THE FIRST CLASS MATHEMATICS

1 일등급 수학 · **수학 I**

[해설편]

Ⅰ 지수함수와 로그함수

Ⅱ 삼각함수

Ⅲ 수열

빠른 정답 찾기

I 지수함수와 로그함수

01 지수와 로그

01 ②	02 ④	03 ②	04 ④
05 ②	06 ③	07 ②	08 ①
09 ②	10 5	11 ③	12 ⑤
13 10	14 ⑤	15 90	16 ③
17 ②	18 15	19 4	20 ⑤
21 ④	22 ①	23 ②	24 ③
25 ⑤	26 ①	27 ⑤	28 ⑤
29 55	30 ②	31 ③	32 ②
33 ③	34 3	35 ④	36 ③
37 ④	38 128	39 ②	40 ②
41 ④	42 ③	43 2	44 ②
45 64	46 ①	47 4	48 ③
49 ②	50 ②	51 ①	52 ①
53 ②	54 ⑤	55 2	56 ③
57 ③	58 ④	59 216	60 ⑤
61 ⑤	62 ④	63 ③	64 7
65 5	66 1	67 ④	68 ③
69 ①	70 ⑤	71 64	72 78
73 ②	74 ③	75 ④	76 ④
77 ⑤	78 ③		

02 지수함수와 로그함수

01 ①	02 6	03 9	04 8
05 ③	06 ③	07 ②	08 12
09 ③	10 ④	11 10	12 ③
13 ②	14 ④	15 3	16 ⑤
17 13	18 ④	19 ③	20 ①
21 12	22 ④	23 ④	24 ②
25 10	26 ①	27 ⑤	28 ②
29 ⑤	30 ③	31 2	32 11
33 ②	34 ①	35 1	36 ②
37 ③	38 ④	39 ③	40 ③
41 5	42 2	43 ②	44 ②
45 ③	46 ⑤	47 ①	48 ④
49 ⑤	50 ③	51 477	52 16
53 20	54 16	55 6	56 ④
57 ③	58 ⑤	59 ①	60 ③
61 21	62 ③	63 ①	64 ⑤
65 2	66 ①	67 ④	

03 지수함수와 로그함수의 활용

01 ①	02 ④	03 ④	04 ①
05 2	06 10	07 1	08 28
09 ⑤	10 7	11 ①	12 ②
13 ①	14 ②	15 ①	16 ④
17 ⑤	18 ③	19 ①	20 ②
21 ②	22 6	23 ①	24 130
25 10	26 ⑤	27 ②	28 ⑤
29 ③	30 6	31 18	32 2
33 ④	34 ④	35 ⑤	36 ②
37 ④	38 ④	39 ①	40 ⑤
41 99	42 ③	43 ⑤	44 ⑤
45 ③	46 10	47 15	48 ②
49 ③	50 4	51 11	52 10
53 6	54 17	55 ②	56 55
57 ③	58 ②	59 ⑤	60 ③
61 ③	62 ③	63 ⑤	

Ⅱ 삼각함수

04 일반각과 삼각함수

01 ②	02 ④	03 ③	04 24
05 ②	06 ④	07 36	08 ②
09 ③	10 ②	11 ④	12 ③
13 32	14 ①	15 ①	16 ①
17 4	18 ③	19 0	20 ④
21 ④	22 ⑤	23 ①	24 ⑤
25 1	26 ②	27 ⑤	28 ⑤
29 9	30 ③	31 ①	32 ③
33 30	34 3	35 ⑤	36 ①
37 ②	38 7	39 ②	40 ⑤
41 ②	42 4	43 ④	44 ④
45 ①	46 ②	47 ⑤	48 ③
49 ②	50 ④	51 ③	52 ②
53 ④	54 2	55 5	56 5
57 ③	58 27	59 ①	60 ⑤
61 8	62 ①	63 ⑤	64 ①
65 ⑤	66 ③	67 $\frac{4}{3}$	

05 삼각함수의 그래프

01 ⑤	02 ①	03 ⑤	04 ②
05 ②	06 ②	07 10	08 ③
09 ④	10 ③	11 ②	12 ③
13 ④	14 1	15 ②	16 ④
17 ⑤	18 ②	19 ③	20 ①
21 36	22 ④	23 ④	24 ⑤
25 ③	26 ①	27 ④	28 ⑤
29 2	30 ⑤	31 ②	32 10
33 ②	34 5	35 ⑤	36 ④
37 ②	38 ④	39 ②	40 3
41 ③	42 ⑤	43 ③	44 8
45 ③	46 ③	47 ③	48 ⑤
49 ②	50 64	51 6	52 11
53 10	54 ④	55 24	56 ⑤
57 ④	58 ③	59 ①	60 ②
61 ②	62 150	63 ⑤	64 ②
65 ③			

06 사인법칙과 코사인법칙

01 ⑤	02 ②	03 ②	04 ②
05 ①	06 ③	07 ③	08 ③
09 20	10 ④	11 ⑤	12 ③
13 ②	14 ⑤	15 ①	16 188
17 ②	18 ②	19 ①	20 24
21 3	22 2	23 ③	24 32
25 ②	26 ⑤	27 ③	28 36
29 ②	30 3	31 ①	32 ⑤
33 ①	34 18	35 ④	36 ③
37 ③	38 ④	39 20	40 ②
41 ②	42 10	43 ④	44 ③
45 ②	46 ②	47 ②	48 ④
49 200 m	50 ⑤	51 300	52 2
53 13	54 607	55 ①	56 ②
57 50	58 ④	59 ②	60 28
61 ④	62 ⑤	63 133	64 ⑤
65 16			

Ⅲ 수열

07 등차수열과 등비수열

01 ④	02 ②	03 ③	04 ③
05 ①	06 8	07 ①	08 ③
09 ③	10 ③	11 ①	12 ⑤
13 5	14 ②	15 ③	16 ①
17 2220	18 ⑤	19 ③	20 ②
21 ②	22 ②	23 ①	24 ④
25 ④	26 ③	27 114	28 8
29 ④	30 18	31 ④	32 ②
33 ②	34 ⑤	35 ①	36 ④
37 ③	38 ⑤	39 100	40 ③
41 37	42 51	43 ④	44 10
45 ①	46 15	47 ②	48 13
49 ⑤	50 56	51 ④	52 ⑤
53 ④	54 ②	55 20	56 ④
57 ②	58 147	59 100	60 5100
61 ①	62 ②	63 ①	64 ②
65 73	66 24	67 11	68 ①
69 ⑤	70 99	71 ④	72 ②
73 ④			

08 수열의 합

01 ④	02 ①	03 1330	04 10
05 1650	06 ⑤	07 133	08 ①
09 50	10 ④	11 ③	12 ②
13 ④	14 ②	15 201	16 ④
17 ②	18 95	19 ③	20 6
21 450	22 465	23 ④	24 ③
25 ①	26 ⑤	27 11	28 19
29 189	30 ③	31 ③	32 53
33 ③	34 ③	35 385	36 55
37 ⑤	38 ②	39 21	40 7
41 330	42 28	43 ①	44 ③
45 120	46 201	47 ①	48 ③
49 181	50 489	51 ⑤	52 47
53 ①			

09 수학적 귀납법

01 ②	02 ③	03 201	04 ⑤
05 46	06 26	07 ⑤	08 1
09 3	10 ①	11 ①	12 ①
13 33	14 ③	15 ②	16 ④
17 ⑤	18 ④	19 ③	20 ②
21 ④	22 ③	23 ④	24 ③
25 ①	26 ⑤	27 2	28 77
29 ③	30 52	31 ④	32 ②
33 9	34 112	35 95	36 214
37 454	38 5	39 485	40 255
41 144	42 ③	43 ②	44 14
45 10	46 186	47 5	48 66
49 441	50 8	51 ②	52 ⑤
53 ①	54 13	55 ⑤	56 100
57 ④	58 ④	59 ③	60 624

Ⅰ 지수함수와 로그함수

1st 01 지수와 로그

문제편 8P

01 답 ②

$\sqrt[3]{a}=9$에서 $a=9^3=3^6$

$\sqrt[4]{b}=8$에서 $b=8^4=2^{12}$이므로

$\sqrt[6]{ab}=\sqrt[6]{3^6\times2^{12}}=\sqrt[6]{(3\times2^2)^6}=3\times2^2=12$

02 답 ④

$\left(\dfrac{5^{\sqrt{5}}}{25}\right)^{\sqrt{5}+2}=(5^{\sqrt{5}-2})^{\sqrt{5}+2}=5^{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=5$

03 답 ②

$\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$의 좌변의 분모, 분자에 2^a을 각각 곱하면

$\dfrac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=-2$

정리하면 $2^{2a}=\dfrac{1}{3}$에서 $4^a=\dfrac{1}{3}$이고 $4^{-a}=3$이다.

$\therefore\ 4^a+4^{-a}=\dfrac{10}{3}$

[다른 풀이]

$\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$의 양변을 제곱하면

$\dfrac{4^a+4^{-a}+2}{4^a+4^{-a}-2}=4$, $4^a+4^{-a}+2=4(4^a+4^{-a})-8$

$3(4^a+4^{-a})=10\qquad\therefore\ 4^a+4^{-a}=\dfrac{10}{3}$

04 답 ④

현재 개체 수는 $a\times2^{\frac{0}{20}}=a$(마리)이고

n시간 후의 개체 수는 $a\times2^{\frac{n}{20}}$(마리)이므로

$a\times2^{\frac{n}{20}}=2a$에서 $\dfrac{n}{20}=1\qquad\therefore\ n=20$

05 답 ②

a는 밑이므로 $a>0$, $a\neq1$ … ㉠

$x^2-2ax+4a$는 진수이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2-2ax+4a>0$을 만족시켜야 한다.

이때, 이차방정식 $x^2-2ax+4a=0$의 판별식을 D라 하면

$D<0$이어야 하므로 $\dfrac{D}{4}=a^2-4a<0$에서 $a(a-4)<0$

$0<a<4$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $\log_a(x^2-2ax+4a)$가 정의되기 위한 a의 값의 범위는

$0<a<4$, $a\neq1$이므로 정수 a는 2, 3의 2개이다.

06 답 ③

$\log_{\sqrt{3}}x=4$에서 $2\log_3 x=4\qquad\therefore\ \log_3 x=2$

$\therefore\ \log_x y=\dfrac{\log_3 y}{\log_3 x}=\dfrac{6}{2}=3$

[다른 풀이]

$\log_{\sqrt{3}}x=4$에서 $x=(\sqrt{3})^4=3^2$

$\log_3 y=6$에서 $y=3^6$

$\therefore\ \log_x y=\log_{3^2}3^6=3$

07 답 ②

$\dfrac{10^{\log 8}}{100^{\log 4}}=\dfrac{8^{\log 10}}{4^{\log 100}}=\dfrac{8}{4^2}=\dfrac{1}{2}$

[다른 풀이]

$\dfrac{10^{\log 8}}{100^{\log 4}}=\dfrac{10^{3\log 2}}{10^{4\log 2}}=10^{-\log 2}=10^{\log\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

08 답 ①

$x=3.15^3$에서

$\log x=3\log 3.15=3\times0.498$

$=1.494=1+0.494$

$=\log 10+\log 3.12=\log 31.2$

$\therefore\ x=31.2$

09 답 ②

$\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt[4]{a^3}}}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[24]{a^3}=a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{3}{24}}$

$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{24}}=a^{\frac{5}{8}}$

$\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}}\div\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}=\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}}\div\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}=\dfrac{\sqrt[12]{a^2}}{\sqrt[12]{a}}\div\dfrac{\sqrt[24]{a^2}}{\sqrt[24]{a^3}}$

$=\sqrt[12]{a}\div\dfrac{1}{\sqrt[24]{a}}=a^{\frac{1}{12}}\div a^{-\frac{1}{24}}$

$=a^{\frac{1}{12}-\left(-\frac{1}{24}\right)}=a^{\frac{1}{8}}$

$\therefore$ (주어진 식)$=a^{\frac{5}{8}}\times a^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{5}{8}+\frac{1}{8}}=a^{\frac{6}{8}}=a^{\frac{3}{4}}$

따라서 $m=3$, $n=4$이므로 $m+n=3+4=7$

10 답 5

$A=\sqrt[3]{(-3)^4}+\sqrt[5]{-9}\times\sqrt[5]{-27}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

$=\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[5]{(-9)\times(-27)}+\sqrt[6]{2^6}$

$=3\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{3^5}+\sqrt[6]{2^6}$

$=3\sqrt[3]{3}+3+2=3\sqrt[3]{3}+5$

$B=\sqrt[3]{24}-\dfrac{2}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{9}}$

$=\sqrt[3]{2^3\times3}-\dfrac{2}{3}\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{\dfrac{3}{3^3}}$

$=2\sqrt[3]{3}-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{3}-\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3}$

$\therefore\ A-3B=5$

11 답 ③

ㄱ. $R(16, 4)=\sqrt[16]{4}=\sqrt[8]{2}=R(8, 2)$ (참)

ㄴ. $R(a, 5)\times R(b, 5)=\sqrt[a]{5}\sqrt[b]{5}\neq\sqrt[a+b]{5}=R(a+b, 5)$ (거짓)

ㄷ. $R(b, R(a, b))=R(b, \sqrt[a]{b})=\sqrt[b]{\sqrt[a]{b}}=\sqrt[ab]{b}=R(ab, b)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12 답 ⑤

$$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$$

$f(m)=\dfrac{a^{2m}-1}{a^{2m}+1}=\dfrac{1}{2}$에서 $a^{2m}=3$

$f(n)=\dfrac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}=\dfrac{1}{3}$에서 $a^{2n}=2$

$$\therefore f(m+n)=\frac{a^{2(m+n)}-1}{a^{2(m+n)}+1}=\frac{a^{2m}\times a^{2n}-1}{a^{2m}\times a^{2n}+1}$$
$$=\frac{3\times2-1}{3\times2+1}=\frac{5}{7}$$

[다른 풀이]

$f(m)=\dfrac{a^m-a^{-m}}{a^m+a^{-m}}=\dfrac{1}{2}$에서 $a^m=\sqrt{3}$

$f(n)=\dfrac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}=\dfrac{1}{3}$에서 $a^n=\sqrt{2}$

$$\therefore f(m+n)=\frac{a^{m+n}-a^{-m-n}}{a^{m+n}+a^{-m-n}}=\frac{\sqrt{6}-\frac{1}{\sqrt{6}}}{\sqrt{6}+\frac{1}{\sqrt{6}}}=\frac{5}{7}$$

13 답 10

$$\sqrt[5]{\left(\sqrt{a}\times\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^n}=\sqrt[5]{\left(a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\right)^n}=\sqrt[5]{\left(a^{\frac{5}{6}}\right)^n}=\sqrt[5]{a^{\frac{5}{6}n}}=a^{\frac{n}{6}}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a}\sqrt{a^6}}=\sqrt{a^{\frac{1}{3}}\times a^3}=\sqrt{a^{\frac{10}{3}}}=a^{\frac{5}{3}}$$

즉, $a^{\frac{n}{6}}=a^{\frac{5}{3}}$에서 $\dfrac{n}{6}=\dfrac{5}{3}$

$\therefore n=10$

14 답 ⑤

$$\frac{1}{4^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}}+\frac{5}{4^{\frac{1}{3}}-6^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}}$$
$$=\frac{1}{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2+2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2}+\frac{5}{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2-2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2}$$
$$=\frac{2^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}}{\left(2^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2+2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}}$$
$$+\frac{5\left(2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2-2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}}$$
$$=\frac{2^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}}{2-3}+\frac{5\left(2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)}{2+3}$$
$$=2\times3^{\frac{1}{3}}=2\sqrt[3]{3}$$

15 답 90

조건 (나)에서 $3^a=5^b=k$라 하면

$3^a=k$에서 $3=k^{\frac{1}{a}}$

$\therefore 3^2=9=k^{\frac{2}{a}}$ $\cdots$ ㉠

$5^b=k$에서 $5=k^{\frac{1}{b}}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 같은 변끼리 곱하면 $45=k^{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}$

이때, 조건 (가)에서 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$이므로 $45=k^{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}=k$

따라서 $3^a=5^b=k=45$이므로

$3^a+5^b=90$

16 답 ③

$a^b=b^a=(ab)^{ab}=k$라 하면

$k=(ab)^{ab}=a^{ab}\times b^{ab}=(a^b)^a\times(b^a)^b=k^a\times k^b=k^{a+b}$

$\therefore a+b=1$

[다른 풀이]

$a^b=b^a=(ab)^{ab}=k$라 하면 $a=k^{\frac{1}{b}}$, $b=k^{\frac{1}{a}}$

두 식을 변끼리 곱하면 $ab=k^{\frac{1}{b}}\times k^{\frac{1}{a}}=k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

이때, $(ab)^{ab}=k$에서 $ab=k^{\frac{1}{ab}}$이므로 $k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=k^{\frac{1}{ab}}$

즉, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{ab}$에서 $\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{ab}$

$\therefore a+b=1$

17 답 ②

$2^a=12$에서 $2^{a-2}=3$

$3^b=12$에서 $3^{b-1}=4$

이때, $2^{(a-2)(b-1)}=(2^{a-2})^{b-1}=3^{b-1}=4=2^2$

$\therefore (a-2)(b-1)=2$

18 답 15

2010년의 인구는 $k\times2^{\frac{2010-2001}{p}}=k\times2^{\frac{9}{p}}$

2025년의 인구는 $k\times2^{\frac{2025-2001}{p}}=k\times2^{\frac{24}{p}}$

이때, 2025년의 인구가 2010년의 인구의 2배이므로

$2\times k\times2^{\frac{9}{p}}=k\times2^{\frac{24}{p}}$에서 $1+\dfrac{9}{p}=\dfrac{24}{p}$, $\dfrac{15}{p}=1$

$\therefore p=15$

19 답 4

$t=0$일 때, $\dfrac{p}{10}$개의 파일이 바이러스에 감염되어

있으므로 $f(0)=\dfrac{p}{1+c}=\dfrac{p}{10}$에서 $c=9$

$\therefore f(t)=\dfrac{p}{1+9e^{-kt}}$

또, 2시간 후에 전체 파일의 $\frac{1}{4}$이 감염될 것으로 판단되므로

$f(2)=\frac{p}{1+9e^{-2k}}=\frac{p}{4}$에서 $e^{-2k}=\frac{1}{3}$ ⋯ ㉠

이때, n시간 후에 전체 파일의 $\frac{1}{2}$이 감염된다고 하면

$f(n)=\frac{p}{1+9e^{-kn}}=\frac{p}{2}$에서 $e^{-kn}=\frac{1}{9}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $n=4$

20 답 ⑤

$\left(\frac{r}{10}\right)^2=100^{\frac{1}{5}(m-M)}$에 $r=10^{2.3}$, $m=0.4$를 대입하면

$\left(\frac{10^{2.3}}{10}\right)^2=100^{\frac{1}{5}(0.4-M)}$에서 $10^{2.6}=10^{\frac{2}{5}(0.4-M)}$

$2.6=\frac{2}{5}(0.4-M)$ $\quad\therefore M=-6.1$

21 답 ④

조건 (가)에서 $a-b=2^3$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 $b-c=2^2$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $(a-b)+(b-c)=2^3+2^2=12$

즉, $a-c=12$ $\quad\therefore a=c+12$

이때, 조건 (다)에서 $1\le c\le 5$이므로

$13\le c+12=a\le 17$

따라서 가능한 모든 a의 값은 13, 14, 15, 16, 17이므로 구하는 합은 $13+14+15+16+17=75$

22 답 ①

$a^3b^2=1$의 양변에 a를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_a a^3b^2=\log_a 1$, $\log_a a^3+\log_a b^2=0$

$3+2\log_a b=0$ $\quad\therefore \log_a b=-\frac{3}{2}$

$\therefore \log_a a^2b^3=\log_a a^2+\log_a b^3=2+3\log_a b$

$=2+3\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}$

[다른 풀이]

$a^3b^2=1$에서 $b=a^{-\frac{3}{2}}$이므로

$\log_a a^2b^3=\log_a a^2\left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^3=\log_a a^{-\frac{5}{2}}=-\frac{5}{2}$

23 답 ②

$\log_2 xy=3$에서 $\log_2 x+\log_2 y=3$ ⋯ ㉠

$\log_2 yz=4$에서 $\log_2 y+\log_2 z=4$ ⋯ ㉡

$\log_2 zx=5$에서 $\log_2 z+\log_2 x=5$ ⋯ ㉢

㉠+㉡+㉢에서

$\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z=6$ ⋯ ㉣

㉣−㉠을 하면 $\log_2 z=3$

$\therefore \log_2\frac{xy}{z}=\log_2 xy-\log_2 z=3-3=0$

[다른 풀이]

주어진 세 등식을 변끼리 더하면

$\log_2 xy+\log_2 yz+\log_2 zx=\log_2 (xyz)^2=12$에서

$(xyz)^2=2^{12}=64^2$

$\therefore xyz=64$ ($\because x>0,\ y>0,\ z>0$) ⋯ ㉤

또, $\log_2 xy=3$에서 $xy=2^3=8$

이것을 ㉤에 대입하면 $z=8$

$\therefore \log_2\frac{xy}{z}=\log_2\frac{8}{8}=\log_2 1=0$

24 답 ③

$\log_a bc=11$에서 $\log_a b+\log_a c=11$ ⋯ ㉠

$\log_b ac=5$에서 $\frac{1+\log_a c}{\log_a b}=5$

$\therefore 1+\log_a c=5\log_a b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $\log_a b=2$, $\log_a c=9$

$\therefore \log_{ab} c=\frac{\log_a c}{1+\log_a b}=\frac{9}{1+2}=3$

25 답 ⑤

$\log(\log_2 4)+\log(\log_3 5)+\log(\log_4 6)+\log(\log_5 7)$
$+\log(\log_6 8)+\log(\log_7 9)$

$=\log\{(\log_2 4)\times(\log_3 5)\times(\log_4 6)\times(\log_5 7)$
$\times(\log_6 8)\times(\log_7 9)\}$

$=\log\left(\frac{\log 4}{\log 2}\times\frac{\log 5}{\log 3}\times\frac{\log 6}{\log 4}\times\frac{\log 7}{\log 5}\times\frac{\log 8}{\log 6}\times\frac{\log 9}{\log 7}\right)$

$=\log\left(\frac{\log 8}{\log 2}\times\frac{\log 9}{\log 3}\right)=\log\left(\frac{3\log 2}{\log 2}\times\frac{2\log 3}{\log 3}\right)=\log 6$

26 답 ①

$\log_b a=t$라 하면 $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}=\frac{1}{t}$이므로

$\log_a b+\log_b a=\frac{13}{6}$에서 $\frac{1}{t}+t=\frac{13}{6}$, $6t^2-13t+6=0$

$(2t-3)(3t-2)=0$ $\quad\therefore t=\frac{3}{2}$ ($\because a>b>1$에서 $\log_b a>1$)

따라서 $\log_b a=\frac{3}{2}$이므로 $a=b^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \frac{a^4+b^3}{a^2+b^6}=\frac{\left(b^{\frac{3}{2}}\right)^4+b^3}{\left(b^{\frac{3}{2}}\right)^2+b^6}=\frac{b^6+b^3}{b^3+b^6}=1$

[다른 풀이]

$\log_a b=t$라 하면 $t+\frac{1}{t}=\frac{13}{6}$, $6t^2-13t+6=0$

$\therefore t=\frac{2}{3}$ ($\because a>b>1$에서 $\log_a b<1$)

즉, $\log_a b=\frac{2}{3}$에서 $b=a^{\frac{2}{3}}$ $\quad\therefore b^3=a^2$

$\therefore \frac{a^4+b^3}{a^2+b^6}=\frac{a^4+a^2}{a^2+a^4}=1$

27 답 ⑤

ㄱ. $\log_{\frac{1}{a}} b = \log_{a^{-1}} b = -\log_a b = \log_a b^{-1} = \log_a \frac{1}{b}$ (참)

ㄴ. $(\sqrt{a})^{\log_b c} = a^{\frac{1}{2}\log_b c} = a^{\log_b c^{\frac{1}{2}}} = a^{\log_b \sqrt{c}} = (\sqrt{c})^{\log_b a}$ (참)

ㄷ. $\log_a b \times \log_c d = \frac{\log b}{\log a} \times \frac{\log d}{\log c} = \frac{\log d}{\log a} \times \frac{\log b}{\log c}$

$= \log_a d \times \log_c b$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

28 답 ⑤

ㄱ. (주어진 식)$=\log_2\left(\log_2 32 + \log_{2^{-1}} \frac{3}{4} + \log_{2^2} 6^2\right)$

$=\log_2\left(\log_2 32 - \log_2 \frac{3}{4} + \log_2 6\right)$

$=\log_2\left\{\log_2\left(32 \times \frac{4}{3} \times 6\right)\right\}$

$=\log_2(\log_2 2^8) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$ (참)

ㄴ. $10^{3\log_{10}(\log_{10} 2)} = 10^{\log_{10}(\log_{10} 2)^3} = \{(\log_{10} 2)^3\}^{\log_{10} 10} = (\log_{10} 2)^3$ (참)

ㄷ. $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{8}\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}\log_{10}\frac{3}{2}$

$= \frac{9}{4}\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

29 답 55

$9<19<27$에서 $\log_3 9 < \log_3 19 < \log_3 27$

즉, $2<\log_3 19<3$이므로 $a=2$, $b=\log_3 19-2$

$\therefore\ 9(2^a+3^b) = 9(2^2+3^{\log_3 19-2}) = 9\left(4+3^{\log_3 \frac{19}{9}}\right) = 9\left(4+\frac{19}{9}\right) = 55$

30 답 ②

출고될 때의 가격이 2100만 원인 차가 t년 후에 1000만 원이 되었다고 하면 $P_0=2100$, $P(t)=1000$

이것을 $P(t)=P_0\left(\frac{9}{10}\right)^t$에 대입하면

$1000=2100\left(\frac{9}{10}\right)^t$에서 $\left(\frac{9}{10}\right)^t = \frac{10}{21}$

양변에 상용로그를 취하면 $t(2\log 3-1) = -\log 2.1$

$\therefore\ t = \frac{\log 2.1}{1-2\log 3} = \frac{0.322}{1-0.954} = \frac{0.322}{0.046} = 7$

따라서 이 승용차는 출고된 지 7년이 되었다.

31 답 ③

$\log \frac{1}{x} = -\log x = 1.4921$에서

$\log x = -1.4921 = -2+(1-0.4921) = -2+0.5079$

$= \log \frac{1}{100} + \log 3.22 = \log 0.0322$

$\therefore\ x = 0.0322$

32 답 ②

A시의 현재 인구를 $2a$명, B시의 현재 인구를 a명이라 하면 n년 후 A시와 B시의 인구는 각각 $2a(1+0.05)^n$(명), $a(1+0.08)^n$(명)이다.

이때, n년 후에 처음으로 B시의 인구가 A시의 인구보다 많아진다고 하면

$2a(1+0.05)^n < a(1+0.08)^n$에서 $2\times 1.05^n < 1.08^n$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 2 + n\log 1.05 < n\log 1.08$

$(\log 1.08 - \log 1.05)n > \log 2$

$n\log \frac{108}{105} > \log 2$

$n\log \frac{36}{35} > \log 2$

$n\log \frac{2^2\times 3^2}{5\times 7} > \log 2$

$(2\log 2+2\log 3-\log 5-\log 7)n > \log 2$

$(3\log 2+2\log 3-\log 7-1)n > \log 2$

$(3\times 0.3010+2\times 0.4771-0.8451-1)n > 0.3010$

$\therefore\ n > \frac{0.3010}{0.0121} = 24.8\cdots$

따라서 B시의 인구가 A시의 인구보다 처음으로 많아지게 되는 것은 25년 후이다.

33 답 ③

(i) a가 홀수인 경우

모든 실수 b에 대하여 $\sqrt[a]{b}$는 실수이므로

$2\times 5=10$(개)

(ii) a가 짝수인 경우

$b\geq 0$일 때에만 $\sqrt[a]{b}$는 실수이므로

$1\times 3=3$(개)

(i), (ii)에 의하여 집합 S의 원소의 개수는

$n(S)=10+3=13$

34 답 3

$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{y}}{x\sqrt{y}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{y}}{x\sqrt{y}}} \div \sqrt[4]{\frac{x}{y}} \times \sqrt[6]{\frac{x^8}{\sqrt{y}}}$

$= \frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[4]{x}\sqrt[8]{y}} \times \frac{\sqrt[8]{y}}{\sqrt{x}\sqrt[4]{y}} \div \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y}} \times \frac{\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[12]{y}}$

$= \frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[4]{x}\sqrt[8]{y}} \times \frac{\sqrt[8]{y}}{\sqrt{x}\sqrt[4]{y}} \times \frac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}} \times \frac{\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[12]{y}}$

$= \frac{\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[4]{x}\sqrt{x}\sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt[12]{x^{16}}}{\sqrt[12]{x^3}\sqrt[12]{x^6}\sqrt[12]{x^3}}$

$= \sqrt[12]{\frac{x^{16}}{x^3x^6x^3}} = \sqrt[12]{x^4} = \sqrt[3]{x}$

$\therefore\ n=3$

35 답 ④

$A=\{\sqrt[3]{-4}, \sqrt[3]{-2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$, $B=\{\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{4}\}$이므로

$A\cup B=\{\sqrt[3]{-4}, \sqrt[3]{-2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{4}\}$

따라서 $A\cup B$의 모든 원소의 곱은

$\sqrt[3]{(-4)\times(-2)\times2\times4}\times\sqrt[4]{2\times4}$

$=\sqrt[3]{2^6}\times\sqrt[4]{8}=2^2\times\sqrt[4]{8}=4\sqrt[4]{8}$

36 답 ③

ㄱ. $\sqrt[n]{a^2}$은 a^2의 n제곱근 중 하나이므로 $(\sqrt[n]{a^2})^n=a^2$이다. (참)

ㄴ. 【반례】 $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2\neq|-2|$ (거짓)

ㄷ. (i) n이 짝수일 때 $n+1$은 홀수이므로

$\sqrt[n]{a^n}=-a$ ($\because a<0$), $\sqrt[n+1]{a^{n+1}}=a$

$\therefore \sqrt[n]{a^n}+\sqrt[n+1]{a^{n+1}}=0$

(ii) n이 홀수일 때 $n+1$은 짝수이므로

$\sqrt[n]{a^n}=a$, $\sqrt[n+1]{a^{n+1}}=-a$ ($\because a<0$)

$\therefore \sqrt[n]{a^n}+\sqrt[n+1]{a^{n+1}}=0$

(i), (ii)에 의하여

$\sqrt[n]{a^n}+\sqrt[n+1]{a^{n+1}}=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

일등급 UP

* n이 짝수, 홀수일 때의 거듭제곱근

n이 짝수일 때 : $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & (a\geq0) \\ -a & (a<0)\end{cases}=|a|$

n이 홀수일 때 : $\sqrt[n]{a^n}=a$

37 답 ④

ㄱ. 지수가 정수가 아닌 유리수인 경우에는 밑이 양수일 때만 정의되므로 $\sqrt[5]{-2}$를 $(-2)^{\frac{1}{5}}$과 같이 유리수 지수로 나타내지 않는다. 즉, 주어진 계산 과정은 옳지 않다. 이때, 계산 과정이 옳지 않더라도 결과는 옳을 수 있으므로 유의하도록 한다. (거짓)

ㄴ. $\sqrt[5]{-2}=\sqrt[5]{(-1)\times2}=\sqrt[5]{(-1)^5\times2}$

$=\sqrt[5]{(-1)^5}\times\sqrt[5]{2}=-\sqrt[5]{2}$

이고,

$(-\sqrt[5]{2})^{10}=(-1)^{10}\times(\sqrt[5]{2})^{10}=(\sqrt[5]{2})^{10}$

$=(2^{\frac{1}{5}})^{10}=2^2=4$ (참)

ㄷ. 지수가 정수인 경우에는 밑이 음수일 때도 지수법칙이 성립한다. 즉, 주어진 계산 과정은 옳다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

일등급 UP

* 지수법칙의 성립 여부

(i) 밑이 음수이거나 허수이면 지수가 정수일 때만 지수법칙이 성립한다.

예 $\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}}\neq(-3)^{2\times\frac{1}{2}}=-3$

(ii) 지수가 정수이면 밑이 0이 아닐 때 지수법칙을 사용할 수 있다.

38 답 128

$f(x)=\dfrac{x^{-1}+x^{-3}+x^{-5}+\cdots+x^{-21}}{1+x^2+x^4+\cdots+x^{20}}$

$=\dfrac{x^{21}(x^{-1}+x^{-3}+\cdots+x^{-21})}{x^{21}(1+x^2+x^4+\cdots+x^{20})}$

$=\dfrac{1+x^2+x^4+\cdots+x^{20}}{x^{21}(1+x^2+x^4+\cdots+x^{20})}=\dfrac{1}{x^{21}}=x^{-21}$

$\therefore f\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)=f\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)=\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^{-21}=2^7=128$

39 답 ②

$2^{\frac{b}{a}}\times2^{\frac{a}{b}}=2^{2\sqrt{2}}$에서 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=2\sqrt{2}$이므로

$\left|\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}\right|^2=\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)^2-4\times\dfrac{b}{a}\times\dfrac{a}{b}=(2\sqrt{2})^2-4=4$

따라서 $\left|\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}\right|=2$이므로 $4^{\left|\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right|}=4^2=16$

40 답 ②

ㄱ. $E(a, 4)=E(4, a)$에서 $a^4=4^a$, $(a^2)^2-(2^a)^2=0$

$(a^2-2^a)(a^2+2^a)=0$

a는 1이 아닌 양수이므로 $a^2=2^a$

$\therefore E(a, 2)=E(2, a)$ (참)

ㄴ. $E\left(E\left(a, -\dfrac{1}{b}\right), c\right)=E(a^{-\frac{1}{b}}, c)=\left(a^{-\frac{1}{b}}\right)^c=a^{-\frac{c}{b}}$

$E\left(E(a, -c), \dfrac{1}{b}\right)=E\left(a^{-c}, \dfrac{1}{b}\right)=(a^{-c})^{\frac{1}{b}}=a^{-\frac{c}{b}}$

$\therefore E\left(E\left(a, -\dfrac{1}{b}\right), c\right)=E\left(E(a, -c), \dfrac{1}{b}\right)$ (참)

ㄷ. $E(E(a, b), E(b, a))=E(a^b, b^a)=(a^b)^{b^a}=a^{b\times b^a}$

$E(a^b, a+1)=(a^b)^{a+1}=a^{ab+b}$

$\therefore E(E(a, b), E(b, a))\neq E(a^b, a+1)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

41 답 ④

$\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{n}}=(2^{-4})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{4}{n}}$

$2^{-\frac{4}{n}}$이 유리수가 되려면 지수 $-\dfrac{4}{n}$가 정수이어야 한다.

그런데 n은 정수이므로 n은 4의 약수이다.

$\therefore n=\pm1, \pm2, \pm4$

따라서 $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{n}}$이 유리수가 되도록 하는 정수 n은 6개이다.

42 답 ③

$x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$x^3=2-2^{-1}-3\left(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=\dfrac{3}{2}-3x$ $\left(\because x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)$

$2x^3=3-6x$

$\therefore 2x^3+6x=3$

[다른 풀이]

$$2x^3+6x=2x(x^2+3)=2\left(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)^2+3\right\}$$
$$=2\left(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{-\frac{2}{3}}+1\right)=2\left(2-\frac{1}{2}\right)=3$$

43 답 2

$$(\text{주어진 식})=\sqrt{\frac{2^{-\frac{24}{3}}+2^{-\frac{16}{3}}-2^{-\frac{10}{3}}}{2^{-\frac{30}{3}}-2^{-\frac{16}{3}}+2^{-\frac{22}{3}}}}=\sqrt{\frac{2^{-\frac{10}{3}}\times\left(2^{-\frac{14}{3}}+2^{-2}-1\right)}{2^{-\frac{16}{3}}\times\left(2^{-\frac{14}{3}}-1+2^{-2}\right)}}$$
$$=\sqrt{\frac{2^{-\frac{10}{3}}}{2^{-\frac{16}{3}}}}=\sqrt{2^2}=2$$

44 답 ②

두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=-2x+4$

이때, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $y=-2x+4$ 위의 점이므로

$b=-2a+4 \qquad \therefore 2a+b=4$

한편, $4^a>0$, $2^b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4^a+2^b\geq 2\sqrt{4^a\times 2^b}=2\sqrt{2^{2a+b}}=2\sqrt{2^4}=8$ (등호는 $4^a=2^b$일 때 성립)

따라서 4^a+2^b의 최솟값은 8이다.

45 답 64

이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-4$이고

$\alpha^2-2\alpha-4=0$에서 $\alpha^2-2\alpha=4$

$$\therefore \frac{8^\alpha\times 2^\beta}{(2^\alpha\times 4^\beta)^\alpha}=\frac{2^{3\alpha}\times 2^\beta}{2^{\alpha^2}\times 4^{\alpha\beta}}=\frac{2^{3\alpha+\beta}}{2^{\alpha^2+2\alpha\beta}}$$
$$=2^{3\alpha+\beta-\alpha^2-2\alpha\beta}=2^{(\alpha+\beta)-2\alpha\beta-(\alpha^2-2\alpha)}$$
$$=2^{2+8-4}=2^6=64$$

46 답 ①

$67^x=27=3^3$에서 $67=3^{\frac{3}{x}}$ ⋯ ㉠

$603^y=81=3^4$에서 $603=3^{\frac{4}{y}}$ ⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{67}{603}=\dfrac{1}{9}=\dfrac{3^{\frac{3}{x}}}{3^{\frac{4}{y}}}$, $3^{-2}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

$\therefore \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=-2$

47 답 4

$abc=30$에서 $c=\dfrac{30}{ab}$이고 $2^a=3^5$, $3^b=5^3$이므로

$5^c=5^{\frac{30}{ab}}=(5^3)^{\frac{10}{ab}}=(3^b)^{\frac{10}{ab}}=3^{\frac{10}{a}}=(3^5)^{\frac{2}{a}}=(2^a)^{\frac{2}{a}}=2^2=4$

[다른풀이]

$2^a=3^5$, $3^b=5^3$에서

$2^{30}=2^{abc}=(2^a)^{bc}=(3^5)^{bc}=(3^b)^{5c}=(5^3)^{5c}=(5^c)^{15}$

$\therefore 5^c=2^{\frac{30}{15}}=2^2=4$

48 답 ③

빛이 바닷물을 1 m 통과한 후 빛의 밝기의 감소율을 r라 하면

바다 수면 10 m 지점 B에서 빛의 밝기가 $9a$(럭스)이므로

$16a(1-r)^{10}=9a$

$\therefore (1-r)^{10}=\dfrac{9}{16}$ ⋯ ㉠

따라서 바다 수면 5 m 지점에서 빛의 밝기는

$$16a(1-r)^5=16a\{(1-r)^{10}\}^{\frac{1}{2}}=16a\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\ (\because ㉠)$$
$$=16a\times\frac{3}{4}=12a$$

$\therefore k=12$

49 답 ②

크기가 8 Gb인 파일을 복사하는 데 걸리는 시간은

$a=1.2\times 8^{0.5}=1.2\times 8^{\frac{1}{2}}$

크기가 2 Gb인 파일을 복사하는 데 걸리는 시간은

$b=1.2\times 2^{0.5}=1.2\times 2^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{1.2\times 8^{\frac{1}{2}}}{1.2\times 2^{\frac{1}{2}}}=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}=2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=2$$

50 답 ②

점 A_1의 좌표는 $\left(2,\ 2^{1+\frac{1}{3}}\right)$

점 P_1의 좌표는 $\left(2^{1+\frac{1}{3}},\ 2^{1+\frac{1}{3}}\right)$

점 B_1의 좌표는 $\left(2^{1+\frac{1}{3}},\ 2^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right)$

점 Q_1의 좌표는 $\left(2^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}},\ 2^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right)$

점 A_2의 좌표는 $\left(2^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}},\ 2^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\right)$

⋮

점 A_n의 x좌표를 a_n이라 하면

$a_1=2$, $a_2=2^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$, $a_3=2^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$, ⋯이므로

$a_n=2^{1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)(n-1)}$

$\therefore a_{61}=2^{1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\times 60}=2^{1-10}=2^{-9}$

51 답 ①

로그의 정의에서 밑은 1이 아닌 양수이고, 진수는 양수이어야 한다.

ㄱ. $a^2-a+2=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\geq\dfrac{7}{4}$이고 $a^2+1\geq 1$이므로
밑과 진수의 조건을 모두 만족시킨다.
즉, a의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있다.

ㄴ. $a=0$일 때 $2|a|+1=1$에서 $a=0$일 때는 밑의 조건을 만족시키지 않으므로 로그가 정의될 수 없다.

ㄷ. $a=1$일 때 $a^2-2a+1=0$에서 $a=1$일 때는 진수의 조건을 만족시키지 않으므로 로그가 정의될 수 없다.

따라서 실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것은 ㄱ이다.

52 답 ①

$4^x=5^y=20^z$에서 각 변을 밑을 10으로 하는 로그를 취하면

$x\log 4=y\log 5=z\log 20$

이때, $x\log 4=y\log 5=z\log 20=k$라 하면

$x=\dfrac{k}{\log 4},\ y=\dfrac{k}{\log 5},\ z=\dfrac{k}{\log 20}$

$\therefore yz+zx-xy$

$=\dfrac{k^2}{\log 5\times\log 20}+\dfrac{k^2}{\log 4\times\log 20}-\dfrac{k^2}{\log 4\times\log 5}$

$=\dfrac{k^2(\log 4+\log 5-\log 20)}{\log 4\times\log 5\times\log 20}=0$

[다른 풀이]

$4^x=5^y=20^z=k$라 하면

$4=k^{\frac{1}{x}},\ 5=k^{\frac{1}{y}},\ 20=k^{\frac{1}{z}}$

$4\times5=20$이므로 $k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{z}}$에서

$k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{z}}$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$

양변에 xyz를 곱하면

$yz+zx=xy$에서 $yz+zx-xy=0$

53 답 ②

조건 (가)에서 $\log_2 ab=1$이므로 $\log_2 a+\log_2 b=1$

조건 (나)에서 $\log_2 a\times\log_2 b=-2$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a$, $\log_2 b$를 두 근으로 하는 이차방정식 $t^2-t-2=0$에서

$(t-2)(t+1)=0$이므로 $t=2$ 또는 $t=-1$

$\therefore \log_2 a=-1,\ \log_2 b=2\ (\because a<b)$

따라서 $\log_2\dfrac{b}{a}=\log_2 b-\log_2 a=2-(-1)=3$

[다른 풀이]

조건 (가)의 $ab=2$에서 $b=\dfrac{2}{a}$

이것을 조건 (나)의 $\log_2 a\times\log_2 b=-2$에 대입하면

$\log_2 a\times\log_2\dfrac{2}{a}=-2$에서

$\log_2 a(1-\log_2 a)=-2$

$(\log_2 a)^2-\log_2 a-2=0$

$(\log_2 a+1)(\log_2 a-2)=0$

$\therefore \log_2 a=-1$ 또는 $\log_2 a=2$

(i) $\log_2 a=-1$이면 $a=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$이므로 $b=4$

(ii) $\log_2 a=2$이면 $a=2^2=4$이므로 $b=\dfrac{1}{2}$

그런데 $a<b$이므로 (i), (ii)에 의하여 $a=\dfrac{1}{2},\ b=4$

$\therefore \log_2\dfrac{b}{a}=\log_2 b-\log_2 a=\log_2 4-\log_2\dfrac{1}{2}=2-(-1)=3$

54 답 ⑤

$\log_2 6$이 유리수라 가정하면

$\log_2 6=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 양의 정수)로 놓을 수 있다.

즉, $6=2^{\frac{q}{p}}$에서 $6^p=2^q$, $3^p=\dfrac{2^q}{2^p}=2^{q-p}$ ←(가)

이때, 3^p은 홀수(나)이지만 2^{q-p}은 짝수(다)이므로 모순이다.

따라서 $\log_2 6$은 유리수가 아니다.

55 답 2

$\log_2 2a\times\log_a 3a\times\log_{3a}3=\log_2 9$에서

$\dfrac{\log 2a}{\log 2}\times\dfrac{\log 3a}{\log a}\times\dfrac{\log 3}{\log 3a}=\dfrac{\log 9}{\log 2}$

$\dfrac{\log 2a}{\log 2}\times\dfrac{\log 3}{\log a}=\dfrac{2\log 3}{\log 2}$

$\dfrac{\log 2a}{\log a}=2,\ \log_a 2a=\log_a a^2,\ 2a=a^2$

이때, $a>0$이므로 양변을 a로 나누면 $a=2$

56 답 ③

로그의 밑의 변환 공식에 의하여 주어진 등식은

$\log_x 4+\log_x 6+\log_x 9=3\log_x a$

$\log_x(4\times6\times9)=\log_x a^3,\ a^3=2^3\times3^3$

$\therefore a=2\times3=6$

57 답 ③

$a^{\log\frac{b}{c}}\times b^{\log\frac{c}{a}}\times c^{\log\frac{a}{b}}=a^{\log b-\log c}\times b^{\log c-\log a}\times c^{\log a-\log b}$

$=\dfrac{a^{\log b}}{a^{\log c}}\times\dfrac{b^{\log c}}{b^{\log a}}\times\dfrac{c^{\log a}}{c^{\log b}}$

$=\dfrac{a^{\log b}}{a^{\log c}}\times\dfrac{b^{\log c}}{a^{\log b}}\times\dfrac{a^{\log c}}{b^{\log c}}=1$

[다른풀이]

$a^{\log\frac{b}{c}}=x,\ b^{\log\frac{c}{a}}=y,\ c^{\log\frac{a}{b}}=z$라 하면

$\log x=\log\dfrac{b}{c}\times\log a=(\log b-\log c)\log a$ ⋯ ㉠

$\log y=\log\dfrac{c}{a}\times\log b=(\log c-\log a)\log b$ ⋯ ㉡

$\log z=\log\dfrac{a}{b}\times\log c=(\log a-\log b)\log c$ ⋯ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$\log x+\log y+\log z=0$에서 $\log xyz=0$ $\therefore xyz=1$

즉, $a^{\log\frac{b}{c}}\times b^{\log\frac{c}{a}}\times c^{\log\frac{a}{b}}=1$

58 답 ④

$1<p<2$에서 $3<3^p<3^2$ $\therefore 3<3^p<9$

즉, 3^p을 3으로 나눌 때, 몫이 정수이고 나머지가 2인 수는 5, 8이므로 $3^p=5$에서 $p=\log_3 5$, $3^p=8$에서 $p=\log_3 8$

따라서 $a=\log_3 5+\log_3 8=\log_3 40$이므로 $3^a=40$

59 답 216

조건 (가)의 $a\log_{500}2+b\log_{500}5=c$에서

$\log_{500}2^a+\log_{500}5^b=c$, $\log_{500}2^a5^b=c$, $2^a5^b=500^c=2^{2c}5^{3c}$

$\therefore a=2c,\ b=3c$ ⋯ ㉠

한편, 조건 (나)의 $\log_6 a+\log_6 b+\log_6 c=7$에서

$\log_6 abc=7$, $abc=6c^3=6^7$ ($\because$ ㉠)

$c^3=6^6=(6^2)^3 \qquad \therefore c=6^2=36$

$\therefore a+b+c=2c+3c+c=6c=6\times36=216$

60 답 ⑤

$2^a=c$에서 $a=\log_2 c$이고

$4^b=d$에서 $2^{2b}=d$이므로 $2b=\log_2 d$

ㄱ. $d^a=d^{\log_2 c}=c^{\log_2 d}=c^{2b}$ (참)

ㄴ. $a+b=\log_2 c+\frac{1}{2}\log_2 d$

$=\log_4 c^2+\log_4 d=\log_4 c^2d$ (참)

ㄷ. $\frac{a}{b}=\frac{2a}{2b}=\frac{2\log_2 c}{\log_2 d}=\frac{\log_2 c^2}{\log_2 d}=\log_d c^2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

61 답 ⑤

ㄱ. $\log_a b=\log_c d$에서 $\frac{\log b}{\log a}=\frac{\log d}{\log c}$이므로

$\frac{\log c}{\log a}=\frac{\log d}{\log b} \qquad \therefore \log_a c=\log_b d$ (참)

ㄴ. $\log_a b=\frac{\log b}{\log a}=\frac{\log d}{\log c}=k$ ($k\neq0$인 상수)라 하면

$$\log_{ac} bd=\frac{\log bd}{\log ac}=\frac{\log b+\log d}{\log a+\log c}=\frac{k\log a+\log d}{\log a+\frac{1}{k}\log d}=\frac{k\left(\log a+\frac{1}{k}\log d\right)}{\log a+\frac{1}{k}\log d}=k$$

$\therefore \log_a b=\log_{ac} bd$ (참)

ㄷ. $\frac{\log b}{\log a}=\frac{\log d}{\log c}$에서

$\log d\times\log a=\log c\times\log b$

$\log a^{\log d}=\log b^{\log c}$

$\therefore a^{\log d}=b^{\log c}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

62 답 ④

$\log 461k=2.3367$에서 $\log 461+\log k=2.3367$

$\log k=2.3367-\log 461=2.3367-(2+\log 4.61)$

$=2.3367-(2+0.6637)=-0.3270=-1+0.6730$

$=\log 10^{-1}+\log 4.71=\log 0.471$

$\therefore k=0.471$

63 답 ③

현재의 도심지역과 외곽지역의 평균기온을 각각 u_0, r_0이라 하면

$u_0=r_0+0.05+1.6\log a$ ⋯ ㉠

이때, n년 후 도심지역의 평균기온이 1 ℃ 상승한다고 하면

n년 후의 도심지역의 넓이는 $a\times1.08^n$이고

외곽지역의 평균기온은 변하지 않으므로

$u_0+1=r_0+0.05+1.6\log(1.08^n\times a)$ ⋯ ㉡

㉡－㉠을 하면

$1=1.6\log(1.08^n\times a)-1.6\log a$

$=1.6\log 1.08^n=1.6n\log 1.08$

$=1.6n\log\frac{2^2\times3^3}{10^2}=1.6n(2\log 2+3\log 3-2)$

$=1.6\times0.033n=0.0528n$

$\therefore n=\frac{1}{0.0528}=18.9\times\times\times \fallingdotseq 19$

64 답 7

$\sqrt{\frac{2^a\times5^b}{5}}=2^{\frac{a}{2}}\times5^{\frac{b-1}{2}}$이 자연수이어야 하므로 지수가 모두 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 a와 $b-1$은 모두 2의 배수가 되어야 한다. ······ ⓐ

마찬가지로 $\sqrt[3]{\frac{2^a\times5^b}{2}}=2^{\frac{a-1}{3}}\times5^{\frac{b}{3}}$이 자연수이어야 하므로

$a-1$과 b는 모두 3의 배수이어야 한다. ······ ⓑ

따라서 두 수 $\sqrt{\frac{2^a\times5^b}{5}}$과 $\sqrt[3]{\frac{2^a\times5^b}{2}}$이 모두 자연수가 되기 위한

a의 최솟값은 4이고, b의 최솟값은 3이므로 $a+b$의 최솟값은

$4+3=7$ ······ ⓒ

채점기준

ⓐ $\sqrt{\frac{2^a\times5^b}{5}}$이 자연수가 되기 위한 a, b의 조건을 각각 찾는다.	[40%]
ⓑ $\sqrt[3]{\frac{2^a\times5^b}{2}}$이 자연수가 되기 위한 a, b의 조건을 각각 찾는다.	[40%]
ⓒ $a+b$의 최솟값을 구한다.	[20%]

65 답 5

$3^x=6^z$에서 $(3^x)^{\frac{1}{x}}=(6^z)^{\frac{1}{x}} \qquad \therefore 3=6^{\frac{z}{x}}$ ⋯ ㉠

$4^y=6^z$에서 $(2^{2y})^{\frac{1}{2y}}=(6^z)^{\frac{1}{2y}} \qquad \therefore 2=6^{\frac{z}{2y}}$ ⋯ ㉡ ······ ⓐ

㉠×㉡을 하면 $6=6^{\frac{z}{x}}\times6^{\frac{z}{2y}}=6^{\frac{z}{x}+\frac{z}{2y}}$

즉, $\frac{z}{x}+\frac{z}{2y}=1$ ······ ⓑ

$\therefore 5^{\frac{z}{x}+\frac{z}{2y}}=5^1=5$ ······ ⓒ

채점기준

ⓐ 3, 2를 각각 6^k (k는 상수)의 꼴로 나타낸다.	[50%]
ⓑ $\frac{z}{x}+\frac{z}{2y}$의 값을 구한다.	[30%]
ⓒ $5^{\frac{z}{x}+\frac{z}{2y}}$의 값을 구한다.	[20%]

66 답 1

$\log_a c+\log_b c=0$에서

(i) $c\neq1$이면 $\dfrac{1}{\log_c a}+\dfrac{1}{\log_c b}=0$

$\dfrac{\log_c b+\log_c a}{\log_c a\log_c b}=0$

$\dfrac{\log_c ab}{\log_c a\log_c b}=0$

$\log_c ab=0\qquad \therefore ab=1$

$\therefore \dfrac{ab+c}{abc+1}=\dfrac{1+c}{c+1}=1$ ······ ⓐ

(ii) $c=1$이면 $\dfrac{ab+c}{abc+1}=\dfrac{ab+1}{ab+1}=1$ ······ ⓑ

(i), (ii)에서 $\dfrac{ab+c}{abc+1}=1$ ······ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $c\neq1$일 때, $\dfrac{ab+c}{abc+1}$의 값을 구한다.	[60%]
ⓑ $c=1$일 때, $\dfrac{ab+c}{abc+1}$의 값을 구한다.	[30%]
ⓒ $\dfrac{ab+c}{abc+1}$의 값을 구한다.	[10%]

67 답 ④

$3=2^a$이므로

$3^b=(2^a)^b=2^{ab}=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$

$\therefore ab=\dfrac{1}{2}$

[다른 풀이]

$2^a=3$에서 $a=\log_2 3$

$3^b=\sqrt{2}$에서 $b=\log_3\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\log_3 2$

$\therefore ab=\log_2 3\times\dfrac{1}{2}\log_3 2$

$=\dfrac{1}{\log_3 2}\times\dfrac{1}{2}\log_3 2=\dfrac{1}{2}$

68 답 ③

$\log_{\sqrt{3}} a=2\log_3 a=4\log_9 a=\log_9 a^4$이므로

$\log_{\sqrt{3}} a=\log_9 ab$에서

$\log_9 a^4=\log_9 ab$, $a^4=ab$

$a(a^3-b)=0\qquad \therefore b=a^3\ (\because a>1)$

$\therefore \log_a b=\log_a a^3=3$

[다른 풀이]

$\log_{\sqrt{3}} a=\log_9 ab=k$라 하면

$a=(\sqrt{3})^k=3^{\frac{k}{2}}$

$ab=9^k=3^{2k}$이므로

$3^{\frac{k}{2}}b=3^{2k}$, $b=3^{\frac{3}{2}k}$

$\therefore \log_a b=\log_{3^{\frac{k}{2}}} 3^{\frac{3}{2}k}=\dfrac{\frac{3}{2}k}{\frac{k}{2}}=3$

69 답 ①

$f(mn)=f(m)+f(n)$ ··· ㉠에서

(i) m이 짝수, n이 짝수일 때,

mn은 짝수이므로 $\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$

즉, m과 n이 모두 짝수일 때 ㉠이 성립하므로

이때의 순서쌍 (m, n)의 개수는 $10\times10=100$

(ii) m이 짝수, n이 홀수일 때,

mn은 짝수이므로 $\log_2 mn=\log_2 m+\log_3 n$

$\log_2 n=\log_3 n\qquad \therefore n=1$

즉, m이 짝수, $n=1$일 때 ㉠이 성립하므로

이때의 순서쌍 (m, n)의 개수는 $10\times1=10$

(iii) m이 홀수, n이 짝수일 때,

mn은 짝수이므로 $\log_2 mn=\log_3 m+\log_2 n$

$\log_2 m=\log_3 m\qquad \therefore m=1$

즉, $m=1$, n이 짝수일 때 ㉠이 성립하므로

이때의 순서쌍 (m, n)의 개수는 $1\times10=10$

(iv) m이 홀수, n이 홀수일 때,

mn은 홀수이므로 $\log_3 mn=\log_3 m+\log_3 n$

즉, m과 n이 모두 홀수일 때 ㉠이 성립하므로

이때의 순서쌍 (m, n)의 개수는 $10\times10=100$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$100+10+10+100=220$

70 답 ⑤

ㄱ. A_4는 $2^a=\dfrac{4}{b}$에서 $4=2^a\times b$인 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 원소로 갖는 집합이므로 $4=2^1\times2$, $4=2^2\times1$

$\therefore A_4=\{(1, 2), (2, 1)\}$ (참)

ㄴ. $m=2^k$일 때, $A_m=A_{2^k}$

즉, A_m은 $2^a=\dfrac{2^k}{b}$에서 $2^k=2^a\times b$인 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 원소로 갖는 집합이므로

$A_m=\{(1,\ 2^{k-1}),\ (2,\ 2^{k-2}),\ (3,\ 2^{k-3}),\ \cdots,\ (k,\ 1)\}$

$\therefore n(A_m)=k$ (참)

ㄷ. A_m은 $2^a=\dfrac{m}{b}$에서 $m=2^a\times b$인 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 원소로 갖는 집합이다.

$n(A_m)=1$이 되기 위해서는 $b=\dfrac{m}{2^k}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 k가 오직 하나만 존재해야 하므로 $k=1$이어야 한다.

따라서 $m=2\times$(홀수)이다.

두 자리 자연수 중에서 $2\times$(홀수)인 자연수는

2×5, 2×7, 2×9, $\cdots$, 2×49이므로

$n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는

5, 7, 9, $\cdots$, 49의 23이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

71 답 64

$n=6$이면 $n^{\frac{4}{k}}=6^{\frac{4}{k}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 k는 1, 2, 4의 3개이다. 이것은 4의 약수의 개수와 같으므로 $f(6)=3$이다.

이때, n이 소수 p의 m거듭제곱수, 즉 $n=p^m$이면

$n^{\frac{4}{k}}=(p^m)^{\frac{4}{k}}=p^{\frac{4m}{k}}$이고 이 값이 자연수가 되려면

$\frac{4m}{k}$이 0 또는 자연수이어야 하므로 k는 $4m$의 약수이어야 한다.

$f(n)=8$에서 약수의 개수가 8이 되는 최소의 자연수 $4m$은

$4m=2^3\times3$이므로 $m=6$이다.

한편, $n=p^6$에서 $p=2$일 때 n이 최소이므로 구하는 n의 최솟값은

$n=2^6=64$

72 답 78

$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=m$ (m은 자연수)라 하면

$na-a^2=2^m$, $nb-b^2=2^m$

따라서 a, b는 x에 대한 이차방정식 $nx-x^2=2^m$, 즉

$x^2-nx+2^m=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $a+b=n$, $ab=2^m$

$\therefore (b-a)^2=(a+b)^2-4ab=n^2-2^{m+2}$ … ㉠

이때, 조건 $0<b-a\le\frac{n}{2}$의 각 변을 제곱하면

$0<(b-a)^2\le\frac{n^2}{4}$

㉠을 대입하면 $0<n^2-2^{m+2}\le\frac{n^2}{4}$

$\therefore 2^{m+2}<n^2\le\frac{2^{m+4}}{3}$ … ㉡

부등식 ㉡의 m에 1, 2, 3, …을 대입하면

주어진 조건을 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 3, 6, 9, 12, 13, 17, 18이다. 따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+6+9+12+13+17+18=78$

73 답 ②

$10=\frac{50}{5}=\frac{50}{50^a}=50^{1-a}$이므로

$10^{\frac{a+b+1}{3(1-a)}}=(50^{1-a})^{\frac{a+b+1}{3(1-a)}}=50^{\frac{a+b+1}{3}}$

$=\sqrt[3]{50^a\times50^b\times50}=\sqrt[3]{5\times4\times50}=\sqrt[3]{10^3}=10$

74 답 ③

ㄱ. $\sqrt[3]{x}\times\sqrt[4]{y}=1$에서 $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}}=1$

양변을 12제곱하면 $\left(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}}\right)^{12}=1$에서 $x^4y^3=1$ (참)

ㄴ. $0<x<y$에서 $\frac{y}{x}>1$이고, 양변에 x^4y^3을 곱하면

$x^4y^3\times\frac{y}{x}>x^4y^3$에서 $x^3y^4>1$ ($\because$ ㄱ) (참)

ㄷ. ㄴ에서 $x^3y^4>1$의 양변을 $\frac{1}{12}$제곱하면

$(x^3y^4)^{\frac{1}{12}}>1$에서 $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}>1$ $\quad\therefore \sqrt[4]{x}\times\sqrt[3]{y}>1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

75 답 ④

$f(x)=\frac{3^x}{3^x+1}$이므로

$f(-x)=\frac{3^{-x}}{3^{-x}+1}=\frac{3^x\times3^{-x}}{3^x(3^{-x}+1)}=\frac{1}{3^x+1}$

따라서 $f(x)+f(-x)=\frac{3^x}{3^x+1}+\frac{1}{3^x+1}=\frac{3^x+1}{3^x+1}=1$이므로

$$\begin{aligned}a+b&=\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)\}\\&\quad+\{f(-1)+f(-2)+f(-3)+\cdots+f(-100)\}\\&=\{f(1)+f(-1)\}+\{f(2)+f(-2)\}\\&\quad+\{f(3)+f(-3)\}+\cdots+\{f(100)+f(-100)\}\\&=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{100\text{개}}=100\end{aligned}$$

76 답 ④

$\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)=k$ ($k\ne0$인 상수)라 하면

$p=9^k$, $q=12^k$, $p+q=16^k$이고 $12^2=9\times16$이므로

$(12^2)^k=(9\times16)^k$에서

$(12^k)^2=9^k\times16^k$, $q^2=p(p+q)$

$q^2=p^2+pq$

양변을 p^2으로 나누면 $\left(\frac{q}{p}\right)^2=1+\frac{q}{p}$

이때, $\frac{q}{p}=x$라 하면 $x^2=x+1$

$x^2-x-1=0$ $\quad\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x=\frac{q}{p}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\because p>0,\ q>0\text{에서 } \frac{q}{p}>0\right)$

77 답 ⑤

주변 소음도를 L_1, 기계의 소음도를 L_2라 하고,

기계를 작동했을 때의 공장의 소음도를 L이라 하면

$L=80$, $L_1=70$이므로

$80=10\log\left(10^{\frac{70}{10}}+10^{\frac{L_2}{10}}\right)$에서 $10^8=10^7+10^{\frac{L_2}{10}}$

$10^{\frac{L_2}{10}}=10^8-10^7=9\times10^7$

양변에 상용로그를 취하면

$\frac{L_2}{10}=2\log3+7=0.96+7=7.96$

$\therefore L_2=79.6$

78 답 ③

$10\le p\le100$에서 $\log_2 10\le\log_2 p\le\log_2 100$ … ㉠

$f\left(\frac{p}{2}\right)=f\left(\frac{2}{p}\right)$에서 $\log_2\frac{p}{2}$의 소수 부분과 $\log_2\frac{2}{p}$의 소수 부분이 같으므로 $\log_2\frac{p}{2}-\log_2\frac{2}{p}=m$ (단, m은 정수)

$(\log_2 p-\log_2 2)-(\log_2 2-\log_2 p)=m$

$2\log_2 p-2=m$ $\quad\therefore \log_2 p=\frac{m}{2}+1$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\log_2 10 \le \frac{m}{2}+1 \le \log_2 100$에서

$\log_2 5 \le \frac{m}{2} \le \log_2 50$, $\log_2 25 \le m \le \log_2 2500$

$\log_2 2^4 < \log_2 25 \le m \le \log_2 2500 < \log_2 2^{12}$

$\therefore 4 < m < 12$

이때, m은 정수이므로 $m=5, 6, \cdots, 11$

$m=5, 6, \cdots, 11$을 각각 ㉡에 대입하면

$\log_2 p = \frac{7}{2}, 4, \cdots, \frac{13}{2}$

$\therefore p = 2^{\frac{7}{2}}, 2^4, \cdots, 2^{\frac{13}{2}}$

따라서 p의 개수는 7이다.

02 지수함수와 로그함수

문제편 22P

01 답 ①

함수 $y=a\times 2^x$의 그래프가 점 $(1, 6)$을 지나므로

$y=a\times 2^x$에 $x=1$, $y=6$을 대입하면

$6=a\times 2^1=2a \qquad \therefore a=3$

또, 이 함수의 그래프가 점 $(b, 24)$를 지나므로

$y=a\times 2^x=3\times 2^x$에 $x=b$, $y=24$를 대입하면

$24=3\times 2^b$, $2^b=8=2^3 \qquad \therefore b=3$

$\therefore a+b=6$

02 답 6

곡선 $y=2^x$이 y축과 만나는 점 A의 좌표는 $(0, 1)$

곡선 $y=-2^x+8$이 y축과 만나는 점 B의 좌표는 $(0, 7)$

두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2^x+8$이 만나는 점의 x좌표를 k라 하면

$2^k=-2^k+8$에서 $2^{k+1}=8=2^3 \qquad \therefore k=2$

즉, 점 C의 좌표는 $(2, 4)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 2=6$

03 답 9

$f(x)=\log_2(2x-a)+b=\log_2 2\left(x-\frac{a}{2}\right)+b$

$\quad =\log_2\left(x-\frac{a}{2}\right)+b+1$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 $x=\frac{a}{2}$이므로

$\frac{a}{2}=3$에서 $a=6$

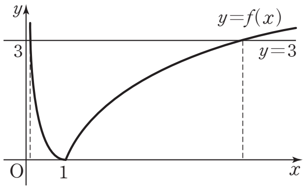
이때, $f(5)=5$이므로 $\log_2(10-6)+b=5$에서

$2+b=5 \qquad \therefore b=3$

$\therefore a+b=9$

04 답 8

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다. 즉, $f(x)=3$을 만족시키는 x의 값은 $0<x<1$, $x\ge 1$에서 각각 하나씩 존재한다.



(i) $0<x<1$일 때

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x=3$에서 로그의 정의에 의하여

$x=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

(ii) $x\ge 1$일 때

$f(x)=\log_4 x=3$에서 로그의 정의에 의하여 $x=4^3$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=3$을 만족시키는 모든 실수 x의 곱은

$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 4^3=\left(\frac{4}{2}\right)^3=8$

05 답 ③

$(g\circ f)(x)=x$에서 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

즉, $g(x)=f^{-1}(x)$

이때, $g(5)=f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$에서

$1+2\log_3 k=5$, $\log_3 k=2 \qquad \therefore k=3^2=9$

$\therefore g(5)=9$

06 답 ③

$f(x)=4^x$에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다. 즉, $f(x)$의 최댓값은

$M=f(2)=4^2=16$

$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 밑이 1보다 작으므로 $g(x)$는 $x=2$일 때 최솟값을 갖는다. 즉, $g(x)$의 최솟값은

$m=g(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\therefore Mm=4$

07 답 ②

진수의 조건에 의하여 $2-x>0$, $x+4>0$

$\therefore -4<x<2$

$f(x)=\log_3(2-x)+\log_3(x+4)$

$\quad =\log_3(2-x)(x+4)$

이때, $t=(2-x)(x+4)=-x^2-2x+8=-(x+1)^2+9$라 하면 $-4<x<2$에서 $0<t\le 9$이고 $f(x)=\log_3 t$에서 밑이 1보다 크므로 t가 최대일 때 $f(x)$도 최대이다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\log_3 9=2$

08 답 12

로그함수 $f(x)=\log_2(7-x)$의 밑이 1보다 크므로 진수 $7-x$가 최대일 때 $f(x)$도 최대이다.

이때, $-1\le x\le 3$에서 $4\le 7-x\le 8$이므로 $f(x)$의 최댓값은

$a=\log_2 8=3$이다.

지수함수 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$의 밑이 1보다 작으므로 지수 $2x$가 최소일 때 $g(x)$가 최대이다.

이때, $-1\le x\le 3$에서 $-2\le 2x\le 6$이므로 $g(x)$의 최댓값은

$b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$이다.

$\therefore ab=12$

09 답 ③

곡선 $y=2^{x-a}-b$의 점근선이 $y=-b$이므로

$y=|2^{x-a}-b|$의 그래프의 점근선은 $y=b$이다.

$\therefore b=3$

이때, 주어진 함수의 그래프가 점 $(4, 3)$을 지나므로

$3=2^{4-a}-3$, $2^{4-a}=6$, $4-a=\log_2 6$

$\therefore a=4-\log_2 6=3-\log_2 3$

따라서 함수 $y=|2^{x-3+\log_2 3}-3|$의 그래프의 x절편 k의 값은

$|2^{k-3+\log_2 3}-3|=0$에서 $2^{k-3+\log_2 3}=3$

$k-3+\log_2 3=\log_2 3 \qquad \therefore k=3$

10 답 ④

$a^0=1$이므로 $2x+3=0$에서 $x=-\frac{3}{2}$이면 a의 값에 관계없이

$y=a^0+4=5$이다.

즉, 함수 $y=a^{2x+3}+4$의 그래프는 상수 a의 값에 관계없이 점

$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$를 지난다.

따라서 $b=-\frac{3}{2}$, $c=5$이므로 $b+c=\frac{7}{2}$

[다른 풀이]

$y=a^{2x+3}+4=a^{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}+4$

즉, 함수 $y=a^{2x+3}+4$의 그래프는 함수 $y=a^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

이때, 함수 $y=a^{2x}$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$을 지나므로 함수 $y=a^{2x+3}+4$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$을 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점을 지난다.

즉, 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$이므로 $b=-\frac{3}{2}$, $c=5$

$\therefore b+c=\frac{7}{2}$

11 답 10

두 교점 A, B는 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점이므로

두 점 A, B의 좌표는 각각 $(a, 2^a)$, $(b, 2^b)$이다.

이때, 세 점 O, A, B가 직선 $y=mx$ 위의 점이므로 두 직선 OA, OB의 기울기는 m으로 서로 같다.

즉, $\frac{2^a}{a}=\frac{2^b}{b}$에서 $\frac{b}{a}=\frac{2^b}{2^a}=2^{b-a}$

한편, $b-a=2$ … ㉠이므로

$\frac{b}{a}=2^{b-a}=2^2=4$에서 $b=4a$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{8}{3}$

$\therefore 3(a+b)=10$

12 답 ③

$y=\log_a bx$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$

또, $x=1$일 때 $y<0$이므로 $\log_a b<0$

$\therefore b>1$

따라서 $y=\log_b ax$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하고, $x=1$일 때 $y=\log_b a<0$이므로 함수 $y=\log_b ax$의 그래프의 개형은 ③과 같다.

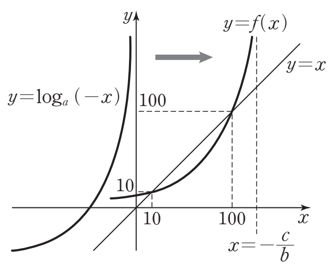
13 답 ②

그래프가 두 점 $(10, 10)$, $(100, 100)$을 지나는 로그함수는 증가하는 함수이다. 이때, $0<a<1$에서 $b>0$이면 함수 $f(x)$는 감소하는 함수이므로 $b<0$이어야 한다. 즉,

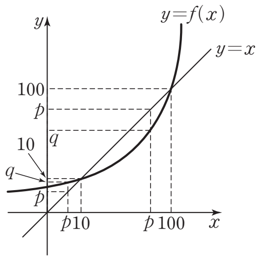
$$f(x)=\log_a(bx+c)+d=\log_a\left\{-b\left(-x-\frac{c}{b}\right)\right\}+d$$

$$=\log_a\left(-x-\frac{c}{b}\right)+\log_a(-b)+d \cdots ㉠$$

즉, $y=f(x)$의 그래프는 $y=\log_a(-x)$의 그래프를 평행이동한 것이고, 두 점 $(10, 10)$, $(100, 100)$을 지나며 점근선은 $x=-\frac{c}{b}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 그래프에서 점근선 $x=-\frac{c}{b}$가 직선 $x=100$의 오른쪽에 위치하므로 $-\frac{c}{b}>100 \qquad \therefore bc<0$ (참)



ㄴ. 직선 $y=x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 교점이 $(10,\ 10)$, $(100,\ 100)$이므로 그림에서 $p<10$이면 $f(p)=q>p$이다. (참)

ㄷ. 그림에서 $10<p<100$이면 $f(p)=q<p$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 답 ④

함수 $f(x)=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프가 $y=g(x)$이므로 $g(x)=3^{x-m}+n$이다.

한편, 점 $A(1,\ f(1))$, 즉 $A(1,\ 3)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

$(1+m,\ 3+n)=(3,\ g(3))$이므로

$1+m=3 \quad \therefore m=2$

이때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $A(1,\ 3)$을 지나므로

$g(1)=3$에서 $3^{1-m}+n=3$

$3^{-1}+n=3 \quad \therefore n=\frac{8}{3}$

$\therefore m+n=\frac{14}{3}$

15 답 3

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 함수 $y=\log_2(x-a)+b$의 그래프가 된다.

이때, 함수 $y=\log_2(x-a)+b$의 그래프가 점 $(3,\ b)$를 지나므로

$\log_2(3-a)+b=b$

$\log_2(3-a)=0,\ 3-a=1$

$\therefore a=2$

또, 함수 $y=\log_2(x-2)+b$의 그래프가 점 $(10,\ 4)$를 지나므로

$\log_2 8+b=4,\ 3+b=4 \quad \therefore b=1$

$\therefore a+b=3$

16 답 ⑤

$y=3\times3^x-1=3^{x+1}-1$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프이고, $y=3^x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $y=\log_3 x$의 그래프이다. 즉, $y=3^x$ 또는 $y=\log_3 x$의 그래프를 대칭이동 또는 평행이동하여 얻은 그래프는 $y=3\times3^x-1$의 그래프를 대칭이동 또는 평행이동하여 얻을 수 있다.

ㄱ. $y=2\times3^x-1=3^{\log_3 2}\times3^x-1=3^{x+\log_3 2}-1$

즉, $y=2\times3^x-1$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\log_3 2$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\log_3(2x+3)=\log_3 2\left(x+\frac{3}{2}\right)=\log_3\left(x+\frac{3}{2}\right)+\log_3 2$

즉, $y=\log_3(2x+3)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\log_3 2$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3x}=\log_3 3x=\log_3 x+1$

즉, $y=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3x}$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=3\times3^x-1$의 그래프를 대칭이동 또는 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 함수의 그래프는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17 답 13

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 점 $(2,\ 4)$를 지나므로 그 역함수 $y=\log_2(x+p)+q$, $y=\log_{\frac{1}{4}}(x+p)+q$의 그래프는 모두 점 $(4,\ 2)$를 지난다.

$2=\log_2(4+p)+q$ ⋯ ㉠

$2=\log_{\frac{1}{4}}(4+p)+q=-\frac{1}{2}\log_2(4+p)+q$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $\frac{3}{2}\log_2(4+p)=0,\ 4+p=1 \quad \therefore p=-3$

이것을 ㉠에 대입하면 $q=2$

$\therefore p^2+q^2=13$

18 답 ④

$f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로

$(g\circ g)(k)=16$의 양변에 함수 f를 취하면

$g(k)=f(16)=\log_2 16-2=2$

$\therefore k=f(2)=-1$

19 답 ③

두 함수 $f(x)=3^{x-3}+1$, $g(x)=\log_3(x-1)+3$은 서로 역함수 관계이다.

ㄱ. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로

$f^{-1}(4)=g(4)$

$\therefore f^{-1}(4)\times\{g(4)+1\}=g(4)\times\{g(4)+1\}$

$=4\times(4+1)=20$ (참)

ㄴ. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $f(4)=4,\ g(4)=4$이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(4,\ 4)$에서 만난다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20 답 ①

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x+a}$의 밑이 1보다 작으므로 지수가 최소일 때 $f(x)$는 최대가 된다.

$-x^2+4x+a=-(x-2)^2+a+4$이므로 지수 $-x^2+4x+a$는 $0\le x\le 3$에서 $x=0$일 때 최솟값 a, $x=2$일 때 최댓값 $a+4$를 갖는다.

즉, $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^a$, $x=2$일 때 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+4}$을 갖는다.

이때, 함수 $f(x)$의 최댓값이 4이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=4$에서 $2^{-a}=4$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{a+4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2+4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

21 답 12

$f(x)=4^x-2^{x+3}+6=(2^x)^2-8\times 2^x+6$

$\quad=(2^x-4)^2-10$

이므로 $2^x=4$, 즉 $x=2$일 때 $f(x)$는 최솟값 -10을 갖는다.

따라서 $a=2$, $m=-10$이므로 $a-m=12$

22 답 ④

두 함수 $y=3^x$, $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 직선 $x=k$의 교점 P, Q의 좌표는 각각 $(k,\ 3^k)$, $\left(k,\ -\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)$이므로

$\overline{PQ}=3^k-\left\{-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}=3^k+\left(\frac{1}{3}\right)^k$

이때, $3^k>0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3^k+\left(\frac{1}{3}\right)^k\ge 2\sqrt{3^k\times\left(\frac{1}{3}\right)^k}=2$ (단, 등호는 $k=0$일 때 성립)

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 2이다.

23 답 ④

$1<x<25$에서 $\log 4x>0$, $\log\frac{25}{x}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log 4x+\log\frac{25}{x}\ge 2\sqrt{\log 4x\times\log\frac{25}{x}}$ ⋯ ㉠

㉠의 좌변에서

$\log 4x+\log\frac{25}{x}=\log\left(4x\times\frac{25}{x}\right)=\log 100=2$

즉, ㉠에서 $2\ge 2\sqrt{\log 4x\times\log\frac{25}{x}}$, $\sqrt{\log 4x\times\log\frac{25}{x}}\le 1$

$\therefore \log 4x\times\log\frac{25}{x}\le 1$

즉, $\log 4x\times\log\frac{25}{x}$의 최댓값은 1이므로 $b=1$

한편, 등호는 $\log 4x=\log\frac{25}{x}$, 즉 $4x=\frac{25}{x}$일 때 성립하므로

$x^2=\frac{25}{4}$에서 $x=\frac{5}{2}$ ($\because 1<x<25$) $\quad\therefore a=\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=\frac{7}{2}$

24 답 ②

$0<$(밑)<1이므로 진수 $x^2+2ax+2a^2$이 최소일 때,

$\log_{0.1}(x^2+2ax+2a^2)$은 최댓값을 갖는다.

이때, $x^2+2ax+2a^2=(x+a)^2+a^2$이므로 $x=-a$일 때 진수의 최솟값은 a^2이다.

한편, $\log_{0.1}(x^2+2ax+2a^2)$의 최댓값이 -2이므로

$\log_{0.1}a^2=-2$에서 $\log_{0.1}a=-1$

$\therefore a=(0.1)^{-1}=\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}=10$

25 답 10

$y=(\log_3 x)^2+\log_3\frac{27}{x^4}=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3$

이때, $\log_3 x=t$라 하면 $y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

한편, $1\le x\le 27$에서 $0\le\log_3 x\le 3$ $\quad\therefore 0\le t\le 3$

따라서 함수 $y=(\log_3 x)^2+\log_3\frac{27}{x^4}$은

$t=2$, 즉 $x=9$일 때 최솟값 $m=-1$,

$t=0$, 즉 $x=1$일 때 최댓값 $M=3$을 갖는다.

$\therefore M^2+m^2=9+1=10$

26 답 ①

지수함수 $y=ma^x+n$의 그래프의 점근선은 $y=n$이므로 $n=1$

또, 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=ma^0+1$에서 $3=m+1$ $\quad\therefore m=2$

$\therefore m-n=1$

27 답 ⑤

ㄱ. $\left(a,\ \frac{b}{2}\right)\in A$에서 $2^a=\frac{b}{2}$이므로 $b=2\times 2^a=2^{a+1}$

$\quad\therefore (a+1,\ b)\in A$ (참)

ㄴ. $\left(\frac{a}{2},\ b\right)\in A$에서 $2^{\frac{a}{2}}=b$

$\quad$양변을 제곱하면 $\left(2^{\frac{a}{2}}\right)^2=b^2$ $\quad\therefore 2^{\frac{a}{2}\times 2}=2^a=b^2$

$\quad\therefore (a,\ b^2)\in A$ (참)

ㄷ. $(\log_2 a,\ \log_2 b)\in A$에서

$\quad 2^{\log_2 a}=\log_2 b$, $a=\log_2 b$ $\quad\therefore b=2^a$

$\quad\therefore (a,\ b)\in A$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

28 답 ②

점 P의 x좌표를 α라 하면

$k\times2^{\alpha}=2^{-\alpha}$, $k\times2^{2\alpha}=1$ $\quad\therefore 2^{2\alpha}=\frac{1}{k}$ ⋯ ㉠

점 Q의 x좌표는 2α이므로

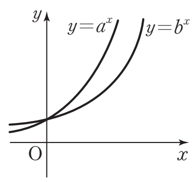
$k\times2^{2\alpha}=-4\times2^{2\alpha}+8$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

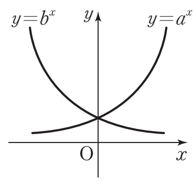
$k\times\frac{1}{k}=-4\times\frac{1}{k}+8$에서 $\frac{4}{k}=7$ $\quad\therefore k=\frac{4}{7}$

29 답 ⑤

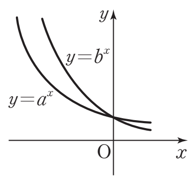
ㄱ. (i) $a>b>1$



(ii) $a>1>b>0$



(iii) $1>a>b>0$



위 그래프에서 모든 자연수 n에 대하여 항상 $a^n>b^n$이다. (참)

ㄴ. $f(n)=g(-n)$이면 $a^n=b^{-n}$이므로 $a=\frac{1}{b}$

$\therefore a^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=(b^{-1})^{\frac{1}{n}}=b^{-\frac{1}{n}}$ (참)

ㄷ. $f(n)<g(-n)$이면 $a^n<b^{-n}$에서

$a^n<\frac{1}{b^n}$이므로 $(ab)^n<1$ $\quad\therefore ab<1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

30 답 ③

두 함수 $y=2^{x-n}$과 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프의 교점의 x좌표는

$2^{x-n}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 $2^{x-n}=2^{-x}$, $x-n=-x$ $\quad\therefore x=\frac{n}{2}$

따라서 점 P_n의 좌표는 $\left(\frac{n}{2},\ 2^{-\frac{n}{2}}\right)$이므로 $a_n=\frac{n}{2}$, $b_n=2^{-\frac{n}{2}}$

ㄱ. $a_m+a_n=\frac{m}{2}+\frac{n}{2}=\frac{m+n}{2}=a_{m+n}$ (참)

ㄴ. $b_mb_n=2^{-\frac{m}{2}}2^{-\frac{n}{2}}=2^{-\frac{m+n}{2}}=b_{m+n}$ (참)

ㄷ. $n=1$이면 $a_1=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}=b_1$으로 성립하지 않는다.

$n\geq2$이면 $a_n\geq1$이고 $b_n<1$이므로 성립하지 않는다.

즉, $a_n=b_n$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

31 답 2

곡선 $y=g(x)$의 점근선은 $x=\frac{1}{a}$이고 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점은 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이므로 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}$

$\therefore \frac{b}{a}=2$

32 답 11

$\frac{(\triangle\text{APR의 넓이})}{(\square\text{OAPQ의 넓이})}=\frac{7}{9}$이므로 양수 k에 대하여

$\triangle$APR의 넓이를 $7k$라 하면 $\square$OAPQ의 넓이는 $9k$이다.

이때, 점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle$APH의 넓이는 $7k$이므로 $\square$OAHQ의 넓이는 $2k$이고

$\square$ARPH의 넓이는 $14k$이다.

즉, $\overline{\text{OA}}:\overline{\text{AR}}=1:7$이고 $\overline{\text{OA}}=1$이므로 $\overline{\text{AR}}=7$

따라서 점 R의 x좌표는 8이므로

$a=8$, $b=\log_2 8=3$

$\therefore a+b=11$

[다른 풀이]

$\frac{(\triangle\text{APR의 넓이})}{(\square\text{OAPQ의 넓이})}=\frac{7}{9}$에서

$\dfrac{\frac{1}{2}(a-1)b}{\frac{1}{2}(1+a)b}=\frac{7}{9}$

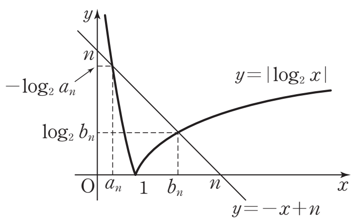
$\frac{a-1}{1+a}=\frac{7}{9}$, $7+7a=9a-9$, $2a=16$

따라서 $a=8$이고 $b=\log_2 8=3$이므로

$a+b=11$

33 답 ②

함수 $y=|\log_2 x|=\begin{cases}\log_2 x & (x\geq1)\\ -\log_2 x & (0<x<1)\end{cases}$ 의 그래프는 다음과 같다.



직선 $y=-x+n$의 기울기가 -1이므로 그림에서

$n-b_n=\log_2 b_n$, $n-(-\log_2 a_n)=a_n$

즉, $n=b_n+\log_2 b_n=a_n-\log_2 a_n$에서

$b_n-a_n=-\log_2 b_n-\log_2 a_n=-\log_2 a_nb_n$이므로

$2=-\log_2 a_nb_n$, $\log_2 a_nb_n=-2$

$\therefore a_nb_n=2^{-2}=\frac{1}{4}$

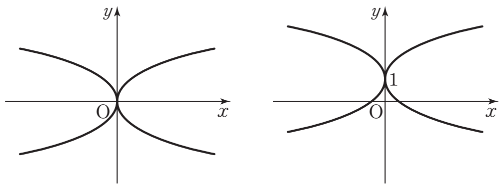
34 답 ①

$|y-1|=\log_2(|x|+1)$의 그래프는 $|y|=\log_2(|x|+1)$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때, $|y|=\log_2(|x|+1)$에서 x 대신 $-x$를 대입해도 같은 식이므로 이 그래프는 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

같은 방법으로 이 그래프는 x축 및 원점에 대하여 대칭이동한 그래프임을 알 수 있다.

즉, $|y|=\log_2(|x|+1)$의 그래프는 $y=\log_2(x+1)$의 그래프 중 제1사분면에 있는 그래프를 x축, y축 및 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 두 함수 $|y|=\log_2(|x|+1)$과 $|y-1|=\log_2(|x|+1)$의 그래프는 다음과 같다.

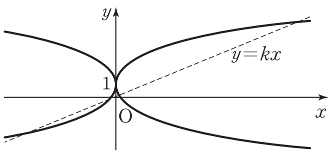


$|y|=\log_2(|x|+1)$ $|y-1|=\log_2(|x|+1)$

ㄱ. $k>0$일 때, 곡선 G는 직선 $x=k$와 항상 두 점에서 만난다. (참)

ㄴ. $k=1$일 때, 곡선 G는 직선 $y=1$과 오직 한 점에서만 만난다. (거짓)

ㄷ. $k>0$일 때, 곡선 G는 직선 $y=kx$와 그림과 같이 네 점에서 만날 수 있다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

35 답 1

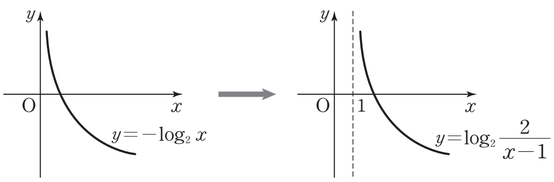
함수 $y=8\times2^{3x}+2=2^3\times2^{3x}+2=2^{3(x+1)}+2$이므로 함수 $y=8\times2^{3x}+2$의 그래프는 $y=2^{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $p=-1$, $q=2$이므로 $p+q=1$

36 답 ②

$y=\log_2\dfrac{2}{x-1}=1-\log_2(x-1)$이므로 함수 $y=\log_2\dfrac{2}{x-1}$의 그래프는 $y=-\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 함수 $y=\log_2\dfrac{2}{x-1}$의 그래프는 다음과 같다.



37 답 ③

ㄱ. $y=\log_2 3x=\log_2 3+\log_2 x$이므로 $f(x)=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\log_2 3$만큼 평행이동하면 겹칠 수 있다.

ㄴ. $y=\log_4 2x^2$의 정의역은 $\{x|x\neq0,\ x$는 실수$\}$이고, $f(x)=\log_2 x$의 정의역은 $\{x|x>0\}$이므로 겹칠 수 없다.

ㄷ. $f(x)=\log_2 x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 역함수 $y=2^x$의 그래프가 된다.

한편, $y=3\times2^x=2^{\log_2 3}\times2^x=2^{x+\log_2 3}$이므로 $y=3\times2^x$의 그래프는 $f(x)=\log_2 x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $-\log_2 3$만큼 평행이동하면 겹칠 수 있다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프와 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

38 답 ④

ㄱ. 함수 $y=a^{-x}$의 그래프를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면

$-x=a^y$에서 $y=\log_a(-x)$

즉, 두 함수 $y=a^{-x}$과 $y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)$의 그래프는 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이 아니다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=-a^x$의 그래프를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면

$-x=-a^{-y}$에서 $x=a^{-y}$

$-y=\log_a x$ $\quad\therefore y=-\log_a x=\log_{\frac{1}{a}} x$

즉, 두 함수 $y=-a^x$과 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=-\left(\dfrac{1}{a}\right)^x=-a^{-x}$의 그래프를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면 $-x=-a^y$에서 $x=a^y$

$\therefore y=\log_a x$

즉, 두 함수 $y=-\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$과 $y=\log_a x$의 그래프는 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다. (참)

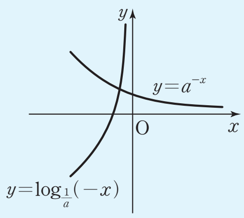
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

일등급 UP

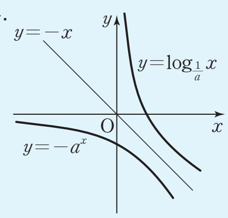
＊함수의 그래프

보기에 주어진 함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.

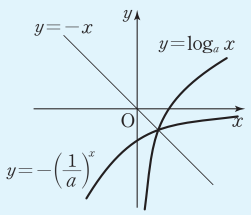
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



39 답 ③

$f(x)=a^{bx-1}$의 그래프와 $g(x)=a^{1-bx}$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(1)=g(1)$이 성립한다.

즉, $a^{b-1}=a^{1-b}$에서 $b-1=1-b$

$\therefore b=1$

$f(2)+g(2)=\frac{5}{2}$에서 $f(2)=a$, $g(2)=a^{-1}$이므로 $a+a^{-1}=\frac{5}{2}$

$2a^2-5a+2=0$, $(a-2)(2a-1)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

그런데 $a>1$이므로 $a=2$

$\therefore a+b=2+1=3$

[다른 풀이]

$f(x)=a^{bx-1}$의 그래프를 직선 $x=1$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$f(2-x)=a^{b(2-x)-1}$

즉, $f(2-x)=g(x)$이므로 $a^{b(2-x)-1}=a^{1-bx}$에서

$b(2-x)-1=1-bx$, $2b=2$ $\quad\therefore b=1$

(이하 동일)

40 답 ③

$h(x)=2x-1$이라 하면 $h^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+1)$

한편, $f(2x-1)=(f\circ h)(x)$이므로

$(f\circ h)^{-1}(x)=(h^{-1}\circ f^{-1})(x)=h^{-1}(f^{-1}(x))$

$\qquad\qquad =h^{-1}(g(x))=\frac{1}{2}\{g(x)+1\}$

41 답 5

함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 $f(x)=2^{x-m}$의 그래프가 된다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있고, 교점 중 한 점의 x좌표가 8이므로 그 교점의 좌표는 $(8,\ 8)$이다.

즉, $f(8)=2^{8-m}=8$이므로 $8-m=3$ $\quad\therefore m=5$

42 답 2

$y=f(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{C}(1,\ 0)$을 지나므로 $f(x)$의 역함수 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프는 점 $\mathrm{B}(0,\ 1)$을 지나야 한다.

$1=\log_2(0+a)+b$ ⋯ ㉠

한편, $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프와 $y=f(x)$의 그래프의 교점은 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 점 A의 좌표를 $(t,\ t)$라 하면

$\triangle\mathrm{ABC}=t^2-2\times\left\{\frac{1}{2}t(t-1)\right\}-\frac{1}{2}\times1\times1=t-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$\therefore t=3$

따라서 점 A의 좌표는 $(3,\ 3)$이므로

$3=\log_2(3+a)+b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$\therefore a+b=2$

43 답 ②

$y=\log_2 x+2$라 하면 $\log_2 x=y-2$ $\quad\therefore x=2^{y-2}$

이때, x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^{x-2}$ $\quad\therefore g(x)=2^{x-2}$

ㄱ. $g(a)+g(-a)=2^{a-2}+2^{-a-2}$

ㄴ. $g(a)g\left(\frac{1}{a}\right)=2^{a-2}\times2^{\frac{1}{a}-2}=2^{a+\frac{1}{a}-4}$

ㄷ. $g(a)g(-a)=2^{a-2}\times2^{-a-2}=2^{-4}=\frac{1}{16}$

따라서 a의 값에 관계없이 항상 일정한 값을 갖는 것은 ㄷ이다.

44 답 ②

$f^{-1}=g$, $g^{-1}=f$이고 $(f\circ g)(x)=x$이므로

ㄱ. $g^{-1}(x^n)=f(x^n)=a^{x^n}\neq(a^x)^n=\{f(x)\}^n$ (거짓)

ㄴ. $(f\circ g)(x+y)=x+y=(f\circ g)(x)+(f\circ g)(y)$ (참)

ㄷ. $(f^{-1}\circ g)(xy)=(g\circ g)(xy)=\log_a(\log_a xy)$

$\qquad =\log_a(\log_a x+\log_a y)$

$\qquad \neq\log_a(\log_a x)+\log_a(\log_a y)$

$\qquad =(f^{-1}\circ g)(x)+(f^{-1}\circ g)(y)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

45 답 ③

$f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$이므로 $1\leq x\leq4$에서

$-4\leq f(x)\leq0$

합성함수 $(g\circ f)(x)=a^{f(x)}$은

(i) $0<a<1$이면

$f(x)=-4$일 때 최댓값 16을 가지고, $f(x)=0$일 때, 최솟값 m을 갖는다. 즉, $a^{-4}=16$에서 $a=\frac{1}{2}$이므로 $m=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

(ii) $a>1$이면

$f(x)=0$일 때 최댓값 16을 가지고, $f(x)=-4$일 때, 최솟값 m을 갖는다. 그런데 $f(x)=0$이면 $a^0=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $m=1$이다.

46 답 ⑤

$f(x)=4^x-2^{x+2}+a=(2^x)^2-4\times2^x+a$

이때, $2^x=t$ $(t>0)$라 하면

$f(x)=t^2-4t+a=(t-2)^2+a-4$

따라서 $t=2$, 즉 $x=1$일 때 $f(x)$는 최솟값 $a-4$를 가지므로

$b=1$이고 $a-4=3$에서 $a=7$ $\quad\therefore a+b=8$

47 답 ①

$3^x+3^{-x}=t$라 하면 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=3^x+3^{-x}\geq 2\sqrt{3^x\times 3^{-x}}=2$

$\therefore t\geq 2$

한편, $3^x+3^{-x}=t$의 양변을 제곱하면

$3^{2x}+2+3^{-2x}=t^2$에서 $9^x+9^{-x}=t^2-2$

$$\begin{aligned}\therefore y&=9^x+9^{-x}-6(3^x+3^{-x})+5\\&=t^2-2-6t+5\\&=t^2-6t+3\\&=(t-3)^2-6\ (t\geq 2)\end{aligned}$$

따라서 함수 $y=9^x+9^{-x}-6(3^x+3^{-x})+5$의 최솟값은 $t=3$일 때, -6이다.

48 답 ④

$$\begin{aligned}2^x+2^{y+1}&=2^x+2\times 2^y=2^x+2^y+2^y\\&\geq 3\sqrt[3]{2^x2^y2^y}=3\sqrt[3]{2^{x+2y}}=3\sqrt[3]{2^6}=12\end{aligned}$$

따라서 2^x+2^{y+1}의 최솟값은 12이다.

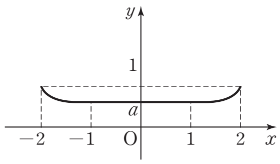
49 답 ⑤

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & (-2\leq x<-1)\\ 1 & (-1\leq x<1)\\ -x+2 & (1\leq x\leq 2)\end{cases}\quad \text{이므로}$$

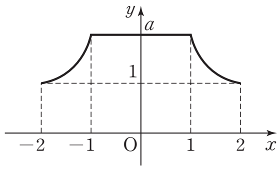
$$g(x)=\begin{cases}a^{x+2} & (-2\leq x<-1)\\ a & (-1\leq x<1)\\ a^{-x+2} & (1\leq x\leq 2)\end{cases}$$

따라서 밑 a의 값의 범위에 따라 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

(i) $0<a<1$일 때,



(ii) $a>1$일 때,



ㄱ. 위의 그림에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$로 가능한 경우는 (i)이고 이때의 최댓값은 1이다. (참)

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최댓값이 2로 가능한 경우는 (ii)이고 이때의 최솟값은 1이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

(i) $0<a<1$이면

함수 $g(x)$는 $f(x)$가 최소일 때 최댓값을 가지고, $f(x)$가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $a^0=1$, $a^1=a$이다.

(ii) $a>1$이면

함수 $g(x)$는 $f(x)$가 최대일 때 최댓값을 가지고, $f(x)$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $a^1=a$, $a^0=1$이다.

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프에서 $f(-x)=f(x)$이므로

$g(-x)=a^{f(-x)}=a^{f(x)}=g(x)$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. 최솟값이 $\frac{1}{2}$이려면 $0<a<1$이어야 하므로 이때의 최댓값은 1이다. (참)

ㄷ. 최댓값이 2이려면 $a>1$이어야 하므로 이때의 최솟값은 1이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

50 답 ③

$f(x)=\dfrac{x^{2\log x}}{x^4}$의 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log f(x)&=\log\frac{x^{2\log x}}{x^4}=\log(x^{2\log x})-\log x^4\\&=2(\log x)^2-4\log x\end{aligned}$$

이때, $\log x=t$라 하면

$\log f(x)=2t^2-4t=2(t-1)^2-2$

이므로 $\log f(x)$의 최솟값은 $t=1$일 때 -2이다.

한편, $\log f(x)$의 밑이 1보다 크므로 $\log f(x)$가 최소일 때 $f(x)$도 최소이다.

띠라서 $\log f(x)=-2$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\frac{1}{100}$이다.

51 답 477

$x^{\log 3}=3^{\log x}$, $3^{\log 100x}=3^{\log 100+\log x}=9\times 3^{\log x}$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=3^{\log x}x^{\log 3}-2\times 3^{\log 100x}\\&=(3^{\log x})^2-18\times 3^{\log x}\end{aligned}$$

이때, $3^{\log x}=t$라 하면 $f(x)=t^2-18t=(t-9)^2-81$이고

$\frac{1}{10}\leq x\leq 100$에서

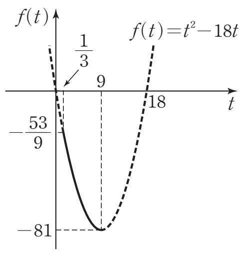
$-1\leq \log x\leq 2$, $3^{-1}\leq 3^{\log x}\leq 3^2$

$\therefore \frac{1}{3}\leq t\leq 9$

따라서 주어진 함수는

$t=\frac{1}{3}$일 때 최댓값 $M=-\frac{53}{9}$을 가지고

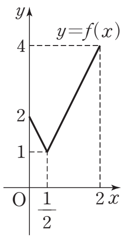
$t=9$일 때 최솟값 $m=-81$을 갖는다.



$\therefore Mm=\left(-\frac{53}{9}\right)\times(-81)=477$

52 답 16

$0 \le x \le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로



$f(x)=1+|2x-1|$의 값의 범위는

그림에서 $1 \le f(x) \le 4$

이때, $f(x)=t$라 하면 $1 \le t \le 4$이고

$y=(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(t)=t^{\log_2 t-4}$

양변에 밑을 2로 하는 로그를 취하면

$\log_2 y=(\log_2 t)^2-4\log_2 t=(\log_2 t-2)^2-4$

$1 \le t \le 4$에서 $0 \le \log_2 t \le 2$이므로 $-4 \le \log_2 y \le 0$

$\therefore \frac{1}{16} \le y \le 1$

따라서 $M=1$, $m=\frac{1}{16}$이므로 $\frac{M}{m}=16$

53 답 20

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2, 5)$에서 만나므로 두 함수 $y=\log_4(x+a)+b$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+a)+b$의 그래프는 모두 점 $(5, 2)$를 지난다. ---------- ⓐ

$2=\log_4(5+a)+b$, $2=\log_{\frac{1}{2}}(5+a)+b$

$\log_4(5+a)=\log_{\frac{1}{2}}(5+a)$

$\frac{1}{2}\log_2(5+a)=-\log_2(5+a)$, $\log_2(5+a)=0$

$5+a=1 \qquad \therefore a=-4,\ b=2$ ---------- ⓑ

$\therefore a^2+b^2=20$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 함수의 그래프가 점 $(5, 2)$를 지남을 안다.	[40%]
ⓑ a, b의 값을 각각 구한다.	[50%]
ⓑ a^2+b^2의 값을 구한다.	[10%]

54 답 16

두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(a, \log_4 a)$, $(\log_2 a, a)$이므로

$\overline{AP}=a-\log_4 a$, $\overline{AQ}=a-\log_2 a$ ---------- ⓐ

$\therefore \overline{AP}-\overline{AQ}=(a-\log_4 a)-(a-\log_2 a)$

$=\log_2 a-\log_4 a=\log_4 a$

따라서 $\log_4 a=2$이므로 $a=16$ ---------- ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 두 선분 AP, AQ의 길이를 a로 나타낸다.	[40%]
ⓑ 상수 a의 값을 구한다.	[60%]

55 답 6

$4\log_{\frac{1}{9}}\sqrt{x}=4\log_{3^{-2}}x^{\frac{1}{2}}=4\times\frac{1}{-2}\times\frac{1}{2}\log_3 x=-\log_3 x$이므로

$f(x)=\log_3\left(x^2+\frac{9}{4}\right)+4\log_{\frac{1}{9}}\sqrt{x}=\log_3\left(x^2+\frac{9}{4}\right)-\log_3 x$

$=\log_3\left(x+\frac{9}{4x}\right)$ ---------- ⓐ

이때, (밑)>1이므로 진수 $x+\frac{9}{4x}$가 최소일 때 $f(x)$도 최소이다.

한편, 진수의 조건에 의하여 $x^2+\frac{9}{4}>0$, $\sqrt{x}>0$에서 $x>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{9}{4x} \ge 2\sqrt{x\times\frac{9}{4x}}=3$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{9}{4x}\text{, 즉 } x=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore f(x)=\log_3\left(x+\frac{9}{4x}\right) \ge \log_3 3=1$ ---------- ⓑ

따라서 $m=\frac{3}{2}$, $n=1$이므로 $2m+3n=3+3=6$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $f(x)$를 간단히 한다.	[40%]
ⓑ $f(x)$의 최솟값을 구한다.	[40%]
ⓒ $2m+3n$의 값을 구한다.	[20%]

56 답 ④

$y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=\log_3(x-a)+2$에서 $f(x)=\log_3(x-a)+2$

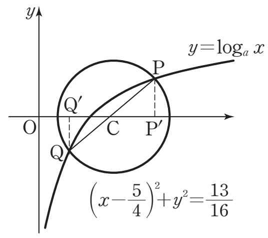
이때, $y=\log_3(x-a)+2$에서 $y-2=\log_3(x-a)$

$x-a=3^{y-2} \qquad \therefore x=3^{y-2}+a$

x, y를 서로 바꾸면 $y=3^{x-2}+a$

즉, $f^{-1}(x)=3^{x-2}+a$이므로 $a=4$

57 답 ③



원의 중심을 $C\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이라 하면 $\overline{CP}=\overline{CQ}=\frac{\sqrt{13}}{4}$이다.

이때, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha>\beta)$라 하고 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 두 삼각형 CP′P, CQ′Q는 서로 합동이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{5}{4}$ ⋯ ㉠

$\log_a \alpha+\log_a \beta=0$에서 $\alpha\beta=1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=2$, $\beta=\frac{1}{2}$

즉, $\overline{CP'}=\frac{3}{4}$이므로 직각삼각형 CP′P에서

피타고라스 정리에 의하여 $\overline{PP'}=\frac{1}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$이고 점 P는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로 $\frac{1}{2}=\log_a 2$에서 $2=a^{\frac{1}{2}} \qquad \therefore a=4$

58 답 ⑤

두 곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$, $y=2^{x-a}-1$의 교점 A의 y좌표가 0이므로 점 A의 x좌표를 α $(\alpha>0)$라 하면

$2^{\alpha-a}-1=0$, $2^{\alpha-a}=1$, $\alpha-a=0$ $\quad\therefore \alpha=a$

$\therefore$ A$(a, 0)$

한편, 점 B의 y좌표를 β $(\beta>0)$라 하면 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{7}{2}a$이므로 $\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\beta=\frac{7}{2}a$에서

$\frac{1}{2}\times a\times\beta=\frac{7}{2}a$ $\quad\therefore \beta=7$

즉, 점 B의 y좌표는 7이고 점 B는 곡선 $y=2^{x-a}-1$ 위의 점이므로 점 B의 x좌표를 γ라 하면

$2^{\gamma-a}-1=7$에서 $2^{\gamma-a}=8$, $\gamma-a=3$ $\quad\therefore \gamma=a+3$

$\therefore$ B$(a+3, 7)$

또, 점 B는 곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$ 위의 점이므로

$a\log_2(a+3-a+1)=7$에서 $a\log_2 4=7$

$2a=7$ $\quad\therefore a=\frac{7}{2}$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{13}{2}, 7\right)$이고 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\left(5, \frac{7}{2}\right)$이므로 $p=5$, $q=\frac{7}{2}$

$\therefore p+q=\frac{17}{2}$

59 답 ①

y축과 평행한 한 직선을 $x=k$ (k는 실수)라 하고, 직선 $x=k$와 x축이 만나는 점을 C라 하자.

삼각형 AOB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{AC}=\overline{BC}$이다.

즉, $2^k=4^{k-2}$에서 $2^k=2^{2k-4}$, $k=2k-4$ $\quad\therefore k=4$

따라서 $\overline{OC}=4$, $\overline{AB}=2\times\overline{AC}=2\times2^4=32$이므로

삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\times32\times4=64$

60 답 ③

점 C는 곡선 $y=|\log_a x|$가 x축과 만나는 점이므로 점 C의 좌표는 $(1, 0)$이다.

이때, $a>1$이면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$, $(a, 1)$이고

$0<a<1$이면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(a, 1)$, $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$이다.

한편, 두 직선 AC, BC가 서로 수직이므로 이 두 직선의 기울기의 곱이 -1이어야 한다. 즉,

(직선 AC의 기울기)$\times$(직선 BC의 기울기)$=-1$에서

$\frac{1}{\frac{1}{a}-1}\times\frac{1}{a-1}=-1$이므로 $a^2-3a+1=0$

따라서 모든 양수 a의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 3이다.

일등급 UP

* 이차방정식의 근의 부호

이차방정식 $a^2-3a+1=0$의 실근은 $\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$이므로 두 실근은 모두 양수이다.

61 답 21

삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(a+2)\times(3^n+b)-\frac{1}{2}\times2\times3^n-\frac{1}{2}ab$

$=\frac{1}{2}(a\times3^n+ab+2\times3^n+2b)-3^n-\frac{1}{2}ab=\frac{3^n}{2}a+b$

이때, 삼각형 OAB의 넓이가 50 이하이므로

$\frac{3^n}{2}a+b\le50$에서 $3^na+2b\le100$ ⋯ ㉠

(i) $n=2$일 때,

㉠에서 $9a+2b\le100$이고 a, b는 자연수이므로 a의 값은 1, 2, 3, 4, ⋯, 10이 될 수 있다. 이때, $b\le\log_2 a$를 만족시키므로

$a=1$일 때, 자연수 b는 존재하지 않는다.

$2\le a<2^2$일 때, $b=1$

$2^2\le a<2^3$일 때, $b=1, 2$

$2^3\le a\le10$일 때, $b=1, 2, 3$

한편, $f(2)$는 순서쌍 (a, b)의 개수와 같으므로

$f(2)=1\times(2^2-2)+2\times(2^3-2^2)+3\times3$

$=2+8+9=19$

(ii) $n=3$일 때,

㉠에서 $27a+2b\le100$이고 a, b는 자연수이므로 a의 값은 1, 2, 3이 될 수 있다. 이때, $b\le\log_2 a$를 만족시키므로

$a=1$일 때, 자연수 b는 존재하지 않는다.

$a=2, 3$일 때, $b=1$

한편, $f(3)$은 순서쌍 (a, b)의 개수와 같으므로 $f(3)=2$

(i), (ii)에 의하여 $f(2)+f(3)=19+2=21$

62 답 ③

$g(3^x)=4^x$이므로 $g(3^{kx})=4^{kx}$

$2^x=3^{x\log_3 2}$이므로 $g(2^x)=g(3^{x\log_3 2})=4^{x\log_3 2}=2^{x\log_3 4}$

따라서 $f(g(2^x))=f(2^{x\log_3 4})=3^{x\log_3 4}=4^x$이므로 $a=4$

63 답 ①

$y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

함수 $y=2^{x-k}$의 그래프가 된다. ⋯ ㉠

$y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$y=\log_2 x+k$의 그래프가 된다. ⋯ ㉡

㉠, ㉡은 서로 역함수 관계이므로 두 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 즉, 두 교점은 모두 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

따라서 두 교점의 좌표를 $(a,\ a)$, $(b,\ b)(a<b)$라 하고 ㉠에 대입하면 $2^{a-k}=a \cdots$ ㉢, $2^{b-k}=b \cdots$ ㉣

또한, 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(b-a)^2+(b-a)^2}=\sqrt{2}$에서

$\sqrt{2}(b-a)=\sqrt{2}$, $b-a=1$ $\quad\therefore b=a+1$

위 식을 ㉣에 대입하면 $2^{a+1-k}=a+1$에서

$2\times 2^{a-k}=a+1$, $2a=a+1$ ($\because$ ㉢) $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉢에 대입하면 $2^{1-k}=1$ $\quad\therefore k=1$

64 답 ⑤

ㄱ. $a>0$이므로 두 함수 $y=2^{ax}$과 $y=a\times 2^x$의 치역은 모두 양의 실수 전체의 집합이다. (참)

ㄴ. $a\times 2^x=2^{\log_2 a}\times 2^x=2^{x+\log_2 a}$이므로 $2^{ax}=a\times 2^x$에서

$2^{ax}=2^{x+\log_2 a}$, $ax=x+\log_2 a$, $(a-1)x=\log_2 a$

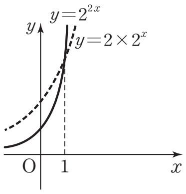
$\therefore x=\dfrac{\log_2 a}{a-1}$ ($\because a\neq 1$)

즉, $0<a<1$일 때, 두 그래프는 항상 한 점에서 만난다. (참)

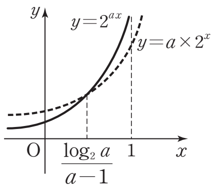
ㄷ. $a=2$이면 ㄴ에서 두 그래프의 교점의 x좌표는 $x=\dfrac{\log_2 a}{a-1}=1$

이고, $a>2$이면 교점의 x좌표는 $x=\dfrac{\log_2 a}{a-1}<1$이므로

그림에서 $x>1$이면 $2^{ax}>a\times 2^x$ (참)



($a=2$일 때)



($a>2$일 때)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

65 답 2

$y=2^{3-x}+2=2^{-(x-3)}+2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}+2$이고

$y=\log_2 \dfrac{4}{x-3}=-\log_2 \dfrac{x-3}{4}=\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x-3}{4}$

$=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)+2$

이므로 두 함수 $y=2^{3-x}+2$, $y=\log_2 \dfrac{4}{x-3}$의 그래프는

두 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프를 각각 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, 두 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 서로 역함수 관계이므로

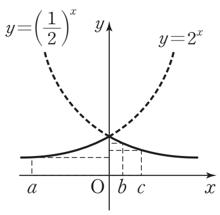
이 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 함수 $y=2^{3-x}+2$, $y=\log_2 \dfrac{4}{x-3}$의 그래프는 직선 $y=x$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선에 대하여 대칭이므로 직선 $y-2=x-3$, 즉 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로 $a^2+b^2=2$

66 답 ①

함수 $f(x)=\dfrac{1}{2^{|x|}}$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $f(a)<f(c)$에서

$\dfrac{1}{2^{|a|}}<\dfrac{1}{2^{|c|}}$이므로 $|a|>|c|$

이때, $a<c$이므로

$a<0$, $c>0$ 또는 $a<0$, $c<0$

$\therefore a+c<0$ (거짓)

ㄴ. $a+b+c=0$에서 $a+c=-b<0$ ($\because$ ㄱ)이므로 $b>0$

$\therefore f(b)f(c)=\dfrac{1}{2^{|b|}}\times\dfrac{1}{2^{|c|}}=\dfrac{1}{2^b}\times\dfrac{1}{2^c}$

$=\dfrac{1}{2^{b+c}}=\dfrac{1}{2^{-a}}=\dfrac{1}{2^{|a|}}$ ($\because a<0$)

$=f(a)$ (참)

ㄷ. 【반례】 $a=-4$, $b=-1$, $c=2$이면

$f(a)=\dfrac{1}{2^4}$, $f(b)=\dfrac{1}{2}$, $f(c)=\dfrac{1}{2^2}$이므로

$\{f(b)\}^2=\dfrac{1}{2^2}$, $f(a)f(c)=\dfrac{1}{2^4}\times\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{2^6}$

$\therefore \{f(b)\}^2\neq f(a)f(c)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

67 답 ④

$\log_9 x^2+\log_9 y^2=\log_3 x+\log_3 y$이므로

$\log_3 x=X$, $\log_3 y=Y$라 하면

$(\log_3 x)^2+(\log_3 y)^2=\log_9 x^2+\log_9 y^2$에서

$X^2+Y^2=X+Y$

$\therefore \left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2} \cdots$ ㉠

한편, $xy=k$라 하고 양변에 밑을 3으로 하는 로그를 취하면

$\log_3 k=\log_3 xy=\log_3 x+\log_3 y=X+Y$

$\therefore X+Y-\log_3 k=0 \cdots$ ㉡

즉, 주어진 조건을 만족시키려면 원 ㉠과 직선 ㉡이 만나야 하므로

원 ㉠의 중심 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$과 직선 ㉡ 사이의 거리가 원 ㉠의 반지름의

길이 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$보다 작거나 같아야 한다.

즉, $\dfrac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\log_3 k\right|}{\sqrt{2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$에서 $|1-\log_3 k|\le 1$

$-1\le 1-\log_3 k\le 1$, $-2\le -\log_3 k\le 0$, $0\le\log_3 k\le 2$

$\therefore 1\le k\le 9$

따라서 xy의 최댓값은 $M=9$, 최솟값은 $m=1$이므로

$M+m=10$

01 답 ①

9의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{9}$이므로

$a=\sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}$

따라서 주어진 방정식은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=3^{\frac{2}{3}}$이므로

$3^{-(x-1)}=3^{\frac{2}{3}}$, $-(x-1)=\frac{2}{3}$, $-x+1=\frac{2}{3}$

$\therefore x=\frac{1}{3}$

02 답 ④

$\log_3 x=A$, $\log_2 y=B$라 하면

$\begin{cases}\log_3 x+\log_2 y=4 \\ \log_3 x\times\log_2 y=3\end{cases}$에서 $\begin{cases}A+B=4 & \cdots ㉠ \\ AB=3 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\begin{cases}A=1 \\ B=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}A=3 \\ B=1\end{cases}$이므로

$\begin{cases}\log_3 x=1 \\ \log_2 y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\log_3 x=3 \\ \log_2 y=1\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x=3 \\ y=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=27 \\ y=2\end{cases}$

이때, $x>y>0$이므로 $x=27$, $y=2$

따라서 $\alpha=27$, $\beta=2$이므로 $\alpha+\beta=29$

[다른 풀이]

$\begin{cases}A+B=4 \\ AB=3\end{cases}$이므로 A, B는 t에 대한 이차방정식

$t^2-4t+3=0$의 두 근이다.

$t^2-4t+3=0$에서 $(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases}A=1 \\ B=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}A=3 \\ B=1\end{cases}$

(이하 동일)

03 답 ④

$\begin{cases}xy=8 \\ x^{\log_2 y}=4\end{cases}$에서 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=3 \\ \log_2 x\times\log_2 y=2\end{cases}$

이때, $\log_2 x$, $\log_2 y$는 t에 대한 이차방정식

$t^2-3t+2=0$의 두 근이다.

$t^2-3t+2=0$에서 $(t-1)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=2$

이때, $x\geq y>0$에서 $\log_2 x\geq\log_2 y$이므로

$\log_2 x=2$, $\log_2 y=1$

따라서 $\log_2 x=2$에서 $x=4$, $\log_2 y=1$에서 $y=2$이므로

$\alpha=4$, $\beta=2$

$\therefore 2\alpha+\beta=10$

04 답 ①

$2^x=t\ (t>0)$라 하면

$4^x=(2^x)^2=t^2$, $2^{x+1}=2^x\times2=2t$이므로

$4^x-2^{x+1}-8<0$에서 $t^2-2t-8<0$, $(t+2)(t-4)<0$

그런데 $t>0$이므로 $0<t<4$

즉, $0<2^x<4$에서 $0<2^x<2^2$이므로 $x<2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1의 1개이다.

05 답 2

$\log_3(x-3)+\log_3(x+1)<1+\log_3 4$

$\log_3(x-3)(x+1)<\log_3 3+\log_3 4=\log_3 12$

$(x-3)(x+1)<12$, $x^2-2x-15<0$, $(x+3)(x-5)<0$

$\therefore -3<x<5$

그런데 진수의 조건에 의하여 $x>3$이어야 하므로

$3<x<5$

따라서 $a=3$, $b=5$이므로 $b-a=2$

06 답 10

주어진 부등식의 양변에 3을 밑으로 하는 로그를 취하면

$x^{\log_3 x}<x^2$에서 $(\log_3 x)(\log_3 x)<2\log_3 x$

$\log_3 x(\log_3 x-2)<0$, $0<\log_3 x<2$

$\therefore 1<x<9$

따라서 정수 x의 최댓값은 $M=8$이고 최솟값은 $m=2$이므로

$M+m=10$

07 답 1

$\mathrm{A}(2^{-k}, k)$, $\mathrm{B}(2^k, k)$, $\mathrm{D}(1, 0)$이므로

$S_1=\frac{1}{2}(1-2^{-k})k$, $S_2=\frac{1}{2}(2^k-1)k$, $S_3=\frac{1}{2}(2^k-2^{-k})k$

주어진 등식 $S_1+S_3=2S_2$에 대입하면

$\frac{1}{2}(1-2^{-k})k+\frac{1}{2}(2^k-2^{-k})k=(2^k-1)k$

$(1-2^{-k})+(2^k-2^{-k})=2(2^k-1)$, $2^k+2\times2^{-k}-3=0$

양변에 2^k을 곱하여 정리하면

$(2^k)^2-3\times2^k+2=0$, $(2^k-1)(2^k-2)=0$

$2^k=1$ 또는 $2^k=2$

$\therefore k=0$ 또는 $k=1$

이때, k는 양수이므로 $k=1$

08 답 28

보관함에 넣기 전 온도가 a°C이고 보관함의 온도가 10°C이므로

$f(t)=10+(a-10)p^{-kt}$

5분 후에 16°C가 되었으므로

$f(5)=10+(a-10)p^{-5k}=16$에서

$(a-10)p^{-5k}=6 \cdots ㉠$

또, 10분 후에 12℃가 되었으므로

$f(10)=10+(a-10)p^{-10k}=12$에서

$(a-10)p^{-10k}=2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $p^{-5k}=\frac{1}{3}$

$p^{-5k}=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $(a-10)\times\frac{1}{3}=6$, $a-10=18$

$\therefore a=28$

09 답 ⑤

$2^x+2^{-x}=k$에서 $(2^x)^2-k\times 2^x+1=0$

이 방정식의 두 근을 α, β $(\alpha\le\beta)$라 하면 2^α, 2^β은 t에 대한 방정식

$t^2-kt+1=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha+2^\beta=k$ ⋯ ㉠

$2^\alpha\times 2^\beta=2^{\alpha+\beta}=1$

$\therefore \alpha+\beta=0$ ⋯ ㉡

문제의 조건에서 $\alpha\beta=-4$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha=-2$, $\beta=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $k=2^{-2}+2^2=\frac{17}{4}$

10 답 7

$x^{2x+1}=x^{x+4}$ $(x>0)$에서

(i) $x=1$일 때, $1^3=1^5$이므로 성립한다.

(ii) $x\ne1$일 때, $2x+1=x+4$ $\quad\therefore x=3$

(i), (ii)에 의하여 $A=\{1, 3\}$

$(x+1)^x=4^x$ $(x>-1)$에서

(iii) $x\ne0$일 때, $x+1=4$ $\quad\therefore x=3$

(iv) $x=0$일 때, $1^0=4^0$이므로 성립한다.

(iii), (iv)에 의하여 $B=\{0, 3\}$

따라서 $A\cup B=\{0, 1, 3\}$이므로 $k=3$, $S=0+1+3=4$

$\therefore k+S=3+4=7$

11 답 ①

두 함수 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k$의 그래프의 교점의 x좌표를 α, β라 하면 방정식 $2^x=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k$의 두 근이 α, β이고 선분 AB의 중점의 x좌표는 $\frac{\alpha+\beta}{2}$이다.

$2^x=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+k$에서 $(2^x)^2-k\times 2^x+2=0$

이때, $2^x=t$ $(t>0)$라 하면 $t^2-kt+2=0$ ⋯ ㉠이고

t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이 2^α, 2^β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha\times 2^\beta=2^{\alpha+\beta}=2$ $\quad\therefore \alpha+\beta=1$

따라서 선분 AB의 중점의 x좌표는 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$이다.

12 답 ②

$|x-a|<1$에서 $-1<x-a<1$

$a-1<x<a+1$, $2^{a-1}<2^x<2^{a+1}$

$(2^x-2^{a-1})(2^x-2^{a+1})<0$

즉, $4^x-(2^{a-1}+2^{a+1})2^x+2^{2a}<0$

이것이 $4^x-b\times 2^x+4<0$과 같으므로

$2^{2a}=4=2^2$에서 $a=1$

$b=2^{a-1}+2^{a+1}=1+2^2=5$

$\therefore a+b=6$

13 답 ①

$1<2^{|-2+\log_2 x|}<4$에서

$2^0<2^{|-2+\log_2 x|}<2^2$

$0<|-2+\log_2 x|<2$

$-2<-2+\log_2 x<2$, $\log_2 x\ne2$

$0<\log_2 x<4$, $\log_2 x\ne2$

$\therefore 1<x<16$, $x\ne4$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 3, 5, 6, 7, 8, ⋯, 15의 13개이다.

14 답 ②

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+1$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^x>4\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ $(t>0)$라 하면

$t^2+\frac{1}{4}t>4t+1$, $4t^2-15t-4>0$, $(4t+1)(t-4)>0$

$\therefore t>4$ $(\because t>0)$

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^x>4$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ $\quad\therefore x<-2$

15 답 ①

$\log_2 4x\times\log_2 x+\log_2 3\times\log_2 x-6=0$에서

$(\log_2 4+\log_2 x)\log_2 x+\log_2 3\times\log_2 x-6=0$

$(\log_2 x)^2+(\log_2 4+\log_2 3)\log_2 x-6=0$

$(\log_2 x)^2+\log_2 12\times\log_2 x-6=0$ ⋯ ㉠

이때, $\log_2 x=t$라 하면

$t^2+t\log_2 12-6=0$ ⋯ ㉡

이때, ㉠의 두 근이 α, β이므로 ㉡의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이다.

㉡에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$\log_2\alpha+\log_2\beta=-\log_2 12$에서 $\log_2\alpha\beta=\log_2\frac{1}{12}$

$\therefore \alpha\beta=\frac{1}{12}$

16 답 ④

$\log_3 x \times \log_2 y = \log_2 x \times \log_3 y = 8$이므로

$\log_2 x = X$, $\log_3 y = Y$라 하면

$\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y = 6 \\ \log_3 x \times \log_2 y = 8 \end{cases}$에서 $\begin{cases} X+Y=6 \\ XY=8 \end{cases}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 X, Y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-6t+8=0$의 두 근이다.

즉, $t^2-6t+8=0$에서

$(t-2)(t-4)=0$ $\quad \therefore t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} X=4 \\ Y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} X=2 \\ Y=4 \end{cases}$

(i) $X=4$, $Y=2$이면

$\log_2 x=4$에서 $x=16$, $\log_3 y=2$에서 $y=9$

(ii) $X=2$, $Y=4$이면

$\log_2 x=2$에서 $x=4$, $\log_3 y=4$에서 $y=81$

(i), (ii)에 의하여

$\alpha=16$, $\beta=9$ 또는 $\alpha=4$, $\beta=81$

그런데 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=16$, $\beta=9$

$\therefore \alpha+\beta=25$

17 답 ⑤

함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 두 교점의 x좌표가 α, β이므로

$\log_2 \alpha=\alpha+k$ ⋯ ㉠, $\log_2 \beta=\beta+k$ ⋯ ㉡

㉠－㉡을 하면

$\log_2 \alpha-\log_2 \beta=\alpha-\beta$

$\log_2 \dfrac{\alpha}{\beta}=\alpha-\beta$

$\therefore \dfrac{\alpha}{\beta}=2^{\alpha-\beta}=\dfrac{2^\alpha}{2^\beta}=\dfrac{1}{4}$

18 답 ③

밑 $g(x)$의 값의 범위에 따라 부등식을 풀자.

(i) $g(x)>1$, 즉 $c<x<d$일 때,

$\log_{g(x)} f(x)>1$에서

$\log_{g(x)} f(x)>\log_{g(x)} g(x)$

$\therefore f(x)>g(x)$

그런데 $c<x<d$에서 $f(x)>g(x)$를 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $0<g(x)<1$, 즉 $0<x<c$ 또는 $d<x<e$일 때,

$\log_{g(x)} f(x)>1$에서

$\log_{g(x)} f(x)>\log_{g(x)} g(x)$

$\therefore f(x)<g(x)$

$0<x<c$ 또는 $d<x<e$에서 $f(x)<g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위는 $b<x<c$

(i), (ii)에 의하여 구하는 x의 값의 범위는 $b<x<c$

19 답 ①

$x>1$, $a>1$이므로 $\log_a x^2>0$

$\dfrac{1}{2}\log_x a \ge \log_a x^2$에서 $\log_{x^2} a \ge \log_a x^2$

$\therefore \dfrac{1}{\log_a x^2} \ge \log_a x^2$

이때, $\log_a x^2=t\ (t>0)$라 하면

$\dfrac{1}{t}\ge t$에서 $t^2\le 1$, $t^2-1\le 0$, $(t+1)(t-1)\le 0$

$\therefore 0<t\le 1\ (\because t>0)$

즉, $0<\log_a x^2\le 1$에서 $1<x^2\le a\ (\because a>1)$이므로

$1<x<\sqrt{a}$

따라서 $p=1$, $q=\sqrt{a}$이므로

$\log_a p+\log_a q=\log_a 1+\log_a \sqrt{a}=\dfrac{1}{2}$

20 답 ②

$1+\dfrac{1}{\log_2 x}-\dfrac{1}{\log_5 x}<0$에서 $1+\log_x 2-\log_x 5<0$

$1<\log_x 5-\log_x 2$, $1<\log_x \dfrac{5}{2}$

$\therefore \log_x x<\log_x \dfrac{5}{2}$

(i) $0<x<1$일 때, $x>\dfrac{5}{2}$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 해는 존재하지 않는다.

(ii) $x>1$일 때, $x<\dfrac{5}{2}$이므로 $1<x<\dfrac{5}{2}$

(i), (ii)에 의하여 $A=\left\{x \,\middle|\, 1<x<\dfrac{5}{2}\right\}$ ⋯ ㉠

$3^a>3^{x(x-a+1)}$에서 $a>x(x-a+1)$

$x^2-(a-1)x-a<0$, $(x-a)(x+1)<0$

$\therefore a<x<-1$ 또는 $-1<x<a$

그런데 $a<x<-1$이면 $A\subset B$가 성립하지 않으므로

$B=\{x\,|\,-1<x<a\}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $A\subset B$이려면 $a\ge\dfrac{5}{2}$이어야 하므로 실수 a의 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.

21 답 ②

정사각형 PQRS의 넓이가 16이므로 정사각형 PQRS의 한 변의 길이는 4이다. 이때, 직선 SR가 x축과 만나는 점의 x좌표를 $k\ (k>0)$라 하면 직선 PQ가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $k+4$이고 두 점 S와 P의 y좌표는 2로 같으므로

$\log_{\frac{1}{a}} k=\log_a (k+4)=2$ ⋯ ㉠에서

$-\log_a k=\log_a(k+4)$, $\log_a k(k+4)=0$

$k(k+4)=1$, $k^2+4k-1=0$

$\therefore k=-2+\sqrt{5}\ (\because k>0)$

한편, ㉠에 의하여 $a^2=k+4$이므로 $k=-2+\sqrt{5}$를 대입하면

$a^2=2+\sqrt{5}$

[다른 풀이]

$\overline{SR}=4$에서 $\log_{\frac{1}{a}} x-\log_a x=4$, $2\log_{\frac{1}{a}} x=4$, $\log_{\frac{1}{a}} x=2$

$\therefore x=\left(\frac{1}{a}\right)^2=a^{-2}$

$\overline{PQ}=4$에서 $\log_a x-\log_{\frac{1}{a}} x=4$, $2\log_a x=4$, $\log_a x=2$

$\therefore x=a^2$

즉, 두 점 S, P의 x좌표가 각각 a^{-2}, a^2이고

$\overline{SP}=4$이므로 $a^2-a^{-2}=4$에서 $a^4-4a^2-1=0$

$\therefore a^2=2\pm\sqrt{4+1}=2\pm\sqrt{5}$

그런데 $a>1$이므로 $a^2=2+\sqrt{5}$

22 답 6

두 점 A와 C의 y좌표가 일치하므로 $a^{\frac{b}{2}}=b^b$

$\therefore a^{\frac{1}{2}}=b\ (\because b\neq 0)$ ⋯ ㉠

또, 두 점 B와 D의 y좌표가 일치하므로 $a^a=b$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^a=a^{\frac{1}{2}}$

$a\neq 1$이므로 $a=\frac{1}{2}$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=6$

23 답 ①

$T_0=20$이고 $t=1$일 때 $T=110$이므로

$110=20+k\log(8\times1+2)$ $\quad\therefore k=110-20=90$

또, $T_0=20$이고 $t=a$일 때 $T=200$이므로

$20+90\log(8a+2)=200$에서 $90\log(8a+2)=180$

$\log(8a+2)=2$, $8a+2=100$, $8a=98$

$\therefore a=\frac{49}{4}$

24 답 130

표준음의 세기 $P_0=10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$이 0dB이고, 소리의 세기가 10배씩 증가하면 10dB씩 증가하므로

소리의 세기($\mathrm{W/m^2}$)	데시벨(dB)
P_0	0
$10P_0$	10
$10(10P_0)=10^2P_0$	$10+10=20$
$10(10^2P_0)=10^3P_0$	$20+10=30$
⋮	⋮
10^nP_0	$10\times n$ ⋯ ㉠

㉠에서 소리의 세기가 $x=10^nP_0(\mathrm{W/m^2})$일 때,

$y=10\times n$(dB)이므로 $\log x=n+\log P_0$에서

$n=\log x-\log P_0=\log x-\log 10^{-12}=\log x+12$

$\therefore y=10\times n=10(\log x+12)=10\log x+120$

따라서 $a=10$, $b=120$이므로 $a+b=130$

[다른 풀이]

$P_0=10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$을 0dB로 나타내며 소리의 세기가 10배 증가하면 10dB만큼 증가하므로 $x=10^{-12}$일 때 $y=0$이고

$x=10^{-12}\times10=10^{-11}$일 때 $y=10$이다.

즉, $a\log 10^{-12}+b=0$ ⋯ ㉠, $a\log 10^{-11}+b=10$ ⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면

$a\log 10^{-11}-a\log 10^{-12}=10$

$a\log\frac{10^{-11}}{10^{-12}}=10$ $\quad\therefore a=10$

이것을 ㉠에 대입하면

$10\log 10^{-12}+b=0$, $-120+b=0$ $\quad\therefore b=120$

$\therefore a+b=130$

25 답 10

$D(t)=a\left(\frac{1}{2}\right)^{kt}$이고, 진통제를 주사한 지 6시간 후에 혈관 속에 남아 있는 약물의 농도가 처음 농도의 $\frac{1}{4}$이 되었으므로

$a\left(\frac{1}{2}\right)^{6k}=\frac{1}{4}a$에서

$\left(\frac{1}{4}\right)^{3k}=\frac{1}{4}$, $3k=1$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

혈관 속에 남아 있는 약물의 농도가 처음 농도의 $\frac{1}{10}$이 될 때까지 효능이 계속되므로 진통제를 주사한 지 처음 농도의 $\frac{1}{10}$이 되는 시간을 t라 하면

$a\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}t}=\frac{1}{10}a$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}t}=\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$\frac{1}{3}t\log\frac{1}{2}=-1$

$\therefore t=\frac{-3}{\log\frac{1}{2}}=\frac{-3}{-\log 2}=\frac{3}{0.3}=10$

26 답 ⑤

$4^x=5^{3-2x}$에서 $2^{2x}=5^{3-2x}$

양변에 5^{2x}을 곱하면 $2^{2x}\times5^{2x}=125$

$10^{2x}=125$

$\therefore 100^x=125$ ⋯ ㉠

㉠을 만족시키는 x의 값이 α이므로

$100^\alpha=125$

27 답 ②

$9^x-a\times3^x+9=0$에서 $3^x=t\ (t>0)$라 하면

$t^2-at+9=0$ ⋯ ㉠

t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이 3^α, 3^β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $3^\alpha\times3^\beta=9$에서 $3^{\alpha+\beta}=3^2$

$\therefore \alpha+\beta=2$

28 답 ⑤

$x+y=5$에서 $y=5-x$

이것을 $2^x+2^{y+1}=20$에 대입하면 $2^x+2^{6-x}=20$

$2^x-20+2^{6-x}=0$

양변에 2^x을 곱하면 $(2^x)^2-20\times2^x+64=0$

이때, $2^x=t\ (t>0)$라 하면

$t^2-20t+64=0$, $(t-4)(t-16)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=16$

즉, $t=2^x=4$에서 $x=2$, $t=2^x=16$에서 $x=4$이므로

$x=2$, $y=3$ 또는 $x=4$, $y=1$

따라서 두 순서쌍은 $(2,\ 3)$, $(4,\ 1)$이고 이 두 순서쌍을 좌표평면 위에 나타냈을 때 두 점 사이의 거리를 d라 하면

$d=\sqrt{(4-2)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$

[다른 풀이]

$\begin{cases}x+y=5\\2^x+2^{y+1}=20\end{cases}$에서 $\begin{cases}x+(y+1)=6\\2^x+2^{y+1}=20\end{cases}$

$\begin{cases}2^{x+(y+1)}=2^6\\2^x+2^{y+1}=20\end{cases}$ $\quad\therefore \begin{cases}2^x\times2^{y+1}=64\\2^x+2^{y+1}=20\end{cases}$

이때, 2^x, 2^{y+1}은 t에 대한 이차방정식

$t^2-20t+64=0$의 두 근이므로

$(t-4)(t-16)=0 \qquad \therefore t=4$ 또는 $t=16$

즉, $\begin{cases}2^x=4\\2^{y+1}=16\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}2^x=16\\2^{y+1}=4\end{cases}$이므로 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$

(이하 동일)

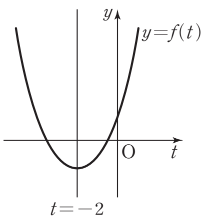
29 답 ③

$4^x+2^{x+2}+k=0$에서 $(2^x)^2+4\times2^x+k=0$

이때, $2^x=t\ (t>0)$라 하면 $t^2+4t+k=0$ ⋯ ㉠

즉, 주어진 방정식이 실근을 갖지 않으려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 $t>0$에서 실근을 갖지 않아야 한다.

$f(t)=t^2+4t+k=(t+2)^2+k-4$라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축이 $t=-2$이므로 방정식 $f(t)=0$이 $t>0$에서 실근을 갖지 않으려면 그림과 같이 $f(0)\ge0$이어야 한다.



즉, $f(0)=k\ge0$이므로 k의 최솟값은 0이다.

30 답 6

$3^x+3^{-x}=t$라 하면 $t=3^x+3^{-x}\ge2\sqrt{3^x\times3^{-x}}=2$이고

$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2$이므로

$(9^x+9^{-x})-k(3^x+3^{-x})+11=0$에서

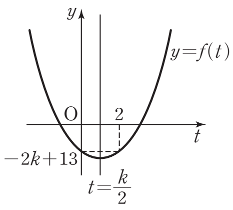
$t^2-2-kt+11=0 \qquad \therefore t^2-kt+9=0$ ⋯ ㉠

따라서 주어진 방정식의 실근이 존재하려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 $t\ge2$에서 실근을 가져야 한다.

이때, $f(t)=t^2-kt+9=\left(t-\frac{k}{2}\right)^2+9-\frac{k^2}{4}$이라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축이 $t=\frac{k}{2}$이므로 대칭축을 기준으로 다음과 같이 실수 k의 값의 범위를 구하자.

(i) $\frac{k}{2}<2$, 즉 $k<4$일 때,

방정식 $f(t)=0$이 $t\ge2$에서 실근을 가지려면 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같아야 한다. 즉, $f(2)\le0$이어야 하므로 $4-2k+9\le0$

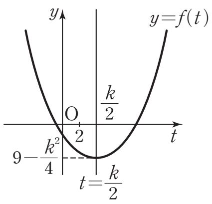


$\therefore k\ge\frac{13}{2}$

그런데 $k<4$이므로 k의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\frac{k}{2}\ge2$, 즉 $k\ge4$일 때,

방정식 $f(t)=0$이 $t\ge2$에서 실근을 가지려면 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같아야 한다. 즉, $f\left(\frac{k}{2}\right)\le0$이어야 하므로



$9-\frac{k^2}{4}\le0$에서 $k^2-36\ge0$, $(k-6)(k+6)\ge0$

$\therefore k\ge6$ 또는 $k\le-6$

그런데 $k\ge4$이므로 $k\ge6$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는 $k\ge6$이므로 k의 최솟값은 6이다.

31 답 18

부등식 $9^{x-1}-3^x+2<0$의 양변에 9를 곱하면

$9^x-9\times3^x+18<0$

이때, $3^x=t\ (t>0)$라 하면

$t^2-9t+18<0$, $(t-3)(t-6)<0 \qquad \therefore 3<t<6$

즉, $3<3^x<6$에서 $1<x<\log_3 6$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=\log_3 6$이므로 $3^\alpha\times3^\beta=3\times6=18$

[다른 풀이]

α, β는 방정식 $9^{x-1}-3^x+2=0$의 두 실근이다.

즉, 이차방정식 $3^{2x}-9\times3^x+18=0$의 두 실근이 3^α, 3^β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $3^\alpha\times3^\beta=18$

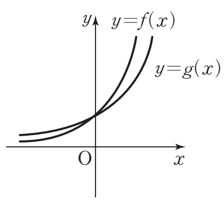
32 답 2

(i) 함수 $f(x)$의 밑이 1보다 클 때,

즉 $a^2+a+1>1$에서

$a(a+1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>0$ ⋯ ㉠



또, $g(x)$의 밑이 $f(x)$의 밑보다 작아야 하므로

$a^2+a+1>a^2-a+3$에서

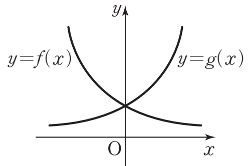
$2a>2 \qquad \therefore a>1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 a의 값의 범위는 $a>1$

(ii) 함수 $f(x)$의 밑이 1보다 작을 때,

$a^2-a+3=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\geq\frac{11}{4}$

에서 $g(x)$의 밑은 항상 1보다 크므로 그림과 같이 $x<0$인 범위에서 항상 $f(x)>g(x)$이다.



따라서 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는 $a>1$이므로 정수 a의 최솟값은 2이다.

[다른 풀이]

$(a^2+a+1)^x<(a^2-a+3)^x$의 양변에 10을 밑으로 하는 로그를 취하면 $x\log(a^2+a+1)<x\log(a^2-a+3)$

이때, $x<0$이면 $\log(a^2+a+1)>\log(a^2-a+3)$

$a^2+a+1>a^2-a+3$, $2a>2 \qquad \therefore a>1$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.

33 답 ④

주어진 조건에서 $a\neq1$, $b\neq1$이다.

자연수 n에 대하여 $a^n<b^n$이므로 $a<b$

이때, $1<a<b$일 때,

(i) $m>n$이면 $a^m>a^n$, $b^m>b^n$

(ii) $m<n$이면 $a^m<a^n$, $b^m<b^n$

또한, $a<b<1$일 때,

(iii) $m>n$이면 $a^m<a^n$, $b^m<b^n$

(iv) $m<n$이면 $a^m>a^n$, $b^m>b^n$

그런데 (i)~(iv)는 주어진 조건에 모순이다. $\qquad \therefore a<1<b$

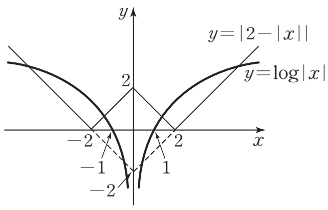
주어진 조건에서 $b^n<b^m$이므로 $n<m$이어야 하고,

이때 $a^m<a^n$이 성립한다. $\qquad \therefore n<m$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

34 답 ④

방정식 $\log|x|=|2-|x||$의 실근의 개수는 두 함수 $y=\log|x|$, $y=|2-|x||$의 그래프의 교점의 개수와 같다.



따라서 그림과 같이 두 함수의 그래프의 교점의 개수가 4이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

35 답 ⑤

$\left(\log_3\frac{x}{3}\right)^2-20\log_9 x+26=0$에서

$(\log_3 x-1)^2-10\log_3 x+26=0$

$(\log_3 x)^2-12\log_3 x+27=0 \cdots$ ㉠

$(\log_3 x-3)(\log_3 x-9)=0$

$\log_3 x=3$ 또는 $\log_3 x=9$

$\therefore x=3^3$ 또는 $x=3^9$

$\therefore \alpha\beta=3^3\times3^9=3^{12}$

[다른 풀이]

㉠에서 $\log_3 x=t$라 하면

$t^2-12t+27=0 \cdots$ ㉡

이때, 방정식 ㉠의 두 근이 α, β이므로 t에 대한 이차방정식 ㉡의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=12$에서

$\log_3\alpha\beta=\log_3 3^{12}$

$\therefore \alpha\beta=3^{12}$

36 답 ②

$\log_a bx=\log_b ax$에서

$\log_a b+\log_a x=\log_b a+\log_b x$

$\frac{\log b}{\log a}+\frac{\log x}{\log a}=\frac{\log a}{\log b}+\frac{\log x}{\log b}$

$\log x\left(\frac{1}{\log a}-\frac{1}{\log b}\right)=\frac{\log a}{\log b}-\frac{\log b}{\log a}$

$\log x\times\frac{\log b-\log a}{\log a\times\log b}=\frac{(\log a)^2-(\log b)^2}{\log a\times\log b}$

$$\begin{aligned}\log x&=\frac{(\log a+\log b)(\log a-\log b)}{\log a\times\log b}\times\frac{\log a\times\log b}{\log b-\log a}\\&=-(\log a+\log b)\\&=-\log ab=\log\frac{1}{ab}\end{aligned}$$

$\therefore x=\frac{1}{ab}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{ab}$이므로

$\log_{ab}\alpha=\log_{ab}\frac{1}{ab}=-1$

37 답 ④

$\log_{10}(y+8)=\log_{10}x+\log_{10}(y+2)$에서

$\log_{10}(y+8)=\log_{10}x(y+2)$, $y+8=xy+2x$

$xy+2x-y-8=0$

$\therefore (x-1)(y+2)=6$

이때, 진수의 조건에 의하여 $x>0$, $y>-2$이므로

구하는 정수 x, y의 순서쌍은 $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$, $(7, -1)$의 4개이다.

38 답 ④

주어진 그래프에서 부등식 $2x>2^x$의 해는 $1<x<2$ ⋯ ㉠

한편, $\log_2(2x-1)>2(x-1)$에서

$\log_2(2x-1)>2x-2$, $\log_2(2x-1)+1>2x-1$

$\log_2 2(2x-1)>2x-1$ $\quad\therefore 2(2x-1)>2^{2x-1}$

이때, $2x-1=t$라 하면 $2t>2^t$이므로 ㉠에 의하여

$1<t<2$, 즉 $1<2x-1<2$에서 $1<x<\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=\frac{3}{2}$이므로 $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$

39 답 ①

(i) $2x\log 2x>x\log x$에서 진수의 조건에 의하여

$x>0$이므로 $2\log 2x>\log x$

$\log 4x^2>\log x$, $4x^2>x$, $x(4x-1)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>\frac{1}{4}$

그런데 $x>0$이므로 $x>\frac{1}{4}$

$\therefore A=\left\{x\,\middle|\,x>\frac{1}{4}\right\}$

(ii) $x\log x^4<x\log(2x)^2$에서

ⓘ $x>0$일 때

$x\log x^4<x\log(2x)^2$에서 $\log x^4<\log(2x)^2$

$x^4<4x^2$, $x^4-4x^2<0$

$(x+2)(x-2)<0$ ($\because x^2>0$)

$\therefore -2<x<2$

그런데 $x>0$이므로 $0<x<2$

ⓘⓘ $x<0$일 때

$x\log x^4<x\log(2x)^2$에서 $\log x^4>\log(2x)^2$

$x^4>4x^2$, $x^4-4x^2>0$

$(x+2)(x-2)>0$ ($\because x^2>0$)

$\therefore x<-2$ 또는 $x>2$

그런데 $x<0$이므로 $x<-2$

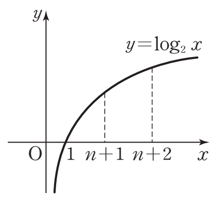
ⓘ, ⓘⓘ에 의하여 $x<-2$ 또는 $0<x<2$

$\therefore B=\{x\,|\,x<-2$ 또는 $0<x<2\}$

따라서 $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}<x<2\right\}$이므로 구하는 정수 x는 1의 1개이다.

40 답 ⑤

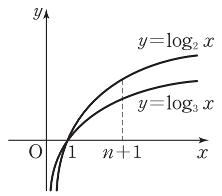
ㄱ. 함수 $y=\log_2 x$의 그래프는 다음과 같다.



즉, 함수 $y=\log_2 x$는 증가하는 함수이므로

$\log_2(n+2)>\log_2(n+1)$ (참)

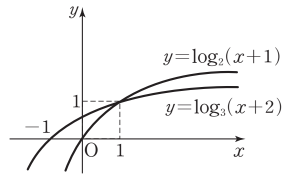
ㄴ. 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프는 다음과 같다.



즉, $x>1$일 때 $\log_2 x>\log_3 x$이므로 $n\ge 2$인

자연수 n에 대하여 $\log_2(n+1)>\log_3(n+1)$ (참)

ㄷ. $y=\log_2(x+1)$, $y=\log_3(x+2)$의 그래프는 다음과 같다.



즉, $x>1$일 때 $\log_2(x+1)>\log_3(x+2)$이므로

$n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 $\log_2(n+1)>\log_3(n+2)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄱ. $n+2>n+1$의 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_2(n+2)>\log_2(n+1)$ (참)

ㄴ. $\log_3(n+1)=\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 3}$이고 $\log_2 3>1$이므로

$\log_2(n+1)>\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 3}=\log_3(n+1)$ (참)

41 답 99

$(\log nx)(\log n^2x)+1>0$에서

$(\log x+\log n)(\log x+2\log n)+1>0$

$(\log x)^2+3\log n\times\log x+2(\log n)^2+1>0$

이때, $\log x=t$라 하면 $t^2+3t\log n+2(\log n)^2+1>0$ ⋯ ㉠

모든 양수 x에 대하여 $t=\log x$는 모든 실수 값을 가지므로 부등식 ㉠이 항상 성립하려면 이차방정식 $t^2+3t\log n+2(\log n)^2+1=0$의 실근이 존재하지 않아야 한다. 즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

$D=9(\log n)^2-8(\log n)^2-4<0$, $(\log n)^2-4<0$

$(\log n+2)(\log n-2)<0$, $-2<\log n<2$

$\therefore \frac{1}{100}<n<100$

따라서 자연수 n의 최댓값은 $M=99$, 최솟값은 $m=1$이므로

$Mm=99$

42 답 ③

$S_1=\{(t+2)-t\}\times 2^t=2^{t+1}$

$S_2=t(2^{t+2}-2^t)=t\times 2^t(4-1)=3t\times 2^t$

$S_2=2S_1$에서 $3t\times 2^t=2\times 2^{t+1}$, $3t\times 2^t=2^2\times 2^t$

이때, $2^t>0$이므로 $3t=4$ $\quad\therefore t=\frac{4}{3}$

43 답 ⑤

직선 PR와 직선 QS가 x축과 만나는 점을 각각 B, C라 하면

$\angle PAB = \angle QAC$(맞꼭지각), $\angle ACQ = \angle ABP = 90°$,

$\overline{PA} = \overline{QA}$이므로

$\triangle APB \equiv \triangle AQC$(RHA 합동)

$\therefore \overline{AB} = \overline{AC}$

이때, $\overline{AB} = \overline{AC} = t$라 하면 두 점 P, Q의 좌표는

$P(2+t, \log_2(2+t))$, $Q(2-t, \log_2(2-t))$이고,

선분 PQ의 중점이 A이므로

$\log_2(2+t) + \log_2(2-t) = 0$에서

$\log_2(2+t)(2-t) = \log_2 1$, $4-t^2=1$, $t^2=3$

$\therefore t = \sqrt{3}$ ($\because t>0$)

따라서 두 선분 PR, QS의 길이는 각각

$$\overline{PR} = \log_2(2+\sqrt{3}) - \log_{\frac{1}{4}}(2+\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\log_2(2+\sqrt{3})$$

$$\overline{QS} = \log_{\frac{1}{4}}(2-\sqrt{3}) - \log_2(2-\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}\log_2(2-\sqrt{3})$$

$$= \frac{3}{2}\log_2\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\log_2(2+\sqrt{3}) = \overline{PR}$$

이므로 사각형 PSQR는 평행사변형이다.

$\therefore$ (사각형 PSQR의 넓이)$= \overline{PR} \times \overline{BC}$

$$= \frac{3}{2}\log_2(2+\sqrt{3}) \times 2\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}\log_2(2+\sqrt{3})$$

44 답 ⑤

ㄱ. $\overline{AB} = \log_2 a - \log_{\frac{1}{3}} a = \log_2 a + \log_3 a$

$$= \log_2 a + \frac{\log_2 a}{\log_2 3} = \left(1 + \frac{1}{\log_2 3}\right)\log_2 a$$

마찬가지로 $\overline{CD} = \left(1 + \frac{1}{\log_2 3}\right)\log_2 b$,

$\overline{EF} = \left(1 + \frac{1}{\log_2 3}\right)\log_2 c$

이때, $\overline{AB} : \overline{CD} : \overline{EF} = \log_2 a : \log_2 b : \log_2 c = 1 : 2 : 3$

이므로

$2\log_2 a = \log_2 b$에서 $\log_2 a^2 = \log_2 b$

$\therefore b = a^2$ ⋯ ㉠

$3\log_2 b = 2\log_2 c$에서 $\log_2 b^3 = \log_2 c^2$

$\therefore b^3 = c^2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $c^2 = b^3 = b \times b^2 = a^2 \times b^2 = (ab)^2$

a, b, c는 양수이므로 $c = ab$ (참)

ㄴ. 두 점 $A(a, \log_2 a)$, $E(c, \log_2 c)$에서 직선 PA의 기울기는

$\frac{\log_2 a}{a-1}$, 직선 QE의 기울기는 $\frac{\log_2 c}{c-b} = \frac{\log_2 a^3}{a^3-a^2}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

이므로 $\overline{PA} \,/\!/\, \overline{QE}$이면

$\frac{\log_2 a}{a-1} = \frac{\log_2 a^3}{a^3-a^2}$에서 $\frac{\log_2 a}{a-1} = \frac{3\log_2 a}{a^2(a-1)}$

$\frac{3}{a^2} = 1$ $\qquad \therefore a = \sqrt{3}$

즉, $a = \sqrt{3}$일 때, $\overline{PA} \,/\!/\, \overline{QE}$이다. (참)

ㄷ. $\overline{AB} = k$라 하면 $\overline{EF} = 3k$이므로

삼각형 PAB의 넓이는 $S = \frac{1}{2} \times k \times (a-1)$

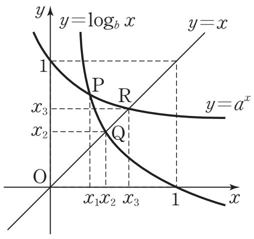
삼각형 QEF의 넓이는

$T = \frac{1}{2} \times 3k \times (a^3 - a^2) = \frac{1}{2} \times k \times (a-1) \times 3a^2$

$\therefore T = 3a^2 S$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

45 답 ③



ㄱ. $\log_b x_2 = x_2 < x_3 = a^{x_3}$

$\therefore \log_b x_2 < a^{x_3}$ (참)

ㄴ. $a^{x_3} = x_3$에서 $\log_a x_3 = x_3$

$\log_b x_2 = x_2$에서 $b^{x_2} = x_2$

이때, $x_2 < x_3$이므로 $b^{x_2} < \log_a x_3$ (거짓)

ㄷ. $a^{x_3} = x_3 > x_2$에서 $a^{x_3} > x_2$

양변에 밑이 a인 로그를 취하면 $0<a<1$이므로

$x_3 < \log_a x_2$ ⋯ ㉠

또한, $\log_b x_2 = x_2 < x_3$에서 $\log_b x_2 < x_3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\log_b x_2 < \log_a x_2$

즉, $\frac{1}{\log_{x_2} b} < \frac{1}{\log_{x_2} a}$에서 $\log_{x_2} b > \log_{x_2} a$이고

$0 < x_2 < 1$이므로 $b < a$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

46 답 10

현재의 기억량을 100이라 할 때, 4개월이 지난 후까지 남는 기억량이

현재의 기억량의 $\frac{3}{5}$이므로

$\log_2 \frac{2^{100}}{(4+1)^k} = \frac{3}{5} \times 100$에서

$100 - k\log_2 5 = 60$, $k\log_2 5 = 40$

$$\therefore k = \frac{40}{\log_2 5} = \frac{40}{\log_2 10 - 1} = \frac{40}{\frac{10}{3} - 1} = \frac{120}{7}$$

또한, 9개월이 지난 후까지 남는 기억량은

$$R(9) = \log_2 \frac{2^{100}}{(9+1)^k} = 100 - k\log_2 10$$

$$= 100 - \frac{120}{7} \times \log_2 10 = 100 - \frac{120}{7} \times \frac{1}{\log 2}$$

$$= 100 - \frac{120}{7} \times \frac{10}{3} = \frac{300}{7} = 100 \times \frac{3}{7}$$

$\therefore a + b = 3 + 7 = 10$

47 답 15

$t=9$일 때 $a:b=3:1$이므로 $a=3b$에서

$9=k\log\left(\frac{9b}{3b}+1\right)=k\log 4$

$\therefore k=\frac{9}{\log 4}=\frac{9}{2\log 2}=\frac{9}{0.6}=15$

이때, $a:b=1:1$이 되는 시점, 즉 유통기한을 x일이라 하면

$x=k\log\left(\frac{9a}{a}+1\right)=15\log 10=15$

48 답 ②

처음 오염 농도가 40이고 소독을 시작한 지 2시간 후의 오염 농도는 30이므로

$M(0)=20r^0+a=20+a=40$

$\therefore a=20$

$M(2)=20r^2+a=20r^2+20=30$

$20r^2=10,\ r^2=\frac{1}{2}$

$\therefore r=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\because r>0)$

즉, $M(t)=20\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t+20$이고 t시간 후 오염 농도가 처음으로 24 이하가 된다고 하면

$20\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t+20\le 24$에서

$20\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\le 4,\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\le\frac{1}{5}$

양변에 상용로그를 취하면

$t\log\frac{1}{\sqrt{2}}\le\log\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{2}t\log 2\le\log 2-1$

$\therefore t\ge\frac{2(1-\log 2)}{\log 2}=\frac{1.4}{0.3}=4.6\times\times\times$

따라서 오염 농도가 처음으로 24 이하가 되는 시간은 소독약품을 투여한 지 4시간~5시간 사이이다.

49 답 ③

반감기가 1억 년이므로 $M=\frac{1}{2}M_0$, 즉 $\frac{M}{M_0}=\frac{1}{2}$일 때 걸리는 시간이 $t=1$(억 년)이다.

즉, $\log\frac{1}{2}=k$ ⋯ ㉠

처음 양의 20%, 즉 $M=\frac{1}{5}M_0$일 때까지 걸린 시간을 t라 하면

$\log\frac{1}{5}=kt=t\times\log\frac{1}{2}\ (\because ㉠)$

$\therefore t=\frac{\log\frac{1}{5}}{\log\frac{1}{2}}=\frac{\log 5}{\log 2}=\frac{0.7}{0.3}\fallingdotseq 2.33$(억 년)

50 답 4

$A\cap B\ne\varnothing$이므로 $(a,\ b)\in A$이고 $(a,\ b)\in B$인 순서쌍 $(a,\ b)$가 존재해야 한다.

$(a,\ b)\in B$에서 $a+b=k$ ⋯ ㉠

$(a,\ b)\in A$에서 $\log_2 x=a$, $\log_2 y=b$이므로 $x=2^a$, $y=2^b$이고

$x+y=1$에서 $2^a+2^b=1$ ⋯ ㉡ ---------- ⓐ

㉠, ㉡에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$1=2^a+2^b\ge 2\sqrt{2^{a+b}}=2\sqrt{2^k}$ (단, 등호는 $2^a=2^b$일 때 성립)

$\sqrt{2^k}\le\frac{1}{2},\ 2^k\le\frac{1}{4}=2^{-2}$ $\quad\therefore k\le -2$

즉, k의 최댓값은 -2이므로 $\alpha=-2$

$\therefore \alpha^2=4$ ---------- ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ $A\cap B=\{(a,\ b)\}$인 원소 $(a,\ b)$를 잡고 관계식을 세운다.	[50%]
ⓑ α^2의 값을 구한다.	[50%]

51 답 11

(i) $1\le a<6$일 때, $\log_2 a-\log_2 6<0$이므로

$|\log_2 a-\log_2 6|+\log_2 b\le 1$에서

$-\log_2 a+\log_2 6+\log_2 b\le 1$

$\log_2\frac{6b}{a}\le\log_2 2,\ \frac{6b}{a}\le 2$ $\quad\therefore a\ge 3b$ ⋯ ㉠

즉, $1\le a<6$일 때, 부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 1)$, $(4,\ 1)$, $(5,\ 1)$의 3개이다. ---------- ⓐ

(ii) $a\ge 6$일 때, $\log_2 a-\log_2 6\ge 0$이므로

$|\log_2 a-\log_2 6|+\log_2 b\le 1$에서

$\log_2 a-\log_2 6+\log_2 b\le 1$

$\log_2\frac{ab}{6}\le\log_2 2,\ \frac{ab}{6}\le 2$ $\quad\therefore ab\le 12$ ⋯ ㉡

즉, $a\ge 6$일 때, 부등식 ㉡을 만족시키는 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(6,\ 1)$, $(6,\ 2)$, $(7,\ 1)$, $(8,\ 1)$, $(9,\ 1)$, $(10,\ 1)$, $(11,\ 1)$, $(12,\ 1)$의 8개이다. ---------- ⓑ

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$3+8=11$이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $1\le a<6$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구한다.	[40%]
ⓑ $a\ge 6$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구한다.	[40%]
ⓒ 순서쌍 $(a,\ b)$의 전체 개수를 구한다.	[20%]

52 답 10

2010년 초 이 도시의 아황산가스의 농도를 S_A, 아황산가스의 농도가 처음으로 2010년 초의 8배 이상이 되는 해의 자동차 보유 대수를 N이라 하면

$\log S_A=\frac{9}{10}\log 10^5+b$ ⋯ ㉠

$\log 8S_A=\frac{9}{10}\log N+b$ ⋯ ㉡ ---------- ⓐ

㉡－㉠에서 $\log \frac{8S_A}{S_A}=\frac{9}{10}\log \frac{N}{10^5}$

$\log 8=\frac{9}{10}(\log N-5)$, $3\log 2=\frac{9}{10}(\log N-5)$

$0.9=0.9(\log N-5)$, $\log N=6$

$\therefore N=10^6$ -- ⓑ

따라서 자동차 보유 대수가 100만 대 이상일 때, 아황산가스의 농도가 8배 이상이 된다.

한편, 자동차 보유 대수가 매년 26%씩 증가하고 있으므로 n년 후의 자동차 보유 대수는 $10(1.26)^n$만 대이다.

즉, $10(1.26)^n \ge 100$에서

$(1.26)^n \ge 10$, $n\log 1.26 \ge 1$

$0.1n \ge 1$　　$\therefore n \ge 10$

따라서 아황산가스의 농도가 처음으로 2010년 초의 8배 이상이 되는 해는 10년 후이다. ---------------------------------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 주어진 관계식을 이용하여 식을 세운다.	[30%]
ⓑ 아황산가스의 농도가 8배가 될 때의 자동차 보유 대수를 구한다.	[30%]
ⓒ 자동차 보유 대수를 이용하여 아황산가스의 농도가 처음으로 8배가 되는 해가 몇 년 후인지 구한다.	[40%]

53 답 6

$9^x-3^{x+2}+3k=0$에서

$(3^x)^2-9\times 3^x+3k=0$

이때, $t=3^x\,(t>0)$이라 하면 $t^2-9t+3k=0$ ⋯ ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 $t>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-9t+3k=\left(t-\frac{9}{2}\right)^2+3k-\frac{81}{4}$이라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축이 $t=\frac{9}{2}$이므로 $f(0)>0$이어야 한다.

즉, $3k>0$에서 $k>0$ ⋯ ㉡

또, $t^2-9t+3k=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$D=81-12k>0$, $12k<81$

$\therefore k<\frac{27}{4}$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에서 $0<k<\frac{27}{4}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는 6이다.

54 답 17

$(3^{x+2}-1)(3^{x-p}-1)\le 0$의 양변에 $3^{-2}\times 3^p$을 곱하면

$(3^x-3^{-2})(3^x-3^p)\le 0$

이때, p가 자연수이므로 $3^{-2}\le 3^x \le 3^p$

$\therefore -2\le x\le p$

$-2\le x\le p$를 만족시키는 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, \cdots, p$이고 정수 x의 개수가 20이어야 하므로

$p-(-2)+1=20$에서 $p=17$

55 답 ②

진수의 조건에 의하여 $4+x>0$, $4-x>0$이므로

$-4<x<4$ ⋯ ㉠

$\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3$에서

$\log_2(16-x^2)=\log_2 8$, $16-x^2=8$, $x^2=8$

$\therefore x=2\sqrt{2}$ 또는 $x=-2\sqrt{2}$

두 수는 모두 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해는

$x=2\sqrt{2}$ 또는 $x=-2\sqrt{2}$

따라서 구하는 곱은

$2\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})=-8$

56 답 55

(i) $\log_3\frac{m}{15}>0$, 즉 $m>15$일 때,

$\left|\log_3\frac{m}{15}\right|+\log_3\frac{n}{3}\le 0$에서

$\log_3\frac{m}{15}+\log_3\frac{n}{3}\le 0$, $\log_3\frac{m}{15}\le\log_3\frac{3}{n}$, $\frac{m}{15}\le\frac{3}{n}$

$\therefore m\le\frac{45}{n}$

그런데 $m>15$이므로 $15<m\le\frac{45}{n}$이다.

ⓘ $n=1$일 때, $15<m\le 45$에서 순서쌍 (m, n)의 개수는 30이다.

ⓘⓘ $n=2$일 때, $15<m\le 22.5$에서 순서쌍 (m, n)의 개수는 7이다.

ⓘⓘⓘ $n\ge 3$일 때, 순서쌍 (m, n)은 존재하지 않는다.

ⓘ~ⓘⓘⓘ에 의하여 $m>15$일 때 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $30+7=37$

(ii) $\log_3\frac{m}{15}=0$, 즉 $m=15$일 때,

$\left|\log_3\frac{m}{15}\right|+\log_3\frac{n}{3}\le 0$에서 $\log_3\frac{n}{3}\le 0$　　$\therefore n\le 3$

즉, $m=15$일 때 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는 3이다.

(iii) $\log_3\frac{m}{15}<0$, 즉 $0<m<15$일 때,

$\left|\log_3\frac{m}{15}\right|+\log_3\frac{n}{3}\le 0$에서 $-\log_3\frac{m}{15}+\log_3\frac{n}{3}\le 0$

$\log_3\frac{m}{15}\ge\log_3\frac{n}{3}$, $\frac{m}{15}\ge\frac{n}{3}$　　$\therefore m\ge 5n$

그런데 $0<m<15$이므로 $5n\le m<15$

ⓘ $n=1$일 때, $5\le m<15$에서 순서쌍 (m, n)의 개수는 10이다.

ⓘⓘ $n=2$일 때, $10\le m<15$에서 순서쌍 (m, n)의 개수는 5이다.

ⓘⓘⓘ $n\ge 3$일 때, 순서쌍 (m, n)은 존재하지 않는다.

ⓘ~ⓘⓘⓘ에 의하여 $0<m<15$일 때 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $10+5=15$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는 $37+3+15=55$

57 답 ③

점 B의 x좌표를 k라 하면 $\mathrm{P}(k, \log_a k)$, $\mathrm{A}(k, \log_b k)$이고

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}$에서 $\overline{\mathrm{PB}} : \overline{\mathrm{AB}}=2:1$이므로

$\log_a k : \log_b k=2:1$, $2\log_b k=\log_a k$, $\dfrac{1}{\log_k b}=\dfrac{1}{2\log_k a}$

$\log_k b=\log_k a^2 \qquad \therefore b=a^2$

따라서 $\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{DQ}}$이고 $\overline{\mathrm{PB}}=\dfrac{2}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\dfrac{1}{3}$, $\overline{\mathrm{CQ}}=\dfrac{2}{3}$

이때, 사각형 PAQC의 넓이가 1이므로

$$\begin{aligned}\square\mathrm{PAQC}&=\triangle\mathrm{PAQ}+\triangle\mathrm{PQC}\\&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{PA}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{QC}}\\&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\frac{2}{3}\\&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}=1\end{aligned}$$

$\therefore \overline{\mathrm{BD}}=2$

한편, 점 P의 y좌표가 $\dfrac{2}{3}$이므로 점 P의 x좌표는 $a^{\frac{2}{3}}$이고

점 C의 y좌표는 $2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$이므로 점 C의 x좌표는 $a^{\frac{4}{3}}$이다.

즉, $\overline{\mathrm{BD}}=a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=2$이고 $a^{\frac{2}{3}}=t$ $(t>0)$라 하면

$t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

그런데 $t>0$이므로

$t=2$에서 $a^{\frac{2}{3}}=2 \qquad \therefore a=2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore ab=a^3=(2^{\frac{3}{2}})^3=2^{\frac{9}{2}}=16\sqrt{2}$

58 답 ②

$Q(4)=Q_0\left(1-2^{-\frac{4}{a}}\right)$, $Q(2)=Q_0\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)$이므로

$\dfrac{Q(4)}{Q(2)}=\dfrac{3}{2}$에서

$\dfrac{Q_0\left(1-2^{-\frac{4}{a}}\right)}{Q_0\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)}=\dfrac{3}{2}$

$3\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)=2\left(1-2^{-\frac{4}{a}}\right)$

$3-3\times2^{-\frac{2}{a}}=2-2\times2^{-\frac{4}{a}}$

$2\times2^{-\frac{4}{a}}-3\times2^{-\frac{2}{a}}+1=0$

이때, $2^{-\frac{2}{a}}=t$라 하면 $a>0$이므로 $0<t<1$이고

$2t^2-3t+1=0$에서 $(t-1)(2t-1)=0$

$\therefore t=\dfrac{1}{2}$ $(\because 0<t<1)$

$2^{-\frac{2}{a}}=\dfrac{1}{2}$에서

$2^{-\frac{2}{a}}=2^{-1}$, $-\dfrac{2}{a}=-1$

$\therefore a=2$

59 답 ⑤

부등식 $4^x-2(a-4)2^x+2a\geq0$에서 $2^x=t$ $(t>0)$라 하면

$t^2-2(a-4)t+2a\geq0$

이 부등식이 $t>0$에서 항상 성립해야 한다.

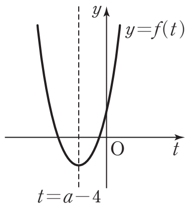
$f(t)=t^2-2(a-4)t+2a=(t-a+4)^2-(a-4)^2+2a$라 하면

함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축이 $t=a-4$이므로 대칭축의 위치에 따라 a의 값의 범위를 구하자.

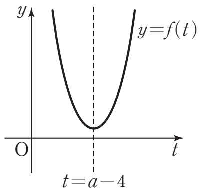
(i) $a-4<0$, 즉 $a<4$일 때,

$f(0)=2a\geq0$이면 성립하므로

$0\leq a<4$



(ii) $a-4\geq0$, 즉 $a\geq4$일 때,



$\dfrac{D}{4}=(a-4)^2-2a\leq0$에서

$a^2-10a+16\leq0$

$(a-2)(a-8)\leq0 \qquad \therefore 2\leq a\leq8$

이때, $a\geq4$이므로 $4\leq a\leq8$

(i), (ii)에 의하여 구하는 a의 값의 범위는

$0\leq a\leq8$

60 답 ③

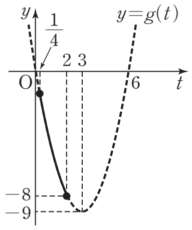
$f(x)=4^x-6\times2^x$이라 하고 $-2\leq x\leq1$에서 $f(x)$의 최솟값을 구하자.

$2^x=t$라 하고

$g(t)=t^2-6t=(t-3)^2-9$라 하면

$-2\leq x\leq1$에서 $\dfrac{1}{4}\leq t\leq2$이므로

그림에서 $g(t)\geq-8$



따라서 $-8\geq4^a-6\times2^a$이면

$-2\leq x\leq1$에서 부등식 $4^x-6\times2^x\geq4^a-6\times2^a$이 항상 성립하므로

$-8\geq4^a-6\times2^a$, $(2^a)^2-6\times2^a+8\leq0$

$(2^a-2)(2^a-4)\leq0$, $2\leq2^a\leq4$

$\therefore 1\leq a\leq2$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은 $1+2=3$

61 답 ③

(밑)$=\pm1$인 경우와 (지수)$=0$인 경우로 나누어 생각하자.

(i) (밑)$=1$, 즉 $x^2-x-1=1$일 때,

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) (밑)$=-1$, 즉 $x^2-x-1=-1$일 때,

$x^2-x=0$에서 $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때, $x=0$이면 $(-1)^3=-1\neq1$이므로 주어진 방정식을 만족시키지 않는다.

$\therefore x=1$

(iii) $x+3=0$일 때, $x=-3$

(i)~(iii)에 의하여 주어진 방정식을 만족시키는 x의 값은 -3, -1, 1, 2의 4개이다.

62 답 ③

$(4^x+4^{-x})-2(2^x+2^{-x})+k=0$ ⋯ ㉠에서

$2^x+2^{-x}=t$라 하면 $t=2^x+2^{-x}\geq2\sqrt{2^x\times2^{-x}}=2$이고

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2$이므로 주어진 방정식은

$t^2-2t+k-2=0$ ⋯ ㉡

ㄱ. 방정식 ㉠이 실근을 가지려면 t에 대한 이차방정식 ㉡이 $t\geq2$에서 근이 존재해야 한다.

이때, $f(t)=t^2-2t+k-2=(t-1)^2+k-3$이라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축이 $t=1$이므로 $f(2)\leq0$이어야 한다.

즉, $4-4+k-2\leq0$에서 $k\leq2$ (참)

ㄴ. 【반례】 $k=2$이면 ㉡에서 $t^2-2t=0$, $t(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t\geq2$)

즉, $2^x+2^{-x}=2$에서 $(2^x)^2-2\times2^x+1=0$

$(2^x-1)^2=0$, $2^x=1$ $\qquad\therefore x=0$

즉, $k=2$이면 서로 다른 실근은 $x=0$으로 한 개이다. (거짓)

ㄷ. $g(x)=(4^x+4^{-x})-2(2^x+2^{-x})+k$라 하면

$g(-x)=(4^{-x}+4^x)-2(2^{-x}+2^x)+k=g(x)$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉, 방정식 $g(x)=0$이 실근을 가지면 서로 다른 실근의 합은 항상 0이다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

63 답 ⑤

ㄱ. $\log_{\frac{1}{2}}c=b$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^b=c$ (참)

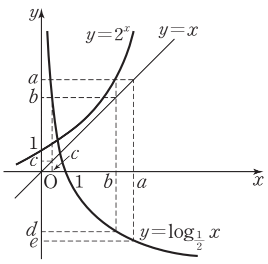
ㄴ. $2^b=a$에서 $b=\log_2 a$

또한, $\log_{\frac{1}{2}}a=e$

$\therefore b+e=\log_2 a+\log_{\frac{1}{2}}a$

$=\log_2 a-\log_2 a$

$=0$ (참)



ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^b=c$, $2^b=a$이므로

$ac=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

01 답 ②

두 각 α, β의 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이면

$\alpha-\beta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

즉, $8\theta-\theta=7\theta=(2n+1)\pi$에서

$\theta=\frac{2n+1}{7}\pi$이고 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$n=2$일 때, $\theta=\frac{5}{7}\pi$

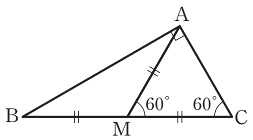
02 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면

(부채꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}r^2\times2=36$ $\qquad\therefore r=6$ ($\because r>0$)

$\therefore$ (부채꼴의 호의 길이)$=6\times2=12$

03 답 ③



점 M은 삼각형 ABC의 외접원의 중심이다.

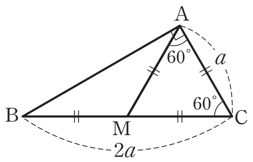
따라서 $\overline{AM}=\overline{CM}$이고 $\angle AMC=60°$이므로

삼각형 AMC는 정삼각형이다.

직각삼각형 ABC에서 $\angle C=60°$이므로

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\tan 60°=\sqrt{3}$

[다른 풀이]



점 M은 삼각형 ABC의 외접원의 중심이다.

따라서 $\overline{AM}=\overline{CM}$이고 $\angle AMC=60°$이므로 삼각형 AMC는 정삼각형이다.

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=a$라 하면 $\overline{BC}=2a$이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{4a^2-a^2}=\sqrt{3a^2}=\sqrt{3}a$

$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$

04 답 24

그림과 같이 각 θ가 나타내는 동경은 제 3사분면에 있고, 동경이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 13인 원과 만나는 점을 $\mathrm{P}(-5,\ y)$라 하면 $y<0$이다.

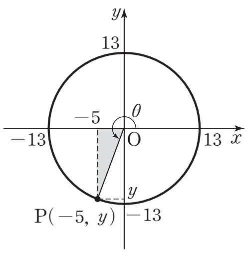
이때, 점 P의 y좌표는

$-\sqrt{13^2-(-5)^2}=-12$이므로

$\sin\theta=-\dfrac{12}{13}$, $\tan\theta=\dfrac{12}{5}$

$\therefore\ 5\tan\theta-13\sin\theta$

$\quad=5\times\dfrac{12}{5}-13\times\left(-\dfrac{12}{13}\right)=24$



05 답 ②

$\sin\theta\cos\theta<0$에서 $\cos\theta<0$이므로 θ는 제 2사분면의 각이다.

$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$이므로 원점 O와 제 2사분면의 점 $\mathrm{P}(a,\ 3)$에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+3^2}=5\qquad\therefore\ a=-4\ (\because\ a<0)$

즉, $\mathrm{P}(-4,\ 3)$이므로 $\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$

[다른 풀이]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\dfrac{16}{25}$

$\sin\theta\cos\theta<0$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{3}{4}$

06 답 ④

$\sin^2 99^\circ+\cos^2 99^\circ+\tan^2 99^\circ$

$=1+\tan^2 99^\circ\ (\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$

$=\dfrac{1}{\cos^2 99^\circ}\ \left(\because\ 1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)$

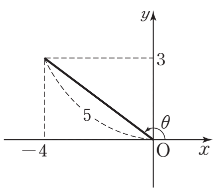
$=\dfrac{1}{\cos^2(90^\circ+9^\circ)}=\dfrac{1}{\sin^2 9^\circ}$

07 답 36

θ가 제 2사분면의 각이고, $\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$

이므로

$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$



$\therefore\ \dfrac{1+\cos(\pi+\theta)}{1-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)}\times\dfrac{1+\sin(\pi-\theta)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}$

$\quad=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\times\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$\quad=\dfrac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}\times\dfrac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\dfrac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{5}}\times\dfrac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}=36$

08 답 ②

직선 $x-3y+3=0$의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이므로 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$

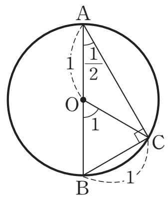
$\therefore\ \cos(\pi+\theta)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(-\theta)$

$\quad=-\cos\theta+\cos\theta-\tan\theta=-\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$

09 답 ③

반지름의 길이가 1인 원이므로 호 BC의 길이가 1이면 $\angle\mathrm{BOC}=1$(라디안)이다.

이때, 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{2}$이므로 $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}$(라디안)



한편, 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\cos(\angle\mathrm{BAC})=2\cos\dfrac{1}{2}$

10 답 ②

$7\theta+\theta=2n\pi$ (n은 정수)로부터 $\theta=\dfrac{n\pi}{4}$

$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{n\pi}{4}<\pi$에서 $2<n<4$이므로 $n=3$

따라서 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$이므로 $p+q=4+3=7$

11 답 ④

θ가 제 1사분면의 각이므로

$2n\pi<\theta<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수) $\qquad\therefore\ \dfrac{2n\pi}{3}<\dfrac{\theta}{3}<\dfrac{2n\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}$

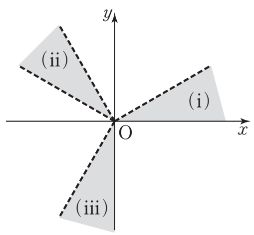
즉, 정수 k에 대하여

(i) $n=3k$일 때, $2k\pi<\dfrac{\theta}{3}<2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$

(ii) $n=3k+1$일 때, $2k\pi+\dfrac{2}{3}\pi<\dfrac{\theta}{3}<2k\pi+\dfrac{5}{6}\pi$

(iii) $n=3k+2$일 때, $2k\pi+\dfrac{4}{3}\pi<\dfrac{\theta}{3}<2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi$

(i), (ii), (iii)을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

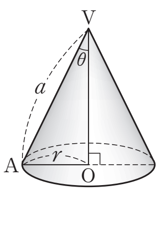


따라서 구하는 사분면은 제 1, 2, 3사분면이다.

12 답 ③

그림과 같이 원뿔의 꼭짓점을 V, 밑면인 원의 반지름의 길이를 r, 선분 VA의 길이를 a라 하면 원뿔의 옆면은 반지름의 길이가 a, 호의 길이가 $2\pi r$인 부채꼴이므로 그 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times a\times 2\pi r=\pi ar$



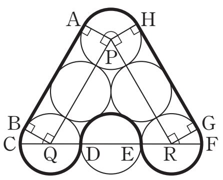
따라서 주어진 조건에서 $\pi ar=2\pi r^2$

$\therefore a=2r$

$\sin\theta=\dfrac{r}{a}=\dfrac{r}{2r}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta=30^\circ\ (\because 0^\circ<\theta<90^\circ)$

13 답 32



$\overline{AB}=\overline{GH}=4$

$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\pi$

삼각형 PQR는 정삼각형이므로

$\angle BQC=\angle GRF=\dfrac{\pi}{6}$

$\angle APH=\dfrac{2}{3}\pi$

따라서 굵은 선의 길이는

$4\times2+\pi\times3+1\times\dfrac{2}{3}\pi+1\times\dfrac{\pi}{6}\times2=8+4\pi$

$\therefore ab=8\times4=32$

14 답 ①

원의 중심을 O, 호 BC의 중심각의 크기를 θ(라디안)라 하면

$\overset{\frown}{BC}=2\times\theta=4$이므로 $\theta=2$

(부채꼴 OBC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times2^2\times2=4$

$\triangle OBC=\dfrac{1}{2}\times2^2\times\sin 2=2\sin 2$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

(부채꼴 OBC의 넓이)$-\triangle OBC=4-2\sin 2$

15 답 ①

그림에서 길이가 1 m인 막대를 선분 AB라 하고

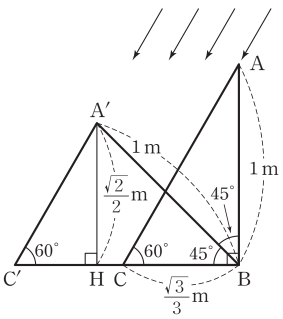
그림자 쪽으로 45° 기울인 막대를 선분 A′B라 하면

선분 AB의 그림자는 선분 CB, 선분 A′B의 그림자는 선분 C′B이다.

점 A′에서 선분 C′B에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle A'BH=45^\circ$이므로

삼각형 A′HB는 빗변의 길이가 1 m인 직각이등변삼각형이다.



$\therefore \overline{A'H}=\overline{BH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (m)

$\tan(\angle BCA)=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\sqrt{3}$이므로

$\angle BCA=60^\circ$

한편, $\overline{AC}/\!/\overline{A'C'}$이므로

$\angle BC'A'=60^\circ$ (동위각)

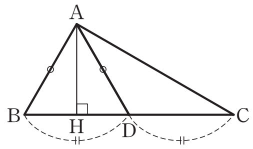
따라서 삼각형 A′C′H는 한 내각의 크기가 60°인 직각삼각형이므로

$\overline{C'H}:\overline{A'H}=1:\sqrt{3}$

$\therefore \overline{C'H}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overline{A'H}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$\therefore \overline{C'B}=\overline{C'H}+\overline{BH}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6}$(m)

16 답 ①



꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABD는 이등변삼각형이므로 $\overline{BH}=\overline{HD}$

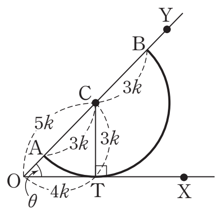
여기서 $\overline{BH}=\overline{HD}=a$라 하면

$\overline{BD}=\overline{CD}=2a$

$\therefore \tan B=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\dfrac{\overline{AH}}{a},\ \tan C=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{CH}}=\dfrac{\overline{AH}}{3a}$

$\therefore \dfrac{\tan B}{\tan C}=\dfrac{\dfrac{\overline{AH}}{a}}{\dfrac{\overline{AH}}{3a}}=\dfrac{3a}{a}=3$

17 답 4



반원의 중심을 C, 반원과 반직선 OX의 접점을 T라 하면

$\overline{CT}\perp\overline{OX}$

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OT}}{\overline{OC}}=\dfrac{4}{5}$에서

$\overline{OT}=4k,\ \overline{OC}=5k\ (k>0)$라 하면

$\overline{CT}=\sqrt{(5k)^2-(4k)^2}=3k$이므로

$\overline{OA}=\overline{OC}-\overline{AC}=2k,\ \overline{OB}=\overline{OC}+\overline{BC}=8k$

$\therefore \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{8k}{2k}=4$

18 답 ③

$A(x, y)$라 하면 $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-x$

점 C는 점 A와 원점에 대하여 대칭이므로 $C(-x, -y)$

따라서 $\cos(\pi-\theta)$는 점 C의 x좌표와 같다.

19 답 0

동경 위의 점 $P(x, y)$에 대하여 $\overline{OP}=r$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=-\dfrac{3}{5}$ $\quad\therefore x=-3k,\ r=5k\ (k>0)$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3k)^2+y^2}=5k$

$\therefore y=4k$ ($\because$ θ가 제 2사분면의 각이므로 $y>0$)

따라서 점 P의 좌표는 $P(-3k, 4k)$이므로

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{4}{5},\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{-3}=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore 5\sin\theta+3\tan\theta=5\times\dfrac{4}{5}+3\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)=0$

[다른 풀이]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$\therefore \sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\pm\frac{4}{5}$

그런데 θ가 제 2사분면의 각이므로 $\sin\theta=\frac{4}{5}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$

(이하 동일)

20 답 ④

동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 삼각함수의 정의에 의하여

$a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$

직선 $y=-2x$의 기울기가 $\tan\theta$이므로

$\tan\theta=-2$

$$\therefore \frac{b-a}{b+a}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}=\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}=\frac{-2-1}{-2+1}=3$$

[다른 풀이]

점 $\mathrm{P}(a, b)$가 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=-2x$ 위의 점이므로

$b=-2a\ (a\neq 0)$

$\therefore \frac{b-a}{b+a}=\frac{-2a-a}{-2a+a}=\frac{-3a}{-a}=3$

21 답 ④

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=2$

$1+2\sin\theta\cos\theta=2 \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{1}{\cos\theta}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)=\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{(\sin\theta\cos\theta)^2}=\frac{2\sqrt{2}-3\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$$

22 답 ⑤

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$에서 $\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1$이므로

$$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)=\sin^2\theta\tan^2\theta=\frac{16}{5}$$

23 답 ①

$x^2+x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta-\cos\theta$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=2\sin\theta=-1 \qquad \therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$

(두 근의 곱)$=\sin^2\theta-\cos^2\theta=k$

$\therefore k=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)=2\sin^2\theta-1$

$\quad =2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{2}$

24 답 ⑤

$A+B+C=\pi$

ㄱ. $A+B=\pi-C$이므로

$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$ (참)

ㄴ. $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$이므로

$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$ (참)

ㄷ. $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$이므로

$\tan\frac{B+C}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$

$\therefore \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B+C}{2}=1$ (참)

따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

25 답 1

$$\frac{\sin(\pi-\theta)}{\sin(\theta+\pi)}-\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\tan\theta+\frac{\cos(2\pi-\theta)}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=\frac{\sin\theta}{-\sin\theta}-\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)\times\tan\theta+\frac{\cos\theta}{\cos\theta}$$
$$=-1+1+1=1$$

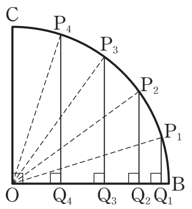
26 답 ②

선분 OB의 길이를 r라 하자.

호 BC를 5등분하였으므로 중심각의 크기도 5등분된다. 즉,

$\angle \mathrm{P_1OQ_1}=\angle \mathrm{P_2OP_1}=\angle \mathrm{P_3OP_2}=\angle \mathrm{P_4OP_3}$

$\quad =\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{\pi}{10}$



$\overline{P_1Q_1}^2+\overline{P_2Q_2}^2+\overline{P_3Q_3}^2+\overline{P_4Q_4}^2$

$=r^2\sin^2\frac{\pi}{10}+r^2\sin^2\frac{2}{10}\pi+r^2\sin^2\frac{3}{10}\pi+r^2\sin^2\frac{4}{10}\pi$

$=r^2\left(\sin^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{2}{10}\pi+\sin^2\frac{3}{10}\pi+\sin^2\frac{4}{10}\pi\right)$

$=r^2\left\{\left(\sin^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{4}{10}\pi\right)+\left(\sin^2\frac{2}{10}\pi+\sin^2\frac{3}{10}\pi\right)\right\}$

$=r^2\left\{\left(\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}\right)+\left(\sin^2\frac{2}{10}\pi+\cos^2\frac{2}{10}\pi\right)\right\}$

$=2r^2=3$

$\therefore r=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ($\because r>0$)

27 답 ⑤

$\widehat{AP}=\overline{AB}$이므로 $\widehat{AP}=2r$

따라서 부채꼴 AOP의 중심각의 크기는 $\angle AOP=2$(라디안)

또, 부채꼴 BOP의 중심각의 크기는 $\angle BOP=\pi-2$(라디안)

부채꼴의 넓이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$\frac{(\text{부채꼴 AOP의 넓이})}{(\text{부채꼴 BOP의 넓이})}=\frac{2}{\pi-2}$

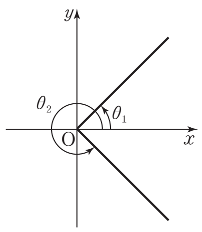
28 답 ⑤

ㄱ. $-1300°=360°\times(-4)+140°$ (참)

ㄴ. $\alpha=2l\pi+\theta_1$ $(0\le\theta_1<2\pi)$

$\beta=2m\pi+\theta_2$ $(0\le\theta_2<2\pi)$

(단, l, m은 정수)



라 하면 문제의 조건에서

$\theta_1+\theta_2=2\pi$이므로

$\alpha+\beta=2(l+m)\pi+(\theta_1+\theta_2)$

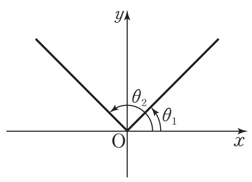
$=2n'\pi+2\pi$ (n'은 정수)

$=2(n'+1)\pi=2n\pi$ (참)

ㄷ. $\alpha=2l\pi+\theta_1$ $(0\le\theta_1<2\pi)$

$\beta=2m\pi+\theta_2$ $(0\le\theta_2<2\pi)$

(단, l, m은 정수)



라 하면 문제의 조건에서

$\theta_1+\theta_2=\pi$ 또는 $\theta_1+\theta_2=3\pi$이므로

$\alpha+\beta=2(l+m)\pi+(\theta_1+\theta_2)$

$=(2n+1)\pi$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

29 답 9

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 18에서 $2r+l=18$이므로

$l=18-2r$ ⋯ ㉠

$r>0$, $l>0$에서 $r>0$, $18-2r>0$이므로

$0<r<9$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(18-2r)=-r^2+9r$

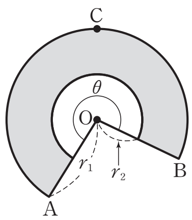
$=-\left(r-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}$

$0<r<9$에서 $S=-\left(r-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}$은 $r=\frac{9}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{81}{4}$을 가지므로 ㉠에서

$l=18-2\times\frac{9}{2}=9$

30 답 ③

그림과 같이 호 ACB에 대한 중심각의 크기를 $\angle AOB=\theta$라 하면



색칠한 부분의 둘레의 길이가 10이므로

$2(r_1-r_2)+r_1\theta+r_2\theta=10$ ⋯ ㉠

색칠한 부분의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}r_1^2\theta-\frac{1}{2}r_2^2\theta$

$=\frac{1}{2}(r_1-r_2)(r_1+r_2)\theta$

$=\frac{1}{2}(r_1-r_2)\{10-2(r_1-r_2)\}$ ($\because$ ㉠)

$=-(r_1-r_2)^2+5(r_1-r_2)$

$=-\left\{(r_1-r_2)-\frac{5}{2}\right\}^2+\frac{25}{4}$

따라서 $r_1-r_2=\frac{5}{2}$일 때, 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$이다.

[다른 풀이]

$r_1-r_2=x$, $(r_1+r_2)\theta=y$라 하면

$x>0$, $y>0$

색칠한 부분의 둘레의 길이가 10이므로

$2(r_1-r_2)+(r_1+r_2)\theta=2x+y=10$ ⋯ ㉡

색칠한 부분의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}r_1^2\theta-\frac{1}{2}r_2^2\theta=\frac{1}{2}(r_1-r_2)(r_1+r_2)\theta=\frac{1}{2}xy$ ⋯ ㉢

㉡에 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$10=2x+y\ge2\sqrt{2xy}$ (단, 등호는 $2x=y$일 때 성립)

$\frac{25}{4}\ge\frac{1}{2}xy=S$ ($\because$ ㉢)

따라서 S의 최댓값은 $\frac{25}{4}$이다.

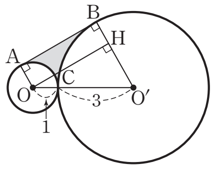
31 답 ①

그림에서 $\overline{OA}\perp\overline{AB}$, $\overline{O'B}\perp\overline{AB}$, $\overline{OO'}=\overline{OC}+\overline{O'C}=4$이고

$\overline{O'H}=\overline{O'B}-\overline{BH}=2$

$\sin(\angle O'OH)=\dfrac{1}{2}$에서

$\angle O'OH=\dfrac{\pi}{6}$, $\angle OO'H=\dfrac{\pi}{3}$,



$\angle AOC=\dfrac{2}{3}\pi$이다.

$\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

구하는 넓이는 사다리꼴 AOO′B의 넓이에서

두 부채꼴 AOC와 BO′C의 넓이를 뺀 것이므로

$\dfrac{1}{2}\times(1+3)\times2\sqrt{3}-\left(\dfrac{1}{2}\times1^2\times\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{1}{2}\times3^2\times\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=4\sqrt{3}-\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{3}{2}\pi\right)=4\sqrt{3}-\dfrac{11}{6}\pi$

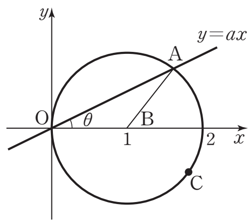
32 답 ③

그림에서 $\angle AOB=\theta$라 하면

$a=\tan\theta$이다.

이때, $\overset{\frown}{AO}:\overset{\frown}{ACO}=1:2$이어야

하므로 $\angle ABO=\dfrac{2}{3}\pi$



삼각형 ABO는 이등변삼각형이므로

$\angle OAB=\angle AOB=\theta$

$2\theta+\dfrac{2}{3}\pi=\pi \qquad \therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore a=\tan\theta=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

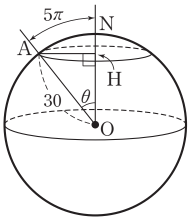
33 답 30

그림과 같이 실의 한 끝을 A,

구의 중심을 O, $\angle AON=\theta$라 하면

부채꼴 AON에서

$\overset{\frown}{AN}=30\theta=5\pi \qquad \therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$



이때, 구의 표면을 따라 점 A를 돌려 그은

곡선은 원이 되고 이 원의 반지름의 길이는 $\overline{AH}$이므로 직각삼각형

OAH에서 $\overline{AH}=30\times\sin\dfrac{\pi}{6}=15$

따라서 $l=2\pi\times15=30\pi$이므로 $\dfrac{l}{\pi}=\dfrac{30\pi}{\pi}=30$

34 답 3

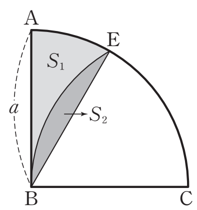
선분 AB, 호 BE, 호 AE로 이루어진 도형

ABE의 넓이를 S_1이라 하면

$S=a^2-4S_1$ ⋯ ㉠

$S_1=$(부채꼴 ABE의 넓이)$-S_2$

$S_2=$(부채꼴 BCE의 넓이)$-\triangle BCE$



$\angle ABE=\dfrac{\pi}{6}$이고 삼각형 BCE는 정삼각형이므로

$S_1=\dfrac{\pi}{12}a^2-\left(\dfrac{1}{2}\times a^2\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\times a^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=a^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{12}\right)$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

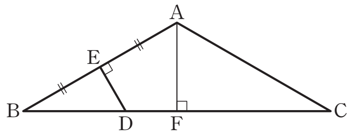
$S=a^2-a^2\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)=a^2\left(1-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

따라서 $p=1-\sqrt{3}$이므로

$(1-p)^2=(\sqrt{3})^2=3$

35 답 ⑤

그림과 같이 선분 AB의 중점을 E, 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 F라 하자.



$\overline{BE}=a$, $\overline{BD}=b$ $(a>0,\ b>0)$라 하면 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$에서

$\overline{BC}=3b$

$\therefore \overline{AB}=2a$, $\overline{BF}=\dfrac{3b}{2}$

직각삼각형 BDE에서 $\cos B=\dfrac{a}{b}$ ⋯ ㉠

직각삼각형 ABF에서 $\cos B=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{AB}}=\dfrac{\frac{3}{2}b}{2a}=\dfrac{3b}{4a}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3b}{4a}$이므로 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \cos B=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because \cos B>0)$

36 답 ①

점 F에서 선분 CD에 내린

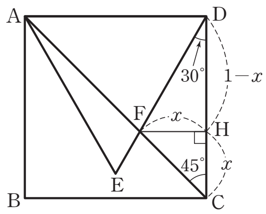
수선의 발을 H라 하고

$\overline{FH}=x$ $(0<x<1)$라 하면

$\overline{CH}=x$, $\overline{HD}=1-x$

삼각형 FHD에서 $\angle D=30^\circ$이므로

$\dfrac{\overline{FH}}{\overline{DH}}=\tan30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$\therefore x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\therefore \triangle FCD=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

37 답 ②

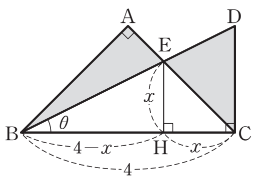
$\triangle ABE=\triangle CDE$에서

$\triangle ABC=\triangle BCD$

변 BC가 공통이므로 두 삼각형

ABC, BCD의 높이는 같다.

$\therefore \overline{CD}=2$



한편, 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고,

$\overline{CH}=x$, $\angle EBC=\theta$라 하면 삼각형 CEH는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{EH}=\overline{CH}=x$

삼각형 BCD에서 $\tan\theta=\frac{1}{2}$이므로

삼각형 BHE에서 $\tan\theta=\frac{x}{4-x}=\frac{1}{2}$ $\qquad \therefore x=\frac{4}{3}$

$\therefore \triangle BCE=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{EH}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

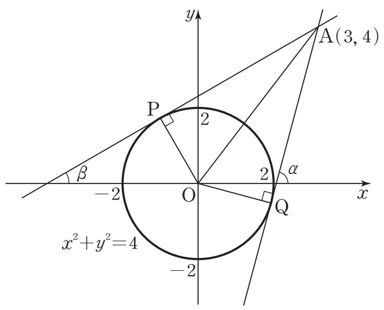
$\triangle ABC=\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times4\times2=4$

$\therefore \triangle ABE=\triangle ABC-\triangle BCE=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$

38 답 7

점 A(3, 4)에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하고 원의 중심을 O라 하면 $\angle PAQ=\alpha-\beta$이므로

$\angle PAO=\angle QAO=\frac{\alpha-\beta}{2}$



이때, 직각삼각형 POA에서

$\overline{OA}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{OP}=2$이므로

$\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{2}{5}$

$\therefore p+q=5+2=7$

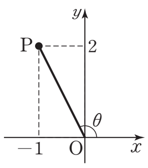
39 답 ②

그림과 같이 x축의 양의 방향과 이루는 각이 θ인 동경 위에 점 P$(-1, 2)$를 잡으면

$\tan\theta=-2$이다.

이때, $\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

삼각함수의 정의에서



$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{2}{5}$

[다른 풀이]

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-2$이므로

$\sin\theta=-2\cos\theta$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-2\cos^2\theta=\frac{-2}{1+\tan^2\theta}=-\frac{2}{5}$

40 답 ⑤

$x^\circ=x^\circ\times\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{x}{180}\pi$(라디안)이므로 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overset{\frown}{AP}=r\times\frac{x}{180}\pi$, $\overline{PN}=r\sin x^\circ$

$\overset{\frown}{AP}=3\overline{PN}$에서 $r\times\frac{x}{180}\pi=3r\sin x^\circ$

$\therefore \sin x^\circ=\frac{x}{540}\pi$

41 답 ②

점 P(a, b)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 P$'(b, a)$,

점 P$'(b, a)$를 y축에 대하여 대칭이동하면 P$''(-b, a)$이다.

$\sqrt{a^2+b^2}=r$라 하면 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\alpha=\frac{b}{r}$, $\cos\alpha=\frac{a}{r}$, $\tan\alpha=\frac{b}{a}$

$\sin\beta=\frac{a}{r}$, $\cos\beta=\frac{b}{r}$, $\tan\beta=\frac{a}{b}$

$\sin\gamma=\frac{a}{r}$, $\cos\gamma=-\frac{b}{r}$, $\tan\gamma=-\frac{a}{b}$

ㄱ. $\cos\alpha=\sin\gamma=\frac{a}{r}$ (참)

ㄴ. $\sin\alpha+\cos\gamma=\frac{b}{r}+\left(-\frac{b}{r}\right)=0$ (참)

ㄷ. $\sin\beta+\cos\gamma=\frac{a-b}{r}\neq0$ (거짓)

ㄹ. $\tan\beta+\tan\gamma=\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

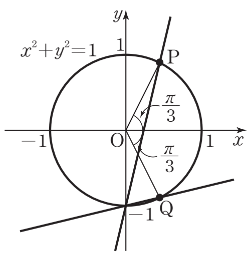
42 답 4

$k=\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}$ ⋯ ㉠

여기서 $\cos\theta=x$, $\sin\theta=y$라 하면

$x^2+y^2=1$ ⋯ ㉡

이때, $|\theta|\le\frac{\pi}{3}$에서 점 (x, y)는 그림의 호 PQ 위의 점이다.



한편, ㉠에서

$k=\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}=\frac{y-(-1)}{x-0}$이므로 k는 점 $(0, -1)$과 호 PQ 위의 점 (x, y)를 이은 직선의 기울기이다.

두 점 P, Q의 좌표가 각각 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

점 $(0, -1)$과 점 P를 지날 때의 직선의 기울기는 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{\frac{1}{2}-0}=2+\sqrt{3}$

점 $(0, -1)$과 점 Q를 지날 때의 직선의 기울기는 $\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{\frac{1}{2}-0}=2-\sqrt{3}$

따라서 $2-\sqrt{3}\le k\le2+\sqrt{3}$이므로

$M+m=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

43 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{4}$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{a}{4}$

이때, $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{4}$의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$

$1+2\times\left(-\frac{a}{4}\right)=\frac{1}{16}$

$\therefore a=\frac{15}{8}$

44 답 ④

삼각함수의 정의에 의하여 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{5}{2}$, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{5}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{5}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$

따라서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

45 답 ①

$\tan\theta=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$의 양변을 제곱하면

$\tan^2\theta=\frac{1-x}{x}$, $x(\tan^2\theta+1)=1$

$\frac{x}{\cos^2\theta}=1 \qquad \therefore x=\cos^2\theta$

$\therefore \frac{\sin^2\theta}{x+\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{x-\cos\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\cos\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta(\cos^2\theta-\cos\theta)+\sin^2\theta(\cos^2\theta+\cos\theta)}{\cos^4\theta-\cos^2\theta}$

$=\frac{2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta(\cos^2\theta-1)}$

$=\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta-1}$

$=\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta-1}=-2$

46 답 ②

$\cos\left(\frac{19}{14}\pi+\theta\right)=\cos\left\{\frac{3}{2}\pi-\left(\frac{\pi}{7}-\theta\right)\right\}$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{7}-\theta\right)=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{7}-\theta\right)=-\frac{1}{3}$

47 답 ⑤

ㄱ. $\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=-\frac{1}{\tan\theta}\times\sin\theta=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\sin\theta=-\cos\theta$ (참)

ㄴ. $\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}=\frac{2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$=\frac{2}{1-\sin^2 x}=\frac{2}{\cos^2 x}$

$=2(1+\tan^2 x)$ (참)

ㄷ. $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos(3\pi-\theta)}{\cos(\pi+\theta)}+\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin(\pi-\theta)}$

$=\frac{\cos\theta(-\cos\theta)}{-\cos\theta}+\frac{\cos\theta(-\sin\theta)}{\sin\theta}$

$=\cos\theta-\cos\theta=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

48 답 ③

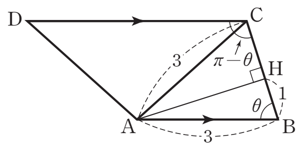
$\angle ABC=\pi-\theta$, $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$\sin(\pi-\theta)=\frac{3}{5} \qquad \therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$

$\cos(\pi-\theta)=\frac{4}{5} \qquad \therefore \cos\theta=-\frac{4}{5}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{1}{5}$

49 답 ②



그림과 같이 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 $\overline{BH}=1$

이때, $\angle ABH=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{3}$

한편, 변 AB와 변 CD가 평행하므로 $\angle BCD=\pi-\theta$

$\therefore \cos(\angle BCD)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{1}{3}$

50 답 ④

동경 OQ를 나타내는 각은 $\pi+\theta$이므로 점 Q의 y좌표는

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

[다른 풀이]

직선 PQ가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이므로 직선 PQ의 기울기는 $\tan\theta$

직선 PQ의 방정식은 $y=x\tan\theta$

따라서 $x=1$일 때, y좌표를 구하면 $y=\tan\theta$

51 답 ③

$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$에서 $\tan\theta\times\tan(90^\circ-\theta)=1$

즉, $\tan 5^\circ\times\tan 85^\circ=1$, $\tan 15^\circ\times\tan 75^\circ=1$,

$\tan 25^\circ\times\tan 65^\circ=1$, $\tan 35^\circ\times\tan 55^\circ=1$이고

$\tan 45^\circ=1$이므로

$$\log(\tan 5^\circ)+\log(\tan 85^\circ)=\log(\tan 5^\circ\times\tan 85^\circ)=\log 1=0$$

$$\log(\tan 15^\circ)+\log(\tan 75^\circ)=\log(\tan 15^\circ\times\tan 75^\circ)=\log 1=0$$

$$\log(\tan 25^\circ)+\log(\tan 65^\circ)=\log(\tan 25^\circ\times\tan 65^\circ)=\log 1=0$$

$$\log(\tan 35^\circ)+\log(\tan 55^\circ)=\log(\tan 35^\circ\times\tan 55^\circ)=\log 1=0$$

$\log(\tan 45^\circ)=\log 1=0$

$\therefore \log(\tan 5^\circ)+\log(\tan 15^\circ)+\log(\tan 25^\circ)+\cdots+\log(\tan 75^\circ)+\log(\tan 85^\circ)=0$

52 답 ②

$10\theta=2\pi$이므로 $5\theta=\pi$

$$\cos\theta+\cos 6\theta=\cos\theta+\cos(5\theta+\theta)=\cos\theta+\cos(\pi+\theta)=\cos\theta-\cos\theta=0$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta+\cos 7\theta&=\cos 2\theta+\cos(5\theta+2\theta)\\&=\cos 2\theta+\cos(\pi+2\theta)\\&=\cos 2\theta-\cos 2\theta=0\end{aligned}$$

같은 방법으로

$\cos 3\theta+\cos 8\theta=0$, $\cos 4\theta+\cos 9\theta=0$,

$\cos 5\theta=\cos\pi=-1$

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 9\theta=-1$

[다른 풀이]

$\cos k\theta$ $(k=0, 1, \cdots, 9)$는 점 P_{k+1}의 x좌표이다.

점 P_1과 점 P_6, 점 P_2와 점 P_7, $\cdots$, 점 P_5와 점 P_{10}이 각각 원점에 대하여 대칭이므로 각 쌍의 x좌표의 합은 0이다. 즉,

$\cos 0+\cos 5\theta=0$, $\cos\theta+\cos 6\theta=0$, $\cdots$,

$\cos 4\theta+\cos 9\theta=0$

따라서 $\cos 0+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 9\theta=0$이므로

$\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 9\theta=-\cos 0=-1$

53 답 ④

$\dfrac{\pi}{4}+x=\theta$라 하면 $\dfrac{\pi}{4}-x=\dfrac{\pi}{4}-\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\therefore \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\tan\theta\times\dfrac{1}{\tan\theta}=1$

54 답 2

S_1, S_2의 넓이가 같으므로 삼각형 OAB의 넓이는 부채꼴 OCD의 넓이의 2배이다.

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{AB}=\overline{OB}\tan\theta=r\tan\theta$이므로

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times r\times r\tan\theta=\dfrac{1}{2}r^2\tan\theta$ ········ ⓐ

부채꼴 OCD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}r^2\theta$이므로

$\dfrac{1}{2}r^2\tan\theta=\dfrac{1}{2}r^2\theta\times 2$에서 $\tan\theta=2\theta$ ········ ⓑ

$\therefore \dfrac{\tan\theta}{\theta}=2$ ········ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 삼각형 OAB의 넓이를 구한다.	[40%]
ⓑ $\tan\theta$를 θ에 대한 식으로 나타낸다.	[40%]
ⓒ $\dfrac{\tan\theta}{\theta}$의 값을 구한다.	[20%]

55 답 5

$\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=2+\sqrt{3}$에서 $\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}=2+\sqrt{3}$

$\tan\theta-1=(2+\sqrt{3})(\tan\theta+1)$, $(1+\sqrt{3})\tan\theta=-3-\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta=-\sqrt{3}$ ········ ⓐ

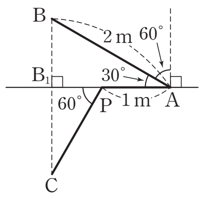
$$\begin{aligned}(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)&=\sin^2\theta-\cos^2\theta\\&=1-2\cos^2\theta\\&=1-2\times\frac{1}{1+\tan^2\theta}\\&=1-2\times\frac{1}{1+(-\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$ ········ ⓑ

$\therefore 10k=10\times\dfrac{1}{2}=5$ ········ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $\tan\theta$의 값을 구한다.	[30%]
ⓑ $(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)$의 값을 구한다.	[50%]
ⓒ $10k$의 값을 구한다.	[20%]

56 답 5



그림에서

$\overline{PB_1}=2\cos 30^\circ-1=\sqrt{3}-1$ (m)

$\therefore \overline{PC}=\dfrac{\overline{PB_1}}{\cos 60^\circ}=2\overline{PB_1}$

$=2(\sqrt{3}-1)$(m) ········ ⓐ

그림자의 길이는

$\overline{AP}+\overline{PC}=1+2(\sqrt{3}-1)$

$=(2\sqrt{3}-1)$(m) ········ ⓑ

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로 $a^2+b^2=5$ ········ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 경사면에 나타난 그림자의 일부분의 길이인 $\overline{PC}$의 길이를 구한다.	[40%]
ⓑ 전체 그림자의 길이를 구한다.	[40%]
ⓒ a^2+b^2의 값을 구한다.	[20%]

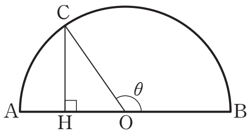
57 답 ③

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{3}{4}$$

이므로 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$

$$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=8$$

58 답 27



반원의 중심을 O라 하면 반원의 지름의 길이가 12이므로 $\overline{OB}=6$이다.

$\angle COB=\theta$라 하면 호 BC의 길이가 4π이므로

$6\theta=4\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발이 H이므로

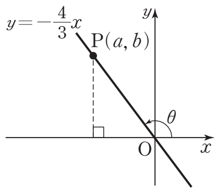
$\angle COH=\pi-\theta=\frac{\pi}{3}$

삼각형 CHO는 직각삼각형이고 $\overline{OC}=6$이므로

$\overline{CH}=\overline{OC}\times\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{CH}^2=(3\sqrt{3})^2=27$

59 답 ①



$a<0$이면 직선 $y=-\frac{4}{3}x$ 위의 점 $P(a, b)$는

제 2사분면에 존재하므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이다.

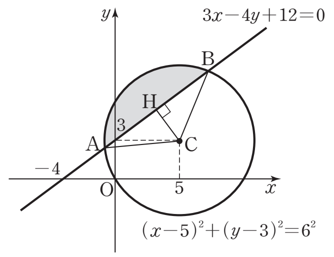
직선의 기울기 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$이므로

$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$, $\cos^2\theta=\frac{9}{25}$

$\therefore \cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\sin\theta=\frac{4}{5}$ ($\because \sin\theta>0$, $\cos\theta<0$)

$$\therefore \sin(\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)=\sin\theta-\cos\theta$$
$$=\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5}$$

60 답 ⑤



원과 직선이 만나는 두 점을 각각 A, B, 원의 중심을 C, 원의 중심 C에서 직선 $3x-4y+12=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 원의 중심 $(5, 3)$과 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리와 같으므로

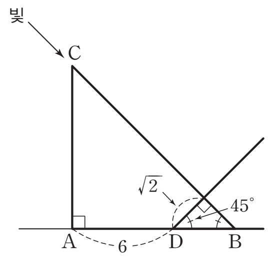
$$\overline{CH}=\frac{|3\times5-4\times3+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3$$

이때, $\overline{CA}=6$, $\overline{CH}=3$이므로 $\overline{AH}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$이고 $\angle ACH=\frac{\pi}{3}$

따라서 구하는 넓이는 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 ACB의 넓이에서 삼각형 ACB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times3=12\pi-9\sqrt{3}$$

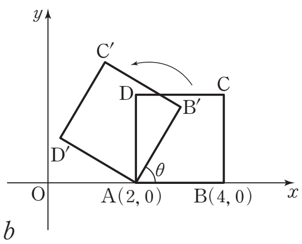
61 답 8



태양의 고도가 45°이므로 전신주의 높이는

$\overline{AC}=\overline{AB}=8$ ($\because \overline{DB}=2$)

62 답 ①



그림과 같이 회전각을 θ라 하면

$\angle BAB'=\theta$, $\overline{AB}=2$이므로

점 B′의 좌표는

$(2+2\cos\theta, 2\sin\theta)$

즉, $a=2+2\cos\theta$, $b=2\sin\theta$

이므로 $2\cos\theta=a-2$, $2\sin\theta=b$

한편, $\angle B'AD'=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle BAD'=\frac{\pi}{2}+\theta$

즉, 점 D′의 좌표는

$$\left(2+2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right), 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$

$$2+2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=2-2\sin\theta=2-b$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=2\cos\theta=a-2$$

따라서 점 D′의 좌표는 $(2-b, a-2)$이다.

63 답 ⑤

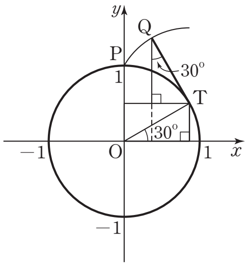
$\angle POT=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overset{\frown}{PT}=\overline{QT}=\frac{\pi}{3}\times 1=\frac{\pi}{3}$

점 Q의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\cos 30^\circ-\frac{\pi}{3}\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$



64 답 ①

$\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} \cos\theta=x-1 \\ \sin\theta=y \end{cases}$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$에서 $(x-1)^2+y^2=1$ … ㉠

즉, 점 $P(x, y)$는 원 ㉠ 위의 점이다.

한편, $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{2}{3}\pi$이므로 점 P가 나타내는 도형의 길이는 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{5}{12}\pi$인 부채꼴의 호의 길이와 같다.

따라서 점 $P(x, y)$가 나타내는 도형의 길이는

$1\times\frac{5}{12}\pi=\frac{5}{12}\pi$

65 답 ⑤

세 점 $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B(\cos\beta, \sin\beta)$, $C(\cos\gamma, \sin\gamma)$라 하면 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 세 점 A, B, C는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이다.

즉, 삼각형 ABC의 외심은 원점이다.

한편, 삼각형 ABC의 무게중심 $G(p, q)$는

$p=\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}=0$,

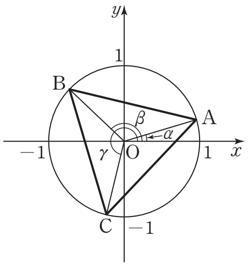
$q=\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}=0$

이므로 무게중심 G 역시 원점이다.

외심과 무게중심이 일치하므로

삼각형 ABC는 정삼각형이다.

$\therefore \beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi$



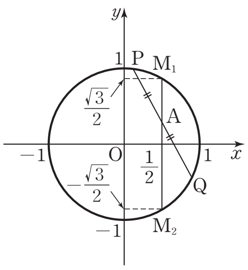
66 답 ③

두 점 P, Q는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이고,

$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}=\frac{1}{2}$이므로

선분 PQ의 중점을 A라 하면 점 A는

직선 $x=\frac{1}{2}$ 위에 있다.



$\sin\alpha+\sin\beta=a$라 하면 $\frac{a}{2}$는 점 A의 y좌표이고,

점 A는 그림에서 선분 M_1M_2 위에 있으므로

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\frac{a}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore -\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$

따라서 구하는 최댓값은 $\sqrt{3}$이다.

67 답 $\frac{4}{3}$

두 직선 PX, PQ가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\angle APX=\angle AQY=\theta$이고

$\angle AXP=\angle AYQ=90^\circ$이므로

$\overline{AX}=\overline{AP}\sin\theta$, $\overline{AY}=\overline{AQ}\sin\theta$

$\therefore \frac{1}{\overline{AX}}+\frac{1}{\overline{AY}}=\frac{1}{\overline{AP}\sin\theta}+\frac{1}{\overline{AQ}\sin\theta}$

$=\frac{\overline{AP}+\overline{AQ}}{\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\sin\theta}$

$=\frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\sin\theta}$ … ㉠

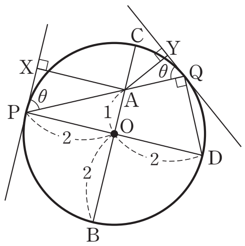
한편, $\overline{AP}\times\overline{AQ}=\overline{AB}\times\overline{AC}=(2+1)\times(2-1)=3$ … ㉡

직선 PO와 원의 또 다른 교점을 D라 할 때,

$\angle PQD=90^\circ$이고

$\angle PDQ=\angle QPX=\theta$이므로

$\overline{PQ}=\overline{PD}\times\sin\theta=4\sin\theta$ … ㉢



㉠, ㉡, ㉢에서

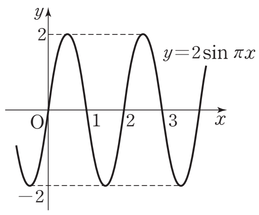
$\frac{1}{\overline{AX}}+\frac{1}{\overline{AY}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\sin\theta}$

$=\frac{4\sin\theta}{3\sin\theta}=\frac{4}{3}$

05 삼각함수의 그래프

문제편 60P

01 답 ⑤



함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$의 그래프는 $y=\sin\frac{\pi}{2b}x$의 그래프를 y축의 방향으로 a배 한 것이다.

이때, $a>0$이므로 최댓값은 a이고 최솟값은 $-a$이다.

그런데 함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$의 최댓값이 2이므로 $a=2$

또한, $a\sin\frac{\pi}{2b}x=a\sin\left(\frac{\pi}{2b}x+2\pi\right)=a\sin\frac{\pi}{2b}(x+4b)$이므로

함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$의 주기가 $4b$이다.

즉, $4b=2$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

02 답 ①

그림에서 삼각함수의 주기는 $\frac{3}{2}\pi$이므로

$\frac{2\pi}{|a|}=\frac{3}{2}\pi \qquad \therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>0)$

$y=\cos\frac{4}{3}(x+b)+1$의 그래프는 $y=\cos\frac{4}{3}x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 그래프이므로

$-b=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore b=\frac{\pi}{2}\ (\because 0<b<\pi)$

$\therefore ab=\frac{4}{3}\times\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi$

03 답 ⑤

ㄱ. $f(x)=2\sin 2x+1$에서

$$\begin{aligned}f(x+2\pi)&=2\sin 2(x+2\pi)+1\\&=2\sin(2x+4\pi)+1\\&=2\sin 2x+1\\&=f(x)\end{aligned}$$

ㄴ. $f(x)=-\cos|x|+2=-\cos x+2$에서

$$\begin{aligned}f(x+2\pi)&=-\cos(x+2\pi)+2\\&=-\cos x+2\\&=f(x)\end{aligned}$$

ㄷ. $f(x)=\sqrt{2}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)-1$에서

$$\begin{aligned}f(x+2\pi)&=\sqrt{2}\tan\left\{\frac{1}{2}(x+2\pi)-\frac{\pi}{3}\right\}-1\\&=\sqrt{2}\tan\left(\pi+\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)-1\\&=\sqrt{2}\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)-1\\&=f(x)\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=f(x+2\pi)$를 만족시키는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

주기가 $\frac{2\pi}{n}$ (n은 자연수)이면 $f(x)=f(x+2\pi)$를 만족시킨다.

각 함수의 주기를 구하면

ㄱ. $\frac{2\pi}{2}=\pi$

ㄴ. $f(x)=-\cos x+2$이므로 $\frac{2\pi}{1}=2\pi$

ㄷ. $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

따라서 $f(x)=f(x+2\pi)$를 만족시키는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

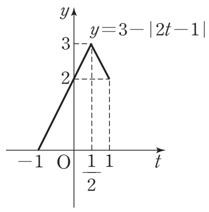
04 답 ②

$y=3-|2\cos x-1|$에서

$\cos x=t\ (-1\le t\le 1)$라 하면

$y=3-|2t-1|\ (-1\le t\le 1)$

함수 $y=3-|2t-1|$의 그래프에서



$t=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 3을 가진다.

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$

따라서 $a=\frac{\pi}{3}$, $M=3$이므로

$a\times M=\pi$

05 답 ②

주어진 식을 정리하면

$$\begin{aligned}y&=3\cos^2\theta+2\sin\theta-1\\&=3(1-\sin^2\theta)+2\sin\theta-1\\&=-3\sin^2\theta+2\sin\theta+2\end{aligned}$$

$\sin\theta=t\ (-1\le t\le 1)$라 하면

$y=-3t^2+2t+2=-3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{7}{3}$

따라서 $t=\frac{1}{3}$일 때 최댓값 $\frac{7}{3}$을 가진다.

06 답 ②

$2\cos^2 x+3\sin x-3=0$에서

$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-3=0$

$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

$(2\sin x-1)(\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{3}{2}\pi$이다.

07 답 10

$2\theta-\frac{\pi}{3}=t$라 하면 $-\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{5}{3}\pi$

$\sin t>\frac{\sqrt{3}}{2}$인 t의 값의 범위는 $\frac{\pi}{3}<t<\frac{2}{3}\pi$

즉, $\frac{\pi}{3}<2\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{2}{3}\pi$에서 $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$60ab=10$

08 답 ③

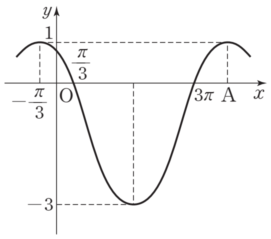
그래프에서 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로 $a=2$

$\therefore y=2\cos(bx+c)-1$

점 A의 x좌표는

$3\pi+\left\{\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\frac{11}{3}\pi$

$\therefore \mathrm{A}\left(\frac{11}{3}\pi,\ 1\right)$



따라서 주기는 $-\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{11}{3}\pi$까지이고, $b>0$이므로

$p=\frac{11}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=4\pi$, $\frac{2\pi}{b}=4\pi$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore y=2\cos\left(\frac{x}{2}+c\right)-1$

주어진 그래프는 $y=2\cos\frac{x}{2}-1$의 그래프를 x축의 방향으로

$-\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로

$y=2\cos\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-1$ $\quad\therefore c=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \frac{p}{abc}=24$

09 답 ④

최댓값이 1, 최솟값이 -3이므로

$a+b=1$, $-a+b=-3$에서

$a=2$, $b=-1$

$x=0$일 때, $y=0$이므로 $2\cos(-\theta)-1=0$

$2\cos\theta=1$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

10 답 ③

$0<A<\pi$, $0<B<\pi$일 때, $\sin A=\sin B$이고,

$A\ne B$이므로 $B=\pi-A$, 즉 $A+B=\pi$이다.

ㄱ. $\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{\pi}{2}=1$ (참)

ㄴ. $\cos\frac{A}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\sin\frac{B}{2}$ (거짓)

ㄷ. $\tan\frac{A}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}$

$\therefore \tan\frac{A}{2}\times\tan\frac{B}{2}=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11 답 ②

$f(x)=\frac{\sin^2 3x+2\cos x+1}{\cos 2x+2}$의 주기가 p이므로

주기함수의 정의에 의하여 임의의 실수 x에 대하여

$f(x+p)=f(x)$가 성립한다.

$x=0$일 때, $f(p)=f(0)$이고

$f(p)=f(2p)=f(3p)=\cdots=f(10p)$

한편, $f(0)=\frac{\sin^2 0+2\cos 0+1}{\cos 0+2}=\frac{2+1}{1+2}=1$이므로

$f(p)+f(2p)+f(3p)+\cdots+f(10p)=10f(0)=10$

12 답 ③

① $y=\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이다.

② $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 주기는 2π로 변함이 없다.

③ $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 $y=|\sin 2x|$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

④ $y=\tan x$의 주기는 π이고 $y=|\tan x|$의 주기도 π이다.

⑤ $y=\cos x$와 $y=|\cos x|$의 주기가 각각 2π, π이므로 주어진 함수의 주기는 2π이다.

이때, $\frac{\pi}{2}<2$이므로 주기가 가장 작은 것은 ③이다.

13 답 ④

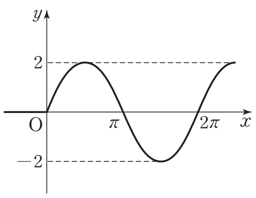
ㄱ. $y=\sin x+\sin|x|$에서

$x\ge0$이면 $y=2\sin x$

$x<0$이면 $y=0$

즉, 그래프는 그림과 같으므로

주기함수가 아니다.



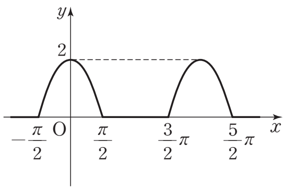
ㄴ. $y=\cos x+|\cos x|$에서

$\cos x\ge0$이면 $y=2\cos x$

$\cos x<0$이면 $y=0$

즉, 그래프는 그림과 같으므로

주기가 2π인 주기함수이다.



ㄷ. $y=\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}(x-\pi)$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이다. 즉, 주기가 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$인 주기함수이다.

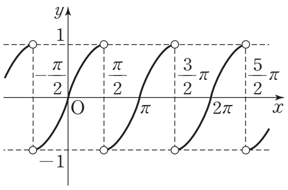
ㄹ. $y=\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}=\frac{\tan x}{\left|\frac{1}{\cos x}\right|}$

$=|\cos x|\tan x$

$\cos x>0$이면 $y=\sin x$

$\cos x<0$이면 $y=-\sin x$

즉, 그래프는 그림과 같으므로 주기가 π인 주기함수이다.



따라서 주기함수인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

일등급 up

$*f(x)=|\cos x|\tan x$의 주기

$f(x)=|\cos x|\tan x$라 하면

$f(x+\pi)=|\cos(x+\pi)|\tan(x+\pi)$

$=|-\cos x|\tan x=|\cos x|\tan x=f(x)$

14 답 1

$(g\circ f)(x)=\cos(ax+b)$

$\therefore -1\le(g\circ f)(x)\le 1$ ⋯ ㉠

$(f\circ g)(x)=a\cos x+b$

$\therefore -a+b\le(f\circ g)(x)\le a+b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $-1=-a+b$, $1=a+b$

연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

$\therefore a^2+b^2=1$

15 답 ②

(i) $f_1(x)=\sin^2 x-4\sin x+3$에서

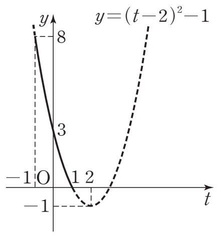
$\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$로 치환하면

$y=t^2-4t+3$

$=(t-2)^2-1\ (-1\le t\le 1)$

$t=1$일 때, 최솟값 0

$t=-1$일 때, 최댓값 8



(ii) $f_2(x)=\sin^2 x+3\cos x+1$

$=1-\cos^2 x+3\cos x+1$

$=-\cos^2 x+3\cos x+2$

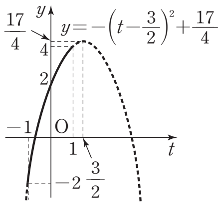
에서 $\cos x=t\ (-1\le t\le 1)$로 치환하면

$y=-t^2+3t+2$

$=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{4}\ (-1\le t\le 1)$

$t=-1$일 때, 최솟값 -2

$t=1$일 때, 최댓값 4



(iii) $f_3(x)=\frac{-2\sin x+5}{\sin x+2}$에서

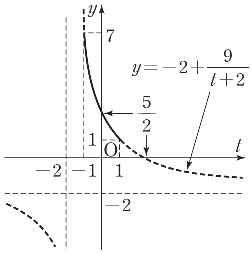
$\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$로 치환하면

$y=\frac{-2t+5}{t+2}$

$=-2+\frac{9}{t+2}\ (-1\le t\le 1)$

$t=1$일 때, 최솟값 1

$t=-1$일 때, 최댓값 7



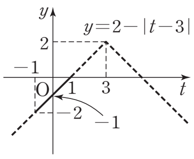
(iv) $f_4(x)=2-|\cos x-3|$에서

$\cos x=t\ (-1\le t\le 1)$로 치환하면

$y=2-|t-3|\ (-1\le t\le 1)$

$t=-1$일 때, 최솟값 -2

$t=1$일 때, 최댓값 0



따라서 최댓값이 가장 큰 함수는 $f_1(x)$이고 최솟값이 가장 큰 함수는 $f_3(x)$이다.

즉, $m=1$, $n=3$이므로 $m+n=4$

16 답 ④

직선 $y=x$와 포물선 $y=x^2+2x\cos\theta+1$의 서로 다른 두 교점의 좌표를 각각 (α, α), (β, β)라 하면 α, β는 방정식 $x^2+(2\cos\theta-1)x+1=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1-2\cos\theta$, $\alpha\beta=1$

따라서 선분의 길이를 l이라 하면

$l=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}$

$=\sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}$

$=\sqrt{2\{(1-2\cos\theta)^2-4\}}$

$=\sqrt{8\cos^2\theta-8\cos\theta-6}$

$=\sqrt{8\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2-8}$

그런데 $-1\le\cos\theta\le 1$이므로 $\cos\theta=-1$일 때, l은 최댓값 $\sqrt{10}$을 가진다.

따라서 l이 최댓값을 가질 때, $\theta=\pi$ ($\because 0\le\theta\le 2\pi$)이다.

17 답 ⑤

이차방정식 $x^2+2(1+\cos\theta)x-\sin^2\theta=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2(1+\cos\theta)$, $\alpha\beta=-\sin^2\theta$

$|\alpha-\beta|=2$이고, $|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$4=4(1+\cos\theta)^2+4\sin^2\theta$

$2\cos\theta+1=0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{1}{2}$

$0<\theta<2\pi$이므로 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

따라서 구하는 θ의 값의 합은 $\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=2\pi$

18 답 ②

$2\cos^2 x+3\sin x-3\ge 0$에서

$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-3\ge 0$

$2\sin^2 x-3\sin x+1\le 0$

$(2\sin x-1)(\sin x-1)\le 0$

$\therefore \frac{1}{2}\le \sin x\le 1$

따라서 $\frac{\pi}{6}\le x\le \frac{5}{6}\pi$이므로 $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{5}{6}\pi$

$b-a=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore \cos(b-a)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

19 답 ③

$3\cos^2 x-1=\sin x\cos x$

$0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x\ne 0$이므로 양변을 $\cos^2 x$로 나누면

$3-\frac{1}{\cos^2 x}=\tan x$

$3-(1+\tan^2 x)=\tan x$

$\tan^2 x+\tan x-2=0$

$(\tan x-1)(\tan x+2)=0$

$\therefore \tan x=1$ 또는 $\tan x=-2$

$0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan x\ge 0$이므로

$\tan x=1 \qquad \therefore \alpha=\frac{\pi}{4}$

$\therefore \tan\alpha=1$

20 답 ①

함수 $f(x)=a\sin\left(bx+\frac{\pi}{2}\right)+c$의 최댓값, 최솟값은 각각

$a+c$, $-a+c$ ($\because a>0$)이므로

주어진 조건에서 $a+c=4$, $-a+c=-2$

$\therefore a=3$, $c=1$

또, 함수 $f(x)$의 주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ ($\because b>0$)에서 $b=2$

따라서 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)+1=-3+1=-2$

21 답 36

주어진 그래프에서 주기는 π이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ ($\because b>0$) $\qquad \therefore b=2$

최댓값이 4, 최솟값이 -2이므로

$a+d=4$, $-a+d=-2$

$\therefore a=3$, $d=1$

한편, y절편이 $\frac{5}{2}$이므로

$3\sin\frac{\pi}{c}+1=\frac{5}{2}$, $\sin\frac{\pi}{c}=\frac{1}{2}$

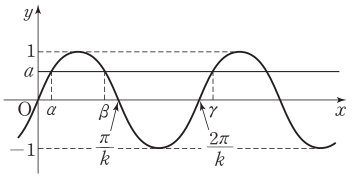
$\frac{\pi}{c}=\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $2\pi+\frac{\pi}{6}$, $2\pi+\frac{5}{6}\pi$, $4\pi+\frac{\pi}{6}$, $\cdots$

$\therefore c=6$ ($\because c$는 자연수)

$\therefore abcd=3\times 2\times 6\times 1=36$

22 답 ④

$f(x)=\sin kx$의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$이므로 함수 $f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{k}$, $\frac{2\pi}{k}$, $\cdots$이다.



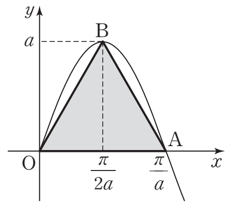
따라서 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{k}$, $\gamma=\frac{2\pi}{k}+\alpha$이므로

$f(\alpha+\beta+\gamma)=f\left(\frac{3\pi}{k}+\alpha\right)=\sin k\left(\frac{3\pi}{k}+\alpha\right)$

$=\sin(3\pi+k\alpha)=-\sin k\alpha$

$=-a$

23 답 ④



$y=a\sin ax$에서 점 A의 x좌표는 $\frac{\pi}{a}$이므로

삼각형 OAB는 한 변의 길이가 $\frac{\pi}{a}$인 정삼각형이다.

따라서 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\pi}{a}=\frac{\sqrt{3}\pi}{2a}$

이때, 점 B의 y좌표는 a이므로

$a=\frac{\sqrt{3}\pi}{2a}$에서 $a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

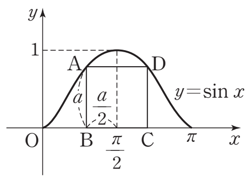
24 답 ⑤

그림에서 점 B의 x좌표는

$\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=a$이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=a$

$\therefore \cos\frac{a}{2}=a$



25 답 ③

$\tan\alpha=3$, $\tan\beta=-\frac{1}{3}$이고,

$\tan(-x)=-\tan x$이므로

$\tan(-\beta)=\frac{1}{3}=\frac{1}{\tan\alpha}$

또한, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$이므로

$\tan(-\beta)=\frac{1}{\tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

한편, $0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<-\beta<\frac{\pi}{2}$이고

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $y=\tan x$는 일대일대응이므로

$-\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

26 답 ①

$f\left(\frac{1}{3}\right)=t$라 하면 $\sin t=\frac{1}{3}$이고 $f(\alpha)=\frac{\pi}{2}-t$이므로

$\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \left(\because\ 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

27 답 ④

ㄱ. $f(x+4)=\cos\frac{\pi}{2}(x+4)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+2\pi\right)$

$=\cos\frac{\pi}{2}x=f(x)$

ㄴ. $f(x+4)=\sin\frac{3}{2}\pi(x+4)$

$=\sin\left(\frac{3}{2}\pi x+6\pi\right)$

$=\sin\frac{3}{2}\pi x=f(x)$

ㄷ. $f(x+4)=\sin\frac{3}{8}\pi(x+4)$

$=\sin\left(\frac{3}{8}\pi x+\frac{3}{2}\pi\right)$

$=-\cos\frac{3}{8}\pi x\neq f(x)$

따라서 $f(x+4)=f(x)$를 만족시키는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

각 함수의 주기를 구하면 다음과 같다.

ㄱ. $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ ㄴ. $\frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{4}{3}$ ㄷ. $\frac{2\pi}{\frac{3}{8}\pi}=\frac{16}{3}$

이때, $\frac{16}{3}n=4$를 만족시키는 자연수 n이 존재하지 않으므로

ㄷ은 $f(x+4)=f(x)$를 만족시키지 않는다.

28 답 ⑤

ㄱ. $y=\cos\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$의 그래프는 $y=\cos|x|$의 그래프를 x축의

방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

이때, $y=\cos|x|=\cos x$이므로

$y=\cos\left|x-\frac{\pi}{2}\right|=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\neq\sin|x|$

ㄴ. $y=\cos|x|=\cos x$이고, $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$이므로

두 함수의 그래프는 일치한다.

ㄷ. $y=\tan x$는 주기가 π인 함수이므로

$\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}+\pi\right)$

$\therefore\ \tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

29 답 2

$f(x)=a\tan\frac{\pi}{5}x$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{5}}=5$이므로

$f(x+5)=f(x)$ ⋯ ㉠

또한, $\tan(-\theta)=-\tan\theta$이므로 $f(-x)=-f(x)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(4)=f(5-1)=f(-1)=-f(1)$

$f(3)=f(5-2)=f(-2)=-f(2)$

$\therefore\ f(2)+f(3)+f(4)=f(2)-f(2)-f(1)=-f(1)=2$

30 답 ⑤

함수 $y=f(x)$의 주기를 p라 하면 $f(x)=f(x+p)$가 성립한다.

ㄱ. 위 식에 x 대신 $ax+b$를 대입하면

$f(ax+b)=f\left(a\left(x+\frac{p}{a}\right)+b\right)$

이때, $g(x)=f(ax+b)$라 하면

$g\left(x+\frac{p}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{p}{a}\right)+b\right)=f(ax+b)=g(x)$

즉, 함수 $g(x)=f(ax+b)$는 주기함수이다.

ㄴ. $h(x)=\{f(x)\}^2$이라 하면

$h(x+p)=\{f(x+p)\}^2=\{f(x)\}^2=h(x)$

즉, 함수 $h(x)=\{f(x)\}^2$은 주기함수이다.

ㄷ. $k(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$라 하면

$k(x+p)=f(f(x+p))=f(f(x))=k(x)$

즉, 함수 $k(x)=(f\circ f)(x)$는 주기함수이다.

따라서 주기함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

31 답 ②

$f(-x)=-f(x)$ ⋯ ㉠

$f(x+1)=-f(-x+1)=f(x-1)$ ($\because$ ㉠)

$x-1=t$ (t는 실수)라 하면 $x=t+1$이므로

$f(x+1)=f(x-1)$에서 $f(t+2)=f(t)$ ⋯ ㉡

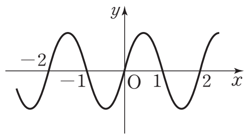
ㄱ. $f(x)=\sin(\pi x-1)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 ㉡을 만족시킨다. 그러나

$f(-x)=\sin(-\pi x-1)=-\sin(\pi x+1)\neq -f(x)$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

ㄴ. $f(x)=\cos \pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 ㉡을 만족시킨다.

또, $y=\cos \pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$의 그래프는 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이므로 ㉠을 만족시킨다.



ㄷ. $f(x)=\left|\tan \frac{\pi}{2}x\right|$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$이므로 ㉡을 만족시킨다.

그러나 $f(x)=\left|\tan \frac{\pi}{2}x\right|\geq 0$이므로 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다.

즉, ㉠을 만족시키지 않는다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ이다.

32 답 10

$y=\sin^2(90^\circ+x)+\sqrt{3}\sin(180^\circ-x)$

$=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x$

$=-\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x+1$

에서 $\sin x=t$ $(-1\leq t\leq 1)$라 하면

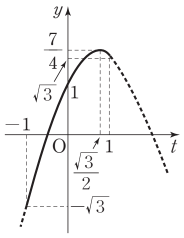
$y=-t^2+\sqrt{3}t+1$

$=-\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ $(-1\leq t\leq 1)$

$t=-1$일 때, 최솟값 $-\sqrt{3}$

$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{7}{4}$

$\therefore 4a+b^2=4\times\frac{7}{4}+(-\sqrt{3})^2=10$



33 답 ②

$0\leq x\leq \pi$일 때, $0\leq \sin x\leq 1$

$\sin x=t$라 하면 $y=\cos t$는 $0\leq t\leq 1$에서 감소하는 함수이다.

이때, 최댓값은 $\cos 0=1$, 최솟값은 $\cos 1$이므로

최댓값과 최솟값의 합은 $1+\cos 1$이다.

34 답 5

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

$y=a\sin^2 x+b\cos^2 x=(a-b)\sin^2 x+b$

이때, $0\leq \sin^2 x\leq 1$이므로

(ⅰ) $a>b$일 때, $0+b\leq(a-b)\sin^2 x+b\leq(a-b)+b$

즉, $b\leq(a-b)\sin^2 x+b\leq a$에서 $a=2$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=5$

(ⅱ) $a<b$일 때, $0+b\geq(a-b)\sin^2 x+b\geq(a-b)+b$

즉, $a\leq(a-b)\sin^2 x+b\leq b$에서 $a=1$, $b=2$

$\therefore a^2+b^2=5$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a^2+b^2=5$

35 답 ⑤

$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}=0$에서 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leq x\leq 2\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\leq 2x-\frac{\pi}{6}\leq \frac{23}{6}\pi$이므로

$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{12}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$

따라서 모든 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{12}\pi+\frac{5}{4}\pi+\frac{17}{12}\pi=\frac{10}{3}\pi$

36 답 ④

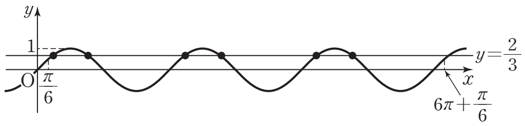
$3\theta+\frac{\pi}{6}=x$라 하면 $0\leq\theta\leq 2\pi$에서 $\frac{\pi}{6}\leq x\leq 6\pi+\frac{\pi}{6}$

주어진 방정식은 $\frac{\pi}{6}\leq x\leq 6\pi+\frac{\pi}{6}$에서

$3\sin x=2$의 해를 구하는 것과 같다.

방정식 $\sin x=\frac{2}{3}$의 해의 개수는 $y=\sin x$의 그래프와

직선 $y=\frac{2}{3}$의 교점의 개수와 같다.



따라서 구하는 해의 개수는 6이다.

37 답 ②

$2\cos^2 x+3\cos x\sin x-3\sin^2 x=1$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$에서

$2\cos^2 x+3\cos x\sin x-3\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x$

$\cos^2 x+3\cos x\sin x-4\sin^2 x=0$

$(\cos x+4\sin x)(\cos x-\sin x)=0$

$\cos x=-4\sin x$ 또는 $\cos x=\sin x$

$\therefore \tan x=-\frac{1}{4}$ 또는 $\tan x=1$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan x>0$이므로 $\tan x=1$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$

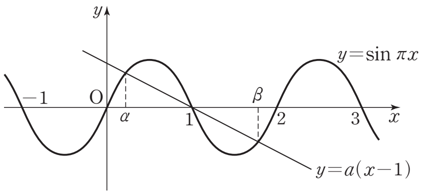
38 답 ④

$ax-\sin \pi x=a$에서 $a(x-1)=\sin \pi x$

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지므로 두 함수 $y=a(x-1)$, $y=\sin \pi x$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

이때, $y=\sin \pi x$는 주기가 2인 주기함수이고,

$y=a(x-1)$은 a의 값에 관계없이 점 $(1, 0)$을 지난다.



그림에서 두 함수의 그래프가 점 $(1, 0)$에 대하여 대칭이므로 세 근의 합은 $\alpha+1+(2-\alpha)=3$

39 답 ②

방정식 $\dfrac{\sin x+\cos x+|\sin x-\cos x|}{2}=k$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=\dfrac{\sin x+\cos x+|\sin x-\cos x|}{2}$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

(i) $\sin x \geq \cos x$일 때

$$y=\frac{\sin x+\cos x+\sin x-\cos x}{2}=\sin x$$

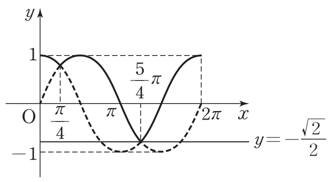
(ii) $\sin x<\cos x$일 때

$$y=\frac{\sin x+\cos x-\sin x+\cos x}{2}=\cos x$$

즉, $0\leq x<\dfrac{\pi}{4}$일 때 $y=\cos x$, $\dfrac{\pi}{4}\leq x\leq \dfrac{5}{4}\pi$일 때 $y=\sin x$,

$\dfrac{5}{4}\pi<x\leq 2\pi$일 때 $y=\cos x$이므로

곡선 $y=\dfrac{\sin x+\cos x+|\sin x-\cos x|}{2}$은 그림과 같다.



따라서 $k=\sin \dfrac{5}{4}\pi=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 오직 하나의 교점을 가진다.

40 답 3

$2\sin^2\theta>1+\sin\theta$에서 $2\sin^2\theta-\sin\theta-1>0$

$(\sin\theta-1)(2\sin\theta+1)>0$

$\therefore \sin\theta<-\dfrac{1}{2}$ $(\because \sin\theta-1\leq 0)$

따라서 $0\leq\theta<2\pi$에서 부등식 $\sin\theta<-\dfrac{1}{2}$의 해는

$\dfrac{7}{6}\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$이므로 $a+b=\dfrac{7}{6}+\dfrac{11}{6}=3$

41 답 ③

임의의 실수 x에 대하여 $x^2-2x\cos\theta+\sin\theta+1\geq 0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2-2x\cos\theta+\sin\theta+1=0$의 판별식 D에 대하여 $D\leq 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=\cos^2\theta-\sin\theta-1\leq 0$ ⋯ ㉠

㉠에 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$를 대입하여 정리하면

$\sin^2\theta+\sin\theta\geq 0$

$\sin\theta(\sin\theta+1)\geq 0$

$\sin\theta\geq 0$ 또는 $\sin\theta\leq -1$이므로

$\sin\theta\geq 0$ 또는 $\sin\theta=-1$

$\therefore 0\leq\theta\leq\pi$, $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

42 답 ⑤

$\log_{\sin x}\dfrac{\sin x}{\cos x}+\log_{\cos x}\dfrac{\sin x}{\cos x}<0$

$1-\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\sin x-1<0$

$\log_{\sin x}\cos x>\log_{\cos x}\sin x$

$\dfrac{\log\cos x}{\log\sin x}>\dfrac{\log\sin x}{\log\cos x}$

이때, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\log\sin x<0$, $\log\cos x<0$이므로

$(\log\cos x)^2>(\log\sin x)^2$

$(\log\cos x-\log\sin x)(\log\cos x+\log\sin x)>0$

$\log\cos x-\log\sin x<0$ $(\because \log\cos x+\log\sin x<0)$

$\cos x<\sin x$

$\therefore \dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$

따라서 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, $\beta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\alpha+\beta=\dfrac{3}{4}\pi$

43 답 ③

$\sin^2\theta+3\cos\theta-a\leq 0$에서

$(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta-a\leq 0$

$\cos^2\theta-3\cos\theta+a-1\geq 0$

$\cos\theta=t$ $(-1\leq t\leq 1)$라 하면

$t^2-3t+a-1\geq 0$ ⋯ ㉠

$f(t)=t^2-3t+a-1$이라 하면

$f(t)=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+a-\dfrac{13}{4}$ $(-1\leq t\leq 1)$

$y=f(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 $f(1)=a-3$을 가진다.

따라서 ㉠이 $-1\leq t\leq 1$에서 항상 성립하려면 $a-3\geq 0$이어야 한다.

$\therefore a\geq 3$

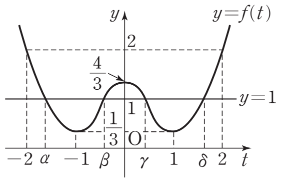
44 답 8

$2\sin x=t\ (-2\le t\le 2)$라 하면 $f(2\sin x)-1=0$에서

$f(t)=1$

$-2\le t\le 2$에서 두 함수

$\begin{cases} y=f(t) \\ y=1 \end{cases}$ 의 그래프의 교점은 4개



이다. 4개의 교점의 t좌표를 작은 순서대로 각각 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$라 하면

$t=2\sin x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$

$\sin x=\dfrac{\alpha}{2},\ \dfrac{\beta}{2},\ \dfrac{\gamma}{2},\ \dfrac{\delta}{2}$에서

$-1<\dfrac{\alpha}{2}<-\dfrac{1}{2}<\dfrac{\beta}{2}<0<\dfrac{\gamma}{2}<\dfrac{1}{2}<\dfrac{\delta}{2}<1$

$\sin x=\dfrac{\alpha}{2}\left(-1<\dfrac{\alpha}{2}<-\dfrac{1}{2}\right)$에서 근은 2개 존재하고,

마찬가지 방법으로 $\sin x=\dfrac{\beta}{2},\ \dfrac{\gamma}{2},\ \dfrac{\delta}{2}$에서 각각 2개의 근이 존재한다. 따라서 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

45 답 ③

$0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi$에서

$0\le\sin x\le 1,\ -1\le\cos y\le 1$이므로

$\sin x+\cos y=2$인 경우는 $\sin x=1,\ \cos y=1$뿐이다.

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2},\ y=0$

$\therefore \sin(x+y)+\cos(x+y)=\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{2}=1$

46 답 ③

$3^{\sin x}+2\times 3^{1-\sin x}=5$에서 $3^{\sin x}+6\times 3^{-\sin x}=5$

여기서 $3^{\sin x}=t$라 하면 $-1\le\sin x\le 1$에서 $\dfrac{1}{3}\le t\le 3$

$t+\dfrac{6}{t}=5,\ t^2-5t+6=0,\ (t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3$

$t=2$일 때, $3^{\sin x}=2$에서 $\sin x=\log_3 2$

$t=3$일 때, $3^{\sin x}=3$에서 $\sin x=1$

이때, $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\log_3 2$의 교점은 2개이고,

$y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점은 1개이다.

따라서 주어진 방정식의 실근의 개수는 $2+1=3$이다.

47 답 ③

$\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$의 양의 해 중 가장 작은 해를 $x=\theta$라 하면

$\sin x\le-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$의 해는 $\pi+\theta\le x\le 2\pi-\theta$이므로

$\alpha=\pi+\theta,\ \beta=2\pi-\theta$이고 $\alpha+\beta=3\pi$

$\therefore \sin\dfrac{\alpha+\beta}{4}=\sin\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

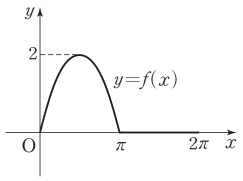
48 답 ⑤

$f(x)=\begin{cases} 2\sin x & (\sin x\ge 0) \\ 0 & (\sin x<0) \end{cases}\ (0\le x\le 2\pi)$이므로

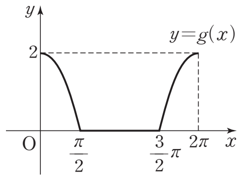
$y=f(x)$의 그래프를 그리면 [그림 1]과 같다.

$g(x)=\begin{cases} 2\cos x & (\cos x\ge 0) \\ 0 & (\cos x<0) \end{cases}\ (0\le x\le 2\pi)$이므로

$y=g(x)$의 그래프를 그리면 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 $f(x)>g(x)$가 성립하는 x의 값의 범위는 $\dfrac{\pi}{4}<x<\pi$이다.

49 답 ②

$\cos y=1-\sin x\ \cdots$ ㉠, $\sin y=-\cos x\ \cdots$ ㉡

㉠^{2}+㉡^{2}에서

$(1-\sin x)^2+(-\cos x)^2=1\ (\because \sin^2 y+\cos^2 y=1)$

$1-2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$2-2\sin x=1,\ \sin x=\dfrac{1}{2}\qquad \therefore x=\dfrac{\pi}{6}\ \cdots$ ㉢

(i) ㉠에서 $\cos y=1-\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore y=\pm\dfrac{\pi}{3}$

(ii) ㉡에서 $\sin y=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore y=-\dfrac{\pi}{3}$

(i), (ii)에 의하여 $y=-\dfrac{\pi}{3}$

따라서 $\alpha=\dfrac{\pi}{6},\ \beta=-\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{6}-\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

50 답 64

$m=144,\ L=12,\ t=2$일 때

$h=20-12\cos\dfrac{4\pi}{\sqrt{144}}=20-12\cos\dfrac{\pi}{3}=14$

$m=a,\ L=6\sqrt{2},\ t=1$일 때

$20-6\sqrt{2}\cos\dfrac{2\pi}{\sqrt{a}}=14$

즉, $\cos\dfrac{2\pi}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이때, $a\ge 25$에서 $0<\dfrac{2\pi}{\sqrt{a}}\le\dfrac{2\pi}{\sqrt{25}}=\dfrac{2}{5}\pi$이므로

$\dfrac{2\pi}{\sqrt{a}}=\dfrac{\pi}{4},\ \sqrt{a}=8$

$\therefore a=64$

51 답 6

함수 $f(x)=\cos x$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여

대칭이므로 $\alpha+\beta=2\pi$ ·· ⓐ

또한, $f(x)=\cos x$의 주기가 2π이므로 $\gamma=2\pi+\alpha$ ·············· ⓑ

$\alpha+\beta+\gamma=2\pi+2\pi+\alpha=4\pi+\alpha$이므로

$f(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(4\pi+\alpha)=\cos\alpha=\frac{3}{5}$

$\therefore 10f(\alpha+\beta+\gamma)=10\times\frac{3}{5}=6$ ································ ⓒ

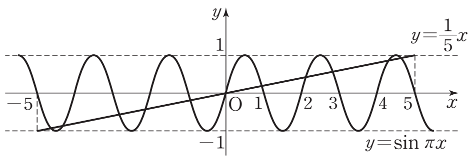
| 채점기준 |

ⓐ $\alpha+\beta$의 값을 구한다.	[40%]
ⓑ γ를 α에 대한 식으로 나타낸다.	[30%]
ⓒ $10f(\alpha+\beta+\gamma)$의 값을 구한다.	[30%]

52 답 11

$y=\sin\pi x$는 주기가 2인 주기함수이다.

따라서 두 함수 $y=\sin\pi x$, $y=\frac{1}{5}x$의 그래프는 각각 다음과 같다.



그림에서 방정식 $\sin\pi x=\frac{1}{5}x$의 근의 개수는

$5\times2+1=11$(개)이다.

$\therefore a=11$ ·· ⓐ

두 함수 $y=\sin\pi x$, $y=\frac{1}{5}x$의 그래프는 모두 원점에 대하여 대칭이므로 $x=\alpha$가 근이면 $x=-\alpha$도 근이다.

따라서 모든 근의 합은 0이다.

$\therefore b=0$ ·· ⓑ

$\therefore a+b=11$ ·· ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 방정식의 근의 개수를 구하여 a의 값을 구한다.	[40%]
ⓑ 모든 근의 합 b의 값을 구한다.	[50%]
ⓒ $a+b$의 값을 구한다.	[10%]

53 답 10

a가 두 이차방정식의 공통인 근이므로

$a^2+a\sin\theta-\sin^2\theta=0$ ··· ㉠

$a^2+a\cos\theta-\cos^2\theta=0$ ··· ㉡

㉠−㉡에서

$(\sin\theta-\cos\theta)(a-\sin\theta-\cos\theta)=0$

이때, $\sin\theta=\cos\theta$이면 두 식이 일치하므로 두 개의 근을 공통으로 가지게 되어 모순이다.

$\therefore a=\sin\theta+\cos\theta$ ··· ㉢ ································ ⓐ

㉠+㉡에서

$2a^2+a(\sin\theta+\cos\theta)-1=0$

㉢에 의하여 $2a^2+a\times a-1=0$

$\therefore a^2=\frac{1}{3}$ ·· ⓑ

$\therefore 30a^2=10$ ·· ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 공통인 근 a에 대한 식을 구한다.	[50%]
ⓑ a^2의 값을 구한다.	[40%]
ⓒ $30a^2$의 값을 구한다.	[10%]

54 답 ④

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

방정식 $\cos^2 x=\sin^2 x-\sin x$에서

$1-\sin^2 x=\sin^2 x-\sin x$

$2\sin^2 x-\sin x-1=0$

$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

이때, $0\le x<2\pi$이므로

(ⅰ) $\sin x=-\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(ⅱ) $\sin x=1$에서 $x=\frac{\pi}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$

55 답 24

곡선 $y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$와 직선 $y=2$가 만나는 점의 x좌표는

$4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)=2$에서 $-\frac{\pi}{4}\le\frac{x-\pi}{4}\le\frac{9}{4}\pi$이므로

$\frac{x-\pi}{4}$의 값은 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$

$x=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{29}{3}\pi$

따라서 곡선과 직선이 만나는 점은

$\left(\frac{5}{3}\pi, 2\right)$, $\left(\frac{13}{3}\pi, 2\right)$, $\left(\frac{29}{3}\pi, 2\right)$이다.

함수 $y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$의 치역이 $\{y\mid-4\le y\le4\}$이고, 점 P와 직선 $y=2$ 사이의 거리를 h라 하면 삼각형 PAB의 넓이 S는

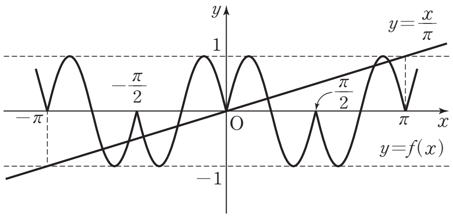
$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h$

$\overline{AB}$의 최댓값은 8π이고 $0<h\le6$이므로

S의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times8\pi\times6=24\pi$

$\therefore k=24$

56 답 ⑤



그림에서 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수는 8이다.

57 답 ④

$y=\tan x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, c\right)$를 지나므로 $c=\sqrt{3}$

$y=a\sin bx$의 주기가 π이므로 $b=2$

$y=a\sin 2x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$을 지나므로

$a\sin\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3}\qquad\therefore a=2$

$\therefore abc=4\sqrt{3}$

58 답 ③

함수 $f(x)=a\sin x+1$의 그래프는 함수 $y=a\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
조건 $a>0$에서
$y=a\sin x$가 최대일 때 $f(x)$는 최대이고,
$y=a\sin x$가 최소일 때 $f(x)$는 최소이므로
함수 $f(x)$는 $\sin x=1$일 때 최댓값 $M=a+1$,
$\sin x=-1$일 때 최솟값 $m=-a+1$을 가진다.
따라서 $M-m=(a+1)-(-a+1)=2a=6$이므로 $a=3$이다.

59 답 ①

$\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$$\begin{aligned}y&=a\cos^2 x+a\sin x+b\\&=a(1-\sin^2 x)+a\sin x+b\\&=a(1-t^2)+at+b\\&=-a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a+b\end{aligned}$$

(i) $a>0$인 경우

주어진 함수는 $t=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{5}{4}a+b$를 가지고
$t=-1$일 때, 최솟값 $-a+b$를 가진다.
즉, $\frac{5}{4}a+b=10$, $-a+b=1$에서
$a=4$, $b=5$

(ii) $a<0$인 경우

$t=\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 $\frac{5}{4}a+b$를 가지고
$t=-1$일 때, 최댓값 $-a+b$를 가진다.
즉, $\frac{5}{4}a+b=1$, $-a+b=10$에서
$a=-4$, $b=6$

(i), (ii)에 의하여 ab의 값은 20 또는 -24이다.
$\therefore p+q=-4$

60 답 ②

$\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{1-\sin^2 x}$에서

$1-\sin^2 x=\frac{1}{\tan^2 x+1}$

$\sin^2 x=1-\frac{1}{\tan^2 x+1}=\frac{\tan^2 x}{\tan^2 x+1}$

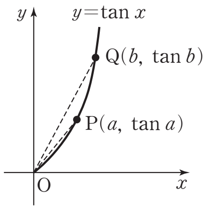
$\therefore f(\tan^2 x)=\sin^2 x=\frac{\tan^2 x}{\tan^2 x+1}$

따라서 $f(x)=\frac{x}{x+1}$이므로

$f(-\sin^2 x)=\frac{-\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x}=-\tan^2 x$

61 답 ②

그림과 같이 $0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $y=\tan x$는 아래로 볼록하고 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이다.



$0<a<b<\frac{\pi}{2}$인 곡선 위의 두 점
P(a, $\tan a$), Q(b, $\tan b$)에 대하여
($\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기)$<$($\overline{\mathrm{OQ}}$의 기울기)

($\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기)$=\frac{\tan a}{a}$, ($\overline{\mathrm{OQ}}$의 기울기)$=\frac{\tan b}{b}$이므로

$0<a<b<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\tan a}{a}<\frac{\tan b}{b}$

$0<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$에서

$\frac{\tan\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}<\frac{\tan\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}<\frac{\tan\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$이므로

$4\tan\frac{1}{4}<3\tan\frac{1}{3}<2\tan\frac{1}{2}$

$\therefore C<B<A$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

62 답 150

$\sin\theta+\cos\theta=t$라 하면 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\ge(\sin\theta+\cos\theta)^2$

(등호는 $\sin\theta=\cos\theta$일 때 성립)

에서 $2\ge t^2$

$\therefore -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

한편,

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

에서 $t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$이므로 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$

$\therefore f(\theta)=(\sin\theta-1)(\cos\theta-1)$

$=\sin\theta\cos\theta-(\sin\theta+\cos\theta)+1$

$=\dfrac{t^2-1}{2}-t+1$

$=\dfrac{1}{2}(t^2-2t+1)$

$=\dfrac{1}{2}(t-1)^2$ (단, $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$)

함수 $f(\theta)$는 $t=-\sqrt{2}$일 때,

최댓값 $\dfrac{1}{2}(-\sqrt{2}-1)^2=\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}$을 가진다.

따라서 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=1$이므로 $100ab=150$

63 답 ⑤

조건 (나)의 $\sin^2x+\sin^2y=\dfrac{1}{2}$에서

$1-\cos^2x+1-\cos^2y=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \cos^2x+\cos^2y=\dfrac{3}{2}$ ⋯ ㉠

조건 (다)의 $\cos x\cos y=\dfrac{3}{4}$에서

$\cos^2x\cos^2y=\dfrac{9}{16}$ ⋯ ㉡

$\cos^2x=a$, $\cos^2y=b$라 하면 ㉠, ㉡에서

$a+b=\dfrac{3}{2}$, $ab=\dfrac{9}{16}$

따라서 a, b는 t에 대한 이차방정식

$t^2-\dfrac{3}{2}t+\dfrac{9}{16}=\left(t-\dfrac{3}{4}\right)^2=0$의 두 근이다.

즉, $a=b=\dfrac{3}{4}$이므로 $\cos^2x=\cos^2y=\dfrac{3}{4}$

이때, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos x=\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad\therefore x=y=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore \tan(x+y)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

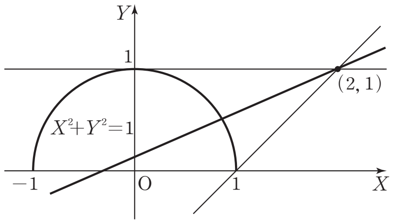
64 답 ②

$\cos x=X$, $\sin x=Y$라 하면

$-1\le X\le1$, $0\le Y\le1$이고 $\cos^2x+\sin^2x=1$이므로

$X^2+Y^2=1$ $(-1\le X\le1,\ 0\le Y\le1)$

이때, $\dfrac{Y-1}{X-2}$은 반원 위의 점 (X, Y)와 점 $(2, 1)$을 지나는 직선의 기울기이다.



따라서 직선의 기울기 $f(x)$의 최댓값은 두 점 $(2, 1)$, $(1, 0)$을 지나는 직선의 기울기인 1이다.

65 답 ③

$y=\sin^2\theta+2a\cos\theta-1=1-\cos^2\theta+2a\cos\theta-1$

$=-(\cos\theta-a)^2+a^2$

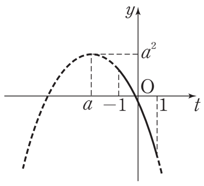
$\cos\theta=t$라 하면 $y=-(t-a)^2+a^2$ $(-1\le t\le1)$

(i) $a<-1$이면

$t=-1$일 때,

최댓값 $y=-2a-1=4$

$\therefore a=-\dfrac{5}{2}$

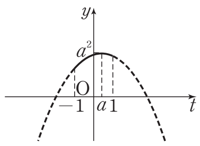


(ii) $-1\le a\le1$이면

$t=a$일 때,

최댓값 $y=a^2=4$

$\therefore a=\pm2$ (모순)

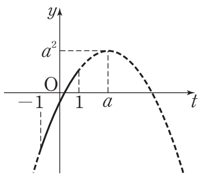


(iii) $a>1$이면

$t=1$일 때,

최댓값 $y=2a-1=4$

$\therefore a=\dfrac{5}{2}$



따라서 가능한 모든 실수 a의 값의 합은 $-\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}=0$이다.

01 답 ⑤

삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이므로

$A=180^\circ\times\dfrac{3}{3+2+1}=90^\circ$

$C=180^\circ\times\dfrac{1}{3+2+1}=30^\circ$

따라서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$에서

$\dfrac{a}{\sin 90^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}$, $a=2c$ $\quad\therefore \dfrac{a}{c}=2$

[다른 풀이]

$A:B:C=3:2:1$이므로 $A=3k$, $B=2k$, $C=k$라 하면 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이므로

$3k+2k+k=180^\circ$ $\quad\therefore k=30^\circ$

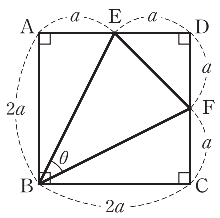
$\therefore A=90^\circ$, $B=60^\circ$, $C=30^\circ$

이때, 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$a:c=2R\sin A:2R\sin C=\sin 90^\circ:\sin 30^\circ=2:1$

$\therefore \dfrac{a}{c}=2$

02 답 ②



정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $2a$라 하면

$\overline{BE}=\overline{BF}=\sqrt{5}a$, $\overline{EF}=\sqrt{2}a$

삼각형 BFE에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{5a^2+5a^2-2a^2}{2\times\sqrt{5}a\times\sqrt{5}a}=\dfrac{4}{5}$

03 답 ②

코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=4^2+5^2-2\times4\times5\times\cos 60^\circ=21$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{21}$

또, 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ}=2R$ $\quad\therefore R=\sqrt{7}$

04 답 ②

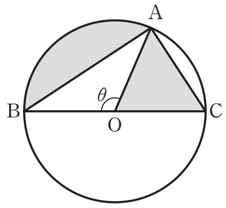
$A=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{30}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}$

$\therefore \overline{AB}=\dfrac{30\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=10\sqrt{6}$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $10\sqrt{6}$ m이다.

05 답 ①



삼각형 AOC의 넓이와 활꼴 AB의 넓이가 같고 두 삼각형 AOC, ABO의 넓이가 같으므로 삼각형 ABC의 넓이와 부채꼴 AOB의 넓이가 같다.

이때, 원 O의 반지름의 길이를 r라 하고

세 삼각형 ABC, ABO, AOC의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하면

$S_1=S_2+S_3=\dfrac{1}{2}r^2\sin\theta+\dfrac{1}{2}r^2\sin(\pi-\theta)$

$=\dfrac{1}{2}r^2\sin\theta+\dfrac{1}{2}r^2\sin\theta=r^2\sin\theta$

부채꼴 AOB의 넓이를 S_4라 하면 $S_4=\dfrac{1}{2}r^2\theta$이다.

즉, $S_1=S_4$에서 $r^2\sin\theta=\dfrac{1}{2}r^2\theta$

$\therefore \dfrac{\sin\theta}{\theta}=\dfrac{1}{2}$

06 답 ③

사각형 ABCD는 평행사변형이므로

$\square ABCD=2\times\triangle ABD=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times5\times8\times\sin 120^\circ\right)$

$=20\sqrt{3}$

07 답 ③

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\dfrac{3}{\sin 60^\circ}=2R$ ⋯ ㉠

이때, $\angle BAD=30^\circ$이고 두 삼각형 ABD와 ABC는 같은 원에 내접하므로

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin 30^\circ}=2R$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{3}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin 30^\circ}$, $\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\overline{BD}}{\frac{1}{2}}$

$\therefore \overline{BD}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

08 답 ③

$A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B):\sin(B+C):\sin(C+A)$

$=\sin(\pi-C):\sin(\pi-A):\sin(\pi-B)$

$=\sin C:\sin A:\sin B$

이고 사인법칙에 의하여

$\sin C:\sin A:\sin B=c:a:b=4:5:6$

이때, $a=5k$, $b=6k$, $c=4k$ (k는 양의 상수)라 하면

$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{6k+4k}{5k}=2$

09 답 20

사인법칙에 의하여

$\sin A : \sin B = \overline{BC} : \overline{AC} = 1 : 2$

이때, 양수 k에 대하여 $\overline{BC}=k$, $\overline{AC}=2k$라 하면 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$10^2=k^2+(2k)^2$, $5k^2=100$, $k^2=20$ $\quad \therefore k=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{BC}=2\sqrt{5}$, $\overline{AC}=4\sqrt{5}$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}=20$

10 답 ④

$\angle BDC=120°$이므로 $\angle DBC=30°$이다.

즉, 삼각형 BCD는 이등변삼각형이므로 $\overline{BD}=\overline{CD}=2$

이때, $\overline{AD}=x$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{7})^2=x^2+2^2-2\times x\times 2\times \cos 60°$

$x^2-2x-3=0$, $(x-3)(x+1)=0$ $\quad \therefore x=3$ ($\because x>0$)

따라서 선분 AD의 길이는 3이다.

11 답 ⑤

$\overline{BC}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$3^2=x^2+2^2-2\times x\times 2\times \cos 60°$

$x^2-2x-5=0$ $\quad \therefore x=1+\sqrt{6}$ ($\because x>0$)

$\therefore \overline{BC}=1+\sqrt{6}$

[다른 풀이]

$\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=2$, $\angle C=60°$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{2}{\sin B}=\frac{3}{\sin 60°}$에서 $\sin B=\frac{2}{3}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때, $\angle B$의 대변의 길이가 $\angle C$의 대변의 길이보다 짧으므로

$\angle B<60°$ $\quad \therefore \cos B=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{AB}\cos B+\overline{AC}\cos C$

$\quad =3\times\frac{\sqrt{6}}{3}+2\times\frac{1}{2}=\sqrt{6}+1$

12 답 ③

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle B+\angle D=180°$ $\quad \therefore \angle D=180°-\theta$

한편, 선분 AC는 두 삼각형 ABC, ACD의 공통인 변이므로

삼각형 ABC에서

$\overline{AC}^2=1^2+1^2-2\times 1\times 1\times \cos\theta=2-2\cos\theta$ ⋯ ㉠

삼각형 ACD에서

$\overline{AC}^2=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times \cos(180°-\theta)$

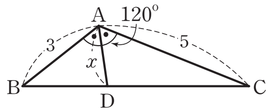
$\quad =13+12\cos\theta$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$2-2\cos\theta=13+12\cos\theta$, $14\cos\theta=-11$

$\therefore \cos\theta=-\frac{11}{14}$

13 답 ②



$\overline{AD}=x$라 하면 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$에서

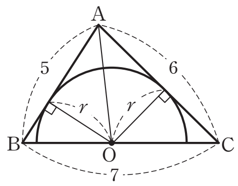
$\frac{1}{2}\times 3\times 5\times \sin 120°=\frac{1}{2}\times 3\times x\times \sin 60°+\frac{1}{2}\times 5\times x\times \sin 60°$

$\frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}x+\frac{5\sqrt{3}}{4}x$, $2\sqrt{3}x=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

$\therefore x=\frac{15}{8}$

14 답 ⑤

반원의 반지름의 길이를 r라 하면



$\triangle ABO=\frac{1}{2}\times 5\times r=\frac{5}{2}r$,

$\triangle AOC=\frac{1}{2}\times 6\times r=3r$이므로

$\triangle ABC=\triangle ABO+\triangle AOC$에서

$\triangle ABC=\frac{5}{2}r+3r=\frac{11}{2}r$

한편, 헤론의 공식에 의하여

$\triangle ABC=\sqrt{9\times 4\times 3\times 2}=6\sqrt{6}$

즉, $\frac{11}{2}r=6\sqrt{6}$에서 $r=\frac{12\sqrt{6}}{11}$

[다른 풀이]

코사인법칙에 의하여 $\cos A=\frac{5^2+6^2-7^2}{2\times 5\times 6}=\frac{1}{5}$

이때, $0<A<\pi$이므로

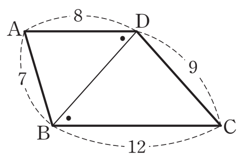
$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$\quad =\frac{1}{2}\times 5\times 6\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}$

(이하 동일)

15 답 ①



$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로 $\angle ADB=\angle DBC$(엇각)

이때, $\overline{BD}=x$, $\angle ADB=\angle DBC=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{8^2+x^2-7^2}{2\times 8\times x}=\frac{12^2+x^2-9^2}{2\times 12\times x}$ ⋯ ㉠에서

$\frac{x^2+15}{16x}=\frac{x^2+63}{24x}$, $x^2=81$

$\therefore x=9$

따라서 $\overline{BD}=9$, $\cos\theta=\frac{2}{3}$ ($\because$ ㉠)이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ($\because$ θ는 예각)

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이를 S라 하면

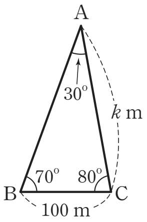
$S=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times8\times9\times\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{1}{2}\times12\times9\times\frac{\sqrt{5}}{3}=30\sqrt{5}$

16 답 188

$\angle A=180^\circ-(70^\circ+80^\circ)=30^\circ$이므로

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

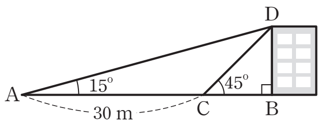


$\frac{100}{\sin 30^\circ}=\frac{k}{\sin 70^\circ}$

$\therefore k=\frac{100}{\sin 30^\circ}\times\sin 70^\circ$

$=\frac{100}{\frac{1}{2}}\times0.94=188$

17 답 ②



$\angle ACD=135^\circ$이고 $\angle ADC=45^\circ-15^\circ=30^\circ$이므로

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{30}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{AD}}{\sin 135^\circ}$ $\quad\therefore \overline{AD}=30\sqrt{2}$ (m)

이때, $\overline{BD}=x$ m라 하면 $\overline{CB}=\overline{BD}=x$ m이고 삼각형 ABD에서

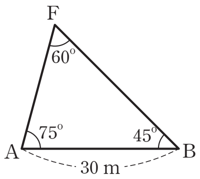
피타고라스 정리에 의하여

$(30+x)^2+x^2=(30\sqrt{2})^2$, $x^2+30x-450=0$

$\therefore x=-15+\sqrt{15^2+450}=15(\sqrt{3}-1)$

18 답 ②

삼각형 FAB에서 $\angle F=60^\circ$이므로



사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AF}}{\sin 45^\circ}=\frac{30}{\sin 60^\circ}$

$\therefore \overline{AF}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}\times30$

$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times30=10\sqrt{6}$ (m)

지면으로부터 꼭대기 F까지의 높이를 h m라 하면

$h=\overline{AF}\sin 60^\circ=10\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{2}$

19 답 ①

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

$a\sin A=b\sin B+c\sin C$에 대입하면

$\frac{a^2}{2R}=\frac{b^2}{2R}+\frac{c^2}{2R}$ $\quad\therefore a^2=b^2+c^2$

즉, 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이므로 삼각형 ABC의 외접원은 빗변을 지름으로 하는 원이다.

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{a}{2}$이다.

20 답 24

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2\times6=12$이므로

$\overline{BC}=12\sin A$, $\overline{CA}=12\sin B$, $\overline{AB}=12\sin C$

$\therefore \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=12(\sin A+\sin B+\sin C)=12\times2=24$

21 답 3

원주각의 성질에 의하여 한 호에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle ADB=\angle ACB=45^\circ$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AD}}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}$

$\therefore \overline{AD}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

[다른 풀이]

그림에서 선분 AC가 원 O의 지름이므로 $\angle ABC=90^\circ$

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{6}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AC}=\sqrt{6+6}=2\sqrt{3}$

따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AD}}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}$ $\quad\therefore \overline{AD}=2\sqrt{3}\times\sin 60^\circ=3$

22 답 2

두 삼각형 ABD, BCD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2

라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{DB}}{\sin A}=2R_1$, $\frac{\overline{DB}}{\sin C}=2R_2$

$\therefore \sin A:\sin C=\frac{\overline{DB}}{2R_1}:\frac{\overline{DB}}{2R_2}=\frac{1}{R_1}:\frac{1}{R_2}$

그런데 $R_1:R_2=1:2$이므로

$\sin A:\sin C=1:\frac{1}{2}=2:1$에서 $\sin A=2\sin C$

$\therefore \frac{\sin A}{\sin C}=2$

23 답 ③

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{2}{\sin 60^\circ}$

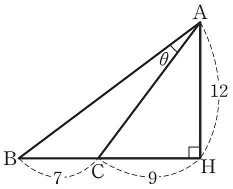
$\therefore \overline{BC}=\frac{2}{\sin 60^\circ}\times\sin A=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A$

이때, $0^\circ<A<120^\circ$에서 $0<\sin A\le1$이므로

$\overline{BC}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A\le\frac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 변 BC의 길이의 최댓값은 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다.

24 답 32



직각삼각형 ABH에서 $\overline{AB}=\sqrt{12^2+16^2}=20$

$\therefore \sin B=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

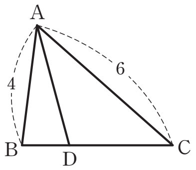
또, 직각삼각형 ACH에서 $\overline{AC}=\sqrt{9^2+12^2}=15$

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{15}{\sin B}=\frac{7}{\sin\theta}$에서 $\sin\theta=\frac{7}{15}\sin B=\frac{7}{15}\times\frac{3}{5}=\frac{7}{25}$

따라서 $a=25$, $b=7$이므로 $a+b=32$

25 답 ②



삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

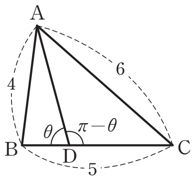
$\frac{6}{\sin B}=\frac{4}{\sin C}$ $\quad\therefore \frac{\sin C}{\sin B}=\frac{2}{3}$

이때, 두 삼각형 ABD, ADC의 외접원의 반지름의 길이가 각각 R_1, R_2이므로 사인법칙에 의하여

$R_1=\frac{\overline{AD}}{2\sin B}$, $R_2=\frac{\overline{AD}}{2\sin C}$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2}=\frac{\frac{\overline{AD}}{2\sin B}}{\frac{\overline{AD}}{2\sin C}}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{2}{3}$$

[다른 풀이]



그림과 같이 $\angle ADB=\theta$라 하면 $\angle ADC=\pi-\theta$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 R_1이므로 사인법칙에 의하여

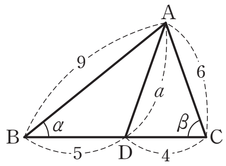
$2R_1=\frac{4}{\sin\theta}$ $\quad\therefore R_1=\frac{2}{\sin\theta}$

또, 삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이가 R_2이므로 사인법칙에 의하여

$2R_2=\frac{6}{\sin(\pi-\theta)}$ $\quad\therefore R_2=\frac{3}{\sin\theta}$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2}=\frac{\frac{2}{\sin\theta}}{\frac{3}{\sin\theta}}=\frac{2}{3}$$

26 답 ⑤



그림과 같이 $\angle ABD=\alpha$,

$\angle ACD=\beta$, $\overline{AD}=a$라 하면

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{5}{\sin(\angle DAB)}=\frac{a}{\sin\alpha}$

$\therefore \sin(\angle DAB)=\frac{5\sin\alpha}{a}$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{4}{\sin(\angle DAC)}=\frac{a}{\sin\beta}$ $\quad\therefore \sin(\angle DAC)=\frac{4\sin\beta}{a}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{6}{\sin\alpha}=\frac{9}{\sin\beta}$ $\quad\therefore \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{2}{3}$

$$\therefore \frac{\sin(\angle DAB)}{\sin(\angle DAC)}=\frac{\frac{5\sin\alpha}{a}}{\frac{4\sin\beta}{a}}=\frac{5}{4}\times\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$=\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

[다른 풀이]

$\overline{CD}=9-5=4$이므로

$\triangle ABD:\triangle ACD=\overline{BD}:\overline{CD}=5:4$에서 $\frac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\frac{5}{4}$ ⋯ ㉠

한편, 두 삼각형 ABD, ACD의 넓이는 각각

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin(\angle DAB)$

$=\frac{9}{2}\times\overline{AD}\times\sin(\angle DAB)$

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin(\angle DAC)$

$=3\times\overline{AD}\times\sin(\angle DAC)$

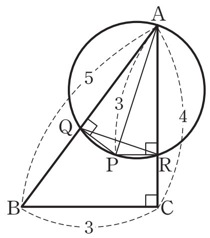
$$\therefore \frac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\frac{\frac{9}{2}\times\overline{AD}\times\sin(\angle DAB)}{3\times\overline{AD}\times\sin(\angle DAC)}$$

$$=\frac{3\times\sin(\angle DAB)}{2\times\sin(\angle DAC)}\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{3\times\sin(\angle DAB)}{2\times\sin(\angle DAC)}=\frac{5}{4}$

$$\therefore \frac{\sin(\angle DAB)}{\sin(\angle DAC)}=\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

27 답 ③



직각삼각형 ABC에서 $\sin A=\frac{3}{5}$

이때, $\overline{AQ}\perp\overline{PQ}$, $\overline{AR}\perp\overline{PR}$이므로 네 점 A, Q, P, R는 한 원 위의 점이고, 선분 AP는 삼각형 AQR의 외접원의 지름이다.

삼각형 AQR에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{QR}}}{\sin A}=\overline{\mathrm{AP}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{AP}}\sin A=3\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{5}$

28 답 36

$\angle\mathrm{ACD}=\alpha$라 하면 $\angle\mathrm{CAB}=90^\circ-\alpha$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}=2\times3\times\sin\alpha=6\sin\alpha$

또, 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}=2\times3\times\sin(90^\circ-\alpha)=6\cos\alpha$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=36\sin^2\alpha+36\cos^2\alpha=36$

29 답 ②

세 변의 길이가 a^2+a+1, a^2-1, $2a+1$이므로

$a^2+a+1>0$, $a^2-1>0$, $2a+1>0$이어야 한다.

이때, $a^2+a+1=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로 모든 실수 a에 대하여 양수이다.

또, $a^2-1>0$에서 $(a+1)(a-1)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>1$

$2a+1>0$에서 $2a>-1$ $\qquad\therefore\ a>-\dfrac{1}{2}$

따라서 a^2+a+1, a^2-1, $2a+1$이 변의 길이가 되기 위해서는 $a>1$이어야 한다.

한편, $(a^2+a+1)-(a^2-1)=a+2>0$에서

$a^2+a+1>a^2-1$이고

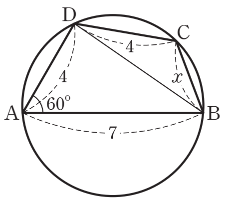
$(a^2+a+1)-(2a+1)=a^2-a>0$에서

$a^2+a+1>2a+1$이다.

즉, 가장 긴 변의 길이는 a^2+a+1이고, 삼각형에서 가장 긴 변의 대각이 세 내각의 크기 중 가장 큰 각이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(a^2-1)^2+(2a+1)^2-(a^2+a+1)^2}{2(a^2-1)(2a+1)}$$
$$=\frac{-(a^2-1)(2a+1)}{2(a^2-1)(2a+1)}=-\frac{1}{2}$$

30 답 3



사각형 ABCD가 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle\mathrm{C}=120^\circ$

이때, $\overline{\mathrm{BC}}=x$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=7^2+4^2-2\times7\times4\times\cos60^\circ=37$ ⋯ ㉠

또, 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=x^2+4^2-2\times x\times4\times\cos120^\circ=x^2+4x+16$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $x^2+4x+16=37$, $x^2+4x-21=0$

$(x-3)(x+7)=0$ $\qquad\therefore\ x=3\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=3$

31 답 ①

$\dfrac{\sin A}{2}=\dfrac{\sin B}{3}=\dfrac{\sin C}{4}$에서

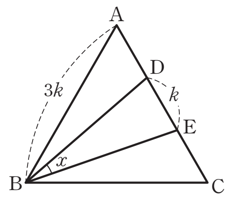
$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$이므로

사인법칙에 의하여 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$

즉, 양수 k에 대하여 $a=2k$, $b=3k$, $c=4k$라 하면

$\cos C=\dfrac{(2k)^2+(3k)^2-(4k)^2}{2\times2k\times3k}=\dfrac{-3k^2}{12k^2}=-\dfrac{1}{4}$

32 답 ⑤



정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $3k$라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{EC}}=k$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=(3k)^2+k^2-2\times3k\times k\times\cos60^\circ=7k^2$

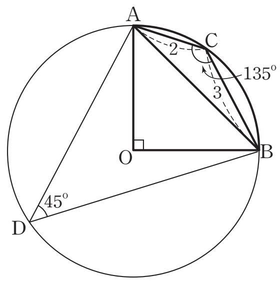
$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{7}k$

마찬가지로 $\overline{\mathrm{BE}}=\sqrt{7}k$

삼각형 DBE에서 코사인법칙에 의하여

$\cos x=\dfrac{(\sqrt{7}k)^2+(\sqrt{7}k)^2-k^2}{2\times\sqrt{7}k\times\sqrt{7}k}=\dfrac{13}{14}$

33 답 ①



그림과 같이 호 ACB 위에 있지 않은 임의의 점 D에 대하여 사각형 ADBC에서 호 AB에 대한 중심각의 크기가 $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$이므로 원주각 $\angle\mathrm{ADB}=45^\circ$이다.

또한, 사각형 ADBC는 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle\mathrm{ADB}+\angle\mathrm{ACB}=180^\circ$에서 $\angle\mathrm{ACB}=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos135^\circ=13+6\sqrt{2}$

[다른 풀이]

사분원의 반지름의 길이를 r라 하고

$\angle AOC=\theta$, $\angle COB=90^\circ-\theta$라 하자.

삼각형 AOC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{r^2+r^2-2^2}{2\times r\times r}=\dfrac{2r^2-4}{2r^2}$

또, 삼각형 COB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta=\dfrac{r^2+r^2-3^2}{2\times r\times r}$

$=\dfrac{2r^2-9}{2r^2}$

이때, $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로

$\left(\dfrac{2r^2-4}{2r^2}\right)^2+\left(\dfrac{2r^2-9}{2r^2}\right)^2=1$

$4r^4-52r^2+97=0$

$\therefore r^2=\dfrac{13+6\sqrt{2}}{2}\ \left(\because \dfrac{13}{2}<r^2<\dfrac{25}{2}\right)$

따라서 직각삼각형 AOB에서

$\overline{AB}^2=r^2+r^2=2r^2=13+6\sqrt{2}$

34 답 18

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\times6\times5}=\dfrac{3}{4}$ ⋯ ㉠

$\overline{AD}=x$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{6^2+3^2-x^2}{2\times6\times3}=\dfrac{45-x^2}{36}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{45-x^2}{36}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore x^2=18$

$\therefore \overline{AD}^2=18$

[다른 풀이]

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$이므로 선분 AD는 $\angle A$를 이등분한다.

이때, $\angle BAD=\angle CAD=\theta$, $\overline{AD}=x$라 하면

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{6^2+x^2-3^2}{2\times6\times x}=\dfrac{27+x^2}{12x}$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{4^2+x^2-2^2}{2\times4\times x}=\dfrac{12+x^2}{8x}$

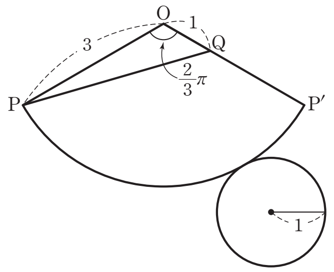
즉, $\dfrac{27+x^2}{12x}=\dfrac{12+x^2}{8x}$에서

$x^2=18$

$\therefore \overline{AD}^2=18$

35 답 ④

밑면이 반지름의 길이가 1인 원이므로 밑면의 둘레의 길이는 2π이다. 즉, 주어진 원뿔을 모선 OP로 자른 원뿔의 전개도는 그림과 같이 호 PP′의 길이가 2π, 반지름의 길이가 3인 부채꼴이다.



이때, $\angle POP'=\theta$라 하면 $3\theta=2\pi$에서 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

한편, 점 P에서 점 Q까지의 최단거리는 선분 PQ의 길이이므로 삼각형 POQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos\dfrac{2}{3}\pi=13\qquad \therefore \overline{PQ}=\sqrt{13}$

36 답 ③

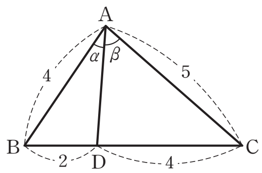
$\triangle OCB=\dfrac{1}{2}\times2^2\times\sin\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{1}{2}\times2^2\times\sin\dfrac{\pi}{4}=\triangle OCD$

$\therefore \square ABCD=3\triangle OCD-\triangle OCB$

$=2\triangle OCD=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times2^2\times\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$

37 답 ③

그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡으면



$\triangle ABD:\triangle ADC=2:4=1:2$

이므로

$\dfrac{1}{2}\times4\times\overline{AD}\times\sin\alpha:\dfrac{1}{2}\times5\times\overline{AD}\times\sin\beta=1:2$

$\therefore \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{8}{5}$

38 답 ④

$\angle DAB=\angle EAC=45^\circ$이므로 $\angle DAE=90^\circ+A$

$\therefore \triangle ADE=\dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\sin(90^\circ+A)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\overline{AC}}{\sqrt{2}}\times\cos A=\dfrac{15}{2}\cos A$ ⋯ ㉠

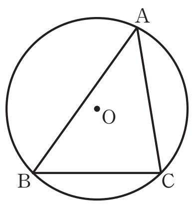
한편, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\times6\times5}=\dfrac{3}{4}$이므로 ㉠에 의하여

$\triangle ADE=\dfrac{15}{2}\cos A=\dfrac{45}{8}$

39 답 20

반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면



$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=1$ ⋯ ㉠

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times1=\boxed{2}$ (가)

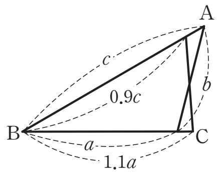
$\therefore \sin B=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$

㉠에 대입하면 $S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\frac{1}{2\overline{AC}}=1$

$\therefore \overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CA}=\boxed{4}$ (나)

따라서 $a=2$, $b=4$이므로 $a^2+b^2=2^2+4^2=20$

40 답 ②



처음 삼각형의 넓이는 100이므로 $\frac{1}{2}ac\sin B=100$

구하는 삼각형의 넓이를 S'이라 하면

$S'=\frac{1}{2}\times1.1a\times0.9c\times\sin B=0.99\times\frac{1}{2}ac\sin B$

$=0.99\times100=99$

41 답 ②

코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{9^2+10^2-11^2}{2\times9\times10}=\frac{1}{3}$

이때, $\sin^2 C+\cos^2 C=1$이고 $0<C<\pi$에서

$\sin C>0$이므로 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times9\times10\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=30\sqrt{2}$

[다른 풀이]

$s=\frac{1}{2}(9+10+11)=15$이므로 구하는 삼각형의 넓이는

헤론의 공식에 의하여

$\sqrt{15(15-9)(15-10)(15-11)}=30\sqrt{2}$

42 답 10

$\cos A=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\times7\times6}=\frac{5}{7}$이므로 $\sin A=\frac{2\sqrt{6}}{7}$이다.

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times7\times6\times\frac{2\sqrt{6}}{7}=6\sqrt{6}$

이때, $\overline{PF}=x$라 하면

$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$이므로

$6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\left(7x+5\times\frac{\sqrt{6}}{2}+6\times\sqrt{6}\right)\quad\therefore x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \triangle EFP=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{6}\times\sin(\pi-A)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{2\sqrt{6}}{7}=\frac{3\sqrt{6}}{7}$

따라서 $p=7$, $q=3$이므로 $p+q=10$

43 답 ④

$\triangle PQR=\triangle ABC-\triangle APR-\triangle BQP-\triangle CRQ$이므로

$\triangle ABC=S$라 하면

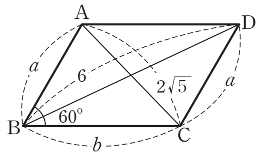
$\triangle APR=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}S=\frac{1}{10}S$

$\triangle BQP=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}S=\frac{3}{8}S$

$\triangle CRQ=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}S=\frac{1}{5}S$

$\therefore \triangle PQR=S-\frac{1}{10}S-\frac{3}{8}S-\frac{1}{5}S=\frac{13}{40}S=\frac{13}{40}\times40=13$

44 답 ③



삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$라 하면 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{5})^2=a^2+b^2-2ab\cos60^\circ$

$\therefore 20=a^2+b^2-ab\ \cdots$ ㉠

삼각형 BCD에서 $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=a$, $\angle BCD=120^\circ$이므로

코사인법칙에 의하여

$6^2=a^2+b^2-2ab\cos120^\circ$

$\therefore 36=a^2+b^2+ab\ \cdots$ ㉡

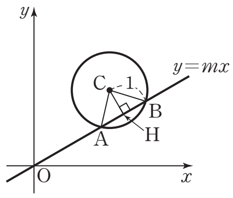
㉡$-$㉠을 하면 $2ab=16\quad\therefore ab=8$

따라서 평행사변형의 넓이를 S라 하면

$S=ab\sin60^\circ=4\sqrt{3}$

45 답 ②

원의 중심 (2, 2)를 C라 하고 점 C에서 원점을 지나고 기울기가 m인 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$에 내린 수선의 발을 H, 직선과 원이 만나는 두 점을 A, B라 하자.



이때, $\angle ACB=\theta$라 하면

원과 직선의 두 교점 A, B와

원의 중심 C를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형

CAB의 넓이는

$\triangle CAB=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$

한편, $0<\theta<\pi$에서 $0<\sin\theta\le1$이므로 삼각형 CAB의

넓이는 $\sin\theta=1$, 즉 $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{1}{2}$을 가진다.

넓이가 최댓값 $\frac{1}{2}$을 가질 때의 삼각형 CAB는

직각이등변삼각형이므로 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이고

$\triangle CAB=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}$에서

$\overline{CH}=\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

따라서 원의 중심 C와 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, 삼각형 CAB의 넓이는 최대이다.

$\frac{|2m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 $7m^2-16m+7=0$

한편, m_1, m_2는 방정식 $7m^2-16m+7=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $m_1+m_2=\frac{16}{7}$

46 답 ②

헤론의 공식에서 $s=\frac{5+6+7}{2}=9$이므로

$\triangle ABC=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}$

한편, 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이 r에 대하여

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times(5+6+7)\times r=9r$이므로

$9r=6\sqrt{6}$ $\quad\therefore r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

[다른 풀이]

코사인법칙에 의하여 $\cos C=\frac{6^2+7^2-5^2}{2\times6\times7}=\frac{5}{7}$

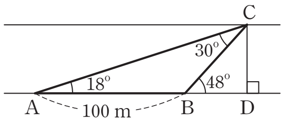
이때, $0<C<\pi$에서 $0<\sin C\le1$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\frac{25}{49}}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times7\times\frac{2\sqrt{6}}{7}=6\sqrt{6}$

(이하 동일)

47 답 ②



그림과 같이 나무의 위치를 C라 하고 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 D라 하면 $\angle ACB=\angle CBD-\angle CAB=30^\circ$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin 18^\circ}=\frac{100}{\sin 30^\circ}$ $\quad\therefore \overline{BC}=\frac{100}{\sin 30^\circ}\times\sin 18^\circ=200\sin 18^\circ$

$\therefore \overline{CD}=\overline{BC}\sin 48^\circ=200\times\sin 18^\circ\times\sin 48^\circ=44.4(\text{m})$

48 답 ④

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=40^2+50^2-2\times40\times50\times\cos 60^\circ=2100$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{2100}\,(\text{m})$

한편, 호수의 반지름의 길이를 R m라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{2100}}{\sin 60^\circ}=2R$에서 $R=\frac{\sqrt{2100}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{2100}{3}}=\sqrt{700}$

따라서 호수의 넓이는 $\pi R^2=700\pi(\text{m}^2)$

49 답 200 m

$\overline{CD}=x(\text{m})$라 하면 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}=\frac{x}{\sin 30^\circ}$ $\quad\therefore \overline{AC}=\sqrt{3}x$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}=\frac{x}{\sin 45^\circ}$ $\quad\therefore \overline{BC}=x$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{3}x)^2=200^2+x^2-2\times200\times x\times\cos 120^\circ$

$x^2-100x-20000=0$

$(x-200)(x+100)=0$ $\quad\therefore x=200\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{CD}=200$ m

50 답 ⑤

$\overline{PQ}=x(\text{m})$라 하면 직각삼각형 APQ에서

$\frac{x}{\overline{AQ}}=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad\therefore \overline{AQ}=\sqrt{3}x$

마찬가지로 직각삼각형 CPQ에서

$\frac{x}{\overline{CQ}}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ $\quad\therefore \overline{CQ}=\frac{1}{\sqrt{3}}x$

또, 직각삼각형 BPQ에서 $\angle PBQ=45^\circ$이므로 $\overline{BQ}=x$

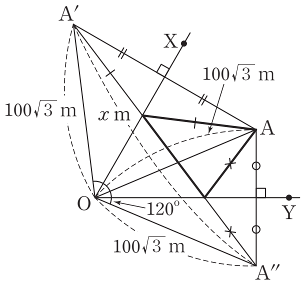
따라서 삼각형 ACQ에서 중선정리에 의하여

$(\sqrt{3}x)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2=2(x^2+500^2)$

$x^2=375000$ $\quad\therefore x=250\sqrt{6}\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{PQ}=250\sqrt{6}$ m

51 답 300



그림과 같이 두 해안도로를 직선 OX, OY라 하고 배의 위치를 A라 하자.

이때, 점 A를 두 직선 OX, OY에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A′, A″이라 하면 구하는 최단거리는 두 점 A′, A″ 사이의 거리이다.

따라서 삼각형 OA″A′에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=(100\sqrt{3})^2+(100\sqrt{3})^2-2\times100\sqrt{3}\times100\sqrt{3}\times\cos 120^\circ$

$\quad=100^2\{3+3-(-3)\}$

$\therefore x=300$

일등급 UP

* $\angle A'OA''=120^\circ$인 이유

$\angle AOX=\angle a$, $\angle AOY=\angle b$라 하면 $\angle a+\angle b=60^\circ$
이때, 두 삼각형 $A'OA$, AOA''은 이등변삼각형이므로
$\angle A'OX=\angle XOA$, $\angle AOY=\angle YOA''$
즉, $\angle A'OA=2\angle a$, $\angle AOA''=2\angle b$이므로
$\angle A'OA''=2\angle a+2\angle b=2\times 60^\circ=120^\circ$

52 답 2

$\overline{BD}=x$, $\overline{BE}=y$라 하면 $\triangle ABC=2\triangle DBE$이므로

$\frac{1}{2}\times 2\times 3\sin B=2\times\frac{1}{2}xy\sin B$ $\quad\therefore xy=3$ ---------- ⓐ

한편, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{3^2+2^2-3^2}{2\times 3\times 2}=\frac{1}{3}$

삼각형 DBE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DE}^2=x^2+y^2-2xy\cos B=x^2+y^2-\frac{2}{3}xy$ ---------- ⓑ

이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

즉, $\overline{DE}^2\geq 2xy-\frac{2}{3}xy=\frac{4}{3}xy=4$이므로 $\overline{DE}\geq 2$

따라서 선분 DE의 길이의 최솟값은 2이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $\overline{BD}=x$, $\overline{BE}=y$라 하고 x, y 사이의 관계식을 구한다. [20%]
ⓑ 선분 DE의 길이를 x, y에 대한 식으로 나타낸다. [40%]
ⓒ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 선분 DE의 길이의 최솟값을 구한다. [40%]

53 답 13

한 원에서 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 같고, 현의 길이도 같으므로

$\overline{BC}=\overline{CD}$, $\angle BAC=\angle CAD=30^\circ$ ---------- ⓐ

이때, $\overline{BC}=\overline{CD}=x$, $\overline{AC}=y$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=(8\sqrt{3})^2+y^2-2\times 8\sqrt{3}\times y\times\cos 30^\circ$ ⋯ ㉠

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=(5\sqrt{3})^2+y^2-2\times 5\sqrt{3}\times y\times\cos 30^\circ$ ⋯ ㉡ ---------- ⓑ

㉠−㉡을 하면

$(8\sqrt{3})^2-(5\sqrt{3})^2-2\times 3\sqrt{3}\times y\times\cos 30^\circ=0$에서

$117-9y=0$ $\quad\therefore y=13$

따라서 선분 AC의 길이는 13이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $\overline{BC}=\overline{CD}$, $\angle BAC=\angle CAD$임을 설명한다. [20%]
ⓑ $\overline{BC}=\overline{CD}=x$, $\overline{AC}=y$라 하고 두 삼각형 ABC, ACD에서 코사인법칙을 이용한다. [40%]
ⓒ ⓑ에서 구한 두 식을 연립하여 선분 AC의 길이를 구한다. [40%]

54 답 607

$\overline{BD}:\overline{DC}=3:4$이므로 선분 AD는 $\angle A$의 이등분선이다. ---------- ⓐ

이때, 삼각형 ABC의 넓이는 두 삼각형 ABD, ADC의 넓이의 합과 같으므로 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$에서

$\frac{1}{2}\times 150\times 200\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 150\times\overline{AD}\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times 200\times\overline{AD}\times\sin 60^\circ$

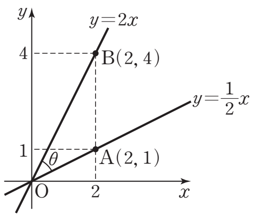
$\therefore \overline{AD}=\frac{600}{7}$(m) ---------- ⓑ

따라서 $a=7$, $b=600$이므로 $a+b=607$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 선분 AD가 $\angle A$의 이등분선임을 안다. [30%]
ⓑ 삼각형 ABC의 넓이가 두 삼각형 ABD, ADC의 넓이의 합임을 이용하여 선분 AD의 길이를 구한다. [50%]
ⓒ $a+b$의 값을 구한다. [20%]

55 답 ①



그림에서 두 점 A, B의 좌표가 (2, 1), (2, 4)이므로

$\overline{OA}=\sqrt{5}$, $\overline{OB}=2\sqrt{5}$, $\overline{AB}=3$

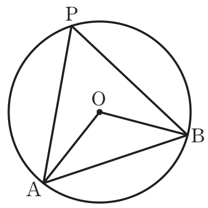
따라서 삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2-3^2}{2\times\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$

56 답 ②

넓이가 100π이므로 반지름의 길이는 10이다.

또한, 호 AB의 길이는 지름의 길이와 같으므로 호 AB의 중심각의 크기는 $\theta=2$(라디안)이다.



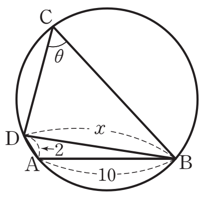
이때, 그림과 같이 원 위의 점 중 호 AB 위의 점이 아닌 점 P에 대하여 호 AB의 원주각의 크기는

$\angle APB=\theta\times\frac{1}{2}=1$(라디안)이므로

삼각형 APB에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle APB)}=2\times 10$ $\quad\therefore \overline{AB}=20\sin 1$

57 답 50



사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle BCD=\theta$ $(0<\theta<\pi)$

라 하면 $\angle BAD=\pi-\theta$

이때, $\overline{BD}=x$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=2^2+10^2-2\times 2\times 10\times\cos(\pi-\theta)$

$=104+40\cos\theta=104+40\times\frac{3}{5}=128$

따라서 $x=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=8\sqrt{2}$

한편, $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\dfrac{4}{5}$이므로

삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에

의하여 $\dfrac{8\sqrt{2}}{\sin\theta}=2R$에서 $R=5\sqrt{2}$

따라서 사각형 ABCD의 외접원의 넓이는 $\pi\times(5\sqrt{2})^2=50\pi$

$\therefore a=50$

58 답 ④

$\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$, $\overline{\mathrm{AB}}=c$라 하고 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times a\times\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{2}\times b\times\overline{\mathrm{BE}}=\dfrac{1}{2}\times c\times\overline{\mathrm{CF}}$에서

$a=\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{AD}}}$, $b=\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{BE}}}$, $c=\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{CF}}}$

$$\begin{aligned}\therefore a:b:c&=\frac{2S}{\overline{\mathrm{AD}}}:\frac{2S}{\overline{\mathrm{BE}}}:\frac{2S}{\overline{\mathrm{CF}}}=\frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}:\frac{1}{\overline{\mathrm{BE}}}:\frac{1}{\overline{\mathrm{CF}}}\\&=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=6:4:3\end{aligned}$$

이때, 양수 k에 대하여 $a=6k$, $b=4k$, $c=3k$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(6k)^2+(4k)^2-(3k)^2}{2\times6k\times4k}=\frac{43}{48}$$

59 답 ②

사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=\pi$

이때, $\angle\mathrm{BAD}=\theta$라 하면 삼각형 BAD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=1^2+6^2-2\times1\times6\times\cos\theta=37-12\cos\theta$

또, 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

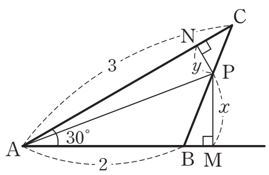
$\overline{\mathrm{BD}}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos(\pi-\theta)=25+24\cos\theta$

즉, $37-12\cos\theta=25+24\cos\theta$이므로 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\square\mathrm{ABCD}&=\triangle\mathrm{BAD}+\triangle\mathrm{BCD}\\&=\frac{1}{2}\times1\times6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=6\sqrt{2}\end{aligned}$$

60 답 28



$\overline{\mathrm{PM}}=x$, $\overline{\mathrm{PN}}=y$라 하면

$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{APC}$에서

$\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}\times2\times x+\dfrac{1}{2}\times3\times y$

$\therefore 2x+3y=3$

한편, $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{PM}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{PN}}}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}$에서

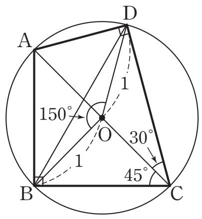
$$\begin{aligned}3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)&=(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=13+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}\\&\ge13+2\sqrt{\frac{6x}{y}\times\frac{6y}{x}}=25\end{aligned}$$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

즉, $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}\ge\dfrac{25}{3}$이므로 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}$의 최솟값은 $\dfrac{25}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=25$이므로 $p+q=28$

61 답 ④



$B+D=180^\circ$이므로 사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이다. 이때, 이 원의 중심을 O라 하면 지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AC}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OD}}=1$이다.

한편, $\angle\mathrm{BCD}=75^\circ$이고

(중심각)$=2\times$(원주각)이므로 $\angle\mathrm{BOD}=150^\circ$

따라서 삼각형 OBD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos150^\circ=2+\sqrt{3}$

$\therefore k^2=\overline{\mathrm{BD}}^2=2+\sqrt{3}$

62 답 ⑤

$\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{AC}}=b$라 하면

직각삼각형 ABD에서 $\overline{\mathrm{AD}}=c\cos60^\circ=\dfrac{c}{2}$이고,

직각삼각형 AEC에서 $\overline{\mathrm{AE}}=b\cos60^\circ=\dfrac{b}{2}$이다.

또, $\angle\mathrm{A}$는 공통이므로 두 삼각형 ABC, ADE는 닮음비가 2 : 1인 닮은 삼각형이다.

$\therefore \overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}=2$

한편, 사각형 AEHD에서 $\angle\mathrm{AEH}=\angle\mathrm{ADH}=90^\circ$이므로

선분 AH는 사각형 AEHD에 외접하는 원의 지름이다.

또, 이 원은 삼각형 ADE의 외접원이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin60^\circ}=\overline{\mathrm{AH}}$ $\qquad\therefore \overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{2}{\sin60^\circ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

63 답 133

$\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$라 하면

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

이때,

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{AA'B'}&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AA'}}\times\overline{\mathrm{AB'}}\times\sin(\pi-A)\\&=\frac{1}{2}\times0.1b\times1.1c\times\sin A\\&=\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)\times0.1\times1.1=0.11\times\triangle\mathrm{ABC}\end{aligned}$$

마찬가지 방법으로

$\triangle BB'C'=\triangle CC'A'=0.11\times\triangle ABC$이므로

$\triangle A'B'C'=\triangle ABC+0.11\times\triangle ABC\times3=1.33\times\triangle ABC$

따라서 $\dfrac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=1.33$이므로 $k=1.33$

$\therefore$ $100k=133$

64 답 ⑤

ㄱ. $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$이므로

$\dfrac{1}{2}xy\sin120^\circ=\dfrac{1}{2}xz\sin60^\circ+\dfrac{1}{2}yz\sin60^\circ$에서

$xy=xz+yz$

양변을 xyz로 나누면 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ $\cdots$ ㉠ (참)

ㄴ. $xy=1$일 때, ㉠과 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq2\sqrt{\dfrac{1}{xy}}=2$

$\therefore$ $z\leq\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄷ. $xy=1$일 때, 삼각형 ABC에서 코사인법칙과 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

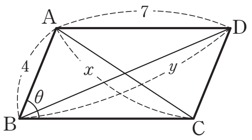
$\overline{BC}^2=x^2+y^2-2xy\cos120^\circ$

$\geq2\sqrt{x^2y^2}+xy=3xy=3$

$\therefore$ $\overline{BC}\geq\sqrt{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

65 답 16



그림과 같이 $\overline{AC}=x$, $\overline{BD}=y$, $\angle ABC=\theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=4^2+7^2-2\times4\times7\cos\theta=65-56\cos\theta$ $\cdots$ ㉠

또, 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$y^2=4^2+7^2-2\times4\times7\cos(\pi-\theta)=65+56\cos\theta$ $\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $x^2+y^2=130$ $\cdots$ ㉢

한편, ㉢을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(3, 11)$, $(11, 3)$, $(7, 9)$, $(9, 7)$이다.

그런데 $(3, 11)$, $(11, 3)$은 삼각형의 성립 조건을 만족시키지 않으므로 $x=7$, $y=9$ 또는 $x=9$, $y=7$이다.

$\therefore$ $x+y=16$

Ⅲ 수열

07 등차수열과 등비수열

문제편 86P

01 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{10}=a+9d=70$ $\cdots$ ㉠

$a_{20}=a+19d=40$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=97$, $d=-3$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=97-3(n-1)=-3n+100$이므로

$a_m=-3m+100<0$에서

$m>\dfrac{100}{3}=33.\times\times\times$

따라서 자연수 m의 최솟값은 34이다.

02 답 ②

세 수 a, b, $2b-1$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+2b-1$

$\therefore$ $a=1$

세 수 b, $2b-1$, $4a+3$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(2b-1)=b+4a+3$

$\therefore$ $b=3$

따라서 이 수열의 공차는 $b-a=2$

03 답 ③

10은 첫째항이 -4, 공차가 $\dfrac{2}{3}$인 등차수열의 제 $(n+2)$항이므로

$-4+(n+1)\times\dfrac{2}{3}=10$에서

$n=20$

$-4+a_1+a_2+\cdots+a_{20}+10=\dfrac{22\times(-4+10)}{2}=66$

$\therefore$ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=66-(-4+10)=60$

04 답 ③

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2-n)-\{3(n-1)^2-(n-1)\}$

$=6n-4$

$\therefore$ $a_3+a_7+a_{11}=14+38+62=114$

[다른 풀이]

$a_3+a_7+a_{11}=3a_7=3(S_7-S_6)$

$=3\times\{3(7^2-6^2)-(7-6)\}=114$

05 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 $\sqrt{2}$이므로 $a_{n+1}=\sqrt{2}\,a_n$

따라서 $a_2=\sqrt{2}\,a_1$, $a_4=\sqrt{2}\,a_3$, $a_6=\sqrt{2}\,a_5$, $a_8=\sqrt{2}\,a_7$이므로

$a_2+a_4+a_6+a_8=\sqrt{2}(a_1+a_3+a_5+a_7)=4\sqrt{2}$

[다른 풀이]

공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열의 첫째항을 a라 하면

$a_1+a_3+a_5+a_7=4$에서

$a+a(\sqrt{2})^2+a(\sqrt{2})^4+a(\sqrt{2})^6=4$

$15a=4 \qquad \therefore a=\dfrac{4}{15}$

$\therefore a_2+a_4+a_6+a_8$

$=a(\sqrt{2})+a(\sqrt{2})^3+a(\sqrt{2})^5+a(\sqrt{2})^7$

$=15\sqrt{2}a=15\sqrt{2}\times\dfrac{4}{15}=4\sqrt{2}$

06 답 8

세 수 a, $2a$, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$4a=a+b \qquad \therefore b=3a \cdots$ ㉠

세 수 $2a$, b, $b+3$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=2a(b+3)$에서 ㉠에 의하여

$9a^2=2a(3a+3)$, $3a(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

따라서 ㉠에서 $b=6$이므로 $a+b=8$

07 답 ①

주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

(i) $r=1$인 경우

$S_5=5a=1$, $S_{10}=10a=3$이 되어 모순이다.

(ii) $r\neq1$인 경우

$S_5=\dfrac{a(1-r^5)}{1-r}=1$이므로

$S_{10}=\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}=\dfrac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r}$

$=\dfrac{a(1-r^5)}{1-r}\times(1+r^5)=1\times(1+r^5)=1+r^5=3$

$\therefore r^5=2$

$\therefore S_{15}=\dfrac{a(1-r^{15})}{1-r}=\dfrac{a(1-r^5)(1+r^5+r^{10})}{1-r}$

$=\dfrac{a(1-r^5)}{1-r}\times(1+r^5+r^{10})$

$=1\times(1+r^5+r^{10})=1+2+2^2=7$

[다른 풀이]

$a_1+a_2+\cdots+a_5=1$

$a_6+a_7+\cdots+a_{10}=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})-(a_1+a_2+\cdots+a_5)$

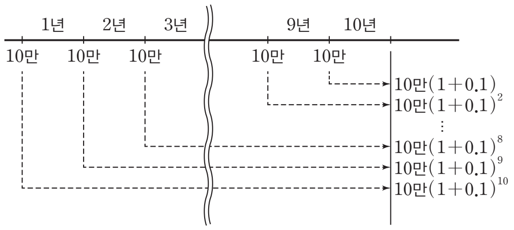
$=3-1=2$

이때, 등비수열의 부분합도 등비수열이므로

$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{15}=4$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{15}=1+2+4=7$

08 답 ③



$a=100000$이라 하면 10년 후의 적립총액은

$a(1+0.1)+a(1+0.1)^2+\cdots+a(1+0.1)^{10}$

$=a\times1.1+a\times1.1^2+\cdots+a\times1.1^{10}$

$=\dfrac{1.1a(1.1^{10}-1)}{1.1-1}=\dfrac{1.1a(2.6-1)}{0.1}$

$=17.6a=1760000$

09 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_2+a_3=18$에서

$a+(a+d)+(a+2d)=18 \qquad \therefore a+d=6 \cdots$ ㉠

$a_3+a_4+a_5=30$에서

$(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=30 \qquad \therefore a+3d=10 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=2$

따라서 $a_n=4+(n-1)\times2=2n+2$이므로

$a_{k-1}+a_k+a_{k+1}=198$에서

$\{2(k-1)+2\}+(2k+2)+\{2(k+1)+2\}=198$

$6k+6=198$, $6k=192 \qquad \therefore k=32$

[다른 풀이]

$a_1+a_2+a_3=3a_2$이므로 $a_1+a_2+a_3=18$에서

$a_2=6 \cdots$ ㉢

$a_3+a_4+a_5=3a_4$이므로 $a_3+a_4+a_5=30$에서

$a_4=10 \cdots$ ㉣

㉢, ㉣에 의하여 두 점 $(2, 6)$, $(4, 10)$을 지나는 직선을 생각하면

$a_n=\dfrac{10-6}{4-2}(n-2)+6=2n+2$

(이하 동일)

10 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_5+a_9+a_{13}=24$에서

$a+(a+4d)+(a+8d)+(a+12d)=24$

$4a+24d=24$, $a+6d=6$

$\therefore a_7=a+6d=6$

[다른 풀이]

a_7은 a_1과 a_{13}의 등차중항이면서 a_5와 a_9의 등차중항이므로

$a_1+a_{13}=a_5+a_9=2a_7$

따라서 $a_1+a_5+a_9+a_{13}=24$에서 $4a_7=24 \qquad \therefore a_7=6$

11 답 ①

공차를 d라 하면 $\sqrt{3}=\sqrt{2}+3d$

$\therefore d=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$ ⋯ ㉠

따라서 $a=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$이고

$b=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}$이므로

$$b^2-a^2=\left(\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)^2$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{9}$$
$$=\frac{(14+4\sqrt{6})-(11+4\sqrt{6})}{9}=\frac{1}{3}$$

[다른풀이]

네 실수 $\sqrt{2}$, a, b, $\sqrt{3}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a+b=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

㉠에 의하여 이 등차수열의 공차가 $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$이므로

$b-a=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$

$\therefore b^2-a^2=(b+a)(b-a)=(\sqrt{3}+\sqrt{2})\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$

12 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_3+\cdots+a_{2m+1}=\dfrac{(m+1)\{2a+(m+1-1)\times 2d\}}{2}=100$

$\therefore \dfrac{(m+1)(2a+2md)}{2}=100$ ⋯ ㉠

$a_2+a_4+\cdots+a_{2m}=\dfrac{m\{2(a+d)+(m-1)2d\}}{2}=80$

$\therefore \dfrac{m(2a+2md)}{2}=80$ ⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{m+1}{m}=\dfrac{5}{4}$, $4m+4=5m$ $\quad\therefore m=4$

$m=4$를 ㉡에 대입하면 $a+4d=20$

$\therefore a_5=a+4d=20$

[다른 풀이]

$a_1+a_{2m+1}=a_3+a_{2m-1}=\cdots=2a_{m+1}$이므로

$a_1+a_3+\cdots+a_{2m+1}=100$에서 $(m+1)a_{m+1}=100$ ⋯ ㉢

또, $a_2+a_{2m}=a_4+a_{2m-2}=\cdots=2a_{m+1}$이므로

$a_2+a_4+\cdots+a_{2m}=80$에서 $ma_{m+1}=80$ ⋯ ㉣

㉢−㉣을 하면 $a_{m+1}=20$

이것을 ㉣에 대입하면 $m=4$

즉, $a_2+a_4+\cdots+a_{2m}=80$에서 $a_2+a_4+a_6+a_8=80$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$(a+d)+(a+3d)+(a+5d)+(a+7d)=80$

$4a+16d=80$ $\quad\therefore a+4d=20$

$\therefore a_5=a+4d=20$

13 답 5

공차를 d라 하면 $a_1=15$이고 첫째항부터 제 n항까지의 합이 60이므로 $\dfrac{n\{30+(n-1)d\}}{2}=60$에서

$n\{30+(n-1)d\}=120$ ⋯ ㉠

이때, n과 d가 모두 자연수이므로 n은 120의 약수이다.

한편, $30+(n-1)d\geq 30$이므로 ㉠에서 $n\leq 4$

따라서 가능한 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, $S_1=a_1=15$이므로 성립하지 않는다.

(ⅱ) $n=2$일 때, $30+(2-1)d=60$에서 $d=30$이므로 성립한다.

(ⅲ) $n=3$일 때, $30+(3-1)d=40$에서 $d=5$이므로 성립한다.

(ⅳ) $n=4$일 때, $30+(4-1)d=30$에서 $d=0$, 즉 d가 자연수가 아니므로 성립하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 모든 n의 값의 합은 $2+3=5$이다.

14 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S=\dfrac{6\{2a+(6-1)d\}}{2}=6a+15d$ ⋯ ㉠

$S'=\dfrac{6\{2(a+6d)+(6-1)d\}}{2}=6a+51d$ ⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면 $S'-S=36d$

이때, S가 S'보다 12만큼 크므로 $S=S'+12$에서

$S'-S=-12$

즉, $36d=-12$이므로 $d=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore a_2-a_1=(a+d)-a=d=-\dfrac{1}{3}$

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_2-a_1=d$이고

$S'-S=(a_7-a_1)+(a_8-a_2)+\cdots+(a_{12}-a_6)$
$\quad=6\times 6d=36d=-12$

따라서 $d=-\dfrac{1}{3}$이므로 $a_2-a_1=d=-\dfrac{1}{3}$

15 답 ③

삼각형 ABC는 지름을 한 변으로 하고, 원에 내접하는 삼각형이므로 $\angle$B가 직각인 직각삼각형이다.

이때, $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$ $(0<b<a<20)$라 하면

피타고라스 정리에 의하여 $a^2+b^2=20^2$ ⋯ ㉠이고

b, a, 20이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=b+20$ $\quad\therefore b=2a-20$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2+(2a-20)^2=20^2$에서

$5a^2-80a=0$, $5a(a-16)=0$ $\quad\therefore a=16$ ($\because a>0$)

따라서 ㉡에 의하여 $b=12$이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\times 16\times 12=96$

일등급 UP

＊세 변의 길이가 등차수열을 이루는 직각삼각형

직각삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c $(a<b<c)$라 하면 c는 빗변의 길이이므로 $c^2=a^2+b^2$
a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 공차를 d $(d>0)$라 하면
$b=a+d$, $c=a+2d$
이것을 $c^2=a^2+b^2$에 대입하면
$(a+2d)^2=a^2+(a+d)^2$에서 $(a+d)(a-3d)=0$
$\therefore a=3d$ $(\because a>0, d>0)$
즉, 직각삼각형의 세 변의 길이는 $3d$, $4d$, $5d$이므로 직각삼각형의 세 변의 길이가 등차수열을 이루면 세 변의 길이의 비는
$3d:4d:5d=3:4:5$이다.

16 답 ①

a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2b=a+c$ $\quad \therefore c=2b-a$ ⋯ ㉠
또, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ $\quad \therefore \frac{2}{c}=\frac{a+b}{ab}$ ⋯ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{2}{2b-a}=\frac{a+b}{ab}$에서
$a^2+ab-2b^2=0$, $(a-b)(a+2b)=0$
$\therefore a=-2b$ $(\because a\neq b)$, $c=4b$ $(\because$ ㉠$)$

$$\therefore \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=\frac{b}{-2b}+\frac{4b}{b}+\frac{-2b}{4b}$$
$$=-\frac{1}{2}+4-\frac{1}{2}=3$$

17 답 2220

자연수 n에 대하여 1부터 1000까지의 자연수를 작은 수부터 순서대로 나열한 수열에서 짝수 번째 항을 지우고 남은 수는 $(2n-1)$ 꼴이다.
다시 남은 수 중 홀수 번째 항을 지우고 남은 수는
$2(2n)-1=4n-1$ 꼴이다.
즉, 1회의 시행 후 남은 수는 $(4n-1)$ 꼴이다.
같은 방법으로
2회 시행 후 남은 수는 $4(4n-1)-1=(16n-5)$ 꼴,
3회 시행 후 남은 수는 $4(16n-5)-1=(64n-21)$ 꼴,
4회 시행 후 남은 수는 $4(64n-21)-1=(256n-85)$ 꼴이다.
따라서 4회 시행 후 남은 수는 첫째항이 171이고 공차가 256인 등차수열이다.
이때, 4회 시행 후 남은 수 중 가장 큰 수는 1000 이하의 수이므로
$256n-85\leq 1000$에서
$n\leq \frac{1085}{256}=4.\times\times\times$
따라서 남은 항의 개수는 4개이므로 구하는 합은
$$\frac{4\{2\times 171+(4-1)\times 256\}}{2}=2220$$

18 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_1=a$, $a_3=a+2d$, $a_7=a+6d$
이 순서대로 등비수열을 이루므로 $\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_7}{a_3}$에서
$\frac{a+2d}{a}=\frac{a+6d}{a+2d}$, $(a+2d)^2=a(a+6d)$
$a^2+4ad+4d^2=a^2+6ad$, $4d^2=2ad$
$\therefore a=2d$ $(\because d>0)$
즉, $a_1=2d$, $a_3=4d$, $a_7=8d$이므로 새롭게 만든 등비수열의 공비는 2이다.
따라서 이 등비수열의 제 10항은 $a_1\times 2^9=2^{10}d=1024d$이고,
$1024d=a+(n-1)d=(n+1)d$에서 $n=1023$이므로
구하는 제 10항은 a_{1023}이다.

19 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$에서 공비를 r라 하면
$a_{10}=a_1\times r^9=10$이고 $\frac{a_5}{a_2}=\frac{a_7}{a_4}=\frac{a_9}{a_6}=r^3$이므로
$$\frac{a_1\times a_5\times a_7\times a_9}{a_2\times a_4\times a_6}=a_1\times\frac{a_5}{a_2}\times\frac{a_7}{a_4}\times\frac{a_9}{a_6}$$
$$=a_1\times r^3r^3r^3=a_1r^9=10$$

[다른풀이]
$$\frac{a_1\times a_5\times a_7\times a_9}{a_2\times a_4\times a_6}=\frac{a_1\times a_1r^4\times a_1r^6\times a_1r^8}{a_1r\times a_1r^3\times a_1r^5}$$
$$=a_1r^9=a_{10}=10$$

20 답 ②

$abc=64$ ⋯ ㉠
이때, a, b, c의 순서로 등차수열을 이루므로
$2b=a+c$ ⋯ ㉡
또, b, c, a의 순서로 등비수열을 이루므로
$c^2=ab$ ⋯ ㉢
㉠, ㉢에서
$c^3=64=4^3$ $\quad \therefore c=4$
㉡에서 $a=2b-4$를 ㉢에 대입하면
$(2b-4)b=16$에서 $b^2-2b-8=0$
$(b-4)(b+2)=0$
$\therefore b=-2$ $(\because b\neq c)$
따라서 ㉠에 의하여 $a=-8$이므로
$a+b+c=(-8)+(-2)+4=-6$

21 답 ②

$S_n=2^{n+1}+k$에서
(i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=4+k$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}+k)-(2^n+k)$

$=2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n$

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되려면 $n=1$일 때

$a_n=2^n$을 만족시켜야 하므로 $4+k=2^1$ $\quad\therefore k=-2$

일등급 UP

＊등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 $r\ (r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a}{r-1}r^n-\frac{a}{r-1}=Ar^n-A$ (A는 상수)

꼴이므로 주어진 등비수열의 합 $S_n=2^{n+1}+k=2\times2^n+k$에서 $k=-2$임을 알 수 있다.

22 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3=a+ar+ar^2=3$ ⋯ ㉠

$a_3+a_4+a_5=ar^2+ar^3+ar^4=12$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$

(i) $r=2$일 때, ㉠에서 $7a=3$ $\quad\therefore a=\frac{3}{7}$

따라서 첫째항이 정수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r=-2$일 때, ㉠에서 $3a=3$ $\quad\therefore a=1$

따라서 첫째항이 1이고 공비가 -2이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a_n=1\times(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}=\frac{1\times\{1-(-2)^{30}\}}{1-(-2)}$

$=\frac{1}{3}(1-2^{30})$

23 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (r>0)$라 하면

$S_m=\frac{a(r^m-1)}{r-1}=40$이고

$S_{3m}=\frac{a(r^{3m}-1)}{r-1}=\frac{a(r^m-1)(r^{2m}+r^m+1)}{r-1}$

$=\frac{a(r^m-1)}{r-1}(r^{2m}+r^m+1)$

$=40(r^{2m}+r^m+1)=70$

에서 $4r^{2m}+4r^m+4=7$, $4r^{2m}+4r^m-3=0$

$(2r^m-1)(2r^m+3)=0$ $\quad\therefore r^m=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

$\therefore S_{4m}=\frac{a(r^{4m}-1)}{r-1}=\frac{a(r^m-1)(r^m+1)(r^{2m}+1)}{r-1}$

$=\frac{a(r^m-1)}{r-1}(r^m+1)(r^{2m}+1)$

$=40\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2^2}+1\right)=75$

[다른 풀이]

등비수열의 부분합도 등비수열이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_m=40$

$a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}=\alpha$

$a_{2m+1}+a_{2m+2}+\cdots+a_{3m}=\beta$

라 하면 $40+\alpha+\beta=70$, $\alpha^2=40\beta$가 성립한다.

$\alpha^2=40\beta$에서 $\beta=\frac{\alpha^2}{40}$을 $40+\alpha+\beta=70$에 대입하면

$40+\alpha+\frac{\alpha^2}{40}=70$, $\alpha^2+40\alpha-1200=0$

$(\alpha-20)(\alpha+60)=0$

$\therefore \alpha=20$ ($\because \alpha>0$), $\beta=10$

따라서 $a_1+a_2+\cdots+a_m=40$, $a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}=20$,

$a_{2m+1}+a_{2m+2}+\cdots+a_{3m}=10$이므로

$a_{3m+1}+a_{3m+2}+\cdots+a_{4m}=5$

$\therefore S_{4m}=40+20+10+5=75$

24 답 ④

$S_n=n^2+3n+1$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1+3+1=5$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+3n+1-\{(n-1)^2+3(n-1)+1\}$

$=2n+2$

(i), (ii)에 의하여

$a_n=\begin{cases}5 & (n=1)\\ 2n+2 & (n\ge2)\end{cases}$

$\therefore a_1+a_3+a_5=5+(2\times3+2)+(2\times5+2)=25$

25 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 합 S_n이 $n=15$일 때 최댓값을 가지므로

$S_{n-1}<S_n$을 만족시키는 n의 최댓값이 15이다.

이때, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d (d는 정수)라 하면 공차 d가 음수일 때 합 S_n이 최댓값을 가진다.

또, $S_{n-1}<S_n$에서 $S_n-S_{n-1}>0$이므로 $a_n>0$

$a_n=250+(n-1)d>0$

$\therefore n<1-\frac{250}{d}$ ($\because d<0$)

n의 최댓값이 15이므로 $15<1-\frac{250}{d}\le16$에서

$14<-\frac{250}{d}\le15$, $-14>\frac{250}{d}\ge-15$

$-\frac{1}{14}<\frac{d}{250}\le-\frac{1}{15}$, $-\frac{250}{14}<d\le-\frac{250}{15}$

$-17.\times\times\times<d\le-16.\times\times\times$ $\quad\therefore d=-17$ ($\because d$는 정수)

$\therefore a_{10}=250+(10-1)\times(-17)=97$

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d (d는 정수)라 하면

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=250+(n-1)d$이고

$a_{15}>0$, $a_{16}\le 0$을 만족시킨다.

즉, $a_{15}=250+14d>0$에서

$14d>-250$

$\therefore d>-\dfrac{250}{14}=-17.\times\times\times$

$a_{16}=250+15d\le 0$에서

$15d\le -250$

$\therefore d\le -\dfrac{250}{15}=-16.\times\times\times$

즉, d의 값의 범위는 $-17.\times\times\times<d\le -16.\times\times\times$이므로

$d=-17$

$\therefore a_{10}=250+(10-1)\times(-17)=97$

26 답 ③

$\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=2n+1$에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2n^2+n$

이때, $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$이라 하면

$S_n=2n^2+n$

(i) $n=1$일 때,

　$a_1=S_1=2+1=3$

(ii) $n\ge 2$일 때,

　$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+n-\{2(n-1)^2+(n-1)\}$

　　$=4n-1$

(i), (ii)에 의하여 $a_n=4n-1$ $(n\ge 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이므로 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=4\times 2-1=7$이고 공차가 8인 등차수열이다.

$\therefore a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=\dfrac{10\{2\times 7+(10-1)\times 8\}}{2}=430$

[다른 풀이]

$a_2=4\times 2-1=7$, $a_{20}=4\times 20-1=79$이므로

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=\dfrac{10\times(7+79)}{2}=430$

27 답 114

먼저 등차수열을 이루는 3행의 수를 채우고 등비수열을 이루는 5열을 채우면 다음과 같다.

				5
4	8	12	16	20

➡

				5
				10
4	8	12	16	20
				40
				80

5열에 들어간 수들의 공비가 2이고 각 열에 들어갈 수도 같은 공비이므로 나머지 칸을 채우면 다음과 같다.

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
4	8	12	16	20
8	16	24	32	40
16	32	48	64	80

따라서 색칠한 부분에 들어갈 모든 수의 합은

$4+8+16+24+32+16+8+6=114$

[다른 풀이]

각 행의 수들이 등차수열을 이루므로 이를 이용하면 모든 값을 다 구하지 않고 다음 값만 구해도 된다.

				5
				10
4		12		20

↓ 공비가 2
→ 공차가 8 ➡

				5
		6		10
4		12		20
		24		

따라서 색칠한 부분에 들어갈 모든 수의 합은 등차중항에 의하여

$6\times 3+12\times 2+24\times 3=114$

28 답 8

$P(n)$이 최대가 되는 n의 값은 $P(n-1)<P(n)$을 만족시키는 n의 최댓값이다.

$P(n-1)<P(n)$에서

$\dfrac{P(n)}{P(n-1)}>1$ ($\because P(n-1)>0$)

$\dfrac{a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{n-1}\times a_n}{a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{n-1}}>1$, $a_n>1$

$\therefore 200\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}>1$

이때, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{8-1}=\dfrac{1}{128}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{9-1}=\dfrac{1}{256}$이므로 구하는 n의 최댓값은 8이다.

일등급 UP

*** n의 최댓값**

$S(n)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$이 최대가 되는 n의 값은 $S(n-1)<S(n)$, 즉 $S(n)-S(n-1)=a_n>0$을 만족시키는 n의 최댓값이다.

29 답 ④

처음 정사각형의 넓이는 4이므로 1회 시행한 후 남은 종이의 넓이는 $\dfrac{3}{4}\times 4$이고, 2회 시행한 후 남은 종이의 넓이는

$\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{3}{4}\times 4\right)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times 4$이다.

따라서 10회 시행한 후 남은 종이의 넓이는 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}\times 4$이므로 10회의 시행까지 버려진 종이의 넓이의 합은

$4-4\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}=4-3\left(\dfrac{3}{4}\right)^9$

[다른 풀이]

처음 정사각형의 넓이가 4이므로 1회의 시행 후 버려지는 종이의 넓이는 $4\times\frac{1}{4}$, 2회의 시행 후 버려지는 종이의 넓이는 $4\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$, 3회의 시행 후 버려지는 종이의 넓이는 $4\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}$, …이므로 n회의 시행 후 버려지는 종이의 넓이는 첫째항이 $4\times\frac{1}{4}$이고 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이다.

따라서 10회의 시행까지 버려지는 종이의 넓이는

$$\frac{4\times\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{3}{4}}=4-3\left(\frac{3}{4}\right)^9$$

30 답 18

지난해 구리의 소비량이 20만 톤이므로 올해의 채굴량은 (20×1.2)만 톤이고 매년 20 %씩 증가하므로 올해부터 매년 채굴량은 첫째항이 24만 톤, 공비가 1.2인 등비수열을 이룬다.

n년 동안 구리 광산에서 채굴할 수 있다면 n년 동안 채굴량의 총합 S_n은

$S_n=\frac{24\times(1.2^n-1)}{1.2-1}\le3600$

$\therefore 1.2^n\le31$

이때, $1.2^{18}=26$, $1.2^{19}=32$이므로 자연수 n에 대하여

$n\le18$

따라서 최대 18년 공급할 수 있으므로 $n=18$

31 답 ④

50년 전의 인구를 a명이라 하면 현재의 인구가 $2a$명이므로

매년 인구증가율을 r라 하면

$2a=a(1+r)^{50}$에서 $(1+r)^{50}=2$, $1+r=\sqrt[50]{2}$

$\therefore r=\sqrt[50]{2}-1$

32 답 ②

먼저 A의 5년 후의 원리합계 S_A를 구해 보자.

매월 초 1만 원씩 월이율 1%, 1개월마다 복리로 5년 동안 적립하므로

$S_A=\frac{10000\times1.01\times(1.01^{60}-1)}{1.01-1}$

$=\frac{10^4\times1.01\times(1.81-1)}{0.01}=818100$

다음으로 B의 5년 후의 원리합계 S_B를 구해 보자.

매년 초 12만 원씩 연이율 12%로 1년마다 복리로 5년 동안 적립하므로

$S_B=\frac{120000\times1.12\times(1.12^5-1)}{1.12-1}$

$=\frac{12\times10^4\times1.12\times(1.76-1)}{0.12}=851200$

$\therefore S_A-S_B=-33100$

33 답 ②

$a_3=b_5=c$라 하고 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 하면 $a_7=c+4d_1$, $b_{11}=c+6d_2$이므로

$a_7=b_{11}$에서 $c+4d_1=c+6d_2$ $\qquad\therefore d_1=\frac{3}{2}d_2$

$\therefore a_{13}=c+10d_1=c+15d_2=b_{20}$

[다른 풀이]

등차수열의 일반항은 n에 대한 일차식이므로

$a_3=b_5$, $a_7=b_{11}$, $a_{13}=b_k$에서

$\frac{11-5}{7-3}=\frac{k-11}{13-7}$, $\frac{6}{4}=\frac{k-11}{6}$ $\qquad\therefore k=20$

34 답 ⑤

2, x_1, x_2, x_3, …, x_{18}, 30으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 공차를 d_1이라 하고, 2, y_1, y_2, y_3, …, y_{98}, 30으로 이루어진 수열을 $\{b_n\}$, 공차를 d_2라 하면

$x_2-x_1=d_1=\frac{a_{20}-a_1}{20-1}=\frac{30-2}{19}=\frac{28}{19}$

$y_{98}-y_{97}=d_2=\frac{b_{100}-b_1}{100-1}=\frac{30-2}{99}=\frac{28}{99}$

$\therefore \frac{x_2-x_1}{y_{98}-y_{97}}=\frac{99}{19}$

35 답 ①

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$ … ㉠

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a$ … ㉡

$\alpha\beta\gamma=-3$ … ㉢

이때, α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\beta=\alpha+\gamma$ … ㉣

㉠+㉣을 하면 $3\beta=3$ $\qquad\therefore \beta=1$

이것을 ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha+\gamma+\gamma\alpha=2+\gamma\alpha=a$ … ㉤

$\alpha\beta\gamma=\alpha\gamma=-3$ … ㉥

㉥을 ㉤에 대입하면 $a=-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=3^2-2\times(-1)=11$

[다른 풀이]

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$이고 $\alpha+\gamma=2\beta$이므로 $\beta=1$

즉, 삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+3=0$의 한 근이 1이므로

$x=1$을 대입하면 $1-3+a+3=0$ $\qquad\therefore a=-1$

따라서 $x^3-3x^2-x+3=0$에서

$(x-1)(x-3)(x+1)=0$이므로 주어진 방정식의 근은

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$이다.

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(-1)^2+1^2+3^2=11$

36 답 ④

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면

홀수 번째 항들의 공차는 $2d$이므로

$$\frac{17\{2a_1+(17-1)\times 2d\}}{2}=170$$

$\therefore a_1+16d=10$

따라서 첫째항부터 제 33항까지의 합은

$$\frac{33\{2a_1+(33-1)\times d\}}{2}=33(a_1+16d)=330$$

[다른 풀이]

$a_1+a_{33}=a_2+a_{32}=\cdots=2a_{17}$이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{33}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{33})\times\frac{33}{17}$$

$$=170\times\frac{33}{17}=330$$

37 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_{10}=\dfrac{10(2a_1+9d)}{2}=\dfrac{1}{20}$에서

$100(2a_1+9d)=1$ ⋯ ㉠

$S_{20}=\dfrac{20(2a_1+19d)}{2}=\dfrac{1}{10}$에서

$100(2a_1+19d)=1$ ⋯ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$d=0$

이것을 ㉠에 대입하면

$a_1=\dfrac{1}{200}$

$$\therefore S_{200}=\underbrace{\frac{1}{200}+\frac{1}{200}+\cdots+\frac{1}{200}}_{200\text{개}}=200\times\frac{1}{200}=1$$

38 답 ⑤

ㄱ. $n=1$일 때, $a_2=3$

$n=2$일 때, $a_2+a_4=10$ $\quad\therefore a_4=7$

이때, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$2d=a_4-a_2=4$ $\quad\therefore d=2$ (참)

ㄴ. $a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}$

$=(a_2-d)+(a_4-d)+\cdots+(a_{2n}-d)$

$=(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})-nd$

$=2n^2+n-2n$ ($\because d=2$)

$=2n^2-n$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여 $a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=2n^2-n$이고

$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=2n^2+n$이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_9)+(a_2+a_4+\cdots+a_{10})$

$=(2\times5^2-5)+(2\times5^2+5)=100$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

39 답 100

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_{100}=a_1+99d$에서

$d=\dfrac{a_{100}-a_1}{99}=\dfrac{47-3}{99}=\dfrac{4}{9}$이므로

$$S=(a_1{}^2-a_2{}^2)+(a_3{}^2-a_4{}^2)+\cdots+(a_{99}{}^2-a_{100}{}^2)$$

$$=(a_1-a_2)(a_1+a_2)+(a_3-a_4)(a_3+a_4)+\cdots+(a_{99}-a_{100})(a_{99}+a_{100})$$

$$=-\frac{4}{9}(a_1+a_2)-\frac{4}{9}(a_3+a_4)-\cdots-\frac{4}{9}(a_{99}+a_{100})$$

$$=-\frac{4}{9}(a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{99}+a_{100})$$

$$=-\frac{4}{9}\times\frac{100(a_1+a_{100})}{2}$$

$$=-\frac{4}{9}\times\frac{100(3+47)}{2}=-\frac{10000}{9}$$

$$\therefore \sqrt[4]{81S^2}=\sqrt[4]{81\left(-\frac{10000}{9}\right)^2}=\sqrt[4]{100^4}=100$$

40 답 ③

$ab+bc=2ac$의 양변을 abc로 나누면 $\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}$이므로

세 수 $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$ 또는 $\dfrac{1}{c}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{a}$은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

41 답 37

두 점 A_n, B_n의 좌표가 각각 (n, n^2+2an), $(n, -n^2+2b)$이므로 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 중점의 좌표는 $(n, an+b)$이다.

따라서 $a_n=an+b$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

한편, 조건 (가)에서 $a_1=25$이므로 $a_1=a+b=25$

$\therefore a=25-b$ ⋯ ㉠

또, 조건 (나)에 의하여 $a_9>0$, $a_{10}\le 0$이므로

$a_9=9a+b>0$에서 $9(25-b)+b>0$

$\therefore b<\dfrac{225}{8}=28.125$ ⋯ ㉡

$a_{10}=10a+b\le 0$에서 $10(25-b)+b\le 0$

$\therefore b\ge\dfrac{250}{9}=27.\times\times\times$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에서 $27.\times\times\times\le b<28.125$이고 b는 자연수이므로 $b=28$

㉠에서 $a=25-28=-3$ $\quad\therefore a^2+b=37$

42 답 51

윤규가 누른 버튼에 적혀 있는 숫자를 n이라 하면 불이 들어온 버튼은 그림과 같다.

$n-10$	$n-9$	$n-8$
$n-1$	n	$n+1$
$n+8$	$n+9$	$n+10$

따라서 불이 들어온 버튼에 적혀 있는 수의 합은

$(n-10)+(n-9)+(n-8)+(n-1)+(n+1)+(n+8)+(n+9)+(n+10)=8n$

즉, $8n=408$이므로 $n=51$

따라서 윤규가 누른 버튼에 적혀 있는 숫자는 51이다.

43 답 ④

다른 수도관을 잠그고 n번 수도관만으로 물탱크를 채우는데 걸리는 시간을 a_n이라 하면

$a_1=\frac{1000}{500}$, $a_2=\frac{1000}{L_2}$, $\cdots$, $a_8=\frac{1000}{L_8}$, $a_9=\frac{1000}{200}$

이때, 수열 $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{L_2}$, $\frac{1}{L_3}$, $\cdots$, $\frac{1}{L_8}$, $\frac{1}{200}$은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\frac{a_1}{1000}$, $\frac{a_2}{1000}$, $\cdots$, $\frac{a_9}{1000}$도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$, $a_9=5$인 등차수열이므로 다른 수도관을 잠그고 5번 수도관만으로 물탱크를 가득 채우는데 걸리는 시간 a_5는 등차중항의 성질에 의하여

$a_5=\frac{a_1+a_9}{2}=\frac{2+5}{2}=3.5$에서 3시간 30분이다.

[다른 풀이]

수열 $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{L_2}$, $\frac{1}{L_3}$, $\cdots$, $\frac{1}{L_8}$, $\frac{1}{200}$은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$\frac{1}{200}=\frac{1}{500}+8d$

$\therefore d=\frac{3}{8000}$

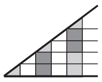
즉, $\frac{1}{L_5}=\frac{1}{500}+4\times\frac{3}{8000}=\frac{7}{2000}$이므로

$L_5=\frac{2000}{7}$

따라서 다른 수도관을 잠그고 5번 수도관만으로 물탱크를 가득 채우는데 걸리는 시간은 $\frac{1000}{\frac{2000}{7}}=\frac{7}{2}$, 즉 3시간 30분이다.

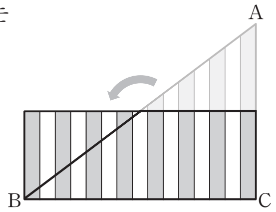
44 답 10

색칠한 부분의 넓이는 [그림 1]과 같이 색칠한 부분의 넓이가 공차인 등차수열을 이룬다.



[그림 1]

따라서 등차수열의 성질을 이용하여 [그림 2]와 같이 두 선분 AB, AC의 중점을 연결하는 선을 따라 삼각형을 잘라 회전이동하면 색칠한 부분은 직사각형의 넓이의 $\frac{8}{15}$이다.



[그림 2]

$\therefore S-S'=\left(20\times\frac{15}{2}\right)\times\frac{1}{15}=10$

[다른 풀이]

변 BC를 15등분한 각 분점을 점 B에 가까운 점부터 차례로 $C_0(=B)$, C_1, C_2, C_3, $\cdots$, $C_{15}=C$라 하고

점 C_n(n은 $1\le n\le 15$인 자연수)을 지나고 변 AC에 평행한 선분이 변 AB와 만나는 점을 차례로 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, $A_{15}(=A)$라 하자.

색칠한 부분의 넓이는 삼각형 A_1BC_1의 넓이와 사다리꼴 $A_nC_nC_{n+1}A_{n+1}$ $(n=2, 4, \cdots, 14)$의 넓이의 합이므로

$S=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times(2+3)+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times(4+5)+\cdots$
$+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times(14+15)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times(1+2+3+\cdots+14+15)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{15(1+15)}{2}=80$

따라서 $S'=\triangle ABC-S=\frac{1}{2}\times20\times15-80=70$이므로

$S-S'=80-70=10$

45 답 ①

세 수 $\cos\theta$, $\sqrt{2}\sin\theta$, $\tan\theta$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$2\sin^2\theta=\cos\theta\times\tan\theta=\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta$에서

$2\sin^2\theta-\sin\theta=0$, $\sin\theta(2\sin\theta-1)=0$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$ $(\because \sin\theta\ne0)$

따라서 $0\le\theta\le2\pi$에서 이를 만족시키는 θ의 값은

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$이므로 모든 θ의 값의 합은 π이다.

46 답 15

양수 a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$

조건 (가)의 $abc=1$에서

$abc=b(ac)=b\times b^2=b^3=1$ $\quad\therefore b=1$

따라서 조건 (가)에 의하여 $ac=1$

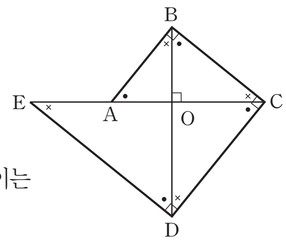
조건 (나)에 의하여 $a+c=4$이므로

$a^2+c^2=(a+c)^2-2ac=4^2-2\times1=14$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a^2+c^2)+b^2=14+1^2=15$

47 답 ②

그림과 같이 네 개의 직각삼각형이 모두 닮음이므로



$\overline{AO}:\overline{BO}=\overline{BO}:\overline{CO}$

$\therefore \overline{BO}^2=\overline{AO}\times\overline{CO}$

따라서 세 선분 AO, BO, CO의 길이는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

마찬가지 방법으로 생각하면 다섯 선분 AO, BO, CO, DO, EO의 길이는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이 등비수열의 공비를 r라 하면

$\frac{\overline{AE}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{EO}-\overline{AO}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{EO}}{\overline{AO}}-1=r^4-1=\frac{5}{4}$

$r^4=\frac{9}{4}$ $\quad\therefore r^2=\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{\overline{BO}}{\overline{DO}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{BO}\times r^2}=\frac{1}{r^2}=\frac{2}{3}$

48 답 13

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=(a_5)^9$이므로 조건 (가)에서

$(a_5)^9=2^9\qquad\therefore a_5=2\cdots$ ㉠

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{19}=(a_{10})^{19}$이므로

두 조건 (가), (나)의 양변을 변끼리 곱하면

$(a_{10})^{19}=2^{114}\qquad\therefore a_{10}=2^6\cdots$ ㉡

이때, 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

㉡÷㉠에서 $\dfrac{ar^9}{ar^4}=\dfrac{2^6}{2}$, $r^5=2^5\qquad\therefore r=2$

㉠에서 $a_5=a\times2^4=2\qquad\therefore a=2^{-3}$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}=\dfrac{2^{-3}(2^{19}-1)}{2-1}=2^{16}-2^{-3}$

따라서 $p=16$, $q=-3$이므로 $p+q=13$

49 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$P=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$이므로

$Q=ar^n+ar^{n+1}+ar^{n+2}+\cdots+ar^{2n-1}$

$\quad=(a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1})r^n=Pr^n$

$R=ar^{2n}+ar^{2n+1}+ar^{2n+2}+\cdots+ar^{3n-1}$

$\quad=(a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1})r^{2n}=Pr^{2n}$

ㄱ. P, $Q(=Pr^n)$, $R(=Pr^{2n})$은 이 순서대로 공비가 r^n인 등비수열을 이룬다. (참)

ㄴ. $\dfrac{1}{P}$, $\dfrac{1}{Q}\left(=\dfrac{1}{Pr^n}\right)$, $\dfrac{1}{R}\left(=\dfrac{1}{Pr^{2n}}\right)$은 이 순서대로 공비가 $\dfrac{1}{r^n}$인 등비수열을 이룬다. (참)

ㄷ. $PQ=P^2r^n$, $PR=P^2r^{2n}$, $QR=P^2r^{3n}$은 이 순서대로 공비가 r^n인 등비수열을 이룬다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

일등급 UP

*** 등비수열의 성질**

(1) 등비수열의 일반항의 개수가 같게 더한 부분합으로 이루어진 수열도 등비수열이다.

(2) 등비수열의 역수로 이루어진 수열도 등비수열이다.

(3) 등비수열의 순서를 거꾸로 하거나 실수를 곱한 수열도 등비수열이다.

50 답 56

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_5+a_6+a_7+a_8=(a_1+a_2+a_3+a_4)\times r^4=r^4S$

$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=(a_1+a_2+a_3+a_4)\times r^8=r^8S$

이므로 $a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{12}=6S$에서

$r^8+r^4=6$, $r^8+r^4-6=0$, $(r^4+3)(r^4-2)=0$

$\therefore r^4=2$ ($\because r^4>0$)

마찬가지로

$a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}=(a_1+a_2+a_3+a_4)\times r^{12}$

$\qquad=r^{12}S=(r^4)^3S=2^3S=8S$

$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=(a_1+a_2+a_3+a_4)\times r^{16}$

$\qquad=r^{16}S=(r^4)^4S=2^4S=16S$

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}=(a_1+a_2+a_3+a_4)\times r^{20}$

$\qquad=r^{20}S=(r^4)^5S=2^5S=32S$

이므로 $a_{13}+a_{14}+a_{15}+\cdots+a_{24}=8S+16S+32S=56S=kS$

$\therefore k=56$

51 답 ④

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n=n(n+1)(n+2)\cdots$ ㉠

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-1)n(n+1)\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면 $na_n=3n(n+1)$

$\therefore a_n=3n+3$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 6이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=\dfrac{20\{2\times6+(20-1)\times3\}}{2}=690$

52 답 ⑤

$S_n=(n+1)^2$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=4$

(ii) $n\ge2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=(n+1)^2-n^2=2n+1$

(i), (ii)에 의하여 $a_n=\begin{cases}4 & (n=1)\\ 2n+1 & (n\ge2)\end{cases}$

$2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+\cdots+2^{a_{20}}=2^4+2^5+2^7+\cdots+2^{41}$

$\qquad=2^3+(2^3+2^5+2^7+\cdots+2^{41})$

$\qquad=2^3+\dfrac{2^3\{(2^2)^{20}-1\}}{2^2-1}=2^3+\dfrac{2^3(2^{40}-1)}{3}$

$\qquad=\dfrac{8(2^{40}+2)}{3}=\dfrac{16(2^{39}+1)}{3}$

$\therefore k=16(2^{39}+1)$

53 답 ④

처음 정삼각형의 넓이를 S라 하면 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$이고, 한 번의 시행으로 정삼각형의 넓이가 $\dfrac{1}{4}$이 줄어 $\dfrac{3}{4}$만 남게 되므로 10회 시행 한 후 남아있는 종이의 넓이는 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}S=\sqrt{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}$

54 답 ②

선분 AD가 ∠A의 이등분선이므로 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=k$라 하자.

세 삼각형 ABD, ADC, ABC는 높이가 같은 삼각형이므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

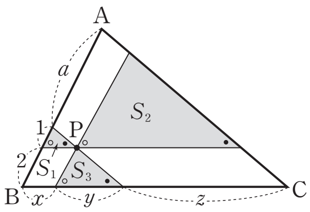
$\therefore\triangle ABD:\triangle ADC:\triangle ABC=1:k:1+k$

이때, 삼각형 ABD의 넓이를 S라 하면 두 삼각형 ADC, ABC의 넓이는 각각 kS, $(1+k)S$이고 S, kS, $(1+k)S$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(kS)^2=S\times(1+k)S$, $k^2=1+k$, $k^2-k-1=0$

$\therefore k=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\because S>0$, $k>0$)

55 답 20



점 P를 지나는 세 선분이 각 변에 평행하므로 그림의 색칠한 부분의 세 삼각형은 모두 닮음이다. (AA 닮음)

세 삼각형의 닮음비에 의하여 $x:y:z=1:2:a$

양수 k에 대하여 $x=k$, $y=2k$, $z=ak$라 하면 x, y, z가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $y^2=xz$에서

$(2k)^2=k\times ak \qquad \therefore a=4$

이때, 넓이의 비는 길이의 제곱의 비이므로

$S_1:S_2:S_3=1^2:2^2:4^2$이고, $S_1=1$이므로

$S_2=4$, $S_3=16$

$\therefore S_2+S_3=4+16=20$

56 답 ④

n월 말에 통장에 남아있는 잔액을 a_n(만 원)이라 하면

$a_1=1000\times1.005-50$

$a_2=a_1\times1.005-50$

$\quad=1000\times1.005^2-50(1.005+1)$

$a_3=a_2\times1.005-50$

$\quad=1000\times1.005^3-50(1.005^2+1.005+1)$

$\vdots$

$a_{12}=a_{11}\times1.005-50$

$\quad=1000\times1.005^{12}-50(1.005^{11}+\cdots+1.005+1)$

$\quad=1000\times1.005^{12}-50\times\dfrac{1\times(1.005^{12}-1)}{1.005-1}$

$\quad=1000\times1.0617-50\times\dfrac{1.0617-1}{0.005}$

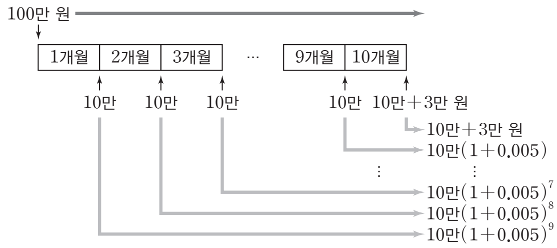
$\quad=1061.7-617=444.7$

따라서 12월 말에 통장에 남아있는 금액은 444만 7000원이다.

57 답 ②

가영이가 처음 계획대로 100만 원을 은행에 예치할 경우 10개월 후의 원리합계를 계산하면

$100\times(1.005)^{10}=105.1$(만 원)



나영이에게 빌려주고 한 달 후부터 매월 받은 10만 원을 은행에 예치할 경우 10개월 후의 원리합계를 계산하면

$\dfrac{10(1.005^{10}-1)}{1.005-1}+3=\dfrac{10\times0.051}{0.005}+3=105$(만 원)

따라서 가영이는 1000원 손해를 본다.

58 답 147

$a_4+a_5+a_6=3a_5=42 \qquad \therefore a_5=14$

$a_{12}+a_{14}+a_{16}+a_{18}=4a_{15}=176 \qquad \therefore a_{15}=44$ ········ ⓐ

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{15}=a_5+10d$이므로 $d=\dfrac{a_{15}-a_5}{10}=\dfrac{44-14}{10}=3$ ········ ⓑ

따라서 $a_{30}=a_{15}+15d=44+15\times3=89$이므로

$a_5+a_{15}+a_{30}=14+44+89=147$ ········ ⓒ

채점기준

ⓐ 등차중항을 이용하여 a_5, a_{15}의 값을 구한다.	[40%]
ⓑ 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 구한다.	[40%]
ⓒ $a_5+a_{15}+a_{30}$의 값을 구한다.	[20%]

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4+a_5+a_6=42$에서 $(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)=42$

$\therefore a+4d=14$ ··· ㉠

또, $a_{12}+a_{14}+a_{16}+a_{18}=176$에서

$(a+11d)+(a+13d)+(a+15d)+(a+17d)=176$

$\therefore a+14d=44$ ··· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

따라서 $a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$이므로

$a_5+a_{15}+a_{30}=14+44+89=147$

59 답 100

$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=a_n\ (n\geq2)$에서

$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=S_n-S_{n-1}$

$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})$

$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$ ($\because \sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}>0$)

$\therefore \sqrt{S_n}=\sqrt{S_{n-1}}+1$

따라서 수열 $\{\sqrt{S_n}\}$은 첫째항이 $\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$이고 공차가 1인 등차수열이다.

$\therefore \sqrt{S_n}=1+(n-1)\times1=n$ ········ ⓐ

즉, $S_n=n^2$이므로 $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$이고

$a_1=1$이므로 $a_n=2n-1\ (n\geq 1)$ ········· ⓑ

$\therefore a_{100}-a_{50}=199-99=100$ ········· ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 수열 $\{\sqrt{S_n}\}$의 일반항을 구한다.	[50%]
ⓑ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.	[30%]
ⓒ $a_{100}-a_{50}$의 값을 구한다.	[20%]

60 답 5100

연속하는 세 항 a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}은 이 순서대로 등비수열을 이루므로 a_{2n}은 a_{2n-1}과 a_{2n+1}의 등비중항이다.

$\therefore {a_{2n}}^2=a_{2n-1}a_{2n+1}$ ··· ㉠

또, 연속하는 세 항 a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a_{2n+1}은 a_{2n}과 a_{2n+2}의 등차중항이다.

$\therefore a_{2n+1}=\frac{a_{2n}+a_{2n+2}}{2}$ ··· ㉡ ········· ⓐ

㉠에서 $a_{2n}=\sqrt{a_{2n-1}}\sqrt{a_{2n+1}}$, $a_{2n+2}=\sqrt{a_{2n+1}}\sqrt{a_{2n+3}}$ ($\because a_n>0$)이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$a_{2n+1}=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{2n-1}}\sqrt{a_{2n+1}}+\sqrt{a_{2n+1}}\sqrt{a_{2n+3}})$

$\therefore \sqrt{a_{2n+1}}=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{2n-1}}+\sqrt{a_{2n+3}})$ ··· ㉢

이때, a_1, a_2, a_3은 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a_3=8$

따라서 ㉢에 의하여 수열 $\{\sqrt{a_{2n-1}}\}$은 $\sqrt{a_1}=\sqrt{2}$이고,

공차가 $\sqrt{a_3}-\sqrt{a_1}=\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$인 등차수열을 이루므로

$\sqrt{a_{2n-1}}=\sqrt{2}+(n-1)\times\sqrt{2}=\sqrt{2}n$

$\therefore a_{2n-1}=2n^2$ ········· ⓑ

따라서 $a_{99}=2\times 50^2$, $a_{101}=2\times 51^2$이므로 ㉠에 의하여

${a_{100}}^2=a_{99}a_{101}=2^2\times 50^2\times 51^2=5100^2$

$\therefore a_{100}=5100$ ········· ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 등차중항과 등비중항의 성질을 이용하여 n이 홀수일 때와 짝수일 때, 일반항 사이의 관계식을 구한다.	[20%]
ⓑ 수열 $\{a_{2n-1}\}$의 일반항을 구한다.	[60%]
ⓒ a_{100}의 값을 구한다.	[20%]

61 답 ①

조건 (가)에서 $a_6+a_8=2a_7=0$

$\therefore a_7=0$

이때, 공차가 양수이므로 $a_6<a_7<a_8$

$\therefore a_6<0<a_8$

따라서 조건 (나)에서 $|a_6|=|a_7|+3=0+3=3$이므로

$a_6=-3$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$d=a_7-a_6=3$이므로

$a_2=a_6-4d=-3-12=-15$

62 답 ②

a_2, a_k, a_8이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $k=5$

이때, $a_2=a_1+6$, $a_5=a_1+24$이고 a_1, a_2, a_5가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $(a_2)^2=a_1\times a_5$에서

$(a_1+6)^2=a_1(a_1+24)$, $12a_1=36$ $\quad\therefore a_1=3$

$\therefore k+a_1=8$

63 답 ①

$a_5+a_{13}=2a_9$이므로 $a_5+a_{13}=3a_9$에서 $2a_9=3a_9$

$\therefore a_9=0$ ··· ㉠

또, $a_1+a_{17}=a_2+a_{16}=\cdots=a_8+a_{10}=2a_9$에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{17}=17a_9=0$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}=a_{18}=\frac{9}{2}$ ··· ㉡

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_{18}=a_9+9d$이므로 ㉠, ㉡에서

$d=\frac{a_{18}-a_9}{9}=\frac{\frac{9}{2}-0}{9}=\frac{1}{2}$

$\therefore a_{13}=a_9+4d=0+4\times\frac{1}{2}=2$

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5+a_{13}=3a_9$에서 $(a+4d)+(a+12d)=3(a+8d)$

$2a+16d=3a+24d$

$\therefore a=-8d$ ··· ㉢

또, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}=\frac{9}{2}$에서

$\frac{18(2a+17d)}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore 4a+34d=1$ ··· ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-4$, $d=\frac{1}{2}$

$\therefore a_{13}=-4+12\times\frac{1}{2}=2$

64 답 ②

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 30이고 공차가 $-d$인 등차수열이므로

$a_n=30-(n-1)d$이고

$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}$

$=\frac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}$

$=\frac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2}=0$

이때, $k+1>0$이므로 $60-(2m+k-2)d=0$에서

$(2m+k-2)d=60$ $\quad\therefore 2m+k=2+\frac{60}{d}$

이를 만족시키는 자연수 m, k가 존재하기 위해서는 d가 60의 약수이어야 한다.

$60=2^2\times 3\times 5$이므로 자연수 d의 개수는 $3\times 2\times 2=12$

[다른 풀이]

등차수열의 연속된 $(k+1)$개의 항의 합이 0이기 위한 수열의 조건은 다음과 같다.

(i) $k+1$이 홀수일 때

$\cdots, d, 0, -d, \cdots$

이때, d는 30의 양의 약수가 되어야 하므로

$d=1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$

(ii) $k+1$이 짝수일 때

$\cdots, \frac{d}{2}, -\frac{d}{2}, \cdots$

이때, $30-(n-1)d=\frac{d}{2}$에서 $n=\frac{1}{2}+\frac{30}{d}$

n은 자연수이므로 $d=4, 12, 20, 60$

(i), (ii)에서 구하는 d의 개수는 12이다.

65 답 73

주어진 사각형은 사다리꼴이므로

$S(2)=\frac{1}{2}\times(\log_2 2+\log_2 4)\times 2=\log_2 8$

$S(4)=\frac{1}{2}\times(\log_2 4+\log_2 6)\times 2=\log_2 24$

$S(a)=\frac{1}{2}\times\{\log_2 a+\log_2(a+2)\}\times 2=\log_2 a(a+2)$

이때, $S(2), S(4), S(a)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S(4)=S(2)+S(a)$에서

$2\log_2 24=\log_2 8+\log_2 a(a+2)$, $24^2=8a(a+2)$

$a^2+2a-72=0$

$\therefore\ a=-1+\sqrt{73}$ 또는 $a=-1-\sqrt{73}$

그런데 $a>1$이므로 $a=\sqrt{73}-1$

$\therefore\ n=73$

66 답 24

$x^{\frac{1}{\alpha}}=y^{-\frac{1}{\beta}}=z^{\frac{2}{\gamma}}=k$라 하면 $x=k^{\alpha}$, $y^{-1}=k^{\beta}$, $z^2=k^{\gamma}$이고 α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $k^{\alpha}, k^{\beta}, k^{\gamma}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $(k^{\beta})^2=k^{\alpha}k^{\gamma}$에서 $(y^{-1})^2=xz^2$ $\quad\therefore\ \frac{1}{y^2}=xz^2$

이때, $y^2>0$이므로

$16xz^2+9y^2=\frac{16}{y^2}+9y^2\ge 2\sqrt{\frac{16}{y^2}\times 9y^2}=24$

$\left(\text{단, 등호는 } y=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ xz^2=\frac{3}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $16xz^2+9y^2$의 최솟값은 24이다.

67 답 11

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=6+(n-1)p$

수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=6p^{n-1}$

수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 수열 $\{a_n\}$의 항이 되려면 모든 자연수 n에 대하여 $6p^{n-1}=6+p(m-1)$인 자연수 m이 존재해야 한다.

즉, $p(m-1)=6p^{n-1}-6$에서

$m-1=6p^{n-2}-\frac{6}{p}$

$\therefore\ \frac{6}{p}=6p^{n-2}-m+1$

이때, $p^{n-2}\ (n\ge 2)$과 m은 모두 자연수이므로 $\frac{6}{p}$도 자연수이다.

즉, p는 1보다 큰 6의 약수이어야 하므로

$p=2$ 또는 $p=3$ 또는 $p=6$

따라서 모든 자연수 p의 합은 $2+3+6=11$이다.

[다른 풀이]

$a_m=b_2$인 자연수 m이 존재하므로

$6+(m-1)p=6p$에서

$m-1=\frac{6(p-1)}{p}=6-\frac{6}{p}$

이때, $\frac{6}{p}$이 자연수이어야 하므로 p는 6의 약수이다.

(i) $p=2$일 때, $a_m=4+2m$, $b_n=6\times 2^{n-1}$

(ii) $p=3$일 때, $a_m=3+3m$, $b_n=6\times 3^{n-1}$

(iii) $p=6$일 때, $a_m=6m$, $b_n=6^n$

(i), (ii), (iii)의 모든 경우 임의의 자연수 n에 대하여 $b_n=a_m$을 만족시키는 m이 존재하므로 수열 $\{b_n\}$의 모든 항은 수열 $\{a_n\}$의 항이 된다.

따라서 $p=2$ 또는 $p=3$ 또는 $p=6$이고 모든 자연수 p의 합은 11이다.

68 답 ①

$a<b<c$라 해도 일반성을 잃지 않는다.

이때, $a+a<a+b<a+c<b+c<c+c$에서 a, b, c가 서로 다른 실수이므로 이 5개의 수는 집합 $A+A$의 원소가 된다.

집합 $A+A$의 원소의 개수가 5이므로 $b+b$는 위의 다섯 원소 중 어느 원소와 크기가 같아야 하고 $a+b<b+b<b+c$이므로 $b+b=a+c$이어야 한다.

$\therefore\ 2b=a+c$

따라서 집합 A의 세 원소 a, b, c는 등차수열을 이룬다.

69 답 ⑤

서로 다른 자연수 $a_1, a_2, \cdots, a_6$이 $\{a_1, a_2, \cdots, a_6\}=\{1, 2, \cdots, 6\}$을 만족시킬 때 각 행과 각 열에서 한 개의 숫자만 선택되도록 뽑으면 a_1, $6+a_2$, $12+a_3$, $18+a_4$, $24+a_5$, $30+a_6$

따라서 뽑은 원소들의 총합은 항상

$90+a_1+a_2+\cdots+a_6=90+1+2+\cdots+6=111$

그런데 5개의 숫자의 합이 90이므로 나머지 한 숫자는

$111-90=21$이고 이는 4행 3열의 숫자이다.

70 답 99

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 $\frac{1}{99}$이므로 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{99}$

$\therefore \frac{2}{a_na_{n+1}}=2\times\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=198\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

따라서 구하는 값은

$\frac{2}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{2}{a_3a_4}+\cdots+\frac{2}{a_{99}a_{100}}$

$=198\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+198\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+198\left(\frac{1}{a_{99}}-\frac{1}{a_{100}}\right)$

$=198\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{100}}\right)=198\times\frac{a_{100}-a_1}{a_1a_{100}}$ ⋯ ㉠

이때, $a_n=1+(n-1)\times\frac{1}{99}$에서 $a_{100}=2$이므로

㉠에 의하여 구하는 값은 $198\times\frac{2-1}{1\times2}=99$

71 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a이고 공차가 d $(d\neq0)$이므로

$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$, $S_{3n}=\frac{3n\{2a+(3n-1)d\}}{2}$

이때, $\frac{S_{3n}}{S_n}$의 값이 k로 일정하다고 하면

$\frac{S_{3n}}{S_n}=\frac{3n\{2a+(3n-1)d\}}{n\{2a+(n-1)d\}}=k$에서

$3\{2a+(3n-1)d\}=k\{2a+(n-1)d\}$

$\therefore n(9d-kd)+6a-3d-2ka+kd=0$

위의 식이 n에 대한 항등식이므로

$9d-kd=0$ ⋯ ㉠, $6a-3d-2ka+kd=0$ ⋯ ㉡

㉠에서 $k=9$ ($\because d\neq0$)

$k=9$를 ㉡에 대입하면 $6d=12a$

$\therefore \frac{d}{a}=2$

72 답 ②

구하는 세 자리의 양의 정수를 N이라 하면

$N=3k+2$ ($k\geq33$인 정수), $N=5k'+3$ ($k'\geq20$인 정수)으로 놓을 수 있다.

이때, $k'=3l$ 또는 $k'=3l+1$ 또는 $k'=3l+2$라 하면

(i) $k'=3l$일 때,

$N=5(3l)+3=3(5l+1)$이므로 부적합

(ii) $k'=3l+1$일 때,

$N=5(3l+1)+3=3(5l+2)+2$이므로 적합

(iii) $k'=3l+2$일 때,

$N=5(3l+2)+3=3(5l+4)+1$이므로 부적합

(i)~(iii)에 의하여 $N=3(5l+2)+2=15l+8$이므로

N은 15로 나누어 8이 남는 세 자리의 양의 정수이다.

즉, $100\leq15l+8\leq999$에서 $6.\times\times\leq l\leq66.\times\times\times$

$\therefore l=7, 8, 9, \cdots, 66$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 N은 113, 128, 143, ⋯, 998로 60개이므로 구하는 합은

$\frac{60(113+998)}{2}=33330$

[다른 풀이]

N에 7을 더하면

$N+7=3k+2+7=3(k+3)$

$N+7=5k'+3+7=5(k'+2)$

즉, $N+7$은 3과 5의 최소공배수인 15의 배수이다.

따라서 $N=15m-7$ (m은 자연수)라 하면

$100\leq15m-7\leq999$ $\quad\therefore 7.\times\times\times\leq m\leq67.\times\times\times$

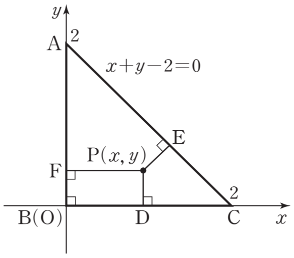
따라서 가능한 m의 값은 8, 9, 10, ⋯, 67이므로

N의 값은 113, 128, 143, ⋯, 998이다.

따라서 구하는 합은 $\frac{60(113+998)}{2}=33330$

73 답 ④

그림과 같이 삼각형 ABC를 점 B를 원점으로 하고 두 변 BC, BA를 각각 x축, y축의 양의 방향으로 하는 좌표평면 위에 옮겨서 생각하자.



이때, 점 P의 좌표를 (x, y) $(0<x<2,\ 0<y<2)$라 하면

점 P에서 세 변 BC, CA, AB에 각각 내린 수선의 발 D, E, F에 대하여 세 선분 PD, PE, PF의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\overline{PE}^2=\overline{PD}\times\overline{PF}$ ⋯ ㉠

또, 직선 AC의 방정식은 $x+y-2=0$이므로

$\overline{PE}=\frac{|x+y-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}$이고 $\overline{PD}=y$, $\overline{PF}=x$이다.

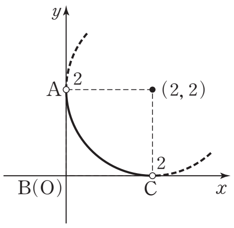
이것을 ㉠에 대입하면 $\frac{(x+y-2)^2}{2}=xy$에서

$x^2+y^2-4x-4y+4=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=2^2$

이때, $0<x<2$, $0<y<2$이므로

점 P가 나타내는 도형은 그림과 같이 중심이 $(2, 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 일부이다.



따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $\frac{1}{4}\times2\pi\times2=\pi$이다.

08 수열의 합

문제편 99P

01 답 ④

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}=a_{2\times1}+a_{2\times2}+a_{2\times3}+\cdots+a_{2\times50}=\sum_{k=1}^{50}a_{2k}$

한편, $a_n=n\times2^n$에서 $a_{2k}=2k\times2^{2k}=2k\times4^k$이므로

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}=\sum_{k=1}^{50}a_{2k}=\sum_{k=1}^{50}(2k\times4^k)$

02 답 ①

$\sum_{n=1}^{10}(3a_n+5b_n-2)=3\sum_{n=1}^{10}a_n+5\sum_{n=1}^{10}b_n-\sum_{n=1}^{10}2$

$=3\times10+5\times4-2\times10=30$

03 답 1330

$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{11}(k-1)^3$

$=(2^3+3^3+4^3+\cdots+11^3)-(0^3+1^3+2^3+\cdots+10^3)$

$=11^3-1^3=1330$

04 답 10

$\sum_{k=1}^{n}(k^2-2)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+3)=53$에서

$\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}3\right)=53$

$\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)-2n-3(n-1)=53$

$n^2-2n-3n+3=53$, $n^2-5n-50=0$

$(n-10)(n+5)=0$ $\quad\therefore n=10$ 또는 $n=-5$

그런데 n은 자연수이므로 $n=10$

[다른 풀이]

$\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+3)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+3)-(n^2+3)$이므로

$\sum_{k=1}^{n}(k^2-2)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+3)=53$에서

$\sum_{k=1}^{n}(k^2-2)-\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2+3)-(n^2+3)\right\}=53$

$\sum_{k=1}^{n}\{(k^2-2)-(k^2+3)\}+n^2+3=53$

$\sum_{k=1}^{n}(-5)+n^2+3=53$, $n^2-5n+3=53$

$n^2-5n-50=0$

(이하 동일)

05 답 1650

수열 1×2, 3×4, 5×6, 7×8, $\cdots$의 제 n항을 a_n이라 하면

$a_n=(2n-1)\times2n=4n^2-2n$이므로 이 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합 p는

$p=\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(4n^2-2n)=4\times\frac{10\times11\times21}{6}-2\times\frac{10\times11}{2}$

$=1540-110=1430$

또, 수열 1, $1+2$, $1+2+3$, $1+2+3+4$, $\cdots$의 제 n항을 b_n이라 하면 $b_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$이므로 이 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 q는

$q=\sum_{n=1}^{10}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}(n^2+n)=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times440=220$

$\therefore p+q=1650$

06 답 ⑤

$a_n=1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$

07 답 133

$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2$이므로

(i) $n=1$일 때, $a_1=1$

(ii) $n\geq2$일 때, $a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=n^2-(n-1)^2=2n-1$

(i), (ii)에 의하여 $a_n=2n-1\ (n\geq1)$이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(4k^2-4k+1)$

$=4\times\frac{10\times11\times21}{6}-4\times\frac{10\times11}{2}+10=1330$

$\therefore \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=133$

08 답 ①

1을 10으로 나눈 나머지는 1이므로 $a_1=1$

1×2를 10으로 나눈 나머지는 2이므로 $a_2=2$

$1\times2\times3$을 10으로 나눈 나머지는 6이므로 $a_3=6$

$1\times2\times3\times4$를 10으로 나눈 나머지는 4이므로 $a_4=4$

$n\geq5$이면 $1\times2\times3\times\cdots\times n$은 10의 배수이므로

$a_n=0\ (n\geq5)$이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=1}^{4}a_k+\sum_{k=5}^{100}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+0$

$=1+2+6+4+0=13$

09 답 50

$\sum_{n=1}^{99}na_{n+1}=a_2+2a_3+3a_4+\cdots+99a_{100}=300\ \cdots$ ㉠

$\sum_{n=1}^{100}(n+1)a_n=2a_1+3a_2+4a_3+\cdots+101a_{100}=400\ \cdots$ ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $2a_1+2a_2+2a_3+\cdots+2a_{100}=100$

$\therefore \sum_{n=1}^{100}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=\frac{100}{2}=50$

10 답 ④

$\sum_{k=n}^{2n} a_k = n^2$에 n 대신 1, 3, 7, 15를 각각 대입하여 더하면

$\sum_{k=1}^{30} a_k = \sum_{k=1}^{2} a_k + \sum_{k=3}^{6} a_k + \sum_{k=7}^{14} a_k + \sum_{k=15}^{30} a_k$

$= 1^2 + 3^2 + 7^2 + 15^2 = 284$

11 답 ③

$\sum_{k=1}^{10} \frac{2a_k}{a_k+1} = 2\sum_{k=1}^{10} \frac{(a_k+1)-1}{a_k+1} = 2\sum_{k=1}^{10}\left(1-\frac{1}{a_k+1}\right)$

$= 2\left(10-\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k+1}\right) = 2(10-1) = 18$

[다른 풀이]

$\frac{1}{a_k+1} = b_k$라 하면 $a_k = \frac{1-b_k}{b_k}$이고 $\sum_{k=1}^{10} b_k = 1$이므로

$\sum_{k=1}^{10} \frac{2a_k}{a_k+1} = \sum_{k=1}^{10} \frac{2\times\frac{1-b_k}{b_k}}{\frac{1-b_k}{b_k}+1} = \sum_{k=1}^{10}(2-2b_k)$

$= \sum_{k=1}^{10} 2 - 2\sum_{k=1}^{10} b_k = 20 - 2\times 1 = 18$

12 답 ②

$\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} k\right) = \sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)}{2}$

$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(m^2+m)$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n} m^2 + \sum_{m=1}^{n} m\right)$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 35$

즉, $n(n+1)(n+2) = 35\times 6 = 5\times 6\times 7$에서 $n=5$

13 답 ④

수열의 합 $1\times 10 + 3\times 9 + 5\times 8 + \cdots + 19\times 1$에서 n번째 항은 $(2n-1)(11-n)$이므로

$1\times 10 + 3\times 9 + 5\times 8 + \cdots + 19\times 1$

$= \sum_{n=1}^{10}(2n-1)(11-n)$

$= \sum_{n=1}^{10}(-2n^2+23n-11)$

$= -2\times\frac{10\times 11\times 21}{6} + 23\times\frac{10\times 11}{2} - 11\times 10$

$= -770 + 1265 - 110 = 385$

14 답 ②

$\sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{l} 2(k+l)\right\} = \sum_{l=1}^{10}\left\{2\times\frac{l(l+1)}{2} + 2l^2\right\} = \sum_{l=1}^{10}(3l^2+l)$

$= 3\times\frac{10\times 11\times 21}{6} + \frac{10\times 11}{2}$

$= 1155 + 55 = 1210$

15 답 201

수열 $\frac{1}{2^2-1}, \frac{1}{4^2-1}, \frac{1}{6^2-1}, \frac{1}{8^2-1}, \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = \frac{1}{(2n)^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$\therefore p = \sum_{n=1}^{100} a_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{199}-\frac{1}{201}\right)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{201}\right) = \frac{100}{201}$

또, 수열 $1, \frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+2}, \cdots$의 일반항을 b_n이라 하면

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n-(n-1)} = \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

$\therefore q = \sum_{n=1}^{100} b_n = \sum_{n=1}^{100}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$= (1-0) + (\sqrt{2}-1) + \cdots + (\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$= \sqrt{100} = 10$

$\therefore \frac{10q}{p} = \frac{100}{\frac{100}{201}} = 201$

16 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{a_k-a_{k+1}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}$

이므로 주어진 식의 좌변과 우변을 정리하면

$(\text{좌변}) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})$

$= \frac{1}{d}\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}) + (\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}) + \cdots + (\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}})\}$

$= \frac{1}{d}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})$

$(\text{우변}) = \frac{10}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}} = \frac{10(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n})}{a_1-a_n}$

$= \frac{10}{d(n-1)}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})$

즉, $\frac{1}{d}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}) = \frac{10}{d(n-1)}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})$에서

$\frac{10}{n-1} = 1,\ n-1 = 10$

$\therefore n = 11$

17 답 ②

$\frac{3}{1^2\times 2^2} + \frac{5}{2^2\times 3^2} + \frac{7}{3^2\times 4^2} + \cdots + \frac{99}{49^2\times 50^2}$

$= \left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{49^2}-\frac{1}{50^2}\right)$

$= 1 - \frac{1}{50^2} = \frac{2499}{2500}$

따라서 $a=2499,\ b=2500$이므로

$a+b = 4999$

18 답 95

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)a_k = n+1 \ (n=1, 2, 3, \cdots) \cdots$ ㉠

㉠에서 n 대신 $n-1$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)a_k = n \ (n=2, 3, 4, \cdots) \cdots$ ㉡

㉠－㉡을 하면 $n(n+1)a_n = 1 \ (n=2, 3, 4, \cdots)$

$\therefore a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \ (n=2, 3, 4, \cdots)$

한편, ㉠에서 $n=1$이면

$\sum_{k=1}^{1} k(k+1)a_k = 2$에서

$2a_1 = 2 \quad \therefore a_1 = 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{63} 64a_n = 64\left\{1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{63} - \frac{1}{64}\right)\right\}$

$= 64\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{64}\right) = 95$

19 답 ③

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n + 1 \ (n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하면

(i) $n=1$일 때,

$a_1 = S_1 = 3$

(ii) $n \ge 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2+n+1) - \{(n-1)^2 + (n-1) + 1\}$

$= 2n$

(i), (ii)에 의하여

$a_n = \begin{cases} 3 & (n=1) \\ 2n & (n \ge 2) \end{cases}$

따라서 $a_{2k-1} = \begin{cases} 3 & (k=1) \\ 4k-2 & (k \ge 2) \end{cases}$이므로

$\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{10} a_{2k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{10} (4k-2)$

$= a_1 + \sum_{k=1}^{10} (4k-2) - 2$

$= 3 + 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 20 - 2 = 201$

20 답 6

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log_2 n + \log_2(n+1)$에서

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

$= \log_2 n + \log_2(n+1) - \log_2(n-1) - \log_2 n$

$= \log_2(n+1) - \log_2(n-1)$

$= \log_2 \frac{n+1}{n-1} \ (n \ge 2)$

따라서 $a_{2n+1} = \log_2 \frac{(2n+1)+1}{(2n+1)-1} = \log_2 \frac{n+1}{n} \ (n \ge 1)$이므로

$\sum_{n=1}^{63} a_{2n+1} = \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \cdots + \log_2 \frac{64}{63}$

$= \log_2\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{64}{63}\right) = \log_2 64 = 6$

21 답 450

$a_{2n-1} = 3n-3$에서 n 대신 $n+1$을 대입하면

$a_{2n+1} = 3n$이므로

$\sum_{n=10}^{21} a_n = \sum_{n=5}^{10} (a_{2n} + a_{2n+1})$

$= \sum_{n=5}^{10} (7n + 3n) = \sum_{n=5}^{10} (10n)$

$= 10\sum_{n=5}^{10} n = 10\left(\sum_{n=1}^{10} n - \sum_{n=1}^{4} n\right)$

$= 10\left(\frac{10 \times 11}{2} - \frac{4 \times 5}{2}\right) = 450$

[다른 풀이]

$\sum_{n=10}^{21} a_n = \left(\sum_{n=1}^{10} a_{2n} - \sum_{n=1}^{4} a_{2n}\right) + \left(\sum_{n=1}^{11} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{5} a_{2n-1}\right)$

$= \left(\sum_{n=1}^{10} 7n - \sum_{n=1}^{4} 7n\right) + \left\{\sum_{n=1}^{11} (3n-3) - \sum_{n=1}^{5} (3n-3)\right\}$

$= \left(7 \times \frac{10 \times 11}{2} - 7 \times \frac{4 \times 5}{2}\right)$

$+ \left\{\left(3 \times \frac{11 \times 12}{2} - 33\right) - \left(3 \times \frac{5 \times 6}{2} - 15\right)\right\}$

$= (385 - 70) + \{(198 - 33) - (45 - 15)\} = 450$

22 답 465

$\sum_{n=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{5}(n \times 2^{k-1})\right\} - \sum_{k=1}^{5}\left\{\sum_{n=6}^{10}(n \times 2^{k-1})\right\}$

$= \sum_{n=1}^{10}\left(n\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1}\right) - \sum_{k=1}^{5}\left(2^{k-1}\sum_{n=6}^{10} n\right)$

$= \sum_{n=1}^{10}\left(n \times \frac{2^5-1}{2-1}\right) - \sum_{k=1}^{5}\left\{2^{k-1}\left(\frac{10 \times 11}{2} - \frac{5 \times 6}{2}\right)\right\}$

$= \sum_{n=1}^{10} 31n - \sum_{k=1}^{5} 40 \times 2^{k-1}$

$= 31 \times \frac{10 \times 11}{2} - 40 \times \frac{2^5-1}{2-1} = 465$

[다른 풀이]

$\sum_{n=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{5}(n \times 2^{k-1})\right\} - \sum_{k=1}^{5}\left\{\sum_{n=6}^{10}(n \times 2^{k-1})\right\}$

$= \left(\sum_{n=1}^{10} n\right)\left(\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1}\right)\left(\sum_{n=6}^{10} n\right)$

$= \left(\sum_{n=1}^{10} n - \sum_{n=6}^{10} n\right)\left(\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1}\right) = \left(\sum_{n=1}^{5} n\right)\left(\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1}\right)$

$= \frac{5 \times 6}{2} \times \frac{2^5-1}{2-1} = 465$

23 답 ④

수열 $\{a_n\}$의 제 9항을 $\frac{A}{B}$라 하면

$A = 1 + 3 + 5 + \cdots + 19$

$= \sum_{k=1}^{10} (2k-1) = 10^2 = 100$

$B = 19 + 21 + 23 + \cdots + 37$

$= \sum_{k=1}^{19} (2k-1) - \sum_{k=1}^{9} (2k-1)$

$= 19^2 - 9^2 = (19-9)(19+9) = 280$

$\therefore a_9 = \frac{A}{B} = \frac{100}{280} = \frac{5}{14}$

24 답 ③

k행의 수는 첫째항이 k이고 공차가 k인 등차수열을 이룬다.

이때, k행의 항수는 k개이므로 k행의 수의 합은

$k+2k+\cdots+k^2=k(1+2+\cdots+k)=\sum_{i=1}^{k}ki$

따라서 55개 수의 합은 1행에서 10행까지의 모든 수의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\left(\sum_{i=1}^{k}ik\right)&=\sum_{k=1}^{10}\left(k\sum_{i=1}^{k}i\right)\\&=\sum_{k=1}^{10}\left\{k\times\frac{k(k+1)}{2}\right\}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^3+k^2)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+\frac{10\times11\times21}{6}\right\}\\&=\frac{1}{2}(55^2+385)\\&=1705\end{aligned}$$

[다른 풀이]

k행의 수는 첫째항이 k, 공차가 k, 항수가 k개인 등차수열을 이룬다.

즉, k행의 마지막 수가 k^2이므로 k행의 수의 합은 $\frac{k(k+k^2)}{2}$

따라서 55개 수의 합은 1행에서 10행까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{k(k+k^2)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^3+k^2)=1705$$

25 답 ①

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}k^2\right)\\&=\sum_{m=1}^{n}\frac{m(m+1)(2m+1)}{\boxed{6}}\leftarrow\text{(가)}\\&=\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{m(m+1)(m+2)}{6}+\boxed{\frac{(m-1)m(m+1)}{6}}\right\}\leftarrow\text{(나)}\\&=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}\\&=\boxed{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}}\leftarrow\text{(다)}\end{aligned}$$

따라서 $a=6$, $f(m)=\frac{(m-1)m(m+1)}{6}$,

$g(n)=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$이므로

$$\begin{aligned}f(a)+g\left(\frac{a}{2}\right)&=f(6)+g(3)\\&=\frac{5\times6\times7}{6}+\frac{3\times4^2\times5}{12}\\&=35+20=55\end{aligned}$$

26 답 ⑤

$\frac{1}{1\times3\times5}+\frac{1}{3\times5\times7}+\frac{1}{5\times7\times9}+\cdots+\frac{1}{11\times13\times15}$에서

n번째 항은

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right\}$$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times3\times5}+\frac{1}{3\times5\times7}+\frac{1}{5\times7\times9}+\cdots+\frac{1}{11\times13\times15}\\&=\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\\&=\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}\right)+\left(\frac{1}{3\times5}-\frac{1}{5\times7}\right)+\right.\\&\qquad\left.\cdots+\left(\frac{1}{11\times13}-\frac{1}{13\times15}\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{13\times15}\right)=\frac{16}{195}\end{aligned}$$

27 답 11

$\frac{6}{1^2}+\frac{10}{1^2+2^2}+\frac{14}{1^2+2^2+3^2}+\cdots+\frac{46}{1^2+2^2+3^2+\cdots+11^2}$에서

분자는 첫째항이 6이고 공차가 4인 등차수열이므로 n번째 항의 분자는 $4n+2$이고, 분모는 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{6}{1^2}+\frac{10}{1^2+2^2}+\frac{14}{1^2+2^2+3^2}+\cdots+\frac{46}{1^2+2^2+3^2+\cdots+11^2}\\&=\sum_{n=1}^{11}\frac{4n+2}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\sum_{n=1}^{11}\frac{12}{n(n+1)}\\&=12\sum_{n=1}^{11}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=12\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}\\&=12\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{12}\right)=11\end{aligned}$$

28 답 19

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}&=\frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{n^2(n+1)-n(n+1)^2}\\&=\frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{-n(n+1)}\\&=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}\\&=\sum_{n=1}^{99}\left(\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right)\\&=\left(\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{\sqrt{99}}{99}-\frac{\sqrt{100}}{100}\right)\\&=1-\frac{\sqrt{100}}{100}=\frac{9}{10}\end{aligned}$$

따라서 $a=9$, $b=10$이므로 $a+b=19$

29 답 189

$a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{20}=400-n^2\ (n=1, 2, \cdots, 20)$ ⋯ ㉠

㉠에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{20}=400-(n+1)^2\ (n=0, 1, \cdots, 19)$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $a_n=2n+1$ $(n=1, 2, \cdots, 19)$

n 대신 $2m$을 대입하면

$a_{2m}=2(2m)+1=4m+1$ $(m=1, 2, \cdots, 9)$

이때, ㉠에서 $n=20$일 때, $a_{20}=0$이므로

$\sum_{m=1}^{10} a_{2m}=\sum_{m=1}^{9} a_{2m}+a_{20}=\sum_{m=1}^{9}(4m+1)+0=189$

30 답 ③

$\sum_{k=1}^{n} a_k=n(n+1)(n+2)(n+3)$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=\sum_{k=1}^{1} a_k=1\times2\times3\times4=24$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k\\&=n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)\\&=4n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

(i), (ii)에 의하여 $a_n=4n(n+1)(n+2)$ $(n\geq1)$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{4(k+1)}{a_k}&=\sum_{k=1}^{10}\frac{4(k+1)}{4k(k+1)(k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)=\frac{175}{264}\end{aligned}$$

31 답 ③

$\sum_{k=1}^{n} ka_k=n^3+3n^2+2n+1$에서

(i) $n=1$일 때,

$\sum_{k=1}^{1} ka_k=1\times a_1=1^3+3\times1^2+2\times1+1=7$

$\therefore a_1=7$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}na_n&=\sum_{k=1}^{n} ka_k-\sum_{k=1}^{n-1} ka_k\\&=n^3+3n^2+2n+1-(n-1)^3-3(n-1)^2-2(n-1)-1\\&=n^3-(n-1)^3+3\{n^2-(n-1)^2\}+2\{n-(n-1)\}\\&=\{n^2+n(n-1)+(n-1)^2\}+3(2n-1)+2\\&=3n^2-3n+1+6n-3+2=3n^2+3n=3n(n+1)\end{aligned}$$

$\therefore a_n=3(n+1)$

(i), (ii)에 의하여 $a_n=\begin{cases}7 & (n=1)\\ 3(n+1) & (n\geq2)\end{cases}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{19}\frac{1}{(k+2)a_k}&=\frac{1}{3a_1}+\sum_{k=2}^{19}\frac{1}{3(k+1)(k+2)}\\&=\frac{1}{21}+\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{19}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{21}+\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}\\&=\frac{1}{21}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{21}+\frac{2}{21}=\frac{1}{7}\end{aligned}$$

32 답 53

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}=(n+1)^2$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ $\cdots$ ㉠

㉠에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}=n^2$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$ $\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=2n+1$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n=n(2n+1)$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

한편, ㉠에서 $n=1$일 때,

$\sum_{k=1}^{1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}=(1+1)^2$에서

$\frac{a_1}{1}=4$ $\quad\therefore a_1=4$

또, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=n(2n+1)$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

이라 하면 $S_1=a_1=4$이므로

$a_2=S_2-S_1=10-4=6$

$a_{10}=S_{10}-S_9=210-171=39$

$\therefore 2a_1+a_2+a_{10}=2\times4+6+39=53$

33 답 ③

$$\begin{aligned}S_1&=(100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots+2^2-1^2)\pi\\&=\sum_{k=1}^{50}\{(2k)^2-(2k-1)^2\}\pi\\&=\sum_{k=1}^{50}(4k-1)\pi\\&=\left(4\times\frac{50\times51}{2}-50\right)\pi\\&=5050\pi\end{aligned}$$

한편, $S_1+S_2=100^2\pi$에서

$S_2=100^2\pi-S_1=4950\pi$이므로

$S_1-S_2=100\pi$

34 답 ③

그림과 같은 원리를 이용하면

$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)+(2n-1)+\cdots+5+3+1$
$=n^2+(n+1)^2$

이때, 주어진 식에서 $2n+1=201$에서 $n=100$이므로

주어진 식의 값은

$100^2+101^2=10000+10201=20201$

35 답 385

제 10행의 처음 수가 1, 마지막 수가 19이므로

모든 수의 합을 주어진 방법으로 구하면

$\frac{1}{3}\times\frac{10(10+1)}{2}\times(2\times1+19)=385$

36 답 55

자연수 k에 대하여 $n=2k$일 때와 $n=2k-1$일 때로 나누어 생각하자.

(i) $n=2k$일 때,

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2k(2k+1)}{2}=k(2k+1)=2k\times k+k$$

이므로 $2k$로 나눈 나머지는 $k=\frac{n}{2}$이다. $\therefore a_n=\frac{n}{2}$

(ii) $n=2k-1$일 때,

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(2k-1)\times 2k}{2}=(2k-1)\times k$$

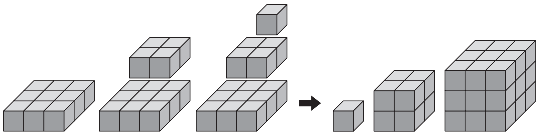
이므로 $2k-1$로 나눈 나머지는 0이다. $\therefore a_n=0$

(i), (ii)에 의하여 $a_n=\begin{cases}0 & (n\text{은 홀수})\\ \frac{n}{2} & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}a_n=0+\frac{2}{2}+0+\frac{4}{2}+\cdots+0+\frac{20}{2}=55$$

37 답 ⑤

그림의 벽돌을 재배열하면 다음과 같다.



즉, 10개의 조형물을 만들려면

$(1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3)$개의 벽돌이 필요하다.

$$\therefore 1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3=\left\{\frac{10(10+1)}{2}\right\}^2=3025(\text{개})$$

[다른 풀이]

10개의 조형물의 각 벽돌의 개수를 세어보면

$$(10^2)+(10^2+9^2)+(10^2+9^2+8^2)+\cdots+(10^2+9^2+\cdots+1^2)$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{n}(11-k)^2\right\}=\sum_{n=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2-22k+121)\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-22\times\frac{n(n+1)}{2}+121n\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{10}(2n^3-63n^2+661n)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{2\times\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2-63\times\frac{10\times 11\times 21}{6}+661\times\frac{10\times 11}{2}\right)$$

$$=\frac{10\times 11}{6}\left(55-\frac{441}{2}+\frac{661}{2}\right)=\frac{10\times 11\times 165}{6}$$

$=3025$(개)

38 답 ②

주어진 규칙으로 수를 나열해 나가면 제 10항은

$$\underbrace{11\cdots 1}_{10\text{개}}\underbrace{55\cdots 5}_{9\text{개}}6$$

$$=(10^{19}+10^{18}+\cdots+10^{10})+5\times(10^9+10^8+\cdots+10+1)+1$$

$$=10^{10}\times\frac{10^{10}-1}{10-1}+5\times\frac{10^{10}-1}{10-1}+1$$

$$=\frac{1}{9}\times 10^{20}+\frac{4}{9}\times 10^{10}+\frac{4}{9}=\left(\frac{10^{10}+2}{3}\right)^2$$

39 답 21

n번째 문제를 풀 때까지 윤규가 필요한 점수는

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}(\text{점})$$

이것은 주어진 기본 점수 250점 이하이므로

$\frac{n(n+1)}{2}\le 250$에서 $n(n+1)\le 500$

이때, $21\times 22<500<22\times 23$이므로 부등식을 만족시키는 n의 최댓값은 21이다.

따라서 윤규가 받을 수 있는 상품의 최대 개수는 21이다.

40 답 7

$$\sum_{k=1}^{n}(k+2)^2-\sum_{k=3}^{n}(k^2+2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k+2)^2-\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2+2)-\sum_{k=1}^{2}(k^2+2)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k+2)^2-\sum_{k=1}^{n}(k^2+2)+9$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(4k+2)+9$$

$=2n^2+4n+9$ ---------- ⓐ

이때, $\sum_{k=1}^{n}(k+2)^2-\sum_{k=3}^{n}(k^2+2)=135$이므로

$2n^2+4n+9=135$에서

$2n^2+4n-126=0$

$n^2+2n-63=0$

$(n+9)(n-7)=0$

$\therefore n=7$ ($\because n$은 자연수) ---------- ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 주어진 식의 좌변을 간단히 한다. [60%]

ⓑ 방정식을 풀어 자연수 n의 값을 구한다. [40%]

41 답 330

$\sum_{k=1}^{m}k=\frac{m(m+1)}{2}=\frac{m^2+m}{2}$ ---------- ⓐ

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(m^2+m)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$ ---------- ⓑ

$$\therefore \sum_{n=1}^{8}\left\{\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\right\}=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{8}(n^3+3n^2+2n)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{8\times 9}{2}\right)^2+3\times\frac{8\times 9\times 17}{6}+2\times\frac{8\times 9}{2}\right\}$$

$=330$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $\sum_{k=1}^{m}k$를 m에 대하여 나타낸다. [30%]

ⓑ $\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)$를 n에 대하여 나타낸다. [30%]

ⓒ $\sum_{n=1}^{8}\left\{\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)\right\}$의 값을 구한다. [40%]

일등급 UP

＊ 연속하는 자연수의 곱의 합 공식

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

을 이용하면 풀이가 매우 간단해진다.

$\sum_{n=1}^{8}\left\{\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} k\right)\right\}=\sum_{n=1}^{8}\left\{\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} m(m+1)\right\}$

$=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{8} n(n+1)(n+2)$

$=\frac{1}{6}\times\frac{8\times9\times10\times11}{4}=330$

42 답 28

조건 (가)에서 두 집합 A, B가 서로 같은 집합이므로

집합 A의 원소가 되는 수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$의 값은 집합 B의 원소인 0, 1, 2 중 하나이다.

이때, $a_n=1$을 만족시키는 n의 값이 x개, $a_n=2$를 만족시키는 n의 값이 y개라 하면

$\sum_{n=1}^{10} a_n=x+2y$, $\sum_{n=1}^{10}(a_n)^2=x+4y$ (단, $x+y<10$) ······ ⓐ

조건 (나)에서 $\sum_{n=1}^{10}(a_n)^2=\frac{8}{5}\sum_{n=1}^{10} a_n$이므로

$x+4y=\frac{8}{5}(x+2y)$, $5x+20y=8x+16y$

$\therefore 4y=3x$

이때, x, y는 $x+y<10$인 자연수이므로 이를 만족시키는 것은 $x=4$, $y=3$뿐이다. ······ ⓑ

$\therefore \sum_{n=1}^{10}(a_n)^3=1^3\times4+2^3\times3=28$ ······ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $a_n=1$을 만족시키는 n의 값을 x개, $a_n=2$를 만족시키는 n의 값을 y개라 하고 $\sum_{n=1}^{10} a_n$, $\sum_{n=1}^{10}(a_n)^2$을 x, y에 대한 식으로 나타낸다. [40%]

ⓑ x, y의 값을 각각 구한다. [40%]

ⓒ $\sum_{n=1}^{10}(a_n)^3$의 값을 구한다. [20%]

43 답 ①

$\sum_{k=1}^{7} a_k=\sum_{k=1}^{6}(a_k+1)$에서

$a_1+a_2+\cdots+a_7=(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_6+1)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_6)+6$

$\therefore a_7=6$

[다른 풀이]

$\sum_{k=1}^{7} a_k=\sum_{k=1}^{6} a_k+a_7$이고

$\sum_{k=1}^{6}(a_k+1)=\sum_{k=1}^{6} a_k+\sum_{k=1}^{6} 1=\sum_{k=1}^{6} a_k+6$이므로

$\sum_{k=1}^{7} a_k=\sum_{k=1}^{6}(a_k+1)$에서 $\sum_{k=1}^{6} a_k+a_7=\sum_{k=1}^{6} a_k+6$

$\therefore a_7=6$

44 답 ③

$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

이므로

$\log_4(2^{a_1}\times2^{a_2}\times2^{a_3}\times\cdots\times2^{a_{12}})=\log_4(2^{a_1+a_2+\cdots+a_{12}})$

$=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12})$

$=\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2)$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{12} n^2$

$=\frac{1}{2}\times\frac{12\times13\times25}{6}=325$

45 답 120

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k=n(n+1)(4n-1)$에서

$(2n-1)a_n=b_n$이라 하면

(i) $n=1$일 때,

$b_1=\sum_{k=1}^{1} b_k=1\times2\times3=6$

(ii) $n\ge2$일 때,

$b_n=\sum_{k=1}^{n} b_k-\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$=n(n+1)(4n-1)-(n-1)n(4n-5)$

$=6n(2n-1)$ $(n\ge2)$

(i), (ii)에 의하여 $b_n=6n(2n-1)$ $(n\ge1)$이므로

$a_n=\frac{b_n}{2n-1}=6n$ $(n\ge1)$

$\therefore a_{20}=6\times20=120$

46 답 201

함수 $f(x)=x^2+x-\frac{1}{3}$에 대하여

$f(n)<k<f(n)+1$에서

$n^2+n-\frac{1}{3}<k<n^2+n+\frac{2}{3}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

이 부등식을 만족시키는 정수 k는 n^2+n이므로

$a_n=n^2+n$

$\therefore \sum_{n=1}^{100}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n^2+n}$

$=\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n(n+1)}$

$=\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$

$=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$

따라서 $p=101$, $q=100$이므로 $p+q=201$

47 답 ①

$b_n=(a_n)^n$이라 하면 $b_1=10$이고 주어진 식으로부터

$b_{n+1}=\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$ $(n\ge1)$ ⋯ ㉠

이다. $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$라 하면 ㉠에서 $b_{n+1}=\dfrac{S_n}{n}$이므로

$S_{n+1}-S_n=\dfrac{S_n}{n}$

$\therefore S_{n+1}=\dfrac{S_n}{n}+S_n=\underbrace{\boxed{\dfrac{n+1}{n}}}_{(가)}S_n$ ⋯ ㉡

이때, $S_1=10$, $S_n=S_1\times\dfrac{S_2}{S_1}\times\dfrac{S_3}{S_2}\times\cdots\times\dfrac{S_n}{S_{n-1}}$ $(n\ge2)$

이고 ㉡에서 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{n+1}{n}$이므로

$S_n=S_1\times\dfrac{S_2}{S_1}\times\dfrac{S_3}{S_2}\times\cdots\times\dfrac{S_n}{S_{n-1}}$

$=b_1\times\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-1}$

$=\underbrace{\boxed{10n}}_{(나)}$ $(n\ge1)$

이다.

따라서 $f(n)=\dfrac{n+1}{n}$, $g(n)=10n$이므로

$f(5)\times g(6)=\dfrac{6}{5}\times60=72$

48 답 ③

평행한 접선은 지름을 양 끝으로 하는 접선이고, 원 밖의 한 점에서는 접선을 두 개 밖에 그을 수 없으므로 새로운 접선을 그을 때마다 원래의 접선과 반드시 새로운 교점을 만들어 낸다.

따라서 접선의 개수에 따른 접점의 개수는 다음과 같다.

접선의 개수	새로운 교점의 개수	접점의 총 개수
1	0	0
2	1	0+1
3	2	0+1+2
⋮	⋮	⋮
10	9	0+1+2+⋯+9=45

49 답 181

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$\sum_{n=1}^{21}\{(-1)^{n+1}a_n\}=a_1-a_2+a_3-\cdots-a_{20}+a_{21}$

$=a_1+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{21}-a_{20})$

$=a+10d=4$ ⋯ ㉠

$\sum_{n=1}^{10}\dfrac{6}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{10}\dfrac{6}{a_{n+1}-a_n}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\dfrac{6}{d}\sum_{n=1}^{10}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\dfrac{6}{d}\left\{\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}\right)+\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{a_{10}}-\dfrac{1}{a_{11}}\right)\right\}$

$=\dfrac{6}{d}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{11}}\right)=\dfrac{6}{d}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{4}\right)=5$ ($\because$ ㉠)

$\therefore 12-3a=10ad$ ⋯ ㉡

㉠에서 $10d=4-a$이므로 ㉡에 대입하면

$12-3a=a(4-a)$

$a^2-7a+12=0$

$(a-3)(a-4)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=4$

(i) $a=3$일 때, ㉠에서 $d=\dfrac{1}{10}$

(ii) $a=4$일 때, ㉠에서 $d=0$

이때, $d\ne0$이므로

$a=3$, $d=\dfrac{1}{10}$

$\therefore a_n=3+(n-1)\times\dfrac{1}{10}$

$a_m=21$에서 $3+(m-1)\times\dfrac{1}{10}=21$

$\therefore m=181$

50 답 489

$a_n=m$이라 하면 $k^2\le n$을 만족시키는 k가 m개이므로

$k^2\le n$을 만족시키는 k는 1, 2, 3, ⋯, m이다.

따라서 주어진 식의 k에 m을 대입하면 만족시키고 $m+1$을 대입하면 만족시키지 않으므로

$m^2\le n<(m+1)^2$

즉, $n=m^2$, m^2+1, ⋯, $(m+1)^2-1$일 때 $a_n=m$이다.

$n=1, 2, 3$일 때, $a_n=1$

$n=4, 5, \cdots, 8$일 때, $a_n=2$

$n=9, 10, \cdots, 15$일 때, $a_n=3$

⋮

$n=64, 65, \cdots, 80$일 때, $a_n=8$

$n=81, 82, \cdots, 85$일 때, $a_n=9$

따라서 $a_n=m$을 만족시키는 n은 $(2m+1)$개 있다.

이때, $85=(3+5+7+\cdots+17)+5$이므로

$\sum_{n=1}^{85}a_n=\sum_{n=1}^{80}a_n+\sum_{n=81}^{85}a_n=\sum_{m=1}^{8}m(2m+1)+9\times5$

$=2\sum_{m=1}^{8}m^2+\sum_{m=1}^{8}m+45$

$=2\times\dfrac{8\times9\times17}{6}+\dfrac{8\times9}{2}+45=489$

51 답 ⑤

① $\sum_{n=1}^{100}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}$

② $\sum_{n=1}^{50}\dfrac{1}{2n-1}-\sum_{n=1}^{50}\dfrac{1}{2n}$

$=\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{99}\right)-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{100}\right)$

$=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}$

③ $\sum_{n=1}^{50}\dfrac{1}{2n(2n-1)}=\sum_{n=1}^{50}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right)$이고 이는 ②와 같다.

④ $\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{50}\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{50}\right)$

$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{100}\right)$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

⑤ $\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}-\sum_{n=51}^{100}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{50}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{50}$

52 답 47

$1\le n\le 50$인 자연수 n을 소인수분해하였을 때 각각의 소수 2의 지수의 합을 구하면 된다.

$1\le n\le 50$에서

2의 배수의 개수 : 25

2^2의 배수의 개수: 12

2^3의 배수의 개수: 6

2^4의 배수의 개수: 3

2^5의 배수의 개수 : 1

이므로

$k=1$인 a_n의 개수 : $25-12=13$

$k=2$인 a_n의 개수 : $12-6=6$

$k=3$인 a_n의 개수 : $6-3=3$

$k=4$인 a_n의 개수 : $3-1=2$

$k=5$인 a_n의 개수 : 1

$\therefore \sum_{n=1}^{50}a_n=1\times13+2\times6+3\times3+4\times2+5\times1=47$

일등급 UP

*** $\sum_{n=1}^{50}a_n$의 값**

n이 홀수이면 $a_n=0$이므로 n이 짝수인 경우만 생각해 보자.

n:	2	4	6	8	10	12	14	16	
	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	
m:	1	1	3	1	5	3	7	1	
	×	×	×	×	×	×	×	×	
	2	2	2	2	2	2	2	2	⇒ 2의 배수의 개수 : 8
		×		×		×		×	
		2		2		2		2	⇒ 2^2의 배수의 개수 : 4
				×				×	
				2				2	⇒ 2^3의 배수의 개수 : 2
								×	
								2	⇒ 2^4의 배수의 개수 : 1
k:	1	2	1	3	1	2	1	4	⇒ 계 : 15

에서

$\sum_{n=1}^{50}a_n=\frac{50}{2}+\frac{25-1}{2}+\frac{12}{2}+\frac{6}{2}+\frac{3-1}{2}$

$=25+12+6+3+1=47$

53 답 ①

$0<\frac{1}{3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{4^k}<\frac{1}{4^n}$에서 $\frac{1}{3}-\frac{1}{4^n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{4^k}<\frac{1}{3}$

각 변에 4^n을 곱하면 정리하면

$\frac{4^n-3}{3}<\sum_{k=1}^{n}4^{n-k}a_k<\frac{4^n}{3}$ … ㉠

이때, $S_n=\sum_{k=1}^{n}4^{n-k}a_k$라 하면 ㉠에 의하여

$S_n=\frac{4^n-2}{3}$ 또는 $S_n=\frac{4^n-1}{3}$

자연수 n에 대하여 a_n의 값이 항상 자연수이므로

$\sum_{k=1}^{n}4^{n-k}a_k$의 값도 항상 자연수이어야 한다. 그런데

$4^n-2=(4^n-1)-1=(4-1)(4^{n-1}+4^{n-2}+\cdots+1)-1$

$=3Q-1$ (Q는 정수)

이므로 $\frac{4^n-2}{3}$는 자연수가 아니다.

$\therefore S_n=\frac{4^n-1}{3}$

한편, $S_n=\sum_{k=1}^{n}4^{n-k}a_k$에서

$S_n=4^{n-1}a_1+4^{n-2}a_2+4^{n-3}a_3+\cdots+4a_{n-1}+a_n$ … ㉡

$S_{n-1}=4^{n-2}a_1+4^{n-3}a_2+4^{n-4}a_3+\cdots+a_{n-1}$ … ㉢

㉡$-4\times$㉢을 하면 $S_n-4S_{n-1}=a_n$이므로

$a_n=\frac{4^n-1}{3}-4\times\frac{4^{n-1}-1}{3}=1$ $(n\ge2)$

또, $a_1=S_1=1$이므로 $a_n=1$ $(n\ge1)$

$\therefore \sum_{n=1}^{100}a_n=100$

01 답 ②

$a_{n+1}-a_n=4$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이다.

$\therefore a_8=a_4+4\times4=-10+16=6$

02 답 ③

$a_{n+1}=r\times a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열이다. 이 수열의 첫째항을 a라 하면 $a_n=a\times r^{n-1}$이므로

$(a_6)^2=8(a_3)^2$에서

$(a\times r^5)^2=8(a\times r^2)^2$, $r^6=8$

$\therefore r^2=2$

03 답 201

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$을 차례로 대입하면

$a_2=\dfrac{a_1}{a_1+1}=\dfrac{2}{2+1}=\dfrac{2}{3}$

$a_3=\dfrac{a_2}{a_2+1}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1}=\dfrac{2}{5}$

$a_4=\dfrac{a_3}{a_3+1}=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+1}=\dfrac{2}{7}$

$\vdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$의 제 n항의 분자는 2, 분모는 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열이다.

따라서 $a_n=\dfrac{2}{2n-1}$에서 $a_{100}=\dfrac{2}{199}$이므로 $p=199$, $q=2$이다.

$\therefore p+q=201$

04 답 ⑤

$\displaystyle\sum_{n=1}^{20}a_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4+a_5)+\cdots+(a_{18}+a_{19}+a_{20})$

$=(1+2)+\underbrace{6+6+\cdots+6}_{6개}=3+6\times6=39$

[다른 풀이]

$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=6$에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$을 차례로 대입하면

$a_1+a_2+a_3=1+2+a_3=6$에서 $a_3=3$

$a_2+a_3+a_4=2+3+a_4=6$에서 $a_4=1$

$a_3+a_4+a_5=3+1+a_5=6$에서 $a_5=2$

$a_4+a_5+a_6=1+2+a_6=6$에서 $a_6=3$

$\vdots$

따라서 자연수 k에 대하여 $a_{3k-2}=1$, $a_{3k-1}=2$, $a_{3k}=3$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{20}a_n=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{16}+a_{17}+a_{18})+a_{19}+a_{20}$

$=\underbrace{6+6+\cdots+6}_{6개}+1+2=6\times6+1+2=39$

05 답 46

$a_{n+1}-a_n=n$에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례로 대입하면

$a_2-a_1=1$

$a_3-a_2=2$

$a_4-a_3=3$

$\vdots$

$a_{10}-a_9=9$

양변을 변끼리 더하면

$a_{10}-a_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}k$

$\therefore a_{10}=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{9}k=1+\dfrac{9\times10}{2}=46$

06 답 26

(ⅰ) $n=\underset{(가)}{\boxed{5}}$일 때,

(좌변)$-$(우변)$=\dfrac{5}{2}-\log_2 5=\dfrac{5-2\log_2 5}{2}$

$=\dfrac{\log_2 32-\log_2 25}{2}>0$

따라서 (좌변)>(우변)이 되어 부등식 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq5)$일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{k}{2}>\log_2 k$

양변에 $\dfrac{1}{2}$을 더하면

$\dfrac{k+1}{2}>\log_2 k+\dfrac{1}{2}=\log_2\sqrt{2}k$

$>\log_2(k+1)$ $(\because k\geq5)$

따라서 $n=\underset{(나)}{\boxed{k+1}}$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq5$인 자연수 n에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

따라서 $a=5$, $f(k)=k+1$이므로

$f(a^2)=f(5^2)=5^2+1=26$

07 답 ⑤

$a_1=3$, $a_2=2$이고 $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}$이므로

$a_1=3$, $a_2=2$, $a_3=\dfrac{2+1}{3}=1$, $a_4=\dfrac{1+1}{2}=1$,

$a_5=\dfrac{1+1}{1}=2$, $a_6=\dfrac{2+1}{1}=3$, $a_7=\dfrac{3+1}{2}=2$,

$a_8=\dfrac{2+1}{3}=1$, $a_9=\dfrac{1+1}{2}=1$, $\cdots$

따라서 자연수 k에 대하여

$a_1=a_6=a_{11}=\cdots=a_{5k-4}=3$

$a_2=a_7=a_{12}=\cdots=a_{5k-3}=2$

$a_3=a_8=a_{13}=\cdots=a_{5k-2}=1$

$a_4=a_9=a_{14}=\cdots=a_{5k-1}=1$

$a_5=a_{10}=a_{15}=\cdots=a_{5k}=2$

이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{30}a_n=6(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=6\times9=54$

08 답 1

$a_{n+1}=\frac{na_n}{n+1}+\frac{1}{n+1}$의 양변에 $n+1$을 곱하면

$(n+1)a_{n+1}=na_n+1$ ⋯ ㉠

이때, $na_n=b_n$이라 하면 $(n+1)a_{n+1}=b_{n+1}$이므로

㉠에서 $b_{n+1}=b_n+1$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=1\times a_1=1$이고 공차가 1인 등차수열이므로 $b_n=1+(n-1)\times 1=n$

따라서 $na_n=n$에서 $a_n=1$

$\therefore a_{100}=1$

[다른 풀이]

$a_{n+1}=\frac{na_n}{n+1}+\frac{1}{n+1}$에 n 대신 1, 2, 3, 4, ⋯를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$a_3=\frac{2a_2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$

$a_4=\frac{3a_3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

$a_5=\frac{4a_4}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$

⋮

따라서 $a_n=1$이므로 $a_{100}=1$

09 답 3

$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=3$에 n 대신 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하면

$1+2+a_3=3$에서 $a_3=0$

$2+0+a_4=3$에서 $a_4=1=a_1$

$0+1+a_5=3$에서 $a_5=2=a_2$

⋮

따라서 자연수 k에 대하여

$a_1=a_4=a_7=\cdots=a_{3k-2}=1$

$a_2=a_5=a_8=\cdots=a_{3k-1}=2$

$a_3=a_6=a_9=\cdots=a_{3k}=0$이므로

$a_{10}+a_{20}+a_{30}=a_{3\times 4-2}+a_{3\times 7-1}+a_{3\times 10}=1+2+0=3$

10 답 ①

$(n+2)a_{n+1}=na_n+1$의 양변에 $n+1$을 곱하면

$(n+1)(n+2)a_{n+1}=n(n+1)a_n+(n+1)$

이때, $n(n+1)a_n=b_n$이라 하면

$b_{n+1}=b_n+(n+1)$ ⋯ ㉠

㉠에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입하면

$b_2=b_1+(1+1)$

$b_3=b_2+(2+1)$

⋮

$b_{10}=b_9+(9+1)$

양변을 변끼리 더하면 $b_{10}=b_1+\sum_{k=1}^{9}(k+1)$에서

$10\times 11\times a_{10}=1\times 2\times a_1+\sum_{k=1}^{9}(k+1)=2+\frac{9\times 10}{2}+9=56$

$\therefore 55a_{10}=28$

11 답 ①

$a_{n+1}=\frac{3n}{n+1}a_n$에 n 대신 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_2=3\times\frac{1}{2}\times a_1$

$a_3=3\times\frac{2}{3}\times a_2$

$a_4=3\times\frac{3}{4}\times a_3$

$a_5=3\times\frac{4}{5}\times a_4$

$a_6=3\times\frac{5}{6}\times a_5$

양변을 변끼리 곱하면

$a_6=3^5\times\frac{1}{6}\times a_1=3^5\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{9}=9$

[다른 풀이]

$a_{n+1}=\frac{3n}{n+1}a_n$의 양변에 $n+1$을 곱하면

$(n+1)a_{n+1}=3\times na_n$

이때, $na_n=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=3b_n$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=1\times\frac{2}{9}=\frac{2}{9}$이고

공비가 3인 등비수열이므로 $b_n=\frac{2}{9}\times 3^{n-1}$

따라서 $na_n=\frac{2}{9}\times 3^{n-1}$에서

$6\times a_6=\frac{2}{9}\times 3^{6-1}=54$

$\therefore a_6=9$

12 답 ①

$a_{n+1}-a_n=2$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 0이고 공차가 2인 등차수열이므로 $a_n=0+(n-1)\times 2=2n-2$

이것을 $b_{n+1}=a_n+b_n+1$에 대입하여 정리하면

$b_{n+1}-b_n=2n-1$

n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하면

$b_2-b_1=2\times 1-1$

$b_3-b_2=2\times 2-1$

⋮

$b_n-b_{n-1}=2(n-1)-1$

양변을 변끼리 더하면 $b_n-b_1=\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

이때, $b_1=0$이므로 $b_n=\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$\therefore b_{10}=\sum_{k=1}^{9}(2k-1)=2\times\frac{9\times 10}{2}-1\times 9=81$

13 답 33

$a_{n+1}=2a_n-3$을 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$라 하면

$a_{n+1}=2a_n-2\alpha+\alpha=2a_n-\alpha$

$\therefore \alpha=3$

즉, $a_{n+1}-3=2(a_n-3)$에서 $a_n-3=b_n$이라 하면

$b_{n+1}=2b_n$이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이

$b_1=a_1-3=-2$이고 공비가 2인 등비수열이다.

따라서 $b_n=(-2)\times 2^{n-1}=-2^n$이므로

$a_n-3=-2^n$

$\therefore \log_2(3-a_{33})=\log_2 2^{33}=33$

[다른 풀이]

$a_{n+1}=ma_n+l$ 꼴의 점화식의 일반항은 항상

$a_n=p\times m^n+q$ 꼴로 나타내어진다.

$a_{n+1}=2a_n-3$에서 $a_1=1$, $a_2=2a_1-3=-1$이므로

$a_1=p\times 2^1+q=1$에서 $2p+q=1$ ⋯ ㉠

$a_2=p\times 2^2+q=-1$에서 $4p+q=-1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=-1,\ q=3\qquad \therefore a_n=-2^n+3$

$\therefore \log_2(3-a_{33})=\log_2\{3-(-2^{33}+3)\}=\log_2 2^{33}=33$

일등급 Up

*** $a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴의 점화식에서 α 구하기**

$a_{n+1}=2a_n-3$을 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$로 변형할 때의 α는 주어진 점화식 $a_{n+1}=2a_n-3$의 a_{n+1}, a_n 대신 α를 대입하여 쉽게 구할 수 있다.

즉, $a_{n+1}=2a_n-3$에서 $\alpha=2\alpha-3\qquad \therefore \alpha=3$

이때, 방정식 $\alpha=2\alpha-3$을 점화식 $a_{n+1}=2a_n-3$의 특성방정식이라 한다.

14 답 ③

$a_{n+1}=3a_n+4$에서 $a_{n+1}+2=3(a_n+2)$이므로 수열 $\{a_n+2\}$는 첫째항이 $a_1+2=3$이고 공비가 3인 등비수열이다.

따라서 $a_n+2=3\times 3^{n-1}=3^n$이므로 $a_n=3^n-2$

한편, $n=1, 2, 3, \cdots$일 때의 3^n의 일의 자리의 숫자를 차례로 나열하면 3, 9, 7, 1, 3, ⋯이므로 $a_n=3^n-2$의 일의 자리의 숫자는 차례로 1, 7, 5, 9, 1, ⋯이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 100항까지의 값 중에서 5의 배수인 것은 a_3, a_7, ⋯, a_{99}의 25개이다.

15 답 ②

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3-2a_n}$의 양변에 역수를 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3-2a_n}{a_n}=\dfrac{3}{a_n}-2$

이때, $\dfrac{1}{a_n}=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=3b_n-2$에서

$b_{n+1}-1=3(b_n-1)$

따라서 수열 $\{b_n-1\}$은 첫째항이 $b_1-1=\dfrac{1}{a_1}-1=1$이고

공비가 3인 등비수열이므로 $b_n-1=1\times 3^{n-1}$

$\therefore b_n=3^{n-1}+1$

한편, $\dfrac{1}{300}<a_n<\dfrac{1}{100}$에서 $100<\dfrac{1}{a_n}=b_n<300$이므로

$100<3^{n-1}+1<300\qquad \therefore 99<3^{n-1}<299$

이때, $3^4=81$, $3^5=243$, $3^6=729$이므로 $n-1=5$, 즉 $n=6$일 때만 주어진 부등식을 만족시키므로 구하는 항의 개수는 1이다.

16 답 ④

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

이므로 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=a_1$이고

공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore a_{n+1}-a_n=a_1\times 2^{n-1}$

n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하면

$a_2-a_1=a_1\times 2^0$

$a_3-a_2=a_1\times 2^1$

$a_4-a_3=a_1\times 2^2$

⋮

$a_n-a_{n-1}=a_1\times 2^{n-2}$

양변을 변끼리 더하면

$a_n-a_1=a_1\times \sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=a_1\times \dfrac{1\times(2^{n-1}-1)}{2-1}=a_1\times(2^{n-1}-1)$

이때, $a_4=8$이므로 $a_4-a_1=a_1\times(2^{4-1}-1)$에서

$8-a_1=7a_1\qquad \therefore a_1=1$

따라서 $a_n=a_1\times(2^{n-1}-1)+a_1=2^{n-1}$이므로

$a_{10}=2^9=512$

17 답 ⑤

$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$이므로 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=4-2=2$이고 공비가 3인 등비수열이다.

$\therefore a_{n+1}-a_n=2\times 3^{n-1}$

n 대신 1, 2, 3, ⋯, 6을 차례로 대입하면

$a_2-a_1=2\times 3^0$

$a_3-a_2=2\times 3^1$

$a_4-a_3=2\times 3^2$

⋮

$a_7-a_6=2\times 3^5$

양변을 변끼리 더하면

$a_7-a_1=2\times(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^5)=2\times\left\{\dfrac{1\times(3^6-1)}{3-1}\right\}=728$

$\therefore a_7=728+a_1=730$

18 답 ④

$a_n \neq 0$이므로 주어진 식의 양변을 $a_n a_{n+1} a_{n+2}$로 나누면

$$\frac{1}{a_{n+2}}-\frac{2}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}=0 \qquad \therefore \frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+2}}+\frac{1}{a_n}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1}=1$인 등차수열이다.

이때, $\frac{1}{a_1}=1$, $\frac{1}{a_2}=2$에서 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=1$이므로

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 공차가 1이다.

따라서 $\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\times 1=n$이므로 $a_n=\frac{1}{n}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}(a_n a_{n+1})=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$

$$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$$

19 답 ③

$S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+1$에서 $S_{n+1}-S_n=S_n-S_{n-1}+1$

$\therefore a_{n+1}=a_n+1$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=1$이고 공차가 1인 등차수열이므로 $a_n=1+(n-1)\times 1=n$

$\therefore a_{10}=10$

20 답 ②

$a_{n+1}=a_n+2b_n$ ⋯ ㉠, $b_{n+1}=2a_n+b_n$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=3$이고

공비가 3인 등비수열이므로 $a_n+b_n=3^n$ ⋯ ㉢

㉠−㉡을 하면 $a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$

따라서 수열 $\{a_n-b_n\}$은 첫째항이 $a_1-b_1=-1$이고

공비가 -1인 등비수열이므로 $a_n-b_n=(-1)^n$ ⋯ ㉣

㉢+㉣을 하면 $2a_n=3^n+(-1)^n \quad \therefore a_n=\frac{3^n+(-1)^n}{2}$

㉢−㉣을 하면 $2b_n=3^n-(-1)^n \quad \therefore b_n=\frac{3^n-(-1)^n}{2}$

$$\therefore a_8-b_7=\frac{3^8+(-1)^8}{2}-\frac{3^7-(-1)^7}{2}$$

$$=\frac{3^8-3^7}{2}=\frac{3^7(3-1)}{2}=3^7$$

21 답 ④

$(n+1)S_n=132n$에서 $S_n=\frac{132n}{n+1}$

즉, $S_{n+1}=\frac{132(n+1)}{n+2}$, $S_{n-1}=\frac{132(n-1)}{n}$이므로

$$a_n+a_{n+1}=S_{n+1}-S_{n-1}=\frac{132(n+1)}{n+2}-\frac{132(n-1)}{n}$$

$$=\frac{132\{n(n+1)-(n-1)(n+2)\}}{n(n+2)}$$

$$=\frac{264}{n(n+2)}=132\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \text{ (단, } n\geq 2\text{)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}(a_n+a_{n+1})$$

$$=a_1+a_2+\sum_{n=2}^{10}(a_n+a_{n+1})=S_2+132\sum_{n=2}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=88+132\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$

$$=88+132\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)=175$$

22 답 ③

짝수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로 $p(2)$가 참임을 증명한다. k가 짝수이면 그 다음 짝수는 $k+2$이므로 $p(k)$가 참이라고 가정하면 $p(k+2)$도 참임을 증명해야 한다.

따라서 $l=2$, $m=2$이므로 $l+m=4$

23 답 ④

4의 배수가 아닌 모든 자연수 n에 대하여 명제가 성립함을 증명하려면 다음과 같이 n을 4로 나누었을 때의 나머지가 같은 수의 집합으로 구분한 후, 4의 배수인 수열을 제외한 3개의 수열에 대하여 수학적 귀납법으로 증명하면 된다.

(i) 1, 5, 9, 13, ⋯

(ii) 2, 6, 10, 14, ⋯

(iii) 3, 7, 11, 15, ⋯

(iv) 4, 8, 12, 16, ⋯ ← 제외

먼저 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$이 각각 참임을 보인다.

그리고 각 수열이 공차가 4인 등차수열을 이루므로

$p(k)$가 참이라고 가정하면 그 다음 수인 $k+4$에 대하여

(가)

$p(k+4)$도 참임을 보이면 된다.

24 답 ③

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{2}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면, 즉

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}\text{이면}$$

(가)

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

(나)

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

즉, $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$, $g(k)=\frac{k+1}{k+2}$이므로

$$f(9)\times g(10)=\frac{1}{10\times 11}\times\frac{11}{12}=\frac{1}{120}$$

$$\therefore \frac{1}{f(9)\times g(10)}=120$$

25 답 ①

$\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}$의 양변에 $2^n(n-1)$을 곱하여 정리하면

$2^{\boxed{n+1}}>n(n-1)$ $(\because n\ge3)$ ⋯ ㉠ (가)

(ⅰ) $n=3$일 때, (좌변)$=16$, (우변)$=6$이므로 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ ($\boxed{k\ge3}$)일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면 (나)

$2^{k+1}>k(k-1)$

$n=k+1$일 때,

$$\begin{aligned}2^{k+2}-(k+1)k&=2\times2^{k+1}-(k+1)k\\&>\boxed{2k(k-1)}-(k+1)k\\&=k(k-3)\ge0\end{aligned}$$ (다)

따라서 $n\ge3$에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식은 $n\ge3$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

따라서 $f(n)=n+1$, $g(k)=2k(k-1)$, $a=3$이므로

$\frac{g(a+2)}{f(a)}=\frac{g(5)}{f(3)}=\frac{2\times5\times4}{3+1}=10$

26 답 ⑤

$$\begin{aligned}A&=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{49}+a_{50})\\&=2\times1+2\times3+\cdots+2\times49\\&=2(1+3+\cdots+49)\\&=2\times\frac{25(1+49)}{2}=1250\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{48}+a_{49})\\&=a_1+2\times2+2\times4+\cdots+2\times48\\&=a_1+2(2+4+\cdots+48)\\&=a_1+2\times\frac{24(2+48)}{2}\\&=1+1200=1201\end{aligned}$$

$\therefore a_{50}=A-B=1250-1201=49$

[다른 풀이]

$a_n+a_{n+1}=2n$ ⋯ ㉠

$a_{n+1}+a_{n+2}=2(n+1)$ ⋯ ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $a_{n+2}=a_n+2$

$a_1+a_2=1+a_2=2$이므로 $a_2=1$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 짝수 번째 항으로 이루어진 수열은 첫째항이 $a_2=1$이고 공차가 2인 등차수열이고 a_{50}은 이 수열의 제 25항이다.

$\therefore a_{50}=1+(25-1)\times2=49$

27 답 2

조건 (가)에서 $a_2=x$라 하면

$a_1=8$, $a_2=x$, $a_3=a_1-3=5$, $a_4=a_2-3=x-3$

$a_5=a_3-3=2$, $a_6=a_4-3=x-6$, $a_7=a_5-3=-1$

$a_8=a_6-3=x-9$

이때, 조건 (나)에 의하여

$a_1=a_9=a_{17}=\cdots=a_{89}=a_{97}=8$

$a_2=a_{10}=a_{18}=\cdots=a_{90}=a_{98}=x$

$a_3=a_{11}=a_{19}=\cdots=a_{91}=a_{99}=5$

$a_4=a_{12}=a_{20}=\cdots=a_{92}=a_{100}=x-3$

$a_5=a_{13}=a_{21}=\cdots=a_{93}=2$

$a_6=a_{14}=a_{22}=\cdots=a_{94}=x-6$

$a_7=a_{15}=a_{23}=\cdots=a_{95}=-1$

$a_8=a_{16}=a_{24}=\cdots=a_{96}=x-9$

한편, $100=8\times12+4$이므로 $\sum_{k=1}^{100}a_k=62$에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100}a_k&=12(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8)+a_1+a_2+a_3+a_4\\&=12(4x-4)+2x+10=62\end{aligned}$$

$50x-38=62$ $\quad\therefore x=a_2=2$

28 답 77

$a_1=3$, $a_{n+1}=\begin{cases}3a_n+1 & (a_n\text{이 홀수})\\ \frac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수})\end{cases}$에서

$a_2=3\times3+1=10$, $a_3=\frac{10}{2}=5$, $a_4=3\times5+1=16$,

$a_5=\frac{16}{2}=8$, $a_6=\frac{8}{2}=4$, $a_7=\frac{4}{2}=2$, $a_8=\frac{2}{2}=1$,

$a_9=3\times1+1=4$, $a_{10}=\frac{4}{2}=2$, $a_{11}=\frac{2}{2}=1$, ⋯

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{20}a_n&=3+10+5+16+8+5\times(4+2+1)\\&=42+5\times7=77\end{aligned}$$

29 답 ③

n 대신 1, 2, 3, ⋯, 20을 차례로 대입하면

$f(1)=\alpha$

$f(2)=f(1)+4\times2$

$f(3)=f(2)+4\times3$

⋮

$f(20)=f(19)+4\times20$

양변을 변끼리 더하면

$f(20)=\alpha+4\times(2+3+4+\cdots+20)=900$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha&=900-4\times(2+3+4+\cdots+20)\\&=900-4\times\frac{19\times(2+20)}{2}=64\end{aligned}$$

30 답 52

$a_n-a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)^2}$에서

$a_{n+1}=a_n-\frac{a_n}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\times a_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\times a_n$ ⋯ ㉠

n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, 24를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times a_1$

$a_3=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times a_2$

$a_4=\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times a_3$

$\vdots$

$a_{25}=\frac{24}{25}\times\frac{26}{25}\times a_{24}$

양변을 변끼리 곱하면

$a_{25}=\frac{1}{2}\times\frac{26}{25}\times a_1=\frac{13}{25}$

$\therefore 100a_{25}=52$

[다른 풀이]

㉠에서 $\frac{n+1}{n+2}\times a_{n+1}=\frac{n}{n+1}\times a_n$이므로

$\frac{n}{n+1}\times a_n=\frac{n-1}{n}\times a_{n-1}=\frac{n-2}{n-1}\times a_{n-2}=\cdots$

$=\frac{1}{2}\times a_1=\frac{1}{2}$

따라서 $a_n=\frac{n+1}{2n}$이므로 $100a_{25}=52$

31 답 ④

$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$의 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$

이때, $\frac{a_n}{n}=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)}$

n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하면

$b_2=b_1+\frac{1}{1\times2}$

$b_3=b_2+\frac{1}{2\times3}$

$b_4=b_3+\frac{1}{3\times4}$

$\vdots$

$b_n=b_{n-1}+\frac{1}{n(n-1)}$

양변을 변끼리 더하면

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=b_1+\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$

$=b_1+\left(1-\frac{1}{n}\right)$

한편, $b_1=\frac{a_1}{1}=1$이므로

$b_n=1+\left(1-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}$

따라서 $\frac{a_n}{n}=2-\frac{1}{n}$에서 $a_n=2n-1$이므로

$\sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{n=1}^{20}(2n-1)=2\times\frac{20\times21}{2}-20=400$

32 답 ②

$2a_{n+1}=a_n-2$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-1$

$\therefore a_{n+1}+2=\frac{1}{2}(a_n+2)$

따라서 수열 $\{a_n+2\}$는 첫째항이 $a_1+2=4$이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 $a_n+2=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

따라서 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}-2$이므로

$a_9-a_{10}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6-2\right\}-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^7-2\right\}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^6-\left(\frac{1}{2}\right)^7=\left(\frac{1}{2}\right)^7(2-1)=\frac{1}{2^7}$

$\therefore \log_2(a_9-a_{10})=\log_2\frac{1}{2^7}=-7$

33 답 9

$a_{n+1}=2a_n+4$에서 $a_{n+1}+4=2(a_n+4)$

따라서 수열 $\{a_n+4\}$는 첫째항이 $a_1+4=2$이고 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n+4=2\times2^{n-1}=2^n$ $\quad\therefore a_n=2^n-4$

이때, $a_{k+1}-a_k\geq300$에서 $(2^{k+1}-4)-(2^k-4)\geq300$

$\therefore 2^k\geq300$

한편, $2^8=256$, $2^9=512$이므로 구하는 자연수 k의 최솟값은 9이다.

34 답 112

$a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n=2^{n-1}$

또, $b_{n+1}=a_n+2b_n$에서 $b_{n+1}=2b_n+2^{n-1}$

양변을 2^{n+1}으로 나누면 $\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^n}+\frac{1}{4}$

따라서 수열 $\left\{\frac{b_n}{2^n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{b_1}{2^1}=2$이고 공차가 $\frac{1}{4}$인 등차수열이므로 $\frac{b_n}{2^n}=2+(n-1)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}n+\frac{7}{4}$

따라서 $b_n=(n+7)\times2^{n-2}$이므로

$a_5+b_5=2^4+12\times2^3=112$

35 답 95

$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$의 양변에 역수를 취하면

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{a_n}=2\times\frac{1}{a_n}+1$에서

$\frac{1}{a_{n+1}}+1=2\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$은 첫째항이

$\frac{1}{a_1}+1=\frac{3}{2}$이고 공비가 2인 등비수열이다.

즉, $\frac{1}{a_n}+1=\frac{3}{2}\times2^{n-1}=3\times2^{n-2}$에서 $\frac{1}{a_n}=3\times2^{n-2}-1$

$\therefore \frac{1}{a_7}=3\times2^5-1=3\times32-1=95$

36 답 214

$a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n$에서

$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$이므로

수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=2$이고 공비가 $-\dfrac{1}{2}$인

등비수열이다. $\therefore a_{n+1}-a_n=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, 7을 차례로 대입하면

$a_2-a_1=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^0$

$a_3-a_2=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^1$

$a_4-a_3=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$

$\vdots$

$a_8-a_7=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^6$

양변을 변끼리 더하면

$$a_8-a_1=2\sum_{k=1}^{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=2\times\frac{1\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{128}\right)=\frac{43}{32}$$

$\therefore 64a_8=64\left(\dfrac{43}{32}+a_1\right)=86+128=214$

37 답 454

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$에서

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$이라 하면

$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ $\therefore \alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=6$

따라서 α, β는 x에 대한 이차방정식 $x^2-5x+6=0$의 두 근이다.

즉, $(x-2)(x-3)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=3$이므로

(i) $\alpha=2$, $\beta=3$일 때, $a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$에서
수열 $\{a_{n+1}-2a_n\}$은 첫째항이 $a_2-2a_1=2$이고 공비가 3인
등비수열이므로 $a_{n+1}-2a_n=2\times3^{n-1}$ $\cdots$ ㉠

(ii) $\alpha=3$, $\beta=2$일 때
$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$에서 수열 $\{a_{n+1}-3a_n\}$은 첫째항
이 $a_2-3a_1=1$이고 공비가 2인 등비수열이므로
$a_{n+1}-3a_n=2^{n-1}$ $\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $a_n=2\times3^{n-1}-2^{n-1}$

$\therefore a_6=2\times3^5-2^5=486-32=454$

[다른 풀이]

α, β는 이차방정식 $x^2-5x+6=0$의 두 근 $x=2$ 또는 $x=3$이므로

일반항은 $a_n=t\times2^{n-1}+s\times3^{n-1}$ (t, s는 상수)의 꼴이다.

(i) $n=1$일 때, $t+s=a_1=1$ $\cdots$ ㉢

(ii) $n=2$일 때, $2t+3s=a_2=4$ $\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $s=2$, $t=-1$이므로 $a_n=2\times3^{n-1}-2^{n-1}$

(이하 동일)

일등급 UP

*** $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 꼴의 점화식**

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$에서 $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$을 만족시키는 α, β는 $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$에서 x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이다.

이때, 방정식 $x^2+px+q=0$을 점화식 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$의 특성방정식이라 한다.

또한, 일반항은 $a_n=t\times\alpha^{n-1}+s\times\beta^{n-1}$의 꼴이다.

38 답 5

$a_{n+1}-a_1=S_n$ $(n\geq1)$ $\cdots$ ㉠

$a_n-a_1=S_{n-1}$ $(n\geq2)$ $\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $a_{n+1}-a_n=a_n$

$\therefore a_{n+1}=2a_n$ $(n\geq2)$

또한, ㉠에 의하여 $a_2=a_1+S_1=2a_1$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore a_n=a_1\times2^{n-1}$ $(n\geq1)$

이때, $a_5=a_1\times2^4=80$이므로

$a_1=\dfrac{80}{16}=5$

39 답 485

$3a_{n+1}=2a_n+b_n$ $\cdots$ ㉠

$3b_{n+1}=a_n+2b_n$ $\cdots$ ㉡

㉠$+$㉡을 하면

$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n$이고 $a_1+b_1=5$이므로 수열 $\{a_n+b_n\}$은 모든 항이 5인 수열이다.

$\therefore a_n+b_n=5$ $\cdots$ ㉢

㉠$-$㉡을 하면

$a_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{1}{3}(a_n-b_n)$

수열 $\{a_n-b_n\}$은 첫째항이 $a_1-b_1=-3$이고 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n-b_n=-3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$ $\cdots$ ㉣

㉢$+$㉣을 하면

$2a_n=5-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$ $\therefore a_n=\dfrac{1}{2}\left\{5-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$

㉢$-$㉣을 하면

$2b_n=5+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$ $\therefore b_n=\dfrac{1}{2}\left\{5+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$

$$\therefore a_5+b_6=\frac{1}{2}\left\{5-\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}+\frac{1}{2}\left\{5+\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(10-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right)=5-\frac{1}{81}=\frac{404}{81}$$

따라서 $p=81$, $q=404$이므로

$p+q=485$

40 답 255

$a_{n+1}=S_n+n+1$ ⋯ ㉠에서 $S_n=a_{n+1}-(n+1)$ ⋯ ㉡이므로

$S_{n-1}=a_n-n\ (n\ge2)$ ⋯ ㉢

㉡−㉢을 하면 $S_n-S_{n-1}=a_{n+1}-a_n-1$에서

$a_n=a_{n+1}-a_n-1$ $\quad\therefore a_{n+1}=2a_n+1\ (n\ge2)$ ⋯ ㉣

한편, ㉠에서 $a_2=S_1+1+1=a_1+2=3$이고 ㉣에서

$a_2=2a_1+1=3$이므로 $a_{n+1}=2a_n+1\ (n\ge1)$

즉, $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$에서 수열 $\{a_n+1\}$은

첫째항이 $a_1+1=2$이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$ $\quad\therefore a_n=2^n-1$

$\therefore a_8=2^8-1=255$

41 답 144

$S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}+a_n(n\ge2)$이므로 조건 (다)에서

$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+4$, $(a_{n+1}-a_n)^2=4$

$\therefore a_{n+1}-a_n=2(n\ge2)$ ($\because$ 조건 (나))

따라서 조건 (가)에 의하여 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열이다.

$\therefore S_{12}=\dfrac{12(2\times1+11\times2)}{2}=144$

42 답 ③

임의의 자연수 n에 대하여 $p(n)$ 또는 $p(n+1)$이 참이면 $p(n+2)$가 참이므로 $p(1)$ 또는 $p(2)$가 참일 때, $p(1)$, $p(2)$ 중 어느 하나가 참이므로 $p(3)$은 참 ⋯ ㉠

$p(2)$, $p(3)$ 중 어느 하나가 참($\because$ ㉠)이므로 $p(4)$는 참

$\therefore p(3)$, $p(4)$는 참 ⋯ ㉡

$p(3)$, $p(4)$ 중 어느 하나가 참($\because$ ㉠ 또는 ㉡)이므로 $p(5)$는 참

$\therefore p(3)$, $p(4)$, $p(5)$는 참

⋮

즉, $p(1)$ 또는 $p(2)$가 참이면 $n=3$, 4, 5, ⋯에 대하여 $p(n)$이 모두 참이므로 $p(1)$, $p(2)$가 참이면 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이 된다.

역으로 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이면 $p(1)$, $p(2)$는 참이다. 따라서 필요충분조건은 '$p(1)$과 $p(2)$가 참이다.'이다.

①, ④ $p(2)$가 참임을 보여주지 못한다.

②, ⑤ $p(1)$이 참임을 보여주지 못한다.

43 답 ②

(i) $p(1)$이 참이므로 $p(3)$, $p(4)$는 참이다.

(ii) $p(3)$, $p(4)$가 참이므로 $p(3^2)$, $p(3\times4)$, $p(4^2)$은 참이다.

(iii) $p(3^2)$, $p(3\times4)$, $p(4^2)$이 참이므로 $p(3^3)$, $p(3^2\times4)$, $p(3\times4^2)$, $p(4^3)$도 참이다.

⋮

따라서 $n=3^p\times4^q$ (p, q는 음이 아닌 정수)인 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다.

① $120=2\times3\times4\times5$이므로 $p(120)$은 참인지 알 수 없다.

② $144=3^2\times4^2$이므로 $p(144)$는 참이다.

③ $180=3^2\times4\times5$이므로 $p(180)$은 참인지 알 수 없다.

④ $216=2\times3^3\times4$이므로 $p(216)$은 참인지 알 수 없다.

⑤ $288=2\times3^2\times4^2$이므로 $p(288)$은 참인지 알 수 없다.

44 답 14

3과 5가 서로소이므로 $3+5=8$에서 8 이상의 자연수 x에 대해서는 반드시 명제 $p(x)$가 참이라고 할 수 있다.

따라서 7 이하의 자연수 x에 대하여만 조사해 보면 된다.

$3=0+3$, $5=0+5$, $6=0+3+3$에서 $p(3)$, $p(5)$, $p(6)$은 반드시 참이라고 할 수 있다.

그러나 $p(1)$, $p(2)$, $p(4)$, $p(7)$은 반드시 참이라고 할 수 없다.

따라서 반드시 명제 $p(x)$가 참이라고 할 수 없는 모든 자연수 x의 값의 합은 $1+2+4+7=14$

45 답 10

(i) $n=1$일 때,

$a_4=a_3+a_2=(a_2+a_1)+a_2=\overset{(가)}{\boxed{3}}$

이므로 a_4는 3의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, a_{4k}가 3의 배수라고 가정하면

$a_{4(k+1)}=a_{4k+3}+a_{4k+2}=(a_{4k+2}+a_{4k+1})+a_{4k+2}$

$=\underset{(나)}{\boxed{2}}\,a_{4k+2}+a_{4k+1}=2(a_{4k+1}+a_{4k})+a_{4k+1}$

$=\underset{(다)}{\boxed{3}}\,a_{4k+1}+\overset{(라)}{\boxed{2}}\,a_{4k}$

따라서 $a_{4(k+1)}$은 3의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 a_{4n}은 3의 배수이다.

따라서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 수는 각각 3, 2, 3, 2이므로

$a=3$, $b=2$, $c=3$, $d=2$

$\therefore a+b+c+d=10$

46 답 186

(i) $n=2$일 때, $a_2=6^2-5\times2-1=25$이므로 a_2는 25의 배수이다.

(ii) $a_k\ (k\ge2)$가 25의 배수라고 가정하면

$a_k=25N$ (N은 자연수)으로 놓을 수 있다.

$a_{k+1}=6^{k+1}-5(k+1)-1=6(6^k-5k-1)+25k$

$=\overset{(가)}{\boxed{6}}\,a_k+\underset{(나)}{\boxed{25k}}=6\times25N+25k=25(6N+\overset{(다)}{\boxed{k}})$

따라서 a_{k+1}도 25의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 $a_n(n\ge2)$은 25의 배수이다.

따라서 $a=6$, $f(k)=25k$, $g(k)=k$이므로

$f(a)+g(a^2)=f(6)+g(36)=150+36=186$

47 답 5

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1+x\ge 1+x=$(우변)이므로

주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+x)^k \ge 1+kx$

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \ge (1+x)(1+kx)\\ &= 1+(k+1)x+kx^2\\ &\ge \boxed{1+(k+1)x} \leftarrow \text{(가)}\end{aligned}$$

($\because$ k는 자연수이므로 $kx^2\ge 0$)

즉, $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $(1+x)^n \ge 1+nx$는 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

따라서 $f(x)=1+(k+1)x=a+xg(k)$가 양수 x에 대한 항등식이므로 $a=1$, $g(k)=k+1$

$\therefore g(a^2+3)=g(1^2+3)=g(4)=4+1=5$

48 답 66

$a_{n+1}-a_n=2^{n-5}+n$에 n 대신 5, 6, 7, 8, 9를 차례로 대입하면

$a_6-a_5=2^0+5$

$a_7-a_6=2^1+6$

$a_8-a_7=2^2+7$

$a_9-a_8=2^3+8$

$a_{10}-a_9=2^4+9$ .... ⓐ

양변을 변끼리 더하면

$a_{10}-a_5=\dfrac{1\times(2^5-1)}{2-1}+\dfrac{5\times(5+9)}{2}=31+35=66$ .... ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 주어진 식에 n 대신 5, 6, 7, 8, 9를 대입한 식을 구한다. [50%]

ⓑ 앞에서 구한 식을 모두 더하여 $a_{10}-a_5$의 값을 구한다. [50%]

[다른 풀이]

$a_{n+1}-a_n=2^{n-5}+n$에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하면

$a_2-a_1=2^{1-5}+1$

$a_3-a_2=2^{2-5}+2$

$a_4-a_3=2^{3-5}+3$

$\vdots$

$a_n-a_{n-1}=2^{(n-1)-5}+(n-1)$

양변을 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}a_n-a_1&=\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-5}+\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{2^{-4}\times(2^{n-1}-1)}{2-1}+\frac{n(n-1)}{2}\\&=2^{n-5}-2^{-4}+\frac{n(n-1)}{2}\ (n\ge 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_{10}-a_5&=(a_{10}-a_1)-(a_5-a_1)\\&=\left(2^5-2^{-4}+\frac{10\times 9}{2}\right)-\left(2^0-2^{-4}+\frac{5\times 4}{2}\right)=66\end{aligned}$$

49 답 441

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로 $a_{n+1}+2S_nS_{n+1}=0$에서

$S_{n+1}-S_n+2S_nS_{n+1}=0$

양변을 S_nS_{n+1}으로 나누어 식을 정리하면

$\dfrac{1}{S_{n+1}}-\dfrac{1}{S_n}=2$ .... ⓐ

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{1}{a_1}=1$이고 공차가 2인

등차수열이므로 $\dfrac{1}{S_n}=1+(n-1)\times 2=2n-1$

$\therefore S_n=\dfrac{1}{2n-1}$ .... ⓑ

따라서 $a_5=S_5-S_4=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{7}=-\dfrac{2}{63}$이므로

$\left(\dfrac{2}{3a_5}\right)^2=(-21)^2=441$ .... ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$임을 이용하여 주어진 식을 S_n, S_{n+1}에 대한 식으로 정리한다. [40%]

ⓑ 수열 $\{S_n\}$의 일반항을 구한다. [40%]

ⓒ $\left(\dfrac{2}{3a_5}\right)^2$의 값을 구한다. [20%]

50 답 8

$a_n=7^n+3^n+2$라 하면

(i) $a_1=7+3+2=12$이므로 a_1은 12의 배수이다. .... ⓐ

(ii) $a_k=7^k+3^k+2$가 12의 배수라고 가정하면

$a_{k+1}=7^{k+1}+3^{k+1}+2$에서

$$\begin{aligned}a_{k+1}-a_k&=(7^{k+1}+3^{k+1}+2)-(7^k+3^k+2)\\&=(7-1)\times 7^k+(3^2-3)\times 3^{k-1}\\&=6\times 7^k+6\times 3^{k-1}=\underset{\text{(가)}}{\boxed{6}}(7^k+3^{k-1})\end{aligned}$$

이때, 7^k, 3^{k-1}은 각각 홀수이므로 7^k+3^{k-1}은 $\underset{\text{(나)}}{\boxed{\text{짝수}}}$이다.

따라서 $a_{k+1}-a_k=6\times$(짝수)에서 $a_{k+1}-a_k$는 12의 배수이고,

a_k가 12의 배수이므로 a_{k+1}도 12의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여

7^n+3^n+2는 12의 배수이다. .... ⓑ

따라서 $a=6$이므로 집합

$A=\{x\,|\,x$는 6의 약수 중 짝수인 수$\}=\{2, 6\}$의 모든 원소의 합은

$2+6=8$이다. .... ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ a_1이 12의 배수임을 보인다. [10%]

ⓑ 모든 자연수 n에 대하여 a_n이 12의 배수임을 보인다. [50%]

ⓒ 집합 A의 모든 원소의 합을 구한다. [40%]

51 답 ②

$a_1=2$, $a_2=2-1=1$, $a_3=1+2=3$, $a_4=3+3=6$

$a_5=6-1=5$, $a_6=5+5=10$

$\therefore a_7=10-1=9$

52 답 ⑤

식 (*)의 양변에 S_n을 더하여 정리하면

$S_{n+1}+1=2^n(S_n+1)$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2(S_{n+1}+1)=\log_2 2^n(S_n+1)=n+\log_2(S_n+1)$

이때, $b_n=\log_2(S_n+1)$이라 하면

$b_1=\log_2(S_1+1)=\log_2(a_1+1)=1$이고

(가)

$b_{n+1}=\boxed{n}+b_n$이다.

이 식의 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하면

$b_2=b_1+1$

$b_3=b_2+2$

$b_4=b_3+3$

⋮

$b_n=b_{n-1}+(n-1)$

양변을 변끼리 더하면

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=1+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}\ (n\ge 1)$

즉, $\log_2(S_n+1)=\frac{n^2-n+2}{2}$에서

$S_n+1=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}\qquad \therefore S_n=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-1\ (n\ge 1)$

그러므로 $a_1=1$이고, $n\ge 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}}$ (나)

$\quad=2^{\frac{n^2-3n+4}{2}}\times(2^{n-1}-1)$

따라서 $f(n)=n$, $g(n)=\frac{n^2-3n+4}{2}$이므로

$f(12)-g(5)=12-7=5$

53 답 ①

$a_{n+2}=(a_{n+1})^2-(a_n)^2$에 의하여

$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=1^2-1^2=0,\ a_4=0^2-1^2=-1,$

$a_5=(-1)^2-0^2=1,\ a_6=1^2-(-1)^2=0,$

$a_7=0^2-1^2=-1,\ \cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $n\ge 2$에서 1, 0, -1이 반복된다.

따라서 $b_{n+1}=a_n-b_n+n$, 즉 $a_n=b_n+b_{n+1}-n$에서

$n=3k-1\ (k=1, 2, 3, \cdots)$일 때,

$a_n=b_n+b_{n+1}-n=1$ ⋯ ㉠

$a_{n+1}=b_{n+1}+b_{n+2}-n-1=0$에서

$-b_{n+1}-b_{n+2}+n+1=0$ ⋯ ㉡

$a_{n+2}=b_{n+2}+b_{n+3}-n-2=-1$ ⋯ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면 $b_n+b_{n+3}-n-1=0$

$\therefore b_{n+3}+b_n=n+1$ ⋯ ㉣

㉣에 의하여 $b_{n+6}+b_{n+3}=n+4$ ⋯ ㉤이므로

㉤−㉣을 하면 $b_{n+6}-b_n=3\qquad \therefore b_{n+6}=b_n+3$

이때, $b_2=a_1-b_1+1=1-k+1=2-k$이므로

$b_{20}=b_{14}+3=b_8+6=b_2+9=11-k=14$

$\therefore k=-3$

54 답 13

$b_1=a_1$

$b_2=b_1+a_2=a_1+a_2$

$b_3=b_2-a_3=a_1+a_2-a_3$

$b_4=b_3+a_4=a_1+a_2-a_3+a_4$

$b_5=b_4+a_5=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5$

$b_6=b_5-a_6=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6$

⋮

$\therefore b_{10}=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7+a_8-a_9+a_{10}=a_{10}$ ⋯ ㉠

이때, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d\ne 0)$라 하면

$a_2-a_3=a_5-a_6=a_8-a_9=-d$이므로 ㉠에서

$b_{10}-a_{10}=(a_1-d)+(a_1+2d)+(a_1+5d)=0$

$\therefore a_1=-2d$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=-2d+(n-1)d=d(n-3)$이므로

$b_8=(a_1-d)+(a_1+2d)+a_7+a_8=6d$

$b_{10}=(a_1-d)+(a_1+2d)+(a_1+5d)+a_{10}=7d$

$\therefore \frac{b_8}{b_{10}}=\frac{6}{7}$

따라서 $p=7$, $q=6$이므로 $p+q=13$

55 답 ⑤

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=a_1=3$,

(우변)$=2^1+\frac{1}{1}=3$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$a_k=2^k+\frac{1}{k}$이므로

$ka_{k+1}=2ka_k-\frac{k+2}{k+1}=2k\left(2^k+\frac{1}{k}\right)-\frac{k+2}{k+1}$

(가)

$\quad=\boxed{k\times 2^{k+1}+2}-\frac{k+2}{k+1}$

$\quad=k\times 2^{k+1}+\frac{2k+2}{k+1}-\frac{k+2}{k+1}$

$\quad=k\times 2^{k+1}+\boxed{\frac{k}{k+1}}$ (나)

이다. 따라서 $a_{k+1}=2^{k+1}+\frac{1}{k+1}$이므로 $n=k+1$일 때도

(*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=2^n+\frac{1}{n}$이다.

따라서 $f(k)=k\times 2^{k+1}+2$, $g(k)=\frac{k}{k+1}$이므로

$f(3)=3\times 2^4+2=50$, $g(4)=\frac{4}{5}$

$\therefore f(3)\times g(4)=50\times\frac{4}{5}=40$

56 답 100

$b_n(1+b_{n+1})=3b_{n+1}$에서 $b_n+b_nb_{n+1}=3b_{n+1}$

$b_n>0$이므로 양변을 b_nb_{n+1}로 나누면

$\dfrac{b_n}{b_nb_{n+1}}+\dfrac{b_nb_{n+1}}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{3b_{n+1}}{b_nb_{n+1}}$에서 $\dfrac{1}{b_{n+1}}+1=\dfrac{3}{b_n}$

$\therefore \dfrac{1}{b_{n+1}}=3\times\dfrac{1}{b_n}-1,\ \dfrac{1}{b_1}=1$

이때, $\dfrac{1}{b_n}=a_n$이므로 $c_n=a_nb_n=1$

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{100}c_k=\sum\limits_{k=1}^{100}1=100$

57 답 ④

$S_{n+2}-4S_{n+1}+3S_n+2a_n=0$에서

$(S_{n+2}-S_{n+1})-3(S_{n+1}-S_n)+2a_n=0$

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

따라서 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=2$이고

공비가 2인 등비수열이므로 $a_{n+1}-a_n=2\times2^{n-1}=2^n$

n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례로 대입하면

$a_2-a_1=2^1$

$a_3-a_2=2^2$

$a_4-a_3=2^3$

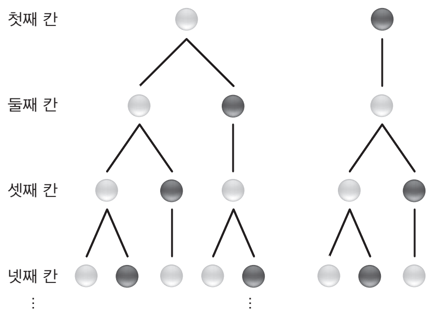
$\vdots$

$a_{10}-a_9=2^9$

양변을 변끼리 더하면

$a_{10}=a_1+\sum\limits_{k=1}^{9}2^k=1+\dfrac{2(2^9-1)}{2-1}=2^{10}-1=1023$

58 답 ④



(i) 첫째 칸에 흰 돌을 채우면 둘째 칸부터 흰 돌이나 검은 돌로 시작해서 $(n-1)$개의 칸을 채우면 되므로 a_{n-1}(개)의 방법이 있다.

(ii) 첫째 칸에 검은 돌을 채우면 둘째 칸에는 반드시 흰 돌을 채워야 하고 셋째 칸부터 흰 돌이나 검은 돌로 시작해서 $(n-2)$개의 칸을 채우면 되므로 a_{n-2}(개)의 방법이 있다.

$\therefore a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

59 답 ③

$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$에서 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

이 식에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, 20을 차례로 대입하면

$a_1=a_3-a_2$

$a_2=a_4-a_3$

$a_3=a_5-a_4$

$\vdots$

$a_{20}=a_{22}-a_{21}$

양변을 변끼리 더하면

$\sum\limits_{n=1}^{20}a_n=a_{22}-a_2=17710$

60 답 624

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{x+y}{2}$, (우변)$=\dfrac{x+y}{2}$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^k\le\dfrac{x^k+y^k}{2}$이므로 양변에 $\dfrac{x+y}{2}$를 곱하면

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{k+1}&\le\left(\frac{x^k+y^k}{2}\right)\times\frac{x+y}{2}\ (\because x>0,\ y>0)\\&=\frac{x^{k+1}+y^{k+1}+x^ky+xy^k}{\underset{\text{(가)}}{\boxed{4}}}\\&=\frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2}-\overset{\text{(나)}}{\boxed{\frac{(x-y)(x^k-y^k)}{4}}}\\&\le\frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n\le\dfrac{x^n+y^n}{2}$이 성립한다.

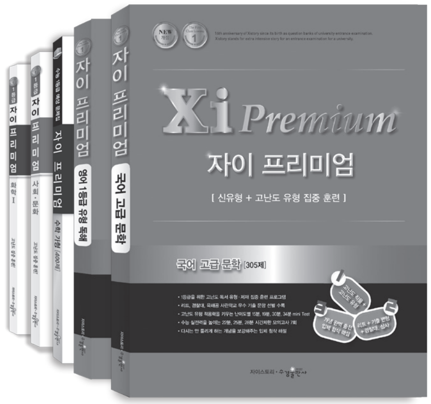
따라서 $a=4,\ f(k)=\dfrac{(x-y)(x^k-y^k)}{4}$이므로 $x=5,\ y=1$일 때

$f(a)=f(4)=\dfrac{(5-1)(5^4-1^4)}{4}=624$

NEW 개정

The First Class Learning 1

"신유형+고난도 유형 집중 훈련!!"



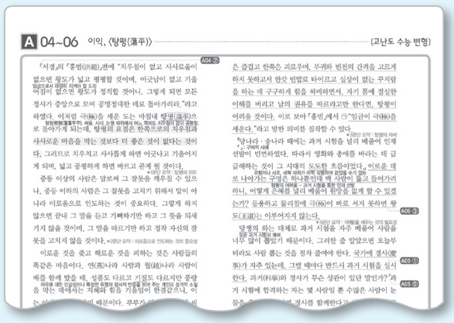
1등급을 위한 완벽 훈련서

자이 프리미엄

- 경찰대, 사관학교, 리트 우수기출 문제 수록
- 수능 1등급을 위한 고품격 문제들만을 엄선 수록

❶ 신유형 + 고난도 유형 집중 훈련

❷ 다시는 안 틀리게 하는 입체 첨삭 해설



★ 국어 고급 독서 [303제]

- 1등급 유형과 제재 분석 및 풀이 비법 수록
- 경찰대+삼사+LEET 우수 기출 문제 선별
- 난이도별 15분, 20분, 30분 mini test
- 1등급 수능 실전 27분, 29분 시간제한 모의고사

★ 영어 1등급 유형 독해 [364제]

- 1등급 필수 8개 유형 집중 훈련
- 최신 경찰대+삼사 기출문제 수록
- 1등급 고난도 문제 특별 예상 문제 수록
- 1등급 독해 유형 모의고사 4회(16문항)

★ 수학 고급 가형 · 나형 [400제]

- 1등급 고난도 경향 분석 및 개념 체크
- 경찰대+삼사 우수 문항+예상 문제
- 1등급 마스터 – 최고난도 21번, 29번, 30번 대비
- 수능 1등급 실전 고난도 모의고사

★ 국어 고급 문학 [305제]

- 1등급 유형과 작품 분석 및 풀이 비법 수록
- 경찰대+삼사+LEET 우수 기출 문제 선별
- 난이도별 15분, 20분, 30분 mini test
- 1등급 수능 실전 27분, 29분 시간제한 모의고사

★ 영어 1등급 독해 모의고사 [10회]

- 1등급 수능 출제 기준에 맞춘 모의고사
- 최신 경찰대+삼사 기출문제 수록
- 다시는 틀리지 않게 부족한 개념을 완벽 보충하는 입체 첨삭 해설

★ 생활과 윤리, 사회 · 문화 [220제]

★ 생명과학 Ⅰ, 화학 Ⅰ, 지구과학 Ⅰ [230제]

- 1등급 출제 고난도 개념 완벽 정리
- 1등급 킬러 문제 특별 공략법 제시
- 고난도 유형 훈련을 위한 단계별 접근법 수록
- 1등급 고난도 실전 모의고사 3회