ㉠에 의하여

$\{2, 3, 5, 6, 7, 9\}\subset R\subset U$ ---------- ⓑ

따라서 집합 R의 개수는 $2^{10-6}=2^4=16$이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

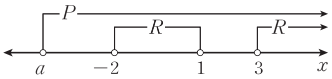
ⓐ 두 조건 p, q의 진리집합을 구한다.	[30%]
ⓑ 집합 R의 조건을 찾는다.	[40%]
ⓒ 집합 R의 개수를 구한다.	[30%]

55 답 1

조건 $x>a$를 p, 조건 $x>b$를 q, 조건 $-2<x<1$ 또는 $x>3$을 r라 하고 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.

(i) p는 r이기 위한 필요조건이므로 $R\subset P$에서

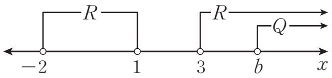
$\{x\mid -2<x<1$ 또는 $x>3\}\subset\{x\mid x>a\}$



$\therefore a\le -2$ ---------- ⓐ

(ii) q는 r이기 위한 충분조건이므로 $Q\subset R$에서

$\{x\mid x>b\}\subset\{x\mid -2<x<1$ 또는 $x>3\}$



$\therefore b\ge 3$ ---------- ⓑ

따라서 a의 최댓값은 -2, b의 최솟값은 3이므로 그 합은 1이다.
---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ a의 값의 범위를 구한다.	[40%]
ⓑ b의 값의 범위를 구한다.	[40%]
ⓒ a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구한다.	[20%]

56 답 ④

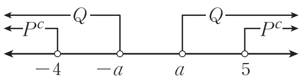
두 조건 p, q의 진리집합 P, Q는

$P=\{x\mid (x+4)(x-5)\le 0\}=\{x\mid -4\le x\le 5\}$

$Q=\{x\mid |x|>a\}=\{x\mid x>a$ 또는 $x<-a\}$

이때, $\sim p\longrightarrow q$가 참이기 위해서는 $P^C\subset Q$이고

$P^C=\{x\mid x<-4$ 또는 $x>5\}$이므로 $-4\le -a$이고 $a\le 5$



따라서 $a\le 4$이므로 자연수 a의 개수는 1, 2, 3, 4의 4이다.

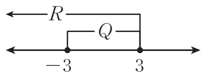
57 답 ②

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\mid x<-4$ 또는 $x>4\}$, $Q=\{x\mid -3\le x\le 3\}$,

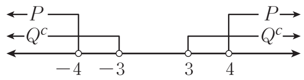
$R=\{x\mid x\le 3\}$

ㄱ. $Q\subset R$이므로 명제 $q\longrightarrow r$는 참이다.



ㄴ. $Q^C=\{x\mid x<-3$ 또는 $x>3\}$이므로 $P\subset Q^C$이다.

즉, 명제 $p\longrightarrow\sim q$는 참이다.



ㄷ. $P^C=\{x\mid -4\le x\le 4\}$이므로 $R\not\subset P^C$이다. 즉, 명제 $r\longrightarrow\sim p$는 거짓이다.

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

58 답 12

명제 '집합 P의 어떤 원소 x에 대하여 x는 3의 배수이다.'가 참이 되도록 하려면 집합 P는 적어도 하나의 3의 배수를 원소로 가져야 한다.

(i) $\{3\}\subset P\subset\{1, 2, 3, 6\}$인 경우

집합 P의 개수는 $2^3=8$

(ii) $\{6\}\subset P\subset\{1, 2, 3, 6\}$인 경우

집합 P의 개수는 $2^3=8$

(iii) $\{3, 6\}\subset P\subset\{1, 2, 3, 6\}$인 경우

집합 P의 개수는 $2^2=4$

이때, (iii)은 (i)과 (ii)에 동시에 포함되므로 구하는 집합 P의 개수는 $8+8-4=12$이다.

59 답 ②

ㄱ. $a=0$이면

p : $0\times(x-1)(x-2)<0$이 되어 이 부등식을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 $P=\varnothing$이다. (참)

ㄴ. $a>0$, $b=0$이면

조건 p의 진리집합은 $P=\{x\mid 1<x<2\}$이고

조건 q의 진리집합은 $Q=\{x\mid x>0\}$이므로

$P\subset Q$이다. (참)

ㄷ. $a<0$, $b=3$이면

조건 p의 진리집합은 $P=\{x\mid x<1$ 또는 $x>2\}$이므로

조건 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{x\mid 1\le x\le 2\}$이고

조건 q의 진리집합은 $Q=\{x\mid x>3\}$이다.

즉, $P^C\not\subset Q$이므로 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 거짓이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

60 답 ④

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid |x-1| \le 3\}$

$=\{x \mid -3 \le x-1 \le 3\}$

$=\{x \mid -2 \le x \le 4\}$ ⋯ ㉠

또, a가 자연수이므로

$Q=\{x \mid |x| \le a\}$

$=\{-a \le x \le a\}$ ⋯ ㉡

한편, p가 q이기 위한 충분조건, 즉 $p \Longrightarrow q$이므로

$P \subset Q$이어야 한다.

㉠, ㉡에 의하여 $-a \le -2$이고 $a \ge 4$이므로

$a \ge 2$이고 $a \ge 4$

따라서 $a \ge 4$이므로 자연수 a의 최솟값은 4이다.

61 답 ⑤

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$에서

$\{3\} \subset \{a^2-1, b\}$ ⋯ ㉠

r는 p이기 위한 필요조건이므로 $P \subset R$에서

$\{3\} \subset \{a, ab\}$ ⋯ ㉡

㉠에서

$a^2-1=3$ 또는 $b=3$

(i) $a^2-1=3$일 때, $a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 ㉡에 의하여 $ab=3$이어야 하므로

$a=-2,\ b=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=2,\ b=\frac{3}{2}$

(ii) $b=3$일 때, ㉡에서 $a=3$ 또는 $ab=3$이어야 하므로

$a=3,\ b=3$ 또는 $a=1,\ b=3$

(i), (ii)에 의하여 $a+b$의 최솟값은

$(-2)+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{2}$

62 답 ②

ㄱ. 【반례】 $a=1$일 때 $x=1$이면 $|1-1|<1$이다. (거짓)

ㄴ. $0<x<1$이면 $-1<x-1<0$이므로 $|x-1|<1$

따라서 $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여

$|x-1|<1 \le a$, 즉 $|x-1|<a$가 성립한다. (참)

ㄷ. ㄴ의 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.

즉, ㄴ의 명제의 부정 '$0<x<1$인 어떤 실수 x에 대하여

$|x-1| \ge a$이다.'가 거짓이므로 ㄷ의 명제도 거짓이다. (거짓)

따라서 참인 명제는 ㄴ이다.

[다른 풀이]

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $|x-1|>a$가 성립하려면

부등식 $|x-1|>a$를 만족시키는 x의 집합이 실수 전체의 집합이어야 한다.

이 부등식을 풀면 $x-1>a$ 또는 $x-1<-a$에서

$x>1+a$ 또는 $x<1-a$이므로

$\{x \mid x>1+a\} \cup \{x \mid x<1-a\}=R$이어야 한다.

즉, $1+a<1-a$에서 $a<0$이어야 주어진 명제가 참이 된다. (거짓)

ㄴ. 조건 $|x-1|<a$의 진리집합은 $\{x \mid 1-a<x<1+a\}$이고 전체집합은 $\{x \mid 0<x<1\}$이므로

$\{x \mid 0<x<1\} \subset \{x \mid 1-a<x<1+a\}$이어야 한다.

즉, $1-a \le 0$, $1 \le 1+a$에서 $a \ge 1$이므로 주어진 명제는 참이다. (참)

ㄷ. 전체집합이 $\{x \mid 0<x<1\}$이고 조건 $|x-1|>a$의 진리집합이 $\{x \mid x<1-a$ 또는 $x>1+a\}$이므로 주어진 명제가 참이 되려면 $\{x \mid 0<x<1\} \cap \{x \mid x<1-a$ 또는 $x>1+a\} \ne \varnothing$이어야 한다.

즉, $0<1-a$ 또는 $1+a<1$에서 $a<1$이어야 주어진 명제가 참이 된다. (거짓)

63 답 34

두 조건 'x는 10의 약수', 'x는 6의 약수'의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

주어진 명제가 참이 되려면 집합 P의 원소는 모두 집합 Q의 원소가 되어야 한다.

이때, 집합 P는 10의 약수의 집합 $\{1, 2, 5, 10\}$의 부분집합이고, 집합 Q는 6의 약수의 집합 $\{1, 2, 3, 6\}$의 부분집합이다.

따라서 $P \subset Q$가 되려면 10의 약수 중 5와 10은 P의 원소가 아니어야 한다.

즉, $U=\{1, 2, 3, n\}$에서 n이 5와 10을 제외한 수이면 $P=\{1, 2\}$가 되어 $P \subset Q$가 성립한다.

한편, n은 10 이하의 자연수이고 1, 2, 3 역시 제외해야 하므로 n은 4, 6, 7, 8, 9이다.

따라서 구하는 합은

$4+6+7+8+9=34$이다.

64 답 10

두 조건 (가), (나)에 의하여 관찰결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

	비가 옴	비가 오지 않음	합계
오전	$a-5$	5	a
오후	$a-7$	7	a

한편, 조건 (다)에서 오후에 비가 온 날은 오전에는 비가 오지 않았으므로 오전과 오후에 동시에 비가 온 날은 없다.

따라서 조건 (라)에 의하여

$(a-5)+(a-7)=8$

$2a-12=8,\ 2a=20$

$\therefore a=10$

65 답 ②

실수의 집합을 R라 하자.

ㄱ. ($\longrightarrow$의 증명) $\alpha=a+bi$, $\beta=a-bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)라 하면

$\alpha+\beta=(a+bi)+(a-bi)=2a\in R$이고

$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\in R$

($\longleftarrow$의 【반례】) $\alpha=1$, $\beta=2$이면 합과 곱은 모두 실수이지만 β는 α의 켤레복소수가 아니다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. ($\longrightarrow$의 【반례】) $\alpha=1$이면 $\beta=1$이므로 $\alpha+\beta$는 실수이지만 $\alpha-\beta$는 순허수가 아니다.

($\longleftarrow$의 증명) $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$

(a, b, c, d는 실수, $i=\sqrt{-1}$)라 하면

$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i\in R$에서 $b+d=0$

$\therefore d=-b$

또한, $\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i$가 순허수이므로

$a=c$, $b\neq d$

$\therefore \alpha=a+bi$, $\beta=a-bi$ ($\because a=c$, $d=-b$)

즉, α, β는 서로 켤레복소수이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. ($\longrightarrow$의 증명) $\alpha=a+bi$, $\beta=a-bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)라 하면 α, β의 실수부분은 같고

$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\in R$

($\longleftarrow$의 【반례】) $\alpha=2i$, $\beta=3i$이면 α, β의 실수부분은 0으로 같고, $\alpha\beta=-6\in R$이지만 α, β는 서로 켤레복소수가 아니다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건인 것은 ㄴ이다.

66 답 3

집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 집합 B에 속하는 원소의 개수를 x, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 집합 A의 원소 중 집합 B에 속하지 않는 원소의 개수는 $n-x$이므로

$P=\{x\mid x\geq 2\}$, $Q=\{x\mid n-x\geq 2\}$

이때, $\sim p$: 집합 A의 원소 중 집합 B에 속하는 원소는 1개 이하이다.'의 진리집합은 $P^C=\{x\mid x\leq 1\}$이고, $\sim p \Longleftrightarrow q$이므로 두 조건 $\sim p$, q의 진리집합 P^C, Q는 같다.

즉, $P^C=\{x\mid x\leq 1\}$, $Q=\{x\mid n-x\geq 2\}=\{x\mid x\leq n-2\}$에서

$n-2=1$

$\therefore n=3$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 3이다.

01 답 ⑤

자연수 n에 대하여 주어진 명제의 대우 'n이 짝수이면 n^2이 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.
(가)

n이 짝수이므로 $n=2k$(k는 자연수)라 하면

$n^2=(2k)^2=4k^2=2(\underbrace{2k^2}_{(나)})$

이때, $2k^2$이 자연수이므로 $2(2k^2)$은 짝수이다.

따라서 n^2은 짝수이다.
(다)

즉, 대우가 참이므로 원래 명제 'n^2이 홀수이면 n은 홀수이다.'는 참이다.

02 답 ④

결론을 부정하여 a, b, c가 모두 홀수라 하면
(가)

홀수의 제곱은 홀수이므로 a^2, b^2, c^2은 모두 홀수이다.

두 홀수의 합 a^2+b^2은 짝수이고, c^2은 홀수이다.
(나) (다)

따라서 $a^2+b^2\neq c^2$이 되어 가정에 모순이다.

그러므로 주어진 명제는 참이다.

03 답 ④

$a>0$, $b>0$에서 $5ab>0$, $\dfrac{5a}{b}>0$이므로

$5ab+\dfrac{5a}{b}\geq 2\sqrt{5ab\times\dfrac{5a}{b}}=10a$ (단, 등호는 $b=1$일 때 성립)

따라서 $5ab+\dfrac{5a}{b}$의 최솟값 $f(a)$는 $f(a)=10a$이므로

$f(5)=50$

04 답 15

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+y+\frac{4}{x}+\frac{9}{y}=\left(x+\frac{4}{x}\right)+\left(y+\frac{9}{y}\right)\geq 2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}+2\sqrt{y\times\frac{9}{y}}$$

(단, 등호는 $x=2$, $y=3$일 때 성립)

$=4+6=10$

즉, $x+y+\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}$는 $x=2$, $y=3$일 때 최솟값 10을 갖는다.

따라서 $a=2$, $b=3$, $m=10$이므로 $a+b+m=2+3+10=15$

05 답 ④

반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 a, b라 하면 직사각형의 둘레의 길이는 $2(a+b)$이다.

이때, 지름에 대한 원주각의 크기는 $90°$이므로 직사각형의 대각선의 길이는 지름의 길이와 같다.

피타고라스 정리에 의하여 $a^2+b^2=10^2$ ⋯ ㉠

㉠에서 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$, $200 \ge (a+b)^2$

$\therefore a+b \le 10\sqrt{2}$

따라서 직사각형의 둘레의 길이 $2(a+b)$의 최댓값은 $20\sqrt{2}$이다.

06 답 ⑤

ㄱ. $2(a^2+b^2)-(a+b)^2=(a-b)^2 \ge 0$

　$\therefore 2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$ (참)

ㄴ. $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$

　$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

　$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$

　$\therefore 3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2$ (참)

ㄷ. $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=2\{2(a^2+b^2)+2(c^2+d^2)\}$

$\ge 2\{(a+b)^2+(c+d)^2\}$ ($\because$ ㄱ)

$\ge (a+b+c+d)^2$ ($\because$ ㄱ)

　$\therefore 4(a^2+b^2+c^2+d^2) \ge (a+b+c+d)^2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄱ. $2(a^2+b^2)=(1^2+1^2)(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$ (참)

ㄴ. $3(a^2+b^2+c^2)=(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)$

$\ge (a+b+c)^2$ (참)

ㄷ. $4(a^2+b^2+c^2+d^2)$

　$=(1^2+1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)$

　$\ge (a+b+c+d)^2$ (참)

07 답 ②

가정에서 $a>0$이므로 (i)에 의하여 $a \ne 0$이다.

따라서 실수 $\frac{1}{a} \ne 0$이므로 성질 $\boxed{\text{(i)}}$ (가) 에 의하여

$\frac{1}{a}>0$ 또는 $\frac{1}{a}<0$이다.

$\frac{1}{a}<0$인 경우에는 성질 $\boxed{\text{(ii)}}$ (나) 와 가정에 의하여

$a \times \left(-\frac{1}{a}\right)=-1>0 \left(\because a>0,\ -\frac{1}{a}>0\right)$이다.

그런데 $-1>0$이라면 (ii)에 의하여

$(-1)\times(-1)=1>0$ ($\because -1>0$)이 되어 성질 $\boxed{\text{(i)}}$ (다) 에 모순이다.

따라서 $\frac{1}{a}>0$이다.

08 답 풀이 참조

a, b가 실수이므로 성질 (i)에 의하여 $a^2 \ge 0$, $b^2 \ge 0$

$a^2 \ge 0$의 양변에 b^2을 더하면 $a^2+b^2 \ge b^2 \ge 0$

이때, 가정에서 $a^2+b^2=0$이므로 $0 \ge b^2 \ge 0$

따라서 성질 (ii)에 의하여 $b^2=0$　　$\therefore b=0$

$a^2+b^2=0$에 $b=0$을 대입하면 $a^2=0$　　$\therefore a=0$

09 답 ④

주어진 명제의 대우를 이용하여 증명하자.

a, b를 모두 $\boxed{\text{홀수}}$ (가) 라 하면

$a=2k+1$, $b=2l+1$ (k, l은 모두 정수)로 나타낼 수 있으므로

$ab=(2k+1)(2l+1)=4kl+2k+2l+1$

　$=2(\boxed{2kl+k+l})+1$ (나)

그런데 $2kl+k+l$은 정수이므로 ab는 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제 'ab가 짝수이면 a 또는 b는 짝수이다.'도 참이다.

10 답 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '두 자연수 a, b에 대하여 ab가 홀수이면 a^2+b^2은 짝수이다.'가 참임을 보이자.

ab가 홀수이면 a, b 둘 다 홀수이므로

$a=2m-1$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)

로 나타낼 수 있다.

$a^2+b^2=(2m-1)^2+(2n-1)^2$

　$=2(2m^2+2n^2-2m-2n+1)$

이때, $2m^2+2n^2-2m-2n+1$은 자연수이므로 a^2+b^2은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제 '두 자연수 a, b에 대하여 a^2+b^2이 홀수이면 ab는 짝수이다.'도 참이다.

11 답 ③

$\sqrt{3}$이 무리수가 아니라고 하면 $\sqrt{3}$은 $\boxed{\text{유리수}}$ (가) 이므로

$\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ (a, b는 서로소인 정수이고 $b \ne 0$)로 나타낼 수 있다.

양변을 제곱하면

$(\sqrt{3})^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2$에서 $3b^2=a^2$ ⋯ ㉠

이때, a^2은 3의 배수이고, 3은 $\boxed{\text{소수}}$ (나) 이므로 a는 3의 배수이다.

따라서 $a=3k$ (k는 정수)로 놓고 ㉠에 대입하면

$3b^2=(3k)^2$에서 $b^2=3k^2$

이때, b^2은 3의 배수이므로 b는 3의 배수이다.

그런데 a, b가 모두 3의 배수라는 것은 a, b가 $\boxed{\text{서로소}}$ (다) 라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{3}$은 유리수가 아니므로 무리수이다.

12 답 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 $a^2>bc$, $ac>b^2$일 때, $a=b$라 하면

$a^2>bc$에서 $a^2>ac$

$ac>b^2$에서 $ac>a^2$

이 되어 모순이다.

따라서 세 실수 a, b, c에 대하여 $a^2>bc$, $ac>b^2$이면 $a \ne b$이다.

13 답 ①

ㄱ. $a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab>ab$ (참)

ㄴ. $a+4b=12\ge 2\sqrt{4ab}=4\sqrt{ab}$ $\quad\therefore ab\le 9$

여기서 등호가 성립할 때, 즉 $a=4b=6$일 때

최댓값을 가지게 된다. 그런데 b는 자연수이므로

$b\ne\frac{6}{4}$이다.

따라서 등호가 성립할 수 없으므로 ab의 최댓값은

9가 아니다. (거짓)

ㄷ. $a^2+\frac{9}{a^2+1}=a^2+1+\frac{9}{a^2+1}-1$

$$\ge 2\sqrt{(a^2+1)\times\frac{9}{a^2+1}}-1=6-1=5$$

등호는 $a^2+1=\frac{9}{a^2+1}=3$, 즉 $a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$일 때

성립한다.

그런데 a는 자연수이므로 $a\ne-\sqrt{2}$, $a\ne\sqrt{2}$이다.

즉, $a^2+\frac{9}{a^2+1}$의 최솟값은 5가 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

14 답 22

$$\frac{a+b}{2}=\frac{a+b+\frac{a+b}{2}}{3}$$이므로

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\left(\frac{a+b+\boxed{\frac{a+b}{2}}}{3}\right)^3$$ (가)

$$\ge\left(\sqrt[3]{ab\times\frac{a+b}{2}}\right)^3=ab\times\frac{a+b}{2}$$

a, b가 양수이므로 양변을 $\frac{a+b}{2}$로 나누면

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\ge\boxed{ab}$$ (나)

양변이 모두 양수이므로 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$이다.

따라서 $f(a,\ b)=\frac{a+b}{2}$, $g(a,\ b)=ab$이므로

$f(4,\ 8)+g(2,\ 8)=\frac{4+8}{2}+2\times 8=22$

15 답 25

$4:a=b:9$에서 $ab=36$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에서

$a+b\ge 2\sqrt{ab}=12$ (단, 등호는 $a=b=6$일 때 성립)

이때, 직사각형 ABCD의 넓이는

$4+a+b+9=a+b+13$이므로

$a+b+13\ge 12+13=25$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이의 최솟값은 25이다.

16 답 ③

ㄱ. 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(1+1)\ge\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=16$$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$\therefore\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge 8$ (참)

ㄴ. 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$4(x+y)=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$=\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2\right\}\ge(1+1)^2=4$$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$\therefore\ x+y\ge 1$ (참)

ㄷ. 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1+1)(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

≥ 1 ($\because$ ㄴ)

$\therefore\ x^2+y^2\ge\frac{1}{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17 답 16

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(x+y)\left(\frac{9}{x}+\frac{1}{y}\right)=\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\}\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2\right\}$$

$$\ge(3+1)^2=16$$

등호는 $x^2=9y^2$, 즉 $x=3y$일 때 성립하고 이때의 최솟값은 16이다.

[다른 풀이]

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(x+y)\left(\frac{9}{x}+\frac{1}{y}\right)=10+\frac{9y}{x}+\frac{x}{y}\ge 10+2\sqrt{\frac{9y}{x}\times\frac{x}{y}}=16$$

(단, 등호는 $\frac{9y}{x}=\frac{x}{y}$일 때 성립)

18 답 20

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 l이라 하면

$l=4(a+b+c)$

한편, 대각선의 길이가 5이므로

$a^2+b^2+c^2=5^2$ ⋯ ㉠

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$3\times 25\ge(a+b+c)^2$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a+b+c\le 5\sqrt{3}$

따라서 $l=4(a+b+c)\le 20\sqrt{3}$이므로 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값은 $20\sqrt{3}$이다.

$\therefore\ k=20$

19 답 ⑤

ㄱ. $a(a-b)-b(a-b)=(a-b)^2\ge0$

$\therefore a(a-b)\ge b(a-b)$ (참)

ㄴ. $a^2+b^2-ab=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\ge0$

(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

$\therefore a^2+b^2\ge ab$ (참)

ㄷ. $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\ge0$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$\therefore a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ (참)

따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20 답 18

$ab+bc+ca=12$이므로

$(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

에서

$(a+b+c)^2\ge36$

$\therefore a+b+c\ge6$ ($\because a+b+c>0$)

따라서 $a+b+c$의 최솟값은 6이므로 $p=6$

또한, $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

에서

$a^2+b^2+c^2\ge12$

따라서 $a^2+b^2+c^2$의 최솟값은 12이므로 $q=12$

$\therefore p+q=6+12=18$

21 답 3

명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+4>0$이다.'가 참이므로 이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-16<0$에서 $(a+4)(a-4)<0$

$\therefore -4<a<4$ ⋯ ㉠

명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-ax+a\le0$이다.'가 거짓이므로

이 명제의 부정인 '모든 실수 x에 대하여 $x^2-ax+a>0$이다.'는 참이다. 이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-4a<0$에서 $a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<a<4$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다.

22 답 ③

주어진 명제의 대우

'두 실수 x, y에 대하여 $\underbrace{x^2+y^2\le0}_{(가)}$이면 $x+y\le0$이다.'

가 참임을 보이면 된다.

두 실수 x, y에 대하여 $x^2\ge0$, $y^2\ge0$이므로

$\underbrace{x^2+y^2\ge0}_{(나)}$ ⋯ ㉠

한편, 가정에서 $x^2+y^2\le0$ ⋯ ㉡이므로

㉠, ㉡에 의하여 $0\le x^2+y^2\le0$, 즉 $\underbrace{x^2+y^2=0}_{(다)}$이다.

$x^2+y^2=0$이면 $x=0$, $y=0$이므로 $x+y=0$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제 '두 실수 x, y에 대하여 $x+y>0$이면 $x^2+y^2>0$이다.'가 참이다.

그러므로 위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 차례로 ㄴ, ㄱ, ㄷ이다.

23 답 ④

문제에서 증명된 명제는

'세 자연수 a, b, c가 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2\ne c^2$이다.'이다.

따라서 빈칸에 알맞은 것은 증명된 명제의 대우

'$a^2+b^2=c^2$이면 세 자연수 a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.'

이다.

24 답 ④

p, q가 정수일 때, 이차방정식 $x^2+px+q=0$이 적어도 하나의 정수해를 가지면 $\underbrace{p,\ q \text{ 중 적어도 하나는 짝수}}_{(가)}$이다.

이를 귀류법으로 증명하여 보자.

방정식 $x^2+px+q=0$이 적어도 하나의 정수해를 가진다고 했으므로 그 정수해를 α라 하면

$\alpha^2+p\alpha+q=0$ ⋯ ㉠

결론을 부정하여 $\underbrace{p,\ q\text{가 모두 홀수}}_{(나)}$라 하면

(i) α가 짝수일 때 : ㉠의 좌변에서 α^2은 짝수, $p\alpha$도 짝수, q는 홀수이므로 좌변의 합이 홀수가 되어 (좌변)$\ne$(우변)이다.

(ii) α가 홀수일 때 : ㉠의 좌변에서 α^2은 홀수, $p\alpha$도 홀수, q도 홀수이므로 좌변의 합이 홀수가 되어 (좌변)$\ne$(우변)이다.

(i), (ii)에 의하여 p, q가 모두 홀수이면 α가 짝수일 수도, 홀수일 수도 없다. 즉, α는 정수가 될 수 없다.

따라서 $x^2+px+q=0$이 적어도 하나의 정수해를 가지려면 p, q 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

25 답 ③

주어진 세 이차방정식의 판별식을 차례로 D_1, D_2, D_3이라 하면

$\frac{D_1}{4}=b^2-ac$, $\frac{D_2}{4}=c^2-ab$, $\frac{D_3}{4}=a^2-bc$

이므로 세 식을 변끼리 더하면

$$\frac{1}{4}(D_1+D_2+D_3)=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\ge0$$

이때, D_1, D_2, D_3 모두 음수이면 $D_1+D_2+D_3<0$이 되어 모순이므로 D_1, D_2, D_3 중 적어도 하나는 0 이상이다.

따라서 세 이차방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

26 답 ⑤

결론을 부정하여 p가 짝수, q가 홀수이면 x에 대한 방정식 $x^2+px-2q=0$이 정수해를 가진다고 하자.

정수는 홀수 아니면 짝수이어야 하므로

(ⅰ) x가 홀수(가)이면 x^2은 홀수이고 $px-2q$는 짝수이다.

따라서 $x^2+px-2q$가 홀수이므로 0(나)이 될 수 없다.

(ⅱ) x가 짝수(다)이면 짝수의 곱은 4의 배수이므로

x^2+px는 4의 배수이고 $2q$는 4의 배수가 아니다.

그런데 $x^2+px=2q$이므로 모순이다.

따라서 p가 짝수, q가 홀수이면 x에 대한 방정식 $x^2+px-2q=0$은 정수해를 갖지 않는다.

27 답 12

(x, y, z)는 원시 피타고라스 수이므로 x, y는 서로소이다.

이때, y, z가 서로소가 아니라고 하면 y와 z의 공약수인 소수 p가 존재한다.

$y=p$(가)y_1, $z=pz_1$이라 하면

$x^2=z^2-y^2=p^2$(나)$(z_1{}^2-y_1{}^2)$이 되어 p는 x^2의 약수이고

p는 소수이므로 p는 x의 약수이다.

즉, x와 y는 모두 소수 p를 약수로 갖는다.

이것은 x, y가 서로소라는 사실에 모순이므로 y와 z는 서로소이다.

따라서 $f(p)=p$, $g(p)=p^2$이므로 $f(3)+g(3)=3+3^2=12$

28 답 6

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$
$$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$
$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}}$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$$=2+2+2=6$$

[다른 풀이]

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$
$$\geq 6\sqrt[6]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{c}\times\frac{b}{c}}$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$$=6\sqrt[6]{1}=6$$

29 답 ②

$\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(0, b)$라 하면 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

이 직선이 점 $(1, 2)$를 지나므로 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$ ⋯ ㉠

삼각형 OAB의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}ab$ ⋯ ㉡

a, b는 양수이므로 ㉠, ㉡과 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}=\frac{2}{\sqrt{S}}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{1}{a}=\frac{2}{b}\text{일 때 성립}\right)$

$1\geq\frac{2}{\sqrt{S}}$ $\quad\therefore S\geq 4$

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 4이다.

[다른 풀이]

점 $(1, 2)$를 지나는 직선 AB의 기울기를 $m\,(m<0)$이라 하면

직선의 방정식은 $y=m(x-1)+2$, 즉 $y=mx-m+2$이므로

두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(1-\frac{2}{m}, 0\right)$, $(0, -m+2)$이다.

삼각형 OAB의 넓이는

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{m}\right)\times(-m+2)=-\frac{m}{2}-\frac{2}{m}+2$$

이때, $m<0$이므로 $-\frac{m}{2}>0$, $-\frac{2}{m}>0$에서

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\triangle\mathrm{OAB}=-\frac{m}{2}-\frac{2}{m}+2\geq 2\sqrt{\left(-\frac{m}{2}\right)\times\left(-\frac{2}{m}\right)}+2=4$$

(단, 등호는 $m=-2$일 때 성립)

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 4이다.

30 답 8

$A<n$, $B<n$이라 하면 $A+B<2n$(가)

또한, $1\leq k\leq n$인 자연수 k에 대하여 $a_k>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a_k+\frac{1}{a_k}\geq 2\sqrt{a_k\times\frac{1}{a_k}}=2\text{(나)}$$

$$A+B=\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$$
$$\geq\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{n\text{개}}=2n$$

이것은 $A+B<2n$에 모순이므로 A, B 중 적어도 하나는 n보다 작지 않다.

따라서 $f(n)=2n$, $p=2$이므로 $f(2p)=f(4)=8$

31 답 ④

$x=a$, $4-x=b$라 하면 $a>0$, $b>0$이고

$a+b=4$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b=4\geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b=2$일 때 성립)

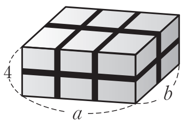
한편, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=4+2\sqrt{ab}\leq 4+4=8$

이므로 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ $(\because \sqrt{a}+\sqrt{b}>0)$

따라서 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq 2\sqrt{2}$이므로

$x=2$일 때 $f(x)$의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

32 답 ②



포장 상자의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 a, b라 하면

밑면의 넓이가 54이므로 $ab=54$ ⋯ ㉠

이때, 포장 상자를 묶은 네 개의 끈의 길이의 합을 l이라 하면

$l=4a+6b+24$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

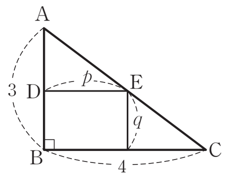
$l=4a+6b+24\geq 2\sqrt{4a\times 6b}+24=2\sqrt{24\times 54}+24=96$

이때, 등호는 $4a=6b$일 때 성립하므로 ㉠과 연립하면

$a=9$, $b=6$

따라서 상자의 모든 모서리의 길이의 합은 $4\times(9+6+4)=76$

33 답 ①



$\triangle$ABC∽$\triangle$ADE이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{DE}$

$3:4=(3-q):p$

따라서 $3p+4q=12$ ⋯ ㉠이므로

$\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}=\dfrac{4q+3p}{pq}=\dfrac{12}{pq}$ ⋯ ㉡

㉡에 의하여 pq가 최대일 때, $\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}$이 최소가 되므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3p+4q=12\geq 2\sqrt{3p\times 4q}$ (단, 등호는 $3p=4q$일 때 성립)

$6\geq\sqrt{12pq}$, $36\geq 12pq$ $\quad\therefore pq\leq 3$

따라서 pq의 최댓값은 3이므로 $\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}$의 최솟값은 $\dfrac{12}{3}=4$이다.

[다른 풀이 ①]

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{4}{p}+\frac{3}{q}&=\frac{1}{12}(3p+4q)\left(\frac{4}{p}+\frac{3}{q}\right)\ (\because ㉠)\\&=\frac{1}{12}\left(24+\frac{9p}{q}+\frac{16q}{p}\right)\geq\frac{1}{12}\left(24+2\sqrt{\frac{9p}{q}\times\frac{16q}{p}}\right)\\&\qquad\left(\text{단, 등호는 }\frac{9p}{q}=\frac{16q}{p}\text{일 때 성립}\right)\\&=\frac{1}{12}(24+2\times 12)=4\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}$의 최솟값은 4이다.

[다른 풀이 ②]

$\triangle$ABE$+\triangle$BCE$=\triangle$ABC에서 $\dfrac{3p}{2}+\dfrac{4q}{2}=6$

$\therefore 3p+4q=12$ ⋯ ㉢

코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3p+4q)\left(\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}\right)\geq(\sqrt{12}+\sqrt{12})^2=48$

(단, 등호는 $3p=4q$일 때 성립)

$12\left(\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}\right)\geq 48\ (\because ㉢)$ $\qquad\therefore\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}\geq 4$

[다른 풀이 ③]

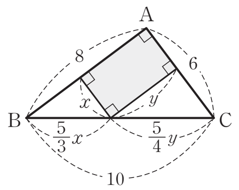
㉠에서 $q=3-\dfrac{3}{4}p$이므로

$pq=p\left(3-\dfrac{3}{4}p\right)=-\dfrac{3}{4}p^2+3p=-\dfrac{3}{4}(p-2)^2+3$

따라서 pq는 $p=2$일 때 최댓값 3을 가지므로

㉡에 의하여 $\dfrac{4}{p}+\dfrac{3}{q}$의 최솟값은 $\dfrac{12}{3}=4$이다.

34 답 80



그림과 같이 직사각형 S_1의 두 변의 길이를 x, y라 하면 직사각형 S_1의 넓이는 xy이고, 닮음비에 의하여

$\overline{BC}=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{5}{4}y=10$

$\therefore 4x+3y=24$

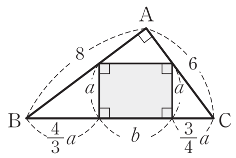
이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$24=4x+3y\geq 2\sqrt{4x\times 3y}$ (단, 등호는 $4x=3y$일 때 성립)

$\sqrt{3xy}\leq 6$, $3xy\leq 36$

$\therefore xy\leq 12$

따라서 $4x=3y=12$, 즉 $x=3$, $y=4$일 때 직사각형 S_1의 최대 넓이는 12이고 그때의 둘레의 길이 l_1은 $l_1=2\times(3+4)=14$이다.



한편, 그림과 같이 직사각형 S_2의 두 변의 길이를 a, b라 하면 직사각형 S_2의 넓이는 ab이고, 닮음비에 의하여

$\overline{BC}=\dfrac{4}{3}a+b+\dfrac{3}{4}a=10$

$\therefore 25a+12b=120$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$120=25a+12b\geq 2\sqrt{25a\times 12b}$ (단, 등호는 $25a=12b$일 때 성립)

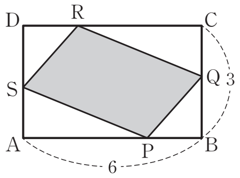
$\sqrt{3ab}\leq 6$, $3ab\leq 36$

$\therefore ab\leq 12$

따라서 $25a=12b=60$, 즉 $a=\dfrac{12}{5}$, $b=5$일 때 직사각형 S_2의 최대 넓이는 12이고 그때의 둘레의 길이 l_2는 $l_2=2\times\left(\dfrac{12}{5}+5\right)=\dfrac{74}{5}$이다.

$\therefore 100(l_2-l_1)=100\times\left(\dfrac{74}{5}-14\right)=80$

35 답 9



$\overline{AP}=\overline{CR}=\dfrac{6m}{m+n}$, $\overline{AS}=\overline{CQ}=\dfrac{3n}{m+n}$,

$\overline{BP}=\overline{DR}=\dfrac{6n}{m+n}$, $\overline{BQ}=\overline{DS}=\dfrac{3m}{m+n}$에서

$\triangle APS=\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AS}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6m}{m+n}\times\dfrac{3n}{m+n}=\dfrac{9mn}{(m+n)^2}$

나머지 세 삼각형 BQP, CRQ, DSR의 넓이도 모두

$\dfrac{9mn}{(m+n)^2}$이므로 네 삼각형의 넓이의 합은

$4\times\dfrac{9mn}{(m+n)^2}=\dfrac{36mn}{(m+n)^2}$이다.

따라서 평행사변형 PQRS의 넓이는

$6\times3-\dfrac{36mn}{(m+n)^2}=18\left\{1-\dfrac{2mn}{(m+n)^2}\right\}$이고

평행사변형 PQRS의 넓이가 최소가 되려면 $\dfrac{2mn}{(m+n)^2}$의 값이 최대가 되면 된다.

이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{m+n}{2}\ge\sqrt{mn}$에서 $\dfrac{2mn}{(m+n)^2}\le\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{2mn}{(m+n)^2}$의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore 18\left\{1-\dfrac{2mn}{(m+n)^2}\right\}\ge18\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=9$

따라서 평행사변형 PQRS의 넓이의 최솟값은 9이다.

36 답 ⑤

ㄱ. 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$1+\dfrac{a}{2}=\dfrac{1+(1+a)}{2}\ge\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{1\times(1+a)}=\sqrt{1+a}$

이때, $a>0$에서 등호가 성립하지 않으므로

$1+\dfrac{a}{2}>\sqrt{1+a}$ (참)

ㄴ. 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(a^2+b^2)\ge(a+b)^2$에서

$2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2$

$\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\dfrac{(a+b)^2}{4}$

$\therefore \dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ (참)

ㄷ. 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\}\ge(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$에서

$2(a+b)\ge(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, $\dfrac{a+b}{2}\ge\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$

$\therefore \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\ge\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄱ. $1+\dfrac{a}{2}>0$, $\sqrt{1+a}>0$이므로

$\left(1+\dfrac{a}{2}\right)^2-(\sqrt{1+a})^2=\dfrac{a^2}{4}>0$

$\therefore 1+\dfrac{a}{2}>\sqrt{1+a}$ (참)

ㄴ. $\dfrac{a^2+b^2}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}$

$=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4}$

$=\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2\ge0$

$\therefore \dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ (참)

37 답 6

(i) 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{1})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\}\{x^2+(\sqrt{2}y)^2+(\sqrt{3}z)^2\}$

$\ge(x+2y+3z)^2$

$\left(\text{단, 등호는 }\dfrac{x^2}{1}=\dfrac{2y^2}{2}=\dfrac{3z^2}{3}\text{, 즉 }x^2=y^2=z^2\text{일 때 성립}\right)$

$(1+2+3)(x^2+2y^2+3z^2)\ge(x+2y+3z)^2$

$6(x^2+2y^2+3z^2)\ge1$

$\therefore x^2+2y^2+3z^2\ge\dfrac{1}{6}$

따라서 $x^2+2y^2+3z^2$의 최솟값 m_1은 $m_1=\dfrac{1}{6}$

(ii) 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{2y})^2+(\sqrt{3z})^2\}\left\{\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{2}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{3}{z}}\right)^2\right\}$

$\ge(1+2+3)^2$

$\left(\text{단, 등호는 }\dfrac{\frac{1}{x}}{x}=\dfrac{\frac{2}{y}}{2y}=\dfrac{\frac{3}{z}}{3z}\text{, 즉 }\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{z^2}\text{일 때 성립}\right)$

$(x+2y+3z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}\right)\ge(1+2+3)^2$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}\ge36$

따라서 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}$의 최솟값 m_2는 $m_2=36$

(i), (ii)에 의하여 $m_1m_2=6$이다.

38 답 51

부등식 ㉠에 의하여 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}\geq\frac{(1+2)^2}{a+b}$이므로

$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\geq\frac{\overset{\text{(가)}}{\boxed{9}}}{a+b}+\frac{9}{c}$

또한, 부등식 ㉠에 의하여

$\frac{9}{a+b}+\frac{9}{c}=\frac{3^2}{a+b}+\frac{3^2}{c}\geq\frac{(3+3)^2}{a+b+c}$이므로

$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\geq\frac{9}{a+b}+\frac{9}{c}\geq\frac{\overset{\text{(나)}}{\boxed{36}}}{a+b+c}=\overset{\text{(다)}}{\boxed{6}}\ (\because a+b+c=6)$

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

즉, (가), (나), (다)에 알맞은 수를 모두 더한 값은

$9+36+6=51$

> 일등급 UP
>
> ＊부등식 $\frac{p^2}{x}+\frac{q^2}{y}\geq\frac{(p+q)^2}{x+y}$의 증명
>
> 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여
>
> $(x+y)\left(\frac{p^2}{x}+\frac{q^2}{y}\right)\geq(p+q)^2$
>
> x, y가 모두 양수이므로 양변을 $x+y$로 나누면
>
> $\frac{p^2}{x}+\frac{q^2}{y}\geq\frac{(p+q)^2}{x+y}$

39 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq0$ (참)

ㄴ. 【반례】 $a=-1$, $b=-3$이면

(좌변)$=-2<-\frac{3}{2}=$(우변) (거짓)

ㄷ. (ⅰ) $|a|\geq|b|$일 때

$|a|-|b|\geq0$, $|a-b|\geq0$이므로

$(|a|-|b|)^2-|a-b|^2$

$=a^2-2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=2(ab-|ab|)\leq0$

$\therefore |a|-|b|\leq|a-b|$

(ⅱ) $|a|<|b|$일 때

(좌변)<0, (우변)>0이므로

$|a|-|b|<|a-b|$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $|a|-|b|\leq|a-b|$는 항상 성립한다. (참)

따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

40 답 4

양의 실수 a, b, c에 대하여

$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geq0$이므로 $4ab\leq(a+b)^2$이고,

같은 방법으로 $4bc\leq(b+c)^2$, $4ca\leq(c+a)^2$이므로

$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$

$=\frac{4ab}{a+b}c+\frac{4bc}{b+c}a+\frac{4ca}{c+a}b$

$\leq\frac{(a+b)^2}{a+b}c+\frac{(b+c)^2}{b+c}a+\frac{(c+a)^2}{c+a}b$

$=(a+b)c+(b+c)a+(c+a)b$

$=\overset{\text{(가)}}{\boxed{2}}(ab+bc+ca)$ ⋯ ㉠ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

한편, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq0$에서

$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\geq0$

$ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{\underset{\text{(나)}}{\boxed{3}}}$ ⋯ ㉡ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

㉠, ㉡으로부터

$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\leq\underset{\text{(다)}}{\boxed{\frac{2}{3}}}(a+b+c)^2$ ⋯ ㉢

따라서 ㉢의 양변을 $4abc$로 나누면

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{(a+b+c)^2}{6abc}$이다.

따라서 $p=2$, $q=3$, $r=\frac{2}{3}$이므로 $pqr=2\times3\times\frac{2}{3}=4$이다.

41 답 7

주어진 명제의 결론을 부정하면

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}>3$ ⋯ ㉠

양변을 제곱하면 $a+b+c+2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})>9$

위 식에 $a+b+c=3$을 대입하여 정리하면

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}>\overset{\text{(가)}}{\boxed{3}}$ ⋯ ㉡ ---------- ⓐ

한편, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, $\frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}$, $\frac{c+a}{2}\geq\sqrt{ca}$이므로

변끼리 더하여 정리하면

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leq\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c$

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leq\overset{\text{(나)}}{\boxed{1}}\times(a+b+c)=3$

$\therefore \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leq\overset{\text{(다)}}{\boxed{3}}$ ⋯ ㉢ ---------- ⓑ

이때, ㉡과 ㉢은 서로 모순이므로 ㉠은 성립할 수 없다.

따라서 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq3$이다.

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 수는 각각 3, 1, 3이므로 그 합은

$3+1+3=7$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ (가)에 알맞은 수를 찾는다.	[40%]
ⓑ (나), (다)에 알맞은 수를 찾는다.	[40%]
ⓒ (가), (나), (다)에 알맞은 수의 합을 구한다.	[20%]

> 일등급 UP
>
> ＊코시－슈바르츠의 부등식을 이용한 증명
>
> $(1+1+1)(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+\sqrt{c}^2)\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$
>
> $3(a+b+c)\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$
>
> $9\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$
>
> $\therefore 0<\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq3$

42 답 5

$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$ ---------- ⓐ

$x>0$일 때 $\frac{x^2+1}{x}>0$, $\frac{4x}{x^2+1}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$f(x)\geq 2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}\times\frac{4x}{x^2+1}}=4$ ---------- ⓑ

이때, 등호는 $\frac{x^2+1}{x}=\frac{4x}{x^2+1}$, 즉 $x=1$일 때 성립한다.

따라서 $f(x)$는 $x=\alpha=1$일 때 최솟값 4를 갖는다. ---------- ⓒ

$\therefore \alpha+m=1+4=5$ ---------- ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ $f(x)$를 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있도록 변형한다.	[20%]
ⓑ $f(x)$의 최솟값을 구한다.	[40%]
ⓒ $f(x)$가 최솟값을 가질 때의 x의 값을 구한다.	[30%]
ⓓ $\alpha+m$의 값을 구한다.	[10%]

43 답 6

모든 실수 x에 대하여 $x^2+nx+9>0$이 성립할 조건은

$x^2+nx+9=\left(x+\frac{n}{2}\right)^2+9-\frac{n^2}{4}$에서

$9-\frac{n^2}{4}>0$, $n^2-36<0$, $(n+6)(n-6)<0$

$\therefore -6<n<6$ ---------- ⓐ

따라서 $n\leq-6$ 또는 $n\geq 6$이면 주어진 명제는 거짓이므로

그 부정은 참이 된다. ---------- ⓑ

이때, n은 자연수이므로 $n\geq 6$

따라서 n의 최솟값은 6이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 주어진 명제가 참이 되는 n의 값의 범위를 구한다.	[40%]
ⓑ 주어진 명제의 부정이 참이 되는 n의 값의 범위를 구한다.	[40%]
ⓒ n의 최솟값을 구한다.	[20%]

[다른 풀이]

'모든 실수 x에 대하여 $x^2+nx+9>0$이다.'의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $x^2+nx+9\leq 0$이다.'이다.

즉, 주어진 명제의 부정이 참이 되려면 x에 대한 이차방정식

$x^2+nx+9=0$이 실근을 가져야 하므로

판별식을 D라 하면 $D=n^2-36\geq 0$, $(n+6)(n-6)\geq 0$

$\therefore n\leq -6$ 또는 $n\geq 6$

이때, n은 자연수이므로 n의 최솟값은 6이다.

44 답 ③

$\sqrt{n^2-1}$이 유리수라 하면 $\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)

로 놓을 수 있다. 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$n^2-1=\frac{q^2}{p^2}$, 즉 $p^2(n^2-1)=q^2$

이때, n^2-1은 자연수이므로 p는 q^2의 약수이어야 하는데 p, q는 서로소인 자연수이므로 $p=1$이 되어야 한다.

$\therefore n^2=\boxed{q^2+1}$ ←(가)

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때, $n^2=(2k)^2+1$이므로

$(2k)^2<n^2<\boxed{(2k+1)^2}$ ←(나)

즉, $2k<n<2k+1$인 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때, $n^2=(2k+1)^2+1$이므로

$(2k+1)^2<n^2<(2k+2)^2$

즉, $2k+1<n<2k+2$인 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)를

만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

따라서 $f(q)=q^2+1$, $g(k)=(2k+1)^2$이므로

$f(2)+g(3)=5+49=54$

45 답 ⑤

ㄱ. 삼각형 GDH와 삼각형 FCG는 직각이등변삼각형이므로

$\angle FGH=90^\circ$이다.

또, 문제에서 점 M은 선분 FH의 중점이므로 세 점 F, G, H는 중심이 M인 한 원 위에 있다.

$\therefore \overline{FM}=\overline{GM}$ (참)

ㄴ. 삼각형 AEH와 삼각형 BFE가 합동이므로

$\angle AEH+\angle BEF=90^\circ$에서 $\angle HEF=90^\circ$이다.

즉, 삼각형 EFH는 직각이등변삼각형이므로

삼각형 EFH의 넓이는 $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$이고

선분 EM은 삼각형 EFH를 이등분하므로

삼각형 EFM의 넓이는 $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$이다.

또한, 삼각형 FGH는 직각삼각형이고 $\overline{FG}=\sqrt{2}b$, $\overline{GH}=\sqrt{2}a$이므로 넓이는 ab이다.

따라서 삼각형 FGM의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.

$\therefore \frac{1}{4}(a^2+b^2)\geq\frac{1}{4}\times 2ab=\frac{1}{2}ab$ (참)

ㄷ. 선분 FH는 직각이등변삼각형 EFH의 빗변이므로

$\overline{FH}=\sqrt{2}\,\overline{EF}=\sqrt{2}\times\sqrt{a^2+b^2}=6\sqrt{2}$에서

$a^2+b^2=36$이다.

이때, ㄴ에서 삼각형 FGM의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이므로

$36=a^2+b^2\geq 2ab$에서 $\frac{1}{2}ab\leq 9$

즉, 삼각형 FGM의 넓이의 최댓값은 9이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

46 답 ①

이차함수 $f(x)=x^2-2ax$의 그래프와 직선 $g(x)=\dfrac{1}{a}x$가 만나는 점 A의 좌표를 구하기 위해 연립하면

$x^2-2ax=\dfrac{1}{a}x$, $x-2a=\dfrac{1}{a}$ ($\because x>0$)

$x=2a+\dfrac{1}{a}$, $y=2+\dfrac{1}{a^2}$

$\therefore \mathrm{A}\left(2a+\dfrac{1}{a},\ 2+\dfrac{1}{a^2}\right)$

또, 이차함수 $f(x)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$의 그래프의 꼭짓점 B의 좌표는 $(a,\ -a^2)$이므로 선분 AB의 중점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2a},\ 1+\dfrac{1}{2a^2}-\dfrac{a^2}{2}\right)$이다.

이때, $a>0$에서 선분 CH의 길이는 점 C의 x좌표와 같으므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2a}$이다.

따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2a}\geq 2\sqrt{\dfrac{3}{2}a\times\dfrac{1}{2a}}=\sqrt{3}$ $\left(\text{단, 등호는 } a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립}\right)$

이므로 선분 CH의 길이의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

47 답 10

$$a^2+b+\frac{16}{2a+b}=a^2-2a+(2a+b)+\frac{16}{2a+b}$$
$$\geq a^2-2a+2\sqrt{(2a+b)\times\frac{16}{2a+b}}$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 2a+b=\frac{16}{2a+b}\ \cdots\ ㉠\text{일 때 성립}\right)$$
$$=a^2-2a+8$$
$$=(a-1)^2+7\geq 7$$
$$(\text{단, 등호는 } a=1\ \cdots\ ㉡\text{일 때 성립})$$

㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=2$일 때, $a^2+b+\dfrac{16}{2a+b}$의 최솟값은 7이므로

$k=7$, $m=1$, $n=2$이다.

$\therefore k+m+n=10$

48 답 16

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $x>0$, $y>0$일 때

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$가 성립하므로

$a+4b\geq 2\sqrt{4ab}=4\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=4b$일 때 성립)

$ab+a+4b=32$에서

$ab+a+4b=32\geq ab+4\sqrt{ab}$

$(\sqrt{ab})^2+4\sqrt{ab}-32\leq 0$

$(\sqrt{ab}+8)(\sqrt{ab}-4)\leq 0$

$0<\sqrt{ab}\leq 4$ ($\because \sqrt{ab}>0$)

$\therefore 0<ab\leq 16$

따라서 $a=8$, $b=2$일 때, ab의 최댓값은 16이다.

49 답 6

$x+y+z=12$에서 $x+y=12-z$ ⋯ ㉠

$x^2+y^2+z^2=54$에서 $x^2+y^2=54-z^2$ ⋯ ㉡

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

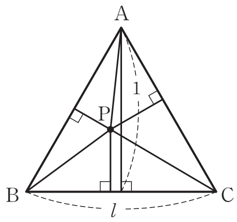
$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$이고 ㉠, ㉡을 대입하면

$2(54-z^2)\geq(12-z)^2$, $z^2-8z+12\leq 0$, $(z-2)(z-6)\leq 0$

$\therefore 2\leq z\leq 6$

따라서 z의 최댓값은 6이다.

50 답 ③



정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 l이라 하면

$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{PBC}+\triangle\mathrm{PCA}$

이므로 $\dfrac{1}{2}l=\dfrac{1}{2}la+\dfrac{1}{2}lb+\dfrac{1}{2}lc$에서

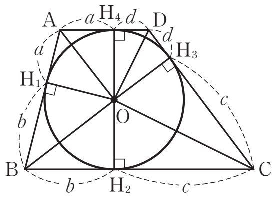
$a+b+c=1$

이때, $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$이므로

$1\geq 3(ab+bc+ca)$ $\quad\therefore ab+bc+ca\leq\dfrac{1}{3}$

따라서 $ab+bc+ca$의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$이다.

51 답 ⑤



그림과 같이 사다리꼴 ABCD와 내접원 O의 접점을 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$, $\mathrm{H_3}$, $\mathrm{H_4}$라 하고 $\overline{\mathrm{AH_1}}=\overline{\mathrm{AH_4}}=a$,

$\overline{\mathrm{BH_1}}=\overline{\mathrm{BH_2}}=b$, $\overline{\mathrm{CH_2}}=\overline{\mathrm{CH_3}}=c$,

$\overline{\mathrm{DH_3}}=\overline{\mathrm{DH_4}}=d$라 하자.

ㄱ. $\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}$이고, $\overline{\mathrm{AB}}\geq\overline{\mathrm{H_2H_4}}=2$,
$\overline{\mathrm{CD}}\geq\overline{\mathrm{H_2H_4}}=2$이므로
$x+y=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}\geq 4$ (참)

ㄴ. $x+y=4$이면 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{H_2H_4}}=2$이고
$\overline{\mathrm{AD}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{CD}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{H_2H_4}}$
한편, $\overline{\mathrm{AD}}\perp\overline{\mathrm{H_2H_4}}$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AD}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$이고,
$\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}$이므로 사각형 ABCD는
정사각형이다. (참)

ㄷ. $\angle\mathrm{OAH_1}=\angle\mathrm{OAH_4}$, $\angle\mathrm{OBH_1}=\angle\mathrm{OBH_2}$이므로
$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$
또, $\angle\mathrm{OCH_2}=\angle\mathrm{OCH_3}$, $\angle\mathrm{ODH_3}=\angle\mathrm{ODH_4}$이므로
$\angle\mathrm{COD}=90^\circ$
직각삼각형 OAB에서 $\overline{\mathrm{OH_1}}^2=\overline{\mathrm{AH_1}}\times\overline{\mathrm{BH_1}}$
$\therefore ab=1$
또, 직각삼각형 OCD에서 $\overline{\mathrm{OH_3}}^2=\overline{\mathrm{CH_3}}\times\overline{\mathrm{DH_3}}$
$\therefore cd=1$
$\therefore xy=(a+d)(b+c)\geq 2\sqrt{ad}\times 2\sqrt{bc}=4\sqrt{abcd}=4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

V 함수

04 함수

문제편 46P

01 답 ③

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

02 답 1

$f=g$이면 정의역의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같으므로

$f(-1)=g(-1)$에서 $1-a+2=-2+3$ $\quad\therefore a=2$

$f(k)=g(k)$에서 $k^2+ak+2=2k+3$

이때, $a=2$를 대입하여 정리하면 $k^2-1=0$

$(k-1)(k+1)=0$ $\quad\therefore k=1$ 또는 $k=-1$

그런데 $k>0$이므로 $k=1$

03 답 7

함수 f는 일대일대응이므로 함수 f의 치역은

$X=\{1, 2, 3, 4\}$

이때, 조건 (가)의 $f(1)+f(4)=6$에 의하여

$f(1)=2, f(4)=4$ 또는 $f(1)=4, f(4)=2$

그런데 조건 (나)에 의하여 $f(1)=4, f(4)=2$이고

$f(2)=3, f(3)=1$이다.

$\therefore f(1)+f(2)=4+3=7$

04 답 10

함수 g는 항등함수이므로 $g(4)=4$

조건 (가)에서 $h(6)=g(4)=4$

이때, h는 상수함수이므로 $h(x)=4$

또, $f(2)=g(4)=4$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$f(4)=2, f(6)=6$ 또는 $f(4)=6, f(6)=2$이다.

그런데 조건 (나)에서 $f(4)>f(6)$이므로

$f(4)=6, f(6)=2$

따라서 $(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(6)=6$,

$(h\circ g)(4)=h(g(4))=h(4)=4$이므로

$(g\circ f)(4)+(h\circ g)(4)=6+4=10$

05 답 ③

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(4)=-2\times4+5=-3$

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(-1)=|-1-2|+3=6$

$\therefore (f\circ g)(3)+(g\circ f)(3)=-3+6=3$

06 답 0

함수 f의 치역은 $\{f(x)\,|\,x\geq0\}=\{y\,|\,y\geq-1\}$이므로 역함수 f^{-1}의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq-1\}$이다.

$\therefore a=-1$

이때, f와 f^{-1}의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 방정식 $2x-1=x$의 해가 $x=b$이다.

즉, $2b-1=b$에서 $b=1$

$\therefore a+b=(-1)+1=0$

[다른 풀이]

$y=2x-1$이라 하면 $2x=y+1$에서 $x=\frac{y+1}{2}$

여기서 x, y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x+1}{2}$

즉, 함수 $f(x)$의 역함수는 $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$이다.

$f(x)=f^{-1}(x)$에서 $2x-1=\frac{x+1}{2}$ $\quad\therefore x=1$

따라서 $b=1$이므로 $a+b=0$

07 답 6

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ g^{-1})(0)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1})(0)\\&=(g^{-1}\circ g^{-1})(0)\\&=g^{-1}(g^{-1}(0))\end{aligned}$$

$g^{-1}(g^{-1}(0))=a$라 하면 $g(a)=g^{-1}(0)$에서

$g(g(a))=0$이므로

$g(g(a))=g\left(\frac{1}{2}a-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a-1\right)-1=0$

$\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}=0$, $\frac{1}{4}a=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore a=6$

08 답 42

$\{f(1)-1\}\{f(2)-2\}=0$에서 $f(1)=1$ 또는 $f(2)=2$

(i) $f(1)=1$일 때,

$f(2)$는 2, 3, 4, 5의 4가지

$f(3)$은 $f(2)$의 값을 제외한 3가지

$f(4)$는 $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 2가지

$f(5)$는 나머지 1가지

$\therefore 4\times3\times2\times1=24$(개)

(ii) $f(2)=2$일 때, 마찬가지 방법으로 24(개)

(iii) $f(1)=1$, $f(2)=2$일 때,

$f(3)$은 3, 4, 5의 3가지

$f(4)$는 $f(3)$의 값을 제외한 2가지

$f(5)$는 나머지 1가지

$\therefore 3\times2\times1=6$(개)

(i)~(iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$24+24-6=42$

09 답 12

$f(6)=f(2\times3)=\{f(2)\}^3=64 \qquad \therefore f(2)=4$

$f(6)=f(3\times2)=\{f(3)\}^2=64 \qquad \therefore f(3)=8\ (\because f(x)>0)$

$\therefore f(2)+f(3)=4+8=12$

10 답 25

조건 (나)에 의하여

$$f(999)=f\left(2\times\frac{999}{2}\right)=2f\left(\frac{999}{2}\right)=2^2f\left(\frac{999}{2^2}\right)$$
$$=\cdots=2^8f\left(\frac{999}{2^8}\right)$$

이다.

이때, $\dfrac{999}{2^8}=\dfrac{999}{256}$의 범위는 $3<\dfrac{999}{256}<4$이므로

조건 (가)에 의하여 $f\left(\dfrac{999}{2^8}\right)=4-\dfrac{999}{2^8}$이다.

$$\therefore f(999)=2^8f\left(\frac{999}{2^8}\right)=2^8\left(4-\frac{999}{2^8}\right)$$
$$=2^{10}-999=25$$

11 답 ②

$$\begin{aligned}2f(5)+3f(6)&=2\{f(5)+f(6)\}+f(6)\\&=2f(7)+f(6)\\&=f(7)+\{f(7)+f(6)\}\\&=f(7)+f(8)\\&=f(9)\end{aligned}$$

12 답 ③

ㄱ. 함수 f가 일대일대응이므로 모든 함숫값의 합은 집합 X의 원소의 합 15이다.
이때, $f(1)+f(2)=3$이므로 나머지 함숫값의 합은
$f(3)+f(4)+f(5)=15-\{f(1)+f(2)\}=12$이다. (참)

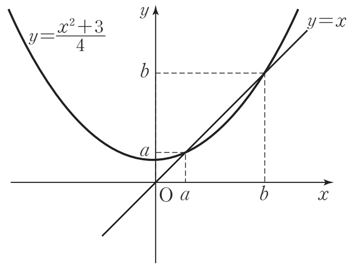
ㄴ. $f(1)\times f(2)=3$에 의하여 $f(1)=1,\ f(2)=3$ 또는 $f(1)=3,\ f(2)=1$이다.
이때, 함수 f가 일대일대응이므로
$f(3)+f(4)+f(5)=2+4+5=11$이다. (참)

ㄷ. 【반례】 $f(1)-f(2)=3$에서 $f(1)=5,\ f(2)=2$이면
$f(3)+f(4)+f(5)=1+3+4=8$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

13 답 4

그림과 같이 $f(x)=\dfrac{x^2+3}{4}$은 $x>0$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로 $f(a)=a,\ f(b)=b$인 a, b를 정하면 된다.



$\dfrac{x^2+3}{4}=x$에서 $x^2-4x+3=0,\ (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $a=1,\ b=3$이므로 $a+b=4$이다.

14 답 ③

ㄱ. $f(a_1, b_1)=f(a_2, b_2)$이면 $2^{a_1}\times3^{b_1}=2^{a_2}\times3^{b_2}$에서 2와 3은 서로소이므로 $a_1=a_2,\ b_1=b_2$이어야 한다. 즉, 함수 f는 일대일함수이다.

ㄴ. $f(a_1, b_1)=f(a_2, b_2)$이면 $2^{a_1}\times6^{b_1}=2^{a_2}\times6^{b_2}$에서
$2^{a_1+b_1}\times3^{b_1}=2^{a_2+b_2}\times3^{b_2}$
이때, 2와 3은 서로소이므로 $a_1=a_2,\ b_1=b_2$이어야 한다. 즉, 함수 f는 일대일함수이다.

ㄷ. 【반례】 $f(4, 1)=3^4\times9^1=3^6,\ f(2, 2)=3^2\times9^2=3^6$
즉, $(4, 1)\neq(2, 2)$이지만 $f(4, 1)=f(2, 2)$이므로
함수 $f(m, n)=3^m\times9^n$은 일대일함수가 아니다.

따라서 일대일함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15 답 2

$f(g(x))=f(2x-1)=a(2x-1)+b=2ax-a+b$

$g(f(x))=g(ax+b)=2(ax+b)-1=2ax+2b-1$

$f\circ g=g\circ f$에서 $-a+b=2b-1 \qquad \therefore b=1-a$

이것을 $f(x)$에 대입하면

$f(x)=ax+1-a=a(x-1)+1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$을 지난다.

$\therefore p+q=1+1=2$

16 답 ④

$f(h(3))=g(3)$이므로 $h(3)=k$라 하면 $f(k)=15$

즉, $f(x)=2x+1$에서 $f(k)=2k+1=15,\ 2k=14 \qquad \therefore k=7$

$\therefore h(3)=7$

[다른 풀이]

$$\begin{aligned}h&=(f^{-1}\circ f)\circ h\\&=f^{-1}\circ(f\circ h)=f^{-1}\circ g\end{aligned}$$

이므로 $h(3)=f^{-1}(g(3))=f^{-1}(15)=k$라 하면

역함수의 성질에 의하여 $f(k)=2k+1=15$이므로 $k=7$

$\therefore h(3)=7$

17 답 1

$g(x)=ax+b\ (a\neq0)$라 하면

$(f\circ g)(x)=x^2+3x$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)=(ax+b)^2-(ax+b)-2$

$\qquad\qquad\quad =a^2x^2+(2ab-a)x+b^2-b-2=x^2+3x$

$\therefore a^2=1,\ 2ab-a=3,\ b^2-b-2=0$

이때, $a^2=1$에서 $a=1$ 또는 $a=-1$이므로

(i) $a=1$일 때, $2ab-a=3,\ b^2-b-2=0$에서 $b=2$

(ii) $a=-1$일 때, $2ab-a=3,\ b^2-b-2=0$에서 $b=-1$

따라서 $g_1(x)=x+2,\ g_2(x)=-x-1$이므로

$g_1(3)+g_2(3)=5+(-4)=1$

18 답 ⑤

$f(x)=x|x|+k=\begin{cases} x^2+k & (x\geq0) \\ -x^2+k & (x<0)\end{cases}$ 이고

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로 $2^2+k=1\qquad \therefore k=-3$

$\therefore f(x)=\begin{cases} x^2-3 & (x\geq0) \\ -x^2-3 & (x<0)\end{cases}$

이때, $(f^{-1}\circ f^{-1})(-2)=t$라 하면

$f(f(t))=-2$에서 $f(t)=1$, 즉 $t^2-3=1\qquad \therefore t=2\ (\because t\geq0)$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(-2)=2$

19 답 3

$h(x)=\dfrac{2f(x)+5}{f(x)+1}$에서

$h(g(x))=\dfrac{2f(g(x))+5}{f(g(x))+1}=\dfrac{2x+5}{x+1}$이므로

$(h\circ g)(2)=h(g(2))=\dfrac{4+5}{2+1}=3$

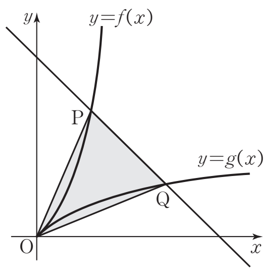
[다른 풀이]

$g(2)=k$라 하면 $g^{-1}(k)=f(k)=2$

$\therefore (h\circ g)(2)=h(g(2))=h(k)$

$\qquad\qquad\qquad =\dfrac{2f(k)+5}{f(k)+1}=\dfrac{2\times2+5}{2+1}=3$

20 답 8



점 P는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+n+2$의 교점이므로 $x^2+nx=-x+n+2$에서 $x^2+(n+1)x-(n+2)=0$

$(x-1)(x+n+2)=0\qquad \therefore x=1\ (\because x\geq0)$

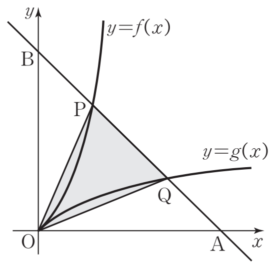
따라서 $P(1,\ n+1)$이고 점 Q는 점 P와 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 점이므로 $Q(n+1,\ 1)$이다.

따라서 삼각형 POQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\left|\begin{matrix} n+1 & 1 \\ 1 & n+1\end{matrix}\right|=\dfrac{1}{2}\{(n+1)^2-1\}=\dfrac{1}{2}n(n+2)$

이때, $\dfrac{1}{2}n(n+2)=40$에서 $n=8$

[다른 풀이]



(삼각형 POQ의 넓이)

=(삼각형 OAB의 넓이)$-2\times$(삼각형 OAQ의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}(n+2)^2-2\times\left\{\dfrac{1}{2}\times(n+2)\times1\right\}=\dfrac{n(n+2)}{2}$

(이하 동일)

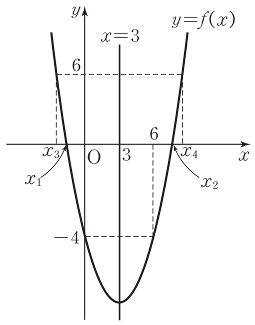
21 답 12

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$f(0)=f(6)=-4$이다.

즉, $f(f(x))=-4$를 만족시키는 $f(x)$의 값은

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=6$이다.



$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 $x_1,\ x_2$라 하고

$f(x)=6$을 만족시키는 x의 값을 $x_3,\ x_4$라 하면

두 점 $(x_1,\ f(x_1))$과 $(x_2,\ f(x_2))$, 두 점 $(x_3,\ f(x_3))$과 $(x_4,\ f(x_4))$는 각각 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$x_1+x_2=6,\ x_3+x_4=6$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=6+6=12$

[다른 풀이]

$f(x)=a(x-3)^2-7\ (a>0)$이라 하면 $f(0)=-4$이므로

$9a-7=-4$에서 $9a=3\qquad \therefore a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{3}(x-3)^2-7$

이때, $f(f(x))=-4$를 만족시키는 $f(x)$를 t라 하면

$f(t)=-4$에서 $\frac{1}{3}(t-3)^2-7=-4$, $(t-3)^2=9$

$t-3=3$ 또는 $t-3=-3$

따라서 $t=6$ 또는 $t=0$이므로 $f(x)=6$ 또는 $f(x)=0$

(i) $f(x)=6$에서 $\frac{1}{3}(x-3)^2-7=6$

$\therefore x^2-6x-30=0$

따라서 이 이차방정식의 두 실근을 x_1, x_2라 하면

$x_1+x_2=6$

(ii) $f(x)=0$에서 $\frac{1}{3}(x-3)^2-7=0$

$\therefore x^2-6x-12=0$

따라서 이 이차방정식의 두 실근을 x_3, x_4라 하면

$x_3+x_4=6$

따라서 방정식 $f(f(x))=-4$의 모든 실근의 합은

$x_1+x_2+x_3+x_4=6+6=12$

22 답 ④

$f(x)=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$, $g(x)=x^2-ax+3$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\{g(x)-2\}\{g(x)+1\}\geq 0$

$\therefore g(x)\geq 2$ 또는 $g(x)\leq -1$

(i) $g(x)\geq 2$에서 $x^2-ax+3\geq 2$, 즉 $x^2-ax+1\geq 0$

이것이 모든 실수 x에 대하여 성립하여야 하므로

$a^2-4\leq 0$에서 $-2\leq a\leq 2$

(ii) $g(x)\leq -1$에서 $x^2-ax+3\leq -1$, 즉 $x^2-ax+4\leq 0$

이때, $h(x)=x^2-ax+4$라 하면 $y=h(x)$의 그래프는 아래로 볼록인 포물선이므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\leq 0$을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는 $-2\leq a\leq 2$

23 답 ③

주어진 그림에서 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (0\leq x<1) \\ -2x+4 & (1\leq x\leq 2) \end{cases}$

(i) $0\leq f(x)<1$일 때, $f(f(x))=f(x)+1=1$ $\quad\therefore f(x)=0$

ⓘ $0\leq x<1$일 때, $f(x)=x+1=0$ $\quad\therefore x=-1$

이때, $x=-1$은 $0\leq x<1$이라는 조건에 모순이다.

ⓘⓘ $1\leq x\leq 2$일 때, $f(x)=-2x+4=0$ $\quad\therefore x=2$

(ii) $1\leq f(x)\leq 2$일 때, $f(f(x))=-2f(x)+4=1$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}$

ⓘ $0\leq x<1$일 때, $f(x)=x+1=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$

ⓘⓘ $1\leq x\leq 2$일 때, $f(x)=-2x+4=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 $(f\circ f)(x)=1$을 만족시키는 x의 개수는 3이다.

24 답 ④

함수 $f:A\longrightarrow B$가 역함수를 가지려면 함수 f는 일대일대응이어야 하므로 두 집합 A, B의 원소의 개수가 같아야 한다. 따라서 두 집합 A, B의 원소의 개수는 2이다. 이때, 가능한 집합 A의 개수는 $\frac{4\times 3}{2}=6$이고 집합 A가 정해지면 집합 B는 자동으로 정해지므로 가능한 집합 A, B의 개수는 6이다.

또한, 각 경우에 대하여 함수 f를 정하는 방법은 2가지이다.

예를 들어 $f:\{1, 2\}\rightarrow\{3, 4\}$는 $f(1)=3$, $f(2)=4$인 경우와 $f(1)=4$, $f(2)=3$인 경우의 2가지이다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $6\times 2=12$이다.

25 답 ④

집합 A의 원소는 일대일함수이므로 $n(A)=3\times 2\times 1=6$

집합 B의 원소는 $f(1)\neq 1$인 함수이므로 $f(1)$은 2, 3 중 하나이고, $f(2)$, $f(3)$은 각각 1, 2, 3 중 하나이다.

즉, $n(B)=2\times 3\times 3=18$

$\therefore n(A)+n(B)=6+18=24$

26 답 72

합성함수 $g\circ f$가 항등함수가 되려면 함수 f는 일대일함수이어야 한다.

일대일함수 f의 개수는 $4\times 3\times 2=24$이다.

함수 g는 B의 원소 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응하는 A의 원소는 각각 1, 2, 3으로 결정되고, 나머지 B의 원소에 대응하는 A의 원소는 1, 2, 3의 3가지가 가능하므로 각 일대일함수 f에 대하여 함수 g의 개수는 3가지이다.

따라서 순서쌍 (f, g)의 개수는 $24\times 3=72$이다.

27 답 16

$h(x)=\{1-f(x)\}\{1-g(x)\}$에서

$f(x)=0$이고 $g(x)=0$, 즉 x가 6의 배수일 때만

$h(x)=1$이고, 그 외에는 모두 $h(x)=0$이다.

1부터 100까지의 자연수 중 6의 배수는 16개이므로

$h(1)+h(2)+h(3)+\cdots+h(100)=16$

28 답 48

$(x+y)f(x, y)=yf(x, x+y)$에서

$f(x, x+y)=\frac{x+y}{y}f(x, y)$이므로

$$\begin{aligned} f(12, 16)&=\frac{16}{4}f(12, 4)=\frac{16}{4}f(4, 12) \\ &=\frac{16}{4}\times\frac{12}{8}f(4, 8)=\frac{16}{4}\times\frac{12}{8}\times\frac{8}{4}f(4, 4) \\ &=\frac{16}{4}\times\frac{12}{8}\times\frac{8}{4}\times 4=48 \end{aligned}$$

29 답 ③

ㄱ. x가 유리수일 때 $f(x)=0$이므로 $f(f(x))=f(0)=0$

x가 무리수일 때 $f(x)=1$이므로 $f(f(x))=f(1)=0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=0$이다. (참)

ㄴ. x가 유리수일 때 x^2도 유리수이므로

$f(x)=0$이고 $f(x^2)=0$이다. $\therefore f(x)\ge f(x^2)$

x가 무리수일 때 x^2은 유리수 또는 무리수이므로

$f(x)=1$이고 $f(x^2)=0$ 또는 $f(x^2)=1$ $\quad\therefore f(x)\ge f(x^2)$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f(x^2)$이다. (참)

ㄷ. 【반례】 $x=\sqrt{2}$일 때 $f(x^2)=0$이고

$f(x^3)=1$이므로 $f(x^2)<f(x^3)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

30 답 ⑤

ㄱ. 10의 양의 약수는 1, 2, 5, 10이므로 $f(10)=18$ (참)

ㄴ. n이 소수가 아니면

(i) $n=1$일 때 $f(1)=1\ne 1+1$

(ii) $n\ne 1$일 때 n은 1과 자기 자신 n 이외의 다른 양의 약수를 가지므로 $f(n)\ne n+1$

따라서 $f(n)=n+1$이면 n은 소수이다. (참)

ㄷ. m, n이 서로 다른 소수이면 mn의 모든 약수는 1, m, n, mn 이므로

$f(mn)=1+m+n+mn$

$\quad\quad=(m+1)(n+1)=f(m)f(n)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

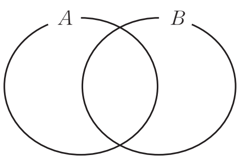
31 답 9

함수 f가 일대일대응이므로 $n(A)=n(B-A)$

$\therefore n(B-A)=6$

또, 함수 g가 일대일대응이므로 $n(A-B)=n(A\cap B)$ ⋯ ㉠

이때, 그림과 같은 벤 다이어그램에서



$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)=6$

이므로 ㉠에 의해

$n(A-B)=n(A\cap B)=3$

$\therefore n(B)=n(B-A)+n(A\cap B)=6+3=9$

32 답 ②

$f(3)-f(2)=f(1)$에서 $f(3)>f(2)$, $f(3)>f(1)$

$f(3)+f(2)=f(4)$에서 $f(4)>f(3)$, $f(4)>f(2)$

즉, $f(4)>f(3)>f(2)>f(1)$ 또는

$f(4)>f(3)>f(1)>f(2)$이므로

$f(4)=4$, $f(3)=3$

한편, $f(3)+f(2)=f(4)$에서 $f(2)=1$이고 $f(1)=2$

$\therefore f(1)+f(3)=2+3=5$

33 답 ①

(i) $f(2)=1$이면 $f(1)=f(f(2))=1$이 되어 함수 f가 일대일대응이라는 것에 모순이다. ($\because f(1)=2$)

(ii) $f(2)=4$이면 $f(4)=f(f(2))=1$이 되어 함수 f가 일대일대응이라는 것에 모순이다. ($\because f(4)=5$)

함수 f가 일대일대응이므로 (i), (ii)에 의하여

$f(2)=3$이다.

$\therefore f(3)=f(f(2))=1$

34 답 ①

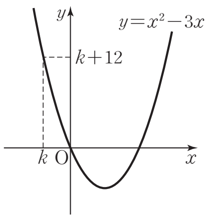
$$f(x)=a|x-1|+(2-a)x+1=\begin{cases}2x-a+1 & (x\ge 1)\\(2-2a)x+a+1 & (x<1)\end{cases}$$

이고 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 $x\ge 1$에서 함수 $f(x)$의 기울기가 $2>0$이므로 $x<1$에서도 함수 $f(x)$의 기울기 $2-2a>0$이어야 한다.

따라서 $2-2a>0$에서 $a<1$이다.

35 답 ①

A에서 B로의 함수 $y=x^2-3x=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$가 일대일대응이 되려면 대칭축인 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 $k\le\frac{3}{2}$을 만족시키는 점 $(k,\ k+12)$가 이차함수 $y=x^2-3x$의 그래프 위에 있어야 한다.



즉, $k+12=k^2-3k$에서

$k^2-4k-12=0$, $(k+2)(x-6)=0$

$\therefore k=-2\ \left(\because k\le\frac{3}{2}\right)$

36 답 ①

$f(x)$는 '$3x$를 5로 나눈 나머지'이므로

$f(0)=0$, $f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=4$, $f(4)=2$이다.

함수 $g: X\longrightarrow X$는 집합 X의 모든 원소 x에 대하여

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$를 만족시키므로

$(f\circ g)(1)=(g\circ f)(1)$에서 $f(3)=g(3)=4$

$(f\circ g)(3)=(g\circ f)(3)$에서 $f(4)=g(4)=2$

$(f\circ g)(4)=(g\circ f)(4)$에서 $f(2)=g(2)=1$

$(f\circ g)(2)=(g\circ f)(2)$에서 $f(1)=g(1)=3$

$(f\circ g)(0)=(g\circ f)(0)$에서 $f(g(0))=g(0)$

$f(0)=0$이고 f는 일대일대응이므로 $g(0)=0$이어야 한다.

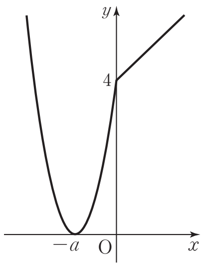
$\therefore g(0)+g(2)=0+1=1$

37 답 2

합성함수 $(g\circ f)(x)=\begin{cases}x^2+2ax+4 & (x<0)\\x+4 & (x\ge 0)\end{cases}$이다.

$a\le 0$이면 함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 4\}$이므로 성립하지 않는다. 따라서 $a>0$이어야 한다.

이때, $y=x^2+2ax+4=(x+a)^2+4-a^2$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 음수이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y\geq 0\}$이기 위해서는 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 한다.



즉, $4-a^2=0$에서 $a^2=4$ $\therefore a=\pm 2$

이때, $a>0$이므로 $a=2$

38 답 ③

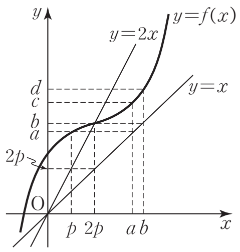
자연수 n에 대하여

$f(n)=\begin{cases} n-2 & (n\geq 100) \\ f(f(n+4)) & (n<100) \end{cases}$이므로

$f(96)=f(f(100))=f(98)=f(f(102))=f(100)=98$

39 답 ⑤

$y=x$와 $y=2x$의 그래프를 이용하여 함숫값을 표시하면 다음 그림과 같다.



$\therefore (f\circ f)(p)+(f\circ f)(2p)=f(f(p))+f(f(2p))$

$=f(a)+f(b)=c+d$

40 답 1

$a+2b=2\left(\frac{1}{2}a+b\right)=2f^{100}\left(\frac{1}{2}\right)$이므로

$x=\frac{1}{2}$을 $f(x), f^2(x), f^3(x), \cdots$에 차례로 대입하면

$f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}$

$f^2\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$f^3\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\vdots$

$f^{100}\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^{99}\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore a+2b=2f^{100}\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}=1$

41 답 1

합성함수 $g\circ f$가 정의되려면 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역에 포함되어야 한다.

함수 g의 정의역은 $Y=\{2x-3|x\geq k\}=\{y|y\geq 2k-3\}$

함수 $f(x)=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$의 그래프의 축이 직선 $x=2$이고, 함수 f의 정의역이 $x\leq k$이므로

(i) $k<2$일 때, 함수 f의 치역은 $\{y|y\geq k^2-4k+2\}$이므로

$k^2-4k+2\geq 2k-3$, $(k-1)(k-5)\geq 0$

$\therefore k\leq 1$ 또는 $k\geq 5$

이때, $k<2$이므로 $k\leq 1$

(ii) $k\geq 2$일 때, 함수 f의 치역은 $\{y|y\geq -2\}$이므로

$-2\geq 2k-3$ $\therefore k\leq\frac{1}{2}$

이때, $k\geq 2$이므로 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의해 k의 최댓값은 1이다.

42 답 ①

$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$는 $1\to 1$, $2\to 3$, $3\to 4$, $4\to 2$인

대응관계를 의미하므로 $f^2=f\circ f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$이다.

$\therefore f^3=f\circ f\circ f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

43 답 ③

$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \left(0\leq x<\frac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2}\leq x\leq 1\right) \end{cases}$이므로

$$f(f(x))=\begin{cases} -2f(x)+1 & \left(0\leq f(x)<\frac{1}{2}\right) \\ -2f(x)+2 & \left(\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 1\right) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -2f(x)+1 & \left(\frac{1}{4}<x\leq\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\leq x\leq 1\right) \\ -2f(x)+2 & \left(0\leq x\leq\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -2(-2x+1)+2 & \left(0\leq x\leq\frac{1}{4}\right) \\ -2(-2x+1)+1 & \left(\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\right) \\ -2(-2x+2)+2 & \left(\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{4}\right) \\ -2(-2x+2)+1 & \left(\frac{3}{4}<x\leq 1\right) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 4x & \left(0\leq x\leq\frac{1}{4}\right) \\ 4x-1 & \left(\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\right) \\ 4x-2 & \left(\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{4}\right) \\ 4x-3 & \left(\frac{3}{4}<x\leq 1\right) \end{cases}$$

따라서 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 ③과 같다.

44 답 22

$0\le x\le 2$일 때 $f(x)=2$이고, $2\le x\le 4$일 때 $f(x)=4-x$

(i) $0\le x\le 10$일 때, $0\le f(x)\le 2$이므로

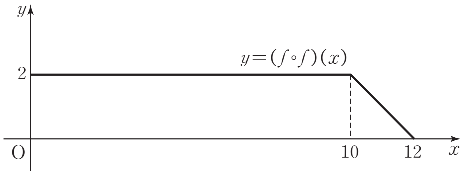
$y=f(f(x))=2$

(ii) $10\le x\le 12$일 때, $f(x)=x-8$이고

$2\le f(x)\le 4$이므로

$y=f(f(x))=4-f(x)=4-(x-8)=12-x$

(i), (ii)에 의하여 $0\le x\le 12$에서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



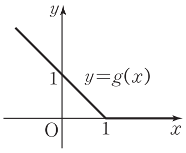
따라서 구하는 넓이는 $10\times 2+\dfrac{1}{2}\times 2^2=22$

45 답 ②

$f(x)\ge 0$일 때, $g(x)=f(x)$이고,

$f(x)<0$일 때, $g(x)=0$이므로

$y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$y=h(x)$의 그래프는

(i) $x\ge 1$일 때, $g(x)=0$이므로

$h(x)=g(g(x))=g(0)=1$

(ii) $0<x<1$일 때, $g(x)=-x+1$이고

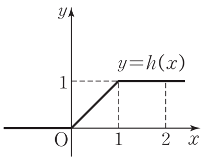
$0<-x+1<1$이므로

$h(x)=g(g(x))=g(-x+1)=-(-x+1)+1=x$

(iii) $x\le 0$일 때, $g(x)=-x+1$이고 $-x+1\ge 1$이므로

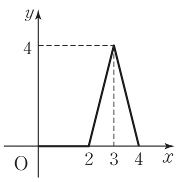
$h(x)=g(g(x))=g(-x+1)=0$

따라서 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

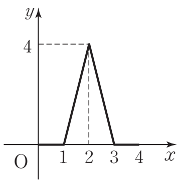


46 답 6

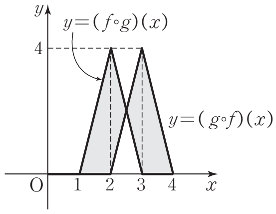
$f(x)$가 가지는 값의 범위에 따라 $y=g(x)$의 그래프의 모양을 그리면 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



또한, $g(x)$가 가지는 값의 범위에 따라 $y=f(x)$의 그래프의 모양을 그리면 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프와 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같으므로 그 넓이는 $2\times\left(\dfrac{1}{2}\times 4\times 1+\dfrac{1}{2}\times 4\times\dfrac{1}{2}\right)=6$



47 답 9

$f(g(1))=2$이고 $f(1)=2$이므로 $g(1)=1$

이와 같은 방법으로

$g(2)=3$, $g(3)=4$, $g(4)=5$, $g(5)=2$

$\therefore g(3)+(g\circ f)^{-1}(2)=4+f^{-1}(g^{-1}(2))$

$=4+f^{-1}(5)=4+5=9$

48 답 ②

$f^{-1}(3)=1$이므로 $f(1)=3$에서 $a+b=3$ ⋯ ㉠

$(f\circ g)^{-1}(6x+3)=x$에서 $(f\circ g)(x)=6x+3$이고,

양변에 $x=0$을 대입하면 $f(g(0))=3$

이때, 함수 f는 일대일대응이고 $f(1)=3$이므로

$g(0)=1=c$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a+b+c=4$

[다른 풀이]

$f^{-1}(3)=1$이므로 $f(1)=3$에서 $a+b=3$ ⋯ ㉠

또, $(f\circ g)^{-1}(6x+3)=x$에서 $(f\circ g)(x)=6x+3$이고,

$f(g(x))=a(3x+c)+b$이므로 $3ax+ac+b=6x+3$에서

$3a=6$ ⋯ ㉡, $ac+b=3$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$, $c=1$

$\therefore a+b+c=4$

49 답 ③

$f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=3+a$, $f(4)=4+a$이고

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

$\therefore a=-1$

이때, $f(2)=4$

$f^2(2)=f(f(2))=f(4)=3$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f(3)=2$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(2)=4$

$f^5(2)=f(f^4(2))=f(4)=3$

⋮

$\therefore f^{10}(2)=f^1(2)=4$

한편, $g^{10}(2)=k$라 하면 $f^{10}(k)=2$이므로
$f^{10}(k)=f^{7}(k)=f^{4}(k)=f^{1}(k)=2$에서 $k=3$
$\therefore\ g^{10}(2)=3$
$\therefore\ a+f^{10}(2)+g^{10}(2)=-1+4+3=6$

50 답 2

역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다.
(i) $x\geq1$일 때, 함수 $f(x)$가 증가하여야 하므로

$y=x^2+ax+2b-1=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+2b-1$에서

직선 $x=-\frac{a}{2}$가 직선 $x=1$보다 왼쪽에 있어야 한다.

즉, $-\frac{a}{2}\leq1$에서 $a\geq-2$

(ii) $x<1$일 때, 함수 $f(x)$가 증가하여야 하므로
$y=-x^2+2bx+a+1=-(x-b)^2+b^2+a+1$에서
직선 $x=b$가 직선 $x=1$보다 오른쪽에 있어야 한다.
즉, $b\geq1$
(i), (ii)에 의하여 $a+4b\geq-2+4=2$

51 답 5

$g^{-1}(8)=k$라 하면 $f(f(k))=8$
여기서 $f(k)=t$ ⋯ ㉠라 하면 $f(t)=8$
한편, $x<2$일 때 $f(x)>-1$, $x\geq2$일 때 $f(x)\leq-1$이므로 $t<2$이다.

즉, $f(t)=8=\frac{1}{4}t^2-t$에서 $t^2-4t-32=0$

$(t+4)(t-8)=0\qquad\therefore\ t=-4$ 또는 $t=8$
그런데 $t<2$이므로 $t=-4$
㉠에서 $f(k)=-4$이므로 $k\geq2$이고 $f(k)=-k+1=-4$
$\therefore\ k=5$
즉, $g^{-1}(8)=5$

52 답 50

점 A$(2,\ 4)$에서 $f(2)=4$이고
$f(2)-f^{-1}(2)=10$에서 $f^{-1}(2)=-6$
조건 (가)에서 점 B와 점 A는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 B$(4,\ 2)$이고 조건 (나)에 의하여 점 D와 점 B는 y좌표가 같으므로 점 D의 좌표는 $(f^{-1}(2),\ 2)$ 즉 D$(-6,\ 2)$이다.
또한, 조건 (가)에서 점 C와 점 D는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 C$(2,\ -6)$이다.
이때, 점 A와 점 C의 x좌표가 같으므로 선분 AC는 y축에 평행하고 선분 BD와 수직이다.
따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times10\times10=50$

53 답 ④

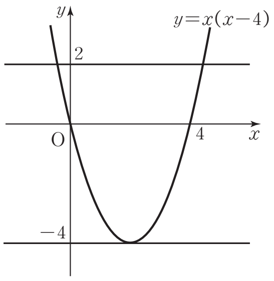
ㄱ. $x=0$, $y=0$을 조건 (나)의 식에 대입하면
$f(0+0)=f(0)+f(0)$에서 $f(0)=0$
$\therefore\ f^{-1}(0)=0$ (참)
ㄴ. $f^{-1}(2)=3$에서 $f(3)=2$이므로 $x=3$, $y=3$을 조건 (나)의 식에 대입하면 $f(6)=f(3+3)=f(3)+f(3)=4$
$\therefore f^{-1}(4)=6\neq9$ (거짓)
ㄷ. $f^{-1}(x)=a, f^{-1}(y)=b$라 하면 $f(a)=x$, $f(b)=y$이므로
$x+y=f(a)+f(b)=f(a+b)$
$\therefore f^{-1}(x+y)=a+b=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

54 답 ①

ㄱ. $(g\circ f)(a)=(g\circ f)(b)$, 즉 $g(f(a))=g(f(b))$이면
함수 g가 일대일함수이므로 $f(a)=f(b)$이다.
또한, 함수 f가 일대일함수이므로 $a=b$이다.
따라서 $g\circ f$는 일대일함수이다. (참)
ㄴ.【반례】집합 $\{1,\ 2\}$에서 정의된 함수 f가
$f(1)=1$, $f(2)=1$이고 집합 $\{1\}$에서 정의된 함수 g가
$g(1)=1$이면 $f(g(x))=x$이지만 g가 f의 역함수는 아니다.
(거짓)
ㄷ.【반례】정의역과 공역이 모두 집합 $\{1,\ 2\}$인 함수 f가
$f(1)=2, f(2)=1$이면 $f(1)=f^{-1}(1)$,
$f(2)=f^{-1}(2)$이지만 $f(1)\neq1$, $f(2)\neq2$이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

55 답 4

조건 (가)에 의해 이차함수 $f(x)$를 $f(x)=ax(x-4)\ (a\neq0)$라 하고 조건 (나)에 대입하면 $ax(x-4)-4(x-4)=0$에서
$(ax-4)(x-4)=0$이다.
이때, 이 이차방정식의 실근의 개수가 1이므로
$ax-4=0$의 근이 $x=4\qquad\therefore\ a=1$



$f(x)=x(x-4)=(x-2)^2-4$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -4)$이므로 $f(f(x))=-4$를 만족시키기 위해서는 $f(x)=2$가 되어야 한다.
즉, $x^2-4x=2$에서 $x^2-4x-2=0$이다.
따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 4이다.

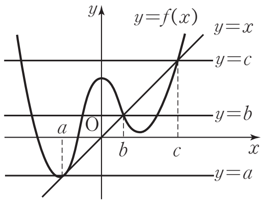
56 답 8

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 세 점에서 만나므로 직선 $y=x$는 점 (a, a)에서 접하는 직선이다.

두 그래프의 교점의 x좌표가 a, b, c이므로 방정식 $f(x)=x$의 세 근이 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$이다.

이때, 방정식 $(f\circ f)(x)=f(x)$에서 $f(x)=t$라 하면

$f(t)=t$에서 $t=a$ 또는 $t=b$ 또는 $t=c$



(i) $t=a$, 즉 $f(x)=a$일 때 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $t=b$, 즉 $f(x)=b$일 때 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=b$는 서로 다른 네 점에서 만난다.

(iii) $t=c$, 즉 $f(x)=c$일 때 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=c$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 방정식 $(f\circ f)(x)=f(x)$를 만족시키는 x의 개수는

$2+4+2=8$

57 답 ③

ㄱ. $(f\circ f)(x)=x$일 때, $f(a)=b$이면

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=a$이므로 $f(b)=a$이다.

따라서 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수 f의 대응관계는 $f(a)=a$이거나 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=b$이면서 $f(b)=a$이어야만 한다.

집합 X의 원소가 다섯 개이므로 원소를 두 개씩 짝을 지어도 짝지어지지 않는 원소가 존재한다.

따라서 $(f\circ f)(x)=x$이면 $f(a)=a$인 집합 X의 원소 a가 존재한다. (참)

ㄴ. $(f\circ f)(x)=f(x)$인 집합 X의 원소를 k라 하면

$(f\circ f)(k)=f(k)$

여기서 $f(k)=b$라 하면 $b\in X$이고 $f(b)=b$

따라서 $(f\circ f)(x)=f(x)$이면 $f(b)=b$인 집합 X의 원소 b가 존재한다. (참)

ㄷ. 【반례】 $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=1$, $f(4)=5$, $f(5)=4$라 하면 $(f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))=f(f(2))=f(3)=1$

에서 $(f\circ f\circ f)(1)=1$이므로 집합 X의 어떤 원소 x에 대하여 $(f\circ f\circ f)(x)=x$이지만 $f(c)=c$인 집합 X의 원소 c는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

58 답 ②

$f(1-x)+f(1-x^2)<0$에서

$f(1-x)<-f(1-x^2)$

$f(1-x)<f(-1+x^2)$ (∵ 조건 (가))

$1-x>-1+x^2$ (∵ 조건 (나))

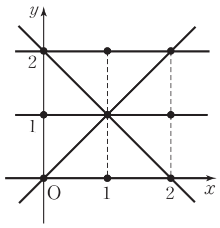
$x^2+x-2<0$, $(x+2)(x-1)<0$

$\therefore -2<x<1$

59 답 22

전체 함수의 개수는 $3\times3\times3=27$

이차함수는 한 직선 위에 있는 세 점을 지날 수 없으므로 세 점을 지나는 일차함수 또는 상수함수의 개수는 그림의 5이다.

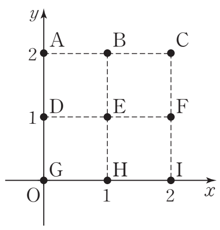


따라서 이차함수 $y=f(x)$의 개수는 $27-5=22$이다.

[다른 풀이]

주어진 좌표평면에서 세 점을 지나는 이차함수이기 위해서는 한 직선 위에 있는 세 점을 지나는 함수의 경우 곡선 형태의 이차함수가 될 수 없다.

또한, y축과 평행한 직선 위의 두 점을 지날 수 없다.



따라서 주어진 9개의 점을 그림과 같이 A, B, C, ⋯, H, I라 하면 (A, D, G) 중 하나를 지나야 하므로 (B, E, H)와 (C, F, I)에서 각각 한 점을 지나는 이차함수는 다음과 같다.

(i) A를 지나는 경우, 나머지 가능한 두 점을 순서쌍으로 묶어 보면

(B, F), (B, I), (E, C), (E, F), (H, C), (H, F), (H, I)의 7가지

(ii) D를 지나는 경우

(B, C), (B, F), (B, I), (E, C), (E, I), (H, C), (H, F), (H, I)의 8가지

(iii) G를 지나는 경우

(B, C), (B, F), (B, I), (E, F), (E, I), (H, C), (H, F)의 7가지

(i)~(iii)에 의하여 구하는 이차함수 $y=f(x)$의 개수는

$7+8+7=22$이다.

60 답 ②

조건 (가)에서 $x_1=0$, $x_2=0$일 때,

$f(0)=f(0)+f(0)$에서 $f(0)=0$

$x_1=1$, $x_2=-1$일 때, $f(0)=f(1)+f(-1)$에서

$f(-1)=-f(1)$

이때, 조건 (나)에 의해

$f(1)\neq0$, $f(-1)\neq0$

따라서 두 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수는

0이 대응할 수 있는 원소는 0의 1가지,

1이 대응할 수 있는 원소는 -2, -1, 1, 2의 4가지,

-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$의 1가지

이므로 구하는 함수 f의 개수는

$1\times4\times1=4$이다.

61 답 10

$f(f(x))=f(x)$가 성립하려면

첫째, $f(a)=a$이면 $f(f(a))=f(a)=a$가 되어 성립한다.

둘째, $f(a)=b(a\neq b)$이면 $f(f(a))=f(b)=b$이어야 하므로 자기 자신에 대응하지 않는 원소(a)는 자기 자신에 대응하는 원소(b)에 대응해야 한다.

(i) 자기 자신에 대응하는 원소가 3개인 경우

함수 $f(x)=x$의 1개

(ii) 자기 자신에 대응하는 원소가 2개인 경우

자기 자신에 대응하지 않는 한 원소를 정하는 방법의 수가 3가지, 그 원소에 대응하는 원소를 정하는 방법의 수가 2가지이므로

$3\times2=6$(개)

(iii) 자기 자신에 대응하는 원소가 1개인 경우

자기 자신에 대응하는 원소를 정하는 방법의 수가 3가지, 나머지 원소는 모두 자기 자신에 대응하는 원소에 대응해야 하므로 $3\times1=3$(개)

(i)~(iii)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$1+6+3=10$

62 답 8

등식 $f(ab)=f(a)+f(b)$에 $a=2$, $b=2$를 대입하면

$f(4)=f(2)+f(2)$

$2=2f(2)$ $\therefore f(2)=1$ ---------- ⓐ

또, $f(ab)=f(a)+f(b)$에 $a=4$, $b=2$를 대입하면

$f(8)=f(4)+f(2)=2+1=3$ ---------- ⓑ

$\therefore f^{-1}(3)=8$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $f(2)$의 값을 구한다.	[40%]
ⓑ $f(8)$의 값을 구한다.	[40%]
ⓒ $f^{-1}(3)$의 값을 구한다.	[20%]

63 답 1

$y=f(3x-2)$에서 x, y를 서로 바꾸어 쓰면

$x=f(3y-2)$이다. ---------- ⓐ

양변에 f^{-1}를 취하면 $f^{-1}(x)=3y-2$

이때, $f^{-1}(x)=g(x)$이므로 $g(x)=3y-2$

따라서 구하는 역함수는 $y=\frac{1}{3}g(x)+\frac{2}{3}$이다. ---------- ⓑ

즉, $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$이므로 $a+b=1$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ x, y를 바꾼다.	[30%]
ⓑ 역함수를 구한다.	[50%]
ⓒ $a+b$의 값을 구한다.	[20%]

64 답 42

(i) $n=3$일 때, X에서 X로의 함수의 개수는 $3^3=27$이고, X에서 X로의 상수함수의 개수는 3이므로

$f(3)=27-3=24$ ---------- ⓐ

(ii) $n=4$일 때, X에서 X로의 일대일대응의 개수는 $4\times3\times2\times1=24$이고, 1이 1에 대응되는 X에서 X로의 일대일대응의 개수는 $3\times2\times1=6$이므로

$g(4)=24-6=18$ ---------- ⓑ

(i), (ii)에 의하여 $f(3)+g(4)=24+18=42$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $f(3)$의 값을 구한다.	[40%]
ⓑ $g(4)$의 값을 구한다.	[40%]
ⓒ $f(3)+g(4)$의 값을 구한다.	[20%]

65 답 ④

함수 f가 X에서 X로의 일대일대응이므로

$\{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

조건 (가)의 $f(2)-f(3)=f(4)-f(1)=f(5)$에서

$f(5)>0$이므로 $f(2)>f(3)$, $f(4)>f(1)$이고

조건 (나)에서 $f(1)<f(2)<f(4)$이므로

$f(3)<f(1)<f(2)<f(4)$이다.

즉, $f(2)-f(3)\geq2$이고, $f(2)<f(4)$이므로

$f(2)\leq4$이다.

따라서 $f(2)-f(3)\leq3$이므로 $f(5)=2$ 또는 $f(5)=3$

(i) $f(5)=2$인 경우

$f(3)<f(1)<f(2)<f(4)$에 의하여

$f(3)=1$, $f(1)=3$, $f(2)=4$, $f(4)=5$이다.

그런데 $f(5)=2$, $f(2)-f(3)=4-1=3$이므로 모순이다.

(ii) $f(5)=3$인 경우

$f(3)<f(1)<f(2)<f(4)$에 의하여

$f(3)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(4)=5$이다.

$\therefore f(2)+f(5)=4+3=7$

66 답 ③

함수 $g(x)$는 자연수 x를 4로 나눈 나머지이므로 함수 $g(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이다. 이때, 다음과 같이 m의 값에 따라서 함수 $(g\circ f)(x)$의 치역을 구하자.

(ⅰ) $m=1$인 경우, 함수 $f(x)=x$이므로
합성함수 $(g\circ f)(x)=g(x)$이다.
따라서 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은
$\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이다.

(ⅱ) $m=2$인 경우, 함수 $f(x)=2x$이므로
합성함수 $(g\circ f)(x)=(2x$를 4로 나눈 나머지$)$이다.
그런데 $2x$가 2의 배수이고 2의 배수를 4로 나눈 나머지는 0 또는 2이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0,\ 2\}$이다.

(ⅲ) $m=3$인 경우, 함수 $f(x)=3x$이므로
합성함수 $(g\circ f)(x)=(3x$를 4로 나눈 나머지$)$이다.
그런데 $3x$는 3의 배수이고 3의 배수를 4로 나눈 나머지는 0 또는 1 또는 2 또는 3이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은
$\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이다.

(ⅳ) $m=4$인 경우, 함수 $f(x)=4x$이므로
합성함수 $(g\circ f)(x)=(4x$를 4로 나눈 나머지$)$이다.
그런데 $4x$가 항상 4의 배수이므로 4로 나눈 나머지는 0이다.
즉, 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0\}$이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 m의 값이 4의 배수가 아닌 경우에는
함수 $(g\circ f)(x)$의 치역의 원소의 개수가 2 이상이고 4의 배수인 경우에는 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0\}$으로 원소의 개수가 1이다.

따라서 치역의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값은 4이다.

67 답 ②

조건 (다)에 의하여 함수 $f\circ g\circ f$는 일대일대응이므로 두 함수 f, g도 모두 일대일대응이다.

이때, $g(2)=3$이고 조건 (나)에서 $g(x)=x$인 $x\in B$가 적어도 하나 존재하므로 가능한 경우는 $x=4$ 밖에 없다.

$\therefore\ g(4)=4$

조건 (가)에서 $(f\circ g)(2)=5$이고, 조건 (다)에서

$(f\circ g\circ f)(4)=(f\circ g)(f(4))=5$이므로

$f(4)=2$

같은 방법으로 하면

$(f\circ g)(4)=2$에서 $f(1)=4$

일대일대응에 의하여 나머지 대응은 $f(2)=3$, $g(3)=2$, $g(5)=1$이다.

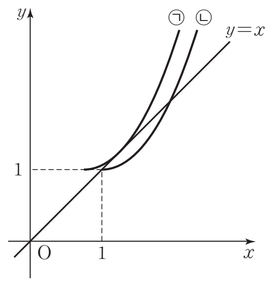
$\therefore\ f(1)+g(3)=4+2=6$

68 답 ②

함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

이때, $f(x)=x^2-2kx+k^2+1=(x-k)^2+1$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 항상 점 $(k,\ 1)$을 지난다.



그림에서 ㉠과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 접할 때의 k의 값을 a, ㉡과 같이 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=x$ 위에 있을 때의 k의 값을 b라 하면 $a<k\le b$일 때 두 그래프는 서로 다른 두 점에서 만나므로 k의 최댓값은 b이다.

㉡일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1-2b+b^2+1=1$에서

$(b-1)^2=0$

$\therefore\ b=1$

따라서 k의 최댓값은 1이다.

69 답 16

함수 f의 함숫값은

$f(9)=f(72)=2$, $f(18)=f(81)=4$, $f(27)=f(90)=6$,

$f(36)=f(99)=1$, $f(45)=3$, $f(54)=5$, $f(63)=0$이다.

이때, 함수 $f(n)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 함수 f는 일대일함수이면서 공역과 치역이 같아야 한다. 즉, 정의역 X의 원소가 공역 Y의 원소 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6에 각각 하나씩 대응되어야 한다.

$f(n)=0$을 만족시키는 n의 값은 63으로 1개

$f(n)=1$을 만족시키는 n의 값은 36, 99로 2개

$f(n)=2$를 만족시키는 n의 값은 9, 72로 2개

$f(n)=3$을 만족시키는 n의 값은 45로 1개

$f(n)=4$를 만족시키는 n의 값은 18, 81로 2개

$f(n)=5$를 만족시키는 n의 값은 54로 1개

$f(n)=6$을 만족시키는 n의 값은 27, 90으로 2개

따라서 함수 f의 역함수가 존재하기 위한 집합 X의 개수는

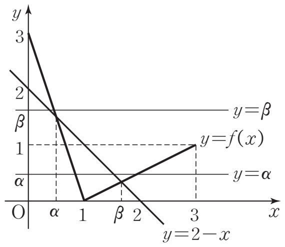
$1\times2\times2\times1\times2\times1\times2=16$이다.

70 답 ③

$f(f(x))=2-f(x)$에서 $f(x)=t$라 하면

$f(t)=2-t$ …㉠

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2-x$의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 방정식 ㉠의 해는 $t=\alpha$ 또는 $t=\beta$이다.



즉, $f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$

이때, $0<\alpha<1<\beta<2$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\beta$는 한 점에서 만난다.

따라서 방정식 $f(f(x))=2-f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

[다른 풀이]

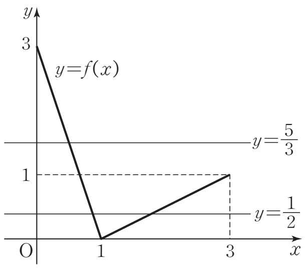
$f(x)=\begin{cases} -3x+3 & (0\le x<1) \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & (1\le x\le 3) \end{cases}$ 이므로 $f(x)=t\ (0\le t\le 3)$

라 하면 $f(f(x))=2-f(x)$에서 $f(t)=2-t$

(i) $0\le t<1$일 때 $-3t+3=2-t$ $\quad\therefore t=\frac{1}{2}$

(ii) $1\le t\le 3$일 때 $\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}=2-t$ $\quad\therefore t=\frac{5}{3}$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=\frac{5}{3}$



그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{5}{3}$는 한 점에서 만나므로 방정식 $f(f(x))=2-f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

71 답 ⑤

ㄱ. $f(11)=f(10)+1=f(5)+1=f(4)+2$

$\qquad=f(2)+2=f(1)+2=3$ (참)

ㄴ. 자연수 a에 대하여 $n=2^a$이면

$f(2^a)=f(2^{a-1})=\cdots=f(2)=f(1)=1$이므로

$f(2^a+1)=f(2^a)+1=1+1=2$

즉, 자연수 m, $k\ (k<m)$에 대하여

$f(2^m+2^k)=f(2^k(2^{m-k}+1))=f(2^{m-k}+1)$

$\qquad=f(2^{m-k})+1=1+1=2$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의해 $f(n)=2$인 자연수 n은 2^m+1 또는 2^m+2^k 꼴의 수이다.

(i) $n=2^m+1$일 때

$n=2^m+1\le 50$에서 $1\le m\le 5$

(ii) $n=2^m+2^k$일 때,

$n=2^m+2^k\le 50$에서 $1\le k<m\le 5$ …㉠

ⓘ $m=5$일 때, $k=1, 2, 3, 4$의 4개

ⓘⓘ $m=4$일 때, $k=1, 2, 3$의 3개

ⓘⓘⓘ $m=3$일 때, $k=1, 2$의 2개

ⓘⓥ $m=2$일 때, $k=1$의 1개

따라서 ㉠을 만족시키는 두 자연수 k, m의 순서쌍 (k, m)의 개수는 $4+3+2+1=10$이다.

(i), (ii)에 의하여 $f(n)=2$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 $5+10=15$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

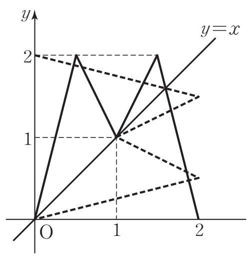
72 답 ⑤

$y=f(x)$ … ㉠를 $f(f(x))=x$에 대입하면

$f(y)=x$ … ㉡

따라서 방정식 $f(f(x))=x$의 근은 두 식 ㉠, ㉡을 연립한 방정식의 근과 같다.

이때 ㉡의 그래프는 $y=f(x)$를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음과 같다.



그림에서 $y=f(x)$와 $f(y)=x$의 교점의 개수는 9이므로 방정식 $f(f(x))=x$의 서로 다른 실근의 개수는 9이다.

73 답 15

$h(x)=f(x)+g(x)$ …㉠에 x 대신 $h(x)$를 대입하면

$h(h(x))=f(h(x))+g(h(x))=g(x)+f(x)=h(x)$

$\therefore h(h(x))=h(x)$

이때, 조건 (가)에서 $h(x)$는 일대일대응이므로 $h(x)=x$

따라서 조건 (나)에 의해 $f(h(x))=f(x)=g(x)$

㉠에 x 대신 10, 20을 대입하면

$h(10)=f(10)+g(10)=2f(10)=10$

$h(20)=f(20)+g(20)=2g(20)=20$

$\therefore f(10)+g(20)=\frac{1}{2}\times(10+20)=15$

74 답 ⑤

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 점 $(8, 8)$에 대하여 대칭이고
점 $(8, 8)$은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 $y=g(x)$의 그래프도 점 $(8, 8)$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프를 직선 $x+y=16$에 대하여 대칭이동시키는 것은 다음 3단계의 이동, 즉

(ⅰ) $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -8만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 후

(ⅱ) 그 도형을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하고

(ⅲ) (ⅱ)의 이동된 도형을 다시 x축의 방향으로 8만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것과 같다.

$$y=f(x) \to y+8=f(x+8) \quad \leftarrow \text{(i)}$$
$$\to -x+8=f(-y+8) \quad \leftarrow \text{(ii)}$$
$$\to -x+16=f(-y+16) \leftarrow \text{(iii)}$$

즉, $-y+16=f^{-1}(-x+16)$이므로

$y=16-f^{-1}(16-x)$ ⋯㉠

한편, $y=f(x)$의 그래프는 점 $(8, 8)$에 대하여 대칭이므로 $f(x)=16-f(16-x)$, 즉

$y=16-f(16-x)$

x와 y를 서로 바꾸면 $x=16-f(16-y)$

y에 대하여 풀면 $y=16-f^{-1}(16-x)$

$\therefore g(x)=16-f^{-1}(16-x)$ ⋯㉡

㉠과 ㉡에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $x+y=16$에 대하여 대칭이동시킨 것이 $y=g(x)$의 그래프이므로 두 그래프는 직선 $x+y=16$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $(f \circ f)(a)=a$에서 $f(a)=f^{-1}(a)$, 즉 $f(a)=g(a)$이므로 실수 a의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표의 개수와 같다.
ㄴ에서 두 그래프는 직선 $x+y=16$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점의 개수는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x+y=16$의 교점의 개수와 같다. $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x+y=16$의 교점의 개수는 5이므로 $(f \circ f)(a)=a$를 만족시키는 실수 a의 개수는 5이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

일등급 UP

＊점 (a, b)에 대하여 대칭이동

점 (a, b)에 대하여 대칭이동
⇨ x 대신 $2a-x$, y 대신 $2b-y$를 대입한다.

$$y=f(x) \xrightarrow[\text{대칭이동}]{\text{점 }(a,\,b)\text{에 대하여}} 2b-y=f(2a-x)$$

75 답 288

함수 $f: X \longrightarrow Y$는 일대일함수이므로 가능한 함수의 개수는 $4\times3\times2=24$이다.
또한, 합성함수 $g \circ f: X \longrightarrow Z$의 치역이 Z이므로
$\{g(f(1)), g(f(2)), g(f(3))\}=\{1, 2\}$
따라서 원소 $g(f(1)), g(f(2)), g(f(3))$이 $\{1, 2\}$에 대응하는 함수의 개수는 $2\times2\times2=8$이다.
그런데 세 원소 모두 1에 대응하거나 모두 2에 대응할 때 치역은 Z가 아니므로 가능한 함수의 개수는 $8-2=6$이다.
이때, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$의 원소 중 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응되지 않은 나머지 원소 하나는 1 또는 2 중에 어떤 값이나 가능하므로 구하는 순서쌍 (f, g)의 개수는 $24\times6\times2=288$이다.

[다른 풀이]

하나의 함수 f에 대하여 가능한 함수 g의 개수를 구해 보자.
예를 들어 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$일 때,
합성함수 $g \circ f: X \longrightarrow Z$의 치역이 Z이어야 한다.
즉, $\{g(1), g(2), g(3)\}=\{1, 2\}$
위의 조건을 만족시키는 경우는
$g(1)=g(2)=1$, $g(3)=2$ 또는
$g(1)=g(2)=2$, $g(3)=1$ 또는
$g(1)=g(3)=1$, $g(2)=2$ 또는
$g(1)=g(3)=2$, $g(2)=1$ 또는
$g(2)=g(3)=1$, $g(1)=2$ 또는
$g(2)=g(3)=2$, $g(1)=1$
의 모두 6가지 경우이다.
그런데 위의 각각의 경우에 대하여 $g(4)$는 1 또는 2 중 아무 값이나 가능하므로 구하는 순서쌍 (f, g)의 개수는
$24\times6\times2=288$이다.

01 답 ①

$\frac{a}{x}+\frac{b}{x-2}=\frac{4}{x(x-2)}$의 양변에 $x(x-2)$를 곱하여 정리하면

$a(x-2)+bx=4$, $(a+b)x-2a=4$

위 식은 x에 대한 항등식이므로 $a+b=0$, $2a=-4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

$\therefore ab=-4$

02 답 8

유리함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프는 유리함수

$y=\frac{3}{x-4}+5$의 그래프이다.

이때, 유리함수 $y=\frac{3}{x-4}+5$의 그래프가 점 $(5,\ a)$를 지나므로

$a=\frac{3}{5-4}+5$에서 $a=8$

03 답 ④

주어진 그림에서 점근선이 $x=-1$, $y=2$이므로

$y=\frac{k}{x+1}+2$ $(k\neq0)$라 하면 그래프가 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{-2+1}+2$ $\quad\therefore k=2$

따라서 $y=\frac{2}{x+1}+2=\frac{2x+4}{x+1}$이고 이 식이

$y=\frac{ax+4}{bx+c}$와 같으므로 $a=2$, $b=1$, $c=1$

$\therefore a+b+c=4$

[다른 풀이]

$y=\frac{ax+4}{bx+c}$의 그래프의 점근선은 $x=-\frac{c}{b}$, $y=\frac{a}{b}$인데

주어진 그래프의 점근선이 $x=-1$, $y=2$이므로

$-\frac{c}{b}=-1$, $\frac{a}{b}=2$ $\quad\therefore b=c$, $b=\frac{1}{2}a \cdots$ ㉠

이때, $y=\frac{ax+4}{bx+c}$의 그래프가 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{-2a+4}{-2b+c}$에서 $-2a+4=0$ $\quad\therefore a=2$

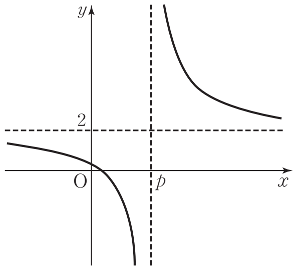
㉠에 의하여 $b=c=1$이므로 $a+b+c=4$

04 답 3

주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로

점근선의 방정식은 $x=p$, $y=2$이다.

이때, $p\leq0$이면 $y=\frac{5}{x-p}+2$의 그래프는 반드시 제 3 사분면을 지나므로 $p>0$이다.



즉, $p>0$일 때 $y=\frac{5}{x-p}+2$의 그래프는 $x>p$인 범위에서 제 1 사분면만을 지나고 $x<p$일 때 제 3 사분면을 지나지 않기 위해서는 $x=0$일 때 y의 값은 0 이상이 되어야 하므로

$\frac{5}{-p}+2\geq0$에서 $p\geq\frac{5}{2}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 p의 최솟값은 3이다.

05 답 2

유리함수 $y=\frac{2x-1}{x-a}=\frac{2(x-a)+2a-1}{x-a}=\frac{2a-1}{x-a}+2$의

그래프의 두 점근선은 $x=a$, $y=2$이고 주어진 유리함수의 그래프와 그 역함수의 그래프가 일치하려면 두 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.

즉, 두 점근선의 교점이 $(a,\ 2)$이므로 $a=2$이다.

[다른 풀이]

함수 $y=\frac{2x-1}{x-a}$ $(x\neq a,\ y\neq2)$의 역함수를 구하면

$x=\frac{2y-1}{y-a}$ $(x\neq2,\ y\neq a)$에서

$x(y-a)=2y-1, (x-2)y=ax-1$ $\quad\therefore y=\frac{ax-1}{x-2}$

이때, $y=\frac{2x-1}{x-a}$과 $y=\frac{ax-1}{x-2}$의 그래프가 일치하므로 $a=2$

06 답 ④

$f(x)=\frac{x+1}{2x-1}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$이고,

그래프는 두 점근선의 교점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

$p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$이다.

$\therefore p+q=1$

일등급 UP

*** 유리함수의 그래프의 점근선**

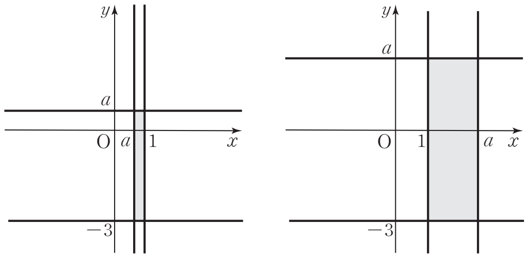
유리함수 $y=\frac{cx+d}{ax+b}$ $(a\neq0,\ ad-bc\neq0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{a}$이고, 그래프는 두 점근선의 교점 $\left(-\frac{b}{a},\ \frac{c}{a}\right)$에 대하여 대칭이다.

07 답 ⑤

유리함수 $y=\dfrac{ax}{x-1}$의 그래프의 점근선은 $x=1$, $y=a$이고

유리함수 $y=\dfrac{1-3x}{x-a}$의 그래프의 점근선은 $x=a$, $y=-3$이므로

$0<a<1$, $a>1$인 두 가지 경우로 나누어 그려보면 다음과 같다.



(i) $0<a<1$　　　　(ii) $a>1$

(i) $0<a<1$일 경우

넓이는 21이 될 수 없다.

(ii) $a>1$일 경우

$(a-1)(a+3)=21$에서

$a^2+2a-24=0$

$(a-4)(a+6)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>1$)

(i), (ii)에 의하여 양수 a의 값은 4이다.

> 일등급 UP
>
> **＊$0<a<1$일 때 직사각형의 넓이**
>
> $0<a<1$일 때 구하는 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $1-a$, $a+3$이다.
> 이때, $0<1-a<1$이고 $3<a+3<4$이므로 $(a+3)(1-a)<4$에서 $0<a<1$일 때 구하는 직사각형의 넓이는 21이 될 수 없다.

08 답 2

함수 $y=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+2$의 그래프의 두 점근선의 교점이

점 A$(1, 2)$이므로 점 A가 원점에 오도록 함수 $y=\dfrac{2x}{x-1}$의

그래프와 점 A$(1, 2)$를 평행이동하면 구하는 최솟값은

함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프 위의 점 P′과 원점 O 사이의 거리의 최솟값

과 같다.

이때, 점 P′의 좌표를 $\left(a, \dfrac{2}{a}\right)$라 하면

$\overline{\mathrm{OP'}}=\sqrt{a^2+\dfrac{4}{a^2}}$이고 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의

관계에 의하여

$a^2+\dfrac{4}{a^2}\ge 2\sqrt{a^2\times\dfrac{4}{a^2}}=4$에서

$\overline{\mathrm{OP'}}=\sqrt{a^2+\dfrac{4}{a^2}}\ge\sqrt{4}=2$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

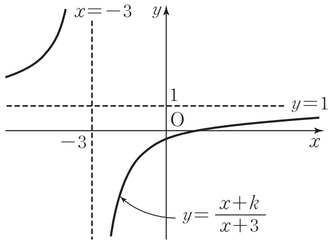
09 답 ②

$y=\dfrac{x+k}{x+3}=\dfrac{x+3+k-3}{x+3}=\dfrac{k-3}{x+3}+1$의 그래프의 두 점근선은

$x=-3$, $y=1$이다.

(i) $k-3>0$, 즉 $k>3$일 때 주어진 함수의 그래프는 제 1, 2, 3 사분면만 지난다.

(ii) $k-3<0$, 즉 $k<3$일 때 주어진 함수의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 그래프는 그림과 같아야 한다.



즉, $x=0$일 때, $y<0$이어야 하므로 $\dfrac{k}{3}<0$에서 $k<0$

(i), (ii)에 의하여 정수 k의 최댓값은 -1이다.

10 답 1

$y=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+1$의 그래프를

x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=-\dfrac{1}{x-m+1}+1+n$의 그래프가 된다.

이 그래프가 $y=\dfrac{-x+1}{x-2}=\dfrac{-(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-1$의 그래프와 일치하므로 $-m+1=-2$, $1+n=-1$에서 $m=3$, $n=-2$

$\therefore m+n=1$

11 답 ⑤

$y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=1$, $y=2$의 교점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 ±1인 직선에 대하여 대칭이다.

즉, 두 직선 $y=x+m$, $y=-x+n$은 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=1+m$, $2=-1+n$에서 $m=1$, $n=3$　$\therefore m+n=4$

12 답 2

$f(x)=\dfrac{x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$f(2)=\dfrac{2+b}{2+a}=3$　　$\therefore 3a-b=-4$ ⋯ ㉠

또, 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(3, 2)$를 지난다.

$f(3)=\dfrac{3+b}{3+a}=2$　　$\therefore 2a-b=-3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=2$

13 답 ③

$f(h(x))=g(x)$에 $x=3$을 대입하면 $f(h(3))=g(3)$이다.

$f(h(3))=\dfrac{2h(3)+1}{h(3)-1}$, $g(3)=\dfrac{3-1}{3+1}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{2h(3)+1}{h(3)-1}=\dfrac{1}{2}$에서 $h(3)=-1$

14 답 ⑤

$f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+2$이고

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{2\left(\dfrac{2x-3}{x-2}\right)-3}{\dfrac{2x-3}{x-2}-2}=x$이므로

$y=(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))=f(x)=\dfrac{1}{x-2}+2$

따라서 $y=f(x)$의 두 점근선은 $x=2$, $y=2$이고, 두 점근선의 교점은 $(2, 2)$이므로 $a=2$, $b=2$ $\quad\therefore a+b=4$

15 답 ④

$y=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+1$이므로

$y=\dfrac{x+2}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때, 직선 $y=mx+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$을 지나므로

함수 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$의 그래프가 직선 $y=mx+1$과 만나지 않으려면

(i) 직선이 $y=1$일 때, $m=0$

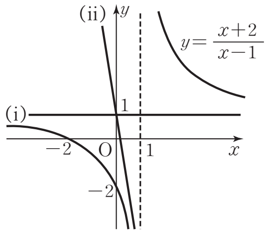
(ii) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$와 $y=mx+1$에서

$\dfrac{x+2}{x-1}=mx+1$

즉, $mx^2-mx-3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=m^2+12m<0$, $m(m+12)<0$

$\therefore -12<m<0$



(i), (ii)에서 구하는 실수 m의 값의 범위는 $-12<m\le 0$이므로 구하는 정수 m은 $-11, -10, \cdots, -1, 0$의 12개이다.

16 답 12

점 $\mathrm{P}(a, b)$는 유리함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$b=\dfrac{3}{a}$에서 $ab=3$ $(a>0, b>0)$

또, 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 직선 $x+y=0$ 사이의 거리가 3이므로

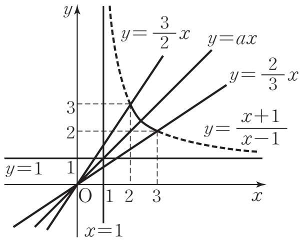
$\dfrac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3$에서 $a+b=3\sqrt{2}$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(3\sqrt{2})^2-2\times 3=12$

17 답 ④

$y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

따라서 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



$y=ax$의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 그림에서

두 그래프가 만나기 위한 a의 값의 범위는 $\dfrac{2}{3}\le a\le\dfrac{3}{2}$

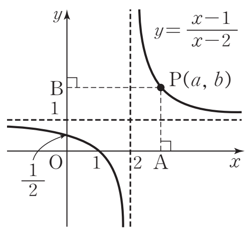
따라서 $M=\dfrac{3}{2}$, $m=\dfrac{2}{3}$이므로 $M-m=\dfrac{5}{6}$

18 답 5

$y=\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+1$ $(x>2)$이므로

$y=\dfrac{x-1}{x-2}$ $(x>2)$의 그래프는 그림과 같다. 즉, $\overline{\mathrm{PA}}=b=\dfrac{1}{a-2}+1$,

$\overline{\mathrm{PB}}=a$이므로



$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=a+\dfrac{1}{a-2}+1$

$=a-2+\dfrac{1}{a-2}+3$

이때, $a>2$에서 $a-2>0$, $\dfrac{1}{a-2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a-2+\dfrac{1}{a-2}+3\ge 2\sqrt{(a-2)\times\dfrac{1}{a-2}}+3=5$

$\left(\text{단, 등호는 } a-2=\dfrac{1}{a-2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 5이다.

19 답 5

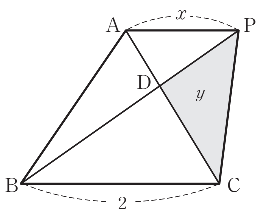
$\overline{\mathrm{AP}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\triangle\mathrm{APD}\backsim\triangle\mathrm{CBD}$

$\therefore \overline{\mathrm{PD}}:\overline{\mathrm{BD}}=x:2$

이때, $\triangle\mathrm{PBC}=\triangle\mathrm{ABC}$이므로

$\triangle\mathrm{PCD}=\dfrac{x}{x+2}\times\triangle\mathrm{ABC}$에서

$y=\dfrac{3x}{x+2}$ $(x\ge 0)$

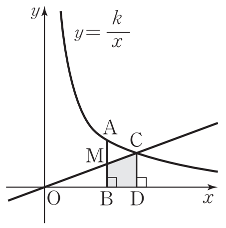


따라서 $a=3$, $b=0$, $c=2$이므로 $a+b+c=3+0+2=5$

20 답 16

함수 $y=\frac{k}{x}(x>0,\ k>0)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발 Q에 대하여 삼각형 OPQ의 넓이는

$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}pq=\frac{k}{2}$로 일정하다.



함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프에서 $\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OCD}=\frac{k}{2}$이고

$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OMB}+\triangle\mathrm{OAM}$ ⋯ ㉠

$\triangle\mathrm{OCD}=\triangle\mathrm{OMB}+\square\mathrm{BDCM}$ ⋯ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $0=\triangle\mathrm{OAM}-\square\mathrm{BDCM}$이므로

$\square\mathrm{BDCM}=\triangle\mathrm{OAM}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{OAB}$ ($\because \overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}$)

$=\frac{k}{4}=4$

$\therefore k=16$

21 답 ④

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a-b)+2b}{a-b}=1+\frac{2b}{a-b}$이므로

$\frac{a+b}{a-b}=2x+1$

$\therefore \frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=2x+1-\frac{1}{2x+1}$

$=\frac{4x^2+4x+1-1}{2x+1}=\frac{4x(x+1)}{2x+1}$

22 답 10

$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=\frac{16}{a+b}$에서 $\frac{3(a+b)}{ab}=\frac{16}{a+b}$

$3(a+b)^2=16ab,\ 3a^2-10ab+3b^2=0$

$(3a-b)(a-3b)=0$

$\therefore 3a=b$ 또는 $a=3b$

따라서 $\left(\frac{b}{a},\ \frac{a}{b}\right)$의 값은 $\left(3,\ \frac{1}{3}\right)$ 또는 $\left(\frac{1}{3},\ 3\right)$이므로

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$ $\quad\therefore 3\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)=3\times\frac{10}{3}=10$

[다른 풀이]

$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=\frac{16}{a+b}$에서 $\frac{3(a+b)}{ab}=\frac{16}{a+b}$

$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{16}{3},\ \frac{a^2+b^2}{ab}+2=\frac{16}{3}$ $\quad\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{10}{3}$

(이하 동일)

23 답 ③

$y=\frac{3-x}{x-1}=\frac{-(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}-1$의 그래프와 평행이동하여 겹쳐지는 함수의 그래프는 $y=\frac{2}{x-p}+q$의 꼴이어야 한다.

ㄱ. $y=\frac{x+3}{x+1}=\frac{x+1+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+1$ (○)

ㄴ. $y=\frac{2x+1}{2x-3}=\frac{x+\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}}=\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)+2}{x-\frac{3}{2}}=\frac{2}{x-\frac{3}{2}}+1$ (○)

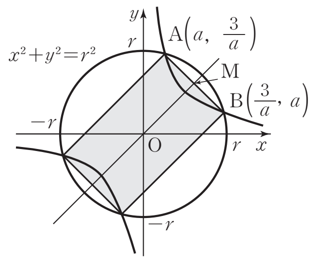
ㄷ. $y=\frac{3x-1}{3x+5}=\frac{x-\frac{1}{3}}{x+\frac{5}{3}}=\frac{\left(x+\frac{5}{3}\right)-2}{x+\frac{5}{3}}=-\frac{2}{x+\frac{5}{3}}+1$ (×)

따라서 $y=\frac{3-x}{x-1}$의 그래프와 평행이동하여 겹쳐지는 함수의 그래프는 ㄱ, ㄴ이다.

24 답 10

함수 $y=\frac{x+1}{x-2}=\frac{3}{x-2}+1$의 그래프의 두 점근선의 교점 $(2,\ 1)$이 원의 중심이므로 원과 함수의 그래프를 모두 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하여 두 점근선의 교점과 원의 중심이 원점이 되도록 하자.

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $x^2+y^2=r^2$이고 함수 $y=\frac{x+1}{x-2}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=\frac{x+3}{x}-1=\frac{3}{x}$이다.



이때, 평행이동한 원과 함수의 그래프의 교점 중 제1사분면에 있는 두 점을 각각 A, B이라 하고 점 A의 좌표를

$\mathrm{A}\left(a,\ \frac{3}{a}\right)\left(a<\frac{3}{a}\right)$이라 하면 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\frac{3}{a},\ a\right)$이다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right),\ \frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)\right)$이므로

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)$이고

$\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a-\frac{3}{a}\right)^2+\left(\frac{3}{a}-a\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(a-\frac{3}{a}\right)^2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a-\frac{3}{a}\right)$ $\left(\because a<\frac{3}{a}\right)$

한편, 삼각형 OAM의 넓이는 $16\times\frac{1}{8}=2$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OM}}\times\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)\times\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a-\frac{3}{a}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{4}\left(a^2-\frac{9}{a^2}\right)=2$$

$(a^2)^2+8a^2-9=0$, $(a^2+9)(a^2-1)=0$ $\quad\therefore a^2=1$

$\therefore r^2=a^2+\frac{9}{a^2}=1+\frac{9}{1}=10$

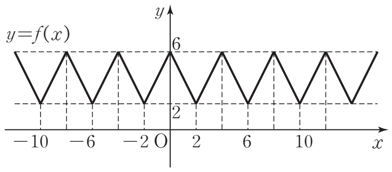
25 답 ③

$$g(x+5)=\frac{f(x+4)}{f(x+4)-1}=\frac{\frac{g(x)}{g(x)-1}}{\frac{g(x)}{g(x)-1}-1}=g(x)\text{이므로}$$

$$g(100)=g(95)=\cdots=g(5)=\frac{f(4)}{f(4)-1}=\frac{4}{4-1}=\frac{4}{3}$$

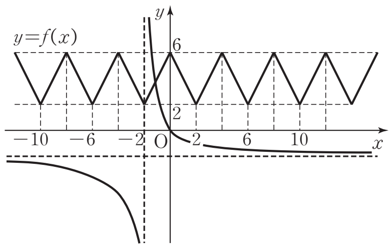
26 답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



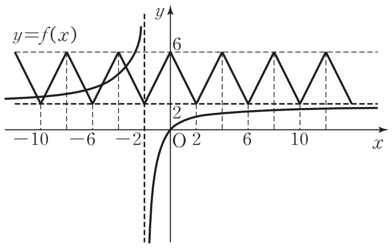
또, $y=\frac{ax}{x+2}=a-\frac{2a}{x+2}$이므로 $y=\frac{ax}{x+2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=a$이다.

(i) $a<0$일 때



따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=\frac{ax}{x+2}$의 그래프의 교점은 유한개이다.

(ii) $a>0$일 때



그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=\frac{ax}{x+2}$의 그래프의 교점의 개수가 무수히 많게 되는 a의 값의 범위는 $2\le a\le 6$

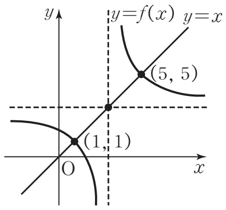
(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 2, 3, 4, 5, 6으로 그 합은 20이다.

27 답 7

조건 (나)에서 $f(f(x))=x$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또한, 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(1, 1)$, $(5, 5)$를 지나므로 그림과 같이 두 점근선의 교점이 $(3, 3)$임을 알 수 있다.



따라서 $f(x)=\frac{3x+b}{x-3}$이고

$f(1)=\frac{3+b}{-2}=1$에서 $b=-5$이므로 $f(x)=\frac{3x-5}{x-3}$

$\therefore f(4)=\frac{3\times4-5}{4-3}=7$

28 답 21

$f(x)=\frac{6x+b}{x-a}=\frac{6(x-a)+6a+b}{x-a}=\frac{6a+b}{x-a}+6$에서

함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 $(a, 6)$이다.

한편, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a, 6)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 $(6, a)$이고,

함수 $y=f(x-a)+b$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로 함수 $y=f(x-a)+b$의 그래프의 두 점근선의 교점은 $(2a, 6+b)$이다.

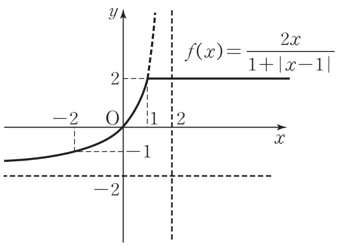
이때, 주어진 조건에 의하여 점 $(6, a)$와 점 $(2a, 6+b)$가 같으므로 $a=3$, $b=-3$

따라서 $f(x)=\frac{6x-3}{x-3}$이므로 $f(4)=\frac{6\times4-3}{4-3}=21$

29 답 ①

$$f(x)=\frac{2x}{1+|x-1|}=\begin{cases}2 & (x\ge1)\\ \frac{2x}{2-x} & (x<1)\end{cases}$$

에서 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, 함수 $y=(f\circ f)(x)=f(f(x))$에서 $f(x)=t$라 하면

$-2<f(x)\le2$이므로 $y=f(t)$ $(-2<t\le2)$이다.

따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)=f(t)$는 $t=2$, 즉 $f(x)=2$인 x에 대하여 최댓값 2를 갖는다.

30 답 4

$h(x)=g(x+a)+2$에서 함수 $h(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $h^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore h^{-1}(x)=f(x-2)-a$

그런데 $h^{-1}(x)=f(x+b)+2$이므로

$a=b=-2$

$\therefore ab=4$

[다른 풀이]

$h(x)=g(x+a)+2$에서

$x=g(h^{-1}(x)+a)+2$

$g(h^{-1}(x)+a)=x-2$

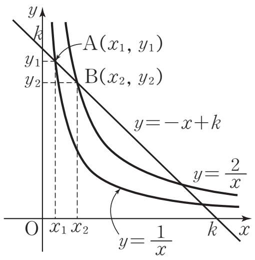
$h^{-1}(x)+a=f(x-2)$

$h^{-1}(x)=f(x-2)-a=f(x+b)+2$

따라서 $a=b=-2$이므로 $ab=4$

31 답 ⑤

직선 $y=-x+k\ (k\geq 3)$가 두 유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 만나는 점 중 y축에 가까운 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$는 다음과 같다.



ㄱ. 직선의 기울기가 -1이므로 $x_2-x_1=y_1-y_2$ (참)

ㄴ. 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$이 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$y_1=\dfrac{1}{x_1}$ $\qquad \therefore x_1y_1=1$

점 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$가 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$y_2=\dfrac{2}{x_2}$ $\qquad \therefore x_2y_2=2$

$\therefore x_1y_1<x_2y_2$ (참)

ㄷ. 두 직선 OA, OB의 기울기를 비교하면

$\dfrac{y_2}{x_2}<\dfrac{y_1}{x_1}$이고 $x_1x_2>0$이므로 양변에 x_1x_2를 곱하면

$x_1y_2<x_2y_1$ (참)

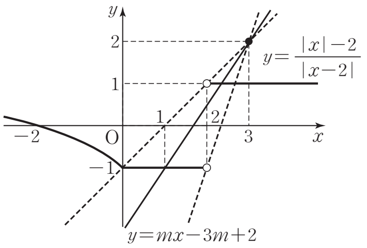
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. $0<x_1<x_2$, $0<y_2<y_1$이므로 $0<x_1y_2<x_2y_1$ (참)

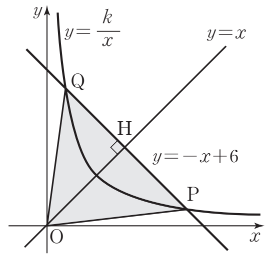
32 답 4

$y=\dfrac{|x|-2}{|x-2|}=\begin{cases} 1 & (x>2) \\ -1 & (0\leq x<2) \\ \dfrac{x+2}{x-2} & (x<0) \end{cases}$ 이므로 함수 $y=\dfrac{|x|-2}{|x-2|}$의 그래프는 다음과 같다.



이때 직선 $y=mx-3m+2=m(x-3)+2$는 점 $(3, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이므로 함수 $y=\dfrac{|x|-2}{|x-2|}$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 직선의 기울기 m의 범위는 $1<m<3$이다. 따라서 $a=1$, $b=3$이므로 $a+b=4$이다.

33 답 ③



원점 O에서 직선 $y=-x+6$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OH와 직선 $y=-x+6$은 서로 수직이므로 기울기의 곱이 -1이어야 한다.

따라서 직선 OH의 방정식은 $y=x$이고, 점 H의 좌표는 $(3, 3)$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ ⋯ ㉠

한편, 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+6$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 선분 OH는 삼각형 OPQ의 중선이고 무게중심 G는 선분 OH를 $2:1$로 내분하는 점이므로 $\mathrm{G}(2, 2)$이다.

점 $\mathrm{G}(2, 2)$가 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$2=\dfrac{k}{2}$ $\qquad \therefore k=4$

이때, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

x_1, x_2는 방정식 $\dfrac{4}{x}=-x+6$, 즉 $x^2-6x+4=0$의 두 근이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=4$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}(x_1-x_2)$이고

$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=6^2-4\times4=20$이므로

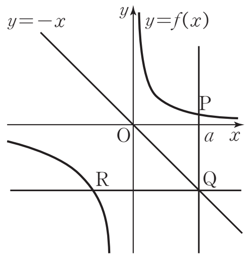
$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{10}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{10}=6\sqrt{5}$

34 답 9

점 P의 x좌표를 a라 하자.

(i) $a>0$일 때



$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ -a)$, $\mathrm{R}\left(-\dfrac{8}{a},\ -a\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=a+\dfrac{2}{a}$, $\overline{\mathrm{QR}}=a+\dfrac{8}{a}$

$$\therefore \triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(a+\frac{8}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{16}{a^2}+10\right)$$
$$\geq\frac{1}{2}\left(2\sqrt{a^2\times\frac{16}{a^2}}+10\right)=9$$

(단, 등호는 $a=2$일 때 성립)

따라서 $a=2$일 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값은 9이다.

(ii) $a<0$일 때

$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{8}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ -a)$, $\mathrm{R}\left(-\dfrac{2}{a},\ -a\right)$이므로 (i)과 같은 방법으로 하면 $a=-2$일 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값은 9이다.

(i), (ii)에 의하여 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값은 9이다.

35 답 12

직사각형의 각 사분면에 속한 부분의 넓이가 제1사분면부터 차례로 3, a, 4, b이고 직사각형의 성질에 의해

$a\times b=3\times4=12$

36 답 ⑤

곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 위의 점 P의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{2}{t}\right)$라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$에서 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(2t,\ \dfrac{4}{t}\right)$이므로

$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{4}{t}\right)$, $\mathrm{D}(2t,\ 0)$이다.

ㄱ. 곡선 위의 점 A의 y좌표가 $\dfrac{4}{t}$이므로 $\dfrac{4}{t}=\dfrac{2}{x}$에서

$x=\dfrac{t}{2}$, 즉 $\mathrm{A}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{4}{t}\right)$

이때, $\overline{\mathrm{BA}}=\dfrac{t}{2}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=2t-\dfrac{t}{2}=\dfrac{3}{2}t$이므로

$\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{AQ}}=1:3$ … ㉠ (참)

ㄴ. 곡선 위의 점 C의 x좌표가 $2t$이므로 $y=\dfrac{2}{2t}=\dfrac{1}{t}$

즉, $\mathrm{C}\left(2t,\ \dfrac{1}{t}\right)$

이때 $\overline{\mathrm{DC}}=\dfrac{1}{t}$, $\overline{\mathrm{CQ}}=\dfrac{4}{t}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{t}$이므로

$\overline{\mathrm{DC}}:\overline{\mathrm{CQ}}=1:3$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $\triangle\mathrm{QAC}\backsim\triangle\mathrm{QBD}$이므로 선분 AC와 선분 BD는 평행하다. (참)

ㄷ. (i) 점 P는 직사각형 OBQD의 대각선 OQ의 중점이므로 대각선 BD의 중점이다. 따라서 점 P는 직선 BD 위의 점이다.

(ii) $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{4}{t}\right)$, $\mathrm{D}(2t,\ 0)$에서 직선 BD의 방정식은

$\dfrac{x}{2t}+\dfrac{y}{\frac{4}{t}}=1$, 즉 $\dfrac{x}{2t}+\dfrac{ty}{4}=1$

직선 $\dfrac{x}{2t}+\dfrac{ty}{4}=1$과 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$를 연립하여 y를 소거하면

$\dfrac{x}{2t}+\dfrac{t}{2x}=1$에서 $x^2-2tx+t^2=0$

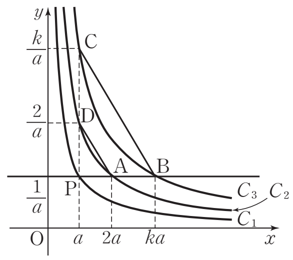
이때, 방정식 $x^2-2tx+t^2=(x-t)^2=0$은

중근을 가지므로 직선 $\dfrac{x}{2t}+\dfrac{ty}{4}=1$은 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 접한다.

(i), (ii)에서 직선 BD는 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 점 P에서 접한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

37 답 ④



그림과 같이 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$이라 하면 네 점 A, B, C, D의 좌표는 $\mathrm{A}\left(2a,\ \dfrac{1}{a}\right)$, $\mathrm{B}\left(ka,\ \dfrac{1}{a}\right)$, $\mathrm{C}\left(a,\ \dfrac{k}{a}\right)$, $\mathrm{D}\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$이다.

ㄱ. (선분 DA의 기울기)$=\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{2}{a}}{2a-a}=-\dfrac{1}{a^2}$

(선분 CB의 기울기)$=\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{k}{a}}{ka-a}=\dfrac{1-k}{(k-1)a^2}=-\dfrac{1}{a^2}$

이므로 선분 DA와 선분 CB는 평행하다. (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{DA}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{CB}}$이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{CB}}}{\overline{\mathrm{DA}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{PA}}}=\dfrac{ka-a}{2a-a}=k-1$

$k=3$이면 $\dfrac{\overline{\mathrm{CB}}}{\overline{\mathrm{DA}}}=3-1=2$에서 $\overline{\mathrm{CB}}=2\overline{\mathrm{DA}}$ (거짓)

ㄷ. $\triangle\mathrm{PAD}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PD}}=\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

38 답 4

점 A의 좌표를 $A\left(t, \frac{1}{t}\right)$이라 하면 점 B의 좌표는 $B\left(\frac{1}{t}, t\right)$이다.

삼각형 OAB가 정삼각형이므로

$\overline{OA}^2=\overline{AB}^2$에서 $t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{t}-t\right)^2$

$t^2+\frac{1}{t^2}=2t^2+\frac{2}{t^2}-4 \qquad \therefore t^2+\frac{1}{t^2}=4$

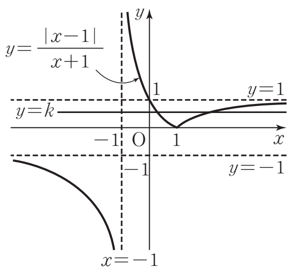
즉, $\overline{OA}^2=4$에서 $\overline{OA}=2$이므로 원의 반지름의 길이는 2이다.

따라서 원의 넓이는 4π이므로 $a=4$

39 답 1

주어진 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=\frac{|x-1|}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다. ⓐ

이때, $y=\frac{|x-1|}{x+1}=\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & (x\ge1) \\ \frac{-x+1}{x+1} & (x<1) \end{cases}$ 이므로 그래프는 다음과 같다.



ⓑ

따라서 함수 $y=\frac{|x-1|}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2이려면 $0<k<1$이어야 한다.

즉, $a=0$, $b=1$이므로 $a^2+b^2=1$ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 방정식의 실근과 그래프 사이의 관계를 파악한다.	[30%]
ⓑ x의 범위에 따라 $y=\frac{|x-1|}{x+1}$의 그래프를 그린다.	[40%]
ⓒ k의 값의 범위를 구하고 a^2+b^2의 값을 구한다.	[30%]

40 답 11

$f(x)=\frac{bx+c}{a-x}=\frac{-b(a-x)+ab+c}{a-x}=\frac{ab+c}{a-x}-b$의

그래프의 점근선의 방정식이 $x=a$, $y=-b$이므로

$a=d$ ⋯ ㉠이고 $-b=-3$에서 $b=3$이다. ⓐ

또, $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(1, \frac{1}{4}\right)$을 지나므로

$f(1)=\frac{1}{4}$에서

$\frac{1}{4}=\frac{b+c}{a-1}$, $a-1=4b+4c$

$\therefore a-4c=13$ ⋯ ㉡

$f^{-1}(1)=\frac{7}{4}$에서 $f\left(\frac{7}{4}\right)=1$이므로

$1=\frac{\frac{7}{4}b+c}{a-\frac{7}{4}}=\frac{7b+4c}{4a-7}$

$4a-7=7b+4c$

$\therefore a-c=7$ ⋯ ㉢ ⓑ

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=5$, $c=-2$, $d=5$

$\therefore a+b+c+d=11$ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ a, d 사이의 관계식과 b의 값을 구한다.	[30%]
ⓑ a, c 사이의 관계식을 구한다.	[40%]
ⓒ 연립방정식을 풀고 $a+b+c+d$의 값을 구한다.	[30%]

41 답 12

점 P의 좌표를 $P\left(a, \frac{2}{a}+1\right)$ $(a>0)$, 선분 OA의 중점을 $M(1, 0)$이라 하면 삼각형의 중선정리에 의해

$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{OM}^2)$

$=2\left\{(a-1)^2+\left(\frac{2}{a}+1\right)^2+1^2\right\}$

$=2\left\{a^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2-2\left(a-\frac{2}{a}\right)+3\right\}$

$=2\left\{\left(a-\frac{2}{a}\right)^2+4-2\left(a-\frac{2}{a}\right)+3\right\}$

$=2\left\{\left(a-\frac{2}{a}\right)^2-2\left(a-\frac{2}{a}\right)+7\right\}$ ⓐ

이때, $a-\frac{2}{a}=A$라 하면

$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=2(A^2-2A+7)=2\{(A-1)^2+6\}$

이것은 축이 $A=1$이고 이차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 $A=1$일 때, 최솟값 12를 갖는다. ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 점 P의 x좌표를 a라 하고 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$을 a에 대하여 나타낸다.	[60%]
ⓑ $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$의 최솟값을 구한다.	[40%]

일등급 UP

*** $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$의 최솟값**

$A=1$에서 $a-\frac{2}{a}=1$, 즉 $a^2-a-2=0$

$(a-2)(a+1)=0 \qquad \therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 점 P의 좌표가 $(2, 2)$일 때 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$의 최솟값은 12이다.

42 답 ⑤

유리함수 $y=\frac{3}{x-5}+k$의 두 점근선은 $x=5$, $y=k$이다.

즉, 유리함수 $y=\frac{3}{x-5}+k$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(5, k)$를 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $k=5$

43 답 ①

방정식 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=1$이므로

$g(x)$의 정의에 의해 $f(x)$는 정수가 되어야 한다.

이때, $f(x)=\dfrac{6x+12}{2x-1}=\dfrac{15}{2x-1}+3$이 정수가 되려면 $2x-1$은 15의 약수이어야 한다.

그런데 x가 자연수이므로 $2x-1$도 자연수이고,

$2x-1$은 15의 양의 약수이어야 한다.

즉, $2x-1=1$ 또는 $2x-1=3$ 또는 $2x-1=5$ 또는

$2x-1=15$이므로 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=8$이다.

따라서 서로 다른 자연수 x의 개수는 4이다.

44 답 ③

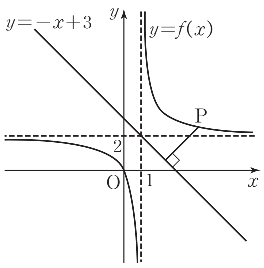
함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점인 $(-a,\ b)$에 대하여 대칭이므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(b,\ -a)$에 대하여 대칭이다.

즉, $(b,\ -a)=(2,\ 1)$에서

$b=2,\ a=-1$

$\therefore\ a+b=(-1)+2=1$

45 답 ④



함수 $y=\dfrac{2}{x-1}+2$의 그래프의 두 점근선은 $x=1,\ y=2$이고

직선 $x+y-3=0$은 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 이 유리함수의 그래프는 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이다. 따라서 $x>1$인 경우만 생각해도 된다.

유리함수 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}+2$의 그래프 위를 움직이는 점을

$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{2}{t-1}+2\right)$라 하면 점 P와 직선 $x+y-3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{\left|t+\dfrac{2}{t-1}+2-3\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|t-1+\dfrac{2}{t-1}\right|}{\sqrt{2}}$이고 $t>1$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(t-1)+\dfrac{2}{t-1}\geq 2\sqrt{(t-1)\times\dfrac{2}{t-1}}=2\sqrt{2}$이다.

따라서 구하는 거리의 최솟값은 $\dfrac{|2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=2$이다.

46 답 ②

두 양수 $a,\ b$에 대하여 두 점 P, Q의 좌표를 각각

$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{4}{a}\right),\ \mathrm{Q}\left(-b,\ -\dfrac{4}{b}\right)$라 하면 점 A, B, C, D의 좌표는

$\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{4}{a}\right),\ \mathrm{C}(-b,\ 0),\ \mathrm{D}\left(0,\ -\dfrac{4}{b}\right)$

이때, 육각형 APBCQD의 넓이를 S라 하면

$S=\square\mathrm{OAPB}+\square\mathrm{OCQD}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{ODA}$

$\quad=a\times\dfrac{4}{a}+b\times\dfrac{4}{b}+\dfrac{1}{2}\times b\times\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{4}{b}$

$\quad=8+2\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)$

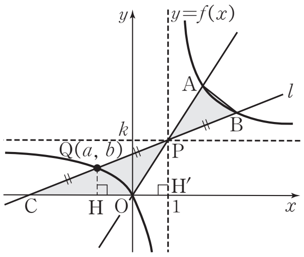
$a>0,\ b>0$이므로 $\dfrac{b}{a}>0,\ \dfrac{a}{b}>0$에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\times\dfrac{a}{b}}=2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\therefore\ S=8+2\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)\geq 8+2\times 2=12$

따라서 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 12이다.

47 답 20



직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$라 하자.

두 삼각형 APB, OPQ는 서로 합동이고, $S_2=2S_1$이므로

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{CQ}}$ ⋯ ㉠

한편, 두 점 Q, P에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 두 삼각형 CQH, CPH′은 닮음비가 1 : 2인 닮은 삼각형이고,

$\mathrm{P}(1,\ k)$이므로 $b=\dfrac{k}{2}=f(a)$

즉, $\dfrac{k}{2}=\dfrac{k}{a-1}+k$이므로 $a=-1$

$\therefore\ \mathrm{Q}\left(-1,\ \dfrac{k}{2}\right)$

또한, ㉠에 의하여 $\mathrm{C}(-3,\ 0)$이고 두 점 C, Q를 지나는

직선 l의 방정식은 $kx-4y+3k=0$이고 원점과 직선 l 사이의 거리가 1이므로

$\dfrac{|3k|}{\sqrt{k^2+16}}=1$에서 $k^2=2$

$\therefore\ 10k^2=20$

48 답 6

$y=\dfrac{bx+a}{x+a}=\dfrac{a-ab}{x+a}+b$의 그래프를 평행이동하면

$y=\dfrac{x+b}{x+6}=\dfrac{b-6}{x+6}+1$의 그래프가 된다.

이때, $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프는 평행이동하여도 k의 값은 같으므로

$a-ab=b-6 \qquad \therefore (a+1)(b-1)=5$

a, b가 자연수이므로 $a+1$, $b-1$은 정수이고

$a+1>1$이므로 $a+1=5$, $b-1=1$에서 $a=4$, $b=2$

$\therefore a+b=4+2=6$

[다른 풀이]

$y=\dfrac{bx+a}{x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{b(x-p)+a}{(x-p)+a}+q=\dfrac{(b+q)x+(a-bp-pq+aq)}{x-p+a}$의 그래프가 된다. 이 그래프가 $y=\dfrac{x+b}{x+6}$의 그래프와 일치하므로

$-p+a=6$, $b+q=1$, $a-bp+q(-p+a)=b$에서

$a-bp+6q=b \cdots$ ㉠

$p=a-6$, $q=1-b$를 ㉠에 대입하면 $a-b(a-6)+6(1-b)=b$

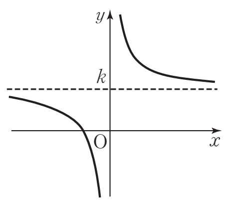
$ab-a+b=6 \qquad \therefore (a+1)(b-1)=5$

a, b가 자연수이므로 $a=4$, $b=2 \qquad \therefore a+b=4+2=6$

49 답 1

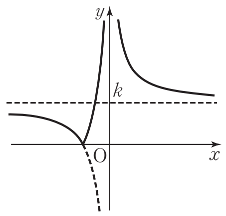
함수 $f(x)=\left|\dfrac{2}{x}+k\right|-k$의 그래프를 다음 순서로 그려보자.

$y=\dfrac{2}{x}+k$



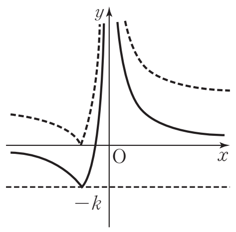
⇩

$y=\left|\dfrac{2}{x}+k\right|$

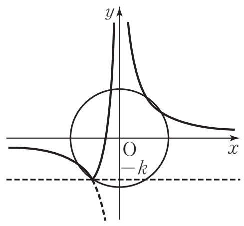


⇩

$y=\left|\dfrac{2}{x}+k\right|-k$



즉, $y=\left|\dfrac{2}{x}+k\right|-k$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프에서 $y<-k$인 부분을 직선 $y=-k$에 대하여 대칭이동한 곡선이다.



한편, 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 원 $x^2+y^2=5$가 만나는 점 중에서 y좌표가 가장 작은 점의 y좌표가 $-k$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 원 $x^2+y^2=5$가 5개의 점에서 만남을 알 수 있다.

$y=\dfrac{2}{x}$에서 $x=\dfrac{2}{y}$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$\dfrac{4}{y^2}+y^2=5$에서 $(y^2)^2-5y^2+4=0$

$(y^2-1)(y^2-4)=0$, $(y-1)(y+1)(y-2)(y+2)=0$

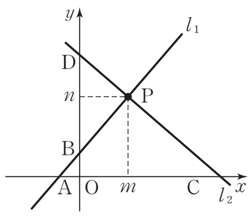
$\therefore y=\pm1$ 또는 $y=\pm2$

이 중 가장 작은 값 -2에 대하여 $-2=-k$이므로 $k=2$

$\therefore f(2)=\left|\dfrac{2}{2}+2\right|-2=1$

50 답 5

함수 $y=\dfrac{nx}{x-m}=\dfrac{mn}{x-m}+n$의 두 점근선 $x=m$, $y=n$의 교점을 P라 하면 P(m, n)이므로 점 P를 지나고 기울기가 1, -1인 직선이 l_1, l_2이다.



그림과 같이 직선 l_1이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 l_2가 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하면 삼각형 PAC와 삼각형 PBD는 닮은 삼각형이고 그 닮음비가 $n : m$이므로

$S_x : S_y=n^2 : m^2$

즉, $4 : 1=n^2 : m^2$

$\therefore n=2m$

이때, m, n은 집합 A의 원소이므로 순서쌍 (m, n)은

$(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$의 5개이다.

51 답 ⑤

ㄱ. 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(a, \frac{2}{a}\right)$라 하면 점 P를 지나고 기울기가 m인

직선 $y=m(x-a)+\frac{2}{a}$가 곡선 $y=\frac{2}{x}$에 접하므로

방정식 $m(x-a)+\frac{2}{a}=\frac{2}{x}$, 즉 $amx^2+(2-a^2m)x-2a=0$

은 중근을 갖는다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2-a^2m)^2+8a^2m=0$이고 $a^2m=t$라 하면

$(2-t)^2+8t=0$에서 $t^2+4t+4=0$, $(t+2)^2=0$

$a^2m=t=-2 \qquad \therefore m=-\frac{2}{a^2}$

따라서 점 P에서 곡선 $y=\frac{2}{x}$에 접하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{2}{a^2}(x-a)+\frac{2}{a}$이고 이 직선과 x축의 교점 A,

y축의 교점 B의 좌표는 각각 $(2a, 0)$, $\left(0, \frac{4}{a}\right)$이므로

점 P는 선분 AB의 중점이다. (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}^2=4a^2+\frac{16}{a^2}\geq 2\sqrt{4a^2\times\frac{16}{a^2}}=16$이므로 선분 AB의

길이의 최솟값은 4이다. (참)

ㄷ. $\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times 2a\times\frac{4}{a}=4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

52 답 16

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1 & (0<x\leq 1)\\ 1-\frac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$ 이므로

(i) $0<a<b\leq 1$일 때

$f(a)=f(b)$에서 $\frac{1}{a}-1=\frac{1}{b}-1$

즉, $a=b$이므로 $a<b$에 모순이다.

(ii) $1<a<b$일 때

$f(a)=f(b)$에서 $1-\frac{1}{a}=1-\frac{1}{b}$

즉, $a=b$이므로 $a<b$에 모순이다.

(iii) $0<a\leq 1<b$일 때

$f(a)=f(b)$에서 $\frac{1}{a}-1=1-\frac{1}{b}$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2 \cdots$ ㉠

이때, ㉠을 변형하면 $\frac{a+b}{2}=ab$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $\frac{a+b}{2}=ab\geq\sqrt{ab}$

$\sqrt{ab}(\sqrt{ab}-1)\geq 0$에서 $ab\geq 1$

즉, $\frac{a+b}{2}\geq 1$

$\therefore f\left(\frac{a+b}{2}\right)=1-\frac{2}{a+b}$

따라서 $2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)$에서

$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=2-\frac{4}{a+b}=2-\frac{\frac{4}{ab}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$이고

$f(a)=\frac{1}{a}-1$이므로

㉠에서 $\frac{1}{b}=2-\frac{1}{a}$을 대입하면

$2-\frac{\frac{4}{a}\left(2-\frac{1}{a}\right)}{2-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}-1$

$2\left(\frac{1}{a}\right)^2-5\left(\frac{1}{a}\right)+3=0$

$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{2}{a}-3\right)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$1+\frac{1}{b}=2 \qquad \therefore b=1$

즉, $a=b=1$이므로 $0<a\leq 1<b$에 모순이다.

따라서 $a=\frac{2}{3}$이고 이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{\frac{2}{3}}+\frac{1}{b}=2$

$\therefore b=2$

(i)~(iii)에 의하여 $12ab=12\times\frac{2}{3}\times 2=16$

06 무리식과 무리함수

문제편 70P

01 답 ②

주어진 무리식의 값이 실수가 되려면

(근호 안)≥ 0, (분모)$\neq 0$을 만족시켜야 한다.

(ⅰ) (근호 안)≥ 0에서 $4-x\geq 0$이고 $x-2\geq 0$

$\therefore 2\leq x\leq 4$

(ⅱ) (분모)$\neq 0$에서 $4-x\neq x-2$ $\quad\therefore x\neq 3$

(ⅰ), (ⅱ)를 모두 만족시키는 정수는 2, 4이므로 구하는 합은 $2+4=6$이다.

02 답 10

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을 $y=\sqrt{a(x-4)}-2$ $(a<0)$라 하면 이 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{-4a}-2$에서 $4=\sqrt{-4a}$, $16=-4a$ $\quad\therefore a=-4$

즉, $y=\sqrt{-4(x-4)}-2=\sqrt{-4x+16}-2$에서

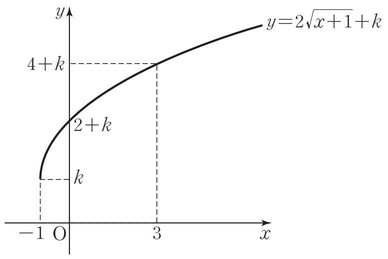
$\sqrt{-4x+16}-2=\sqrt{ax+b}+c$이므로

$a=-4$, $b=16$, $c=-2$

$\therefore a+b+c=(-4)+16+(-2)=10$

03 답 17

$f(x)=2\sqrt{x+1}+k$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0\leq x\leq 3$에서 $f(x)$의 최댓값은 $M=f(3)$이고

최솟값은 $m=f(0)$이므로

$M=2\sqrt{3+1}+k=4+k$, $m=2\sqrt{0+1}+k=2+k$에서

$M+m=(4+k)+(2+k)=6+2k=40$, $2k=34$

$\therefore k=17$

04 답 16

함수 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프가 점 $(-2, 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{-2a}$에서 $a=-2$

$y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{-2x}+b$

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{-2x}+b$ ⋯ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(-8, 4)$를 지나므로

$-4=\sqrt{16}+b$에서 $b=-8$

$\therefore ab=16$

05 답 8

$g(1)=\sqrt{1+3}+1=3$, $f(3)=3^2-1=8$이므로

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=8$

06 답 5

$f(x)=\sqrt{ax+b}$이므로 $f(3)=3$에서 $\sqrt{3a+b}=3$

$\therefore 3a+b=9$ ⋯ ㉠

이때, $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로 $g(5)=11$에서

$f(11)=5$, $\sqrt{11a+b}=5$

$\therefore 11a+b=25$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=5$

07 답 ④

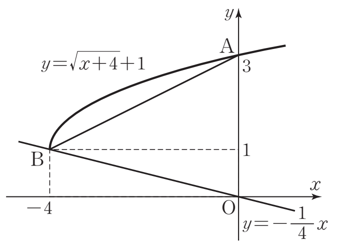
무리함수 $y=\sqrt{\dfrac{x-b}{a}}$의 역함수는 $y=ax^2+b$ $(x\geq 0)$이고 무리함수의 그래프와 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 역함수 $y=ax^2+b$의 그래프와 직선 $y=x$가 접할 때를 구하는 것과 같다.

$ax^2+b=x$에서 $ax^2-x+b=0$이고 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=1-4ab=0$

$\therefore ab=\dfrac{1}{4}$

08 답 ⑤

함수 $y=\sqrt{x+4}+1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 그림과 같다.

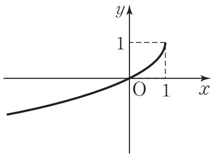


이때, $y=\sqrt{x+4}+1$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $y=-\dfrac{1}{4}x$가 각각 만나는 두 점 A, B의 좌표는 $A(0, 3)$, $B(-4, 1)$이다.

$\therefore \triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times 4\times 3=6$

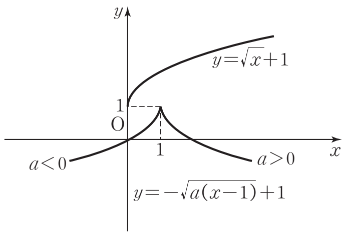
09 답 ②

ㄱ. $a=-1$이면 주어진 함수는 $y=-\sqrt{-(x-1)}+1$이고 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 그림과 같다. 따라서 그래프는 제 2 사분면을 지나지 않는다. (거짓)



ㄴ. a의 값에 관계없이 $\sqrt{a(x-1)}\geq0$이므로 $-\sqrt{a(x-1)}\leq0$이다. 즉, 함수 $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 치역은 $\{y\,|\,y\leq1\}$이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $y=\sqrt{x}+1$의 그래프와 만나지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

10 답 ⑤

$f(x)=\sqrt{ax+b}+c$가 $x=-1$에서 최솟값 1을 가지므로

$f(-1)=\sqrt{-a+b}+c=1$ ⋯ ㉠

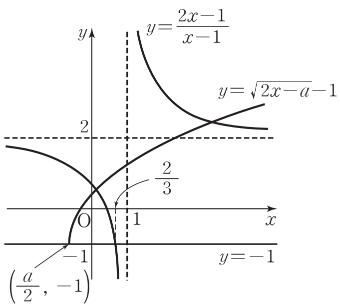
또, $f(1)=3$이므로 $f(1)=\sqrt{a+b}+c=3$ ⋯ ㉡

한편, $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$에서 $\sqrt{ax+b}\geq0$이므로

$f(x)$의 최솟값은 c이다. $\quad\therefore c=1$

$c=1$을 ㉠, ㉡에 대입하면 $-a+b=0$, $a+b=4$이고 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=2$이므로 $a+b+c=5$

11 답 ③



분수함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+2$의 그래프는

점근선이 $x=1$, $y=2$이고 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

또, 무리함수 $y=\sqrt{2x-a}-1=\sqrt{2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)}-1$은

정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\geq\dfrac{a}{2}\right\}$이고, 치역이 $\{y\,|\,y\geq-1\}$이다.

$y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{2}{3},\ -1\right)$을 지나므로 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프와 $y=\sqrt{2x-a}-1$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 그림과 같이 $\dfrac{a}{2}\leq\dfrac{2}{3}$이어야 한다.

$\therefore a\leq\dfrac{4}{3}$

12 답 6

$y=\sqrt{ax+b}+c$에서 $\sqrt{ax+b}=y-c$

$\therefore x=\dfrac{1}{a}(y-c)^2-\dfrac{b}{a}$

따라서 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 역함수는

$y=\dfrac{1}{a}(x-c)^2-\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{a}x^2-\dfrac{2c}{a}x+\dfrac{c^2-b}{a}$이고 이 함수가

$y=ax^2+bx+c$이므로 계수를 비교하면

$a=\dfrac{1}{a}$, $-\dfrac{2c}{a}=b$, $\dfrac{c^2-b}{a}=c$

$a=\dfrac{1}{a}$에서 $a^2=1 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$ ⋯ ㉠

이것을 다른 두 식에 대입하면

$-\dfrac{2c}{a}=b$에서 $b=-2c$, $\dfrac{c^2-b}{a}=c$에서 $b=c^2-c$

이 두 식을 연립하면 $c^2-c=-2c$에서

$c^2+c=0$, $c(c+1)=0$

$\therefore c=-1\ (\because c\neq0)$, $b=2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2+b^2+c^2=6$

13 답 ⑤

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)$

$\qquad\qquad\qquad\quad=(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(f(3))$

한편, $f(3)=\dfrac{3+1}{3-1}=2$이므로 $g^{-1}(f(3))=g^{-1}(2)$

$g^{-1}(2)=a$라 하면 $g(a)=2$에서

$g(a)=\sqrt{2a-1}=2$, $2a-1=4$, $2a=5 \qquad \therefore a=\dfrac{5}{2}$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(2)=\dfrac{5}{2}$

14 답 ③

$f^{-1}(\sqrt{x+a}-1)=x+b$에서 $f(x+b)=\sqrt{x+a}-1$

이때, $f(1)=0$이므로 $x=1-b$를 대입하면

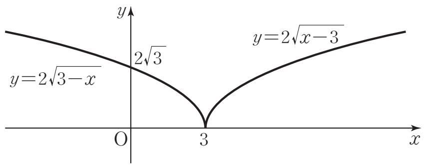
$f(1)=\sqrt{1-b+a}-1$에서 $0=\sqrt{1-b+a}-1$

$\sqrt{a-b+1}=1$, $a-b+1=1$

$\therefore a-b=0$

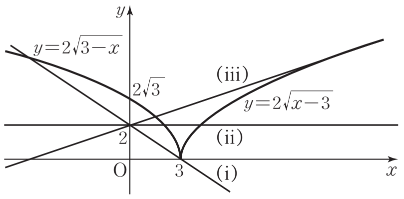
15 답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)=mx+2$의 그래프는 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 다음과 같이 세 가지 경우이다.

$\therefore n=3$



(i) 직선 $y=g(x)$가 점 $(3, 0)$을 지나는 경우

$0=3m+2$에서 $m=-\dfrac{2}{3}$

(ii) 직선 $y=g(x)$가 x축에 평행인 경우 $m=0$

(iii) 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=2\sqrt{x-3}$에 접하는 경우

$2\sqrt{x-3}=mx+2$에서 $4(x-3)=(mx+2)^2$

$m^2x^2+4(m-1)x+16=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4(m-1)^2-16m^2=0$에서 $3m^2+2m-1=0$

$(3m-1)(m+1)=0 \qquad \therefore m=\dfrac{1}{3}$ 또는 $m=-1$

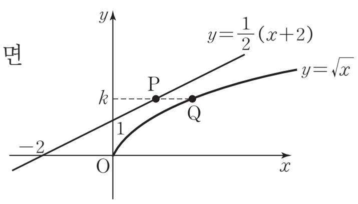
그런데 접하려면 $m>0$이어야 하므로 $m=\dfrac{1}{3}$

(i)~(iii)에 의하여 $S=-\dfrac{2}{3}+0+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore n\times S=3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-1$

16 답 ①

무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2}(x+2)$를 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같다.



점 P의 y좌표를 k라 하면

(i) 점 P의 x좌표는

$k=\dfrac{1}{2}(x+2)$에서 $x=2k-2$

(ii) 점 Q의 x좌표는 $k=\sqrt{x}$에서 $x=k^2$

그림에서 점 Q의 x좌표가 점 P의 x좌표보다 크므로 (i), (ii)에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=k^2-(2k-2)=(k-1)^2+1$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $k=1$일 때 1이다.

17 답 4

두 함수 $y=\sqrt{|x|-1}+1$, $y=a-|x|$는 y축에 대하여 대칭인 함수이다. 따라서 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점 사이의 거리가 4이므로 두 점의 좌표를 $(-2, k)$, $(2, k)$라 할 수 있다. 즉, $x=2$일 때 두 함수의 함숫값이 같으므로

$\sqrt{|2|-1}+1=a-|2|$에서 $2=a-2 \qquad \therefore a=4$

18 답 40

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(t^2, t)$ $(t>0)$라 하면

점 B, C, D의 좌표는 각각 $\mathrm{B}\left(-\dfrac{t^2}{2}, t\right)$, $\mathrm{C}\left(-\dfrac{t^2}{2}, -2t\right)$, $\mathrm{D}(t^2, -2t)$

이다.

점 D의 좌표를 $y=-\sqrt{kx}$에 대입하면 $-2t=-\sqrt{kt^2} \qquad \therefore k=4$

또한, 사각형 ABCD가 정사각형이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\dfrac{3}{2}t^2=3t \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{3}{2}\times 2^2=6$이므로

정사각형의 넓이는 $S=36$

$\therefore k+S=40$

19 답 6

주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시켜 넓이를 구해도 마찬가지이다.

두 함수 $y=\sqrt{3x}$, $y=2x-3$의 역함수를 구하면

$y=\sqrt{3x}$에서 $x=\dfrac{1}{3}y^2$이므로 $y=\dfrac{1}{3}x^2\ (x\ge 0)$

$y=2x-3$에서 $x=\dfrac{1}{2}(y+3)$이므로 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

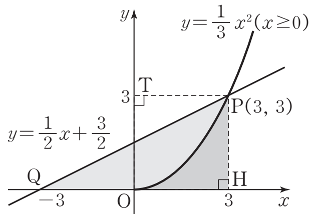
두 역함수의 그래프의 교점의 좌표를 구하기 위해 연립하면

$\dfrac{1}{3}x^2=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$, $2x^2-3x-9=0$, $(2x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because x\ge 0)$

즉, 교점의 좌표는 $(3, 3)$이다.

두 역함수의 그래프의 교점을 P, 점 P에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 H, T라 하고 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$이 x축과 만나는 점을 Q라 하여 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 영역의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle\mathrm{PQH}-\dfrac{1}{3}\square\mathrm{PTOH}=\dfrac{1}{2}\times 6\times 3-\dfrac{1}{3}\times 3^2=6$

20 답 ④

$$\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}=\frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2}{(x+2)-(x-2)}$$
$$=\frac{2x+2\sqrt{x^2-4}}{4}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{5-4}}{4}\ (\because x=\sqrt{5})$$
$$=\frac{2\sqrt{5}+2}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

21 답 ⑤

$$x^2-4=\left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right)-4$$
$$=a^2-2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$
$$y^2-4=\left(b^2+2+\frac{1}{b^2}\right)-4$$
$$=b^2-2+\frac{1}{b^2}=\left(b-\frac{1}{b}\right)^2$$

이때, $a>\frac{1}{a}$, $b<\frac{1}{b}$ ($\because a>1,\ 0<b<1$)이므로

$$xy-\sqrt{x^2-4}\sqrt{y^2-4}$$
$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\sqrt{\left(b-\frac{1}{b}\right)^2}$$
$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)-\left|a-\frac{1}{a}\right|\left|b-\frac{1}{b}\right|$$
$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)$$
$$=2\left(ab+\frac{1}{ab}\right)$$

22 답 ①

$y=\sqrt{2x-3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{2(x-a)-3}+1+b=\sqrt{2x-2a-3}+1+b$

이 식이 $y=\sqrt{ax+b}+c$와 같으므로

$a=2,\ -2a-3=b,\ 1+b=c$

따라서 $a=2,\ b=-7,\ c=-6$이므로

$a+b+c=-11$

23 답 5

함수 $f(x)$는 $-1\le x\le 3$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $A=\{y\,|\,0\le y\le 2\}$

$p>0$이므로 함수 $g(x)$는 $-1\le x\le 3$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고 $A=B$이므로

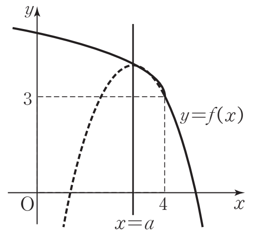
$g(-1)=2,\ g(3)=0$이다.

즉, $\frac{p}{-5}+q=2,\ -p+q=0$이므로 연립하여 풀면 $p=q=\frac{5}{2}$

$\therefore p+q=5$

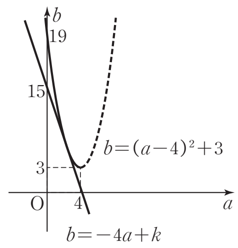
24 답 15

함수 $f(x)$가 일대일대응이 되기 위해서는 곡선 $y=-(x-a)^2+b\ (x\ge 4)$가 점 $(4,\ 3)$을 지나야 하고, 곡선 $y=-(x-a)^2+b$가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이므로 $a\le 4$이어야 한다.



즉, $3=-(4-a)^2+b$에서 $b=(a-4)^2+3\ (a\le 4)$

이때, $4a+b=k$ (k는 상수)라 하면 다음 그림과 같이 곡선 $b=(a-4)^2+3\ (a\le 4)$과 직선 $b=-4a+k$가 접할 때 k의 값이 최소가 된다.



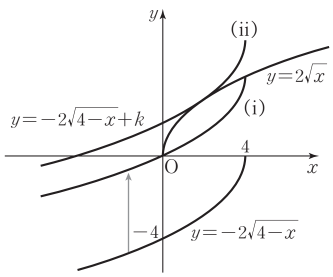
$(a-4)^2+3=-4a+k$에서 $a^2-4a+19-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0$이어야 하므로 $\frac{D}{4}=4-(19-k)=0\qquad \therefore k=15$

25 답 16

함수 $y=-2\sqrt{4-x}+k$의 그래프는 함수 $y=-2\sqrt{4-x}$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 것이므로 두 함수 $y=2\sqrt{x}$, $y=-2\sqrt{4-x}+k$의 그래프를 서로 다른 두 점에서 만나도록 그려보면 다음 그림과 같이 $y=-2\sqrt{4-x}+k$의 그래프가 (i)이거나 (i), (ii)의 그래프 사이에 위치하여야 한다.



(i) 함수 $y=-2\sqrt{4-x}+k$의 그래프가 원점을 지나므로
$0=-2\sqrt{4-0}+k$에서 $k=4$

(ii) 두 함수 $y=-2\sqrt{4-x}+k$, $y=2\sqrt{x}$의 그래프가 접할 때이므로
$-2\sqrt{4-x}+k=2\sqrt{x}$에서
$-2\sqrt{4-x}=2\sqrt{x}-k$, $(-2\sqrt{4-x})^2=(2\sqrt{x}-k)^2$
$16-4x=4x-4k\sqrt{x}+k^2$, $8x-4k\sqrt{x}+k^2-16=0$

이때, $\sqrt{x}=t$라 하면 $8t^2-4kt+k^2-16=0$이고 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4k^2-8(k^2-16)=0$에서 $k^2=32$

$\therefore k=4\sqrt{2}$ ($\because k>0$)

(i), (ii)에 의하여 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 범위는 $4\leq k<4\sqrt{2}$이므로

$16\leq k^2<32$에서 $\alpha=16$, $\beta=32$

$\therefore \beta-\alpha=32-16=16$

[다른 풀이]

(ii) $y=-2\sqrt{4-x}+k$에서 $k-y=2\sqrt{4-x}$

이것은 함수 $y=2\sqrt{x}$의 x에 $4-x$를, y에 $k-y$를 대입한 것이므로 함수 $y=2\sqrt{x}$를 점 $\left(2, \frac{k}{2}\right)$에 대하여 대칭이동한 것이다.

점 $\left(2, \frac{k}{2}\right)$가 직선 $x=2$ 위에 있으므로 두 곡선이 접할 때의 접점의 x좌표도 2이다.

즉, $-2\sqrt{4-2}+k=2\sqrt{2}$에서 $k=4\sqrt{2}$

26 답 9

주어진 그래프는 꼭짓점이 $(-3, 5)$인 이차함수의 일부이므로

$y=k(x+3)^2+5$ $(x\geq-3)$이고 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=k(0+3)^2+5$에서 $9k=-3$ $\qquad \therefore k=-\frac{1}{3}$

즉, 주어진 그래프의 함수식은

$y=-\frac{1}{3}(x+3)^2+5$ $(x\geq-3)$이고 이 함수의 역함수는

$(x+3)^2=-3(y-5)$에서

$x+3=\sqrt{-3y+15}$ ($\because x\geq-3$)

$\therefore x=\sqrt{-3y+15}-3$

즉, 주어진 그래프가 나타내는 함수의 역함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$는

$y=\sqrt{-3x+15}-3$이다.

따라서 $a=-3$, $b=15$, $c=-3$이므로 $a+b+c=9$

27 답 2

함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 역함수 관계이므로 두 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

직선 $y=\frac{1}{2}x$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선은 $y=2x$이므로 함수 $f(x)=\frac{x^2}{2}+k$ $(x\geq0)$의 그래프와 직선 $y=2x$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하는 것과 같다.

$x\geq0$이므로 x에 대한 방정식 $f(x)=2x$가 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.

$f(x)=2x$에서 $\frac{x^2}{2}+k=2x$ $\qquad \therefore x^2-4x+2k=0$ ⋯ ㉠

(i) ㉠의 두 실근을 α, β라 할 때, α, β가 모두 음이 아니려면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4\geq0$, $\alpha\beta=2k\geq0$

$\therefore k\geq0$

(ii) ㉠의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=4-2k>0$

$\therefore k<2$

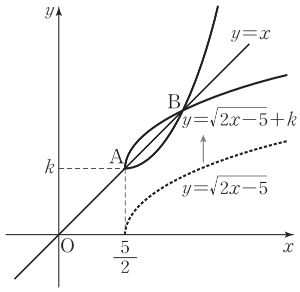
(i), (ii)에 의하여 $0\leq k<2$

따라서 정수 k는 0, 1의 2개이다.

28 답 ④

무리함수 $y=\sqrt{2x-5}+k$는 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 함수이므로 함수 $y=\sqrt{2x-5}+k$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{2x-5}+k$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이다.

한편, 함수 $y=\sqrt{2x-5}+k$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x-5}$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 두 교점 A, B에 대하여 선분 AB의 길이가 최대일 때는 그림과 같이 $y=\sqrt{2x-5}+k$의 그래프의 시작점이 직선 $y=x$ 위의 점일 때이다.



따라서 이때의 k의 값은 $\frac{5}{2}$이고 함수 $y=\sqrt{2x-5}+\frac{5}{2}$의 그래프와 직선 $y=x$의 또 다른 교점은 $\sqrt{2x-5}+\frac{5}{2}=x$에서

$2\sqrt{2x-5}=2x-5$

여기서 $\sqrt{2x-5}=t$라 하면

$2t=t^2$, $t(t-2)=0$ $\qquad \therefore t=0$ 또는 $t=2$

즉, $\sqrt{2x-5}=0$ 또는 $\sqrt{2x-5}=2$에서

$x=\frac{5}{2}$ 또는 $x=\frac{9}{2}$

따라서 선분 AB의 길이가 최대일 때 두 점 A, B의 좌표는

$A\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $B\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$이므로 선분 AB의 길이의 최댓값은

$\sqrt{\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

29 답 ②

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

$x\geq1$에서 함수 $y=\frac{-3x+1}{x+1}$의 그래프는 점근선이

$x=-1$, $y=-3$이고 점 $(1,\ -1)$을 지나는 그래프로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이고, $x<1$에서

무리함수 $y=\sqrt{1-x}+k$도 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 범위에서 감소하는 함수이다.

따라서 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 무리함수

$y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 점 $(1,\ -1)$을 지나야 한다.

즉, $-1=\sqrt{1-1}+k$에서 $k=-1$

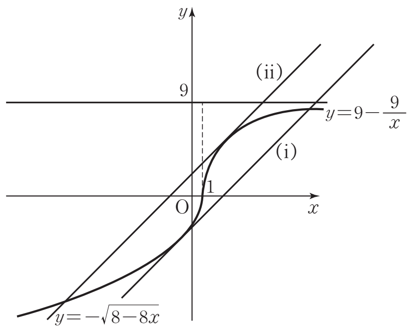
따라서 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}-1 & (x<1)\\ \dfrac{-3x+1}{x+1} & (x\ge1)\end{cases}$ 이고

$f^{-1}(f^{-1}(a))=3$이면 $f(f(3))=a$이므로

$a=f(f(3))=f(-2)=\sqrt{3}-1$

30 답 ④

함수 $y=\begin{cases}9-\dfrac{9}{x} & (x\ge1)\\ -\sqrt{8-8x} & (x<1)\end{cases}$ 의 그래프와 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 직선 $y=x+k$가 두 접선 (i), (ii) 사이에 있을 때이다.



(i) $-\sqrt{8-8x}=x+k$에서 $8-8x=x^2+2kx+k^2$

$x^2+2(k+4)x+k^2-8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(k+4)^2-(k^2-8)=8k+24=0$에서 $k=-3$

(ii) $9-\dfrac{9}{x}=x+k$에서 $9x-9=x^2+kx$

$x^2+(k-9)x+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(k-9)^2-36=k^2-18k+45$

$=(k-15)(k-3)=0$

에서 $k=3$ ($\because$ 그래프에서 $0<k<9$)

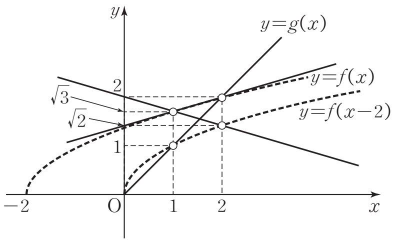
(i), (ii)에 의하여 $-3<k<3$이므로 정수 k는

$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다.

31 답 ④

$f(x-2)=\sqrt{(x-2)+2}=\sqrt{x}$이고

$f(x-2)=\sqrt{x}$, $g(x)=px+q$, $f(x)=\sqrt{x+2}$가 주어진 조건을 만족시키려면 다음 그림과 같이 세 가지 경우가 있다.



(i) $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지날 때,

$g(1)+g(2)=1+2=3$

(ii) $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ \sqrt{3})$, $(2,\ \sqrt{2})$를 지날 때,

$g(1)+g(2)=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(iii) $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ \sqrt{3})$, $(2,\ 2)$를 지날 때,

$g(1)+g(2)=\sqrt{3}+2$

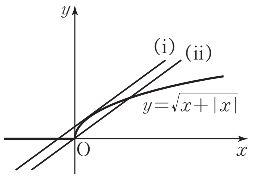
이때, $\sqrt{3}+2>3$이고 $\sqrt{3}+2>\sqrt{3}+\sqrt{2}$이므로

$g(1)+g(2)$의 최댓값은 $\sqrt{3}+2$이다.

32 답 ③

$x\ge0$일 때 $y=\sqrt{2x}$이고, $x<0$일 때 $y=0$이므로

$y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프는 그림과 같다.



주어진 함수의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선 $y=x+k$가 그림의 두 직선 (i), (ii) 사이에 위치하여야 한다.

(i) 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$\sqrt{2x}=x+k$에서 $2x=(x+k)^2$ $\quad\therefore x^2+2(k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=0$, $-2k+1=0$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때, $k=0$

(i), (ii)에 의하여 k의 값의 범위는 $0<k<\dfrac{1}{2}$이다.

33 답 15

두 무리함수의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 그래프에 접하는 원의 반지름의 길이를 구해도 마찬가지이다.

함수 $y=\sqrt{3x}$의 역함수는 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ $(x\ge0)$ ⋯ ㉠이고,

함수 $y=-\sqrt{-3x+12}$의 역함수는 $y=-\dfrac{1}{3}x^2+4$ $(x\le0)$이다.

두 역함수의 그래프는 점 $(0,\ 2)$에 대하여 대칭이므로

구하는 원의 중심은 $(0,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 r이므로

$x^2+(y-2)^2=r^2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 x^2을 소거하면 $y^2-y+4-r^2=0$

방정식 $y^2-y+4-r^2=0$의 판별식을 D라 하면 ㉠, ㉡이 접하므로

$D=1-4(4-r^2)=0$, $-15+4r^2=0$ $\quad\therefore 4r^2=15$

34 답 2

두 함수의 그래프의 교점을 구하기 위해 두 함수식을 연립하면

$\frac{1}{a}(x-2a)^2=\sqrt{ax}$에서 $(x-2a)^4=a^3x$

이때, $x-2a=X$라 하면

$X^4=a^3(X+2a)$

$X^4-a^3X-2a^4=0$

$(X+a)(X^3-aX^2+a^2X-2a^3)=0 \cdots$ ㉠

$X=x-2a=-a$

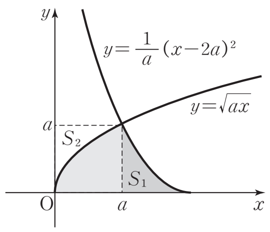
$\therefore x=a$

따라서 두 함수의 그래프의 교점은 (a, a)이다.

이때, $y=\sqrt{ax}$의 역함수가 $y=\frac{1}{a}x^2 \ (x\ge 0)$이고,

두 함수 $y=\frac{1}{a}x^2$, $y=\frac{1}{a}(x-2a)^2$의 그래프의 모양이 같으므로

다음 그림의 두 부분 S_1, S_2의 넓이가 같다.



따라서 색칠한 부분의 넓이는 한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이와 같다.

즉, $a^2=4$이고 $a>0$이므로 $a=2$이다.

> 일등급 UP
>
> **＊그래프와 무연근**
>
> 방정식 ㉠에서 실근은 하나 더 있지만 필요로 하는 근을 구했기에 더 이상 찾는 것은 무의미하다. 이전 교육과정에서는 이런 근을 방정식을 변형하면서 생긴 원래의 방정식과는 관계가 없는 근(무연근)이라 했다.

35 답 ④

$y=1-\sqrt{1-x^2}$에서 $y-1=-\sqrt{1-x^2}$

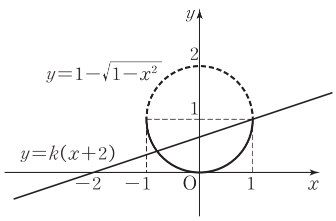
양변을 제곱하면

$(y-1)^2=1-x^2$

$\therefore x^2+(y-1)^2=1 \ (y\le 1)$

따라서 $y=1-\sqrt{1-x^2}$의 그래프는 원 $x^2+(y-1)^2=1$에서

$y\le 1$인 부분이므로 다음 그림과 같다.



$y=k(x+2)$는 k의 값에 관계없이 점 $(-2, 0)$을 지나는 직선이고, 주어진 곡선과 서로 다른 두 점에서 만나려면

(i) 직선 $y=k(x+2)$의 기울기가 0보다 커야 하므로 $k>0$

(ii) 직선 $y=k(x+2)$가 점 $(1, 1)$을 지날 때, $1=3k$에서

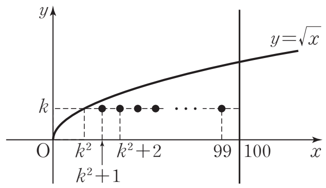
$k=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$0<k\le\frac{1}{3}$이므로 $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore \alpha+3\beta=1$

36 답 755



$1\le k\le 9$인 정수 k에 대하여 주어진 도형의 내부에 있는 점 중 y좌표가 k인 점은

$(k^2+1, k), (k^2+2, k), \cdots, (\boxed{99}, k)$ (가)

이므로 이 점의 개수를 $f(k)$라 하면

$f(k)=99-(k^2+1)+1=\boxed{99-k^2}$

따라서 구하는 점의 개수는

$f(1)+f(2)+\cdots+f(9)$

$=(99-1^2)+(99-2^2)+\cdots+(99-9^2)$

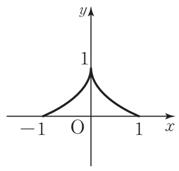
$=99\times 9-(1^2+2^2+\cdots+9^2)=\boxed{606}$ (나)

따라서 $p=99$, $q=606$, $f(7)=99-7^2=50$이므로

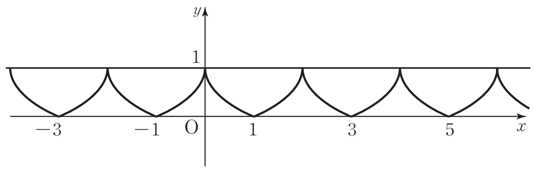
$p+q+f(7)=99+606+50=755$

37 답 ⑤

조건 (가)에서 $-1\le x\le 1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다. 조건 (나)에서 $y=f(x)$가 주기가 2인 주기함수이므로 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]

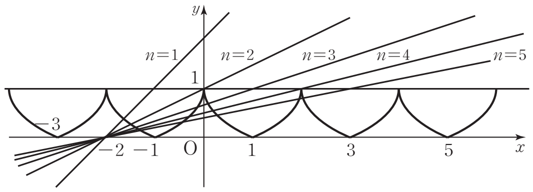


[그림 2]

이때, 직선 $x-ny+2=0$, 즉 $y=\frac{1}{n}(x+2)$는

점 $(-2, 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{n}$인 직선이므로

$n=1, 2, 3 \cdots$일 때의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(3)=3$, $\cdots$에서

$g(n)=n$ $\cdots$ ㉠이다. $\therefore g(3)=3$ (참)

ㄴ. $f(2)=1$, $f(3)=0$, $f(4)=1$, $f(5)=0$, $\cdots$이고,

$g(2)=2$, $g(3)=3$, $g(4)=4$, $g(5)=5$, $\cdots$이므로

$n\ge2$일 때, $f(n)<g(n)$이다. (참)

ㄷ. ㉠에 의하여 $g(n)=n$, $g(n+2)=n+2$이므로

$(f\circ g)(n)=f(g(n))=f(n)$이고

$(f\circ g)(n+2)=f(g(n+2))=f(n+2)$이다.

이때, 조건 (나)에 의해서 $f(n+2)=f(n)$이므로

$(f\circ g)(n)=(f\circ g)(n+2)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

38 답 ①

$\mathrm{A}(k, \sqrt{k})$, $\mathrm{B}(k, 3\sqrt{k})$에 대하여 두 점 A, B의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\mathrm{M}(k, 2\sqrt{k})$이다.

이때, 삼각형 ABC가 정삼각형이고 선분 AB가 x축에 수직이므로 점 C의 y좌표는 점 M의 y좌표와 같다.

즉, $2\sqrt{k}=3\sqrt{x}$에서 $x=\frac{4}{9}k$이므로 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(\frac{4}{9}k, 2\sqrt{k}\right)$이다.

한편, 선분 CM은 정삼각형 ABC의 높이이므로

$\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{AM}}$에서 $\overline{\mathrm{CM}}^2=3\times\overline{\mathrm{AM}}^2$

$\left(\frac{5}{9}k\right)^2=3(\sqrt{k})^2$, $\frac{25}{81}k^2=3k$ $\quad\therefore k=\frac{243}{25}$ ($\because k>0$)

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{k}=2\sqrt{\frac{243}{25}}=2\times\frac{9\sqrt{3}}{5}=\frac{18\sqrt{3}}{5}$

39 답 6

함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}k$ $(x\ge0)$의 역함수는

$g(x)=\sqrt{4x-k}$이다. ---------- ⓐ

즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

즉, 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}k=x$에서 $x^2-4x+k=0$이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$k\ge0$, $\frac{D}{4}=(-2)^2-k>0$이어야 한다. ---------- ⓑ

즉, $0\le k<4$이므로 모든 정수 k는 0, 1, 2, 3으로 구하는 합은

$0+1+2+3=6$이다. ---------- ⓒ

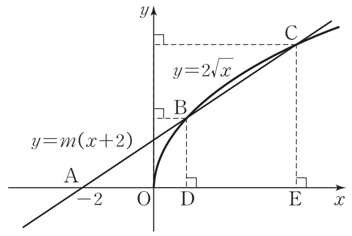
| 채점기준 |

ⓐ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 역함수 관계임을 파악한다. [30%]

ⓑ 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 조건을 구한다. [40%]

ⓒ k의 값의 범위를 구하고 모든 정수 k의 값의 합을 구한다. [30%]

40 답 40



두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AB}}$이고 두 삼각형 ABD, ACE가 닮음이므로 $\overline{\mathrm{CE}}=2\overline{\mathrm{BD}}$이다. ---------- ⓐ

두 점 B, C의 y좌표를 각각 k, $2k$ $(k>0)$라 하고

$y=m(x+2)$와 $y=2\sqrt{x}$, 즉 $\frac{1}{4}y^2=x$를 연립하면

$y=m\left(\frac{1}{4}y^2+2\right)$에서 이차방정식 $my^2-4y+8m=0$의 두 근이 k, $2k$이다. ---------- ⓑ

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k+2k=\frac{4}{m}$, $k\times2k=8$이므로 $k=2$ ($\because k>0$)이고

$m=\frac{2}{3}$이다.

$\therefore 60m=60\times\frac{2}{3}=40$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 선분 CE, BD의 길이 사이의 관계식을 구한다. [30%]

ⓑ k의 값을 구하기 위하여 방정식을 세운다. [40%]

ⓒ 근과 계수의 관계를 이용하여 k, m의 값을 각각 구하고 $60m$의 값을 구한다. [30%]

[다른 풀이]

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DE}}$이고 직선 l은 m의 값에 관계없이 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$을 지나므로 점 B의 x좌표를 k $(k>0)$라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=k+2$에서 $\overline{\mathrm{DE}}=k+2$이다.

즉, 점 E의 x좌표는 $k+(k+2)=2k+2$이므로

두 점 B, C의 y좌표는 각각 $2\sqrt{k}$, $2\sqrt{2k+2}$이다.

이때, $2\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CE}}$이므로 $4\sqrt{k}=2\sqrt{2k+2}$에서

$4k=2k+2$, $2k=2$

$\therefore k=1$

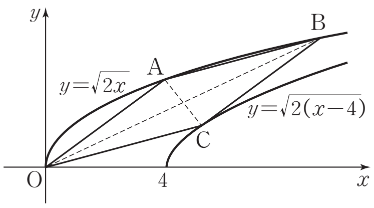
즉, 점 B의 좌표는 $(1, 2)$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선 l의 기울기는

$m=\frac{2-0}{1-(-2)}=\frac{2}{3}$

$\therefore 60m=40$

V-06
무리식과 무리함수

41 답 27



곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(4,\ 2\sqrt{2})$이고 점 B의 좌표를 $\mathrm{B}(2b^2,\ 2b)$, 곡선 $y=\sqrt{2(x-4)}$ 위의 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}(2c^2+4,\ 2c)\,(c>0)$라 하자.

이때, 두 점 A, C의 중점의 좌표는 $(c^2+4,\ c+\sqrt{2})$이고

두 점 O, B의 중점의 좌표는 $(b^2,\ b)$인데 사각형 OABC가 평행사변형이므로 두 선분 OB, AC의 중점이 일치한다. ---- ⓐ

$b^2=c^2+4$에서 $b^2-c^2=4$이고 $b=c+\sqrt{2}$에서

$b-c=\sqrt{2}$ … ㉠이다.

$b^2-c^2=(b-c)(b+c)=4$에 $b-c=\sqrt{2}$를 대입하면

$\sqrt{2}(b+c)=4 \qquad \therefore b+c=2\sqrt{2}$ … ㉡ ---- ⓑ

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=\frac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(9,\ 3\sqrt{2})$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2=(9-4)^2+(3\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2=25+2=27$ ---- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 선분 AC, OB의 중점이 일치함을 파악한다.	[40%]
ⓑ 두 선분의 중점이 일치함을 이용하여 관계식을 세운다.	[30%]
ⓒ $\overline{\mathrm{AB}}^2$의 값을 구한다.	[30%]

일등급 UP

*** 무리함수의 그래프 위의 점의 표현**

㉠, ㉡에서 두 점 B, C의 좌표를 $\mathrm{B}(b,\ \sqrt{2b})$, $\mathrm{C}(c,\ \sqrt{2(c-4)})$라 하면 계산 과정이 복잡해진다. 무리함수에서 문자를 이용해 좌표를 설정할 때는 근호 안이 완전제곱이 되도록 하는 문자를 좌표로 설정하면 계산 과정이 간단해진다.

42 답 ③

별 A, B의 표면 온도를 각각 T_A, T_B, 반지름의 길이를 각각 R_A, R_B, 광도를 각각 L_A, L_B라 하면 $T_\mathrm{A}=\frac{1}{2}T_\mathrm{B}$이고 $R_\mathrm{A}=36R_\mathrm{B}$이다.

$T_\mathrm{A}{}^2=\frac{1}{R_\mathrm{A}}\sqrt{\frac{L_\mathrm{A}}{4\pi\sigma}}$에서 $\left(\frac{1}{2}T_\mathrm{B}\right)^2=\frac{1}{36R_\mathrm{B}}\sqrt{\frac{L_\mathrm{A}}{4\pi\sigma}}$

$\therefore \frac{1}{4}T_\mathrm{B}{}^2=\frac{1}{36R_\mathrm{B}}\sqrt{\frac{L_\mathrm{A}}{4\pi\sigma}}$ … ㉠

또, $T_\mathrm{B}{}^2=\frac{1}{R_\mathrm{B}}\sqrt{\frac{L_\mathrm{B}}{4\pi\sigma}}$ … ㉡이므로 ㉠÷㉡을 하면

$\frac{1}{4}=\frac{1}{36}\sqrt{\frac{L_\mathrm{A}}{L_\mathrm{B}}}$에서 $\sqrt{\frac{L_\mathrm{A}}{L_\mathrm{B}}}=9$

$\therefore \frac{L_\mathrm{A}}{L_\mathrm{B}}=81$

이때, $L_\mathrm{A}=kL_\mathrm{B}$에서 $\frac{L_\mathrm{A}}{L_\mathrm{B}}=k$이므로 $k=81$

43 답 ④

$b=\sqrt{a}$, $d=\sqrt{c}$에서 $a=b^2$, $c=d^2$

또, 주어진 조건에서 $\frac{b+d}{2}=1$이므로

(직선 PQ의 기울기)$=\frac{d-b}{c-a}=\frac{d-b}{d^2-b^2}=\frac{1}{d+b}=\frac{1}{2}$

44 답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 B를 지날 때의 k의 값은

$1=\sqrt{7-k}$에서 $k=6$이다. 즉, $k>6$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 삼각형 ABC와 만나지 않는다.

또, $f(x)=\sqrt{x-k}$의 역함수는 $f^{-1}(x)=x^2+k\ (x\ge0)$이고

역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 A를 지날 때의 k의 값은

$6=1^2+k$에서 $k=5$이다. 즉, $k>5$이면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 삼각형 ABC와 만나지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 동시에 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 5이다.

45 답 16

두 점 A, B의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a})$, $\mathrm{B}(a,\ \sqrt{3a})$이고

점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로

$\sqrt{x}=\sqrt{3a}$에서 $x=3a$

따라서 두 점 C, D의 좌표는 각각 $\mathrm{C}(3a,\ \sqrt{3a})$, $\mathrm{D}(3a,\ 3\sqrt{a})$이다.

이때, 두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{4}$이므로

$\frac{3\sqrt{a}-\sqrt{a}}{3a-a}=\frac{1}{4}$에서 $\frac{\sqrt{a}}{a}=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{4}$, $\sqrt{a}=4$

$\therefore a=16$

46 답 6

$y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-3=\sqrt{a(x+4)+b}+c$에서 $y=\sqrt{a(x+4)+b}+c+3$

이 그래프를 다시 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(-x+4)+b}+c+3$에서 $y=\sqrt{-ax+4a+b}+c+3$

이 함수가 $y=\sqrt{-2x+9}+6$과 같으므로

$-a=-2$에서 $a=2$, $4a+b=8+b=9$에서 $b=1$,

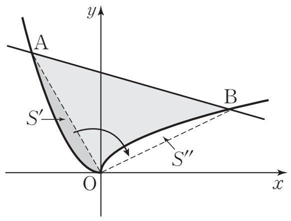
$c+3=6$에서 $c=3$이다.

$\therefore a+b+c=6$

47 답 10

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 함수 $y=x^2\ (x\le0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하고 점 A는 같은 방법의 대칭이동으로 점 B로 이동한다.

따라서 그림과 같이 S'의 부분과 S''의 부분의 넓이는 서로 같다.



따라서 구하는 부분의 넓이를 S라 하면 S의 값은 삼각형 OBA의 넓이와 같다.

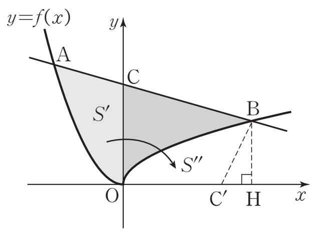
이때, 삼각형 OBA에서 밑변을 선분 AB라 하면 높이는 원점과 직선 $x+3y-10=0$ 사이의 거리이다.

$\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{10}$ 이고 높이는

$\dfrac{|0+3\times0-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$ 이므로

$S=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times2\sqrt{10}=10$

[다른 풀이]



직선 $x+3y-10=0$이 y축과 만나는 점은 $\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{10}{3}\right)$이다.

점 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{C}'\left(\dfrac{10}{3},\ 0\right)$이라 하고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

그림과 같이 S'의 부분과 S''의 부분의 넓이는 서로 같기 때문에 구하는 부분의 넓이를 S라 하면 S의 값은 사다리꼴 COHB의 넓이에서 삼각형 BC′H의 넓이를 뺀 것과 같다.

(사다리꼴 COHB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\left(2+\dfrac{10}{3}\right)\times4=\dfrac{32}{3}$이고

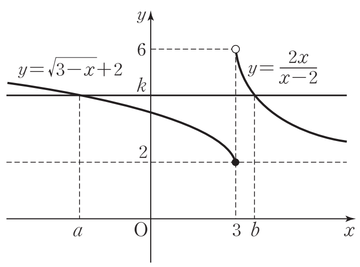
(삼각형 BC′H의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\left(4-\dfrac{10}{3}\right)\times2=\dfrac{2}{3}$이므로

$S=\dfrac{32}{3}-\dfrac{2}{3}=10$

48 답 2

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

이때, $f(a)=f(b)=k$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 두 교점의 x좌표가 a, b $(a<3<b)$이다.



$x>3$일 때, $\dfrac{2b}{b-2}=k$에서 b가 정수이므로 k는 유리수이다.

$x\le3$일 때, $\sqrt{3-a}+2=k$에서 a가 정수이고 k가 유리수이므로 그래프에서 k는 $2<k<6$인 자연수이다.

즉, 가능한 k의 값은 3 또는 4 또는 5이다.

(i) $k=3$일 때, $a=2$, $b=6$

(ii) $k=4$일 때, $a=-1$, $b=4$

(iii) $k=5$일 때, $a=-6$, $b=\dfrac{10}{3}$

(i)~(iii)에서 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 6)$, $(-1,\ 4)$의 2개이다.

일등급 UP

*** 유리식의 성질**

$k=\dfrac{2b}{b-2}=\dfrac{2(b-2)+4}{b-2}=2+\dfrac{4}{b-2}$에서 k가 자연수이면 $b-2$는 4의 약수이다. 즉, 가능한 k의 값은 3 또는 4이다.

49 답 ④

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$에서 $x\ge0$, $8-x\ge0$이므로

함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x|0\le x\le8\}$이다.

$f(x)\ge0$이므로 $\{f(x)\}^2$이 최대일 때, $f(x)$도 최대이다.

$\{f(x)\}^2=x+2\sqrt{8x-x^2}+8-x$

$=8+2\sqrt{8x-x^2}$

이때, $y=8x-x^2=-(x-4)^2+16$이므로 $0\le x\le8$에서

$x=4$일 때, y는 최댓값 16을 갖는다.

따라서 $x=4$일 때, $\{f(x)\}^2$은 최댓값 $8+2\sqrt{16}=16$을 가지므로

$f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{16}=4$이다.

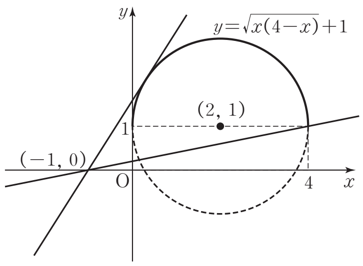
50 답 120

$y=\sqrt{x(4-x)}+1$에서 $(y-1)^2=-x^2+4x$ (단, $y\ge1$)

$\therefore\ (x-2)^2+(y-1)^2=4$ (단, $y\ge1$)

즉, 곡선 $y=\sqrt{x(4-x)}+1$은 중심이 $(2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 2인 반원이다.

한편, $\dfrac{b}{a+1}=\dfrac{b-0}{a-(-1)}$에서 $\dfrac{b}{a+1}$의 값은 두 점 $(-1,\ 0)$, $(a,\ b)$를 연결한 직선의 기울기이다.



두 점 $(-1,\ 0)$, $(a,\ b)$를 연결한 직선의 기울기의 최솟값은

$(a,\ b)=(4,\ 1)$일 때이므로 $m=\dfrac{1}{5}$

또, 최댓값은 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선 $y=M(x+1)$이 반원에 접할 때이다. 즉, 원의 중심 $(2,\ 1)$과 직선 $Mx-y+M=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 2이므로

$\dfrac{|2M-1+M|}{\sqrt{M^2+1}}=2$에서 $|3M-1|=2\sqrt{M^2+1}$

$9M^2-6M+1=4M^2+4,\ 5M^2-6M-3=0$

$\therefore\ M=\dfrac{3\pm\sqrt{3^2+15}}{5}=\dfrac{3\pm2\sqrt{6}}{5}$

이때, $M>0$이므로 $M=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}$

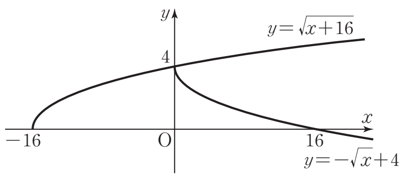
따라서 $M+m=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{5}\sqrt{6}$이므로

$p=\dfrac{4}{5},\ q=\dfrac{2}{5}$이다.

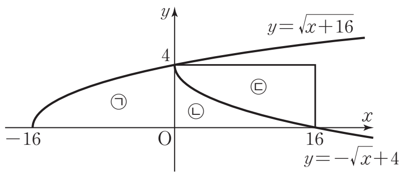
$\therefore\ 100(p+q)=100\times\dfrac{6}{5}=120$

51 답 85

함수 $y=\sqrt{x+16}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -16만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=-\sqrt{x}+4$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 두 함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

이때, 함수 $y=-\sqrt{x}+4$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x+16}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 16만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같이 함수 $y=\sqrt{x+16}$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 영역 ㉠의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 함수 $y=-\sqrt{x}+4$의 그래프와 두 직선 $x=16$, $y=4$로 둘러싸인 영역 ㉢의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.

따라서 영역 ㉠과 영역 ㉡의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 영역 ㉡과 영역 ㉢의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.

x축 위의 정수인 점은 0, 1, $\cdots$, 16으로 17개, y축 위의 정수인 점은 0, 1, $\cdots$, 4로 5개이므로 구하는 점의 개수는 $17\times5=85$이다.

[다른 풀이]

[그림 1]에서 정수 y에 대한 정수 x의 개수를 구해보자.

(ⅰ) $y=0$일 때, x의 값은 $-16,\ -15,\ -14,\ \cdots,\ 16$의 33개

(ⅱ) $y=1$일 때, x의 값은 $-15,\ -14,\ -13,\ \cdots,\ 9$의 25개

(ⅲ) $y=2$일 때, x의 값은 $-12,\ -11,\ -10,\ \cdots,\ 4$의 17개

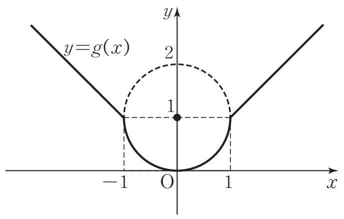
(ⅳ) $y=3$일 때, x의 값은 $-7,\ -6,\ -5,\ \cdots,\ 1$의 9개

(ⅴ) $y=4$일 때, x의 값은 0의 1개

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $33+25+17+9+1=85$이다.

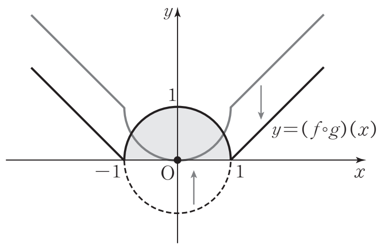
52 답 3

함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



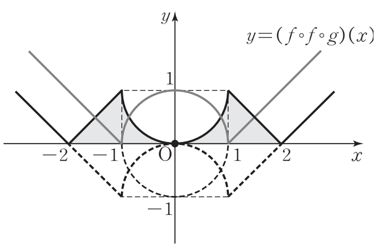
[그림 1]

한편, 함수 $y=(f\circ g)(x)=|g(x)-1|$의 그래프는 [그림 2]와 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 x축의 아래쪽 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



[그림 2]

또, 함수 $y=(f\circ f\circ g)(x)=|(f\circ g)(x)-1|$의 그래프는 [그림 3]과 같이 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 x축의 아래쪽 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



[그림 3]

따라서 구하는 두 영역의 넓이의 합은 평행한 두 변의 길이가 각각 2, 4이고 높이가 1인 사다리꼴의 넓이이다.

$\therefore\ A+B=\dfrac{1}{2}\times(2+4)\times1=3$

53 답 4

$y=x+|x-n|=\begin{cases} 2x-n & (x\ge n) \\ n & (x<n) \end{cases}$ 이고,

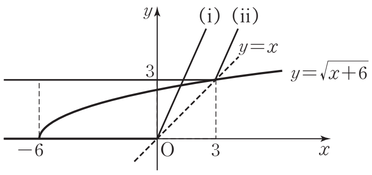
$y=x+|x-n|$의 그래프는 점 (n, n)을 지나고 점 (n, n)은 직선 $y=x$ 위에 있다.

두 함수 $y=\sqrt{x+6}$, $y=x+|x-n|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

(i) $y=x+|x-n|$의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지날 때 $n=0$

(ii) $y=\sqrt{x+6}$과 $y=x$의 그래프는 점 $(3, 3)$에서 만나므로

$y=x+|x-n|$이 점 $(3, 3)$을 지날 때 $n=3$



(i), (ii)에서 구하는 n의 값의 범위는 $0\le n<3$

(iii) $y=x+|x-n|$의 그래프가 점 $(-6, 0)$을 지날 때,

$n=0$ 또는 $n=-12$

이때, $y=2x-n\ (x\ge n)$의 그래프의 y절편 $-n>0$이므로

$n<0 \qquad \therefore n=-12$

(iv) $y=2x-n$과 $y=\sqrt{x+6}$의 그래프가 접할 때,

$2x-n=\sqrt{x+6}$에서 $4x^2-4nx+n^2=x+6$

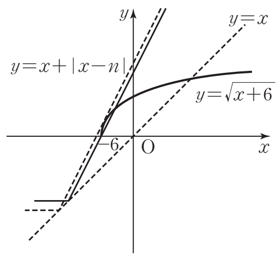
$4x^2-(4n+1)x+n^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4n+1)^2-16(n^2-6)=0$에서 $8n+97=0$

$\therefore n=-\frac{97}{8}$

(iii), (iv)에서 구하는 n의 값의 범위는 $-\frac{97}{8}<n\le-12$



따라서 구하는 n의 값의 범위는 $0\le n<3$ 또는 $-\frac{97}{8}<n\le-12$ 이므로 정수 n의 개수는 -12, 0, 1, 2의 4이다.

VI 경우의 수

1st 07 경우의 수

문제편 82P

01 답 27

(i) $a+b$가 홀수인 경우

a가 홀수이고 b가 짝수일 때 $3\times3=9$(가지)

a가 짝수이고 b가 홀수일 때 $3\times3=9$(가지)

따라서 합의 법칙에 의하여 $9+9=18$(가지)

(ii) ab가 홀수인 경우

a도 홀수이고 b도 홀수이어야 하므로

$3\times3=9$(가지)

이때, $a+b$와 ab가 모두 홀수인 경우는 존재하지 않으므로 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 합의 법칙에 의하여

$18+9=27$

02 답 24

(i) 백의 자리의 수를 정하는 방법

1, 2의 2가지

(ii) 십의 자리의 수를 정하는 방법

1, 2, 3, 4 중 백의 자리의 수를 제외한 3가지

(iii) 일의 자리의 수를 정하는 방법

1, 2, 3, 4, 5, 6 중 백의 자리와 십의 자리의 수를 제외한 4가지

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 세 자리의 수의 개수는

$2\times3\times4=24$

03 답 6

집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f의 정의역의 한 원소 n이 $f(n+1)-f(n)=3$을 만족시키려면

$f(n)=1$, $f(n+1)=4$이어야 한다.

$n=1$일 때 $f(1)=1$, $f(2)=4$이므로 함수 f의 개수는 2이고,

$n=2$, 3일 때도 마찬가지이므로 구하는 함수 f의 개수는

$3\times2=6$이다.

04 답 67

$a+b$가 3의 배수인 경우는 $a=3k$, $b=3k'$의 꼴 또는

$a=3k-1$, $b=3k'-2$의 꼴 또는

$a=3k-2$, $b=3k'-1$의 꼴이다. (단, k, k'은 자연수이다.)

그런데 집합 A의 원소 중 $3k$, $3k-1$, $3k-2$의 꼴은 각각 6개, 7개, 7개이고, 집합 B의 원소 중 $3k'$, $3k'-1$, $3k'-2$의 꼴은 각각 3개, 3개, 4개이다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6\times3+7\times4+7\times3=67$

05 답 ④

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

이때, 나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 두 주사위의 눈의 수가 모두 홀수인 경우뿐이므로 이 경우의 수는 $3\times3=9$

따라서 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수는

$36-9=27$

[다른 풀이]

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수의 곱이 짝수인 경우는 다음과 같이 세 가지 경우이다.

(i) (홀수)×(짝수)인 경우 : $3\times3=9$(가지)

(ii) (짝수)×(홀수)인 경우 : $3\times3=9$(가지)

(iii) (짝수)×(짝수)인 경우 : $3\times3=9$(가지)

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $9+9+9=27$이다.

06 답 10

직선 $y=(a-2)(b-3)x+ab-6$이 x축과 만나지 않기 위해서는 $(a-2)(b-3)=0$이고 $ab\neq6$이어야 한다.

(i) $a=2$일 때

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$의 5가지

(ii) $b=3$일 때

$(1, 3)$, $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$, $(6, 3)$의 5가지

따라서 구하는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $5+5=10$이다.

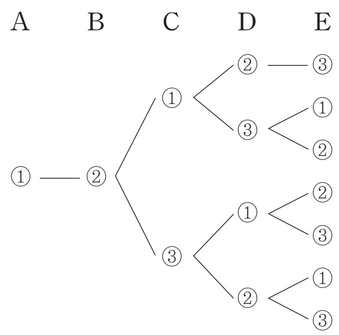
07 답 42

세 가지 색을 각각 ①, ②, ③이라 하고, 수형도를 그리자.

먼저 A에 칠할 수 있는 색은 ①, ②, ③의 3가지이고,

각 경우에 대해 B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

다음 수형도는 A에 ①, B에 ②를 칠하는 경우의 7가지를 구한 것이다.



따라서 구하는 방법의 수는

$\underset{\text{A}}{\underline{3}}\times\underset{\text{B}}{\underline{2}}\times7=42$

[다른 풀이]

여사건을 이용하여 보자.

이웃하는 정사각형에 다른 색을 칠하는 모든 방법의 수에서 3가지색을 모두 사용하지 않은(즉, 2가지 색으로만 칠하는) 방법의 수를 빼면 된다.

(i) 모든 방법의 수

A에 칠할 수 있는 색은 3가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지

C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 2가지

E에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로

$3\times2\times2\times2\times2=48$

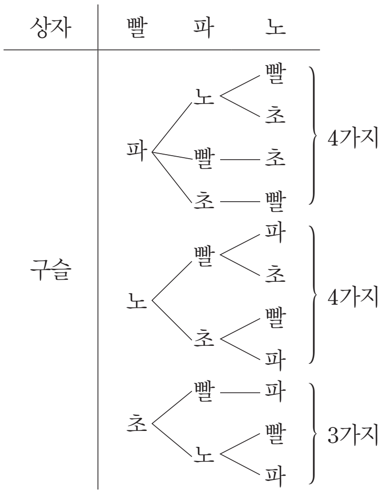
(ii) 2가지 색으로만 칠하는 방법의 수

먼저 칠할 색 2가지를 정하는 방법은 사용하지 않을 색 1가지를 정하는 방법과 같으므로 3가지

각 경우에 대해서 두 가지 색 중에서 A에 칠할 색을 정하는 방법은 2가지이므로 $3\times2=6$(가지)

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $48-6=42$이다.

08 답 ④



위의 수형도에서 구하는 경우의 수는 $4+4+3=11$이다.

09 답 6

$a+b+c=14$를 만족시키려면 세 수 모두 짝수이거나 세 수 중 하나만 짝수이어야 한다. 한편, $abc=72=2^3\times3^2$에서

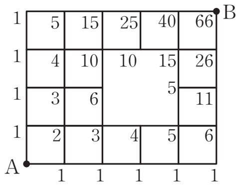
(i) 세 수 모두 짝수인 경우 : 세 수 모두 2를 인수로 가져야 하므로 가능한 경우는 2, 6, 6이다. 따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $(2, 6, 6)$, $(6, 2, 6)$, $(6, 6, 2)$의 3이다.

(ii) 세 수 중 하나만 짝수인 경우 : 한 수에 2^3이 들어가야 하므로 가능한 경우는 8, 3, 3이다. 따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $(8, 3, 3)$, $(3, 8, 3)$, $(3, 3, 8)$의 3이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는 $3+3=6$이다.

10 답 ④

각 갈림길까지 가는 경우의 수를 더해 가면 다음과 같다.



따라서 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 방법의 수는 66이다.

11 답 40

5명을 키가 큰 순서대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5라 하고,
줄을 선 자리를 왼쪽부터 ①, ②, ③, ④, ⑤라 하자.
③ 자리에 선 사람의 키가 그 사람의 양 옆에 있는 두 사람의 키보다 작으려면 자기보다 키가 큰 사람이 2명 이상 있어야 하므로 ③ 자리에 올 수 있는 사람은 a_3, a_4, a_5이다.

(i) ③ 자리에 a_3이 위치한 경우의 수
①, ⑤ 자리에 a_4, a_5가 위치하는 경우의 수는 2
②, ④ 자리에 a_1, a_2가 위치하는 경우의 수는 2
$\therefore 2\times2=4$

(ii) ③ 자리에 a_4가 위치한 경우의 수
a_5가 ① 또는 ⑤ 자리에 위치하는 경우의 수는 2
나머지 세 자리에 a_1, a_2, a_3이 위치한 경우의 수는
$3\times2\times1=6$
$\therefore 2\times6=12$

(iii) ③ 자리에 a_5가 위치한 경우의 수
나머지 네 자리에 a_1, a_2, a_3, a_4가 위치하는 경우의 수는
$4\times3\times2\times1=24$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$4+12+24=40$

[다른 풀이 ①]

5명을 한 줄로 배열하는 전체 경우의 수는
$5\times4\times3\times2\times1=120$
이때, 왼쪽에서 세 번째 자리에 위치한 사람의 키가 그 사람의 양 옆에 있는 두 사람의 키보다 작은 경우는
①, (②, ③, ④), ⑤의 가운데 (②, ③, ④)의 배열에서 키가 가장 작은 사람이 ③의 위치에 오는 경우이므로 전체 배열의 $\frac{1}{3}$이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $120\times\frac{1}{3}=40$

[다른 풀이 ②]

줄을 선 자리를 왼쪽부터 ①, ②, ③, ④, ⑤라 하자.
먼저, ①과 ⑤의 자리에 올 사람을 정하는 방법의 수는
$5\times4=20$
다음, 나머지 3명 중 키가 가장 작은 사람을 제외한 2명을 ②, ④의 자리에 정하는 방법의 수는
$2\times1=2$
따라서 구하는 경우의 수는 $20\times2=40$

12 답 ②

(i) $x=1$일 때
$1\times f(1)$이 3의 배수이어야 하므로 $f(1)$이 3의 배수이어야 한다.
따라서 $f(1)$의 값은 3 또는 6이다.

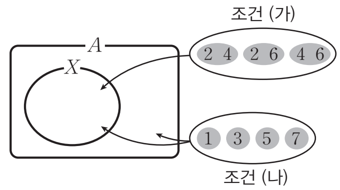
(ii) $x=2$일 때
$2\times f(2)$가 3의 배수이어야 하므로 $f(2)$가 3의 배수이어야 한다.
따라서 $f(2)$의 값은 3 또는 6이다.

(iii) $x=3$일 때
$3\times f(3)$은 $f(3)$의 값에 관계없이 3의 배수이다.
따라서 $f(3)$의 값은 1 또는 2 또는 3 또는 4 또는 5 또는 6이다.

따라서 곱에 법칙에 의하여 구하는 함수의 개수는
$2\times2\times6=24$

13 답 48

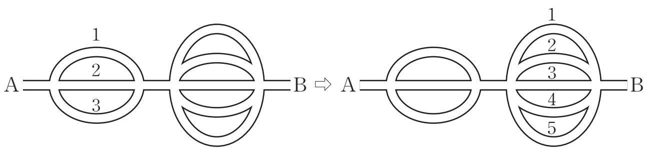
집합 X가 집합 A의 부분집합이므로 집합 A는 다음 두 조건을 모두 만족시켜야 한다.
(가) 원소 2, 4, 6 중 2개의 원소를 가져야 한다.
(나) 원소 1, 3, 5, 7은 각각 원소로 가지거나 가지지 않는다.
이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 3
조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 $2^4=16$
따라서 곱의 법칙에 의하여 가능한 집합 X의 개수는
$3\times16=48$

14 답 ⑤

다음 그림과 같이 갈림길에서 순번을 정하면 모든 길을 지날 수 있다.



따라서 구하는 경우의 수는
$(3\times2\times1)\times(5\times4\times3\times2\times1)=720$

15 답 ⑤

b는 a, c와 달라야 하고, d도 a, c와 달라야 한다.

(ⅰ) $a=c$일 때, a, b, c, d가 될 수 있는 경우의 수는 각각 6, 5, 1, 5이므로 경우의 수는

$6\times5\times1\times5=150$

(ⅱ) $a\neq c$일 때, a, b, c, d가 될 수 있는 경우의 수는 각각 6, 5, 4, 4이므로 경우의 수는

$6\times5\times4\times4=480$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$150+480=630$

16 답 ④

세 다항식 $x^{10}+x^9+\cdots+x+1$, x^5+x^3+x, x^4+x^2+1의 각 항의 계수가 모두 1이므로 각 항의 x의 차수만을 고려하여 $8=a+b+c$로 나타내는 경우를 a, b, c의 순서쌍

(a, b, c) $(a=0, 1, 2, \cdots, 10, b=1, 3, 5, c=0, 2, 4)$

로 나타내면 b는 홀수, c는 짝수이므로 a는 홀수이다.

이때, c를 기준으로 순서쌍 (a, b, c)를 구하면

(ⅰ) $c=0$일 때, $(7, 1, 0)$, $(5, 3, 0)$, $(3, 5, 0)$

(ⅱ) $c=2$일 때, $(5, 1, 2)$, $(3, 3, 2)$, $(1, 5, 2)$

(ⅲ) $c=4$일 때, $(3, 1, 4)$, $(1, 3, 4)$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 x^8의 계수는 8이다.

17 답 ⑤

조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로 조건 (나)를 만족시키려면 치역이 $\{2, 4\}$ 또는 $\{1, 2, 3\}$이어야 한다.

(ⅰ) 치역이 $\{2, 4\}$인 경우

$f(1)=2$이므로 나머지 원소 $\{2, 3, 4\}$가 $\{2, 4\}$에 대응하는 경우에서 모두 2에 대응하는 경우를 빼면 되므로 경우의 수는

$2^3-1=7$이다.

(ⅱ) 치역이 $\{1, 2, 3\}$인 경우

$f(1)=2$이므로 나머지 원소 $\{2, 3, 4\}$가 $\{1, 3\}$ 또는 $\{1, 2, 3\}$에 대응하면 된다.

$\{2, 3, 4\}$가 $\{1, 3\}$에 대응하는 경우의 수는

$2^3-2=6$

$\{2, 3, 4\}$가 $\{1, 2, 3\}$에 대응하는 경우의 수는

$3\times2\times1=6$

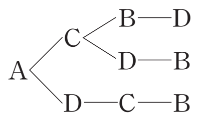
따라서 구하는 경우의 수는 $6+6=12$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

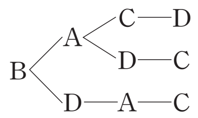
$7+12=19$

18 답 12

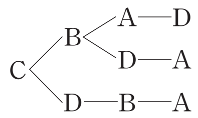
(ⅰ) 처음에 A가 오는 경우의 수는 3



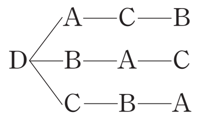
(ⅱ) 처음에 B가 오는 경우의 수는 3



(ⅲ) 처음에 C가 오는 경우의 수는 3



(ⅳ) 처음에 D가 오는 경우의 수는 3

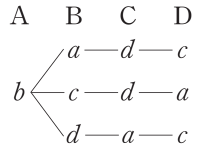


(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $3+3+3+3=12$

19 답 ①

A, B, C, D 네 학생의 모자를 a, b, c, d라 하자.

A가 b를 집었을 때 모두 자기 모자가 아닌 모자를 집는 경우의 수는 다음 수형도와 같이 3이다.

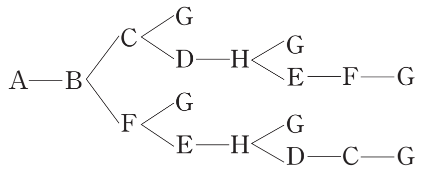


A가 c, d를 집었을 때도 마찬가지로 경우의 수는 각각 3이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $3+3+3=9$이다.

20 답 18

A→B→G인 경우는 다음 수형도와 같으므로 경우의 수는 6이다.



A→D→G, A→E→G인 경우도 마찬가지이므로 구하는 경우의 수는 $6\times3=18$

21 답 17

이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $ax+by+1=0$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=x^2$을 $ax+by+1=0$에 대입하여 정리한 이차방정식 $bx^2+ax+1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 한다.

즉, $D=a^2-4b>0$에서 $a^2>4b$

위 식을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)를 구하면

(ⅰ) $a=3$일 때, $b=1, 2$

(ⅱ) $a=4$일 때, $b=1, 2, 3$

(ⅲ) $a=5$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$

(ⅳ) $a=6$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$2+3+6+6=17$

22 답 70

$f(x)=a_7x^7+a_6x^6+\cdots+a_1x+a_0$ ($a_i=1$ 또는 $a_i=-1$이고, $i=0, 1, 2, \cdots, 7$)이라 하면

$f(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_7=0$이므로

$a_0+a_2+a_4+a_6=a_1+a_3+a_5+a_7$

즉, (짝수차항의 계수의 합)=(홀수차항의 계수의 합)이어야 한다.

(ⅰ) $4=4$일 때, $1\times1=1$

(ⅱ) $2=2$일 때, $4\times4=16$

(ⅲ) $0=0$일 때, $6\times6=36$

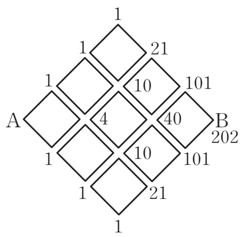
(ⅳ) $-2=-2$일 때, $4\times4=16$

(ⅴ) $-4=-4$일 때, $1\times1=1$

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $1+16+36+16+1=70$

23 답 202

모든 사분원의 길이는 같으므로 주어진 그림을 단순화시키면 다음 그림과 같다.



변이 1개인 것은 그대로, 변이 2개인 것은 2배로 하여 경우의 수를 더해 가면 된다.

따라서 최단거리로 가는 전체 경우의 수는 202이다.

24 답 ②

$a^m=b^n$이므로 a와 b의 소인수는 서로 같아야 한다.

2부터 100까지의 자연수에서 소인수가 같은 수의 집합 중 원소의 개수가 2개 이상인 집합을 모두 구하면

$\{2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\}$, $\{3, 3^2, 3^3, 3^4\}$, $\{5, 5^2\}$,

$\{6, 6^2\}$, $\{7, 7^2\}$, $\{10, 10^2\}$

(ⅰ) $\{2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\}$에서 서로 다른 두 수 a, b를 정하는 경우의 수는 $6\times5=30$

(ⅱ) $\{3, 3^2, 3^3, 3^4\}$에서 서로 다른 두 수 a, b를 정하는 경우의 수는 $4\times3=12$

(ⅲ) $\{5, 5^2\}$, $\{6, 6^2\}$, $\{7, 7^2\}$, $\{10, 10^2\}$에서 서로 다른 두 수 a, b를 정하는 경우의 수는 각각 2이므로 $2\times4=8$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 순서쌍 (a, b)의 개수는

$30+12+8=50$

25 답 42

처음에 1단을 오르고 남은 $(n-1)$개의 계단을 오르는 방법은 $f(n-1)$가지이고, 처음에 2단을 오르고 남은 $(n-2)$개의 계단을 오르는 방법은 $f(n-2)$가지이다.

이때, 이 두 경우는 동시에 일어날 수 없으므로

$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$

1단의 계단을 오르는 방법은 1가지

2단의 계단을 오르는 방법은 (1단, 1단), (2단)의 2가지이므로

$f(1)=1$, $f(2)=2$

$f(3)=f(2)+f(1)=\boxed{3}$ (가)

$f(4)=f(3)+f(2)=\boxed{5}$ (나)

$f(5)=f(4)+f(3)=8$

$f(6)=f(5)+f(4)=13$

$f(7)=f(6)+f(5)=21$

$\therefore f(8)=f(7)+f(6)=\boxed{34}$ (다)

즉, $a=3$, $b=5$, $c=34$이므로

$a+b+c=3+5+34=42$

26 답 ④

다음과 같이 갑의 경로를 기준으로 경우를 나누어 생각하자.

(ⅰ) 갑이 $\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{B}$로 가는 경우

갑의 경로의 방법의 수는 $4\times2=8$

을의 경로의 방법의 수는 $(3\times1)+(2\times3)=9$

갑과 을이 동시에 진행하므로 곱의 법칙에 의하여

구하는 방법의 수는 $8\times9=72$

(ⅱ) 갑이 $\mathrm{A}\to\mathrm{D}\to\mathrm{B}$로 가는 경우

갑의 경로의 방법의 수는 $2\times3=6$

을의 경로의 방법의 수는 $(4\times2)+(1\times2)=10$

갑과 을이 동시에 진행하므로 곱의 법칙에 의하여

구하는 방법의 수는 $6\times10=60$

(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여

$72+60=132$

27 답 ②

$420=2^2\times3\times5\times7$이므로 $420=a\times b$ (a, b는 서로소)라 하면 소인수 2, 3, 5, 7은 a나 b 중 한 군데에만 들어가야 한다.

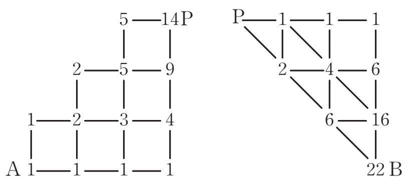
이때, 2^2이 들어간 수를 a라 하면 3이 들어갈 곳을 정하는 경우의 수는 a 또는 b의 2가지이고, 마찬가지로 5와 7이 들어갈 곳을 정하는 경우의 수는 각각 2가지이므로 구하는 경우의 수는 $2\times2\times2=8$

28 답 ⑤

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, ⋯, 9의 9개이고, 천의 자리와 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, 3, ⋯, 9의 10개이다. 한편, 십의 자리와 일의 자리의 숫자는 각각 천의 자리, 만의 자리의 숫자와 서로 같으므로 구하는 자연수의 개수는 $9\times10\times10=900$이다.

29 답 **308**

그림과 같이 A지점에서 P지점까지의 경로의 수와
P지점에서 B지점까지의 경로의 수를 각각 구해 보자.



따라서 A지점에서 출발하여 B지점에 도착하는 경로의 수는 곱의 법칙에 의하여 $14\times22=308$이다.

30 답 ②

각 자리의 숫자를 a, b, c, d라 하면 $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}$에서

a는 2, 3, 4, 5 중에서, d는 0, 2, 4, 6, 8 중에서 택할 수 있다.

$\{2, 3, 4, 5\}\cap\{0, 2, 4, 6, 8\}=\{2, 4\}$이므로

(ⅰ) $a\in\{2, 4\}$일 때,

a를 정하는 방법의 수는 2

d를 정하는 방법의 수는 a를 제외한 4

b, c를 정하는 경우의 수는 0~9 중 a, d를 제외한 나머지 8개의 수에서 서로 다른 두 수를 배열하면 되므로 방법의 수는

$8\times7=56$

$\therefore 2\times4\times56=448$

(ⅱ) $a\in\{3, 5\}$일 때,

a를 정하는 방법의 수는 2

d를 정하는 방법의 수는 5

b, c를 정하는 경우의 수는 0~9 중 a, d를 제외한 나머지 8개의 수에서 서로 다른 두 수를 배열하면 되므로 방법의 수는

$8\times7=56$

$\therefore 2\times5\times56=560$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 수의 개수는 $448+560=1008$이다.

31 답 ③

$6=2\times3$이므로 3의 배수인 짝수의 개수를 구하면 된다.

3으로 나눈 나머지가 i인 집합을 R_i라 하면

$R_0=\{0, 3, 6\}$, $R_1=\{1, 4\}$, $R_2=\{2, 5\}$

자릿수의 합이 3의 배수이면 그 수는 3의 배수이므로

세 자리 수를 $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}$로 놓고 가능한 $\boxed{A}\boxed{B}$를 구해 보자.

(ⅰ) 일의 자리의 수가 0인 경우

R_0에서 나머지 2개를 택하여 배열하는 경우의 수는 2

R_1, R_2에서 하나씩 택하여 배열하는 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

$\therefore 8+2=10$

(ⅱ) 일의 자리의 수가 2인 경우

R_0, R_1에서 하나씩 택하여 배열하는 경우의 수는

$3\times2\times2=12$

이때, 백의 자리의 수가 0인 경우의 수가 2이므로

구하는 경우의 수는 $12-2=10$

(ⅲ) 일의 자리의 수가 4인 경우

일의 자리의 수가 2인 경우의 수와 같으므로

구하는 경우의 수는 10

(ⅳ) 일의 자리의 수가 6인 경우

R_0에서 나머지 2개를 택하여 배열하는 경우의 수는 1

R_1, R_2에서 하나씩 택하여 배열하는 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

$\therefore 8+1=9$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$10+10+10+9=39$

32 답 ①

$a=b$로 놓으면 $2a+c=24$에서 c는 짝수이다.

$c=2$일 때, $a=b=11$

$c=4$일 때, $a=b=10$

$c=6$일 때, $a=b=9$

$c=8$일 때, $a=b=8$

$c=10$일 때, $a=b=7$

$c\geq12$이면 $a=b\leq6$이 되어 삼각형이 만들어지지 않는다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 이등변삼각형의 개수는 5이다.

[다른 풀이]

$a\geq b\geq c$라 하여도 문제의 일반성을 잃지 않는다.

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 커야 하므로

$b+c>a$에서 $2a<a+b+c$이고, $a\geq b\geq c$에서 $a+b+c\leq3a$

즉, $2a<a+b+c\leq3a$에서 $2a<24\leq3a$, $8\leq a<12$

$\therefore a=8, 9, 10, 11$

(ⅰ) $a=8$, $b+c=16$일 때, $(b, c)=(8, 8)$

(ⅱ) $a=9$, $b+c=15$일 때, $(b, c)=(9, 6), (8, 7)$

(ⅲ) $a=10$, $b+c=14$일 때, $(b, c)=(10, 4), (9, 5), (8, 6), (7, 7)$

(ⅳ) $a=11$, $b+c=13$일 때,

$(b, c)=(11, 2), (10, 3), (9, 4), (8, 5), (7, 6)$

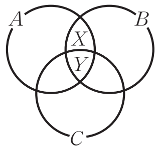
(ⅰ)~(ⅳ)에서 이등변삼각형이 될 수 있는 순서쌍

(a, b, c)는 $(8, 8, 8)$, $(9, 9, 6)$, $(10, 10, 4)$,

$(10, 7, 7)$, $(11, 11, 2)$의 5개이다.

33 답 100

다음 벤 다이어그램과 같이 $A\cap B$의 두 영역을 X, Y라 하자.



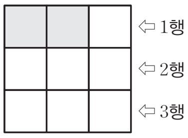
$A\cap B=\{a,\ b\}$에서 a, b가 두 영역 X, Y에 들어가는 경우의 수는 다음 표에서 4이다.

X	a, b	a	b	
Y		b	a	a, b

각 경우에 대하여 c와 d가 X, Y를 제외한 자리에 들어갈 수 있는 경우의 수는 각각 5이므로 구하는 경우의 수는

$4\times5\times5=100$이다.

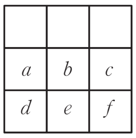
34 답 45



그림과 같이 투명 유리 상자를 윗줄부터 차례로 1행, 2행, 3행이라 하자. 4개의 검은 상자를 넣어 각 행이 검게 보이려면 어느 한 행에는 2개, 나머지 두 행에는 각각 1개가 들어가야 한다.

(ⅰ) 1행에 검은 상자 2개를 넣는 방법의 수는 3

(ⅱ) (ⅰ)의 각 경우에 대하여 2행과 3행에 검은 상자를 하나씩 넣는 경우의 수는 오른쪽 그림에서



ⓘ 2행에 검은 상자가 a의 위치에 오는 경우 :
3행에 검은 상자가 들어갈 수 있는 방법의 수는 f의 1

ⓘⓘ 2행에 검은 상자가 b의 위치에 오는 경우 :
3행에 검은 상자가 들어갈 수 있는 방법의 수는 f의 1

ⓘⓘⓘ 2행에 검은 상자가 c의 위치에 오는 경우 :
3행에 검은 상자가 들어갈 수 있는 방법의 수는 d, e, f의 3

ⓘ~ⓘⓘⓘ에 의하여 1행에 2개를 넣었을 때 2행, 3행에 각각 검은 상자를 1개씩 넣는 방법의 수는 $1+1+3=5$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 1행에 검은 상자 2개를 넣었을 경우 구하는 방법의 수는 $3\times5=15$

한편, 2행에 검은 상자 2개를 넣는 경우와 3행에 검은 상자 2개를 넣는 경우 역시 1행에 검은 상자를 2개 넣는 방법의 수와 같으므로 구하는 방법의 수는

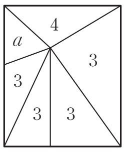
$15\times3=45$

35 답 ②

서로 다른 5가지의 색을 각각 a, b, c, d, e라 하자.

먼저 영역 A에 칠하는 색을 a라 하면

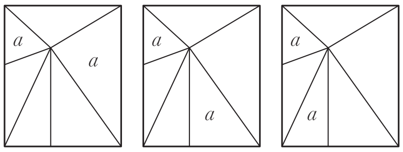
(ⅰ) 나머지 5개의 영역에 a를 사용하지 않는 경우 :



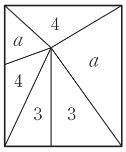
a를 제외한 4개의 색을 이용하여 B, C, D, E, F를 칠하는 방법의 수는

$4\times3\times3\times3\times3=324$

(ⅱ) 나머지 5개의 영역에 a를 1번 사용하는 경우 :



a를 칠할 수 있는 방법의 수는 위의 그림과 같이 3이고, 각 경우에 대하여 나머지 영역을 칠하는 방법의 수는 오른쪽 그림과 같이

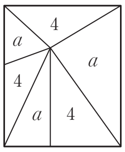


$4\times4\times3\times3=144$

따라서 구하는 방법의 수는

$3\times144=432$

(ⅲ) 나머지 5개의 영역에 a를 2번 사용하는 경우 :



a를 칠할 수 있는 방법의 수는 1

나머지 영역을 칠하는 방법의 수는

$4\times4\times4=64$

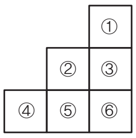
(ⅰ)~(ⅲ)에서 A에 칠한 색을 a라 했을 때 나머지를 칠하는 방법의 수는 $324+432+64=820$

영역 A에 b, c, d, e를 칠할 때도 마찬가지이므로 색칠하는 방법의 수는

$820\times5=4100$

36 답 ③

(ⅰ) ③, ⑤에 같은 색을 칠하는 경우



③, ⑤에 칠할 색을 택하는 방법의 수는 3

①, ②, ④, ⑥에 칠할 색을 선택하는 방법의 수는 $2\times2\times2\times2=16$

$\therefore 3\times16=48$

(ⅱ) ③, ⑤에 서로 다른 색을 칠하는 경우

③, ⑤에 서로 다른 색을 칠하는 방법의 수는

$3\times2=6$

②, ⑥에 칠할 색을 선택하는 방법의 수는 $1\times1=1$

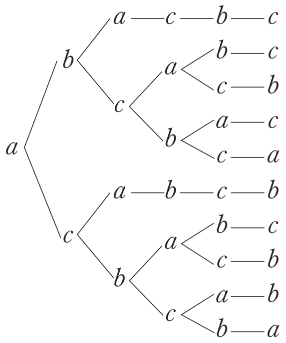
①, ④에 칠할 색을 선택하는 방법의 수는 $2\times2=4$

$\therefore 6\times1\times4=24$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 방법의 수는 $48+24=72$

37 답 30

맨 앞에 a를 배열하는 경우는 다음 수형도와 같이 10가지이다.



맨 앞에 b, c를 배열하는 경우도 a와 마찬가지로 각각 10가지씩이므로 구하는 경우의 수는 $3\times10=30$

[다른 풀이]

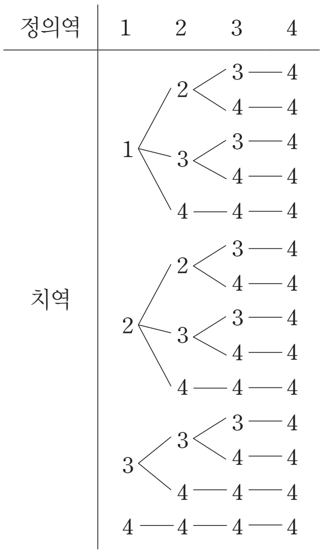
a가 맨 앞에 오는 경우에 대하여 먼저 a를 이웃하지 않게 배열한 후 빈칸에 b, c를 배열하는 경우는 다음과 같다.

a		a				⇦2가지
a			a			⇦4가지
a				a		⇦2가지
a					a	⇦2가지

즉, 맨 앞에 a를 배열하는 경우의 수는 $2+4+2+2=10$
맨 앞에 b, c를 배열하는 경우도 a와 마찬가지로 각각 10가지씩이므로 구하는 경우의 수는
$3\times10=30$

38 답 ④

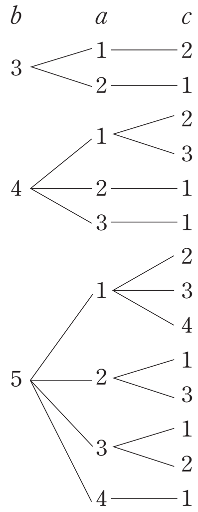
주어진 조건에 맞게 수형도를 그리면 다음과 같다.



따라서 가능한 함수의 개수는 14이다.

39 답 46

$a>0$이므로 모든 실수 x에 대하여
$ax^2+bx+c>0$이 항상 성립하려면
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의
판별식을 D라 할 때,
$D=b^2-4ac<0$, 즉 $b^2<4ac$이어야 한다.
이때, a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 전체 개수는 $5\times4\times3=60$이고,
$b^2\geq4ac$를 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 그림의 수형도와 같이 14이다.
따라서 구하는 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $60-14=46$이다.

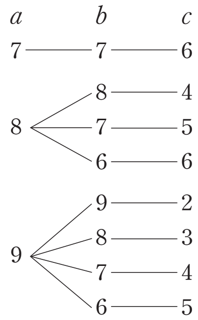


[다른 풀이]

$b^2<4ac$가 성립하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하면
$b=1$일 때, a, c를 정하는 방법의 수는 $4\times3=12$
$b=2$일 때, $b=1$일 때와 마찬가지로 $4\times3=12$
$b=3$일 때, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(4,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 1)$, $(5,\ 2)$, $(5,\ 4)$의 10가지
$b=4$일 때, $(1,\ 5)$, $(2,\ 3)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 5)$, $(5,\ 1)$, $(5,\ 2)$, $(5,\ 3)$의 8가지
$b=5$일 때, $(2,\ 4)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 3)$의 4가지
따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $12+12+10+8+4=46$

40 답 ③

$20\div3=6.666\cdots$
$20\div2=10$이므로 가장 긴 변의 길이는 7 이상 10 미만이다.
이때, 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c라 하고, $a\geq b\geq c$라고 해도 일반성을 잃지 않으므로 오른쪽 수형도와 같이 구하는 삼각형의 개수는 8가지이다.



41 답 121

상품 100개를 10개씩, 5개씩 포장하고 남은 것은 모두 낱개 포장하면 되므로 포장단위가 큰 것부터 차례로 조사하자. ⓐ
10개씩 포장한 개수를 a개, 5개씩 포장한 개수를 b개라 하면 가능한 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(10,\ 0)$ ⇨ 1가지
$(9,\ 0)$, $(9,\ 1)$, $(9,\ 2)$ ⇨ 3가지
$(8,\ 0)$, $(8,\ 1)$, $(8,\ 2)$, $(8,\ 3)$, $(8,\ 4)$ ⇨ 5가지
⋮

$(1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,\ (1,\ 17),\ (1,\ 18)$ ⇨ 19가지

$(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 2),\ \cdots,\ (0,\ 19),\ (0,\ 20)$ ⇨ 21가지 ······ ⓑ

따라서 구하는 경우의 수는

$1+3+5+\cdots+17+19+21$

$=(1+19)+(3+17)+\cdots+(9+11)+21$

$=20\times5+21=121$ ······ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 무엇을 기준으로 경우를 나눌지 생각한다. [10%]
ⓑ 모든 경우를 빠짐없이 나열한다. [50%]
ⓒ 모든 경우의 수를 구한다. [40%]

[다른 풀이]

상품 100개를 10개씩, 5개씩 포장하고 남은 것은 모두 낱개 포장하면 된다.

이때, 10개씩 포장한 개수를 a개, 5개씩 포장한 개수를 b개라 하면 $10a+5b\le100$, $0\le a\le10$, $b\ge0$에서 $0\le b\le2(10-a)$이므로

$a=0$일 때, b는 0, 1, 2, ⋯, 20의 21가지
$a=1$일 때, b는 0, 1, 2, ⋯, 18의 19가지
$a=2$일 때, b는 0, 1, 2, ⋯, 16의 17가지
⋮
$a=9$일 때, b는 0, 1, 2의 3가지
$a=10$일 때, b는 0의 1가지

따라서 구하는 경우의 수는

$1+3+5+\cdots+17+19+21$

$=(1+19)+(3+17)+\cdots+(9+11)+21$

$=20\times5+21=121$

42 답 300

사용되는 숫자는 세 종류이므로 어느 한 숫자는 2번 사용되어야 한다.

(i) 천의 자리와 십의 자리의 수가 같은,
즉 $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{A}\boxed{C}$ 꼴인 경우
$\boxed{A}$에는 0이 올 수 없으므로 5가지,
$\boxed{B}$에는 $\boxed{A}$에 사용된 수를 제외한 5가지,
$\boxed{C}$에는 $\boxed{A}$, $\boxed{B}$에 사용된 수를 제외한 4가지이므로 경우의 수는
$5\times5\times4=100$ ······ ⓐ

(ii) 천의 자리와 일의 자리의 수가 같은,
즉 $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{A}$ 꼴인 경우
$\boxed{A}$에는 0이 올 수 없으므로 5가지,
$\boxed{B}$에는 $\boxed{A}$에 사용된 수를 제외한 5가지,
$\boxed{C}$에는 $\boxed{A}$, $\boxed{B}$에 사용된 수를 제외한 4가지이므로 경우의 수는
$5\times5\times4=100$ ······ ⓑ

(iii) 백의 자리와 일의 자리의 수가 같은,
즉 $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{B}$ 꼴인 경우
$\boxed{A}$에는 0이 올 수 없으므로 5가지,
$\boxed{B}$에는 $\boxed{A}$에 사용된 수를 제외한 5가지,
$\boxed{C}$에는 $\boxed{A}$, $\boxed{B}$에 사용된 수를 제외한 4가지이므로 경우의 수는
$5\times5\times4=100$ ······ ⓒ

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

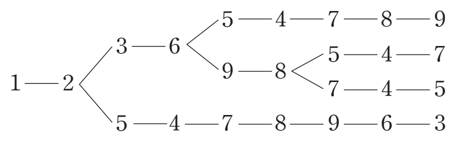
$3\times100=300$ ······ ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ 천의 자리와 십의 자리의 수가 같은 경우의 수를 구한다. [30%]
ⓑ 천의 자리와 일의 자리의 수가 같은 경우의 수를 구한다. [30%]
ⓒ 백의 자리와 일의 자리의 수가 같은 경우의 수를 구한다. [30%]
ⓓ 전체 경우의 수를 구한다. [10%]

43 답 40

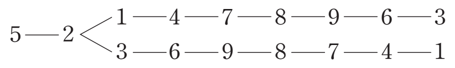
(i) a_1의 경우의 수 : 먼저 1에서 2로 가는 경우를 살펴보면 다음 수형도와 같이 4가지이다.



또한, 1에서 4로 가는 경우도 마찬가지로 4가지이므로
$a_1=4\times2=8$ ······ ⓐ

(ii) a_2의 경우의 수 : 2에서 시작하는 경우 모든 정사각형을 지날 수 없으므로 $a_2=0$ ······ ⓑ

(iii) a_5의 경우의 수 : 5에서 2로 가는 경우는 다음 수형도와 같이 2가지이다.



또한, 5에서 4, 6, 8로 가는 경우도 마찬가지로 각각 2가지씩이므로 $a_5=2\times4=8$ ······ ⓒ

한편, 대칭성에 의해 $a_1=a_3=a_7=a_9$이고

$a_2=a_4=a_6=a_8$이므로

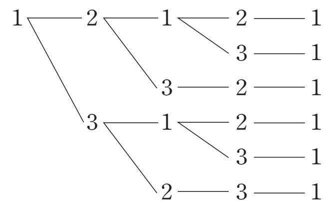
$a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9=4a_1+4a_2+a_5=32+0+8=40$ ······ ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ a_1의 값을 구한다. [25%]
ⓑ a_2의 값을 구한다. [25%]
ⓒ a_5의 값을 구한다. [25%]
ⓓ $a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9$의 값을 구한다. [25%]

44 답 18

만의 자리 숫자와 일의 자리 숫자가 1인 경우는 수형도와 같다.



따라서 만의 자리 숫자와 일의 자리 숫자가 1인 경우의 수는 6이고 만의 자리 숫자와 일의 자리 숫자가 2 또는 3인 경우의 수도 1인 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는 $6\times3=18$이다.

45 답 ②

$f(1)=a$, $f(2)=b$라 하면 주어진 조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

(i) $a+b=4$일 때

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3개

(ii) $a+b=8$일 때

$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$의 5개

(iii) $a+b=12$일 때 $(6, 6)$의 1개

(i)~(iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 9이다.

46 답 20

(i) 꽃병 A에 장미를 꽂은 경우

꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 카네이션이 a송이, 백합이 b송이라 하면 $0\le a\le 6$, $0\le b\le 8$이므로

(a, b)로 가능한 경우의 수는 $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$의 6이다.

(ii) 꽃병 A에 카네이션을 꽂은 경우

꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 장미가 a송이, 백합이 b송이라 하면 $0\le a\le 8$, $0\le b\le 8$이므로

(a, b)로 가능한 경우의 수는 $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$, $(7, 2)$, $(8, 1)$의 8이다.

(iii) 꽃병 A에 백합을 꽂은 경우

꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 장미가 a송이, 카네이션이 b송이라 하면 $0\le a\le 8$, $0\le b\le 6$이므로

(a, b)로 가능한 경우의 수는 $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$, $(7, 2)$, $(8, 1)$의 6이다.

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $6+8+6=20$이다.

47 답 ⑤

A, B, C 3명의 아이에게 나누어 준 사탕의 개수를 각각 a, b, c라 하고 사탕 5개를 3명의 아이에게 1개 이상씩 나누어 주는 경우를 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)로 나타내면 다음과 같이 6가지 경우가 있다.

(i) $(1, 1, 3)$

(ii) $(1, 3, 1)$

(iii) $(3, 1, 1)$

(iv) $(1, 2, 2)$

(v) $(2, 1, 2)$

(vi) $(2, 2, 1)$

(i)~(iii)의 경우 1개의 사탕을 받은 2명의 아이에게 초콜릿 5개를 1개 이상씩 나누어 주는 경우는 $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4가지이므로 이때의 경우의 수는 $3\times4=12$

(iv)~(vi)의 경우 1개의 사탕을 받은 아이가 1명이므로 그 아이에게 초콜릿 5개를 모두 주므로 이때의 경우의 수는 $3\times1=3$

따라서 구하는 경우의 수는 $12+3=15$이다.

48 답 64

집합 $X=\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f(x)$가 X에서 X로의 함수이고 조건 (가)의

$|f(x)+f(-x)|=1$에서 $f(x)+f(-x)=1$ 또는

$f(x)+f(-x)=-1$이므로 $x>0$인 X의 원소 x에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $f(x)=1$일 때

$f(x)+f(-x)=-1$에서 $f(-x)=-2$

(ii) $f(x)=2$일 때

$f(x)+f(-x)=-1$에서 $f(-x)=-3$ 또는

$f(x)+f(-x)=1$에서 $f(-x)=-1$

(iii) $f(x)=3$일 때

$f(x)+f(-x)=1$에서 $f(-x)=-2$

따라서 $f(1)$과 $f(-1)$을 대응시키는 경우의 수는 4이고,

$f(2)$와 $f(-2)$를 대응시키는 경우의 수와 $f(3)$과 $f(-3)$을 대응시키는 경우의 수도 각각 4이므로 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는

$4\times4\times4=64$

49 답 ②

먼저 1000은 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 제외한 후,

1부터 999까지의 자연수에서 생각하자.

두 조건 (가)와 (다)에 의하여 일의 자리의 수는 1, 3, 7, 9 중 하나이다.

이때, 두 조건 (가)와 (다)를 만족시키는 1부터 999까지의 자연수의 개수는 $10\times10\times4=400$

한편, 조건 (나)에서 각 자리의 수의 합이 3의 배수가 아니므로 전체 400개 중에서 각 자리 수의 합이 3의 배수인 수를 제외하면 된다.

0~9까지의 수를 3으로 나눈 나머지가

0인 수는 0, 3, 6, 9의 4개, 1인 수는 1, 4, 7의 3개,

2인 수는 2, 5, 8의 3개이므로 백의 자리의 수, 십의 자리의 수를 3으로 나눈 나머지를 각각 a, b라 하면

(i) □□1일 때

(a, b)가 $(2, 0)$인 경우의 수는 $3\times4=12$

$(1, 1)$인 경우의 수는 $3\times3=9$

$(0, 2)$인 경우의 수는 $4\times3=12$

따라서 이때의 경우의 수는

$12+9+12=33$

(ii) □□3일 때

(a, b)가 $(0, 0)$인 경우의 수는 $4\times4=16$

$(1, 2)$인 경우의 수는 $3\times3=9$

$(2, 1)$인 경우의 수는 $3\times3=9$

따라서 이때의 경우의 수는

$16+9+9=34$

(iii) □□7일 때

(i)의 경우와 같으므로 이때의 경우의 수는 33

(iv) □□9일 때

(ii)의 경우와 같으므로 이때의 경우의 수는 34

(i)~(iv)에 의하여 각 자리의 수의 합이 3의 배수인 수의 개수는

$33+34+33+34=134$이므로 구하는 경우의 수는

$400-134=266$

[다른 풀이]

주어진 조건을 만족시키는 수는 홀수이면서 3의 배수가 아니고 5의 배수도 아닌 수이다.

즉, 구하는 경우의 수는 1부터 1000까지의 자연수 1000개 중 홀수의 개수에서 홀수인 3의 배수의 개수와 홀수인 5의 배수의 개수를 빼고 홀수인 15의 배수의 개수를 더하면 된다.

이때, 1에서 1000까지의 자연수 중 홀수의 개수는 500, 홀수인 3의 배수의 개수는 167, 홀수인 5의 배수의 개수는 100, 홀수인 15의 배수의 개수는 33개이므로 구하는 경우의 수는

$500-167-100+33=266$

50 답 126

(i) 서로 다른 세 수로 이루어진 세 자리 자연수 중 조건을 만족시키는 경우는

(1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), (1, 6, 7), (1, 7, 8), (1, 8, 9), (2, 3, 5), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (2, 6, 8), (2, 7, 9), (3, 4, 7), (3, 5, 8), (3, 6, 9), (4, 5, 9)의 16가지이고, 각 경우에 자리를 바꾸는 경우의 수가 $3\times2\times1=6$이므로 구하는 자연수의 개수는 $16\times6=96$

(ii) 두 수가 같은 세 자리 자연수 중 조건을 만족시키는 경우는

(1, 1, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 0), (4, 4, 0), (5, 5, 0), (6, 6, 0), (7, 7, 0), (8, 8, 0), (9, 9, 0), (1, 1, 2), (2, 2, 4), (3, 3, 6), (4, 4, 8)의 13가지이고,

각 경우에 자리를 바꾸는 경우의 수는 3가지이다.

이때, 0을 포함하는 경우에는 맨 첫 자리에 0이 올 수 없으므로 구하는 자연수의 개수는 $13\times3-9=30$

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는 $96+30=126$이다.

51 답 89

이웃하는 두 점 사이의 거리를 1이라 하면 전체 5의 거리를 날아가거나 걸어가는 방법의 수를 구하는 것이다.

이때, 5를 1개 이상의 자연수의 합으로 나타내는 방법은

(5), (4+1), (3+2), (3+1+1), (2+2+1), (2+1+1+1), (1+1+1+1+1)

의 7가지이다.

각 경우에서 2 이상의 수는 날아서만 가는 한 가지 방법만 존재하고, 1은 걸어가거나 날아가는 두 가지 방법이 존재하므로

(i) (5)일 경우의 수

배열 방법은 1가지이고 1의 개수는 0이므로

이때의 경우의 수는 1이다.

(ii) (4+1)일 경우의 수

배열 방법은 2가지이고 1의 개수는 1이므로

이때의 경우의 수는 $2\times2=4$이다.

(iii) (3+2)일 경우의 수

배열 방법은 2가지이고 1의 개수는 0이므로

이때의 경우의 수는 2이다.

(iv) (3+1+1)일 경우의 수

배열 방법은 3가지이고 1의 개수는 2이므로

이때의 경우의 수는 $3\times2\times2=12$이다.

(v) (2+2+1)일 경우의 수

배열 방법은 3가지이고 1의 개수는 1이므로

이때의 경우의 수는 $3\times2=6$이다.

(vi) (2+1+1+1)일 경우의 수

배열 방법은 4가지이고 1의 개수는 3이므로

이때의 경우의 수는 $4\times2\times2\times2=32$이다.

(vii) (1+1+1+1+1)일 경우의 수

배열 방법은 1가지이고 1의 개수는 5이므로

이때의 경우의 수는 $2\times2\times2\times2\times2=32$이다.

(i)~(vii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$1+4+2+12+6+32+32=89$

52 답 ③

a_1이 최소이고, b_4가 최대이므로 $a_1=1$, $b_4=8$로 결정된다.

(i) $2=b_1$일 때

남은 수 중에서 3이 최소이므로 $3=a_2$이어야 한다.

1	3	a_3	a_4
2	b_2	b_3	8

여기서 $4=b_2$이면 $5=a_3$이어야 하고, a_4에는 6 또는 7이 올 수 있으므로 2가지

한편, $4=a_3$이면 a_4에는 5 또는 6 또는 7이 올 수 있으므로 3가지

따라서 이때의 경우의 수는 $2+3=5$이다.

(ii) $2=a_2$일 때

1	2	a_3	a_4
b_1	b_2	b_3	8

3은 b_1 또는 a_3에 들어갈 수 있다.

$3=b_1$일 경우 (i)의 경우와 같으므로 5가지

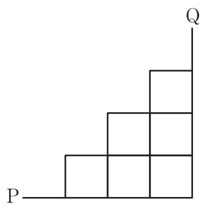
$3=a_3$일 경우, a_4에는 4, 5, 6, 7 중 하나가 올 수 있으므로 4가지

따라서 이때의 경우의 수는 $5+4=9$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $5+9=14$이다.

[다른 풀이]

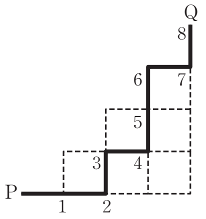
오른쪽 그림과 같은 도로망에서 점 P에서 점 Q로 가는 최단 경로의 방법에서 → 방향을 차례로 a_i, ↑ 방향을 차례로 b_i에 대응시키면 구하고자 하는 배열의 수와 일대일대응이 된다.



예를 들어 [그림 1]의 경로는

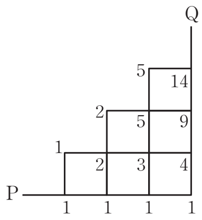
1	2	4	7
3	5	6	8

에 대응된다.



[그림 1]

따라서 구하는 배열의 수는 [그림 2]에서 14가지이다.



[그림 2]

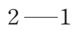
53 답 ②

(ⅰ) 처음 꺼낸 카드의 숫자가 1인 경우의 수

이후 꺼낸 카드는 모두 1보다 크므로 나머지 카드는 모두 버려진다. 따라서 이때의 경우의 수는 1이다.

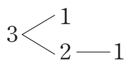
(ⅱ) 처음 꺼낸 카드의 숫자가 2인 경우의 수

수형도를 그리면 오른쪽과 같으므로 이때의 경우의 수는 1이다.



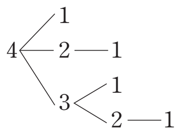
(ⅲ) 처음 꺼낸 카드의 숫자가 3인 경우의 수

수형도를 그리면 오른쪽과 같으므로 이때의 경우의 수는 2이다.



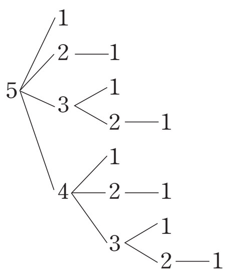
(ⅳ) 처음 꺼낸 카드의 숫자가 4인 경우의 수

수형도를 그리면 오른쪽과 같으므로 이때의 경우의 수는 4이다.



(ⅴ) 처음 꺼낸 카드의 숫자가 5인 경우의 수

수형도를 그리면 오른쪽과 같으므로 이때의 경우의 수는 8이다.



(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $1+1+2+4+8=16$

[다른 풀이]

처음 나온 숫자가 n일 때 탁자에 배열되는 카드의 모든 경우의 수를 a_n이라 하면

$a_{n+1}=a_1+a_2+\cdots+a_n$이다.

이때, $a_1=1$, $a_2=a_1=1$이므로

$a_3=a_1+a_2=1+1=2$

$a_4=a_1+a_2+a_3=1+1+2=4$

$a_5=a_1+a_2+a_3+a_4=1+1+2+4=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1+1+2+4+8=16$

54 답 30

갈림길에서 각각의 경로를 →, ↗, ↖라 하면

조건 (가)에 의하여 →, ↗, ↖를 각각 2개씩 배열해야 된다.

또한, 처음에 ↖는 나올 수 없고 각 갈림길까지 나온 →의 개수는 ↖의 개수보다 크거나 같아야 하므로

조건 (나)에 의하여 →, ↖을 각각 2개씩 배열하는 방법은

→→↖↖, →↖→↖의 2가지이다.

따라서 전체 경로의 수는

□→□→□↖□↖□,

□→□↖□→□↖□

에서 5개의 □의 자리에 ↗을 1개 또는 2개 배열하면 된다.

이때, ↗를 □에 2개 배열하는 방법이 5가지, 1개씩 두 군데 넣는 방법이 10가지이므로 구하는 경우의 수는

$2\times(5+10)=30$

01 답 ②

백의 자리에는 0이 아닌 1, 2, 3, 4, 5의 다섯 개의 숫자를 사용할 수 있고, 십의 자리와 일의 자리에는 백의 자리에 사용하지 않은 다섯 개의 숫자 중 2개의 수를 나열하면 된다. 따라서 구하는 세 자리의 자연수의 개수는 $5\times{}_5P_2=100$

02 답 3

${}_{n+1}P_3={}_nP_3+k{}_nP_2$에서

$(n+1)n(n-1)=n(n-1)(n-2)+kn(n-1)$

(i) $n(n-1)=0$일 때,

(좌변)=(우변)=0이므로 항상 성립한다.

(ii) $n(n-1)\neq0$일 때,

양변을 $n(n-1)$로 나누면 $n+1=n-2+k$ $\quad\therefore k=3$

(i), (ii)에 의하여 $k=3$일 때, 주어진 등식은 n의 값에 관계없이 항상 성립한다.

[다른 풀이]

${}_{n+1}P_3={}_nP_3+k{}_nP_2$에서

$(n+1)n(n-1)=n(n-1)(n-2)+kn(n-1)$

$(n+1)n(n-1)-n(n-1)(n-2)-kn(n-1)=0$

$n(n-1)\{(n+1)-(n-2)-k\}=0$

$\therefore n(n-1)(3-k)=0$

따라서 임의의 자연수 n에 대하여 항상 성립하도록 하는 자연수 k의 값은 3이다.

일등급 UP

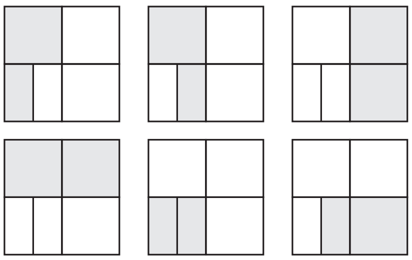
* 순열의 수의 성질

${}_nP_r$에서 $n<r$일 때, ${}_nP_r=0$이다.

따라서 등식 ${}_{n+1}P_3={}_nP_3+k{}_nP_2$가 n에 대한 항등식이므로 $n=2$를 대입하면 ${}_3P_3={}_2P_3+k{}_2P_2$에서 $6=0+2k$ $\quad\therefore k=3$

03 답 144

(i) 먼저 같은 색을 칠할 이웃한 두 영역을 선택하는 경우의 수는 그림과 같이 6



(ii) 4가지 색을 칠하는 방법의 수는 $4!$

(i), (ii)에 의하여 색을 칠하는 방법의 수는 $6\times4!=144$

04 답 ④

먼저 남학생 5명을 일렬로 앉히는 방법의 수는 $5!$

다음과 같이 남학생의 사이사이와 양 끝에 여학생 3명을 일렬로 앉히는 방법의 수는 ${}_6P_3$

곱의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는 $5!\times{}_6P_3=14400$

05 답 4

${}_{10}C_{r+1}={}_{10}C_{2r}$가 성립할 조건은 $r+1=2r$ 또는 $r+1+2r=10$

(i) $r+1=2r$에서 $r=1$

(ii) $r+1+2r=10$에서 $r=3$

따라서 모든 r의 값의 합은 $1+3=4$

06 답 ③

2부터 9까지의 8개의 자연수 중에서 3개의 수를 선택한 후 선택된 세 수를 작은 수부터 a, b, c라 하면 주어진 조건을 만족시키는 세 자리의 자연수를 구할 수 있다.

따라서 구하는 세 자리의 자연수의 개수는 ${}_8C_3=56$

07 답 ⑤

각 호텔에 배정된 인원이 다르기 때문에 10명을 2명, 5명, 3명으로 나누면 호텔 배정은 자동으로 결정된다.

따라서 배정하는 방법의 수는

${}_{10}C_2\times{}_8C_5\times{}_3C_3=\frac{10!}{2!\times8!}\times\frac{8!}{5!\times3!}\times1=\frac{10!}{2!\times3!\times5!}$

08 답 60

공역의 원소 5개 중에서 서로 다른 3개를 택해 정의역의 원소 3개에 차례로 대응시키는 방법의 수이므로 ${}_5P_3=60$

09 답 ②

일의 자리의 수를 a라 하면 a가 짝수이므로

	a를 정하는 경우의 수		나머지 자리의 수를 정하는 경우의 수		
5 □ □ a :	3	$\times$	${}_4P_2$	$=$	36
4 □ □ a :	2	$\times$	${}_4P_2$	$=$	24
3 5 □ a :	3	$\times$	${}_3P_1$	$=$	9
3 4 □ a :	2	$\times$	${}_3P_1$	$=$	6
3 2 □ a :	2	$\times$	${}_3P_1$	$=$	6

따라서 네 자리의 자연수 중 3201보다 큰 짝수의 개수는

$36+24+9+6+6=81$

VI-08 순열과 조합

10 답 8

조건 (가)에서 ${}_{2m}P_3-28\times{}_{m}P_2=0$

$2m(2m-1)(2m-2)-28m(m-1)=0$

$4m(m-1)\{(2m-1)-7\}=0$

$4m(m-1)(2m-8)=0$

$\therefore m=4$ ($\because m\ge2$)

조건 (나)에서

$5({}_{n}P_3+{}_{n+1}P_4)-12\times{}_{n+1}P_3=0$

$5\{n(n-1)(n-2)+(n+1)n(n-1)(n-2)\}$
$-12(n+1)n(n-1)=0$

$5n(n-1)(n-2)(n+2)-12(n+1)n(n-1)=0$

$n(n-1)\{5(n-2)(n+2)-12(n+1)\}=0$

$n(n-1)(5n^2-12n-32)=0$

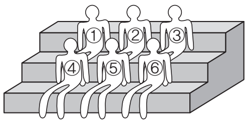
$n(n-1)(5n+8)(n-4)=0$

$\therefore n=4$ ($\because n\ge3$)

$\therefore m+n=4+4=8$

11 답 720

그림과 같이 각 자리에 순번을 정하면 6명이 일렬로 앉는 경우의 수와 같다.



따라서 앉는 방법의 수는

$6!=720$

12 답 96

n_1 : 1, 2를 묶음으로 하여 (1, 2), 3, 4, 5를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $4!$

이때, 1, 2의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!$

곱의 법칙에 의하여 $4!\times2!=48$

n_2 : 홀수 중 두 수를 양 끝에 배열하는 방법의 수는 ${}_{3}P_2$

나머지 세 수를 홀수 사이에 배열하는 방법의 수는 $3!$

곱의 법칙에 의하여 ${}_{3}P_2\times3!=36$

n_3 : 세 홀수를 배열하는 방법의 수는 $3!$

짝수를 홀수 사이에 배열하는 방법의 수는 $2!$

곱의 법칙에 의하여 $3!\times2!=12$

$\therefore n_1+n_2+n_3=48+36+12=96$

13 답 36

(i) 무원이와 아원이 사이에 앉을 사촌동생을 선택하는 방법의 수는 3

(ii) 사촌동생, 사촌동생, (무원, 사촌동생, 아원)을 일렬로 배열하는 방법의 수는 $3!$

(iii) (ii)에서 무원이와 아원이의 자리를 정하는 방법의 수는 2

(i) ~ (iii)에 의하여 구하는 방법의 수는 $3\times3!\times2=36$

14 답 ④

네 자동차를 각각 A, B, C, D라 하고, 빈 자리를 O라 하면

AOOBOCOODO

의 경우와 같이 OOOOOO의 양 끝과 사이사이에 네 자동차를 배열하는 경우와 같으므로 구하는 방법의 수는

${}_{7}P_4=840$

15 답 ②

참가한 팀이 $2n+1$(n은 자연수)팀이라 하면 n개의 조가 1차전을 치루고 한 팀이 부전승으로 2차전에 진출하므로 1차전이 n경기이고 2차전에 진출한 $n+1$팀이 다른 팀과 한 경기씩 리그전을 치르면 2차전이 ${}_{n+1}C_2$경기이다.

이때까지 치른 총 경기가 35경기이므로

$n+{}_{n+1}C_2=35$

$n+\dfrac{(n+1)n}{2}=35$

$n^2+3n-70=0$

$(n-7)(n+10)=0$

$\therefore n=7$ ($\because n$은 자연수)

따라서 참가한 팀은 총 15팀이다.

16 답 12

${}_{n}C_r={}_{n}C_k$가 성립할 조건은 $r=k$ 또는 $r+k=n$이므로

(i) $n^2=7n-12$에서 $n^2-7n+12=0$

$(n-3)(n-4)=0$ $\quad\therefore n=3$ 또는 $n=4$

(ii) $n^2+7n-12=48$에서 $n^2+7n-60=0$

$(n-5)(n+12)=0$ $\quad\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+4+5=12$

17 답 100

20개의 꼭짓점 중 서로 다른 두 점을 연결한 선분의 총 개수에서 모서리의 개수와 모서리가 아닌 같은 면 위에 있는 선분의 개수를 제외하면 된다.

이때, 모서리의 개수는 30, 모서리가 아닌 한 면 위의 선분의 개수는 ${}_{5}C_2-5=5$이므로 정십이면체의 내부를 통과하는 선분의 개수는

${}_{20}C_2-30-12\times5=100$

18 답 185

(i) 남자 4명, 여자 2명을 뽑는 방법의 수 :

${}_{6}C_4\times{}_{4}C_2=15\times6=90$

(ii) 남자 3명, 여자 3명을 뽑는 방법의 수 :

${}_{6}C_3\times{}_{4}C_3=20\times4=80$

(iii) 남자 2명, 여자 4명을 뽑는 방법의 수 :

${}_{6}C_2\times{}_{4}C_4=15\times1=15$

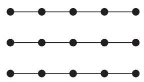
따라서 대표를 뽑는 방법의 수는 $90+80+15=185$

19 답 157

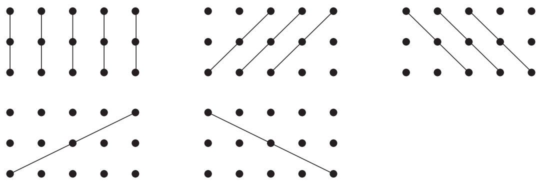
(ⅰ) 선분의 개수는 15개의 점 중 2개의 점을 선택하는 경우의 수와 같으므로 $a={}_{15}C_2=105$

(ⅱ) 15개의 점 중 2개의 점을 선택하여 직선을 만들 때, 한 직선에 놓여 있는 두 점을 선택하는 경우는 모두 같은 직선이다.

① 5개의 점이 중복되는 경우 : $3({}_5C_2-1)=27$



② 3개의 점이 중복되는 경우 : $13({}_3C_2-1)=26$



$\therefore b=105-27-26=52$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a+b=105+52=157$

20 답 ⑤

(ⅰ) 큰 상자에 공을 1개 담는 경우

작은 상자에 공을 3개, 3개, 3개 담아야 하므로 방법의 수는

$${}_{10}C_1\times\left({}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}\right)=2800$$

(ⅱ) 큰 상자에 공을 3개 담는 경우

작은 상자에 공을 3개, 3개, 1개 담아야 하므로 방법의 수는

$${}_{10}C_3\times\left({}_7C_3\times{}_4C_3\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\right)=8400$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는 $2800+8400=11200$

21 답 288

(ⅰ) A, B 중 운전할 사람을 정하는 방법의 수는 2

(ⅱ) 가운데 줄에 C, D가 앉는 방법의 수는 ${}_3P_2$

(ⅲ) 남은 3명을 남은 4자리에 배치하는 방법의 수는 ${}_4P_3$

(ⅰ) ~ (ⅲ)에 의하여 구하는 방법의 수는 $2\times{}_3P_2\times{}_4P_3=288$

22 답 ④

(ⅰ) F 또는 I 또는 R로 시작하여 배열하는 경우의 수

| F | | | | | : 4! |

| I | | | | | : 4!

| R | | | | | : 4!

$\therefore 3\times4!=72$

(ⅱ) SF 또는 SI로 시작하여 배열하는 경우의 수

| S | F | | | | : 3!

| S | I | | | | : 3!

$\therefore 2\times3!=12$

(ⅲ) SRF로 시작하는 배열은

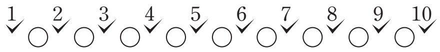
| S | R | F | I | T |, | S | R | F | T | I |의 2가지

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 SRFTI는 $72+12+2=86$(번째)에 위치하므로 $n=86$

23 답 48

(ⅰ) 서군이를 제외한 나머지 29명 중에서 10명을 일렬로 세우는 경우이므로 경우의 수는 ${}_{29}P_{10}$

(ⅱ) 서군이를 뺀 나머지 29명 중에서 9명을 일렬로 세우고 그 사이사이 또는 양 끝에 서군이가 들어가야 한다. 이때, 서군이가 들어갈 수 있는 자리는 다음 그림과 같이 10군데이다.



따라서 경우의 수는 $10\times{}_{29}P_9$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구한 값의 합은 서군이네 반 30명 중에서 10명을 일렬로 세우는 방법과 같으므로 ${}_{30}P_{10}=\underbrace{{}_{29}}_{(가)}P_{10}+\underbrace{10}_{(나)}\times{}_{29}P_{\underbrace{9}_{(다)}}$

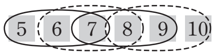
따라서 $a=29$, $b=10$, $c=9$이므로 $a+b+c=29+10+9=48$

24 답 54

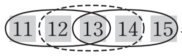
먼저 이웃하는 좌석을 3개 정한 후, 정해진 3개의 좌석에 세 사람이 앉는 방법을 생각하면 된다.

(ⅰ) 이웃하는 3개의 좌석을 정하는 방법의 수

의 경우 : 2가지



의 경우 : 4가지



의 경우 : 3가지

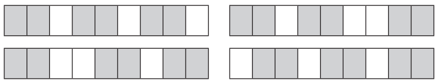
(ⅱ) 이웃하는 3개의 좌석에 세 사람이 앉는 방법의 수는 $3!$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는 $(2+4+3)\times3!=54$

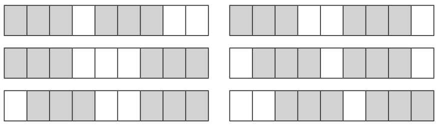
25 답 26

6개의 자음 B, C, D, F, G, H에 대하여 자음을 이웃하여 배열하는 경우는 다음과 같다.(자음 : ▒, 모음 : □)

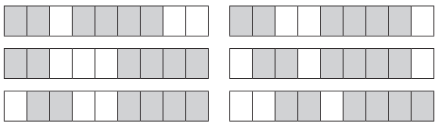
(ⅰ) 2개, 2개, 2개가 이웃하게 나열하는 방법 : 4가지



(ⅱ) 3개, 3개가 이웃하게 나열하는 방법 : 6가지

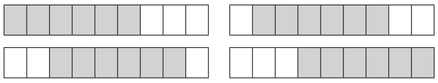


(ⅲ) 2개, 4개가 이웃하게 나열하는 방법 : 6가지



(iv) 4개, 2개가 이웃하게 나열하는 방법은 2개, 4개가 이웃하는 경우와 대칭이므로 6가지

(v) 6개 모두 이웃하게 나열하는 방법 : 4가지



따라서 자음을 이웃하여 배열하는 방법의 수는

$4+6+6+6+4=26$

이때, 각각의 경우에서 자음과 모음을 배열하는 방법의 수는

각각 $6!$, $3!$이므로 구하는 방법의 수는

$26\times3!\times6!$

$\therefore a=26$

26 답 ③

규칙에 맞게 사용할 6개의 방을 선택하는 방법은 다음과 같다.

(i) 1층에서 1, 2, 3, 4호실을 사용하고, 2층에서 1, 2호실을 사용하는 경우

(ii) 1층에서 1, 2, 3호실을 사용하고, 2층에서 1, 2, 3호실을 사용하는 경우

(iii) 1층에서 1, 2호실을 사용하고, 2층에서 1, 2, 3, 4호실을 사용하는 경우

(i)~(iii)의 각 경우에 대하여 6명을 배치하는 방법의 수는 $6!$이므로 구하는 방법의 수는 $3\times6!=2160$

27 답 105

원소의 개수가 2개인 부분집합의 개수는 ${}_6C_2=15$

즉, 원소의 개수가 2개인 부분집합을 두 개 선택할 때, 선택한 두 집합이 서로 같지 않은 경우의 수는 ${}_{15}C_2=105$

28 답 210

0, 1, 2, $\cdots$, 9의 10개의 수 중 서로 다른 네 수를 선택하면 수의 배열이 천의 자리에서 일의 자리로 갈수록 작아지는 자연수가 유일하게 결정된다.

예를 들어 2, 7, 5, 9가 선택되면 9752를 만들 수 있다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 ${}_{10}C_4=210$

29 답 370

a, b, c, d를 공의 개수로 나타낸다고 하면 p는 일렬로 나열된 10개의 공 사이에 3개의 구분선을 그어 4개의 묶음으로 나누는 방법의 수와 같으므로 $p={}_9C_3$

q는 a, b, c, d가 0이어도 되므로 a, b, c, d에 1을 더하면

$a+b+c+d=14$를 만족시키는 자연수의 순서쌍의 개수와 같다.

p를 구할 때와 같은 방법으로 하면 구하는 방법의 수는 $q={}_{13}C_3$

$\therefore p+q={}_9C_3+{}_{13}C_3=84+286=370$

30 답 17

(i), (ii), (iii), (iv)의 각 경우의 수는 전체 14명에서 3명을 뽑는 경우의 수를 분류하여 계산하는 것이므로 그 합은 ${}_{14}C_3$과 같다.

따라서 $n=14$, $r=3$이므로 $n+r=17$

31 답 60

먼저 6명 중에 세 명을 선택하여 키가 큰 순서대로

1, 3, 5번의 번호를 부여하는 경우의 수는 ${}_6C_3$

나머지 세 사람 중에 두 사람을 선택하여 큰 사람에게 2번,

작은 사람에게 6번의 번호를 부여하는 경우의 수는 ${}_3C_2$

그리고 나머지 한 사람에게 4번의 번호를 부여하는 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 ${}_6C_3\times{}_3C_2\times1=60$

32 답 120

3의 배수는 각 자리 수의 합이 3의 배수이면 된다.

이때, 6개의 수를 3으로 나눈 나머지를 기준으로 분류하면

(1) $3k+1$ 꼴의 수 : 1, 4

(2) $3k+2$ 꼴의 수 : 2, 5

(3) $3k$ 꼴의 수 : 3, 6

네 수의 합이 3의 배수가 되도록 선택하는 방법은 다음과 같이 2가지 경우가 있다.

(i) (1), (2)에서 한 개씩, (3)에서 2개 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_2=4$

(ii) (1), (2)에서 각각 두 개씩 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_2\times{}_2C_2=1$

따라서 숫자를 선택하는 모든 경우의 수는 5이고 선택된 수를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!$이므로 3의 배수의 개수는 $5\times4!=120$

33 답 48

6개의 공에 적힌 수의 합이 홀수라는 것은 주머니 A, B에서 꺼낸 세 개의 공에 적힌 수의 합이 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수인 것이다.

그 중 주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 세 수의 합이 짝수, 주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 세 수의 합이 홀수인 경우는

(i) 주머니 A에서 꺼낸 세 개의 공에 적힌 수의 합이 짝수인 경우는 홀수가 적힌 공 2개와 짝수가 적힌 공 1개를 꺼내는 경우이므로 이때의 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_2C_1=6$

(ii) 주머니 B에서 꺼낸 세 개의 공에 적힌 수의 합이 홀수인 경우는 전체 경우의 수에서 짝수인 경우의 수를 빼면 되므로 이때의 경우의 수는 ${}_5C_3-6=4$

따라서 주머니 A에서 꺼낸 세 공에 적힌 수의 합이 짝수, 주머니 B에서 꺼낸 세 공에 적힌 수의 합이 홀수인 경우의 수는 $6\times4=24$

주머니 A에서 꺼낸 세 개의 공에 적힌 수의 합이 홀수, 주머니 B에서 꺼낸 세 개의 공에 적힌 수의 합이 짝수인 경우의 수도 위의 경우와 마찬가지로 24이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $24+24=48$

34 답 19

좌우를 구별한다고 할 때 막대기를 만드는 방법의 수는 전체 7개 중 검은색이 위치한 4곳을 선택하는 경우의 수이므로

${}_7C_4=35$

그런데 좌우의 구별이 없으므로 다음과 같이 좌우비대칭인 막대기는 반드시 같은 한 쌍으로 존재한다.

■□■□■■□=□■■□■□■

이때, 좌우대칭인 막대기는 반드시 중앙에 흰색이 위치하고 그 흰색을 기준으로 왼쪽의 세 자리 중 두 자리에 검은색이 위치하므로 막대기를 만드는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$

즉, 좌우비대칭인 막대기의 수는 $35-3=32$

따라서 좌우의 구별이 없이 막대기를 만드는 방법의 수는

$\frac{32}{2}+3=19$

35 답 171

한 직선 위에 있는 점에서 출발점과 방향이 같은 반직선은 같은 반직선이고, 지름 위에 놓여 있는 네 점으로 만들 수 있는 반직선의 개수는 6개이므로 구하는 반직선의 개수는

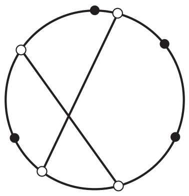
$a={}_9P_2-({}_4P_2-6)=66$

네 점을 선택하여 사각형을 만들려면 9개의 점에서 4개의 점을 선택하는 경우에서 세 점 또는 네 점이 일직선 위에 위치하는 경우를 빼주어야 한다. 따라서 만들 수 있는 사각형의 개수는

$b={}_9C_4-{}_4C_3\times{}_5C_1-{}_4C_4=105$

$\therefore a+b=171$

36 답 70



8개의 점 중 4개의 점을 선택하면 원 내부의 교점을 갖는 한 쌍의 선분이 유일하게 결정된다. 즉, 8개의 점 중 4개의 점을 선택하면 원 내부의 교점이 한 개 생기므로 구하는 교점의 개수는 ${}_8C_4=70$

37 답 343

(i) 세 상자의 크기와 모양이 모두 같은 경우

세 상자에 자동차 모형을 2개, 2개, 4개로 나누어 담거나 2개, 3개, 3개로 나누어 담을 수 있다.

$\therefore a={}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}+{}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=490$

(ii) 세 상자의 크기와 모양이 모두 다른 경우

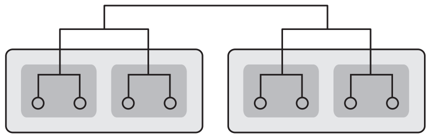
a에서 구한 경우에서 크기와 모양이 다른 3개의 상자에 배분하여 담는 방법의 수이므로

$b=a\times3!=2940$

$\therefore \frac{a+b}{10}=\frac{3430}{10}=343$

38 답 315

그림과 같이 대진표를 2개의 조로 나누는 경우를 생각해 보자.



이때, 8팀을 4팀씩 2개의 조로 나누는 방법의 수는

${}_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=35$

같은 방법으로 각각의 조를 다시 2개의 작은 조로 나누는 방법의 수는

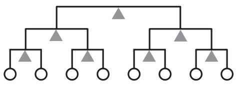
$\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)\times\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)=9$

따라서 대진표를 짜는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$35\times9=315$

[다른 풀이]

그림의 ▲부분은 좌우가 바뀌어도 같은 대진이다.

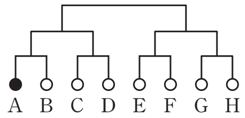


따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{8!}{2!\times2!\times2!\times2!\times2!\times2!\times2!}=315$

39 답 ①

실력이 제 5위인 사람을 그림과 같이 A자리에 배정을 시켜도 일반성을 잃지 않는다.



이때, 실력이 제 5위인 사람이 결승전에 진출할 수 있도록 하려면 B, C, D에 6, 7, 8위인 선수를, E, F, G, H에는 1, 2, 3, 4위인 선수를 배정해야 한다.

6, 7, 8위 중 한 명이 B에, 나머지 선수가 C, D에 배정되는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

1, 2, 3, 4위가 E, F, G, H에 배정되는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=3$

따라서 대진표를 만드는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3\times3=9$

[다른 풀이]

B, C, D에 6, 7, 8위를 배정하고, E, F, G, H에 1, 2, 3, 4위를 배정하는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}\times\frac{4!}{2!\times2!\times2!}=9$

40 답 ⑤

(i) $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$인 경우

공역의 원소인 8개의 수 중 4개의 수를 선택하여 작은 수부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$에 대응시키는 방법의 수이므로 ${}_8C_4=70$

(ii) $f(1)<f(2)=f(3)<f(4)$인 경우

공역의 원소인 8개의 수 중 3개의 수를 선택하여 작은 수부터 차례로 $f(1)$, $f(2)=f(3)$, $f(4)$에 대응시키는 방법의 수이므로 ${}_8C_3=56$

(i), (ii)에서 $f(1)<f(2)\leq f(3)<f(4)$를 만족시키는 함수의 개수는 $70+56=126$

41 답 ④

$f(1)$이 최댓값이므로

(i) $f(1)=6$일 때,

공역의 원소 중 정의역의 원소 1에 대응되지 않은 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 수 중 3개를 택하여 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$에 대응시키는 방법의 수이므로 ${}_5C_3=10$

(ii) $f(1)=5$일 때,

공역의 원소 중 정의역의 원소 1에 대응되지 않은 1, 2, 3, 4의 4개의 수 중 3개를 택하여 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$에 대응시키는 방법의 수이므로 ${}_4C_3=4$

(iii) $f(1)=4$일 때,

공역의 원소 중 정의역의 원소 1에 대응되지 않은 1, 2, 3의 3개의 수 중 3개를 택하여 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$에 대응시키는 방법의 수이므로 ${}_3C_3=1$

(iv) $f(1)\leq 3$일 때, 주어진 조건을 만족시키는 함수는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수는 15이다.

42 답 ⑤

함수 $g(f(x))$가 일대일대응이므로 $g(f(1))$, $g(f(2))$, $g(f(3))$은 모두 다른 값을 갖는다.

따라서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$도 모두 다른 값을 가지므로 조건을 만족시키는 함수 $f:X\longrightarrow Y$의 개수는 ${}_4P_3=24$

한편, 집합 Y의 원소인 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$도 집합 Z로의 일대일대응이어야 하고 집합 Y의 원소 중 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 아닌 한 원소도 집합 Z의 한 원소에 대응해야 하므로 함수 $g:Y\longrightarrow Z$의 개수는 ${}_3P_3\times 3=18$

따라서 곱의 법칙에 의해 두 함수 f, g의 순서쌍 (f, g)의 개수는

$24\times 18=432$

43 답 81

두 조건 (나), (다)에서 함수의 최솟값은 $f(1)$, $f(q)$ 중 하나인데 $f(1)=2$이므로 $f(q)=1$이고, 함수의 최댓값은 $f(p)$, $f(8)$ 중 하나인데 $f(p)=7$이므로 $f(8)=8$이다.

따라서 주어진 함수는 $f(1)=2$부터 $f(p)=7$까지 증가하고 $f(p)=7$부터 $f(q)=1$까지 감소하다가 $f(q)=1$부터 $f(8)=8$까지 다시 증가하는 일대일함수이다.

따라서 공역의 남은 원소인 3, 4, 5, 6을 $f(1)$, $f(p)$, $f(q)$, $f(8)$ 사이사이에 배치하는 경우의 수이므로 $3^4=81$

일등급 UP

*** 조건을 만족시키는 일대일함수 f의 예**

다음 예와 같이 공역의 원소 3, 4가 $f(1)$, $f(p)$ 사이에, 공역의 원소 5, 6이 $f(p)$, $f(q)$ 사이에 배치된다면 $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(5)=6$, $f(6)=5$가 자동으로 결정된다.

	$f(1)$		$f(p)$		$f(q)$		$f(8)$
	2	⇧	7	⇧	1	⇧	8
		3, 4		5, 6			
⇒	2	3 4	7	6 5	1		8
	$f(1)$	$f(2)$ $f(3)$	$f(4)$	$f(5)$ $f(6)$	$f(7)$		$f(8)$

44 답 864

(i) 세 번째 자리에 올 수 있는 홀수는 4가지 ······ ⓐ

(ii) 짝수끼리 이웃하지 않으므로 첫 번째와 두 번째에 홀수, 짝수가 각각 1개씩, 네 번째 이후에 홀수와 짝수가 각각 2개씩 와야 한다. 즉, 이때의 경우의 수는 첫 번째와 두 번째에 들어갈 수만 선택하면 되므로 ${}_3C_1\times{}_3C_1=9$

(iii) 첫 번째와 두 번째 수를 나열하는 방법의 수는 $2!=2$

네 번째 이후에 나열하는 방법의 수는 홀수 2개를 나열한 후 짝수 2개를 홀수 사이에 끼워 넣으면 되므로

$2!\times{}_3P_2=12$ ······ ⓑ

(i)~(iii)에서 곱의 법칙에 의해 나열하는 방법의 수는

$4\times 9\times 2\times 12=864$ ······ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 세 번째 자리에 올 수 있는 홀수의 개수를 구한다. [20%]

ⓑ 세 번째 자리를 기준으로 왼쪽과 오른쪽에 짝수와 홀수를 배치하는 방법의 수를 구한다. [60%]

ⓒ 조건을 만족시키는 방법의 수를 구한다. [20%]

45 답 7

조건 (가)에서 ${}_8C_{r-1}={}_8C_{3r+1}$이 성립할 조건은

$r-1=3r+1$ 또는 $r-1+3r+1=8$이므로

$r=-1$ 또는 $r=2$

$\therefore r=2$ ($\because r$는 자연수) ······ ⓐ

$r=2$를 조건 (나)에 대입하면

${}_nC_2+{}_nC_3=2\times{}_{2n}C_1$, $\dfrac{n(n-1)}{2!}+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}=2\times2n$

$3n(n-1)+n(n-1)(n-2)=24n$

$n\{3(n-1)+(n-1)(n-2)-24\}=0$

$n(n^2-25)=0$, $n(n+5)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수) ---------- ⓑ

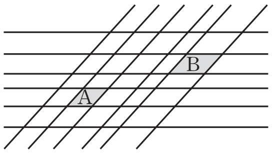
$\therefore n+r=7$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ r의 값을 구한다. [40%]
ⓑ n의 값을 구한다. [40%]
ⓒ $n+r$의 값을 구한다. [20%]

46 답 88

그림과 같이 색칠한 영역을 각각 A, B라 하면



A를 포함하는 평행사변형의 개수는 $({}_4C_1\times{}_2C_1)\times({}_2C_1\times{}_4C_1)=64$

B를 포함하는 평행사변형의 개수는 $({}_2C_1\times{}_4C_1)\times({}_5C_1\times{}_1C_1)=40$

---------- ⓐ

A, B를 모두 포함하는 평행사변형의 개수는

$({}_2C_1\times{}_2C_1)\times({}_2C_1\times{}_1C_1)=8$ ---------- ⓑ

따라서 A, B 중 하나만 포함하는 평행사변형의 개수는

$64+40-8\times2=88$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ A 또는 B를 포함하는 평행사변형의 개수를 구한다. [40%]
ⓑ A, B를 모두 포함하는 평행사변형의 개수를 구한다. [40%]
ⓒ A, B 중 하나만 포함하는 평행사변형의 개수를 구한다. [20%]

47 답 ③

(i) 2팀, 3팀이 공연하는 경우 ${}_5C_2\times2!\times3!=120$

(ii) 3팀, 2팀이 공연하는 경우 ${}_5C_3\times3!\times2!=120$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $120+120=240$

48 답 ③

(i) $a=5$일 때

$c<b<5$이므로 1부터 4까지의 자연수 중 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c라 하면 되므로 이때의 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

(ii) $a=6$일 때,

$c<b<6$이므로 1부터 5까지의 자연수 중 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c라 하면 되므로 이때의 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 자연수의 개수는

$6+10=16$

49 답 30

전체 경우의 수에서 A, B가 모두 같은 동아리에 가입하는 경우의 수를 빼면 된다.

A, B가 각각 동아리를 선택하는 경우는 ${}_4C_2$이므로 구하는 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_4C_2-{}_4C_2=30$

[다른 풀이]

(i) 공통으로 가입하는 동아리가 1개인 경우

A가 동아리에 가입하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

B가 동아리에 가입하는 경우의 수는 A가 가입한 2개의 동아리 중 1개, A가 가입하지 않은 2개의 동아리 중 1개를 선택하여 가입하면 되므로 ${}_2C_1\times{}_2C_1=4$

따라서 이때의 경우의 수는 $6\times4=24$

(ii) 공통으로 가입하는 동아리가 없는 경우

A가 동아리에 가입하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

B가 동아리에 가입하는 경우의 수는 A가 가입하지 않은 2개의 동아리에 가입하면 되므로 1

따라서 이때의 경우의 수는 $6\times1=6$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $24+6=30$

50 답 ②

선택한 카드에 적혀 있는 5개의 수의 합이 짝수이고 1부터 8까지의 모든 자연수의 합이 36으로 짝수이다.

여기서 선택한 카드에 적혀 있는 5개의 수의 합이 짝수인 경우는 선택되지 않은 카드 3장에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수인 경우와 같다.

세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 세 수가 모두 짝수이거나
세 수 중 짝수 1개, 홀수 2개인 경우이다.

(i) 세 수가 모두 짝수인 경우의 수는

${}_4C_3=4$

(ii) 세 수 중 짝수 1개, 홀수 2개인 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_4C_2=4\times6=24$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $4+24=28$

[다른 풀이]

선택한 5장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 경우는
다음과 같이 2가지 경우이다.

(i) 홀수 2개, 짝수 3개를 선택하는 경우의 수

${}_4C_2\times{}_4C_3=24$

(ii) 홀수 4개, 짝수 1개를 선택하는 경우의 수

${}_4C_4\times{}_4C_1=4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $24+4=28$

51 답 ④

정사각형 모양의 노란색 시트지 2장을 창문 네 개 중 두 개를 택하여 붙이는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{C}_2$이다.

나머지 창문 2개를 직각이등변삼각형 모양으로 각각 나누는 경우의 수는 2×2이고, 나누어진 네 개의 영역에 직각이등변삼각형 모양의 시트지 4장을 붙이는 경우의 수는 $4!$이다.

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{C}_2\times2\times2\times4!=\frac{4\times3}{2\times1}\times2\times2\times4\times3\times2\times1=576$$

52 답 ③

(i) A, B를 제외한 $n-2$명 중에 r명을 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_{n-2}\mathrm{P}_r$

(ii) A, B를 제외한 $n-2$명 중에 $r-1$명을 일렬로 나열하고 A, B 중 한 명을 끼워 넣는 경우의 수는

$${}_{n-2}\mathrm{P}_{r-1}\times\boxed{2r}\ \text{(가)}$$

(iii) A, B를 제외한 $n-2$명 중에 $r-2$명을 일렬로 나열하고 A, B 모두 끼워 넣는 경우의 수는

$${}_{n-2}\mathrm{P}_{r-2}\times\{{}_{r-1}\mathrm{P}_2+2(r-1)\}={}_{n-2}\mathrm{P}_{r-2}\times(\boxed{r^2-r})\ \text{(나)}$$

(i) ~ (iii)에 의하여 ${}_n\mathrm{P}_r={}_{n-2}\mathrm{P}_r+{}_{n-2}\mathrm{P}_{r-1}\times2r+{}_{n-2}\mathrm{P}_{r-2}\times(r^2-r)$

따라서 $f(r)=2r$, $g(r)=r^2-r$이므로 $f(5)g(6)=10\times30=300$

53 답 72

$a-b+c-d+e-f=(a+c+e)-(b+d+f)$에서

$a+c+e=x$, $b+d+f=y$라 하면

$x+y=27$ ⋯ ㉠, $x-y=11k$ ⋯ ㉡

이때, 두 자연수 x, y의 합 $x+y$의 값이 홀수이므로 $x-y$의 값도 홀수이다.

$\therefore k=\pm1$

(i) $k=1$일 때, ㉠, ㉡을 연립하면 $x=19$, $y=8$

(ii) $k=-1$일 때, ㉠, ㉡을 연립하면 $x=8$, $y=19$

이때, 숫자 1, 3, 4, 5, 6, 8 중 세 수의 합이 8인 경우는 $1+3+4$ 뿐이므로 $\begin{cases}a+c+e=5+6+8\\b+d+f=1+3+4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a+c+e=1+3+4\\b+d+f=5+6+8\end{cases}$

따라서 여섯 자리의 자연수 중 11의 배수의 개수는

$3!\times3!\times2=72$

54 답 ⑤

단어로 인정받기 위한 자음(□)과 모음(■)의 배열 상태는 다음 세 가지 뿐이다.

□■□□■□□■, □■□■□□■□, □■□□■□■□

따라서 8개의 자판을 이용하여 만들 수 있는 단어의 개수는

$3\times5!\times3!=2160$

55 답 ③

ㄱ. 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수가 5인 경우의 수가 집합 A_5의 원소의 개수이므로 5보다 작은 수 1개, 5보다 큰 수 2개를 선택하면 된다.

$\therefore {}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2=4\times10=40$ (참)

ㄴ. 집합 A_p의 원소는 모두 두 번째로 작은 수가 p인 순서쌍이고, 집합 A_q의 원소는 모두 두 번째로 작은 수가 q인 순서쌍이므로 두 집합의 공통된 원소는 존재하지 않는다.

$\therefore A_p\cap A_q=\varnothing$ (거짓)

ㄷ. 순서쌍 (a, b, c, d)에서 b는 1, 9, 10이 될 수 없으므로

$n(A_1)=n(A_9)=n(A_{10})=0$

또한, 1부터 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택하여 만든 순서쌍 (a, b, c, d)는 반드시 집합 A_2, A_3, ⋯, A_8 중 하나의 원소이고, $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_{10}=\varnothing$이므로

$n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)+\cdots+n(A_{10})={}_{10}\mathrm{C}_4$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

56 답 41

$f(f(x))=f(x)$를 만족시키는 함수 f와 집합 A의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=b$라 하면

$f(f(a))=f(b)$ ⋯ ㉠

$f(f(x))=f(x)$에서 $f(f(a))=f(a)=b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 반드시 $f(b)=b$이다.

즉, $f(x)=x$를 만족시키는 원소가 적어도 하나 존재한다는 것이고, $f(x)\neq x$인 원소에 대하여는 $f(x)=x$를 만족시키는 원소에 반드시 대응되어야 한다.

(i) $f(x)=x$를 만족시키는 원소가 1개일 때,
나머지 세 개의 원소는 $f(x)=x$를 만족시키는 원소 1개에만 대응되어야 하므로 ${}_4\mathrm{C}_3\times1^3=4$(가지)

(ii) $f(x)=x$를 만족시키는 원소가 2개일 때,
나머지 두 개의 원소는 $f(x)=x$를 만족시키는 원소 2개 중 어느 하나에 대응되어야 하므로
${}_4\mathrm{C}_2\times2^2=24$(가지)

(iii) $f(x)=x$를 만족시키는 원소가 3개일 때,
나머지 한 개의 원소는 $f(x)=x$를 만족시키는 원소 3개 중 어느 하나에 대응되어야 하므로
${}_4\mathrm{C}_3\times3^1=12$(가지)

(iv) $f(x)=x$를 만족시키는 원소가 4개일 때,
$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=4$로 1가지

(i) ~ (iv)에서 $f(f(x))=f(x)$를 만족시키는 함수 f의 개수는

$4+24+12+1=41$