THE FIRST CLASS MATHEMATICS

일등급 수학 · **수학 Ⅱ**

[해설편]

Ⅰ 함수의 극한과 연속

Ⅱ 미분

Ⅲ 적분

빠른 정답 찾기

Ⅰ 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한

01 ⑤ **02** ⑤ **03** 2 **04** 6
05 3 **06** 8 **07** ① **08** ③
09 1 **10** 2 **11** ⑤ **12** ㄴ, ㄷ
13 ㄱ, ㄴ, ㄷ **14** ㄴ **15** ②
16 ② **17** 1 **18** 5 **19** ①
20 ④ **21** ① **22** -1 **23** ㄱ, ㄷ
24 ④ **25** ⑤ **26** 5 **27** ②
28 ② **29** ⑤ **30** 5 **31** ③
32 ① **33** 7 **34** ④ **35** ②
36 ② **37** 2 **38** ⑤ **39** 2
40 2 **41** ⑤ **42** 3 **43** 10
44 $\sqrt{2}$ **45** ⑤ **46** 30 **47** ③
48 10 **49** ③ **50** ② **51** 6
52 1 **53** 3 **54** 9 **55** ②

02 함수의 연속

01 ③ **02** ① **03** ⑤ **04** ②
05 ④ **06** 2 **07** ④ **08** ①
09 2 **10** ① **11** ② **12** ②
13 ③ **14** ④ **15** ① **16** 32
17 ② **18** 16 **19** 1 **20** ①
21 ② **22** ㄱ, ㄴ, ㄷ **23** ⑤
24 5 **25** 16 **26** ② **27** ㄱ, ㄷ
28 ㄴ, ㄷ **29** ③ **30** ② **31** ④
32 -3 **33** ③ **34** ㄴ
35 ㄱ, ㄴ, ㄷ **36** ㄷ **37** 13
38 2 **39** 7 **40** ⑤ **41** ②
42 24 **43** ④ **44** 19 **45** 56
46 ② **47** 2 **48** 3 **49** ②
50 ⑤ **51** 4

Ⅱ 미분

03 미분계수와 도함수

01 24 **02** ④ **03** 2 **04** ②
05 14 **06** ⑤ **07** ④ **08** ⑤
09 ④ **10** 10 **11** ② **12** 1
13 ② **14** ② **15** ② **16** ①
17 ③ **18** ⑤ **19** ⑤ **20** ①
21 ⑤ **22** ⑤ **23** ① **24** ②
25 18 **26** ⑤ **27** ③ **28** 6
29 ④ **30** ④ **31** ⑤ **32** ④
33 5 **34** 3 **35** ⑤ **36** ④
37 ② **38** ③ **39** 13 **40** 15
41 ⑤ **42** 9 **43** 6 **44** 7
45 ⑤ **46** 54 **47** ① **48** ④
49 ① **50** 243 **51** 10 **52** ③
53 271 **54** ③ **55** ⑤ **56** 200

04 도함수의 활용 (1)

01 ②	02 ④	03 ②	04 ③
05 ③	06 ⑤	07 ③	08 2
09 ⑤	10 ④	11 5	12 ⑤
13 ①	14 ③	15 ③	16 2
17 ⑤	18 ③	19 ③	20 ④
21 ④	22 ①	23 5	24 ②
25 ④	26 ③	27 4	28 ②
29 4	30 ⑤	31 ④	32 ②
33 ③	34 ①	35 ①	36 4
37 ②	38 ⑤	39 1	40 ②
41 ②	42 ②	43 ③	44 56
45 75	46 13	47 10	48 ①
49 ②	50 ④	51 32	52 1
53 20	54 1	55 8	56 ①
57 97	58 ②	59 10	60 ③
61 ①	62 30	63 ①	64 22
65 1	66 ②		

05 도함수의 활용 (2)

01 ③	02 ①	03 3	04 ①
05 ⑤	06 ⑤	07 ⑤	08 5
09 45	10 ②	11 ④	12 ②
13 2	14 ②	15 9	16 ②
17 ③	18 1	19 32	20 ⑤
21 ②	22 ②	23 270	24 ③
25 ④	26 ③	27 ②	28 2
29 7	30 ④	31 5	32 6
33 10	34 ②	35 ④	36 42
37 ②	38 ②	39 ①	40 ④
41 ②	42 6	43 ②	44 ②
45 ④	46 25	47 611	48 3
49 16	50 ①	51 61	52 ②
53 29	54 72	55 270	56 6
57 12	58 65	59 32	60 ③
61 ①	62 ④	63 ②	64 3
65 ③	66 ⑤	67 8	68 ②

Ⅲ 적분

06 부정적분과 정적분

01 4	02 ①	03 15	04 ②
05 11	06 ②	07 ④	08 ③
09 ⑤	10 ④	11 ①	12 ④
13 ③	14 ②	15 ②	16 ④
17 ③	18 ③	19 ⑤	20 ②
21 10	22 136	23 14	24 22
25 ④	26 1	27 5	28 ④
29 5	30 12	31 ②	32 21
33 ④	34 ⑤	35 4	36 90
37 ⑤	38 ①	39 65	40 6
41 ④	42 5	43 20	44 4
45 10	46 132	47 28	48 ⑤
49 ①	50 ⑤	51 ③	52 ③
53 ④	54 40	55 3	

07 정적분의 활용

01 ④	02 ⑤	03 ④	04 12
05 26	06 ②	07 ④	08 ⑤
09 ②	10 ②	11 ②	12 ③
13 ①	14 ②	15 ①	16 ①
17 ③	18 ②	19 ②	20 4
21 4	22 ④	23 ③	24 25
25 ②	26 ②	27 ①	28 28
29 ④	30 ①	31 ②	32 ②
33 4	34 1	35 ②	36 3
37 ③	38 ③	39 4	40 ③
41 ⑤	42 8	43 ③	44 7
45 16	46 ④	47 ②	48 ③
49 1	50 ③	51 ③	52 ②
53 3	54 2	55 110	56 45
57 13	58 ①	59 200	60 3
61 35	62 4	63 20	64 17
65 ③	66 ②		

Ⅰ 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한

문제편 9P

01 답 ⑤

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)$$
$$=6\times4=24$$

02 답 ⑤

$$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)=1+0=1$$

03 답 2

모든 양의 실수 x에 대하여 $2x+1>0$이므로

$$\frac{4x^2+2x-1}{x+2}<f(x)<\frac{4x^2+3x+2}{x+1}$$

의 각 변을 $2x+1$로 나누면

$$\frac{4x^2+2x-1}{(x+2)(2x+1)}<\frac{f(x)}{2x+1}<\frac{4x^2+3x+2}{(x+1)(2x+1)}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x-1}{(x+2)(2x+1)}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+2}{(x+1)(2x+1)}=2$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x+1}=2$$

04 답 6

삼차함수 $f(x)$는 주어진 조건으로부터 $f(1)=f(2)=0$을 만족시킨다.

$f(x)=a(x-b)(x-1)(x-2)$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-b)(x-1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}a(x-b)(x-2)$$
$$=a(b-1)=4\ \cdots\ ㉠$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a(x-b)(x-1)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}a(x-b)(x-1)$$
$$=a(2-b)=-2\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$

따라서 $f(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합은

$1+2+3=6$

05 답 3

조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.

또, 조건 (나)에서 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $f(0)=0$이므로 $f(x)$의 상수항은 0이다.

$f(x)=x^2+ax$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(x+a)=a$$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x$이므로

$f(1)=1+2=3$

06 답 8

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2-1}=1$이므로 다항식 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$ (a, b는 상수) … ㉠라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=1$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $f(1)=2$

㉠에서 $1+1+a+b=2$

즉, $b=-a$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+2x+a+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+2x+a+2)$$
$$=a+5$$

즉, $a+5=1$에서 $a=-4$

㉡에서 $b=4$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-4x+4$이므로

$f(2)=8+4+(-8)+4=8$

07 답 ①

$\frac{t-1}{t+1}=h$라 하면 $\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$이므로

$t\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow1-$이다.

즉, $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{h\to1-}f(h)=1$

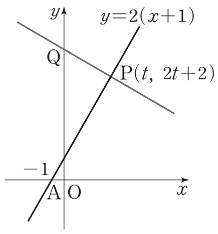
또, $\frac{3t-1}{t-1}=k$라 하면 $\frac{3t-1}{t-1}=3+\frac{2}{t-1}$이므로

$t\longrightarrow\infty$일 때 $k\longrightarrow3+$이다.

즉, $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{3t-1}{t-1}\right)=\lim_{k\to3+}f(k)=2$

$\therefore \lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{3t-1}{t-1}\right)=1+2=3$

08 답 ③



직선 PQ의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로

직선 PQ의 방정식은 $y-(2t+2)=-\frac{1}{2}(x-t)$

즉, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}t+2$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(0,\ \frac{5}{2}t+2\right)$이다.

이때, $\overline{PQ}=\sqrt{t^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2}$, $\overline{AQ}=\sqrt{1+\left(\frac{5}{2}t+2\right)^2}$이므로

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}}=\sqrt{5}$

09 답 1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4f(x)}{x^2+2f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{4f(x)}{x}}{x+\frac{2f(x)}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}{1+\frac{2f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1+4\alpha\times 0}{1+2\alpha\times 0}=1$$

10 답 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4f(x)}{x^2+2f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{4f(x)}{x}}{x+\frac{2f(x)}{x}}=\frac{0+4\alpha}{0+2\alpha}=2$$

11 답 ⑤

주어진 식의 분모, 분자를 모두 유리화하면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\alpha^2-x-\beta^2)(\sqrt{4x+\alpha}+\sqrt{4x+\beta})}{(4x+\alpha-4x-\beta)(\sqrt{x+\alpha^2}+\sqrt{x+\beta^2})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\times\frac{\sqrt{4+\frac{\alpha}{x}}+\sqrt{4+\frac{\beta}{x}}}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{x}}+\sqrt{1+\frac{\beta^2}{x}}}\right\}$$

$$=(\alpha+\beta)\times\frac{4}{2}=2\times 2=4$$

12 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=0$

즉, 좌극한과 우극한이 다르므로 극한값이 존재하지 않는다.

ㄴ. $x^2+1=t$라 하면 $x\longrightarrow 0$일 때, $t\longrightarrow 1+$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x^2+1)=\lim\limits_{t\to 1+}f(t)=0$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 1}f(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x-1)f(x)=0\times(-2)=0$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x-1)f(x)=0\times 0=0$

즉, 좌극한과 우극한이 같으므로 극한값이 존재한다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 1-}g(x)=-1$,

$\lim\limits_{x\to 1+}g(x)=1$

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1-}\{f(x)+g(x)\}=1-1=0$

$\lim\limits_{x\to 1+}\{f(x)+g(x)\}=-1+1=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=0$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)g(x)=(-1)\times 1=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}f(x)g(x)=-1$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{-1}=-1$

$\lim\limits_{x\to 1+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-1}{1}=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=-1$

따라서 $x=1$에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14 답 ㄴ

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{x-1}{-(x-1)}=-1$

$\lim\limits_{x\to 1+}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1+}\frac{x-1}{x-1}=1$

즉, 좌극한과 우극한이 다르므로 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$이므로 $x=1$에서 극한값이 존재한다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{[x-1]}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{-1}{x-1}=\infty$

$\lim\limits_{x\to 1+}\frac{[x-1]}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+}\frac{0}{x-1}=0$

즉, 좌극한과 우극한이 다르므로 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 $x=1$에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ뿐이다.

15 답 ②

ㄱ. 【반례】 $f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{x}$이라 하면 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=0$으로 극한값이 존재하지만

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\beta$라 하면

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\times\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to a}g(x)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta \text{ (참)}$$

ㄷ. 【반례】 $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이라 하면

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$이지만

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

16 답 ②

ㄱ. 【반례】 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\ne0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$일 때,

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$이지만 $f(0)=0$이다. (거짓)

ㄴ. $1+\dfrac{2}{x}=t$라 하면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow 1+$이다.

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$에서 $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}f\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=\lim\limits_{t\to 1+}f(t)=0$ (참)

ㄷ. 【반례】 $f(x)=\begin{cases}x-1 & (x\ge1)\\ 1 & (x<1)\end{cases}$일 때,

$\lim\limits_{x\to\infty}f\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=0$이지만

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1$이 되어 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

17 답 1

(i) $x>2$일 때

$\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}\le\dfrac{f(x)}{x-2}\le\dfrac{2x^2-7x+6}{x-2}$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+}(x-1)\le\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{f(x)}{x-2}\le\lim\limits_{x\to 2+}(2x-3)$

$1\le\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{f(x)}{x-2}\le1$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{f(x)}{x-2}=1$

(ii) $x<2$일 때

$\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}\ge\dfrac{f(x)}{x-2}\ge\dfrac{2x^2-7x+6}{x-2}$이므로

$\lim\limits_{x\to 2-}(x-1)\ge\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{f(x)}{x-2}\ge\lim\limits_{x\to 2-}(2x-3)$

$1\ge\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{f(x)}{x-2}\ge1$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{f(x)}{x-2}=1$

(i), (ii)에 의하여 $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{f(x)}{x-2}=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=1$

18 답 5

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=2$이므로 $f(x)$는 이차식이고, 이차항의 계수는 2이다. 이때, $f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+ax+b}{(x-1)(x-2)}=3$

$x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $8+2a+b=0$에서 $b=-2a-8$ ⋯ ㉠

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+ax-2a-8}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+4+a)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x+4+a}{x-1}=8+a=3$$

$\therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $b=2$

따라서 $f(x)=2x^2-5x+2$이므로 $f(3)=18-15+2=5$

19 답 ①

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=2$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

따라서 $f(x)=(x-1)g(x)$라 하면

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)g(x)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{x+1}=\dfrac{g(1)}{2}=2$에서

$g(1)=4$

또한, $f(x)=(x-1)g(x)$이므로

$f(x+2)=\{(x+2)-1\}g(x+2)=(x+1)g(x+2)$

$$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{f(x+2)}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)g(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{g(x+2)}{x-1}=\frac{g(1)}{-2}=\frac{4}{-2}=-2$$

20 답 ④

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$에서 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$ 이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$ 이어야 한다. $\quad\therefore f(0)=0$, $f(1)=0$

ㄱ. $f(f(1))=f(0)=0$ (참)

ㄴ. $$\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)\}^2}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)}{x}\times\frac{f(x)}{x-1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x}\times\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$$
$$=f(1)\times2=0 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $x-1=t$라 하면 $x=t+1$이고, $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x^2-1}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{(t+1)^2-1}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{f(t)}{t}\times\frac{1}{t+2}\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\times\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+2}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21 답 ①

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프에서

ㄱ. $x \longrightarrow 0+$일 때 $g(x) \longrightarrow 1$에서 $f(g(x)) \longrightarrow 1$이고,

$x \longrightarrow 0-$일 때 $g(x) \longrightarrow -1$에서 $f(g(x)) \longrightarrow 1$이므로

$\lim\limits_{x\to0} f(g(x))=1$ (참)

ㄴ. $x \longrightarrow 0-$일 때 $g(x) \longrightarrow -1$이고,

$x \longrightarrow 0+$일 때 $g(x) \longrightarrow 1$에서 좌극한과 우극한이 다르므로

$\lim\limits_{x\to0} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

즉, $f\left(\lim\limits_{x\to0} g(x)\right)$는 정의되지 않는다. (거짓)

ㄷ. $x \longrightarrow 0$일 때 $f(x) \longrightarrow 0+$에서 $g(f(x)) \longrightarrow 1$이므로

$\lim\limits_{x\to0} g(f(x))=1$

한편, $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$이므로 $g\left(\lim\limits_{x\to0} f(x)\right)=g(0)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to0} g(f(x)) \neq g\left(\lim\limits_{x\to0} f(x)\right)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

22 답 -1

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2(x^2+2)-3}{x^2+2}=2-\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x^2+2}$이므로

$\dfrac{2x^2+1}{x^2+2}=t$라 하면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 2-$이다.

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} f\left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+2}\right)=\lim\limits_{t\to2-} f(t)=-1$

23 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $x \longrightarrow -1$일 때 $f(x) \longrightarrow 0+$에서 $f(f(x)) \longrightarrow 0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1} f(f(x))=0$ (참)

ㄴ. $x \longrightarrow 0-$일 때 $f(x) \longrightarrow 1-$에서 $f(f(x)) \longrightarrow 1$

$x \longrightarrow 0+$일 때 $f(x) \longrightarrow 0+$에서 $f(f(x)) \longrightarrow 0$

즉, 좌극한과 우극한이 다르므로 극한값이 존재하지 않는다.

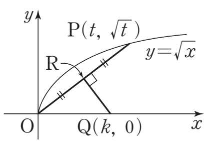
(거짓)

ㄷ. $x \longrightarrow 1$일 때 $f(x) \longrightarrow 1-$에서 $f(f(x)) \longrightarrow 1$이므로

$\lim\limits_{x\to1} f(f(x))=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

24 답 ④



$\mathrm{P}(t, \sqrt{t})$라 하고 $\overline{\mathrm{OP}}$의 중점을

R라 하면 $\mathrm{R}\left(\dfrac{t}{2}, \dfrac{\sqrt{t}}{2}\right)$

또한, $\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기가 $\dfrac{\sqrt{t}-0}{t-0}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$이

므로 $\overline{\mathrm{RQ}}$의 기울기는 $-\sqrt{t}$이다. 따라서 두 점 R, Q를 지나는 직선의 방정식은

$y-\dfrac{\sqrt{t}}{2}=-\sqrt{t}\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$

$\therefore y=-\sqrt{t}x+\dfrac{\sqrt{t}}{2}(t+1)$ ⋯ ㉠

한편, 점 Q의 좌표를 $\mathrm{Q}(k, 0)$이라 하면 점 Q가 직선 ㉠ 위의 점이므로 $\sqrt{t}k=\dfrac{\sqrt{t}}{2}(t+1)$에서

$k=\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2}$

$t \longrightarrow 0+$일 때, $k \longrightarrow \dfrac{1}{2}$이므로 점 P가 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위를 따라 원점에 가까이 갈 때, 점 Q의 x좌표는 $\dfrac{1}{2}$에 가까워진다.

25 답 ⑤

삼각형 OAB의 내접원의 반지름의 길이가 r이므로 삼각형의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}(2+x+\sqrt{4+x^2})\times r=\dfrac{1}{2}\times2\times x=x$

$\therefore \lim\limits_{x\to0+} \dfrac{r}{x}=\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{2}{2+x+\sqrt{4+x^2}}=\dfrac{1}{2}$

26 답 5

$\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{AP}}=t$라 하면

직선 AB의 방정식은 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}=1$ ⋯ ㉠

직선 PQ의 방정식은 $\dfrac{x}{6-t}+\dfrac{y}{3+t}=1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $x=4-\dfrac{2}{3}t$, $y=1+\dfrac{1}{3}t$

$\therefore \lim\limits_{t\to0} x=\lim\limits_{t\to0}\left(4-\dfrac{2}{3}t\right)=4$, $\lim\limits_{t\to0} y=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\dfrac{1}{3}t\right)=1$

따라서 점 M은 점 $(4, 1)$에 한없이 가까워지므로

$a+b=4+1=5$

27 답 ②

$\lim\limits_{x\to\infty} x\left(1-\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\dfrac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})}{\sqrt{x}}\times\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(x-x-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$

$=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}=-1$

[다른 풀이]

$\lim\limits_{x\to\infty} x\left(1-\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x}\times\sqrt{x+2})=\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+2x})$

$=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-(x^2+2x)}{x+\sqrt{x^2+2x}}=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}=\dfrac{-2}{1+1}=-1$

28 답 ②

$$\lim_{x\to2}\frac{|x-a|-(a-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{|x-a|-(a-2)}{x-2}\times\frac{|x-a|+(a-2)}{|x-a|+(a-2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{|x-a|^2-(a-2)^2}{(x-2)(|x-a|+a-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2ax+a^2-(a^2-4a+4)}{(x-2)(|x-a|+a-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-2a+2)}{(x-2)(|x-a|+a-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2a+2}{|x-a|+a-2}$$
$$=\frac{-2a+4}{|2-a|+a-2}=\frac{-2(a-2)}{2(a-2)}\ (\because a>2)=-1$$

29 답 ⑤

$x+2=t$라 하면 $x\longrightarrow0+$일 때 $t\longrightarrow2+$이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x+2)=\lim_{t\to2+}f(t)=2$$
$$\therefore \lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x+2)=1+2=3$$

30 답 5

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+cx+d$ (c, d는 상수)라 하면

$\lim_{x\to0}|x|\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=a$이므로

$$\lim_{x\to0+}x\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=\lim_{x\to0-}(-x)\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=a$$

(i) $\lim_{x\to0+}x\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=a$에서

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $x\longrightarrow0+$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}x\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(2t)-f(-2t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2+2ct+d)-(4t^2-2ct+d)}{t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4ct}{t}=4c$$

(ii) $\lim_{x\to0-}(-x)\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=a$에서

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $x\longrightarrow0-$일 때 $t\longrightarrow-\infty$이므로

$$\lim_{x\to0-}(-x)\left\{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(-\frac{2}{x}\right)\right\}=\lim_{t\to-\infty}\frac{f(2t)-f(-2t)}{-t}$$
$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{(4t^2+2ct+d)-(4t^2-2ct+d)}{-t}$$
$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{4ct}{-t}=-4c$$

이므로 $4c=-4c=a$에서 $c=0$, $a=0$ $\quad\therefore f(x)=x^2+d$

또, $\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=1$에서

$$\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+d\right)=d=1$$

따라서 $f(x)=x^2+1$이므로 $f(2)=2^2+1=5$

31 답 ③

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-2g(x)\}=1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{f(x)}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-3g(x)}{5f(x)-2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{2}f(x)+\frac{3}{2}\{f(x)-2g(x)\}}{4f(x)+\{f(x)-2g(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\left\{\frac{f(x)-2g(x)}{f(x)}\right\}}{4+\frac{f(x)-2g(x)}{f(x)}}=\frac{5}{8}$$

32 답 ①

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}xf(x)=\alpha$ (α는 상수)이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{xf(x)\times\frac{1}{x}\right\}=\alpha\times0=0$$

즉, $\lim_{x\to\infty}xf(x)$의 값이 존재하면 $\lim_{x\to\infty}f(x)$의 값도 존재한다. (참)

ㄴ. 【반례】 $f(x)=x+\frac{1}{x}$이라 하면

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$으로 극한값이 존재

하지만 $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(x+\frac{1}{x}\right)$은 극한값이 존재하지 않는다.

(거짓)

ㄷ. 【반례】 $f(x)=x-1$, $g(x)=\frac{1}{x}$이라 하면

$\lim_{x\to1}f(x)=0$, $\lim_{x\to1}g(x)=1$로 극한값이 존재하지만

$\lim_{x\to1}g(f(x))=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

33 답 7

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$에서 $f(x)-2x^3$은 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로 $f(x)-2x^3=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=2x^3+x^2+ax+b$

이때, $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^3+x^2+ax+b}=2$ ⋯ ㉠

$x\longrightarrow1$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고 극한값이 0이 아니므로

(분모) $\longrightarrow0$이어야 한다. 즉, $3+a+b=0$ $\quad\therefore a=-b-3$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^3+x^2-(b+3)x+b}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x^2+3x-b)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x^2+3x-b}=\frac{2}{5-b}=2$$

$5-b=1$ $\quad\therefore b=4$

$b=4$를 ㉡에 대입하면 $a=-7$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2-7x+4$이므로 $n=3$, $p=4$

$\therefore n+p=3+4=7$

34 답 ④

$\lim_{x\to\infty}\frac{a\sqrt{x^2+3}-b}{x-1}=2$에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{a\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\frac{b}{x}}{1-\frac{1}{x}}=2$

$\therefore a=2 \cdots$ ㉠

한편, $\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+3}-b}{x-1}=c \cdots$ ㉡

에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $2a-b=0$에서 $4-b=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore b=4 \cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{2\sqrt{x^2+3}-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{4(x^2+3)-16}{(x-1)(2\sqrt{x^2+3}+4)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)(x+1)}{(x-1)(2\sqrt{x^2+3}+4)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{4(x+1)}{2\sqrt{x^2+3}+4}=1=c$$

$\therefore abc=2\times4\times1=8$

35 답 ②

조건 (가)에서 $g(x)=(x-1)(x-a)$(a는 상수)라 하면

조건 (나)에서 $\lim_{x\to1}g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=0$

즉, $1-1-a+b=0$에서 $a=b$

$\therefore f(x)=x^3-x^2-ax+a=(x-1)(x^2-a)$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-a)}{(x-1)(x-a)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-a}{x-a}=0$$

에서 $\lim_{x\to1}(x^2-a)=0$, $1-a=0$, $a=1$

$f(x)=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\{g(x)\}^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x-a)^2}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{(x-a)^2}$$
$$=\frac{2}{(1-a)^2}=2$$

에서 $(1-a)^2=1$

$\therefore a=0$ 또는 $a=2$

즉, $g(x)=x(x-1)$ 또는 $g(x)=(x-1)(x-2)$이므로

$g(0)=0$ 또는 $g(0)=2$

36 답 ②

$f(x)$는 삼차식이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

($a\neq0$, a, b, c, d는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)f(x-1)}{x-1}=2$$

에서 $x-1=t$라 하면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{t\to0}\frac{(\sqrt{t+1}+1)f(t)}{t}=2$$

$\therefore \lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=1 \cdots$ ㉠

㉠에서 $t\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

따라서 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서 $f(0)=0$이므로 $d=0$

또한, ㉠에서

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{at^3+bt^2+ct}{t}=\lim_{t\to0}(at^2+bt+c)=c=1$$

$\therefore f(x)=ax^3+bx^2+x=x^2(ax+b)+x$

따라서 $f(x)$를 x^2으로 나눈 나머지는 x이다.

즉, $R(x)=x$이므로 $R(2)=2$

37 답 2

$t=\frac{x-1}{x+2}=1-\frac{3}{x+2}$이라 하면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow 1-$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\lim_{t\to1-}f(t)=2$$

한편, $\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{2x^2-x}{x^2+3}\right)=\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{2x^2+x}{x^2+3}\right)$이고

$h=\frac{2x^2+x}{x^2+3}=2+\frac{x-6}{x^2+3}$이라 하면 $x\longrightarrow\infty$일 때

$h\longrightarrow 2+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{2x^2+x}{x^2+3}\right)=\lim_{h\to2+}f(h)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}f\left(\frac{x-1}{x+2}\right)+\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{2x^2-x}{x^2+3}\right)=2+0=2$$

38 답 ⑤

ㄱ. $x\longrightarrow -1+$일 때 $f(x)\longrightarrow -1$이므로

$g(f(x))\longrightarrow g(-1)=0$이고,

$x\longrightarrow -1-$일 때 $f(x)\longrightarrow 0+$이므로 $g(f(x))\longrightarrow 0$이다.

$\therefore \lim_{x\to-1}g(f(x))=0$ (참)

ㄴ. $x\longrightarrow -1+$일 때 $g(x)\longrightarrow 1-$이므로 $f(g(x))\longrightarrow 0$이고,

$x\longrightarrow -1-$일 때 $g(x)\longrightarrow -1-$이므로

$f(g(x))\longrightarrow 0$이다.

$\therefore \lim_{x\to-1}f(g(x))=0$ (참)

ㄷ. $x\longrightarrow 0+$일 때 $f(x)\longrightarrow -1+$이므로 $f(f(x))=-1$이고,

$x\longrightarrow 0-$일 때 $f(x)=-1$이므로 $f(f(x))=-1$이다.

$\therefore \lim_{x\to0}f(f(x))=-1$

한편, $\lim_{x\to0}f(x)=-1$이므로

$f\left(\lim_{x\to0}f(x)\right)=f(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to0}f(f(x))=f\left(\lim_{x\to0}f(x)\right)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

39 답 2

$\mathrm{P}(t, t^2)$이라 하면 $t>0$이고 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t^4}=t\sqrt{1+t^2}$

또, $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$이므로 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(t\sqrt{1+t^2}, 0)$

따라서 직선 PQ의 방정식은 $y-t^2=\frac{0-t^2}{t\sqrt{1+t^2}-t}(x-t)$

위 식에 $x=0$을 대입하여 정리하면 $y=t^2+\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}$

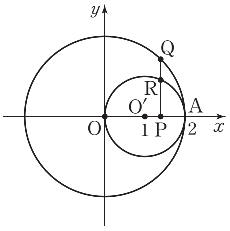
즉, $R\left(0,\ t^2+\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}\right)$

$\therefore \lim\limits_{t\to0}y=\lim\limits_{t\to0}\left(t^2+\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}\right)=\lim\limits_{t\to0}(t^2+\sqrt{1+t^2}+1)=2$

따라서 점 P가 곡선을 따라 원점에 한없이 가까워지면 점 R는 점 $(0,\ 2)$에 가까워진다. 즉, $a=0,\ b=2$이므로 $a+b=2$

40 답 2

그림과 같이 점 O를 원점으로 하는 좌표축을 잡으면 두 원 $O,\ O'$의 방정식은 각각 $x^2+y^2=4,\ (x-1)^2+y^2=1$이다. 이때, $P(t,\ 0)$이라 하면 두 점 Q, R의 좌표는 각각 $Q(t,\ \sqrt{4-t^2})$, $R(t,\ \sqrt{1-(t-1)^2})$이므로



$\overline{PQ}=\sqrt{4-t^2},\ \overline{PR}=\sqrt{1-(t-1)^2}$

이때, 점 P가 점 A에 한없이 가까워지면 $t\longrightarrow 2-$이므로

$$k=\lim_{t\to2-}\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}=\lim_{t\to2-}\frac{\sqrt{4-t^2}}{\sqrt{1-(t-1)^2}}=\lim_{t\to2-}\sqrt{\frac{4-t^2}{1-(t-1)^2}}$$
$$=\lim_{t\to2-}\sqrt{\frac{(t+2)(2-t)}{t(2-t)}}=\lim_{t\to2-}\sqrt{\frac{t+2}{t}}=\sqrt{2}$$

$\therefore k^2=2$

41 답 ⑤

평행사변형 ADEF의 넓이 $f(t)$는

$$f(t)=\triangle ABC-\triangle DBE-\triangle FEC$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}t^2-\frac{\sqrt{3}}{4}(1-t)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}t(1-t)$$

$$\therefore \lim_{t\to1}\frac{f(t)}{1-t}=\lim_{t\to1}\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{2(1-t)}=\lim_{t\to1}\frac{\sqrt{3}t}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

42 답 3

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-2x}{x-1}$의 값이 존재하고 $x\longrightarrow 1$일 때

(분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$에서 $\lim\limits_{x\to1}\{g(x)-2x\}=0$

즉, $g(1)=2$ ········· ⓐ

한편, $f(x)+x-1=(x^2-1)g(x)$에서

$f(x)=(x-1)\{(x+1)g(x)-1\}$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{(x+1)g(x)-1\}\times g(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\{(x+1)g(x)-1\}\times g(x)}{x+1}$$
$$=\frac{\{2g(1)-1\}\times g(1)}{2}=3 \quad\text{········· ⓑ}$$

| 채점기준 |

ⓐ $g(1)$의 값을 구한다. [40%]

ⓑ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값을 구한다. [60%]

43 답 10

$\lim\limits_{x\to0}f(x+k)\neq0$이면 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x+k)-2x}{f(x+k)+2x}=1\neq\dfrac{2}{3}$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x+k)=f(k)=0$

따라서 $x=k$는 방정식 $f(x)=0$의 한 근이다. ········· ⓐ

방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

(ⅰ) $k=\alpha$이면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x+k)-2x}{f(x+k)+2x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+\alpha-\beta)-2x}{x(x+\alpha-\beta)+2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+\alpha-\beta)-2}{(x+\alpha-\beta)+2}$$
$$=\frac{\alpha-\beta-2}{\alpha-\beta+2}=\frac{2}{3}$$

즉, $3(\alpha-\beta)-6=2(\alpha-\beta)+4$이므로

$\alpha-\beta=10$ ········· ⓑ

(ⅱ) $k=\beta$이면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x+k)-2x}{f(x+k)+2x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+\beta-\alpha)-2x}{x(x+\beta-\alpha)+2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+\beta-\alpha)-2}{(x+\beta-\alpha)+2}$$
$$=\frac{\beta-\alpha-2}{\beta-\alpha+2}=\frac{2}{3}$$

즉, $3(\beta-\alpha)-6=2(\beta-\alpha)+4$이므로

$\alpha-\beta=-10$ ········· ⓒ

(ⅰ), (ⅱ)에서 $|\alpha-\beta|=10$ ········· ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ $x=k$가 방정식 $f(x)=0$의 한 근임을 안다. [10%]

ⓑ $k=\alpha$일 때 $\alpha-\beta$의 값을 구한다. [40%]

ⓒ $k=\beta$일 때 $\alpha-\beta$의 값을 구한다. [40%]

ⓓ $|\alpha-\beta|$의 값을 구한다. [10%]

44 답 $\sqrt{2}$

$\alpha^2+\beta^2=1$에서 $\beta=\sqrt{1-\alpha^2}$ ($\because \beta>0$)이고, $\overline{PQ}=2\alpha$이므로

$S(\alpha)=\dfrac{1}{2}\times2\alpha\times\beta=\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$ ········· ⓐ

$$\therefore \lim_{\alpha\to1-}\frac{S(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha}}=\lim_{\alpha\to1-}\frac{\alpha\sqrt{(1-\alpha)(1+\alpha)}}{\sqrt{1-\alpha}}$$
$$=\lim_{\alpha\to1-}\alpha\sqrt{1+\alpha}=\sqrt{2} \quad\text{········· ⓑ}$$

| 채점기준 |

ⓐ $S(\alpha)$를 α에 대한 식으로 나타낸다. [50%]

ⓑ $\lim\limits_{\alpha\to1-}\dfrac{S(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha}}$의 값을 구한다. [50%]

45 답 ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$

$1-x=t$라 하면 $x\longrightarrow 1+$일 때, $t\longrightarrow 0-$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(1-x)=\lim\limits_{t\to0-}f(t)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to1+}f(x)f(1-x)=1\times2=2$

46 답 30

$\lim_{x\to1}(x+1)f(x)=1$이므로

$g(x)=(x+1)f(x)$라 하면 $\lim_{x\to1}g(x)=1$

따라서 $x\neq-1$일 때, $f(x)=\dfrac{g(x)}{x+1}$이므로

$$\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=\lim_{x\to1}\left\{(2x^2+1)\times\frac{g(x)}{x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}\times\lim_{x\to1}g(x)$$
$$=\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{2}$$

$\therefore 20a=20\times\dfrac{3}{2}=30$

47 답 ③

주어진 조건에 의하여 직선 AB와 점 C 사이의 거리와 직선 AB와 점 P 사이의 거리가 같아야 한다. 즉,

$t<-2$일 때 $f(t)=0$

$t=-2$일 때 $f(t)=1$

$-2<t<-1$일 때 $f(t)=2$

$t=-1$일 때 $f(t)=3$

$-1<t<0$일 때 $f(t)=4$

$t=0$일 때 $f(t)=3$

$0<t<1$일 때 $f(t)=2$

$t=1$일 때 $f(t)=1$

$t>1$일 때 $f(t)=0$

$f(a)+\lim_{t\to a-}f(t)=5$에서 $a=-1$

$\lim_{t\to0-}f(t)=4=b$

$\therefore a+b=3$

48 답 10

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=-11$이므로

함수 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 -11인 삼차함수이다. $\quad\therefore f(x)=x^3-11x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

또, $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-9$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=1-11+a+b=0$에서

$b=10-a$ ⋯ ㉠이므로 $f(x)=x^3-11x^2+ax+10-a$이고

이것을 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-9$에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-11x^2+ax+10-a}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-10x+a-10)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2-10x+a-10)$$
$$=1-10+a-10=-9$$

$\therefore a=10$, $b=0$ ($\because$ ㉠)

따라서 $f(x)=x^3-11x^2+10x$이므로

$$\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}x\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^3-11\left(\frac{1}{x}\right)^2+10\times\frac{1}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}-11\times\frac{1}{x}+10\right)$$
$$=0-11\times0+10=10$$

49 답 ③

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2g(x)}{x^2}=1$이므로

$f(x)-2g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

조건 (나)에서 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+3g(x)}{x^3}=1$이므로

$f(x)+3g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$\{f(x)+3g(x)\}-\{f(x)-2g(x)\}=5g(x)$이므로

$g(x)$는 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{5}$인 삼차함수이다.

즉, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^3}=\dfrac{1}{5}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}-\frac{2g(x)}{x^3}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}-2\times\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^3}$$
$$=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

50 답 ②

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로 점 Q의 좌표는 $(2t,\ 0)$이다.

$\therefore S(t)=\dfrac{1}{2}\times2t\times t^2=t^3$

삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이 y축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{2}\right)$이고

직선 MR의 기울기는 $-\dfrac{1}{t}$이므로 직선 MR의 방정식은

$y-\dfrac{t^2}{2}=-\dfrac{1}{t}\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$

즉, $y=-\dfrac{1}{t}x+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$

$T(t)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\times t=\dfrac{1}{4}(t^3+t)$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{4}(t^3+t)-t^3}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

51 답 6

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{(x-1)(2x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(f(x))}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x-1}\times\frac{1}{2x-1}\right\}$$

이때, $f(x)=t$라 하면 $x\longrightarrow 1$일 때, $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-3x+1}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\times\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x-1}$$
$$=3\times2\times1=6$$

52 답 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^n-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^n)^2-(1-x^2)}{x^2(1-x^n+\sqrt{1-x^2})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2n}-2x^n+x^2}{x^2(1-x^n+\sqrt{1-x^2})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2n-2}-2x^{n-2}+1}{1-x^n+\sqrt{1-x^2}}$$

따라서 $x\longrightarrow 0$에서의 극한값이 존재하기 위해서는

$2n-2\ge0$, $n-2\ge0$이어야 한다.

즉, $n\ge2$이어야 하므로 $\alpha=2$

한편, $n=2$일 때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{2n-2}-2x^{n-2}+1}{1-x^n+\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+1}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}=\beta$$

$\therefore\ \alpha+2\beta=2-1=1$

53 답 3

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$ … ㉠에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $f(1)=0$

또한, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=2$ … ㉡에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $f(2)=0$

따라서 $f(x)$는 $x-1$, $x-2$를 인수로 갖는다.

즉, $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$ … ㉢라 하고 ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)Q(x)$$
$$=-Q(1)=1$$

$\therefore\ Q(1)=-1$ … ㉣

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)Q(x)$$
$$=Q(2)=2\ \cdots\ ㉤$$

㉢에서 $Q(x)$의 차수가 가장 낮을 때 $f(x)$의 차수가 가장 낮고, ㉣, ㉤에서 함수 $y=Q(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ -1)$, $(2,\ 2)$를 지나므로 두 점을 지나는 다항함수 중 차수가 가장 낮은 함수는 일차함수이다.

따라서 $Q(x)=ax+b$ ($a\ne0$, a, b는 상수)라 하면

$Q(1)=a+b=-1$, $Q(2)=2a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-4$

따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(3x-4)$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(3x-4)}{x^3}=3$$

54 답 9

$k=0$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ … ㉠

$k=1$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ … ㉡

$k=2$일 때, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=2$ … ㉢

$k=3$일 때, $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=6$ … ㉣

조건 (가)에서 $g(1)=0$이므로 삼차함수 $g(x)$는

$g(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

㉠, ㉡에서 $f(0)=0$, $f(1)=0$이므로

$f(x)=x(x-1)(x+c)$ (c는 상수)라 하면 ㉡에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x+c)}{(x-1)(x^2+ax+b)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+c)}{x^2+ax+b}=0$$

이므로 $\lim_{x\to 1}x(x+c)=0$

즉, $c=-1$

따라서 $f(x)=x(x-1)^2$이고 ㉢에서

$$\lim_{x\to 2}\frac{x(x-1)^2}{(x-1)(x^2+ax+b)}=\frac{2}{4+2a+b}=2\text{이므로}$$

$2a+b+4=1$ … ㉤

㉣에서 $\lim_{x\to 3}\frac{x(x-1)^2}{(x-1)(x^2+ax+b)}=\frac{6}{9+3a+b}=6$이므로

$3a+b+9=1$ … ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=7$

따라서 $g(x)=(x-1)(x^2-5x+7)$이므로

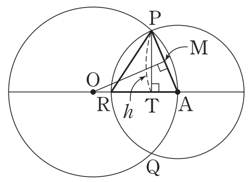
$g(4)=3\times3=9$

55 답 ②

점 P에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 T라 하고,

$\overline{PT}=h$, $\overline{AP}$의 중점을 M이라 하면

$S(r)=\frac{1}{2}hr$ … ㉠



한편, $\triangle OAP=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{PT}=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{OM}$이므로

$\frac{1}{2}\times1\times h=\frac{1}{2}\times r\times\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}$에서

$h=r\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$S(r)=\frac{1}{2}r^2\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}$

$$\therefore \lim_{r\to0}\frac{S(r)}{r^2}=\lim_{r\to0}\frac{\frac{1}{2}r^2\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}}{r^2}$$
$$=\lim_{r\to0}\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

일등급 UP

＊삼각함수를 이용한 삼각형의 넓이

$\triangle APR$는 $\overline{AP}=\overline{AR}=r$인 이등변삼각형이므로 $\angle PAR=\theta$라 하면

$S(r)=\frac{1}{2}r^2\sin\theta=\frac{1}{2}r^2\times\frac{h}{r}=\frac{1}{2}rh$

$=\frac{1}{2}r\times r\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}r^2\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}$

02 함수의 연속

문제편 19P

01 답 ③

함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)f(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)f(x)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x+2}$$
$$=\frac{f(2)}{4}=4$$

$\therefore f(2)=16$

02 답 ①

$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$이므로 $b=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-a}{x-2}$

$x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$에서

$\lim_{x\to2}(\sqrt{x+2}-a)=2-a=0\qquad\therefore a=2$

$$b=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore ab=\frac{1}{2}$

03 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1-}\{f(x)+f(-x)\}=\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1-}f(-x)$
$=\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{t\to-1+}f(t)$
$=1+(-1)=0$

$\lim_{x\to1+}\{f(x)+f(-x)\}=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1+}f(-x)$
$=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{t\to-1-}f(t)$
$=(-1)+1=0$

에서 $\lim_{x\to1}\{f(x)+f(-x)\}=0$

또한, $f(1)+f(-1)=1+(-1)=0$

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+f(-x)\}=f(1)+f(-1)$이므로

함수 $f(x)+f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(x)f(-x)=1\times(-1)=-1$

$\lim_{x\to1+}f(x)f(-x)=(-1)\times1=-1$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)f(-x)=-1$

또한, $f(1)f(-1)=1\times(-1)=-1$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)f(-x)=f(1)f(-1)$이므로 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $g(x)=f(x)f(-x)$라 하면 $g(-x)=f(-x)f(x)=g(x)$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ에서 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $g(x)$는 $x=-1$에서도 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

04 답 ②

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되기 위해서는

$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$이어야 한다.

$$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}\{(-x^2+a)(x-4)\}=(-1+a)\times(-3)=3-3a$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}\left\{(x^2-1)\times\frac{3}{x-1}\right\}=\lim_{x\to 1+} 3(x+1)=6$$

$f(1)g(1)=(-1+a)\times(-3)=3-3a$이므로

$3-3a=6$

$\therefore a=-1$

05 답 ④

$g(x)=ax+b\ (a\neq 0)$라 하고 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

$g(0)=f(0)=3$이므로 $b=3$

$h(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1+} h(x)=h(1)$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)(ax+3)=2(a+3)$

$\lim_{x\to 1+} h(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)(ax+3)=a+3$

$h(1)=f(1)(a+3)=a+3$이므로

$2(a+3)=a+3,\ a+3=0$

따라서 $a=-3$이고 $g(x)=-3x+3$이므로 $g(-1)=6$이다.

06 답 2

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 $f(0)f(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또한, $f(0)f(1)<0$, $f(0)f(2)>0$에서 $f(1)f(2)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 적어도 2개의 실근을 가지므로 n의 최솟값은 2이다.

07 답 ④

ㄱ. $f(0)=0$이고

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} x[x]=0\times 0=0$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} x[x]=0\times(-1)=0$

에서 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0+} 1=1$

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{-x}=\lim_{x\to 0-}(-1)=-1$

이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 극한값이 존재하지 않는다.

즉, $g(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

ㄷ. $h(0)=0$이고

$\lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0+} x=0$

$\lim_{x\to 0-} h(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$

에서 $\lim_{x\to 0} h(x)=0$

즉, $\lim_{x\to 0} h(x)=h(0)$이므로 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

08 답 ①

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 0$이어야 한다.

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(2k-3)=k^2-8k+12<0$

$2<k<6$

따라서 자연수 k는 3, 4, 5이므로 모든 자연수 k의 합은

$3+4+5=12$이다.

09 답 2

$x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}=c$$

$x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

또한, 분모가 $(x-1)^2$이므로 분자가 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어져야 한다.

이때, $x^3+ax+b=(x-1)^2(x+b)$ (b는 상수)라 하면

$x^3+ax+b=x^3+(b-2)x^2+(1-2b)x+b$에서

양변의 계수를 비교하면 $b-2=0,\ 1-2b=a$

$\therefore b=2,\ a=-3$

한편, $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+b)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}(x+b)=c$

즉, $1+b=c$에서 $c=3$

$\therefore a+b+c=-3+2+3=2$

[다른 풀이]

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}=c$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $1+a+b=0$에서 $b=-a-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax-a-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)+a(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1+a}{x-1}$$

$x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $3+a=0$에서 $a=-3,\ b=2$

$$c=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$

$\therefore a+b+c=-3+2+3=2$

10 답 ①

ㄱ. $\lim_{x \to 1+} f(x)f(x-1)=0\times1=0$

$\lim_{x \to 1-} f(x)f(x-1)=2\times0=0$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x)f(x-1)=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x \to 0+} f(-x)=\lim_{t \to 0-} f(t)=0$, $f(1)=1$이므로

$\lim_{x \to 0+} f(-x)\neq f(1)$ (거짓)

ㄷ. $g(x)=f(x)f(x+1)$이라 하면

$\lim_{x \to 0-} g(x)=\lim_{x \to 0-} f(x)f(x+1)=0\times2=0$,

$\lim_{x \to 0+} g(x)=\lim_{x \to 0+} f(x)f(x+1)=1\times0=0$

이므로 $\lim_{x \to 0} g(x)=0$이지만 $g(0)=f(0)f(1)=1\times1=1$

즉, 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

11 답 ②

ㄱ. $\lim_{x \to 0+} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x \to 0+} f(x)+\lim_{x \to 0+} g(x)=1+0=1$

$\lim_{x \to 0-} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x \to 0-} f(x)+\lim_{x \to 0-} g(x)=0+1=1$

$f(0)+g(0)=1+0=1$이므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x \to 0+} f(x)g(x)=\lim_{x \to 0+} f(x)\times\lim_{x \to 0+} g(x)=1\times0=0$

$\lim_{x \to 0-} f(x)g(x)=\lim_{x \to 0-} f(x)\times\lim_{x \to 0-} g(x)=0\times1=0$

$f(0)g(0)=1\times0=0$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $\lim_{x \to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x \to 1+} f(x)\times\lim_{x \to 1+} g(x)=1\times1=1$

$\lim_{x \to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x \to 1-} f(x)\times\lim_{x \to 1-} g(x)=2\times0=0$

즉, $\lim_{x \to 1+} f(x)g(x)\neq\lim_{x \to 1-} f(x)g(x)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

12 답 ②

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

이때, $\lim_{x \to a} \{f(x)\}^2=\lim_{x \to a} \{f(x)\times f(x)\}=\{f(a)\}^2$이므로

함수 $\{f(x)\}^2$도 $x=a$에서 연속이다. (참)

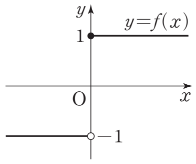
ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

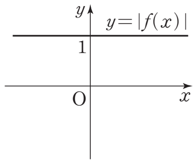
$\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

이때, $\lim_{x \to a} |f(x)|=|f(a)|$이므로 함수 $|f(x)|$도 $x=a$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 【반례】 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\geq0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$일 때,

함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만 $y=f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)





따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

13 답 ③

ㄱ. 【반례】 $f(x)=x^2$, $g(x)=x$이면 두 함수 모두 $x=0$에서 연속이지만 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$은 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄴ. 【반례】 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\geq0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$, $g(x)=x$이면

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$와 함수 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 연속이지만

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\dfrac{g(x)}{f(x)}=h(x)$라 하면 $g(x)=f(x)h(x)$

이때, 두 함수 $f(x)$, $h(x)$ 모두 $x=0$에서 연속이므로 함수 $g(x)$도 $x=0$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

14 답 ④

$x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x \to 0-} g(x)=\lim_{x \to 0+} g(x)=g(0)$이어야 하므로

$\lim_{x \to 0-} f(x)\{f(x)+k\}=1\times(1+k)=1+k$

$\lim_{x \to 0+} f(x)\{f(x)+k\}=(-2)\times(-2+k)=4-2k$

$g(0)=f(0)\{f(0)+k\}=(-2)\times(-2+k)=4-2k$

에서 $1+k=4-2k$　　$\therefore k=1$

15 답 ①

$(2x-|x|)f(x)=x^2$에 $x=-3$을 대입하면

$-9f(-3)=9$　　$\therefore f(-3)=-1$

한편, $x\neq0$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-|x|}$이므로

$\lim_{x \to 0+} f(x)=\lim_{x \to 0+} \dfrac{x^2}{2x-|x|}=\lim_{x \to 0+} \dfrac{x^2}{x}=\lim_{x \to 0+} x=0$,

$\lim_{x \to 0-} f(x)=\lim_{x \to 0-} \dfrac{x^2}{2x-|x|}=\lim_{x \to 0-} \dfrac{x^2}{3x}=\lim_{x \to 0-} \dfrac{x}{3}=0$에서

$\lim_{x \to 0} f(x)=0$이다.

이때, $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x \to 0} f(x)=0$

$\therefore f(-3)+f(0)=-1+0=-1$

16 답 32

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위해서는 $x=1$에서 연속이면 된다.

즉, $\lim_{x \to 1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)g(x)}{x-1}=f(1)g(1)$에서

$x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다. 즉, $g(1)=0$

$g(x)=a(x-1)(x-\alpha)$ (a는 0이 아닌 상수)라 하면

$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=\lim_{x\to1} a(x+1)(x-\alpha)=f(1)g(1)=0$

$2a(1-\alpha)=0$에서 $\alpha=1$

따라서 $g(x)=a(x-1)^2$이고 $g(0)=2$에서 $a=2$

즉, $g(x)=2(x-1)^2$이므로

$g(5)=2(5-1)^2=32$

17 답 ②

$f(x+3)=f(x)$에 $x=-1$을 대입하면

$f(2)=f(-1)$

$\therefore 4+2a+b=2$ ⋯ ㉠

한편, $f(x)$는 연속함수이므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0+} f(x)=f(0)$에서 $b=0$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -2x & (-1\le x<0) \\ x^2-x & (0\le x\le 2)\end{cases}$이므로

$f(10)=f(7)=f(4)=f(1)=0$

18 답 16

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

$\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a} f(x)g(x)=8$이므로

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{x+2}{x-a}\times x(x-b)\right\}$

$x \longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to a} x(x+2)(x-b)=0$에서 $a(a+2)(a-b)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=b$

(i) $a=0$일 때

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x+2}{x}\times x(x-b)\right\}=-2b$

$-2b=8$에서 $b=-4$

(ii) $a=-2$일 때

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to -2}\left\{\frac{x+2}{x+2}\times x(x-b)\right\}=2b+4$

$2b+4=8$에서 $b=2$

(iii) $a=b$일 때

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{x+2}{x-a}\times x(x-a)\right\}=a^2+2a$

$a^2+2a=8$에서 $(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=b=-4$ 또는 $a=b=2$

(i), (ii), (iii)에서 가능한 순서쌍 (a, b)는 $(0, -4)$, $(-2, 2)$, $(-4, -4)$, $(2, 2)$이므로 ab의 최댓값은 $a=b=-4$일 때 16이다.

19 답 1

$f(x)=\begin{cases}(x-1)(x+4) & (x\ge0) \\ (2-x)(x+2) & (x<0)\end{cases}$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고, 함수 $f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

$f(x)f(x-a)=g(x)$라 하자.

(i) $a=0$일 때

$\lim_{x\to0+} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^2=16$

$\lim_{x\to0-} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to0-}\{f(x)\}^2=16$

$\{f(0)\}^2=16$이므로 $a=0$일 때 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $a\ne0$일 때

$\lim_{x\to0+} f(x)f(x-a)=(-4)\times f(-a)=-4f(-a)$

$\lim_{x\to0-} f(x)f(x-a)=4\times f(-a)=4f(-a)$

$f(0)f(-a)=-4f(-a)$이므로 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=0$에서 연속이려면 $4f(-a)=-4f(-a)$, 즉 $f(-a)=0$

$a>0$이면 $-a<0$이므로

$f(-a)=(2+a)(-a+2)=0$에서 $a=2$

$a<0$이면 $-a>0$이므로

$f(-a)=(-a-1)(-a+4)=0$에서 $a=-1$

(i), (ii)에서 $f(x)f(x-a)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 실수 a는 -1, 0, 2이다.

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-1+0+2=1$

20 답 ①

ㄱ. 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $f(a)f(b)<0$이면 구간 (a, b)에서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. 【반례】 $f(x)=x^2-1$일 때, $f(-2)f(2)>0$이지만 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 해가 구간 $(-2, 2)$에 존재한다. (거짓)

ㄷ. 【반례】 $f(x)=x^2-1$일 때, 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2, 2)$에서 실근을 갖지만 $f(-2)f(2)>0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

21 답 ②

$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$라 하면 $f(x)$는 연속함수이고 $a<b<c$이므로

$f(a)=(a-b)(a-c)>0$

$f(b)=(b-c)(b-a)<0$

$f(c)=(c-a)(c-b)>0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 (a, b), (b, c)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

한편, $f(x)$는 이차식이므로 많아야 두 개의 실근을 갖는다.

$\therefore a<\alpha<b<\beta<c$

22 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 함수 $f(x)$는 구간 $(-2,\ -1)$에서 연속이고, $f(-1)f(-2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2,\ -1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)+f(-x)=0$, 즉 $f(-x)=-f(x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄱ에서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2,\ -1)$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 원점에 대하여 대칭인 구간 $(1,\ 2)$에서도 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2,\ -1)$, $(2,\ 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가지고, 조건 (가)에서 구간 $(1,\ 2)$, $(-3,\ -2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또, 조건 (가)의 $f(x)+f(-x)=0$에 $x=0$을 대입하면 $2f(0)=0$이므로 $x=0$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 5개의 서로 다른 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

23 답 ⑤

$\lim_{x\to2-} f(x)=f(2)=-1$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이고 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이기 위해서는 $\lim_{x\to2+} f(x)=1$이어야 한다.

$\lim_{x\to2+}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=1$ ⋯ ㉠에서 $x\longrightarrow2+$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to2+}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$b=-2a-4$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2+}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}(x+a+2)=a+4=1$$

따라서 $a=-3$이고 $b=2$이므로 $b-a=5$

24 답 5

$$f(x)=\begin{cases} x(x-1)+a & (x>1) \\ x(b-x) & (-1\le x\le1) \\ x(x-1)+a & (x<-1)\end{cases}$$ 이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=-1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(i) $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$a=b-1$ ⋯ ㉠

(ii) $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$a+2=-b-1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=-1$

$\therefore a^2+b^2=4+1=5$

25 답 16

조건 (가)에서 $\dfrac{x-1}{f(x)}$이 $x=1$, $x=3$에서 불연속이므로

$f(1)=0$, $f(3)=0$

$f(x)=k(x-1)(x-3)$ (k는 0이 아닌 상수)라 하면

조건 (나)에서 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-4$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{k(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to1}k(x-3)=-2k=-4$$

$\therefore\ k=2$

따라서 $f(x)=2(x-1)(x-3)$이므로

$f(5)=2\times4\times2=16$

26 답 ②

$\lim_{x\to1-}(x+a)f(x)=\lim_{x\to1-}(x+a)\times\lim_{x\to1-}f(x)=1+a$ ⋯ ㉠

$\lim_{x\to1+}(x+a)f(x)=\lim_{x\to1+}(x+a)\times\lim_{x\to1+}f(x)=-(1+a)$ ⋯ ㉡

또한, $(1+a)f(1)=1+a$ ⋯ ㉢

함수 $(x+a)f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 ㉠, ㉡, ㉢이 모두 같아야 하므로 $1+a=-(1+a)$에서 $a=-1$

27 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x\to0-}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=0$

$\lim_{x\to0+}f(f(x))=\lim_{t\to-1+}f(t)=0$

$f(f(0))=f(1)=0$에서

$\lim_{x\to0-}f(f(x))=\lim_{x\to0+}f(f(x))=f(f(0))$이므로

함수 $f(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0+}f(x)\ne\lim_{x\to0-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

즉, $f\left(\lim_{x\to0}f(x)\right)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이고, 함수 $f(f(x))$는 ㄱ에 의하여 $x=0$에서 연속이므로 함수 $f(f(x))$가 불연속인 x의 값은 $f(x)=0$인 x의 값, 즉 $x=-1$, $x=1$, $x=3$에서의 연속성만을 조사하면 된다.

(i) $\lim_{x\to-1-}f(f(x))=\lim_{t\to0-}f(t)=1$,

$\lim_{x\to-1+}f(f(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=-1$에서

$\lim_{x\to-1-}f(f(x))\ne\lim_{x\to-1+}f(f(x))$이므로 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to1-}f(f(x))=\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{t\to0-}f(t)=1$,

$f(f(1))=f(0)=1$에서 $\lim_{x\to1}f(f(x))=f(f(1))$이므로

$x=1$에서 연속이다.

(iii) (i)과 같은 방법으로 $x=3$에서 불연속이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구간 $[-2, 4]$에서 함수 $f(f(x))$가 불연속인 x의 개수는 $x=-1$, $x=3$의 2이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

28 답 ㄴ, ㄷ

각각의 그래프에 대하여 함수 $f(x-1)f(x+1)$의 $x=1$에서의 극한값과 함숫값을 구하면 다음과 같다.

ㄱ. $\lim_{x\to1-} f(x-1)f(x+1)=\lim_{x\to1-} f(x-1)\times\lim_{x\to1-} f(x+1)$
$=\lim_{t\to0-} f(t)\times\lim_{t\to2-} f(t)$
$=(-1)\times1=-1$

$\lim_{x\to1+} f(x-1)f(x+1)=\lim_{x\to1+} f(x-1)\times\lim_{x\to1+} f(x+1)$
$=\lim_{t\to0+} f(t)\times\lim_{t\to2+} f(t)$
$=1\times1=1$

즉, 좌극한과 우극한이 다르므로 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1-} f(x-1)f(x+1)=\lim_{t\to0-} f(t)\times\lim_{t\to2-} f(t)$
$=1\times0=0$

$\lim_{x\to1+} f(x-1)f(x+1)=\lim_{t\to0+} f(t)\times\lim_{t\to2+} f(t)$
$=1\times0=0$

$f(0)f(2)=(-1)\times0=0$

즉, $x=1$에서 극한값과 함숫값이 일치하므로 연속이다.

ㄷ. 주어진 함수는 $x=0$과 $x=2$에서 모두 연속이므로 함수 $f(x-1)f(x+1)$은 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

29 답 ③

ㄱ. 【반례】 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\-1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge0)\\1 & (x<0)\end{cases}$이면

함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 모두 $x=0$에서 불연속이지만 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (거짓)

ㄴ. 【반례】 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\-1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge0)\\1 & (x<0)\end{cases}$이면

함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 모두 $x=0$에서 불연속이지만 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이라고 가정하면 조건에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 $x=0$에서 연속이어야 한다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 불연속이면 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

30 답 ②

ㄱ. $\lim_{h\to0}|(1+h)^2-(1-h)^2|=\lim_{h\to0}|4h|=0$ (참)

ㄴ. $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면

$\lim_{h\to0} f(1+h)=\lim_{h\to0} f(1-h)=f(1)$

$\therefore \lim_{h\to0}|f(1+h)-f(1-h)|=|f(1)-f(1)|=0$ (참)

ㄷ. 【반례】 $f(x)=\begin{cases}x & (x\ne1)\\0 & (x=1)\end{cases}$이면

$\lim_{h\to0}|f(1+h)-f(1-h)|=\lim_{h\to0}|(1+h)-(1-h)|=0$

이지만 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

31 답 ④

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(2)}{f(2)}$가 성립한다.

$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{x^2+ax+b}{x+5}=\frac{4+2a+b}{7}$

$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2-}\frac{x^2+ax+b}{x^2-5}=-(4+2a+b)$

$\frac{g(2)}{f(2)}=-(4+2a+b)$

$\frac{4+2a+b}{7}=-(4+2a+b)$에서 $2a+b+4=0$이므로

좌표평면에서 점 (a, b)는 직선 $2x+y+4=0$ 위의 점이다.

이때, $\sqrt{a^2+b^2}$의 값은 원점 $O(0, 0)$과 점 (a, b) 사이의 거리와 같으므로 $\sqrt{a^2+b^2}$의 최솟값은 원점과 직선 $2x+y+4=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{|0+0+4|}{\sqrt5}=\frac{4\sqrt5}{5}$

32 답 −3

$g(f(x))=\begin{cases}g(2-x) & (x\le0)\\g(x+1) & (x>0)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to0-} g(f(x))=\lim_{x\to0-} g(2-x)=g(2)=4+2a$

$\lim_{x\to0+} g(f(x))=\lim_{x\to0+} g(x+1)=g(1)=1+a$

$g(f(x))$가 $x=0$에서 연속이므로

$4+2a=1+a \quad \therefore a=-3$

33 답 ③

ㄱ. $g(x)=\begin{cases}1 & (x\ne1)\\1 & (x=1)\end{cases}$이므로 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $g(x)=\begin{cases}x+1 & (x\ne1)\\0 & (x=1)\end{cases}$이므로 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $g(x)=\begin{cases}x+2 & (x\ne1)\\3 & (x=1)\end{cases}$이므로 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$는 ㄱ, ㄷ이다.

일등급 UP

* 미분계수 이용

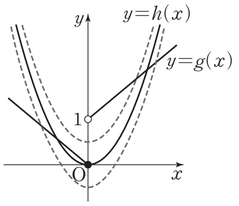
$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $f'(1)=f(1)$을 만족시키는 함수를 찾아도 된다.

34 답 ㄴ

직선 $y=-x$와 곡선 $h(x)=x^2+a$가 접할 때 $a=\frac{1}{4}$이고

직선 $y=x+1$과 곡선 $h(x)=x^2+a$가 접할 때 $a=\frac{5}{4}$이므로

그림과 같이 a의 값이 변함에 따라 교점의 개수를 구해 보자.



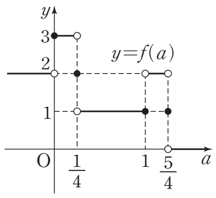
$a<0$일 때 $f(a)=2$, $0\le a<\frac{1}{4}$일 때 $f(a)=3$

$a=\frac{1}{4}$일 때 $f(a)=2$, $\frac{1}{4}<a\le 1$일 때 $f(a)=1$

$1<a<\frac{5}{4}$일 때 $f(a)=2$, $a=\frac{5}{4}$일 때 $f(a)=1$

$a>\frac{5}{4}$일 때 $f(a)=0$

이므로 함수 $y=f(a)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $\lim\limits_{a\to 0-} f(a)=2$, $f(0)=3$이므로

$\lim\limits_{a\to 0-} f(a)\ne f(0)$ (거짓)

ㄴ. $\lim\limits_{a\to 1-} f(a)=1$, $\lim\limits_{a\to 1+} f(a)=2$이므로

$\lim\limits_{a\to 1-} f(a)<\lim\limits_{a\to 1+} f(a)$ (참)

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 a의 값은 0, $\frac{1}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$의 4개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

35 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(x)=f(-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄱ. $|x|>5$, 즉 $x<-5$ 또는 $x>5$일 때 $f(x)=0$이고

$f(x)$가 연속함수이므로 $f(5)=\lim\limits_{x\to 5+} f(x)=0$ (참)

ㄴ. $|x|<5$, 즉 $-5<x<5$ 일 때 $|f(x)|\le 5$이고

$f(x)=5$가 되는 x는 오직 한 개이고, $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $f(0)=5$ (참)

ㄷ. $f(0)=5$, $f(5)=0$이고 $f(x)$는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=2$인 c가 구간 $(0, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

또한, $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 구간 $(-5, 0)$에도 $f(c)=2$인 c가 적어도 하나 존재한다.

즉, $f(x)=2$가 되는 x는 적어도 두 개 이상 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

36 답 ㄷ

ㄱ. 【반례】 $f(x)=\frac{1}{2}x$이면 $f(-1)f(1)<0$이지만

구간 $(-1, 1)$에서 방정식 $f(x)=1$의 근이 존재하지 않는다.

(거짓)

ㄴ. 【반례】 $f(x)=\frac{1}{2}x$이면 $f(-1)f(1)<1$이지만

구간 $(-1, 1)$에서 방정식 $f(x)=1$의 근이 존재하지 않는다.

(거짓)

ㄷ. $g(x)=f(x)-1$이라 하면 $g(x)$는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(a)g(b)<0$이면 $g(x)=0$ 즉 $f(x)=1$의 근이 열린구간 (a, b)에 적어도 한 개 존재한다.

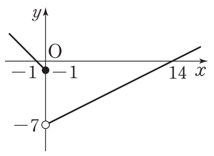
$g(a)g(b)=\{f(a)-1\}\{f(b)-1\}<0$에서

$f(a)f(b)<f(a)+f(b)-1$ (참)

따라서 충분조건인 것은 ㄷ뿐이다.

37 답 13

$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 함수 $f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다. ---------- ⓐ

이때, $g(x)=f(x)f(x-a)$라 하면

(i) $a=0$일 때

$\lim\limits_{x\to a+} g(x)=\lim\limits_{x\to a+} f(x)f(x-a)=\lim\limits_{x\to 0+}\{f(x)\}^2=49$

$\lim\limits_{x\to a-} g(x)=\lim\limits_{x\to a-} f(x)f(x-a)=\lim\limits_{x\to 0-}\{f(x)\}^2=1$

즉, $\lim\limits_{x\to a+} g(x)\ne\lim\limits_{x\to a-} g(x)$이므로 $a=0$일 때,

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다. ---------- ⓑ

(ii) $a\ne 0$일 때

$\lim\limits_{x\to a+} g(x)=\lim\limits_{x\to a+} f(x)f(x-a)=-7f(a)$

$\lim\limits_{x\to a-} g(x)=\lim\limits_{x\to a-} f(x)f(x-a)=-f(a)$

$g(a)=f(a)f(0)=-f(a)$

따라서 함수 $g(a)$가 $x=a$에서 연속이 되기 위해서는

$-7f(a)=-f(a)$

즉, $f(a)=0$에서 $a=-1$, $a=14$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 13이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 함수 $f(x-a)$가 $x=a$에서 불연속임을 안다. [20%]

ⓑ $a=0$일 때 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 연속성을 조사한다. [30%]

ⓒ $a\ne 0$일 때 $x=a$에서 연속이기 위한 a의 값을 구하고, 모든 실수 a의 값의 합을 구한다. [50%]

38 답 2

$f(x)$가 $x=1$에서만 불연속이므로 $(f\circ f)(x)=f(f(x))$에서 $x=1$에서의 연속성과 $f(x)=1$인 $x=0$과 $x=2$에서의 연속성을 조사하면 된다. ---------- ⓐ

(i) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1-}f(f(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=1$, $\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to1}f(f(x))=1$

이때, $f(f(1))=f(1)=1$이므로 $\lim_{x\to1}f(f(x))=f(f(1))$

따라서 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $x=0$일 때

$\lim_{x\to0-}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=0$, $\lim_{x\to0+}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(f(x))=0$

이때, $f(f(0))=f(1)=1$이므로 $\lim_{x\to0}f(f(x))\neq f(f(0))$

따라서 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $x=2$일 때

$\lim_{x\to2-}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=0$, $\lim_{x\to2+}f(f(x))=\lim_{t\to1+}f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to2}f(f(x))=0$

이때, $f(f(2))=f(1)=1$이므로 $\lim_{x\to2}f(f(x))\neq f(f(2))$

따라서 $x=2$에서 불연속이다. ---------- ⓑ

(i), (ii), (iii)에 의하여 $(f\circ f)(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 불연속이므로 모든 실수 a의 값의 합은 2이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $(f\circ f)(x)$의 연속성을 알기 위한 x의 값을 안다.	[20%]
ⓑ $x=1$, $x=0$, $x=2$일 때, 함수 $(f\circ f)(x)$의 연속성을 조사한다.	[60%]
ⓒ 모든 실수 a의 값의 합을 구한다.	[20%]

39 답 7

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)=x^3+x+k-3$

이때, $h(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여 $h(1)h(2)=(k-1)(k+7)<0$이면 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. ---------- ⓐ

$(k-1)(k+7)<0$에서 $-7<k<1$

따라서 정수 k의 개수는 $-6, -5, \cdots, -1, 0$의 7개이다. ---------- ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 사잇값의 정리를 이용하여 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지기 위한 조건을 생각한다.	[50%]
ⓑ 정수 k의 개수를 구한다.	[50%]

40 답 ⑤

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0}f(x)$

이때, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=a$라 하면

$\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=4$ ⋯ ㉠, $\lim_{x\to0+}\{f(x)-g(x)\}=8$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2a+\{\lim_{x\to0-}g(x)-\lim_{x\to0+}g(x)\}=12$

$2a+6=12$에서 $a=3$

41 답 ②

ㄱ. $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=2+0=2$이고 $f(1)+g(1)=0+2=2$

이므로 $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$

즉, 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=2\times0=0$이고 $f(1)g(1)=0\times2=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $\dfrac{f(x)+ax}{g(x)+bx}$가 $x=1$에서 연속이면

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+ax}{g(x)+bx}=\dfrac{2+a}{b}$ $(b\neq0)$이고

$\dfrac{f(1)+a}{g(1)+b}=\dfrac{a}{2+b}$ $(b\neq-2)$이므로

$\dfrac{2+a}{b}=\dfrac{a}{2+b}$에서 $4+2a+2b+ab=ab$

$\therefore a+b=-2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

42 답 24

조건 (가)에서 $\dfrac{x}{f(x)}$가 $x=1$, $x=2$에서 불연속이므로

$f(1)=0$, $f(2)=0$

즉, $f(x)=k(x-1)(x-2)$ (k는 0이 아닌 상수)라 하면 조건 (나)에서

$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{k(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}k(x-1)=4$

$\therefore k=4$

따라서 $f(x)=4(x-1)(x-2)$이므로 $f(4)=4\times3\times2=24$

43 답 ④

$x<2$일 때, $f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$

$x\geq2$일 때, $f(x)=1>0$

이므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이다.

그런데 $f(x)$는 $x=2$에서만 연속이 아니므로

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$에서 연속이면 된다.

즉, $\lim_{x\to2-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2-}\dfrac{ax+1}{x^2-4x+6}=\dfrac{2a+1}{2}$

$\lim_{x\to2+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2+}\dfrac{ax+1}{1}=2a+1$

$\dfrac{g(2)}{f(2)}=2a+1$에서 $\dfrac{2a+1}{2}=2a+1$이므로

$2a+1=4a+2$, $2a=-1$ $\quad\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

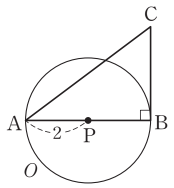
44 답 19

[그림 1]과 같이 $x=2$일 때, 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 3이다.

$\therefore\ f(2)=3$

$0<x<2$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$\therefore\ f(x)=2\ (0<x<2)$

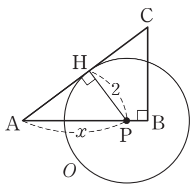


[그림 1]

[그림 2]와 같이 원 O가 선분 AC에 접할 때, 접하는 점을 H라 하면 삼각형 AHP와 삼각형 ABC는 닮음이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AP}:\overline{HP}$

$5:3=x:2 \qquad \therefore\ x=\dfrac{10}{3}$



[그림 2]

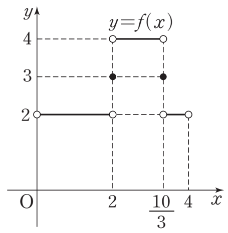
$x=\dfrac{10}{3}$일 때, $f\left(\dfrac{10}{3}\right)=3$

$2<x<\dfrac{10}{3}$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 4이다. $\quad \therefore\ f(x)=4\left(2<x<\dfrac{10}{3}\right)$

$\dfrac{10}{3}<x<4$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다. $\quad \therefore\ f(x)=2\left(\dfrac{10}{3}<x<4\right)$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 2 & (0<x<2) \\ 3 & (x=2) \\ 4 & \left(2<x<\dfrac{10}{3}\right) \\ 3 & \left(x=\dfrac{10}{3}\right) \\ 2 & \left(\dfrac{10}{3}<x<4\right) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$가 $x=2$, $x=\dfrac{10}{3}$에서 불연속이므로 모든 실수 a의 값의 합은 $2+\dfrac{10}{3}=\dfrac{16}{3}$

따라서 $p=3$, $q=16$이므로 $p+q=19$

45 답 56

주어진 이차함수 $f(x)$는 축의 방정식이 $x=4$이고

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(0)=a>0$, $f(2)=a-12<0$

$\therefore\ 0<a<12$

조건 (나)에서

$f(a)g(a)=7a^2(a-7)$

$\lim\limits_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a+}(x^2-8x+a)(2x+5a)=7a^2(a-7)$

$\lim\limits_{x\to a-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a-}(x^2-8x+a)f(x+4)$

$=(a^2-8a+a)\{(a+4)^2-8(a+4)+a\}$

$=a(a-7)(a^2+a-16)$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$7a^2(a-7)=a(a-7)(a^2+a-16)$

$a(a-7)(a-8)(a+2)=0$

$\therefore\ a=7$ 또는 $a=8$ ($\because\ 0<a<12$)

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 56이다.

46 답 ②

함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$이 성립한다.

이때, 이차함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to 0-}\{f(x+1)\}^2=\{f(1)\}^2=(k+3)^2$

$\lim\limits_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to 0+}\{f(x-1)\}^2=\{f(-1)\}^2=(k-1)^2$

$\{g(0)\}^2=\{f(1)\}^2=(k+3)^2$이므로

$(k+3)^2=(k-1)^2$

즉, $8k+8=0$에서 $k=-1$

47 답 2

함수 $g(x)=\dfrac{x-a}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq0$이면서 $x=a$에서 연속이면 된다.

$f(x)=\begin{cases} ax-9 & (x\le a) \\ x^2-x & (x>a) \end{cases}$에서

$x^2-x=0$인 x의 값은 0 또는 1이므로

$x>a$에서 $x^2-x\neq0$이려면 $a\ge1$이다. ⋯ ㉠

이때, 직선 $y=ax-9$의 기울기 a가 $a\ge1$이므로

$x\le a$에서 $ax-9<0$이어야 한다.

즉, $a^2-9<0$에서 $-3<a<3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $1\le a<3$이므로 정수 a는 1 또는 2이다.

한편,

$a=1$이면 $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x-1}{x-9}=0$, $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{1}{x}=1$이므로

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

$a=2$이면 $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x-2}{2x-9}=0$, $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x-2}{x^2-x}=0$이고 $g(2)=0$이므로

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

따라서 구하는 정수 a의 값은 2이다.

48 답 3

함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이고, 함수 $f(x-k)$는 $x=k$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)f(x-k)$는 $x\neq0$, $x\neq k$인 모든 실수 x에서 연속이다. 그러므로 함수 $f(x)f(x-k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=0$, $x=k$에서 연속이면 된다.

이때, $g(x)=f(x)f(x-k)$라 하면

(ⅰ) $k=0$일 때

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}\{f(x)\}^2=1\times1=1$

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^2=(-1)\times(-1)=1$

이때, $g(0)=\{f(0)\}^2=1$이므로 $\lim_{x\to0}g(x)=g(0)$이다.

즉, $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ⅱ) $k\neq0$일 때

$x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}\{f(x)f(x-k)\}=f(-k)$

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\{f(x)f(x-k)\}=-f(-k)$

이때, $g(0)=f(0)f(0-k)=-f(-k)$

$f(-k)=-f(-k)$에서 $f(-k)=0$

$\therefore k=-3,\ k=-1,\ k=1$

한편, $x=k$에서 연속이려면

$\lim_{x\to k-}g(x)=\lim_{x\to k-}\{f(x)f(x-k)\}=f(k)$

$\lim_{x\to k+}g(x)=\lim_{x\to k+}\{f(x)f(x-k)\}=-f(k)$

$g(k)=f(k)f(0)=-f(k)$

$f(k)=-f(k)$에서 $f(k)=0$

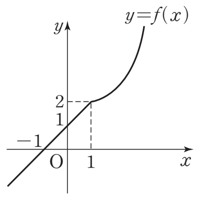
$\therefore k=-1,\ k=1,\ k=3$

따라서 $k=-1$, $k=1$일 때, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 실수 k의 값은 -1, 0, 1의 3개이다.

49 답 ②

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.



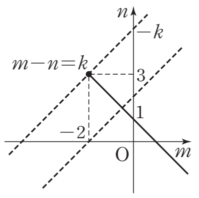
(ⅰ) $f(x)$가 일대일대응이면서 $f(R)=R$가 성립하기 위해서는 $f(x)$가 $x=1$에서 연속, 즉 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 한다.

즉, $1+m+n=2$에서 $n=-m+1$

(ⅱ) $f(x)$가 일대일대응이기 위해서는 $x<1$일 때, 함수 $f(x)$는 증가함수이므로 $x\geq1$에서 $f(x)$는 증가함수이어야 한다.

$x\geq1$에서 $f(x)=x^2+mx+n$이 증가함수가 되려면 대칭축이 1보다 작거나 같아야 한다. 즉, $-\dfrac{m}{2}\leq1$에서 $m\geq-2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 m, n 사이의 관계는 다음 그림과 같다.



이때, $m-n=k$라 하면 직선 $n=m-k$가 점 $(-2, 3)$을 지날 때 y절편 $-k$가 최대이므로 $m-n=k$가 최소가 된다.

따라서 $m-n$의 최솟값은 $-2-3=-5$이다.

50 답 ⑤

ㄱ. $f(a+h)\geq f(a)+f(h)\geq f(a)+h$

$\therefore f(a+h)-f(a)\geq h$ (참)

ㄴ. $f(a)=f(a+h-h)\geq f(a+h)+f(-h)\geq f(a+h)-h$

$\therefore f(a+h)-f(a)\leq h$ (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $h\leq f(a+h)-f(a)\leq h$이므로

$f(a+h)-f(a)=h$

$\lim_{h\to0}\{f(a+h)-f(a)\}=\lim_{h\to0}h=0$

$\therefore \lim_{h\to0}f(a+h)=f(a)$

즉, $f(x)$는 임의의 실수 a에서 연속이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

51 답 4

$f(-1)=2$, $f(0)=-1$, $f(2)=2$이고 $y=f(x)$가 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(x)=0$인 x의 값이 구간 $(-1, 0)$과 구간 $(0, 2)$에 존재한다. 그 값을 각각 x_1, x_2 $(-1<x_1<0<x_2<2)$라 하자.

이때, $g(x)=(f\circ f)(x)-1$이라 하면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$g(-1)=f(f(-1))-1=f(2)-1=1>0$

$g(x_1)=f(f(x_1))-1=f(0)-1=-2<0$

$g(0)=f(f(0))-1=f(-1)-1=1>0$

$g(x_2)=f(f(x_2))-1=f(0)-1=-2<0$

$g(2)=f(f(2))-1=f(2)-1=1>0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 $g(x)=0$은 적어도 4개의 실근을 갖는다.

Ⅱ 미분

03 미분계수와 도함수

문제편 31P

01 답 24

$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{(8+2a+b)-b}{2-0}=4+a=1$에서 $a=-3$

따라서 $f'(x)=3x^2-3$이므로 $f'(3)=27-3=24$

02 답 ④

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-4}{x^2-4}=4$에서 $x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x^2)-4\}=0$에서 $f(4)=4$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}=f'(4)=4$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(4+3h)-f(4-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+3h)-f(4-h)}{(4+3h)-(4-h)}\times 4$

$=4f'(4)=4\times 4=16$

03 답 2

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$에서 $a+1=1+a$

또한, $f(x)=\begin{cases} ax^2-x+2 & (x\ge 1) \\ x^3+a & (x<1)\end{cases}$에서

미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+a-(a+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}(x^2+x+1)=3$

$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{ax^2-x+2-(1+a)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(ax+a-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}(ax+a-1)=2a-1$

에서 $2a-1=3$ $\quad\therefore a=2$

04 답 ②

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f(1)=2$, $f'(1)=3$이다.

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$

$=f'(1)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

05 답 14

$f(x)-g(x)=x^3-2$에서 $f(x)=g(x)+x^3-2$

좌변 $f(x)$와 우변 $g(x)+x^3-2$의 차수가 같고,

$g(x)=f'(x)$의 차수는 $f(x)$보다 작으므로 우변 $g(x)+x^3-2$의

최고차항은 x^3이다.

따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수) ⋯ ㉠라 하면

$g(x)=f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$g(x)+x^3-2=x^3+3x^2+2ax+b-2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 계수를 비교하면 $a=3$, $b=2a$, $c=b-2$

따라서 $a=3$, $b=6$, $c=4$이므로

$f(1)=1+a+b+c=1+3+6+4=14$

06 답 ⑤

$f(x)=(x^2+1)g(x)$에서

$f'(x)=2xg(x)+(x^2+1)g'(x)$이므로

$f'(1)=2g(1)+2g'(1)=14$

07 답 ④

$f(x)=(x-1)(2x-1)(3x-1)$에서

$f'(x)=(x-1)'(2x-1)(3x-1)+(x-1)(2x-1)'(3x-1)$

$+(x-1)(2x-1)(3x-1)'$

$=(2x-1)(3x-1)+2(x-1)(3x-1)$

$+3(x-1)(2x-1)$

이므로 $f'(1)=(2-1)(3-1)=2$

$f'(2)=(4-1)(6-1)+2(2-1)(6-1)+3(2-1)(4-1)=34$

$\therefore f'(1)\times f'(2)=2\times 34=68$

08 답 ⑤

$f(x)=x^8+2x^6+3x^4-6$이라 하면

$f'(x)=8x^7+12x^5+12x^3$

이때, $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{x^8+2x^6+3x^4-6}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$=8+12+12=32$

09 답 ④

$\lim_{x\to 0}\frac{f((x+1)^2)-f(1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2+2x+1)-f(1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x(x+2))-f(1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(1+x(x+2))-f(1)}{x(x+2)}\times(x+2)\right\}$

$=f'(1)\times 2=10$

$\therefore f'(1)=5$

10 답 10

조건 (나)에서 $x \longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x \to -1} \{f(-x)+2\}=0$에서 $f(1)=-2$

조건 (가)에서 $f(-1)=-f(1)=2$

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(-x)+2}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{f(-x)+f(-1)}{x^2-1}$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{-f(x)+f(-1)}{x^2-1}$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \times \lim_{x \to -1} \frac{-1}{x-1}$$
$$= \frac{1}{2} f'(-1)=5$$

$\therefore f'(-1)=10$

11 답 ②

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=1$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x \to 1} \{\sqrt{f(x)}-1\}=0$에서 $f(1)=1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \left\{ \frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{f(x)}+1}{\sqrt{f(x)}+1} \right\}$$
$$= \lim_{x \to 1} \left\{ \frac{f(x)-1}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{f(x)}+1} \right\}$$
$$= \lim_{x \to 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{f(x)}+1} \right\}$$
$$= f'(1) \times \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{f(x)}+1}$$
$$= f'(1) \times \frac{1}{1+1} = 1$$

$\therefore f'(1)=2$

12 답 1

함수 $f(x)=\begin{cases} a(x-4)^2 & (x<2) \\ x^2+b & (x \ge 2) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=2$에서 미분가능하면 된다.

$f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2} f(x)=f(2)$에서 $4a=4+b$

또한, $x=2$에서 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x \to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2+} \frac{x^2+b-(4+b)}{x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2+} \frac{x^2-4}{x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \cdots ㉠$$

$$\lim_{x \to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2-} \frac{a(x-4)^2-(4+b)}{x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2-} \frac{a(x-2)(x-6)}{x-2} \ (\because 4a=4+b)$$
$$= -4a \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-4a=4$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 $4a=4+b$에 대입하면 $b=-8$

$\therefore f(3)=9-8=1$

13 답 ②

ㄱ. 【반례】 $f(x)=|x-a|$이면

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|-|-h|}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{2h}=0$$

이지만 $f(x)=|x-a|$는 $x=a$에서 미분가능하지 않으므로 $f'(a)$는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 【반례】 $f(x)=|x-a|$이면

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{|h^2|}{h^2}=1$$이지만

$f(x)=|x-a|$는 $x=a$에서 미분가능하지 않으므로 $f'(a)$는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}$에서 $h^3=t$라 하면

$h \longrightarrow 0+$일 때, $h^3 \longrightarrow 0+$이므로 $t \longrightarrow 0+$이고

$h \longrightarrow 0-$일 때, $h^3 \longrightarrow 0-$이므로 $t \longrightarrow 0-$이다.

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}$$
$$= f'(a)=\alpha \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

일등급 UP

*** ㄴ의 증명**

ㄴ의 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}$에서 $h^2=t$라 하면

$h \longrightarrow 0+$일 때, $h^2 \longrightarrow 0+$이므로 $t \longrightarrow 0+$이고

$h \longrightarrow 0-$일 때, $h^2 \longrightarrow 0+$이므로 $t \longrightarrow 0+$이다.

즉, $h \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(a+t)-f(a)}{t} = \alpha$$

그러나 $\lim_{t \to 0-} \frac{f(a+t)-f(a)}{h}$의 값은 알 수 없으므로

$f'(a)=\alpha$라고 할 수 없다.

14 답 ②

ㄱ. $x \in Q$일 때, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x=0$

$x \notin Q$일 때, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to 0} x^2=0$

이므로 $x=0$에서 미분가능하다. (참)

ㄴ. $x \in Q$일 때, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2=1$

$x \notin Q$일 때, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x^3=1$

즉, $\lim_{x \to 1} f(x)=1=f(1)$이므로 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $x \in Q$일 때,

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1)=2$$

$x \notin Q$일 때,

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x^2+x+1)=3$$

이므로 $x=1$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15 답 ②

ㄱ. $x=a$에서의 접선의 기울기는 $x=b$에서의 접선의 기울기보다 크므로 $f'(a)>f'(b)$ (참)

ㄴ. $0>f'(a)>f'(b)$이고, $0<a<b$이므로
$af'(a)>af'(b)>bf'(b)$ (참)

ㄷ. 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 $x=a$에서의 접선의 기울기보다 작다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

16 답 ①

$y=x^3-3x^2+4x+8$에서 $y'=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1$이므로 기울기의 최솟값은 1이다.

따라서 기울기가 1인 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$라 하면 $\tan\theta=1$이므로 $\theta=45^\circ$

17 답 ③

ㄱ. $[0, b]$에서의 평균변화율이 $[0, a]$에서의 평균변화율보다 작으므로 $\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$ (거짓)

ㄴ. $[a, b]$에서의 평균변화율은 $y=x$의 기울기인 1보다 작으므로
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$
$\therefore f(b)-f(a)<b-a$ (거짓)

ㄷ. $x=a$일 때의 접선의 기울기 $f'(a)$가 $x=b$일 때의 접선의 기울기 $f'(b)$보다 크므로 $f'(a)>f'(b)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

18 답 ⑤

ㄱ. 주어진 식에 $y=0$을 대입하면 $f(x)=f(x)+f(0)+0$
$\therefore f(0)=0$ (참)

ㄴ. $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)+xh-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(h)}{h}+x\right\}$
$\therefore f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}+x\right\}=f'(0)+x=x$ (참)

ㄷ. 주어진 식에 $y=-x$를 대입하면
$f(x-x)=f(x)+f(-x)+x(-x)$
$\therefore f(x)+f(-x)=f(0)+x^2=x^2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19 답 ⑤

$f'(1)=2$이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-2\times1\times h-f(1)}{-h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{-h}+2\right\}=2$$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(h)}{-h}=0$$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-2xh-f(x)}{-h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{-h}+2x\right\}$$
$$=2x$$

$\therefore f'(2)=4$

20 답 ①

$f(x+y)-f(x-y)=4y(3x+1)$에서

$$\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}=2(3x+1)$$

$f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.

즉, $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}=f'(x)$, $\lim\limits_{y\to0}2(3x+1)=2(3x+1)$

따라서 $f'(x)=2(3x+1)$이므로 $f'(1)=2\times4=8$

21 답 ⑤

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=1$에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

따라서 $f(2)=2$이고

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=1$$

$g(x)=(x^2+1)f(x)$에서 $g(2)=5f(2)=10$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-10}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$

한편, $g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$이므로

$g'(2)=4f(2)+5f'(2)=8+5=13$

22 답 ⑤

$$\begin{aligned}f_n'(x)=&(1+2x)(1+3x)\times\cdots\times(1+nx)\\&+2(1+x)(1+3x)\times\cdots\times(1+nx)\\&+3(1+x)(1+2x)(1+4x)\times\cdots\times(1+nx)+\cdots\\&+n(1+x)(1+2x)(1+3x)\times\cdots\times\{1+(n-1)x\}\end{aligned}$$

이므로 $f_n'(0)=1+2+3+\cdots+n$

$$\begin{aligned}\therefore f_{10}'(0)-f_5'(0)&=(1+2+3+\cdots+10)-(1+2+\cdots+5)\\&=6+7+8+9+10=40\end{aligned}$$

23 답 ①

$g(x)=x^2f(x)$에서 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

ㄱ. $g'(-3)=2\times(-3)\times0+(-3)^2\times f'(-3)$
$=9f'(-3)<0$ (참)

ㄴ. $g'(0)=0\times0+0\times f'(0)=0$ (거짓)

ㄷ. $g'(2)=4\times0+2^2\times f'(2)=4f'(2)<0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

24 답 ②

삼차함수 $f(x)$에서 $f(3)=f'(3)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-3)^2$으로 나누어 떨어진다. 또한, $f(-3)=0$이므로

$f(x)=k(x-3)^2(x+3)$ (k는 0이 아닌 상수)라 하면

$f'(x)=2k(x-3)(x+3)+k(x-3)^2=k(x-3)(3x+3)$

$f'(c)=k(c-3)(3c+3)=0$에서 $c\neq3$이므로 $c=-1$

25 답 18

다항식 $x^{10}+x^5+1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{10}+x^5+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ⋯ ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면 $3=a+b$ ⋯ ㉡

또한, ㉠을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+5x^4=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$ ⋯ ㉢

㉢에 $x=1$을 대입하면 $a=15$

$a=15$를 ㉡에 대입하면 $b=-12$

따라서 $R(x)=15x-12$이므로 $R(2)=15\times2-12=18$

26 답 ⑤

$f(a)=f(b)=f(c)=k$ (k는 상수)라 하면 삼차방정식 $f(x)-k=0$의 세 근이 a, b, c이고 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-k=(x-a)(x-b)(x-c)$

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)+k$

$\therefore f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$

ㄱ. $f'(a)=(a-b)(a-c)>0$, $f'(b)=(b-a)(b-c)<0$

$\therefore f'(a)f'(b)<0$ (참)

ㄴ. $f'(a)+f'(b)=(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)$

$=(a-b)^2>0$ (참)

ㄷ. $f'(a)-f'(c)=(a-b)(a-c)-(c-a)(c-b)$

$=(a-c)(a-2b+c)=0$

이때, $a\neq c$이므로 $a-2b+c=0$ $\quad\therefore b=\dfrac{a+c}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

27 답 ③

$f^1(x)=f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,

$f^2(x)=f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$

$f^3(x)=f(f^2(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$

$f^4(x)=f(x)$, $f^5(x)=f^2(x)$, ⋯ , $f^{10}(x)=f(x)$, ⋯

$\therefore g(x)=\dfrac{1}{1-x}$

함수 $g(x)$의 구간 [2, 5]에서의 평균변화율은

$$\frac{g(5)-g(2)}{5-2}=\frac{\frac{1}{1-5}-\frac{1}{1-2}}{5-2}=\frac{1}{4}$$

28 답 6

$\dfrac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}=n+1$에서

$f(n+1)-f(n)=n+1$

따라서 함수 $f(x)$의 구간 [1, 10]에서의 평균변화율은

$$\frac{f(10)-f(1)}{10-1}$$
$$=\frac{\{f(10)-f(9)\}+\{f(9)-f(8)\}+\cdots+\{f(2)-f(1)\}}{9}$$
$$=\frac{10+9+\cdots+2}{9}$$
$$=\frac{54}{9}=6$$

29 답 ④

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{f(x)-f(1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\frac{x-1}{f(x)-f(1)}\times\frac{x^2-1}{x-1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\frac{x-1}{f(x)-f(1)}\times(x+1)\right\}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{f'(1)}\times2=2$$

30 답 ④

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=3$에서 $f(3)=0$, $f'(3)=3$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $f(0)=0$, $f'(0)=1$

따라서 $f(f(3))=f(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(f(x))}{x-3}=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(f(x))-f(f(3))}{f(x)-f(3)}\times\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right\}$$
$$=f'(f(3))\times f'(3)=f'(0)\times f'(3)$$
$$=1\times3=3$$

31 답 ⑤

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-g(2-h)}{2h}=4$에서 $h\longrightarrow0$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이므로 (분자)$\longrightarrow0$이어야 한다.

따라서 $f(2)=g(2)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-g(2-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{g(2-h)-g(2)\}}{2h}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{g(2-h)-g(2)}{-h}$$
$$=\frac{1}{2}f'(2)+\frac{1}{2}g'(2)=\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times g'(2)=4$$

$\therefore g'(2)=6$

32 답 ④

ㄱ. $\lim_{x\to0-}f(x)=1\neq\lim_{x\to0+}f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. 따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to1-}x=1$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{\frac{1}{3}(x^3-1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{1}{3}(x^2+x+1)=1$$

이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. $g(x)=x^kf(x)$라 하면 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

즉, $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to0-}g'(x)=\lim_{x\to0+}g'(x)$이어야 한다.

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x^k(1-x)}{x}=\lim_{x\to0-}x^{k-1}(1-x)$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x^k(x^2-x)}{x}=\lim_{x\to0+}x^k(x-1)$$

즉, $\lim_{x\to0-}x^{k-1}(1-x)=\lim_{x\to0+}x^k(x-1)$에서 $k\geq2$

따라서 $x^kf(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 최솟값은 2이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

33 답 5

함수 $y=f(4-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f'(2)=0$이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-2ax+8$에서 $f'(2)=12-4a+8=0$

$20-4a=0 \qquad \therefore a=5$

[다른 풀이]

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 직선 $x=2$에 대하여 대칭인 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=2$에서 미분가능하면 된다.

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{f(4-x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{\{(4-x)^3-a(4-x)^2+8(4-x)+6\}-(2^3-a\times2^2+8\times2+6)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\left[(2-x)\times\frac{\{(4-x)^2+2(4-x)+4-a(6-x)+8\}}{x-2}\right]$$

$$=4a-20$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x^3-ax^2+8x+6)-(2^3-a\times2^2+8\times2+6)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)\{x^2+2x+4-a(x+2)+8\}}{x-2}$$

$$=-4a+20$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$이므로

$4a-20=-4a+20$, $8a=40$

$\therefore a=5$

34 답 3

두 점 A$(1, 2)$, B$(1, 4)$로부터 같은 거리에 있는 점들이 나타내는 도형은 직선 $y=3$이다.

직선 $y=3$과 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 각각 -1, 3이므로 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases}2x^2+2x+5 & (x<-1)\\ 2x^2-2x+1 & (-1\leq x<1)\\ 2x^2-6x+5 & (1\leq x<3)\\ 2x^2-10x+17 & (x\geq3)\end{cases}$$

이때, $g'(x)=\begin{cases}4x+2 & (x<-1)\\ 4x-2 & (-1<x<1)\\ 4x-6 & (1<x<3)\\ 4x-10 & (x>3)\end{cases}$이므로

함수 $g(x)$는 $x=-1$, $x=1$, $x=3$에서 미분가능하지 않다.

따라서 모든 a의 값의 합은 $(-1)+1+3=3$

일등급 UP

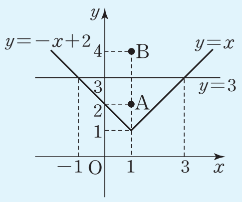
* $g(x)$를 구하는 과정

(i) $x<-1$일 때

$g(x)=(x-1)^2+(-x+2-4)^2$
$=2x^2+2x+5$

(ii) $-1\leq x<1$일 때

$g(x)=(x-1)^2+(-x+2-2)^2$
$=2x^2-2x+1$



(iii) $1\leq x<3$일 때

$g(x)=(x-1)^2+(x-2)^2=2x^2-6x+5$

(iv) $x\geq3$일 때

$g(x)=(x-1)^2+(x-4)^2=2x^2-10x+17$

35 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 $x=0$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

$x=0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 접선의 기울기는 0보다 크므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}>0$ (참)

ㄴ. $f(1)=0$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=f'(1)$

또한, $f(2)=0$이므로

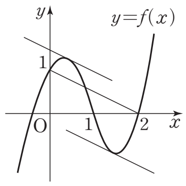
$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}=f'(2)$

주어진 그래프에서 $x=1$에서의 접선의 기울기는 음수이고 $x=2$에서의 접선의 기울기는 양수이므로

$f'(1)<f'(2)$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}<\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)}{h}$ (참)

ㄷ. $\frac{f(2)-f(0)}{2}=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$



에서 좌변은 0에서 2까지의 평균변화율, 즉 두 점 $(0, f(0))$, $(2, f(2))$를 지나는 직선의 기울기를 나타내고, 우변은 점 $(c, f(c))$에서의 접선의 기울기를 나타내므로 그림과 같이 등식을 만족시키는 c는 $0<c<2$에서 2개 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

36 답 ④

$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1)+f(h)+1\times h^2+1^2\times h\}-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+h+1\right\}=2$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$

$\therefore f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(0)+f(h)+0\times h^2+0^2\times h\}-f(0)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$

37 답 ②

$f(x+y)=f(x)f(y)$에 $y=0$을 대입하면

$f(x)=f(x)f(0)$이고 $f(x)>0$이므로 $f(0)=1$

$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)f(h)-f(1)}{h}$

$=f(1)\times\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$

$=f(1)\times\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$=f(1)\times f'(0)=2$

38 답 ③

$g(1)=3f(1)=6$에서 $f(1)=2$

$g'(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x+1)f'(x)$이므로

$g'(1)=3f(1)+3f'(1)$

$3=3\times2+3f'(1)$

$\therefore f'(1)=-1$

39 답 13

$f'(x)=(x-2)(x-3)\times\cdots\times(x-n)$

$+(x-1)(x-3)\times\cdots\times(x-n)$

$+\cdots+(x-1)(x-2)\times\cdots\times\{x-(n-1)\}$

$f'(1)=(1-2)(1-3)(1-4)\times\cdots\times(1-n)$

$=(-1)^{n-1}\times1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)$

$f'(n)=(n-1)(n-2)(n-3)\times\cdots\times\{n-(n-1)\}$

$=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)$

$\therefore \frac{f'(1)}{f'(n)}=(-1)^{n-1}=n^2-11n+29$

(i) n이 짝수일 때

$n^2-11n+29=-1$에서 $(n-5)(n-6)=0$

$\therefore n=6$ ($\because$ n은 짝수)

(ii) n이 홀수일 때

$n^2-11n+29=1$에서 $(n-4)(n-7)=0$

$\therefore n=7$ ($\because$ n은 홀수)

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n의 값의 합은 $6+7=13$

40 답 15

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=3$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $f(1)-a=0$에서 $f(1)=a$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$ ⋯ ㉠

$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+bx+2$

$\therefore f(1)=b+2=a$ ⋯ ㉡

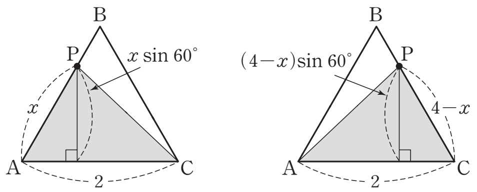
한편, $f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+b$이므로

이 식에 $x=1$을 대입하면 $f'(1)=b$ ⋯ ㉢

㉠, ㉢에서 $b=3$이고, $b=3$을 ㉡에 대입하면 $a=5$

$\therefore ab=5\times3=15$

41 답 ⑤

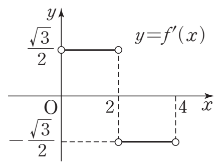


(i) $0<x\le 2$일 때, $f(x)=\frac{1}{2}\times 2\times x\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

(ii) $2<x<4$일 때 $f(x)=\frac{1}{2}\times 2\times(4-x)\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x)$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2} & (0<x<2)\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & (2<x<4)\end{cases}$$

따라서 $y=f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



42 답 9

$\lim_{x\to -1}\frac{x^{10}+2x^9+a}{x+1}=b$에서 $x\longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to -1}(x^{10}+2x^9+a)=0$에서

$1-2+a=0\quad \therefore a=1$ ---------- ⓐ

$f(x)=x^{10}+2x^9+1$이라 하면 $f(-1)=0$이므로

$\lim_{x\to -1}\frac{x^{10}+2x^9+a}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$

이때, $f'(x)=10x^9+18x^8$이므로

$b=f'(-1)=-10+18=8$ ---------- ⓑ

$\therefore a+b=1+8=9$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ a의 값을 구한다.	[40%]
ⓑ b의 값을 구한다.	[50%]
ⓒ $a+b$의 값을 구한다.	[10%]

43 답 6

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\le -1)\\ ax^2+bx+c & (-1<x<2)\\ -x+2 & (x\ge 2)\end{cases}$$라 하면

$$f'(x)=\begin{cases}1 & (x<-1)\\ 2ax+b & (-1<x<2)\\ -1 & (x>2)\end{cases}$$

$f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to -1+}f(x)=f(-1)$, $\lim_{x\to -1+}f'(x)=\lim_{x\to -1-}f'(x)$

$\therefore a-b+c=0,\ -2a+b=1$ ⋯ ㉠ ---------- ⓐ

또한, $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$, $\lim_{x\to 2+}f'(x)=\lim_{x\to 2-}f'(x)$

$\therefore 4a+2b+c=0,\ -1=4a+b$ ⋯ ㉡ ---------- ⓑ

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{2}{3}$

$\therefore 9(a^2+b^2+c^2)=9\times\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)=6$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하도록 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.	[40%]
ⓑ $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하도록 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.	[40%]
ⓒ $9(a^2+b^2+c^2)$의 값을 구한다.	[20%]

44 답 7

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=2$에서 $x\longrightarrow 1$일 때

(분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다. $\quad\therefore f(1)=1$

이때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=2$ ---------- ⓐ

마찬가지로 $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2}{x-1}=3$에서 $g(1)=2$, $g'(1)=3$ ---------- ⓑ

$h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=2\times 2+1\times 3=7$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구한다.	[30%]
ⓑ $g(1)$, $g'(1)$의 값을 구한다.	[30%]
ⓒ $h'(1)$의 값을 구한다.	[40%]

45 답 ⑤

$\lim_{x\to 2-}(x^3-ax+2)=\lim_{x\to 2+}(5x-2a)=f(2)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$f'(2)$가 존재하므로

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{(2+h)^3-a(2+h)+2-(10-2a)}{h}=12-a$

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{5(2+h)-2a-(10-2a)}{h}=5$

에서 $12-a=5$

$\therefore a=7$

46 답 54

$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=h(x)$이므로

$f(x)+h(x)=2g(x)+x^4+1$에서 좌변 $f(x)+h(x)$의 최고차항은 $f(x)$의 최고차항과 같고 $g(x)$의 차수는 $f(x)$의 차수보다 작으므로 우변 $2g(x)+x^4+1$의 최고차항은 x^4이다.

따라서 $f(x)$는 최고차항이 x^4인 사차함수이다.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)라 하면

$g(x)=f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$h(x)=g'(x)=12x^2+6ax+2b$이고

$f(x)+h(x)=x^4+ax^3+(b+12)x^2+(6a+c)x+2b+d$ ⋯ ㉠

$2g(x)+x^4+1=x^4+8x^3+6ax^2+4bx+2c+1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 계수를 비교하면

$a=8,\ b+12=6a,\ 6a+c=4b,\ 2b+d=2c+1$

따라서 $a=8,\ b=36,\ c=96,\ d=121$이므로

$f(-1)=1-a+b-c+d=1-8+36-96+121=54$

47 답 ①

$f(x)=ax^2+b$에서 $f'(x)=2ax$이므로 주어진 식에 대입하면

$4(ax^2+b)=(2ax)^2+x^2+4$

각 변을 정리하면 $4ax^2+4b=(4a^2+1)x^2+4$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$4a=4a^2+1,\ 4b=4$

$4a=4a^2+1$에서 $4a^2-4a+1=0,\ (2a-1)^2=0$이므로

$a=\frac{1}{2}$

$4b=4$에서 $b=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$이므로 $f(2)=3$

48 답 ④

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $f(2)=0$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$f'(x)=(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)$

이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x+a)}{\{f'(x)\}^2}=\frac{2+a}{(2+a)^2}=\frac{1}{2+a}$$

$\frac{1}{2+a}=\frac{1}{4}$에서 $a=2$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$이므로

$f(3)=2\times1\times5=10$

49 답 ①

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=5$이므로 삼차함수 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

$f(x)=(ax+b)(x-1)^2$ ($a,\ b$는 상수)라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}(ax+b)=a+b$이므로

$a+b=5$ ⋯ ㉠

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-k}{x-2}=13$이므로 $f(2)=k,\ f'(2)=13$

$f'(x)=a(x-1)^2+2(ax+b)(x-1)$에서

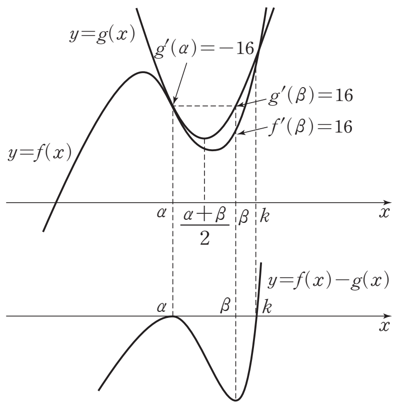
$f'(2)=a+2(2a+b)=5a+2b$이므로

$5a+2b=13$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1,\ b=4$

따라서 $f(x)=(x+4)(x-1)^2$이므로 $k=f(2)=6$

50 답 243



$f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)$이므로

$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$라 하면

$f'(x)-g'(x)=3(x-\alpha)\left(x-\frac{2k+\alpha}{3}\right)$ ⋯ ㉠

한편, $f'(\alpha)=g'(\alpha),\ f'(\beta)=g'(\beta)$이므로

$f'(x)-g'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{2k+\alpha}{3}=\beta$이므로 $k=\frac{3\beta-\alpha}{2}$

$\therefore\ f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ ⋯ ㉢

$g'(\alpha)=-16,\ g'(\beta)=16$이므로

$g(x)=2\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+c$라 하면 $g'(x)=4\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$g'(\beta)=16$에서 $\beta-\alpha=8$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에서

$$g(\beta+1)-f(\beta+1)=-(\beta+1-\alpha)^2\left(\beta+1-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)=243$$

51 답 10

다항함수 $f(x)$를 $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots$ ($a\neq0,\ a\neq1$)이라 하면 조건 (가)에서 분자의 차수와 분모의 차수가 같아야 0이 아닌 극한값이 존재한다.

한편, 분모는 $x^3f(x)=ax^{n+3}+bx^{n+2}+\cdots$

분자는 $\{f(x)\}^2-f(x^2)=(a^2x^{2n}+\cdots)-(ax^{2n}+\cdots)=(a^2-a)x^{2n}+\cdots$

이때, $a\neq0,\ a\neq1$이므로 $2n=n+3$ $\quad\therefore\ n=3$

또한, 분자와 분모의 최고차항의 계수를 비교하면

$\frac{a^2-a}{a}=3$에서 $a-1=3$ ($\because\ a\neq0$) $\quad\therefore\ a=4$

따라서 $f(x)=4x^3+bx^2+cx+d$라 하면

$f'(x)=12x^2+2bx+c$

한편, 조건 (나)에서 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이므로 $f'(0)=c=0$

즉, $\lim_{x\to0}\frac{12x^2+2bx}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(12x+2b)}{x}=2b=2$ $\quad\therefore\ b=1$

따라서 $f'(x)=12x^2+2x$이므로 $f'(-1)=12-2=10$

52 답 ③

ㄱ. $f(x)=f(-x)$이면 $f(h)=f(-h)$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}\times(-1)$$
$$=-f'(-x)\ \text{(참)}$$

ㄴ. $g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{a}g(-ax-ah)+\frac{1}{a}g(-ax)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(-ax-ah)-g(-ax)}{-ah}$$
$$=g'(-ax)\ \text{(거짓)}$$

ㄷ. $|h(2x)-h(x)|\le x^2$이면 $|h(2t)-h(t)|\le t^2$이므로

$-t^2\le h(2t)-h(t)\le t^2$에서

$$-|t|\le\frac{h(2t)-h(t)}{t}\le|t|$$

$\lim_{t\to 0}(-|t|)=\lim_{t\to 0}|t|=0$이므로

$$\lim_{t\to 0}\frac{h(2t)-h(t)}{t}=0$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{h(2t)-h(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{h(2t)-h(t)}{2t-t}=h'(0)=0\ \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

53 답 271

$f(x)$가 n차 다항식이라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 다항식이므로 좌변은 $2(n-1)$차식이고, 우변은 n차식 또는 2차식이다.

(i) 우변이 n차식일 때, $2(n-1)=n$　　$\therefore n=2$

(ii) 우변이 2차식일 때, $2(n-1)=2$　　$\therefore n=2$

(i), (ii)에서 $f(x)$는 이차식이다.

여기서 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$라 하면 $f'(x)=2ax+b$

즉, $(2ax+b)(2ax+b+2)=8(ax^2+bx+c)+12x^2-5$

$\therefore 4a^2x^2+(4ab+4a)x+b^2+2b=(8a+12)x^2+8bx+8c-5$

양변의 계수를 비교하면

$4a^2=8a+12$ ⋯ ㉠

$4ab+4a=8b$ ⋯ ㉡

$b^2+2b=8c-5$ ⋯ ㉢

㉠을 정리하면 $a^2-2a-3=0$

$(a-3)(a+1)=0$　　$\therefore a=3\ (\because a>0)$

$a=3$을 ㉡에 대입하면

$12b+12=8b$　　$\therefore b=-3$

$b=-3$을 ㉢에 대입하면

$3=8c-5$　　$\therefore c=1$

따라서 $f(x)=3x^2-3x+1$이므로 $f(10)=271$

54 답 ③

$$f(2+h)=f\left(2\times\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)=f(2)+f\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

한편, $f(xy)=f(x)+f(y)$에 $y=1$을 대입하면 $f(1)=0$

$$\therefore f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2)+f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f(1)}{\frac{h}{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(1)=3$$

55 답 ⑤

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)라 하면

$f(1)=1+a+b+c+d$, $f(-1)=1-a+b-c+d$

이때, $f(1)=f(-1)$이므로 $a+c=0$　　$\therefore c=-a$

또한, $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이고

$f'(1)=4+3a+2b+c$, $f'(-1)=-4+3a-2b+c$

이때, $f'(1)=f'(-1)$이므로 $4+2b=0$　　$\therefore b=-2$

즉, $f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+d$이므로

$f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$

ㄱ. $f'(0)=-a=0$이면 $a=0$

　$\therefore f'(1)=4+3a-4-a=2a=0$ (참)

ㄴ. $f'(-1)<0$이면 조건 (나)에서

　$f'(-1)=f'(1)=2a<0$　　$\therefore a<0$

　$\therefore f'(0)=-a>0$ (참)

ㄷ. $f'(-1)=f'(1)>0$이고 $\lim_{x\to-\infty}f'(x)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f'(p)=0$인 상수 p가 구간 $(-\infty, -1)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

56 답 200

$C(x)=1000+6x^2-0.01x^3$에서 $\frac{d}{dx}C(x)=12x-0.03x^2$

따라서 n단위의 제품을 생산할 때의 한계비용 B는 $B=12n-0.03n^2$

한편, n단위에서 1단위 추가하여 $(n+1)$단위를 생산할 때의 추가 비용 A는

$$A=C(n+1)-C(n)$$
$$=6\{(n+1)^2-n^2\}-0.01\{(n+1)^3-n^3\}$$
$$=12n-0.03n^2+(6-0.03n-0.01)$$

$A-B=6-0.03n-0.01<\frac{1}{100}$에서 $n>199.3\cdots$

이때, n은 자연수이므로 n의 최솟값은 200이다.

01 답 ②

$f'(x)=x(x-2)+x(x-a)+(x-2)(x-a)$이므로

$f'(0)=2a,\ f'(2)=2(2-a)$

$f'(0)\times f'(2)=2a\times 2(2-a)=-1$이므로

$4a^2-8a-1=0$

따라서 모든 a의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{4}=2$

02 답 ④

$y=x^3-9x^2+4x+5$에서 $y'=3x^2-18x+4$

구하는 접선의 기울기를 m이라 하면 접점의 x좌표는

방정식 $3x^2-18x+4=m$의 두 실근이다.

이차방정식 $3x^2-18x+4-m=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{4-m}{3}=-1,\ 4-m=-3$

$\therefore m=7$

03 답 ②

$f(x)=x^2-2x,\ g(x)=-2x^2+ax+b$라 하자.

$y=g(x)$의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$g(2)=-8+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=8$ ⋯ ㉠

두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프가 점 $(2, 0)$에서 접하므로

$f'(2)=g'(2)$

$f'(x)=2x-2,\ g'(x)=-4x+a$이므로

$4-2=-4\times 2+a$

$\therefore a=10$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $b=-12$

$\therefore a+b=-2$

04 답 ③

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$는 닫힌구간 $[0, 10]$에서 연속이고,

열린구간 $(0, 10)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(10)-f(0)}{10-0}=f'(c)$

를 만족시키는 c가 구간 $(0, 10)$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(10)-f(0)}{10-0}=\frac{(100+10a+b)-b}{10}=10+a$이고

$f'(x)=2x+a$에서 $f'(c)=2c+a$이므로

$10+a=2c+a$

$\therefore c=5$

05 답 ③

$f'(x)=x^2-2x-15\le 0$에서 $(x+3)(x-5)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 5$

즉, 구간 $[-3, 5]$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

이때, 구간 $(-a, a)$가 구간 $[-3, 5]$에 포함되어야 하므로 양수 a의 최댓값은 3이다.

06 답 ⑤

$f(x)=x^3-6x^2+a$에서 $f'(x)=3x^2-12x$

$f'(x)=0$에서 $3x(x-4)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	0	⋯	4	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	a	↘	$a-32$	↗

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이고, $x=0$에서 극대이다.

극솟값은 $f(4)=a-32=-16$에서 $a=16$

따라서 극댓값은 $f(0)=a=16$

07 답 ③

$y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	−1	⋯	0	⋯	1	⋯
$f'(x)$	−	0	+		−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $0<x<1$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $0<x<1$에서 감소한다. (참)

ㄴ. $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $-1<x<0$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $-1<x<0$에서 증가한다.

그러므로 $f(0)=0$이면 $f(-1)<0$이다.

또한, 함수 $f(x)$는 $0<x<1$에서 감소하므로 $f(0)=0$이면 $f(1)<0$이다.

따라서 $f(0)=0$이면 $f(-1)\times f(1)>0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

08 답 2

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$f(x)=(x-\alpha)^3$의 꼴이어야 한다.

$x^3-3x^2+ax+b=(x-\alpha)^3$

즉, $x^3-3x^2+ax+b=x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x-\alpha^3$에서 양변의 계수를 비교하면 $3\alpha=3$ $\quad\therefore \alpha=1$

$3\alpha^2=a=3,\ -\alpha^3=b=-1$

$\therefore a+b=3-1=2$

09 답 ⑤

$f(x)=x^3-5x+1$에서

$f'(x)=3x^2-5$

점 $\mathrm{P}(1,\ -3)$에서의 접선의 방정식은

$f'(1)=-2$이므로

$y=f'(1)(x-1)-3=-2x-1$

곡선과 접선의 교점의 x좌표는

$x^3-5x+1=-2x-1$에서 $x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

따라서 접선이 점 P가 아닌 점 $(-2,\ 3)$에서 만나므로

$a^2+b^2=(-2)^2+3^2=13$

10 답 ④

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-2t)$라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^2-2t)=(2t-2)(x-t)$

이 직선이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$-1-(t^2-2t)=(2t-2)(2-t)$

$t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉, 두 접점은 $(1,\ -1)$, $(3,\ 3)$이다.

따라서 두 접점의 중점의 좌표는 $(2,\ 1)$이므로

$a+b=3$

11 답 5

$f(x)=mx$인 x의 값을 $x=\alpha$라 하면 $x=\alpha$에서 미분가능하므로

$f(\alpha)=m\alpha$에서 $\alpha^3+3\alpha^2+8\alpha+1=m\alpha$ ⋯ ㉠

$f'(\alpha)=m$에서 $3\alpha^2+6\alpha+8=m$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\alpha^3+3\alpha^2+8\alpha+1=(3\alpha^2+6\alpha+8)\alpha$

$2\alpha^3+3\alpha^2-1=0$

$(\alpha+1)^2(2\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=\frac{1}{2}$

$\alpha=-1$일 때 $m=5$이고 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하지만 $\alpha=\frac{1}{2}$일 때 $m=\frac{47}{4}$이고 $g(x)$의 그래프는 $x<0$에서 미분가능하지 않은 뾰족한 점이 생긴다.

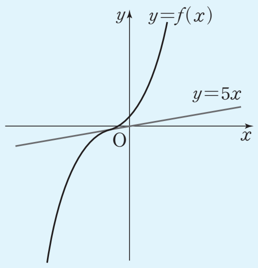
$\therefore m=5$

일등급 UP

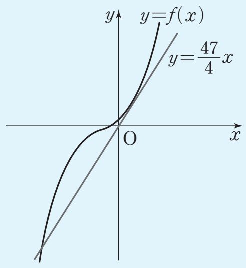
＊주어진 조건을 만족시키는 m의 값 구하기

주어진 조건을 만족시키려면 직선 $y=mx$는 곡선 $y=f(x)$의 접선이 되어야 한다.

해설에 의하여 원점에서 그은 곡선 $y=f(x)$의 접선은 $y=5x$, $y=\frac{47}{4}x$로 두 개이고 [그림 1]과 같이 $m=5$, 즉 접선이 $y=5x$일 때는 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 [그림 2]와 같이 $m=\frac{47}{4}$, 즉 접선이 $y=\frac{47}{4}x$일 때는 접선과 곡선이 만나는 접점이 아닌 점에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않다. 따라서 문제의 조건을 만족시키는 m의 값은 5이다.



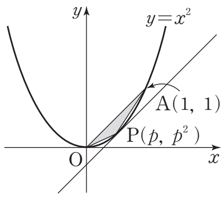
[그림 1]



[그림 2]

12 답 ⑤

△AOP의 넓이가 최대일 때는 그림과 같이 점 P와 선분 OA 사이의 거리가 최대일 때, 즉 P에서의 접선이 $\overline{\mathrm{OA}}$와 평행할 때이다.



이때, $\overline{\mathrm{OA}}$의 기울기는 1이고 $y'=2x$에서 점 P에서의 접선의 기울기는 $2p$이므로

$2p=1 \qquad \therefore p=\frac{1}{2}$

즉, $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$

이때, 점 P와 $\overline{\mathrm{OA}}$ 사이의 거리는

$\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$

따라서 삼각형 AOP의 최대 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{8}$

13 답 ①

두 곡선 $f(x)=x^3-x$와 $g(x)=-x^2+k$가 $x=a$에서 접한다고 하면 $f(a)=g(a)$이고, $f'(a)=g'(a)$이다.

$f(x)=x^3-x$에서 $f'(x)=3x^2-1$,

$g(x)=-x^2+k$에서 $g'(x)=-2x$이므로

$f(a)=g(a)$에서 $a^3-a=-a^2+k$ ⋯ ㉠

$f'(a)=g'(a)$에서 $3a^2-1=-2a$

$3a^2+2a-1=0$에서 $(3a-1)(a+1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

(i) $a=-1$을 ㉠에 대입하면

$0=-1+k \qquad \therefore k=1$

(ii) $a=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$-\frac{8}{27}=-\frac{1}{9}+k \qquad \therefore k=-\frac{5}{27}$

(i), (ii)에서 $k>0$이므로 $k=1$

14 답 ③

색칠한 부분의 넓이는 사다리꼴 OABC의 넓이에서 $\triangle$BPC의 넓이를 뺀 것과 같다.

따라서 $\triangle$BPC의 넓이가 최소가 될 때 색칠한 부분의 넓이는 최대가 되고, 점 P에서의 접선이 직선 BC와 평행할 때 $\triangle$BPC의 넓이가 최소가 된다.

직선 BC의 기울기는 $\frac{3-1}{2-0}=1$ ⋯ ㉠

$y=-\frac{1}{2}x^3+2x$에서 $y'=-\frac{3}{2}x^2+2$이므로 점 P의 x좌표를 a라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{3}{2}a^2+2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{3}{2}a^2+2=1$, $\frac{3}{2}a^2=1$, $a^2=\frac{2}{3}$

$\therefore a=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ($\because 0\le a\le 2$)

15 답 ③

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고, 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하면 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$

즉, $f(1)-f(-1)=2f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 존재한다.

ㄱ. $f(x)=\frac{1}{x^2}$은 $x=0$에서 불연속이므로 구간 $[-1, 1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c가 반드시 존재한다고 할 수 없다.

【반례】 $\frac{f(1)-f(-1)}{2}=0$이고, $f'(c)=0$인 c는 구간 $(-1, 0)$과 $(0, 1)$에 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$은 실수 전체의 집합에서 연속이지만 $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 구간 $[-1, 1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c가 반드시 존재한다고 할 수 없다.

【반례】 $\frac{f(1)-f(-1)}{2}=0$이고, $f'(c)=0$인 c는 구간 $(-1, 0)$과 $(0, 1)$에 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & (x\ge 0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$은 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 평균값 정리를 만족시키는 c가 존재한다.

따라서 조건을 만족시키는 함수는 ㄷ뿐이다.

16 답 2

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $y=x^2-x-15$도 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)=(x^2-x-15)f(x)$는 닫힌구간 $[0, 5]$에서 연속이고, 열린구간 $(0, 5)$에서 미분가능하다.

$f(0)=0$, $f(5)=2$이므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{g(5)-g(0)}{5-0}=\frac{5f(5)+15f(0)}{5}=\frac{10}{5}=2=g'(c)$를 만족시키는 c가 열린구간 $(0, 5)$에 존재한다.

따라서 함수 $g(x)$가 평균값 정리를 만족시키는 c에 대하여 $g'(c)$의 값은 2이다.

17 답 ⑤

ㄱ. 다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c_1)=0$인 실수 c_1이 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(-x)=-f(x)$에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=-f(0)$

즉, $f(0)=0$이다. 한편, 다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c_2)$, 즉 $f'(c_2)=-1$인 실수 c_2가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $f'(x)=-1$은 구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $f(0)=f(c_1)=0$ $(1<c_1<2)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c_3)=0$인 실수 c_3이 구간 $(0, 2)$에 존재한다.

한편, 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭인 그래프이므로 $f'(-c_3)=0$이다. 따라서 방정식 $f'(x)=0$은 적어도 2개의 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

18 답 ③

$[\{f(x)\}^2]'=2f(x)f'(x)$이므로 $f(x)$와 $f'(x)$의 부호가 다르면 $y=\{f(x)\}^2$의 도함수의 부호는 음이고, 이때 이 그래프는 감소한다.

구간 (d, e)에서 $f(x)<0$, $f'(x)>0$이므로 $f(x)f'(x)<0$

따라서 구간 (d, e)에서 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 감소한다.

19 답 ③

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$

즉, $h(x)$는 증가함수이다.

또한, $h(1)=f(1)-g(1)=0$에서

(i) $x<1$일 때, $h(x)<0$이므로 $f(x)<g(x)$

(ii) $x>1$일 때, $h(x)>0$이므로 $f(x)>g(x)$

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

20 답 ④

$f(x)=x^3+ax^2+ax+1$에서 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응, 즉 증가하는 함수이어야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f'(x)=3x^2+2ax+a\geq 0$에서 $3x^2+2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\leq 0$

$\therefore 0\leq a\leq 3$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

21 답 ④

ㄱ. $b<x<c$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. $a<x<b$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$이지만 반드시 $h(x)>0$이라고 할 수는 없다. (거짓)

ㄷ. $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

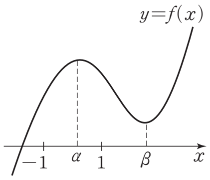
x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

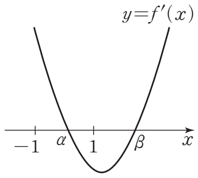
따라서 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지고, $x=b$에서 극댓값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22 답 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y=f'(x)$의 그래프의 개형을 살펴보면 그림과 같다.





방정식 $f'(x)=3x^2+2ax-a^2=0$의 두 근을 α, β라 하면 $-1<\alpha<1<\beta$이어야 하므로

$f'(-1)=-a^2-2a+3=-(a-1)(a+3)>0$에서

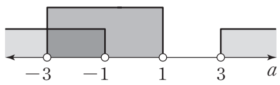
$(a-1)(a+3)<0$

$\therefore -3<a<1$

$f'(1)=-a^2+2a+3=-(a+1)(a-3)<0$에서

$(a+1)(a-3)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>3$



공통범위는 $-3<a<-1$이므로

$a=-2$ ($\because$ a는 정수)

23 답 5

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의하여 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $a=0$

따라서 $f'(x)=3x^2+b$이고, 조건 (나)에서 $f'(1)=0$, $f(1)=1$이므로 $3+b=0$, $1+b+c=1$에서

$b=-3$, $c=3$

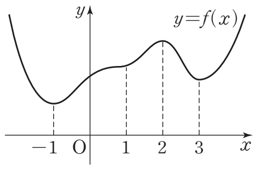
$\therefore f(x)=x^3-3x+3$

이때, $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)=0$이므로

$f(x)$의 극댓값은 $x=-1$일 때 $f(-1)=5$이다.

24 답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ. $x=2$에서 극대, $x=-1$, $x=3$에서 극소이므로 극댓값은 1개, 극솟값은 2개이다. (거짓)

ㄴ. $x=1$에서 연속이고, $x=1$의 근방에서 $f'(x)>0$이므로 $x=1$에서 $y=f(x)$는 증가하고 있다. (참)

ㄷ. $1<x<2$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, $f(1)<f(2)$ (거짓)

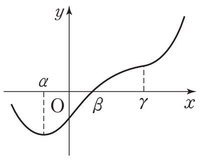
따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

25 답 ④

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	↗	↗		↗

따라서 $y=f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 가지고, $x<\alpha$일 때 감소, $x>\alpha$일 때 증가하므로 $y=f(x)$의 그래프로 알맞은 것은 ④이다.



26 답 ③

$y'=3x^2+2ax+2=-1$에서 방정식 $3x^2+2ax+3=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9<0$에서 $(a+3)(a-3)<0$

$\therefore -3<a<3$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

27 답 4

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로

점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선과 y축에 대하여 대칭이다.

먼저, 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$이므로 $y=2x$

구하는 접선의 방정식은 $y=2x$를 y축에 대하여 대칭이동한

$y=-2x$이다.

따라서 $a=-2,\ b=0$이므로 $a^2+b^2=4$

28 답 ②

삼차함수를 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ ($p>0,\ p,\ q,\ r,\ s$는 상수), 점 A에서의 접선을 $g(x)=mx+n$ ($m,\ n$은 상수)라 하고,

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=px^3+qx^2+(r-m)x+(s-n)=p(x-a)^2(x-b)$

함수 $h(x)$의 구간 $[a,\ b]$에서의 평균변화율은 0이므로 $h'(c)=0$을 만족시키는 c를 구하면 된다.

$$\begin{aligned} h'(x)&=2p(x-a)(x-b)+p(x-a)^2 \\ &=p(x-a)\{2(x-b)+(x-a)\} \\ &=p(x-a)\{3x-(a+2b)\}=0 \end{aligned}$$

에서 $x=a$ 또는 $x=\dfrac{a+2b}{3}$

$\therefore c=\dfrac{a+2b}{3}$ ($\because a<c<b$)

즉, $c-a:b-c=2:1$이므로 $\dfrac{c-a}{b-c}=2$

29 답 4

두 곡선 $y=x^2$과 $y=-x^2+4x-10=-(x-2)^2-6$의 꼭짓점은 각각 $(0,\ 0)$, $(2,\ -6)$이다.

또한, 두 곡선의 이차항의 계수는 부호가 서로 다르고 절댓값이 같으므로 두 곡선은 두 꼭짓점의 중점인 점 $(1,\ -3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 접선은 모두 점 $(1,\ -3)$을 지나므로 두 접선의 교점은 $\mathrm{P}(1,\ -3)$이다.

$y=x^2$ 위의 접점을 $(t,\ t^2)$이라 하면 $y'=2x$이므로 접점 $(t,\ t^2)$에서의 접선의 기울기는 $2t$이다.

따라서 접선의 방정식은 $y-t^2=2t(x-t)$ ⋯ ㉠

이 접선이 점 $(1,\ -3)$을 지나므로 $-3-t^2=2t(1-t)$에서

$t^2-2t-3=0,\ (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$t=-1$일 때, $y=-2x-1$이고

$t=3$일 때, $y=6x-9$

따라서 두 접선이 y축과 만나는 점은 $(0,\ -1)$, $(0,\ -9)$이므로 구하는 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times8\times1=4$

30 답 ⑤

ㄱ. $f(x)=x^3-3x^2+x+1=(x-1)^3-2(x-1)$

$\quad =g(x-1)$ (참)

ㄴ. $g(-x)=-x^3+2x=-(x^3-2x)=-g(x)$이므로

함수 $g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 함수 $f(x)$의 그래프는 함수 $g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.

ㄴ에서 함수 $g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$는 점 $(1,\ 0)$에 대하여 대칭인 그래프이다. 따라서 서로 평행한 접선의 두 접점 A, B는 점 $(1,\ 0)$에 대하여 대칭이므로 직선 AB는 점 $(1,\ 0)$을 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

31 답 ④

곡선 $y=x^2$ 위의 점 P에서의 법선이 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$을 지날 때 $\overline{\mathrm{PA}}$의 길이가 최소가 된다.

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$이라 하면 $y'=2x$에서 점 P에서의 접선의 기울기는 $2t$이므로 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$에서의 법선의 방정식은

$y-t^2=-\dfrac{1}{2t}(x-t)$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$을 지나므로 $0-t^2=-\dfrac{1}{2t}(3-t)$에서

$2t^3+t-3=0,\ (t-1)(2t^2+2t+3)=0 \qquad \therefore t=1$

따라서 $\mathrm{P}(1,\ 1)$이므로 $\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

32 답 ②

$x^2+ax+b=k$에서 $x^2+ax+b-k=0$

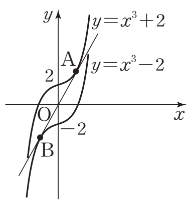
$f(x)=x^2+ax+b-k$라 하고 점 A의 x좌표를 p라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 점 B의 x좌표는 $p+2$이다.

따라서 $f(x)=(x-p)(x-p-2)$이므로

$f'(x)=(x-p)+(x-p-2)$

$\therefore f'(p)=(p-p)+(p-p-2)=-2$

33 답 ③



그림과 같이 두 접점의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(a,\ a^3+2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^3-2)$라 하고 접선의 기울기를 m이라 하면 두 점에서의 접선의 기울기는 서로 같으므로 $m=3a^2=3b^2$에서

$b=-a$ ($\because a\neq b$)

한편, 선분 AB의 기울기가 m이므로

$m=\dfrac{(a^3+2)-(b^3-2)}{a-b}=3a^2$에서 $\dfrac{a^3-b^3+4}{a-b}=3a^2$

위 식에 $b=-a$를 대입하면 $\dfrac{2a^3+4}{2a}=3a^2 \qquad \therefore a=1$

$\therefore m=3a^2=3$

34 답 ①

원 C와 곡선 $y=x^4$이 접하는 점 $(1, 1)$을 점 P라 하면 원과 곡선은 점 P에서 공통접선을 갖는다.

한편, 원의 중심과 접점을 이은 선분은 접선에 수직이므로 원 C의 중심의 좌표는 점 $\mathrm{P}(1, 1)$에서의 곡선 $y=x^4$의 법선과 y축이 만나는 점과 같다.

$y=x^4$에서 $y'=4x^3$이므로 점 $\mathrm{P}(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 4이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(1, 1)$에서의 법선의 방정식은 $y-1=-\frac{1}{4}(x-1)$

이 직선이 점 $(0, a)$를 지나므로 $a-1=-\frac{1}{4}(0-1)$

$\therefore a=\frac{5}{4}$

35 답 ①

직선 $4x-4y-5=0$의 기울기가 1이므로 구하는 최단 거리는 접선의 기울기가 1인 곡선 $y=x^2$ 위의 접점과 직선 사이의 거리와 같다.

곡선 $y=x^2$ 위의 점 (a, a^2)에서의 접선의 기울기를 1이라 하면

$y'=2x$에서 $2a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$이므로 구하는 최단 거리는

$\frac{|2-1-5|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

36 답 4

점 A의 x좌표를 a라 하면 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$가 점 A에서 접하고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)-x=(x-a)^2(x-c)$ (c는 상수) $\cdots$ ㉠라 하자.

점 A는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 A의 좌표는 (a, a)이다.

이때, 직선 AB는 점 A를 지나며 직선 $y=x$와 수직이므로 기울기가 -1이다.

따라서 직선 AB의 방정식은 $y=-x+2a$이다.

점 B는 직선 AB의 y절편이므로 점 B의 좌표는 $(0, 2a)$,

즉 $f(0)=2a$이다.

이때, $f(0)>0$이므로 $a>0$이다.

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-a^2c=2a$에서 $ac=-2$ ($\because a>0$) $\cdots$ ㉡

한편, 직선 AB는 점 B에서 곡선 $y=f(x)$와 접하므로

$f'(0)=-1$이다.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-1=2(x-a)(x-c)+(x-a)^2$ $\cdots$ ㉢

㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)-1=2ac+a^2=-2$에서 $-4+a^2=-2$ ($\because$ ㉡)

$a^2=2$ $\quad\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

따라서 $\mathrm{A}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\mathrm{B}(0, 2\sqrt{2})$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2=4$

37 답 ②

함수 $f(x)=x^3-9x^2-22x+1$은 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c_1)$, $\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(c_2)$

인 c_1, c_2가 $a<c_1<x<c_2<b$의 범위에서 존재한다.

즉, $a<c_1<c_2<b$일 때 $f'(c_1)>f'(c_2)$이므로 함수 $f'(x)$는 구간 $[a, b]$에서 감소한다.

$f'(x)=3x^2-18x-22=3(x-3)^2-49$에서

함수 $f'(x)$는 $x\le 3$에서 감소하므로 b의 최댓값은 3이다.

38 답 ⑤

함수 $y=f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

ㄱ. $f(0)=1$, $f(5)=5$이므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{4}{5}=f'(c)$인 c가 구간 $(0, 5)$에 존재한다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 a라 하면 $f(a)=a$이므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(5)-f(a)}{5-a}=f'(c)$인 c가 구간 $(0, 5)$에 존재한다.

이때, $\frac{f(5)-f(a)}{5-a}=\frac{5-a}{5-a}=1$이므로

$f'(c)=1$인 c가 구간 $(0, 5)$에 존재한다. (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 a $(0<a<5)$라 하면 $f(a)=a$, $f(5)=5$이므로

$g(a)=f(f(a))=f(a)=a$, $g(5)=f(f(5))=f(5)=5$

따라서 평균값 정리에 의하여 $\frac{g(5)-g(a)}{5-a}=g'(c)$인 c가 구간 $(0, 5)$에 존재한다.

이때, $\frac{g(5)-g(a)}{5-a}=\frac{5-a}{5-a}=1$이므로

$g'(c)=1$인 c가 구간 $(0, 5)$에 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

39 답 1

$x>0$일 때,

$f(1+x)\ge f(1-x)+2xf'(a)$에서

$\frac{f(1+x)-f(1-x)}{(1+x)-(1-x)}\ge f'(a)$

한편, 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1+x)-f(1-x)}{(1+x)-(1-x)}=f'(c)$인 c가 $1-x<c<1+x$에 존재한다.

이때, x가 임의의 양수이므로 $-\infty<c<\infty$이다.

즉, 임의의 실수 c에 대하여 $f'(c)\ge f'(a)$가 성립해야 하므로 a는 $f'(x)$가 최솟값을 가질 때의 x의 값이다.

즉, $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-1)^2-12$

따라서 $f'(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 가지므로 $a=1$

40 답 ②

$\frac{d}{dx}g(x)=g'(x)=f(x)+xf'(x)$

① $f(-2)=0$, $f'(-2)>0$이므로

$g'(-2)=f(-2)-2f'(-2)<0$

② $f(-1)>0$, $f'(-1)=0$이므로

$g'(-1)=f(-1)-f'(-1)>0$

③ $f(0)=0$이므로

$g'(0)=f(0)=0$

④ $f(1)<0$, $f'(1)=0$이므로

$g'(1)=f(1)+f'(1)<0$

⑤ $f(2)<0$, $f'(2)=0$이므로

$g'(2)=f(2)+2f'(2)<0$

따라서 집합 $\left\{x \,\middle|\, \frac{d}{dx}g(x)>0\right\}$의 원소인 것은 ②이다.

41 답 ②

$g(x)=xf(x)$에서 $g'(x)<0$이므로

$g'(x)=f(x)+xf'(x)<0$

즉, 함수 $g(x)$는 $x\neq0$에서 감소하는 함수이다.

이때, $g(0)=0$이므로 $x>0$일 때 $g(x)<0$, $x<0$일 때 $g(x)>0$이다.

ㄱ. $x>0$일 때,

$g(x)=xf(x)<0$이므로 $f(x)<0$ (거짓)

ㄴ. $x<0$일 때,

$g(x)=xf(x)>0$이므로 $f(x)<0$ (참)

ㄷ. 【반례】 $f(x)=-x^2$이면 $x\neq0$일 때,

$f(x)+xf'(x)=-3x^2<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지만 $f(0)=0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

42 답 ②

$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+9x-9a+2 & (x\geq a) \\ x^3+3x^2-9x+9a+2 & (x<a) \end{cases}$에서

(i) $x\geq a$일 때,

$f'(x)=3x^2+6x+9=3(x+1)^2+6>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

(ii) $x<a$일 때,

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$이므로 함수 $f(x)$가 $x<a$에서 증가하려면 $3(x-1)(x+3)>0$이어야 한다.

즉, $x>1$ 또는 $x<-3$에서 $a\leq-3$

(i), (ii)에서 실수 a의 최댓값은 -3이다.

43 답 ③

ㄱ. 【반례】 $f(x)=|x|$이면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지지만 $f'(0)$은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 【반례】 $f(x)=2x+|x|$이면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하지만 $f'(0)$은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. 어떤 구간에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

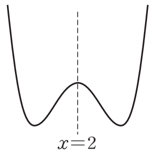
44 답 56

조건 (가)에서 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.

또한, 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ ⋯ ㉠



조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이다.

즉, $f'(2)=0$

조건 (다)에서 $f'(-1)=0$이고 대칭성에 의하여 $f'(5)=0$이므로

$f'(x)=4(x+1)(x-2)(x-5)$

$=4x^3-24x^2+12x+40$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 양변의 계수를 비교하면

$a=-8$, $b=6$, $c=40$

따라서 $f(x)=x^4-8x^3+6x^2+40x$이므로 극댓값은

$f(2)=56$

45 답 75

$a>0$이고 $\alpha<\beta$이므로 극댓값은 $f(\alpha)$, 극솟값은 $f(\beta)$이다.

$f(\alpha)-f(\beta)=a(\alpha^3-\beta^3)+b(\alpha^2-\beta^2)+c(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)\{a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+c\}$

$=(\alpha-\beta)\{a(\alpha-\beta)^2+3a\alpha\beta+b(\alpha+\beta)+c\}$

이때, α, β는 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$의 해이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{3a}$이다.

이때,

$3a\alpha\beta+b(\alpha+\beta)+c=3a\left\{\alpha\beta+\frac{b}{3a}(\alpha+\beta)+\frac{c}{3a}\right\}$

$=3a\left\{\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta\right\}$

$=-\overset{(나)}{\boxed{\frac{3}{2}}}a(\beta-\alpha)^2$

이므로

$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)\{a(\alpha-\beta)^2+3a\alpha\beta+b(\alpha+\beta)+c\}$

$=(\alpha-\beta)\left\{a(\alpha-\beta)^2-\frac{3}{2}a(\beta-\alpha)^2\right\}$

$=\overset{(가)}{\boxed{\frac{1}{2}}}a(\beta-\alpha)^3$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{3}{2}$이므로 $100pq=75$

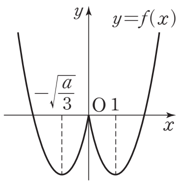
46 답 13

$f(x)=\begin{cases} a(x^3-3x) & (x\geq 0) \\ ax-x^3 & (x<0) \end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases} a(3x^2-3) & (x>0) \\ a-3x^2 & (x<0) \end{cases}$

(i) $a>0$일 때,

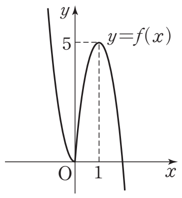
$f'(1)=0$이고 $f'\left(-\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



이때, $x=0$에서 극대이고 극댓값이 $f(0)=0$이 되어 극댓값이 5라는 조건에 모순이다.

(ii) $a<0$일 때,

$f'(1)=0$이고 $x<0$일 때, $f'(x)<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



이때, $x=1$에서 극대이고, 극댓값이

$f(1)=a(1-3)=5$이므로

$a=-\dfrac{5}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{5}{2}(x^3-3x) & (x\geq 0) \\ -\dfrac{5}{2}x-x^3 & (x<0) \end{cases}$이므로

$f(-2)=5+8=13$

47 답 10

$f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값을 가지고 $x=0$에서 극댓값을 가지려면 $f'(x)=(x+1)^l x^m (x-1)^n$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘		↗

(i) $0<x<1$일 때,

$(x+1)^l>0$, $x^m>0$

$f'(x)<0$에서 $(x-1)^n<0$이므로 n은 홀수이다.

(ii) $-1<x<0$일 때,

$(x+1)^l>0$, $(x-1)^n<0$

$f'(x)>0$에서 $x^m<0$이므로 m은 홀수이다.

(iii) $x<-1$일 때,

$x^m<0$, $(x-1)^n<0$

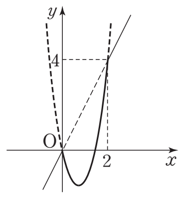
$f'(x)<0$에서 $(x+1)^l<0$이므로 l은 홀수이다.

즉, 자연수 l, m, n이 모두 홀수이어야 한다.

따라서 구하는 순서쌍 (l, m, n)의 개수는 $(1, 3, 5)$, $(1, 3, 7)$, $(1, 3, 9)$, $(1, 5, 7)$, $(1, 5, 9)$, $(1, 7, 9)$, $(3, 5, 7)$, $(3, 5, 9)$, $(3, 7, 9)$, $(5, 7, 9)$의 10이다.

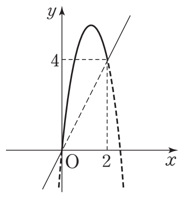
48 답 ①

함수 $f(x)$가 연속이므로 가능한 경우는 다음 그림과 같다.



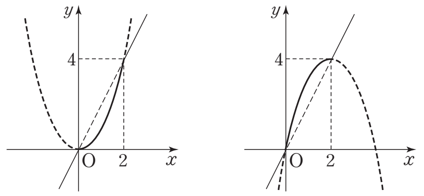
$a>0$

[그림 1]



$a<0$

[그림 2]



극값을 갖지 않는 경우

[그림 3]

ㄱ. [그림 1]과 [그림 2]에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 가지면 함수 $f(x)$는 극댓값도 갖는다. (참)

ㄴ. 【반례】 [그림 1]에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지지만 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. 【반례】 [그림 1]에서 함수 $f(x)$의 극댓값은 0이고, 극솟값은 0보다 작으므로 극댓값과 극솟값의 합은 0보다 작다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

49 답 ②

$y=f(x)$의 그래프에서

$a>0$, $f(0)=e<0$

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d=0$의 세 근 α, β, γ (극대, 극소가 되는 x의 값)가 모두 음수이므로 삼차함수의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{3b}{4a}<0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{2c}{4a}>0$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{4a}<0$

$\therefore b>0$, $c>0$, $d>0$

50 답 ④

$y=f(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$인 x는 $x=a$, $x=b$, $x=c$이므로 $f'(a)=f'(b)=f'(c)=0$

한편, $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 $f'(0)$은 존재하지 않는다.

이때, $x<a$, $0<x<b$, $x>c$일 때, $f(x)$는 감소하므로 그 구간에서 $f'(x)<0$이어야 한다.

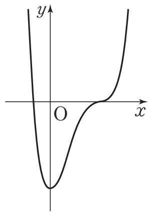
또한, $a<x<0$, $b<x<c$일 때, $f(x)$는 증가하므로 그 구간에서 $f'(x)>0$이어야 한다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프로 알맞은 것은 ④이다.

51 답 32

조건 (가)에 의하여 $f(-1)=0$

또한, 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=3$에서 x축과 접하게 된다.



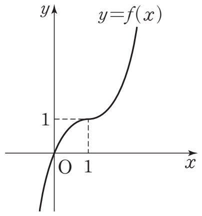
따라서 $f(x)=(x+1)(x-3)^3$이므로

$f'(x)=(x-3)^3+3(x+1)(x-3)^2$

$\therefore f'(1)-f(1)=16-(-16)=32$

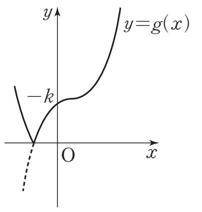
52 답 1

$f(x)=x^3-3x^2+3x=(x-1)^3+1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=x^3$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이므로 오른쪽 그림과 같다.

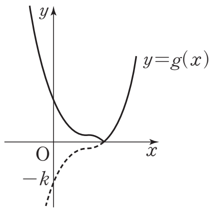


함수 $g(x)=|f(x)-k|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 후 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

따라서 $k<1$인 경우와 $k>1$인 경우 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$(k<1$일 때$)$

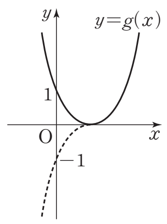


$(k>1$일 때$)$

이 경우 모두 꺾인 점이 생기므로 미분가능하지 않은 점이 존재하게 된다.

이때, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점 $(1, 1)$이 x축 위에 오도록 평행이동하면 된다.

따라서 $k=1$이고, $k=1$일 때 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



53 답 20

점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선이 곡선 $y=3x^3$과 접하는 점을 P, 점 $(0, a)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선이 곡선 $y=3x^3$과 접하는 점을 Q라 하면 곡선 $y=3x^3$은 원점에 대하여 대칭이므로 같은 기울기를 가지는 접선의 접점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이다.

즉, $\mathrm{P}(t, 3t^3)$이면 $\mathrm{Q}(-t, -3t^3)$이다.

또한, $y'=9x^2$에서 접선의 기울기는 $9t^2$이다. ---------- ⓐ

점 P에서의 접선의 방정식은 $y=9t^2(x-t)+3t^3=9t^2x-6t^3$ … ㉠

접선 ㉠이 점 $(a, 0)$을 지나므로 $0=9t^2a-6t^3$ $\quad\therefore a=\frac{2}{3}t$ … ㉡

점 Q에서의 접선의 방정식은

$y=9t^2(x+t)-3t^3=9t^2x+6t^3$ … ㉢

접선 ㉢이 점 $(0, a)$를 지나므로 $a=6t^3$ … ㉣ ---------- ⓑ

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{9}$ $(\because a>0)$, $t=\frac{1}{3}$

$\therefore 90a=90\times\frac{2}{9}=20$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 곡선 $y=3x^3$과 평행하게 만나는 두 접선의 접점이 원점에 대하여 대칭임을 알고 접선의 접점과 기울기를 하나의 변수로 나타낸다.	[40%]
ⓑ 두 접선의 방정식을 이용하여 관계식을 구한다.	[40%]
ⓒ $90a$의 값을 구한다.	[20%]

54 답 1

$y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 점 C의 x좌표는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 $f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=3ax^2+b=3a\left(x^2-\frac{1}{4}\right)$에서 $b=-\frac{3}{4}a$

$\therefore f(x)=ax^3-\frac{3}{4}ax=ax\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ---------- ⓐ

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times$(극댓값)이고,

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\square\mathrm{ADBC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times$(극댓값)$=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ---------- ⓑ

따라서 극댓값은 1이다. ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 곡선 $y=f(x)$의 x절편을 이용하여 $f(x)$를 나타낸다.	[40%]
ⓑ $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\square\mathrm{ADBC}$임을 이용하여 방정식을 세운다.	[40%]
ⓒ 극댓값을 구한다.	[20%]

55 답 8

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$에 $x=0$을 대입하면

$f(y)=f(0)+f(y)$ $\quad\therefore f(0)=0$

$f'(0)=-4$이므로

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=-4$ … ㉠ ---------- ⓐ

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+x^2+xh\right\}=x^2-4\ (\because ㉠)\\&=(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

ⓑ

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가지고, $x=b$에서 극솟값을 가지므로 $a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a^2+b^2=4+4=8$ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$의 값을 구한다.	[30%]
ⓑ $f(x)$의 증가와 감소를 조사한다.	[40%]
ⓒ a^2+b^2의 값을 구한다.	[30%]

56 답 ①

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고, 두 점 $(2,\ 4),\ (-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식이 $y=x+2$이므로

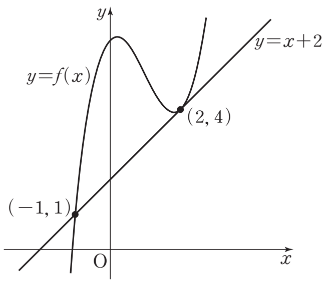
$f(2)=4$에서 $4a+2b+c=-4$ … ㉠

$f(-1)=1$에서 $a-b+c=2$ … ㉡

$f'(2)=1$에서 $4a+b=-11$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=-3,\ b=1,\ c=6$

따라서 $f'(x)=3x^2-6x+1$이므로 $f'(3)=10$



[다른 풀이]

두 점 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식이 $y=x+2$이므로

$f(x)-(x+2)=(x-2)^2(x+1)$

$f(x)=x^3-3x^2+x+6$이므로 $f'(x)=3x^2-6x+1$

따라서 $f'(3)=10$

57 답 97

조건 (나)에서 $x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $f(2)=g(2)$

조건 (가)의 식에 $x=2$를 대입하면 $g(2)=8f(2)-7$

즉, $g(2)=8g(2)-7$에서 $g(2)=1$

$\therefore f(2)=1$

또, 조건 (나)에서

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}=f'(2)-g'(2)=2$

조건 (가)의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

이 식에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$

$g'(2)=12\times 1+8\{g'(2)+2\}=8g'(2)+28$에서

$g'(2)=-4$

따라서 접선의 방정식은 $y-1=-4(x-2)$에서

$y=-4x+9$이므로

$a^2+b^2=(-4)^2+9^2=97$

58 답 ②

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{g(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-}(x-1)f(x)=0$ (참)

ㄴ. $n=1$이면 $f(x)=x^2+1$이므로

$g(x)=\begin{cases}(x-1)(x^2+1) & (x\ge 1)\\ (x-1)^2(x^2+1) & (x<1)\end{cases}$

이때, $g(x)\ge 0=g(1)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. $x>1$일 때 $g(x)=(x-1)\left(x^2+\dfrac{1}{n}\right)$은 증가함수이므로 극값은 없다.

$x<1$일 때 $g(x)=(x-1)^2\left(x^2+\dfrac{1}{n}\right)$에서

$g'(x)=2(x-1)\left(x^2+\dfrac{1}{n}\right)+2x(x-1)^2$

$=2(x-1)\left(2x^2-x+\dfrac{1}{n}\right)$

$x<1$인 모든 x에 대하여 $2x^2-x+\dfrac{1}{n}\ge 0$이면 극값은 없다.

$2x^2-x+\dfrac{1}{n}=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{8}\ge 0$에서

$n\le 8$이므로 함수 $g(x)$의 극값이 $x=1$일 때 한 개뿐인 경우 자연수 n의 개수는 8이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

59 답 10

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$에서

$g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 가지고, $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 삼차함수의 그래프의 개형을 통하여 $x-3$을 인수로 가짐을 알 수 있다.

$g(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$이다.

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$에서

$f(x)=\dfrac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$

$f'(x)=\dfrac{2}{3}(x-1)(x-3)+\dfrac{1}{3}(x-1)^2$이므로

$f'(0)=\dfrac{2}{3}(-1)(-3)+\dfrac{1}{3}(-1)^2=\dfrac{7}{3}$

따라서 $p=3,\ q=7$이므로 $p+q=3+7=10$

60 답 ③

조건 (가)에서 $f(-1)=-1+a-b>-1$이므로 $a>b$

조건 (나)에서 $f(1)-f(-1)=2+2b>8$이므로 $b>3$

$\therefore a>b>3$

ㄱ. $f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=a^2-3b>0$이어야 한다.

$a>b>3$에서 $a^2>3b$이므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f'(-1)=-2a+b+3$이고 $a>b>3$에서 $2a>b+3$이므로 $f'(-1)<0$

한편, $f'(1)=3+2a+b>0$

사잇값의 정리에 의하여 $f'(x)=0$은 구간 $(-1, 1)$에서 근을 갖는다.

$f'(\alpha)=0$이라 하면 $-1<x<\alpha$에서 $f'(x)<0$이다. (거짓)

ㄷ. $(x^3+ax^2+bx)-x(3k^2+2ak+b)=0$에서

$x\{x^2+ax+b-(3k^2+2ak+b)\}=0$

$x\{x^2+ax-(3k^2+2ak)\}=0$

이때, $h(x)=x^2+ax-3k^2-2ak$라 하자.

방정식 $f(x)-f'(k)x=0$이 서로 다른 2개의 실근을 가지려면 중근 1개가 있어야 한다.

(i) $h(x)=0$이 중근을 가질 때

방정식 $h(x)=0$의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$a^2+4(3k^2+2ak)=0$

$12k^2+8ak+a^2=0$

$(2k+a)(6k+a)=0$

$\therefore k=-\frac{a}{2}$ 또는 $k=-\frac{a}{6}$

(ii) $x=0$이 중근일 때

$3k^2+2ak=0 \qquad \therefore k=0$ 또는 $k=-\frac{2a}{3}$

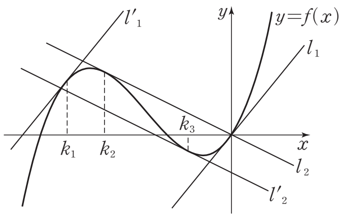
(i), (ii)에서 k는 모두 4개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. ㄱ에서 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지고, 근과 계수의 관계에 의하여 두 근은 모두 음의 근이므로 삼차함수 $f(x)$는 $x<0$인 x의 값에서 극댓값 및 극솟값을 갖는다. 이때, $f(0)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

한편, $y=f'(k)x$는 원점을 지나고 기울기가 $f'(k)$인 직선이다.



방정식 $f(x)=f'(k)x$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(k)x$의 교점의 개수와 같다. 삼차함수 $f(x)$와 직선이 2개의 교점을 가지려면 직선이 $f(x)$의 그래프와 접할 때이다. 따라서 원점에서 곡선 $f(x)$에 그은 접선은 그림과 같이 l_1, l_2 두 개가 존재하고, 그 기울기를 각각 m, n이라 하면

(i) l_1인 경우

그림에서 $f'(0)=f'(k_1)=m$이므로 $k=0$, $k=k_1$

(ii) l_2인 경우

그림에서 $f'(k_2)=f'(k_3)=n$이므로 $k=k_2$, $k=k_3$

따라서 모든 실수 k의 개수는 4이다.

61 답 ①

$g(3)=a$이므로 $f(a)=3$에서 $a^3+2=3 \qquad \therefore a=1$

또한, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선과 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$f'(x)=3x^2$에서 $f'(1)=3$

따라서 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=3(x-1) \qquad \therefore y=3x$

이때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식은 직선 $y=3x$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $x=3y$

$\therefore y=\frac{1}{3}x$

62 답 30

$f(x)=x^3+ax^2+bx$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+bt)=(3t^2+2at+b)(x-t)$

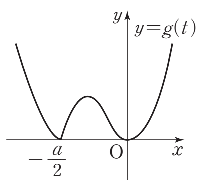
$\therefore y=(3t^2+2at+b)x-2t^3-at^2$

따라서 접선이 y축과 만나는 점 P의 좌표는 $(0, -2t^3-at^2)$이다.

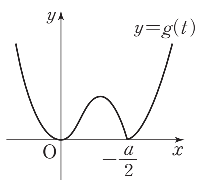
$\therefore g(t)=|-2t^3-at^2|=t^2|2t+a|$

이때, $a\neq0$이면 함수 $g(t)$는 $t=-\frac{a}{2}$에서 미분가능하지 않다.

(i) $a>0$일 때,



(ii) $a<0$일 때,



따라서 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $a=0$이어야 한다.

한편, 조건 (가)에서 $f(1)=1+a+b=2$이므로

$a+b=1 \cdots ㉠$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

따라서 $f(x)=x^3+x$이므로 $f(3)=3^3+3=30$

63 답 ①

접선을 $f(x)=mx+n$이라 하고 두 접점의 x좌표를 α, β라 하면 방정식 $x^4-2x^2-x=mx+n$은 두 중근 $x=\alpha$, $x=\beta$를 갖는다.

$x^4-2x^2-(m+1)x-n$

$=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

$=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2$

양변의 계수를 비교하면

$\alpha+\beta=0$, $\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=-2$, $2\alpha\beta(\alpha+\beta)=m+1$, $\alpha^2\beta^2=-n$

이때, $\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-2$에서 $\alpha\beta=-1$이므로

$m=n=-1$

따라서 $f(x)=-x-1$이므로

$f(1)=-1-1=-2$

64 답 22

조건 (가)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

즉, $a=c=0$이므로

$f(x)=3x^3+bx$ ⋯ ㉠

이때, $f'(x)=9x^2+b$이므로 $f'(x)=9x^2+b=0$의 해를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이다.

또한, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta=\dfrac{b}{9}$

$\therefore \beta=-\alpha$, $b=-9\alpha^2$ ⋯ ㉡

조건 (나)에서 극댓값과 극솟값의 차가 $\dfrac{4}{9}$이므로

$f(\alpha)-f(\beta)=f(\alpha)+f(\alpha)=2f(\alpha)=\dfrac{4}{9}$

$\therefore f(\alpha)=\dfrac{2}{9}$

$f(\alpha)=\dfrac{2}{9}$를 ㉠에 대입하면

$3\alpha^3+b\alpha=\dfrac{2}{9}$에서 $-6\alpha^3=\dfrac{2}{9}$ ($\because$ ㉡)

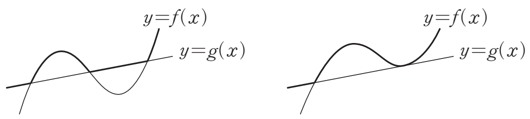
$\therefore \alpha=-\dfrac{1}{3}$, $b=-1$

따라서 $f(x)=3x^3-x$이므로

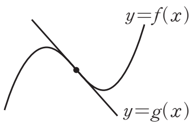
$f(2)=3\times2^3-2=22$

65 답 1

함수 $h(x)$는 다음 그림과 같이 $f(x)$와 $g(x)$ 중 크거나 같은 쪽을 선택한 함수이다.



이때, 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프가 한 점에서만 만나고 교점에서의 함수 $f(x)$의 그래프의 접선이 $y=g(x)$일 때에만 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



즉, 방정식 $f(x)=g(x)$가 삼중근을 가질 때이므로 삼중근을 $x=\alpha$라 하면

$f(x)-g(x)=x^3-3x^2+(2-a)x+(2-b)=(x-\alpha)^3$

$x^3-3x^2+(2-a)x+(2-b)=x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x-\alpha^3$

양변의 계수를 비교하면

$\alpha=1$, $2-a=3\alpha^2=3$, $2-b=-\alpha^3=-1$

$\therefore a=-1$, $b=3$

따라서 $g(x)=-x+3$이므로 $g(2)=1$

66 답 ②

조건 (가)를 만족시키는 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$는

$f(x)=ax^2(x-1)(x-3)$ 또는 $f(x)=ax(x-1)^2(x-3)$

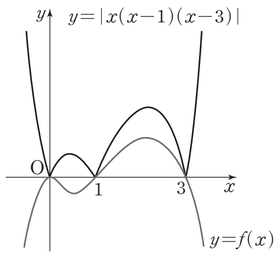
또는 $f(x)=ax(x-1)(x-3)^2$ (단, $a<0$)

이때, $f(2)=-4a$ 또는 $f(2)=-2a$ 또는 $f(2)=2a$

$f(2)$의 최댓값은 $-4a$이므로 $f(x)=ax^2(x-1)(x-3)$일 때이다.

조건 (나)에서 $x\le1$ 또는 $x\ge3$일 때

$g(x)=f(x)$이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $g(x)$는 $x=1$과 $x=3$에서 미분가능해야 한다.



여기서 $h(x)=-x(x-1)(x-3)$이라 하면

$1\le x\le3$에서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=h(x)$의 그래프는 $x=1$, $x=3$에서만 만나야 하므로 그림과 같이

$f'(1)\le h'(1)$, $f'(3)\ge h'(3)$이어야 한다.

$f'(x)=2ax(x-1)(x-3)+ax^2(x-3)+ax^2(x-1)$,

$h'(x)=-(x-1)(x-3)-x(x-3)-x(x-1)$에서

$f'(1)=-2a$, $f'(3)=18a$, $h'(1)=2$, $h'(3)=-6$이므로

$f'(1)\le h'(1)$에서 $-2a\le2$

즉, $a\ge-1$ ⋯ ㉠

$f'(3)\ge h'(3)$에서 $18a\ge-6$

즉, $a\ge-\dfrac{1}{3}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위는 $a\ge-\dfrac{1}{3}$이므로 $f(2)=-4a\le\dfrac{4}{3}$

따라서 $f(2)$의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이다.

01 답 ③

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

닫힌구간 $[0, 6]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$	6
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	a	↗	$a+7$	↘	$a-25$	↗	$a-18$

닫힌구간 $[0, 6]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값 $a+7$, 최솟값 $a-25$를 갖는다.

즉, $a+7=17$에서 $a=10$

따라서 구하는 최솟값은 $a-25=10-25=-15$

02 답 ①

점 C의 좌표를 $(x, 0)$ $(0<x<2)$이라 하면

$\overline{BC}=2x$, $\overline{CD}=-x^2+4$이므로 직사각형 ABCD의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=2x(-x^2+4)=-2x^3+8x$

$\therefore S'(x)=-6x^2+8=-6\left(x^2-\frac{4}{3}\right)$

$S'(x)=0$에서

$x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ $(\because 0<x<2)$

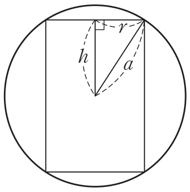
$0<x<2$에서 $S(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(2)
$S'(x)$		+	0	−	
$S(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$일 때, $S(x)$는 극대이면서 최대이므로 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3+8\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{32\sqrt{3}}{9}$

03 답 3



원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 $2h$라 하면 $r^2+h^2=a^2$

원기둥의 부피 V는

$V=\pi r^2\times 2h=2\pi h(a^2-h^2)$

$V'=2\pi(a^2-3h^2)$

$V'=0$에서 $h=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}a$

$0<h<a$이므로 V의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}a$	$\cdots$	(a)
V'		+	0	−	
V		↗	$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$	↘	

부피 V의 최댓값은 $h=\frac{1}{\sqrt{3}}a$일 때 $12\sqrt{3}\pi$이므로

$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3=12\sqrt{3}\pi$에서 $a=3$

04 답 ①

곡선 $y=x^3+x^2$ 위의 점 (t, t^3+t^2)에서의 접선의 방정식은

$y=(3t^2+2t)(x-t)+t^3+t^2$

이 접선이 점 $(0, a)$를 지나므로

$a=(3t^2+2t)(0-t)+t^3+t^2=-2t^3-t^2$

이 방정식을 만족시키는 t의 값이 3개일 때 접선을 3개 그을 수 있다.

$f(t)=-2t^3-t^2$이라 하면 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만날 때 t의 값이 3개가 된다.

$f'(t)=-6t^2-2t=-2t(3t+1)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=-\frac{1}{3}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	−	0	+	0	−
$f(t)$	↘	$-\frac{1}{27}$	↗	0	↘

따라서 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 a의 값의 범위는

$-\frac{1}{27}<a<0$이다.

05 답 ⑤

$\frac{1}{3}x^3+x^2-3x>4a-a^2$에서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$라 하면

$f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$-\frac{5}{3}$	↗

$x>0$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로

$f(x)$의 최솟값은 $-\frac{5}{3}$이다. 즉, $4a-a^2<-\frac{5}{3}$에서

$3a^2-12a-5>0$ $\therefore a<\frac{6-\sqrt{51}}{3}$ 또는 $a>\frac{6+\sqrt{51}}{3}$

$4<\frac{6+\sqrt{51}}{3}<5$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 a는 5 이상의 수이다. 따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다.

06 답 ⑤

점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치 x가 $x=t^3-4t^2+8$이므로

속도 $v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-8t$이고

가속도 $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-8$이다.

가속도가 4가 되는 순간은 $t=2$이고 이때의 속도는

$v=12-16=-4$

07 답 ⑤

t초 후 정사각형의 한 변의 길이는 $5+2t$이고

정사각형의 넓이 S는 $S=(5+2t)^2$이다.

넓이의 변화율은 $\dfrac{dS}{dt}=8t+20$이므로 한 변의 길이가 7일 때의 시각은 $5+2t=7$에서 $t=1$

따라서 $t=1$일 때의 넓이의 변화율은 28이다.

08 답 5

$f(x)=x^3-6x^2+9x+1=5$에서

$x^3-6x^2+9x-4=0$

$(x-1)^2(x-4)=0$

따라서 $x=1$ 또는 $x=4$이므로

$f(1)=5$ 또는 $f(4)=5$

한편, $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$이므로

$x=1,\ x=3$에서 $f'(x)=0$이다.

$x\geq 0$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↗	5	↗

따라서 구간 $[0,\ a]$에서의 최댓값이 5가 되려면 $1\leq a\leq 4$이어야 하므로 $\alpha=1,\ \beta=4$

$\therefore\ \alpha+\beta=1+4=5$

09 답 45

$x\leq 2,\ y\leq 3,\ x+y=3\ \cdots$ ㉠에서

$y=3-x\leq 3$이므로 $0\leq x\leq 2$

$g(x)=4x^3+y^3$이라 하고 ㉠을 대입하면

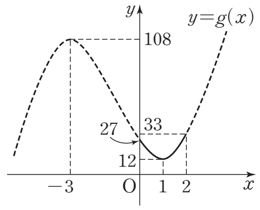
$$\begin{aligned}g(x)&=4x^3+y^3\\&=4x^3+(3-x)^3\\&=3x^3+9x^2-27x+27\ (0\leq x\leq 2)\end{aligned}$$

$g'(x)=9x^2+18x-27=9(x-1)(x+3)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=-3$

$0\leq x\leq 2$에서 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	27	↘	12	↗	33



$g(0)=27,\ g(1)=12,\ g(2)=33$이므로

최댓값 $M=33$, 최솟값 $m=12$이다.

$\therefore\ M+m=33+12=45$

10 답 ②

$f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2\geq -2$

여기서 $f(x)=t$라 하면 $t\geq -2$

$g(f(x))=g(t)=t^3-3t+1\ (t\geq -2)$에서

$g'(t)=3t^2-3=3(t-1)(t+1)$

$t\geq -2$에서 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	-1	↗	3	↘	-1	↗

따라서 $t\geq -2$에서 $g(f(x))$의 최솟값은

$g(-2)=g(1)=-1$

11 답 ④

$r+h=k$ (일정, $k>0$)이라 하면 $h=k-r$

원뿔의 부피를 V라 하면

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi r^2(k-r)=\dfrac{1}{3}\pi r^2k-\dfrac{1}{3}\pi r^3$

$\therefore\ \dfrac{dV}{dr}=\dfrac{2}{3}\pi rk-\pi r^2=\pi r\left(\dfrac{2}{3}k-r\right)$

$\dfrac{dV}{dr}=0$에서 $r=\dfrac{2}{3}k\ (\because\ r\neq 0)$

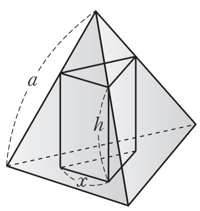
$r>0$에서 V의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	(0)	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}k$	$\cdots$	(k)
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	극대	↘	

따라서 V는 $r=\dfrac{2}{3}k$일 때 극대이면서 최대이다.

이때, $h=k-r=\dfrac{k}{3}$이므로 $\dfrac{r}{h}=\dfrac{\frac{2k}{3}}{\frac{k}{3}}=2$

12 답 ②



내접하는 삼각기둥의 밑면의 한 변의 길이를 x라 하고, 높이를 h라 하면

$x:a=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}a-h\right):\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

$\dfrac{\sqrt{6}}{3}x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a-h\qquad\therefore\ h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}(a-x)$

내접하는 삼각기둥의 부피 V는

$V=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2h=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}(a-x)=\frac{\sqrt{2}}{4}(ax^2-x^3)$

$V'=\frac{\sqrt{2}}{4}(2ax-3x^2)=\frac{\sqrt{2}}{4}x(2a-3x)$

$V'=0$에서 $x=\frac{2a}{3}$ ($\because$ $0<x<a$)

$0<x<a$에서 V의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2a}{3}$	$\cdots$	(a)
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	극대	↘	

따라서 V는 $x=\frac{2a}{3}$일 때 극대이면서 최대이다.

이때, $V=\frac{\sqrt{2}}{4}\left\{a\left(\frac{2a}{3}\right)^2-\left(\frac{2a}{3}\right)^3\right\}=\frac{\sqrt{2}}{27}a^3=8\sqrt{2}$이므로

$a=6$

$\therefore h=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(a-\frac{2a}{3}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{a}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

13 답 2

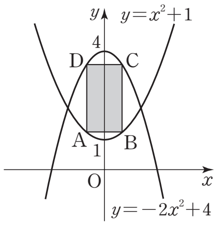
두 이차함수 $y=x^2+1$과 $y=-2x^2+4$의 그래프의 교점의 x좌표는

$x^2+1=-2x^2+4$에서 $3(x^2-1)=0$

$3(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

그림의 직사각형 ABCD에서 $\mathrm{B}(a,\ a^2+1)$, $\mathrm{C}(a,\ -2a^2+4)$라 하면 넓이 S는



$S=2a(-2a^2+4-a^2-1)$

$=2a(-3a^2+3)$

$=-6(a^3-a)$ $(0<a<1)$

$\therefore S'=-6(3a^2-1)$

$S'=0$에서 $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\because$ $0<a<1$)

$0<a<1$에서 S의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	극대	↘	

따라서 S는 $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때 극대이면서 최대이므로 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $-6\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 $k=2a=\frac{2}{\sqrt{3}}$일 때 최댓값 $M=\frac{4\sqrt{3}}{3}$이므로

$\frac{M}{k}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=2$

14 답 ②

$x^3-2x^2-ax+8=0$에서 $x^3-2x^2+8=ax$

$f(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면 방정식 $x^3-2x^2-ax+8=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

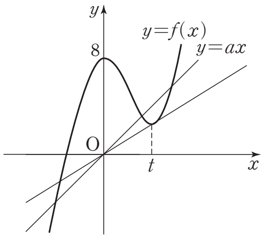
$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8	↘	$\frac{184}{27}$	↗

그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선 $y=ax$의 기울기 a가 곡선 $y=f(x)$와 접할 때의 기울기보다 커야 한다.



직선 $y=ax$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 접점을 $(t,\ f(t))$라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t^2+8)=(3t^2-4t)(x-t)$

이 직선이 원점 O를 지나므로

$-(t^3-2t^2+8)=-t(3t^2-4t)$

$2t^3-2t^2-8=0$, $2(t-2)(t^2+t+2)=0$ $\quad\therefore t=2$

즉, 접점의 좌표가 $(2,\ 8)$이므로 접할 때의 기울기는 4이다.

따라서 $a>4$일 때, 서로 다른 세 실근을 가지므로 구하는 정수 a의 최솟값은 5이다.

15 답 9

$x^3-x^2-3x=\frac{1}{2}x^2+3x+a$에서 $x^3-\frac{3}{2}x^2-6x=a$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$라 하면 $f(0)=0$이고,

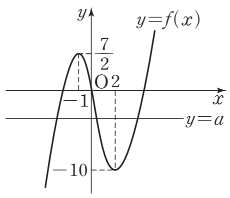
$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	-10	↗

주어진 삼차방정식이 한 개의 음의 실근과 두 개의 양의 실근을 가지려면 a의 값의 범위는 $-10<a<0$이므로 정수 a는 $-9,\ -8,\ \cdots,\ -1$의 9개이다.

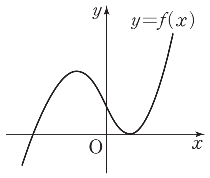


16 답 ②

$\dfrac{16}{x}=-x^2+3a$에서 $x^3-3ax+16=0$ ⋯ ㉠

두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3ax+16$이라 하면 $f(0)>0$이므로 $f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(x)=x^3-3ax+16$에서 $f'(x)=3x^2-3a$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\sqrt{a}$

$f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극솟값 0을 가지므로

$a\sqrt{a}-3a\sqrt{a}+16=0$, $a\sqrt{a}=8$

양변을 제곱하면 $a^3=4^3$

$\therefore a=4$

17 답 ③

$h(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x^2+2-a$라 하면

$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	0	⋯	2	⋯
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 임의의 양수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$가 성립하려면 임의의 양수 x에 대하여 $h(x)>0$이어야 하므로

극솟값 $h(2)=-2-a>0$에서 $a<-2$

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다.

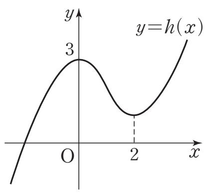
18 답 1

$h(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x^2+a+3$

이라 하면

$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$0<x<2$에서 $h'(x)<0$이므로 $h(x)$는 감소하는 함수이다.



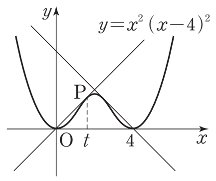
따라서 $0<x<2$에서 $h(x)>0$이려면 $h(2)\ge0$이어야 한다.

$h(2)=a-1\ge0$

$\therefore a\ge1$

따라서 a의 최솟값은 1이다.

19 답 32



직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 위의 점 $P(t,\ f(t))$에서의 접선이다. 부등식 $f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$는 접선이 $0\le x\le4$에서 함수 $f(x)=x^2(x-4)^2$의 그래프보다 위에 있음을 뜻한다.

원점에서 그은 접선의 접점을 $(t_1,\ f(t_1))$, 점 $(4,\ 0)$에서 그은 접선의 접점을 $(t_2,\ f(t_2))$라 하자. 이때, 주어진 부등식의 조건을 만족시키려면 접선이 닫힌구간 $[t_1,\ t_2]$에 존재하면 된다.

한편, t는 곡선과 직선의 접점의 x좌표이므로 점 $P(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y-t^2(t-4)^2=4t(t-2)(t-4)(x-t)$ ⋯ ㉠

(ⅰ) 직선 ㉠이 원점을 지날 때,

$-t^2(t-4)^2=-4t^2(t-2)(t-4)$에서

$t^2(t-4)(3t-4)=0\qquad\therefore t=\dfrac{4}{3}\ (\because 0<t<2)$

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 $(4,\ 0)$을 지날 때,

$-t^2(t-4)^2=4t(t-2)(t-4)(4-t)$에서

$t(t-4)^2(3t-8)=0\qquad\therefore t=\dfrac{8}{3}\ (\because 2<t<4)$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식을 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $\dfrac{4}{3}\le t\le\dfrac{8}{3}$이다.

$\therefore 9pq=9\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{8}{3}=32$

20 답 ⑤

$v(t)=x'(t)=6t^2-8t+2=2(3t-1)(t-1)$

$v(t)=0$에서 $t=\dfrac{1}{3}$ 또는 $t=1$

$t\ge0$에서 $x(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	⋯	$\frac{1}{3}$	⋯	1	⋯
$v(t)$		+	0	−	0	+
$x(t)$	3	↗	$\frac{89}{27}$	↘	3	↗

ㄱ. 점 P는 $t=1$일 때, 출발점(3)으로 되돌아온 후 다시 x축의 양의 방향으로 움직인다. (참)

ㄴ. $\dfrac{1}{3}<t<1$일 때, $v(t)<0$이므로 점 P의 속도는 음이다. (참)

ㄷ. t초 후의 가속도를 $a(t)$라 하면 $a(t)=v'(t)=12t-8$

$t>\dfrac{2}{3}$일 때 $a(t)>0$이므로 $t>\dfrac{2}{3}$일 때 점 P의 속도는 증가한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21 답 ②

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\dfrac{dx}{dt}=2t-2$, $v_Q=\dfrac{dy}{dt}=2t-6$

또, 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직일 때, $v_Pv_Q<0$이므로

$(2t-2)(2t-6)<0$에서 $1<t<3$

따라서 서로 반대 방향으로 움직인 시간은 2초이다.

22 답 ②

중점 M의 t분 후의 위치를 $x_M(t)$라 하면

$x_M(t)=\dfrac{x_P(t)+x_Q(t)}{2}=\dfrac{2t^3-5t^2+t^2-8t}{2}=t^3-2t^2-4t$

점 M의 t분 후의 속도를 $v_M(t)$라 하면

$v_M(t)=\dfrac{d}{dt}x_M(t)=3t^2-4t-4=(3t+2)(t-2)$

$v_M(t)=0$에서 $t=2$ $(\because t>0)$

따라서 $t=2$, 즉 2분 후에 속도의 부호가 바뀌므로 그때 운동 방향이 바뀐다.

23 답 270

분속 90 m로 가로등을 향하여 걸어가므로

$\dfrac{dx}{dt}=-90$이고 $x=-90t$이다.

$3:1.5=y:y-x$에서 $1.5y=3y-3x$ $\quad\therefore y=2x$

$y=2x=-180t$이므로 y의 길이의 변화율은 $\dfrac{dy}{dt}=-180$

즉, 점 R의 가로등 방향으로의 속도는 180 m/분이므로 $a=180$

또한, 그림자의 길이는 $y-x=2x-x=x=-90t$

즉, 그림자 길이의 변화율은 $\dfrac{dx}{dt}=-90$(m/분)이므로 $b=-90$

$\therefore a-b=180-(-90)=270$

24 답 ③

t초 후 $\overline{BP}$의 길이는 $10-t$, $\overline{BQ}$의 길이는 $10+t$이므로

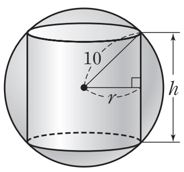
삼각형 PBQ의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}(10-t)(10+t)\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(100-t^2)$

$\dfrac{dS}{dt}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$이므로 2초 후 넓이의 변화율은

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2=-\sqrt{3}$(cm^2/초)

25 답 ④



t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면

$\left(\dfrac{h}{2}\right)^2+r^2=10^2$ ⋯ ㉠

한편, 높이가 매초 1 cm씩 줄어들고 있으므로 t초 후의 높이는 $h=6-t$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$r^2=100-\dfrac{1}{4}h^2=100-\dfrac{1}{4}(6-t)^2=-\dfrac{1}{4}t^2+3t+91$이므로

$V(t)=\pi r^2h=\pi\left(-\dfrac{1}{4}t^2+3t+91\right)(6-t)$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\pi\left\{\left(-\frac{1}{2}t+3\right)(6-t)+\left(-\frac{1}{4}t^2+3t+91\right)\times(-1)\right\}$$
$$=\left(\frac{3}{4}t^2-9t-73\right)\pi$$

따라서 $h=6-t=4$, 즉 $t=2$일 때 $V(t)$의 변화율은

$\left(\dfrac{3}{4}\times 2^2-9\times 2-73\right)\pi=-88\pi$(cm^3/초)

26 답 ③

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$, $x=2$

$0\le x\le 4$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	⋯	2	⋯	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	↘	$a-4$	↗	$a+16$

$f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로

$f(2)=a-4=0$에서 $a=4$

따라서 $f(0)=4$, $f(4)=20$이므로 $f(x)$의 최댓값은 20이다.

27 답 ②

$4x^2+y^2=4$에서

$2x^2=\dfrac{1}{2}(4-y^2)=-\dfrac{1}{2}(y+2)(y-2)\ge 0$

$(y+2)(y-2)\le 0$ $\quad\therefore -2\le y\le 2$

한편, $f(y)=y(y+2x^2)$이라 하면

$$f(y)=y(y+2x^2)=y\left(y+2-\frac{1}{2}y^2\right)$$
$$=-\frac{1}{2}y^3+y^2+2y\ (\text{단, } -2\le y\le 2)$$

$$f'(y)=-\frac{3}{2}y^2+2y+2=-\frac{1}{2}(3y^2-4y-4)$$
$$=-\frac{1}{2}(3y+2)(y-2)$$

$f'(y)=0$에서 $y=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $y=2$

$-2\le y\le 2$에서 $f(y)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

y	-2	⋯	$-\frac{2}{3}$	⋯	2
$f'(y)$		$-$	0	$+$	0
$f(y)$	4	↘	$-\frac{20}{27}$	↗	4

$y=-2$, $y=2$일 때, 최댓값 $M=4$

$y=-\dfrac{2}{3}$일 때, 최솟값 $m=-\dfrac{20}{27}$

$\therefore M+m=4-\dfrac{20}{27}=\dfrac{88}{27}$

28 답 2

$t=x+\frac{1}{x}$이라 하면 $x>0$에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

$\therefore t\geq 2$

이때, $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\times x\times\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=t^3-3t$이므로

$f(x)=x^3+\frac{1}{x^3}-24\left(x+\frac{1}{x}\right)+56$

$\quad=(t^3-3t)-24t+56=t^3-27t+56\ (t\geq 2)$

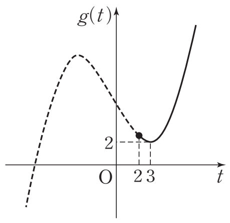
$g(t)=t^3-27t+56$이라 하면 $t\geq 2$에서 $g(t)$의 최솟값을 구하면 된다.

$g'(t)=3t^2-27=3(t^2-9)$

$\quad=3(t+3)(t-3)$

$g'(t)=0$에서 $t=-3$ 또는 $t=3$

따라서 $t=3$일 때 $g(t)$는 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $g(3)=2$



29 답 7

함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+a$는 연속함수이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

극값이 닫힌구간 $[-1, 2]$에 존재하는지 확인해 보자.

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x^2+x-2)=6(x-1)(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because -1\leq x\leq 2$)

$-1\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a+13$	↘	$a-7$	↗	$a+4$

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$는

최댓값 $M=a+13$, 최솟값 $m=a-7$을 가지므로

$M+m=(a+13)+(a-7)=2a+6=20 \qquad \therefore a=7$

30 답 ④

삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되려면 점 P에서 직선 $y=\frac{1}{2}x$까지의 거리가 최대이어야 한다. 이때, 점 P에서의 접선은 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 평행하므로 $f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$이어야 한다. 한편,

$f'(x)=a\{(x-1)^2+2x(x-1)\}$

$\quad=a(x-1)\{(x-1)+2x\}$

$\quad=a(x-1)(3x-1)$

에서 $f'\left(\frac{1}{4}\right)=a\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(3\times\frac{1}{4}-1\right)=\frac{1}{2}$

$a\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$에서 $\frac{3}{16}a=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{8}{3}$

31 답 5

접점을 $P(t, (t-2)^2)$이라 하면 $y'=2(x-2)$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은 $y-(t-2)^2=2(t-2)(x-t)$

$y=0$을 대입하면 $x=\frac{t}{2}+1$이므로 $A\left(\frac{t}{2}+1, 0\right)$

$x=0$을 대입하면 $y=-(t^2-4)$이므로 $B(0, -(t^2-4))$

삼각형 OAB의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}+1\right)\{-(t^2-4)\}$

$\quad=-\frac{1}{4}(t+2)(t^2-4)$

$\quad=-\frac{1}{4}(t^3+2t^2-4t-8)$ (단, $0\leq t\leq 2$)

$S'=-\frac{1}{4}(3t^2+4t-4)=-\frac{1}{4}(t+2)(3t-2)=0$에서

$t=-2$ 또는 $t=\frac{2}{3}$

$0\leq t\leq 2$에서 S의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

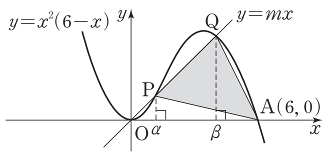
t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $t=\frac{2}{3}$일 때 S는 극대이면서 최대이므로 구하는 점 P의 x좌표는 $\frac{2}{3}$이다.

$\therefore p+q=3+2=5$

32 답 6

직선 $y=mx\ (m>0)$와 곡선 $y=x^2(6-x)$의 교점 P, Q의 x좌표는 방정식 $x^2(6-x)=mx$의 0이 아닌 서로 다른 양의 두 근이다.



$x^2(6-x)=mx$에서 $x(x^2-6x+m)=0$

$\therefore\ x^2-6x+m=0$ ($\because x\neq 0$)

이 이차방정식의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=m$

또, $x^2-6x+m=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=9-m>0$에서

$0<m<9$

이때, $P(\alpha, m\alpha)$, $Q(\beta, m\beta)$이므로 삼각형 PAQ의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle OAQ-\triangle OAP=\frac{1}{2}\times 6\times m\beta-\frac{1}{2}\times 6\times m\alpha$

$\quad=3m(\beta-\alpha)$

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{36-4m}=2\sqrt{9-m}$이므로

$S=3m\times 2\sqrt{9-m}=6\sqrt{-m^3+9m^2}$

$f(m)=-m^3+9m^2\ (0<m<9)$이라 하면

$f'(m)=-3m^2+18m=-3m(m-6)$

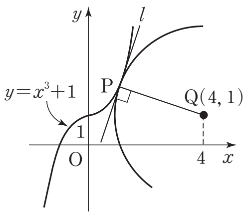
$f'(m)=0$에서 $m=6\ (\because 0<m<9)$이므로 함수 $f(m)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

m	(0)	$\cdots$	6	$\cdots$	(9)
$f'(m)$		$+$	0	$-$	
$f(m)$		↗	극대	↘	

따라서 넓이 S는 $m=6$일 때, 최댓값을 갖는다.

33 답 10

그림과 같이 곡선 $y=x^3+1$과 점 $(4,\ 1)$을 중심으로 하는 원과의 접점이 점 $(4,\ 1)$과 가장 가까이에 있는 점이다.



점 $P(a,\ a^3+1)\ (a>0)$이라 하면 곡선 $y=x^3+1$과 원은 점 P에서 공통인 접선을 가지므로 공통인 접선을 l이라 하고 점 $Q(4,\ 1)$이라 하면 직선 l과 직선 PQ는 서로 수직이다.

$y=x^3+1$에서 $y'=3x^2$

이때, 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{a^3}{a-4}$이고, 직선 l의 기울기는 $3a^2$이므로 $\dfrac{a^3}{a-4}\times 3a^2=-1$에서 $3a^5+a-4=0$

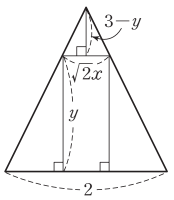
$(a-1)(3a^4+3a^3+3a^2+3a+4)=0$

$a>0$이므로 $a=1$

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ 2)$이고 최솟값 k는 선분 PQ의 길이이므로 $k^2=\overline{PQ}^2=(4-1)^2+(1-2)^2=10$

34 답 ②

직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x, 높이를 y라 하면 윗면의 정사각형에 외접하는 원의 지름의 길이는 $\sqrt{2}x$이므로 그림에서



$2:\sqrt{2}x=3:(3-y)$

$\therefore x=\dfrac{2}{3\sqrt{2}}(3-y)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(3-y)$

직육면체의 부피를 V라 하면

$V=x^2y=\dfrac{2}{9}y(3-y)^2=\dfrac{2}{9}(y^3-6y^2+9y)$ (단, $0<y<3$)

$V'=\dfrac{2}{9}(3y^2-12y+9)=\dfrac{2}{3}(y-1)(y-3)$

$V'=0$에서 $y=1$ 또는 $y=3$

$0<y<3$에서 V의 증가와 감소를 조사하면 다음과 같다.

y	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	극대	↘	

따라서 $y=1$, 즉 직육면체의 높이가 1일 때, 부피 V는 극대이면서 최대이다.

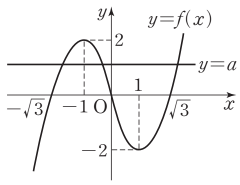
35 답 ④

방정식 $x^3-3x-a=0$에서 $f(x)=x^3-3x$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로

$x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=2$를 가지고 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=-2$를 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 방정식 $x^3-3x-a=0$이 세 실근을 가지려면 $-2\leq a\leq 2$이어야 한다.

곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

$0\leq a\leq 2$에서 세 실근을 $\alpha\leq\beta\leq\gamma$라 하면 $\alpha\leq\beta\leq 0$, $\gamma>0$이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta+\gamma=0$이므로

$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=-\alpha-\beta+\gamma=2\gamma$

한편, $0\leq a\leq 2$에서 $\sqrt{3}\leq\gamma\leq 2$이므로

$2\sqrt{3}\leq|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=2\gamma\leq 4$

따라서 $M=4$, $m=2\sqrt{3}$이므로 $Mm=4\times 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

일등급 UP

*** $-2\leq a\leq 0$에서 방정식 $x^3-3x-a=0$의 실근**

$-2\leq a\leq 0$에서 세 실근을 $\alpha\leq\beta\leq\gamma$라 하면 $\alpha<0$, $0\leq\beta\leq\gamma$

$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=-\alpha+\beta+\gamma=-2\alpha$

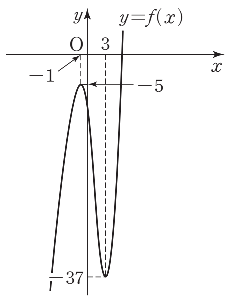
한편, $-2\leq a\leq 0$에서 $-2\leq\alpha\leq-\sqrt{3}$이므로

$2\sqrt{3}\leq|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=-2\alpha\leq 4$

따라서 $M=4$, $m=2\sqrt{3}$이므로 $Mm=4\times 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

36 답 42

$g(x)=f(x)+a$이므로 방정식 $g(x)=0$의 근은 방정식 $f(x)=-a$의 근과 같다.



$f(x)=x^3-3x^2-9x-10$이므로

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

이때, 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$가 $x=-1$ 또는 $x=3$에서 접해야 한다.

$f(-1)=-5$, $f(3)=-37$이므로

$-a=-5$ 또는 $-a=-37$ $\quad\therefore a=5$ 또는 $a=37$

따라서 모든 a의 값의 합은 42이다.

37 답 ②

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)$는 삼차함수이고

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$, 즉 $f'(x)=g'(x)$의 해는

주어진 그래프에 의하여 $x=0$ 또는 $x=2$

(i) $x<0$일 때, $f'(x)>g'(x)$이므로 $h'(x)>0$

(ii) $0<x<2$일 때, $f'(x)<g'(x)$이므로 $h'(x)<0$

(iii) $x>2$일 때, $f'(x)>g'(x)$이므로 $h'(x)>0$

(i)~(iii)에 의하여 $y=h(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.

ㄱ. $f(0)>g(0)$, 즉 극댓값 $h(0)>0$이면 $y=h(x)$의 극댓값이 0보다 크다. 이때, 극솟값 $h(2)<0$이면 방정식 $h(x)=0$ (즉, $f(x)=g(x)$)은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (거짓)

ㄴ. $f(0)=g(0)$, 즉 극댓값 $h(0)=0$이면 방정식 $h(x)=0$ (즉, $f(x)=g(x)$)은 중근과 한 실근을 가지므로 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $f(0)<g(0)$, 즉 극댓값 $h(0)<0$이면 방정식 $h(x)=0$ (즉, $f(x)=g(x)$)은 오직 한 개의 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

38 답 ②

$1\le x\le 4$에서 두 곡선 $y=2x^2-3x-4$와 $y=-x^3+5x^2+6x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$2x^2-3x-4=-x^3+5x^2+6x+k$ ⋯ ㉠

의 서로 다른 두 실근이 $1\le x\le 4$에 존재하여야 한다.

㉠에서 $x^3-3x^2-9x-4=k$이고 $f(x)=x^3-3x^2-9x-4$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

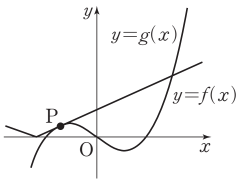
$1\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	⋯	3	⋯	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-15	↘	-31	↗	-24

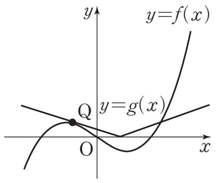
따라서 $1\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $-31<k\le -24$이므로 정수 k는 -30, -29, -28, ⋯, -24의 7개이다.

39 답 ①

두 함수 $f(x)=2x^3-x$와 $g(x)=\left|\frac{1}{2}x-a\right|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$$g(x)=\left|\frac{1}{2}x-a\right|=\begin{cases}\frac{1}{2}x-a & (x\ge 2a)\\ -\frac{1}{2}x+a & (x<2a)\end{cases}$$ 이므로

(i) [그림 1]과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프가 곡선 $y=f(x)$와 접하려면 직선 $y=\frac{1}{2}x-a$가 곡선 $y=f(x)$에 접해야 한다.

이때의 접점을 P라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

$f'(x)=\frac{1}{2}$이므로

$6x^2-1=\frac{1}{2}$에서 $x^2=\frac{1}{4}$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ ($\because x<0$)

따라서 점 P의 좌표는 $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$이므로

$\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}-a$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

(ii) [그림 2]와 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프가 곡선 $y=f(x)$와 접하려면 직선 $y=-\frac{1}{2}x+a$가 곡선 $y=f(x)$에 접해야 한다.

이때의 접점을 Q라 하면 점 Q에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

$f'(x)=-\frac{1}{2}$이므로

$6x^2-1=-\frac{1}{2}$에서 $x^2=\frac{1}{12}$

$\therefore x=-\frac{1}{\sqrt{12}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$ ($\because x<0$)

따라서 점 Q의 좌표는 $Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{5\sqrt{3}}{36}\right)$이므로

$\frac{5\sqrt{3}}{36}=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+a$

$\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{18}$

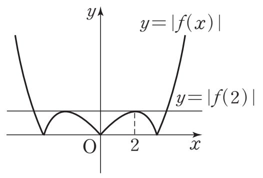
따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은

$-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{18}=-\frac{\sqrt{3}}{36}$

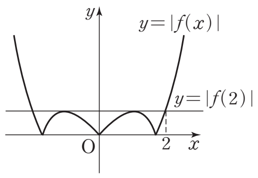
40 답 ④

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로 $f(x)=x^3-ax$ $(a>0)$라 하면

방정식 $|f(x)|=|f(2)|$의 실근의 개수는 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=|f(2)|$의 교점의 개수와 같다. 따라서 $y=|f(x)|$의 그래프가 [그림 1]과 같이 $x=2$에서 극대이거나 [그림 2]와 같이 극댓값이 $|f(2)|$와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

(ⅰ) $x=2$에서 극소인 경우

$f'(x)=3x^2-a$이므로

$f'(2)=12-a=0$

$\therefore\ a=12$

즉, $f(x)=x^3-12x$이고

$f(2)=2^3-12\times2=-16$, $f(3)=3^3-12\times3=-9$인데

$|f(2)|<|f(3)|$이어야 하므로 $a\neq12$

(ⅱ) 극댓값이 $|f(2)|$와 같은 경우

$f'(x)=3x^2-a$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$

함수 $f(x)=x^3-ax$는

$x=-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$에서 극대이므로

$f\left(-\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)=-\dfrac{a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}+a\sqrt{\dfrac{a}{3}}=\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}$

$f(2)=8-2a$

따라서 $\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}=8-2a$

$\dfrac{a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}=4-a$

양변을 제곱하면

$\dfrac{a^3}{27}=16-8a+a^2$

$a^3-27a^2+216a-432=0$

$(a-3)(a^2-24a+144)=0$

$(a-3)(a-12)^2=0$

$a=3$ 또는 $a=12$

$\therefore a=3$ ($\because a<4$)

따라서 $f(x)=x^3-3x$이므로 $f(3)=18$

41 답 ②

$f(x)=x^3-3a^2x+2b^3$ (b는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지는 경우는 실근 1개와 중근 1개를 가질 때이다.

따라서 $y=f(x)$가 극값을 가지고 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 한다.

즉, $a\neq0$이고 $f(-a)=0$ 또는 $f(a)=0$이므로

$b^3=-a^3$ 또는 $b^3=a^3$

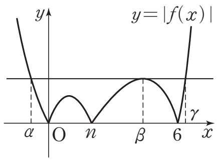
$\therefore b=-a$ 또는 $b=a$

따라서 원점을 제외한 두 직선은 $b=-a$, $b=a$이다.

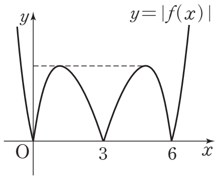
42 답 6

자연수 n의 값에 따른 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형과 방정식 $|f(x)|=|f(a)|$가 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 0이 아닌 실수 a의 개수는 다음과 같다.

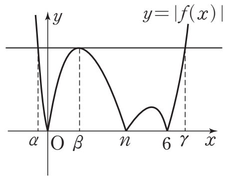
(ⅰ) $1\le n\le2$일 때, 0이 아닌 실수 a는 α, β, γ, n, 6의 5개이다.



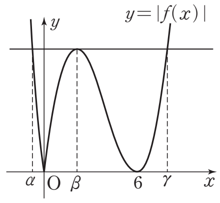
(ⅱ) $n=3$일 때, 0이 아닌 실수 a는 3, 6의 2개이다.



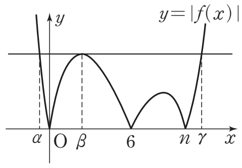
(ⅲ) $4\le n\le5$일 때, 0이 아닌 실수 a는 α, β, γ, n, 6의 5개이다.



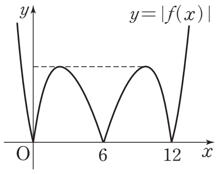
(ⅳ) $n=6$일 때, 0이 아닌 실수 a는 α, β, γ의 3개이다.



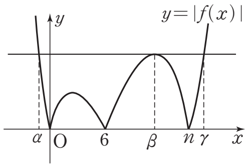
(ⅴ) $7\le n\le11$일 때, 0이 아닌 실수 a는 α, β, γ, 6, n의 5개이다.



(ⅵ) $n=12$일 때, 0이 아닌 실수 a는 6, 12의 2개이다.



(ⅶ) $n\ge13$일 때, 0이 아닌 실수 a는 α, β, γ, 6, n의 5개이다.



따라서 방정식 $|f(x)|=|f(a)|$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 0이 아닌 실수 a의 개수가 3이 되도록 하는 자연수 n은 6뿐이다.

43 답 ②

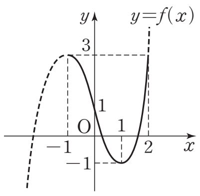
$f(x)=x^3-3x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$-1\le x\le 2$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	-1	↗	3



$-1\le x\le 2$에서 $-1\le f(x)\le 3$이므로 $f(x)\ge k$를 만족시키는 k의 최댓값은 -1이다.

44 답 ②

$x^{n+1}-(n+1)x>n(n-5)$에서

$x^{n+1}-(n+1)x-n(n-5)>0$이므로

$f(x)=x^{n+1}-(n+1)x-n(n-5)$라 하면

$f'(x)=(n+1)x^n-(n+1)$

$\quad=(n+1)(x^n-1)$

$\quad=(n+1)(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$이고, $x>1$에서 $x^n-1>0$이므로 $f'(x)>0$이다.

즉, $f(x)$는 $x>1$에서 증가하므로 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$f(1)=-n^2+4n\ge 0$에서

$n^2-4n\le 0$, $n(n-4)\le 0$

$\therefore\ 0\le n\le 4$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

45 답 ④

조건 (가)에서 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx$ (p, q, r는 상수)라 하자.

$f'(x)=4x^3+3px^2+2qx+r=4x^3+3px^2+2qx$ ($\because f'(0)=0$)

조건 (나)에서 $f'(x)$가 $x=0$에서 중근을 가져야 하므로

$f'(x)=4x^3+3px^2+2qx=x(4x^2+3px+2q)$에서 $q=0$

또한, $f'(3)=72$이므로 $p=-\frac{4}{3}$

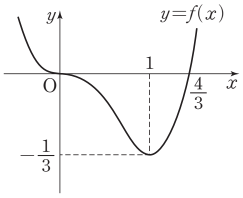
$f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3=x^3\left(x-\frac{4}{3}\right)$이므로

$f'(x)=4x^3-4x^2=4x^2(x-1)$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	$-\frac{1}{3}$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $-\frac{1}{3}$을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge-\frac{1}{3}$이므로 a의 최댓값은 $-\frac{1}{3}$이다.

46 답 25

조건 (가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로

$f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=4x^3+2ax$

$f'(-1)=-20$이므로 $a=8$

$f(x)\ge f'(x)$에서

$x^4+8x^2+b\ge 4x^3+16x$

$b\ge -x^4+4x^3-8x^2+16x$

$h(x)=-x^4+4x^3-8x^2+16x$라 하면

$h'(x)=-4x^3+12x^2-16x+16=-4(x^3-3x^2+4x-4)$

$\quad=-4(x-2)(x^2-x+2)$

$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	16	↘

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극댓값 16을 가지고 이 값이 최댓값이다.

따라서 $b\ge 16$이고 $f(1)=1+8+b=9+b\ge 25$이므로

$f(1)$의 최솟값은 25이다.

47 답 611

최고 높이에 도달할 때는 물체의 속도가 0이므로

$v=\frac{ds}{dt}=20-10t=0$에서 $t=2$(초)일 때이다. 즉, $a=2$

처음 던진 지점은 $s=25$일 때이므로

$25=25+20t-5t^2$에서

$5t^2-20t=0$, $5t(t-4)=0$

따라서 $t=4$ ($\because t>0$)일 때, 처음 던진 지점을 통과한다.

즉, $b=4$

이때의 속도는 $v_1=20-10\times 4=-20$ (m/초)

지면에 도달할 때는 $s=0$일 때이므로

$s=25+20t-5t^2=0$에서

$-5(t^2-4t-5)=0$, $-5(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5$ ($\because t>0$)

즉, $c=5$

따라서 5초 후 지면에 떨어지고 이때의 속도는

$v_2=20-10\times5=-30$ (m/초)

$\therefore a+b+c+v_1v_2=2+4+5+(-20)\times(-30)=611$

48 답 3

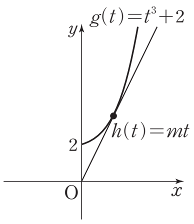
시각 t일 때 점 A의 위치를 $A(t)$라 하면 $A(t)=mt+2$이다.

$A(t)=B(t)$일 때, 두 점 A, B가 만나므로

$t^3+4=mt+2$에서 $t^3+2=mt$ $(t\geq0)$

따라서 $g(t)=t^3+2$, $h(t)=mt$라 하면 두 점 A, B가 만나는 횟수 $f(m)$은 $g(t)$와 $h(t)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

한편, $g(t)=t^3+2$에서 $g'(t)=3t^2$이고 $3t^2\geq0$이므로 함수 $g(t)$는 $t\geq0$에서 증가함수이다.



또한, $h(t)=mt$는 원점을 지나는 직선이므로 원점을 지나는 접선의 방정식을 구하여 접선의 기울기와 m의 값을 비교하여 교점의 개수를 구한다.

원점을 지나는 직선과 $h(t)$의 접점의 좌표를 (a, a^3+2)라 하면 접선의 방정식은

$y-(a^3+2)=3a^2(x-a)$

이 접선이 원점을 지나므로

$0-(a^3+2)=3a^2(0-a)$에서

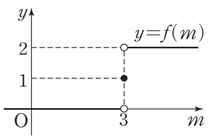
$-a^3-2=-3a^3$, $2a^3=2$ $\quad\therefore a=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 3)$이고 이때 접선의 기울기는 3이다.

즉, $h(t)$의 기울기 $m=3$일 때 교점의 개수는 1이다.

따라서 m의 값에 따른 교점의 개수가 두 점 A, B가 만나는 횟수이므로 함수 $f(m)$은 다음과 같다.

$$\therefore f(m)=\begin{cases}0 & (m<3)\\ 1 & (m=3)\\ 2 & (m>3)\end{cases}$$



따라서 함수 $f(m)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구간 (k, ∞)에서 연속이기 위한 k의 최솟값은 3이다.

49 답 16

두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=\dfrac{d}{dt}x_P(t)=4t^3-24t^2+36t$

$v_Q(t)=\dfrac{d}{dt}x_Q(t)=m$

두 점 P, Q의 속도가 같게 되는 때가 3회 있으려면

$4t^3-24t^2+36t=m$의 근이 3개 존재하면 된다.

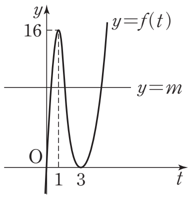
$f(t)=4t^3-24t^2+36t$라 하면

$f'(t)=12t^2-48t+36=12(t^2-4t+3)=12(t-1)(t-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

따라서 $t\geq0$에서 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	0	↗	16	↘	0	↗



따라서 $t\geq0$에서 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=m$이 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 m의 값의 범위는 $0<m<16$이므로

$\alpha+\beta=0+16=16$

50 답 ①

점 P의 속도는 $v_P(t)=2t-8$이고 점 Q의 속도는 $v_Q(t)=3$

운동 방향이 서로 반대인 구간은 $0<t<4$

그런데 점 P는 원점에서 $-$방향으로 움직이고

점 Q는 -24에서 $+$방향으로 움직인다.

$t^2-8t=3t-24$에서 $t^2-11t+24=0$이므로

$(t-3)(t-8)=0$

즉, 두 점은 $t=3$, $t=8$에서 만난다.

따라서 $3<t<4$에는 반대 방향으로 움직이기는 하지만

서로 만난 후라 마주 보지는 않는다.

그러므로 마주 보고 달리는 시간은 3초 동안이다.

51 답 61

t초 후 $\overline{BP}$의 길이는 $20-3t$, $\overline{BQ}$의 길이는 $4t$ $(0<t<5)$이므로

$\overline{PQ}=l$이라 하면

$l^2=(20-3t)^2+(4t)^2=25t^2-120t+400$

$\dfrac{dl^2}{dt}=50t-120=0$에서 $t=\dfrac{12}{5}$일 때, l^2은 최소가 된다.

l^2이 최소일 때, l도 최소이므로 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 순간은 $t=\dfrac{12}{5}$일 때이다.

한편, $\triangle PBQ=\dfrac{1}{2}(20-3t)4t=40t-6t^2$이므로

$\triangle PBQ$의 넓이의 순간변화율은 $40-12t$

따라서 $t=\dfrac{12}{5}$일 때 $\triangle PBQ$의 넓이의 순간변화율은

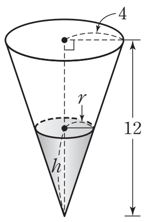
$40-12\times\dfrac{12}{5}=\dfrac{56}{5}$

따라서 $p=5$, $q=56$이므로

$p+q=61$

52 답 ②

t분 후 수면의 반지름의 길이를 r cm, 수면의 높이를 h cm라 하고, 수면의 넓이를 S cm^{2}라 하면



$h=0.5t=\frac{1}{2}t$ ⋯ ㉠

$r : h=4 : 12$에서 $r=\frac{1}{3}h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}t=\frac{1}{6}t$

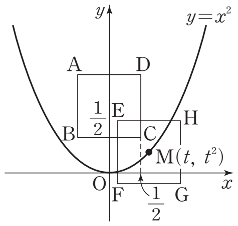
$S=\pi r^2=\frac{\pi}{36}t^2$에서 $\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{18}t$

$h=9$일 때, ㉠에서 $t=18$이므로 구하는 증가속도는

$\frac{\pi}{18}\times18=\pi(\text{cm}^2/\text{분})$

53 답 29

그림과 같이 t초 후 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 $\mathrm{M}(t,\ t^2)$, 두 정사각형의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 하면



$S(t)=\left\{\frac{1}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\}\left(t^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$\quad=(1-t)t^2=t^2-t^3\ (0\le t\le1)$

$S(t)$의 시간에 대한 넓이의 변화율은

$S'(t)=2t-3t^2=-3\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}=-3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$

따라서 $t=\frac{1}{3}$일 때, 넓이의 변화율이 최대이므로 그때의 넓이는

$S\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{9}-\frac{1}{27}=\frac{2}{27}$

따라서 $p=27,\ q=2$이므로 $p+q=29$이다.

54 답 72

$x+y+z=0$에서 $y+z=-x$ ⋯ ㉠

$x^2+y^2+z^2=6$에서 $y^2+z^2=6-x^2$ ⋯ ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$(y+z)^2=y^2+z^2+2yz=6-x^2+2yz\ (\because ㉡)=x^2$

$\therefore yz=x^2-3$ ⋯ ㉢ ------------ ⓐ

㉠, ㉢에서 $y,\ z$는 t에 관한 이차방정식 $t^2+xt+x^2-3=0$의 두 근이고, $y,\ z$가 실수이므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=x^2-4(x^2-3)\ge0$에서 $3x^2-12\le0$

$\therefore -2\le x\le2$ ------------ ⓑ

$f(x)=x^3+y^3+z^3$이라 하면

$f(x)=x^3+y^3+z^3=x^3+\{(y+z)^3-3yz(y+z)\}$

$\quad=x^3+\{-x^3+3x(x^2-3)\}\ (\because ㉠, ㉢)$

$\quad=3x^3-9x$ ------------ ⓒ

이때, $f'(x)=9x^2-9=9(x+1)(x-1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $-2\le x\le2$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	⋯	-1	⋯	1	⋯	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	↗	6	↘	-6	↗	6

따라서 $x^3+y^3+z^3$의 최댓값은 6, 최솟값은 -6이므로

$M=6,\ m=-6$

$\therefore M^2+m^2=6^2+(-6)^2=36+36=72$ ------------ ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ $y+z,\ yz$를 x에 대한 식으로 나타낸다. [30%]

ⓑ x의 값의 범위를 구한다. [30%]

ⓒ $x^3+y^3+z^3$을 x에 대한 식으로 나타낸다. [30%]

ⓓ M^2+m^2의 값을 구한다. [10%]

55 답 270

곡선 $f(x)=x^3+ax^2+24x+b$의 $x=3$에서의 접선의 기울기가 최소이므로 $f'(x)=3x^2+2ax+24=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}+24$에서

$x=-\frac{a}{3}=3$

$\therefore a=-9$ ------------ ⓐ

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$이므로

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	2	⋯	4	⋯
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이고

$f(4)=4^3-9\times4^2+24\times4+b=16$이므로

$b=0$ ------------ ⓑ

$\therefore f(x)=x^3-9x^2+24x$

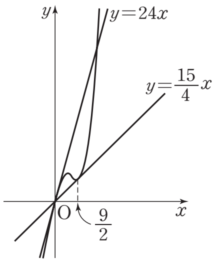
직선 $y=mx$는 원점을 지나는 직선이므로 원점에서 함수 $f(x)$에 접선을 그을 때 접점을 $(t,\ f(t))$라 하면

$y=(3t^2-18t+24)(x-t)+t^3-9t^2+24t$에서

$2t^3-9t^2=0$

$t^2(2t-9)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{9}{2}$



따라서 접선은 $y=24x$ 또는 $y=\frac{15}{4}x$이므로 정수 m의 값은 $4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 23$이다.

------------ ⓒ

따라서 모든 정수 m의 값의 합은

$4+5+6+\cdots+23=\frac{20(4+23)}{2}=270$ ------------ ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ $x=3$에서의 접선의 기울기가 최소임을 이용하여 a의 값을 구한다. [30%]

ⓑ 함수 $f(x)$의 극솟값을 이용하여 b의 값을 구한다. [30%]

ⓒ 접선을 이용하여 정수 m의 값을 구한다. [20%]

ⓓ 모든 정수 m의 값의 합을 구한다. [20%]

56 답 6

t초 후의 선분 OP의 길이가 $\sqrt{2}t$이므로 t초 후의 점 P의 좌표는 (t, t), 점 Q의 좌표는 $(0, 3t)$이다.

두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은 $y=-2x+3t$ ⋯ ㉠ ---- ⓐ

이때, ㉠과 x축의 교점 R의 x좌표는 $0=-2x+3t$에서 $x=\frac{3}{2}t$

즉, $R\left(\frac{3}{2}t, 0\right)$이므로 $\overline{OR}=l$이라 하면 $l=\frac{3}{2}t$

$\frac{dl}{dt}=\frac{3}{2}$이므로 $\overline{OR}$의 길이의 변화율은 $\frac{3}{2}$이다. ---- ⓑ

$\therefore 4a=4\times\frac{3}{2}=6$ ---- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 구한다.	[40%]
ⓑ $\overline{OR}$의 길이의 변화율을 구한다.	[50%]
ⓒ $4a$의 값을 구한다.	[10%]

57 답 12

$f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$

즉, $f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$이므로 닫힌 구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{a}{3}$일 때 극소이면서 최솟값을 갖는다.

즉, $f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{14}{27}$이므로 $\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{a^3}{3}+2=\frac{14}{27}$에서

$\frac{-5a^3+54}{27}=\frac{14}{27}$, $-5a^3+54=14$, $5a^3=40$, $a^3=8$

$a=2$이므로 $f(x)=x^3+2x^2-4x+2$

한편, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-2)$, $f(2)$ 중 큰 값이 최댓값이고 $f(2)=2^3+2\times2^2-4\times2+2=10$,

$f(-2)=(-2)^3+2\times(-2)^2-4\times(-2)+2=10$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 10이다. 즉, $M=10$

$\therefore a+M=2+10=12$

[다른 풀이]

다항함수는 연속함수이므로 닫힌구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖고 구간의 양 끝값과 극댓값, 극솟값 중 가장 큰 값이 최댓값이고 가장 작은 값이 최솟값임을 이용하여 극댓값과 극솟값을 구해 보자.

닫힌구간 $[-a, a]$의 양 끝값은 각각

$f(-a)=(-a)^3+a(-a)^2-a^2(-a)+2=a^3+2$,

$f(a)=a^3+a\times a^2-a^2\times a+2=a^3+2$이고 극솟값은

$f\left(\frac{a}{3}\right)=\left(\frac{a}{3}\right)^3+a\times\left(\frac{a}{3}\right)^2-a^2\times\frac{a}{3}+2=-\frac{5}{27}a^3+2$이다.

이때, $a>0$이므로 최솟값은 $-\frac{5}{27}a^3+2$, 최댓값은 a^3+2이다.

즉, $-\frac{5}{27}a^3+2=\frac{14}{27}$에서 $a^3=8$

$\therefore a=2$

따라서 최댓값은 $M=a^3+2=8+2=10$이므로

$a+M=2+10=12$

58 답 65

$f(x)=x^3-3x^2+6x+k$에서 $f'(x)=3x^2-6x+6$

이것을 주어진 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$, 즉 $4f'(x)+12x-18=f'(g(x))$에 대입하여 정리하면

$4(3x^2-6x+6)+12x-18=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$에서

$\{g(x)\}^2-2g(x)-4x^2+4x=0$

$\{g(x)+2x\}\{g(x)-2x\}-2\{g(x)-2x\}=0$

$\{g(x)-2x\}\{g(x)+2x-2\}=0$

$\therefore g(x)=2x$ 또는 $g(x)=-2x+2$

즉, 주어진 방정식이 닫힌구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖는다는 것은 방정식 $g(x)=2x$ 또는 방정식 $g(x)=-2x+2$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖는다는 것과 같은 의미이다.

(i) $g(x)=2x$에서 $f(2x)=x$이므로

$(2x)^3-3(2x)^2+6\times2x+k=x$

$\therefore 8x^3-12x^2+11x=-k$ ⋯ ㉠

즉, ㉠이 닫힌구간 $[0, 1]$에서 실근을 가져야 하므로 $h_1(x)=8x^3-12x^2+11x$라 하면 함수 $y=h_1(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 교점을 가져야 한다.

이때, $h_1'(x)=24x^2-24x+11=24\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+5>0$이므로

함수 $h_1(x)$는 증가함수이고 $h_1(0)=0$,

$h_1(1)=8-12+11=7$이므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 실근을 가지기 위한 실수 k의 값의 범위는 $0\le-k\le7$에서 $-7\le k\le0$이다.

(ii) $g(x)=-2x+2$에서 $f(-2x+2)=x$이므로

$(-2x+2)^3-3(-2x+2)^2+6(-2x+2)+k=x$

$\therefore 8x^3-12x^2+13x-8=k$ ⋯ ㉡

즉, ㉡이 닫힌구간 $[0, 1]$에서 실근을 가져야 하므로 $h_2(x)=8x^3-12x^2+13x-8=0$이라 하면 함수 $y=h_2(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 교점을 가져야 한다.

이때, $h_2'(x)=24x^2-24x+13=24\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+7>0$이므로

함수 $h_2(x)$는 증가함수이고 $h_2(0)=-8$,

$h_2(1)=8-12+13-8=1$이므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 실근을 가지기 위한 실수 k의 값의 범위는 $-8\le k\le1$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식이 닫힌구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위는 $-8\le k\le1$이므로

$m=-8$, $M=1$

$\therefore m^2+M^2=(-8)^2+1^2=65$

59 답 32

함수 $f(x)$는 $x<a$, $x>a$일 때, 다항함수이므로 이 범위에서 미분가능하다.

한편, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

즉, $\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

이때, $\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{0-0}{x-a}=0$ ⋯ ㉠

또, $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{(x-1)^2(2x+1)}{x-a}$

여기서 $x\longrightarrow a+$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$에서

$\lim\limits_{x\to a+}(x-1)^2(2x+1)=0$, $(a-1)^2(2a+1)=0$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$

(i) $a=-\dfrac{1}{2}$일 때,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}2(x-1)^2=\frac{9}{2}$$

이 값은 ㉠의 값과 다르므로 $a=-\dfrac{1}{2}$일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하지 않다.

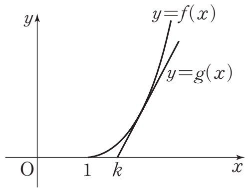
(ii) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(x-1)(2x+1)=0$$

이 값은 ㉠의 값과 같으므로 $a=1$일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하다.

(i), (ii)에서 $a=1$

한편, 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 접해야 한다.



$x>1$일 때, 함수 $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$와 접하고 기울기가 12인 접선의 접점을 $(m, f(m))(m>1)$이라 하자.

$f'(x)=2(x-1)(2x+1)+2(x-1)^2$
$=(x-1)\{(4x+2)+(2x-2)\}$
$=6x(x-1)$

이때, 접선의 기울기가 12이므로 $6m(m-1)=12$에서

$m^2-m-2=0$, $(m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=2$ ($\because m>1$)

그러므로 접선의 방정식은 $y-5=12(x-2)$

$y=12x-19$, $y=12\left(x-\dfrac{19}{12}\right)$

따라서 $k\geq\dfrac{19}{12}$이므로 k의 최솟값은 $\dfrac{19}{12}$이다.

$\therefore a+p+q=1+12+19=32$

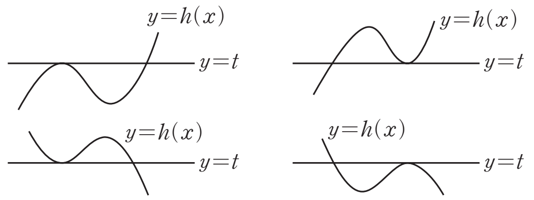
60 답 ③

실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수는 곡선 $y=f(x)+x$와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같다.

$h(x)=f(x)+x$라 하면 $h(x)$도 삼차함수이다.

ㄱ. $h(x)=x^3+x$를 미분하면 $h'(x)=3x^2+1>0$이므로 $h(x)$는 증가함수이다. 따라서 직선 $y=t$와의 교점은 항상 1개이다. (참)

ㄴ. $g(t)=2$일 때, 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=t$는 아래 네 가지 경우 중 하나이다.



따라서 $g(t)=3$인 경우가 존재한다. (참)

ㄷ. 【반례】 $f(x)=x^3-x$라 하면 $h(x)=x^3$은 증가함수이므로 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=1$이다.

그런데 함수 $f(x)$는 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$에서 극값을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

61 답 ①

속도를 $v(t)$라 하고 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=3t^2+2at+b$이고, $a(t)=6t+2a$이다.

$t=2$에서 점 P의 가속도는 0이므로

$a(2)=12+2a=0$, $a=-6$

$v(t)=3t^2-12t+b$이고 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로

$v(1)=3-12+b=0$, $b=9$

$\therefore a+b=3$

62 답 ④

$v=3t^2-12=3(t-2)(t+2)$

운동 방향이 바뀔 때 $v=0$이므로 $t=2$에서 운동 방향이 바뀐다.

그때 위치가 원점이므로

$0=2^3-12\times 2+k$

$\therefore k=16$

63 답 ②

$\overline{BE}=x\ (0<x<2)$라 하면

$\overline{AE}^2=1+x^2$

또, $1 : x=(2-x) : \overline{CF}$에서

$\overline{CF}=x(2-x)$이므로

$\overline{EF}^2=(2-x)^2+x^2(2-x)^2=(1+x^2)(2-x)^2$

삼각형 AEF의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\overline{AE}\times\overline{EF}=\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\sqrt{(1+x^2)(2-x)^2}$

$\quad=\frac{1}{2}(1+x^2)(2-x)=\frac{1}{2}(-x^3+2x^2-x+2)$

$\frac{dS}{dx}=\frac{1}{2}(-3x^2+4x-1)=-\frac{1}{2}(3x-1)(x-1)$

$\frac{dS}{dx}=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$0<x<2$에서 S의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
S'		$-$	0	$+$	0	$-$	
S		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 $x=1$일 때 극대이면서 최대이므로 S는 $x=1$일 때, 최댓값 1을 갖는다.

64 답 3

점 $\left(1, \frac{5}{4}\right)$를 지나는 직선을 $y=m(x-1)+\frac{5}{4}$라 하면

$x^2=m(x-1)+\frac{5}{4}$에서 $x^2-mx+m-\frac{5}{4}=0$ ⋯ ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=m-\frac{5}{4}$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=m^2-4m+5$

따라서 두 교점 (α, α^2), (β, β^2) 사이의 거리의 제곱은

$(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2=(\beta-\alpha)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\}$

$\qquad=(m^2-4m+5)(1+m^2)$

$\qquad=m^4-4m^3+6m^2-4m+5$

$f(m)=m^4-4m^3+6m^2-4m+5$라 하면

$f'(m)=4m^3-12m^2+12m-4=4(m-1)^3=0$이므로

$m=1$일 때, $f(m)$은 최솟값 $f(1)=4$를 갖는다.

즉, $a=\sqrt{4}=2\qquad\therefore a+m=2+1=3$

65 답 ③

함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$이고,

주어진 조건에서 $f(\alpha)=-2$, $f(\beta)=3$이므로 $f(\gamma)=k$라 하고

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	3	↘	k	↗

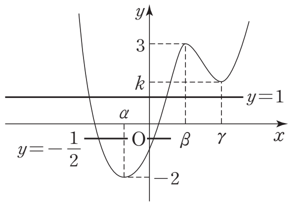
방정식 $2\{f(x)\}^2-f(x)-1=0$에서

$\{2f(x)+1\}\{f(x)-1\}=0$

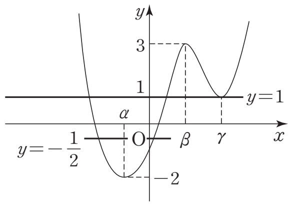
$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=1$

이때, 방정식 $f(x)=-\frac{1}{2}$의 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 개수와 같고, 방정식 $f(x)=1$의 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

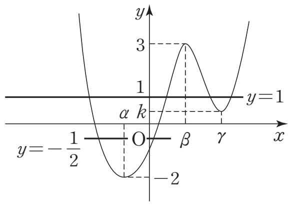
(i) $k>1$일 때, 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



(ii) $k=1$일 때, 서로 다른 실근의 개수는 5이다.



(iii) $k<1$일 때, 서로 다른 실근의 개수는 6이다.



(i)~(iii)에서 $f(\gamma)=k=1$일 때, 서로 다른 5개의 실근을 갖는다.

66 답 ⑤

$x^3-8\geq 3k(x^2-4)$에서

$x^3-8-3k(x^2-4)\geq 0$

$f(x)=x^3-8-3k(x^2-4)$라 하면

$f'(x)=3x^2-6kx=3x(x-2k)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2k$

(i) $k>0$일 때,

x	0	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

$x=2k$에서 최솟값을 가지므로 $f(2k)\geq 0$이어야 한다.

$f(2k)=-4k^3+12k-8\geq 0$에서

$k^3-3k+2\leq 0$

$(k-1)^2(k+2)\leq 0$

$\therefore k\leq -2$ 또는 $k=1$

이때, $k>0$이므로 $k=1$

(ii) $k<0$일 때,

x	$(2k)$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

$x=0$에서 최솟값을 가지므로 $f(0)\geq 0$이어야 한다.

$f(0)=12k-8\geq 0$에서 $k\geq \frac{2}{3}$

이때, $k<0$이므로 성립하지 않는다.

(iii) $k=0$일 때,

$f(x)=x^3-8$이고 $f(0)=-8<0$이 되어 성립하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $k=1$

67 답 8

t초 후의 두 점 P, Q의 거리의 차를 $f(t)$라 하면

$f(t)=t^3+t^2-(3t^2+4t)=t^3-2t^2-4t$

원의 둘레의 길이가 100이므로 t초 후의 두 점의 거리의 차가 100의 배수일 때 두 점은 만난다.

$f(t)=t^3-2t^2-4t$에서

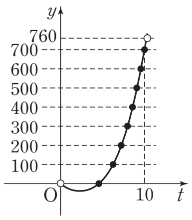
$f'(t)=3t^2-4t-4=(3t+2)(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because t>0$)

따라서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(10)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	(0)	↘	-8	↗	(760)

여기서 $f(2)=-8$이므로 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



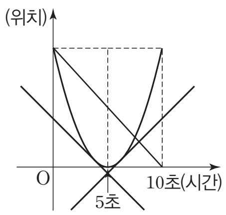
그림에서 두 점 P, Q가 움직인 거리의 차가 0, 100, $\cdots$, 700일 때 서로 만나므로 8회 만난다.

68 답 ②

ㄱ. 점 P의 속도는 점 P의 그래프에서의 접선의 기울기이다. 주어진 그래프에서 접선의 기울기가 계속 커지므로 점 P의 속도는 계속 증가한다. (거짓)

ㄴ. 같은 지점에서 출발하여 만났으므로 평균속도는 같다. (참)

ㄷ. 점 Q의 속도는 직선의 기울기이고, 그림과 같이 직선과 같은 기울기를 가지는 접선이 하나 존재하므로 속도가 같은 시각은 1회이지만 속력이 같은 시각은 2회이다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

Ⅲ 적분

06 부정적분과 정적분

문제편 67P

01 답 4

$\int(x-1)f(x)dx=x^4-x^3-x^2+x+1$에서

$(x-1)f(x)=\frac{d}{dx}(x^4-x^3-x^2+x+1)$

$=4x^3-3x^2-2x+1$

$=(x-1)(4x^2+x-1)$

따라서 $f(x)=4x^2+x-1$이므로 $f(1)=4$

02 답 ①

② $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}+C$ (거짓)

③ $\int dx=x+C$ (거짓)

④ $\int f(x)dx$는 x의 함수, $\int f(y)dy$는 y의 함수이다. (거짓)

⑤ $f(x)=g(x)$이면 $\int f(x)dx=\int g(x)dx+C$이다. (거짓)

03 답 15

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-6x^2-6x$

$(x+1)f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$

$f'(x)=6x$이므로

$f(x)=3x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=3$이므로 $C=3$

$\therefore f(2)=3\times 2^2+3=15$

04 답 ②

$y=f'(x)$의 그래프에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때, $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$는 x^2의 계수가 3인 이차함수이다.

따라서 $f'(x)=3x(x-2)$, 극댓값 $f(0)=2$이므로

$f(x)=x^3-3x^2+2$

따라서 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)=-2$

05 답 11

$$\int_1^2 \frac{4x^2(x^2+x+1)}{x+1}dx+\int_2^1 \frac{4(y^2+y+1)}{y+1}dy$$
$$=\int_1^2 \frac{4x^2(x^2+x+1)}{x+1}dx-\int_1^2 \frac{4(x^2+x+1)}{x+1}dx$$
$$=\int_1^2 \frac{4(x^2-1)(x^2+x+1)}{x+1}dx$$
$$=\int_1^2 4(x-1)(x^2+x+1)dx$$
$$=\int_1^2 (4x^3-4)dx=\Big[x^4-4x\Big]_1^2=16-8-(1-4)=11$$

06 답 ②

$$\int_0^2 f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$$
$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^1 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (3x^2-2x)dx=\Big[x^3-x^2\Big]_0^1=0$$

07 답 ④

$g(t)=t^2(t-2)$라 하면 $f'(x)=g(x+2)-g(x)$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=g(5)-g(3)$$
$$=5^2(5-2)-3^2(3-2)=66$$

08 답 ③

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=3-k \qquad \therefore k=3$

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=3x^2+4x=x(3x+4)$

$f(x)=3x+4$이므로 $f(1)=7$

$\therefore kf(1)=3\times7=21$

09 답 ⑤

① $f'(x)=g'(x)$에서 $f'(x)-g'(x)=0$이므로

$$\int\{f'(x)-g'(x)\}dx=\int 0dx$$

$\therefore f(x)-g(x)=C$ (C는 상수)

이때, 모든 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이므로 $C>0$

$\therefore f(x)=g(x)+C\ (C>0)$

따라서 $f(x)$는 $g(x)$를 y축의 방향으로 C만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

② $f'(x)=g'(x)+1$에서 $f'(x)-g'(x)=1$이므로

$$\int\{f'(x)-g'(x)\}dx=\int 1dx$$

$\therefore f(x)-g(x)=x+C$ (C는 상수)

이때, $f(0)=g(0)$에서 $f(0)-g(0)=0$이므로 위의 식에 대입하면 $f(x)-g(x)=x$

따라서 $f(x)-g(x)$는 항등함수이다. (거짓)

③【반례】 $f(x)=x+1$, $g(x)=x+2$이면

$f(x)\neq g(x)$이지만 $f'(x)=g'(x)$이다. (거짓)

④ $f'(x)=g'(x)$에서 $f'(x)-g'(x)=0$이므로

$$\int\{f'(x)-g'(x)\}dx=\int 0\,dx$$

$\therefore f(x)-g(x)=C$ (거짓)

⑤ 주어진 명제의 대우는 '$f(x)=g(x)$이면 $f'(x)=g'(x)$이다.'이고 대우가 참이므로 주어진 명제는 참이다. (참)

10 답 ④

$$\int\frac{x^4}{x^2+2x+4}dx+4\int\frac{x^2+4}{x^2+2x+4}dx$$
$$=\int\frac{x^4+4x^2+16}{x^2+2x+4}dx$$
$$=\int\frac{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}{x^2+2x+4}dx$$
$$=\int(x^2-2x+4)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$$

11 답 ①

$\int h(x)dx=f(x)g(x)$에서

$h(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\quad=2x(3x-1)+3(x^2+1)=9x^2-2x+3$

이므로 $h(0)=3$

$h'(x)=18x-2$이므로 $h'(0)=-2$

$\therefore h(0)+h'(0)=3+(-2)=1$

12 답 ④

$$f(x)=\begin{cases} x^3+C_1 & (x\geq1) \\ 3x^2+C_2 & (-1<x<1) \\ x^3+C_3 & (x\leq-1)\end{cases}\ (C_1,\ C_2,\ C_3\text{은 적분상수})$$

$f(x)$가 점 $(-2, 0)$을 지나므로 $C_3=8$

$f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$3+C_2=-1+C_3 \qquad \therefore C_2=4\ (\because C_3=8)$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$3+C_2=1+C_1 \qquad \therefore C_1=6\ (\because C_2=4)$

$\therefore f(0)+f(2)=4+14=18$

13 답 ③

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)=(2t-1)x+g(t)$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$f'(t)=2t-1$ ··· ㉠, $g(t)=f(t)-tf'(t)$

따라서 방정식 $2f(x)=g(x)$에 대입하면

$2f(x)=f(x)-xf'(x)$에서 $f(x)+xf'(x)=0$ ··· ㉡

한편, ㉠에서

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-1)dx=x^2-x+C$ (C는 적분상수)

이때, $f(0)=-1$이므로 $C=-1$ $\quad\therefore f(x)=x^2-x-1$

이것을 ㉡에 대입하면

$(x^2-x-1)+x(2x-1)=0$에서 $3x^2-2x-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

14 답 ②

$f'(x)=x+k$ (k는 상수)라 하면 $f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+kx=\frac{1}{2}(x+k)^2-\frac{1}{2}k^2$

꼭짓점의 좌표가 $\left(-k,\ -\frac{1}{2}k^2\right)$이므로

$-k=a,\ -\frac{1}{2}k^2=-2$

즉, $k=-2,\ a=2$ ($\because a>0$)

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$이므로 $f(6)=6$이다.

15 답 ②

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$

$xf'(x)=6x^2-2x$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$f'(x)=6x-2$

$\therefore f(x)=\int(6x-2)dx=3x^2-2x+C$ (C는 적분상수)

한편, $F(1)=f(1)=2$이므로

$f(1)=3-2+C=2$에서 $C=1$

$f(x)=3x^2-2x+1$이므로 $f(0)=1$

16 답 ④

$f(x)$의 부정적분 중 하나가 $F(x)$이므로 $F'(x)=f(x)$

$4F(x)=(x-1)f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4f(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$

$3f(x)=(x-1)f'(x)$ ··· ㉠

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n $(a\neq0)$이라 하면

$f'(x)$의 최고차항은 nax^{n-1}이다.

㉠에서 최고차항의 계수는 $3a=na$이므로

$n=3$ ($\because a\neq0$)

따라서 $f(x)$는 삼차함수이고 $f(0)=-1,\ f'(0)=3$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+3x-1,\ f'(x)=3ax^2+2bx+3$

이 식을 ㉠에 대입하면

$3ax^3+3bx^2+9x-3=(x-1)(3ax^2+2bx+3)$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

x^2의 계수에서 $3b=-3a+2b,\ b=-3a$

x의 계수에서 $9=-2b+3$

$\therefore a=1,\ b=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$이므로

$f(5)=(5-1)^3=64$

17 답 ③

등식 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$

또한, $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에서

$f(x+h)-f(x)=f(h)+2xh$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+2x\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2x=f'(0)+2x$$

$\therefore f(x)=f'(0)x+x^2+C$ (C는 적분상수)

이때, $f(0)=0,\ f(1)=2$이므로 $C=0,\ f'(0)=1$

따라서 $f(x)=x^2+x$이므로 $f(-1)=0$

[다른 풀이]

등식 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$

등식 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=1,\ y=-1$을 대입하면

$f(0)=f(1)+f(-1)-2=0$

$\therefore f(-1)=0$ ($\because f(1)=2$)

18 답 ③

$$f(x-1)=\begin{cases}3(x-1)^2 & (x-1<-1)\\ 2(x-1)+5 & (x-1\geq-1)\end{cases}\text{에서}$$

$$f(x-1)=\begin{cases}3x^2-6x+3 & (x<0)\\ 2x+3 & (x\geq0)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}f(x-1)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(3x^2-6x+3)dx+\int_{0}^{1}(2x+3)dx$$

$$=\Big[x^3-3x^2+3x\Big]_{-1}^{0}+\Big[x^2+3x\Big]_{0}^{1}$$

$$=7+4=11$$

[다른 풀이]

함수 $f(x-1)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $f(x)$의 그래프이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x-1)dx=\int_{-2}^{0} f(x)dx=\int_{-2}^{-1} 3x^2\,dx+\int_{-1}^{0}(2x+5)dx$$
$$=7+4=11$$

19 답 ⑤

$f(x)=x^2-x$라 하면 $(-\infty, 0]$, $[1, \infty)$에서 $f(x)\ge 0$이고, $(0, 1)$에서 $f(x)<0$이므로

$$\int_{-1}^{2}|x^2-x|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)dx$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$$

[다른 풀이]

$$\int_{-1}^{2}|x^2-x|dx=\int_{-1}^{2}(x^2-x)dx+2\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$$

20 답 ②

$\int_{0}^{1}\frac{1}{s-1}ds=\int_{0}^{1}\frac{1}{t-1}dt$이므로 $f(x)=g(x)$에서

$$x\int_{0}^{1}\frac{t^3}{t-1}dt+\int_{0}^{1}\frac{1}{s-1}ds=\int_{0}^{1}\frac{t^2}{t-1}dt+x\int_{0}^{1}\frac{1}{s-1}ds$$
$$x\left(\int_{0}^{1}\frac{t^3}{t-1}dt-\int_{0}^{1}\frac{1}{s-1}ds\right)=\int_{0}^{1}\frac{t^2}{t-1}dt-\int_{0}^{1}\frac{1}{s-1}ds$$
$$x\int_{0}^{1}\frac{t^3-1}{t-1}dt=\int_{0}^{1}\frac{t^2-1}{t-1}dt$$
$$x\int_{0}^{1}(t^2+t+1)dt=\int_{0}^{1}(t+1)dt$$
$$\therefore x=\frac{\int_{0}^{1}(t+1)dt}{\int_{0}^{1}(t^2+t+1)dt}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{11}{6}}=\frac{9}{11}$$

21 답 10

주어진 식의 좌변은 $f(x+1)-f(x)$이므로 n차 다항식 $f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\ne 0$, n은 자연수)라 하면

$f(x+1)-f(x)$의 최고차항은 $a(x+1)^n-ax^n$에서 $(n-1)$차식이다. 즉, 우변이 일차식이므로 $f(x)$는 이차함수이다.

또한, $f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx$ (b는 상수)라 하면

$$f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)-ax^2-bx$$
$$=2ax+a+b=4x+3$$

양변의 계수를 비교하면 $2a=4$, $a+b=3$ $\quad\therefore a=2, b=1$

따라서 $f(x)=2x^2+x$이므로 $f(2)=2\times 2^2+2=10$

[다른 풀이]

$f(x+1)-f(x)=4x+3$에

$x=0$을 대입하면 $f(1)-f(0)=3$ $\quad\therefore f(1)=3$

$x=1$을 대입하면 $f(2)-f(1)=7$ $\quad\therefore f(2)=10$

22 답 136

$$\int_{0}^{n} f(x)dx=\Big[x^3+2ax^2+bx\Big]_{0}^{n}=n^3+2an^2+bn=n^2 \cdots ㉠$$

㉠에 $n=1$을 대입하면 $1+2a+b=1$에서

$2a+b=0 \cdots ㉡$

㉠에 $n=2$를 대입하면 $8+8a+2b=4$에서

$4a+b=-2 \cdots ㉢$

㉡, ㉢을 연립하면 $a=-1$, $b=2$

따라서 $f(x)=3x^2-4x+2$이고

$$g(x)=\int_{-1}^{x} f(x)f'(t)dt=f(x)\int_{-1}^{x} f'(t)dt$$
$$=f(x)\{f(x)-f(-1)\}\text{이므로}$$

$g(3)=f(3)\times\{f(3)-f(-1)\}=17\times(17-9)=136$

23 답 14

$x<-1$ 또는 $x>1$이면 $f'(x)>0$이고, $-1<x<1$이면 $f'(x)<0$이므로

$$\int_{-2}^{3}|f'(x)|dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}f'(x)dx+\int_{-1}^{1}\{-f'(x)\}dx+\int_{1}^{3}f'(x)dx$$
$$=\{f(-1)-f(-2)\}-\{f(1)-f(-1)\}+\{f(3)-f(1)\}$$
$$=\{0-(-2)\}-\{(-2)-0\}+\{8-(-2)\}=14$$

24 답 22

$\int_{0}^{1} f(x)dx=a$, $\int_{0}^{2} xf(x)dx=b$라 하면

$f(x)=3x^2+6ax+b$이므로

$\int_{0}^{1}(3x^2+6ax+b)dx=a$에서 $\Big[x^3+3ax^2+bx\Big]_{0}^{1}=a$

$1+3a+b=a$ $\quad\therefore 2a+b=-1 \cdots ㉠$

$\int_{0}^{2} x(3x^2+6ax+b)dx=\int_{0}^{2}(3x^3+6ax^2+bx)dx=b$에서

$$\left[\frac{3}{4}x^4+2ax^3+\frac{b}{2}x^2\right]_{0}^{2}=b$$

$12+16a+2b=b$ $\quad\therefore 16a+b=-12 \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-\frac{11}{14}$, $b=\frac{4}{7}$

따라서 $f(x)=3x^2-\frac{33}{7}x+\frac{4}{7}$이므로

$$f(-2)=12+\frac{66}{7}+\frac{4}{7}=22$$

25 답 ④

$f(x)=2x^2-x+1$, $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+2h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{h}$$
$$=2\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}$$
$$=2F'(1)=2f(1)=4$$

26 답 1

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b$에서 $a+b=-1$ ··· ㉠

$\int_1^x(x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+bx$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3+ax^2+bx$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2ax+b$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2+2ax+b$ ··· ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=3+2a+b$에서 $2a+b=-3$ ··· ㉢

㉠, ㉢을 연립하면 $a=-2$, $b=1$

한편, ㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+2a=6x-4$　　$\therefore f(1)=2$

$\therefore a+b+f(1)=-2+1+2=1$

27 답 5

$$F(x)=\int f'(x)dx+\frac{d}{dx}\int f(x)dx$$
$$=f(x)+C+f(x)\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$
$$=2x^2-8x+6+C$$
$$=2(x-2)^2+C-2$$

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때, 최솟값 $C-2$를 갖는다.

따라서 $a=2$, $C-2=1$에서 $C=3$이므로

$F(x)=2x^2-8x+9$

$\therefore a+F(1)=2+3=5$

28 답 ④

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+x^3+x^2-1=x^4-x^3+x^2-x+1$

$\therefore f(x)=x^4-2x^3-x+2=(x-1)(x-2)(x^2+x+1)$

이때, $f(x)=0$의 실근은 1, 2이므로 모든 실근의 합은

$1+2=3$

29 답 5

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1$이고 $f(0)=1$, $g(0)=-1$이므로

$f(x)+g(x)=x^2+x$ ··· ㉠

또한, $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=3x^2+2x-1$에서

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2+2x-1$

$$\therefore f(x)g(x)=\int(3x^2+2x-1)dx$$
$$=x^3+x^2-x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

이때, $f(0)g(0)=-1$에서 $C=-1$이므로

$f(x)g(x)=x^3+x^2-x-1=(x+1)^2(x-1)$ ··· ㉡

㉠, ㉡에서 조건 (가)를 고려하면 $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2-1$

$\therefore f(1)+g(2)=2+3=5$

30 답 12

삼차함수 $f(x)$의 그래프에 접하는 접선 중 기울기가 가장 작은 접선의 접점을 $(k, f(k))$라 하면 접선의 방정식은

$y=f'(k)(x-k)+f(k)=x+1$에서

$f'(k)=1$, $-k+f(k)=1$ ··· ㉠

한편, $f'(x)$는 $x=k$에서 최솟값 1을 가지며 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 $f'(x)=3(x-k)^2+1$에서

$f(x)=(x-k)^3+x+C$ (단, C는 적분상수)

㉠에서 $f(k)=(k-k)^3+k+C=k+C=k+1$이므로 $C=1$이고

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=-k^3+1=0$에서 $k=1$

따라서 $f(x)=(x-1)^3+x+1$이므로

$f(3)=(3-1)^3+3+1=12$

31 답 ②

$f'(x)=ax(x-2)\ (a>0)$이고, $f(x)$의 순간변화율의 최솟값은 $f'(x)$의 최솟값이다.

이때, $f'(x)$의 값이 최소가 될 때의 x의 값은 $\frac{0+2}{2}=1$이므로

$f'(1)=-a=-3$에서 $a=3$　　$\therefore f'(x)=3x(x-2)$

또한, $y=f'(x)$의 그래프에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=\int 3x(x-2)dx=x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)에서

$f(x)$의 극댓값은 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+1$이므로 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)=-3$

32 답 21

등식 $f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy+k$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)+k \qquad \therefore f(0)=-k$

또한, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x}=1$에서 $f(0)=-3$, $f'(0)=1$이므로

$k=3$이다.

한편, $f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy+3$에서

$f(x+h)-f(x)=f(h)+4xh+3$이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)+3}{h}+4x\right\}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+4x\\&=f'(0)+4x=4x+1\end{aligned}$$

$\therefore f(x)=2x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=-3$이므로 $C=-3$

따라서 $f(x)=2x^2+x-3$이므로

$k\times f(2)=3\times 7=21$

33 답 ④

조건 (가)에서 다항함수 $h(x)$의 차수는 2차 이하이고 $h'(x)$는 1차 이하이다.

조건 (나)의 식의 양변을 x에 대하여 미분하여 정리하면

$h'(x)=f(x)+3g(x)$ ⋯ ㉠

함수 $f(x)+3g(x)$가 $h'(x)$와 같은 1차 이하의 함수이므로 삼차함수 $g(x)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$g(x)=-x^3+2x^2+ax+b$ ⋯ ㉡

㉡을 조건 (가)의 식에 대입하여 정리하면

$h(x)=f'(x)-g'(x)=12x^2-16x+3-a$

$h'(x)=24x-16$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$24x-16=(3+3a)x-9+3b$에서 $a=7$, $b=-\frac{7}{3}$

따라서 $g(x)=-x^3+2x^2+7x-\frac{7}{3}$이므로

$g(2)=-8+8+14-\frac{7}{3}=\frac{35}{3}$

34 답 ⑤

$$\begin{aligned}f(1-x)&=\begin{cases}1 & (|1-x|>1)\\ |1-x| & (|1-x|\le 1)\end{cases}\\&=\begin{cases}1 & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\\ |1-x| & (0\le x\le 2)\end{cases}\\&=\begin{cases}1 & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\\ 1-x & (0\le x<1)\\ x-1 & (1\le x\le 2)\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore &\int_0^3 xf(1-x)dx\\&=\int_0^1 x(1-x)dx+\int_1^2 x(x-1)dx+\int_2^3 x\,dx\\&=\int_0^1 (x-x^2)dx+\int_1^2 (x^2-x)dx+\int_2^3 x\,dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^3\\&=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

35 답 4

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\ne 0$, a, b, c는 상수)라 하면

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (ax^2+bx+c)dx=\frac{8}{3}a+2b+2c$

$f(m)+f(n)=(m^2+n^2)a+(m+n)b+2c$

$\int_0^2 f(x)dx=f(m)+f(n)$이 a, b, c에 대한 항등식이므로

$m^2+n^2=\frac{8}{3}$, $m+n=2$

이때, $(m+n)^2=m^2+n^2+2mn$이므로

$4=\frac{8}{3}+2mn$

$\therefore mn=\frac{2}{3}$

$\therefore 3(m-n)^2=3(m^2+n^2-2mn)=3\left(\frac{8}{3}-2\times\frac{2}{3}\right)=4$

36 답 90

조건 (나)의 식에 $n=0, 1, 2, \cdots, 8$을 차례로 대입하면

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 4x\,dx$

$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 4x\,dx$

$\vdots$

$\int_8^{10} f(x)dx=\int_8^9 4x\,dx$

양변을 변끼리 더하면

$\int_0^{10} f(x)dx+\int_1^9 f(x)dx=\int_0^9 4x\,dx$

이때,

$$\begin{aligned}&\int_0^{10} f(x)dx+\int_1^9 f(x)dx\\&=2\int_0^{10} f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx-\int_9^{10} f(x)dx\\&=2\int_0^{10} f(x)dx-18\end{aligned}$$

이므로

$\int_0^{10} f(x)dx=9+\int_0^9 2x\,dx=9+\left[x^2\right]_0^9=9+81=90$

37 답 ⑤

$\int_0^x (2t+1)dt = x^2+x$이므로

$x^2+x=3x$에서

$x(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x\neq 0)$

[참고]

항등식은 양변을 미분하여도 등식이 성립하지만 방정식의 양변을 미분하면 해가 달라지므로 주의한다.

38 답 ①

$f(1)=0,\ f'(x)=6x^2-12px$이므로

$f(x)=2x^3-6px^2+6p-2$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고

$f'(x)=6x^2-12px=6x(x-2p)$에서 $f'(0)=f'(2p)=0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2p$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면

M의 값은 $f(0)=6p-2,\ f(1)=0$ 중 큰 값이고 m의 값은

$f(-1)=-4,\ f(2p)=-8p^3+6p-2$ 중 작은 값이다. 이때,

$$\begin{aligned} f(-1)-f(2p)&=8p^3-6p-2\\ &=2(p-1)(4p^2+4p+1)\\ &=2(p-1)(2p+1)^2 \end{aligned}$$에서

(i) $0<p<\frac{1}{3}$이면

$M=f(1)=0$이고 $f(-1)-f(2p)<0$이므로

$m=f(-1)=-4$

즉, 항상 $M-m=4$이므로 $0<p<\frac{1}{3}$

(ii) $\frac{1}{3}\le p<1$이면

$M=f(0)=6p-2$이고 $f(-1)-f(2p)<0$이므로

$m=f(-1)=-4$

즉, $M-m=6p+2=4$에서 $p=\frac{1}{3}$

(iii) $p\ge 1$이면

$M=f(0)=6p-2$이고 $f(-1)-f(2p)\ge 0$이므로

$m=f(2p)=-8p^3+6p-2$

즉, $M-m=8p^3=4$에서 $p^3=\frac{1}{2}$

그런데 $p\ge 1$이므로 $p^3=\frac{1}{2}$을 만족시키는 실수 p는 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 양수 p의 값의 범위는 $0<p\le\frac{1}{3}$이므로 최댓값은 $\frac{1}{3}$이다.

39 답 65

실수 $a\ (0<a<4)$에 대하여

$-4<a-4<0<a<4$이므로

$$\begin{aligned} \int_{a-4}^{a} f(x)dx &= \int_{a-4}^{0} f(x)dx+\int_0^a f(x)dx\\ &=\int_{a-4}^{0}(x+2)^2dx+\int_0^a(-x+4)dx\\ &=\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{a-4}^{0}+\left[-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_0^a\\ &=\frac{1}{3}\{2^3-(a-2)^3\}-\frac{1}{2}a^2+4a \end{aligned}$$

이때, $g(a)=\frac{1}{3}\{2^3-(a-2)^3\}-\frac{1}{2}a^2+4a\ (0<a<4)$라 하면

$g'(a)=-(a-2)^2-a+4=-a^2+3a=-a(a-3)$에서

함수 $y=g(a)\ (0<a<4)$는 $a=3$일 때 극대이면서 최대이다.

따라서 $\int_{a-4}^{a} f(x)dx$의 최댓값은

$g(3)=\frac{1}{3}(2^3-1^3)-\frac{9}{2}+12=\frac{59}{6}$

$\therefore p+q=6+59=65$

40 답 6

$$\begin{aligned} g'(x)&=\frac{d}{dx}\int_1^x (x^2+xt+t^2)f(t)dt\\ &=\frac{d}{dx}\left\{x^2\int_1^x f(t)dt+x\int_1^x tf(t)dt+\int_1^x t^2f(t)dt\right\}\\ &=2x\int_1^x f(t)dt+x^2f(x)\\ &\qquad+\int_1^x tf(t)dt+x\times xf(x)+x^2f(x)\\ &=2x\int_1^x f(t)dt+3x^2f(x)+\int_1^x tf(t)dt \end{aligned}$$

이때, $f(x)=(x-2)^5+3$에서 $f(1)=2$이므로

$g'(1)=0+3f(1)+0=3f(1)=6$

41 답 ④

조건 (나)의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-2)f'(x)=3f(x)$에서

$(x-2)f'(x)=2f(x)\ \cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 다항함수이므로 $f'(x)$는 연속함수이다.

㉠에서 $f(2)=0$이므로

$f'(2)=\lim_{x\to 2}f'(x)=2\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=2f'(2)$

에서 $f'(2)=0$

또한, ㉠에서 다항식 $f(x)$의 최고차항을 x^n이라 하면

좌변의 최고차항은 nx^n, 우변의 최고차항은 $2x^n$이므로 $n=2$이다.

즉, $f(x)$는 $f(2)=0,\ f'(2)=0$을 만족시키고 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=(x-2)^2 \qquad \therefore f(8)=(8-2)^2=36$

42 답 5

$f(x)+\int_1^x xg(t)dt=x^3+4x^2-2x$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=3$ ⋯ ㉠

$f(x)+\int_1^x xg(t)dt=x^3+4x^2-2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+xg(x)+\int_1^x g(t)dt=3x^2+8x-2$ ⋯ ㉡

또한, $g(x)=2x+\int_0^1 f(t)dt$에서

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) ⋯ ㉢라 하면

$g(x)=2x+k$ ⋯ ㉣

㉣을 ㉡에 대입하면

$f'(x)+x(2x+k)+x^2+kx-1-k=3x^2+8x-2$

$f'(x)=(8-2k)x-1+k$

$f(x)=(4-k)x^2+(k-1)x+C$ (C는 적분상수)

㉠에서 $f(1)=(4-k)+(k-1)+C=3$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=(4-k)x^2+(k-1)x$이고 이것을 ㉢에 대입하면

$\int_0^1 \{(4-k)x^2+(k-1)x\}dx=k$

$\left[\frac{4-k}{3}x^3+\frac{k-1}{2}x^2\right]_0^1=k$

$\frac{4-k}{3}+\frac{k-1}{2}=k \qquad \therefore k=1$

따라서 $g(x)=2x+1$이므로 $g(2)=5$이다.

43 답 20

$f'(x)=6x^2-6x-12$이므로

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+C$ (C는 적분상수)

이때, 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$f(x)$는 중근 α와 다른 한 실근 β를 갖는다. ---------- ⓐ

따라서 $2x^3-3x^2-12x+C=2(x-\alpha)^2(x-\beta)$에서

$2x^3-3x^2-12x+C$

$=2x^3-2(2\alpha+\beta)x^2+2(\alpha^2+2\alpha\beta)x-2\alpha^2\beta$

계수를 비교하면

$2\alpha+\beta=\frac{3}{2},\ \alpha^2+2\alpha\beta=-6,\ \alpha^2\beta=-\frac{C}{2}$

$\therefore \alpha=2,\ \beta=-\frac{5}{2},\ C=20$ 또는 $\alpha=-1,\ \beta=\frac{7}{2},\ C=-7$

이때, $\alpha\beta$가 정수이므로 $\alpha=2,\ \beta=-\frac{5}{2},\ C=20$

$\therefore f(x)=2x^3-3x^2-12x+20$ ---------- ⓑ

$\therefore f(0)=20$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $f(x)$가 중근과 다른 한 실근을 가짐을 안다.	[30%]
ⓑ $f(x)$를 구한다.	[60%]
ⓒ $f(0)$의 값을 구한다.	[10%]

44 답 4

$f(x)=(x-1)(x-2)^4$이라 하고 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $f(x+2)=(x+1)x^4$의 그래프가 되므로

$\int_1^2 (x-1)(x-2)^4dx=\int_{-1}^0 (x+1)x^4\,dx$ ---------- ⓐ

$\therefore \int_1^2 (x-1)(x-2)^4\,dx=\int_{-1}^0 (x+1)x^4\,dx$

$=\int_{-1}^0 (x^5+x^4)dx$

$=\left[\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^0$

$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$ ---------- ⓑ

$\therefore 120A=120\times\frac{1}{30}=4$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $\int_1^2 (x-1)(x-2)^4\,dx=\int_{-1}^0 (x+1)x^4\,dx$임을 보인다.	[40%]
ⓑ A의 값을 구한다.	[50%]
ⓒ $120A$의 값을 구한다.	[10%]

45 답 10

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 (t+1)f(t)dt=1-1-5+k$

$0=-5+k$

$\therefore k=5$ ---------- ⓐ

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x+1)f(x)=3x^2-2x-5$

이 식에 $x=0$을 대입하면

$(0+1)f(0)=3\times0^2-2\times0-5=-5$

$\therefore f(0)=-5$ ---------- ⓑ

$\therefore k-f(0)=5-(-5)=10$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ k의 값을 구한다.	[40%]
ⓑ $f(0)$의 값을 구한다.	[40%]
ⓒ $k-f(0)$의 값을 구한다.	[20%]

46 답 132

정적분의 성질에 의하여 주어진 식의 양변에 $x=12$를 대입하면

$\int_{12}^{12} f(t)dt=0$이므로

$-12^3+12^2+\int_0^1 12f(t)dt=0$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=132$

47 답 28

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)-1 \qquad \therefore f(0)=1$

$f'(0)=k$라 하면

$$k=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}\\&=2x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=2x+k\end{aligned}$$

$\therefore f(x)=\int(2x+k)dx=x^2+kx+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^2+kx+1$이므로 $f'(x)=2x+k$에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+kx+1-2x-k}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2+k(x-1)}{(x-1)(x+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-1+k}{x+1}=\frac{k}{2}=14\end{aligned}$$

$\therefore k=28$

[다른 풀이]

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)-1 \qquad \therefore f(0)=1$

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}\\&=2x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=2x+f'(0)\ \cdots\ ㉠\end{aligned}$$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=14$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

$\therefore f(1)=f'(1)$

㉠에서 $f'(1)=2+f'(0)$이므로 $f'(0)=f'(1)-2$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x-f'(0)}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x-f(1)+2}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}-\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}\\&\qquad-\lim_{x\to1}\frac{2}{x+1}\\&=\frac{1}{2}f'(1)-1=14\end{aligned}$$

$f'(1)=30$이므로 $f'(0)=f'(1)-2=28$

48 답 ⑤

ㄱ. $g'(x)=xf(x)$이므로 $g'(0)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, \alpha]$에서 연속이고 열린구간 $(0, \alpha)$에서 미분가능하며 $g(0)=g(\alpha)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(c)=cf(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, \alpha)$에 적어도 하나 존재한다.

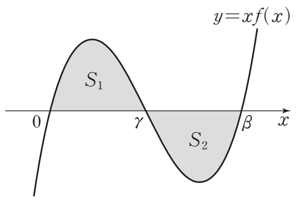
이때, $c\neq0$이므로 $f(c)=0$

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, \alpha)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $\beta>0$이고 $g(\beta)=0$이므로 ㄴ에 의하여 $f(\gamma)=0$인 γ $(0<\gamma<\beta)$가 존재한다.

$f(x)=a(x-\gamma)(x-\beta)$ $(a>0)$이고

$S_1=\int_0^\gamma|xf(x)|dx$, $S_2=\int_\gamma^\beta|xf(x)|dx$라 하면 $y=xf(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$g(\beta)=\int_0^\beta tf(t)dt=S_1-S_2=0$이므로 $S_1=S_2$이다.

$\int_\beta^x tf(t)dt=g(x)-g(\beta)=g(x)=\int_0^x tf(t)dt\geq0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $\int_\beta^x tf(t)dt\geq0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

49 답 ①

함수 $f'(x)$는 삼차함수이고

$f'(0)=f'(\sqrt{2})=f'(-\sqrt{2})=0$이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=kx(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=kx(x^2-2)\\&=kx^3-2kx\ (\text{단, } k\text{는 상수})\end{aligned}$$

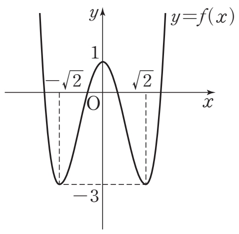
$f(x)=\frac{k}{4}x^4-kx^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=C=1$

$f(\sqrt{2})=k-2k+C=-k+1=-3$이므로 $k=4$

따라서 $f(x)=x^4-4x^2+1$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(-2)=f(2)=1>0$, $f(-1)=f(1)=-2<0$이므로
$f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 정수는 -2, -1, 0, 1이다.
따라서 $f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 모든 정수 m의 값의 합은 -2이다.

50 답 ⑤

ㄱ. 조건 (가)에서 $f'(x)=ax(x-k)$ $(a>0)$라 하면 구간 $[0, k]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 $\int_0^k f'(x)dx<0$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서 $\int_0^t |f'(x)|dx=f(t)+f(0)$의 양변을 t에 대하여 미분하면
$|f'(t)|=f'(t)$ ⋯ ㉠
이때, ㉠은 $t>1$인 모든 실수 t에 대하여 성립하므로
$f'(t)\ge 0$ $(t>1)$
따라서 조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가지므로 $0<k\le 1$이다. (참)

ㄷ. $f'(x)=ax(x-k)=ax^2-akx$에서

$$\int_0^t |f'(x)|dx$$
$$=-\int_0^k (ax^2-akx)dx+\int_k^t (ax^2-akx)dx$$
$$=-\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2\right]_0^k+\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2\right]_k^t$$
$$=-\left(\frac{ak^3}{3}-\frac{ak^3}{2}\right)+\left(\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}-\frac{ak^3}{3}+\frac{ak^3}{2}\right)$$
$$=\frac{ak^3}{6}+\left(\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}+\frac{ak^3}{6}\right)$$
$$=\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}+\frac{ak^3}{3} \cdots ㉡$$

또한,
$f(x)=\int(ax^2-akx)dx=\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)라 하면

$$f(t)+f(0)=\left(\frac{a}{3}t^3-\frac{ak}{2}t^2+C\right)+C$$
$$=\frac{a}{3}t^3-\frac{ak}{2}t^2+2C \cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $C=\frac{ak^3}{6}$

즉, $f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2+\frac{ak^3}{6}$이므로

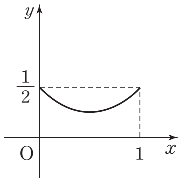
극솟값은 $f(k)=\frac{ak^3}{3}-\frac{ak^3}{2}+\frac{ak^3}{6}=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

51 답 ③

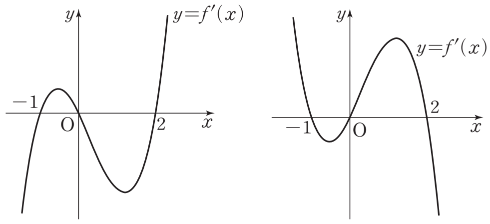
$$f(x)=\int_0^1 |t-x|dt=\int_0^x (-t+x)dt+\int_x^1 (t-x)dt$$
$$=\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)=x^2-x+\frac{1}{2}$$

따라서 $0\le x\le 1$에서 정의된 함수 $f(x)=\int_0^1 |t-x|dt$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

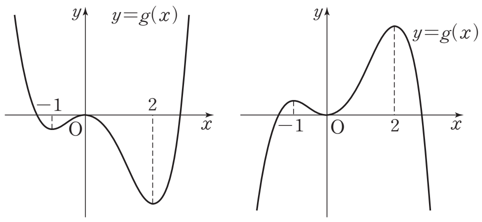


52 답 ③

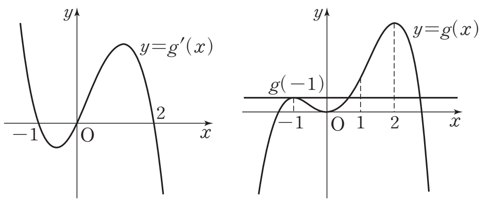
$g(x)=\int_0^x f'(t)dt$에서 $g(0)=0$, $g'(x)=f'(x)$이고
함수 $g(x)$가 사차함수이므로 함수 $y=f'(x)$는 삼차함수이다.
주어진 함수 $y=|f'(x)|$의 그래프에서 삼차함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음 중 하나이다.



함수 $g(x)$는 함수 $f'(x)$의 원시함수 중 원점을 지나므로



중 하나이다. 이 중 사차함수 $g(x)$는 $g(1)>0$을 만족시키는 함수이므로 두 함수 $y=g'(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $y=g'(x)$의 그래프에서 $g'(1)>0$임을 알 수 있다. (참)
ㄴ. 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 극솟값이 0임을 알 수 있다. (거짓)
ㄷ. $\int_{-1}^k g'(x)dx=g(k)-g(-1)=0$에서 $g(k)=g(-1)$을 만족시키는 실수 k의 값이 3개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

53 답 ④

(i) $x<0$일 때,

$$f(x)=\int_0^1 t|t-x|dt=\int_0^1 t(t-x)dt$$

$$=-x\int_0^1 t\,dt+\int_0^1 t^2\,dt=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$$

(ii) $0\le x<1$일 때,

$$f(x)=\int_0^x t(x-t)dt+\int_x^1 t(t-x)dt$$

$$=\int_0^x (xt-t^2)dt+\int_1^x (xt-t^2)dt$$

$$=x\int_0^x t\,dt-\int_0^x t^2\,dt+x\int_1^x t\,dt-\int_1^x t^2\,dt$$

$$=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(x^3-x)-\frac{1}{3}(x^3-1)$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$$

(iii) $x\ge1$일 때,

$$f(x)=\int_0^1 t|t-x|dt$$

$$=\int_0^1 t(x-t)dt$$

$$=x\int_0^1 t\,dt-\int_0^1 t^2\,dt$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$$

함수 $f(x)$는 (i)에서 기울기가 음수인 직선으로 감소하고, (iii)에서 기울기가 양수인 직선으로 증가한다.

한편, 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이므로 $0\le x<1$일 때 최솟값을 갖는다.

구간 $[0, 1)$에서 $f'(x)=x^2-\frac{1}{2}$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because 0\le x<1$)

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

따라서 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $m=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$이므로

$$m\times k=\frac{\sqrt{2}-1}{6}$$

54 답 40

조건 (가)의 식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-8$ ⋯ ㉠

조건 (가)의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=g(x)-8$ ⋯ ㉡

㉡을 조건 (나)의 식에 대입하면 좌변은

$f'(x)g'(x)=\{g(x)-8\}g'(x)$

우변은 $18x^3+54x^2+36x=18x(x+1)(x+2)$

또한, $\frac{d}{dx}\{g(x)-8\}=g'(x)$이므로 두 함수 $g(x)-8$, $g'(x)$가 각각 이차함수, 일차함수임을 알 수 있다. 주어진 조건을 만족시키는 것은 $g(x)-8=3x(x+2)$, $g'(x)=6(x+1)$이다.

따라서 $g(x)=3x^2+6x+8$이고 ㉡에서 $f'(x)=3x^2+6x$이므로 $f(x)=x^3+3x^2+C$ (단, C는 적분상수)

㉠에서 $f(x)=x^3+3x^2-12$이므로

$f(2)+g(2)=8+32=40$

55 답 3

$\int_0^2 f(x)dx=a$ (a는 상수) ⋯ ㉠라 하면

$f(x)=|x^2-1|+a$

이 식을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^2 \{|x^2-1|+a\}dx=a$$

$$\int_0^1 (-x^2+1+a)dx+\int_1^2 (x^2-1+a)dx=a$$

$$\left(-\frac{1}{3}+1+a\right)+\left(\frac{7}{3}-1+a\right)=a$$

$2+2a=a\qquad\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=|x^2-1|-2$이고 $\int_0^k f(x)dx=\frac{4}{3}$에서

$$\int_0^k\{|x^2-1|-2\}dx=\frac{4}{3}$$

$$\int_0^1 (-x^2-1)dx+\int_1^k (x^2-3)dx=\frac{4}{3}$$

$$-\frac{4}{3}+\left(\frac{1}{3}k^3-3k+\frac{8}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3}k^3-3k=0$$

$$\frac{1}{3}k(k+3)(k-3)=0$$

$\therefore k=3$ ($\because k\ge1$)

[다른 풀이]

$a=-2$이므로 $\int_0^2 f(x)dx=-2$, $\int_0^k f(x)dx=\frac{4}{3}$에서

$$\int_k^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx-\int_0^k f(x)dx=-\frac{10}{3}$$

$$\int_k^2\{|x^2-1|-2\}dx=-\frac{10}{3}$$

$$\int_k^2 (x^2-3)dx=-\frac{10}{3}$$

$$-\frac{1}{3}k^3+3k-\frac{10}{3}=-\frac{10}{3}$$

$-\frac{1}{3}k^3+3k=0$에서 $-\frac{1}{3}k(k+3)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k\ge1$)

01 답 ④

④ $B=C$이면 $\int_0^c f(x)dx=0$

⑤ $\int_a^c f(x)dx=-A+B-C=-A+(B-C)$에서

$A<B-C$이면 $\int_0^c f(x)dx>0$

02 답 ⑤

방정식 $(x-1)^2=x+1$의 두 근이 0, 3이므로 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\left|\int_0^3 \{(x-1)^2-(x+1)\}dx\right|$$

$$=\left|\int_0^3 (x^2-3x)dx\right|=\frac{9}{2}$$

03 답 ④

$A=B$에서 $A+(-B)=0$이므로

$$\int_0^4 \{(-x^2+4x)-mx\}dx=\int_0^4 \{-x^2+(4-m)x\}dx=0$$

$$-\frac{64}{3}+8(4-m)=0$$

$$\therefore m=\frac{4}{3}$$

04 답 12

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$를 만족시키므로 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $x^3f(x)$, $xf(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\therefore \int_{-1}^1 (x^3+x+2)f(x)dx=\int_{-1}^1 2f(x)dx$$

$$=4\int_0^1 f(x)dx=12$$

05 답 26

$$\int_{-3}^{10} f(x)dx=\int_{-10}^{3} f(-x)dx=\int_{-7}^{6} f(3-x)dx$$

$$=\int_{-7}^{6} \{4-f(4+x)\}dx$$

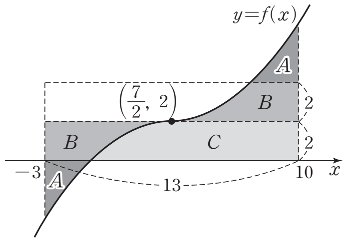
$$=\int_{-7}^{6} 4dx-\int_{-7}^{6} f(4+x)dx$$

$$=52-\int_{-3}^{10} f(x)dx$$

즉, $2\int_{-3}^{10} f(x)dx=52$이므로 $\int_{-3}^{10} f(x)dx=26$

[다른 풀이]

함수 $f(x)$가 $f(3-x)+f(4+x)=4$를 만족시키면 $f(x)$는 점 $\left(\frac{7}{2}, 2\right)$에 대하여 대칭인 함수이고 $\frac{10+(-3)}{2}=\frac{7}{2}$이므로 다음 그림과 같이 각 영역의 넓이를 A, B, C라 하면



$$\int_{-3}^{10} f(x)dx=(-A)+(A+B+C)=B+C$$

$$=\{10-(-3)\}\times 2=26$$

일등급 UP

＊함수의 대칭성과 정적분

① 선대칭함수

• $f(a-x)=f(a+x)$ ⇨ 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭

⇨ $\int_{a-k}^{a+k} f(x)dx=2\int_a^{a+k} f(x)dx$

• $f(a-x)=f(b+x)$ ⇨ 직선 $x=\frac{a+b}{2}$에 대하여 대칭

⇨ $a=b=0$이면 그래프는 y축에 대하여 대칭

② 점대칭함수

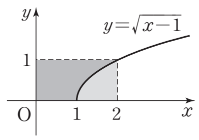
• $f(a-x)+f(a+x)=2b$ ⇨ 그래프는 점 (a, b)에 대하여 대칭

⇨ $\int_{a-k}^{a-k} f(x)dx=2kb$

• $f(a-x)+f(b+x)=c$ ⇨ 그래프는 점 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$에 대하여 대칭

⇨ $a=b=c=0$이면 그래프는 원점에 대하여 대칭

06 답 ②



그림에서 $\int_1^2 \sqrt{x-1}dx=2-\int_0^1 (y^2+1)dy=\frac{2}{3}$

07 답 ④

$t=5$에서의 점 P의 위치 x는

$$x=3+\int_0^5 (6-2t)dt=3+5=8$$

한편, 그때까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^5 |6-2t|dt=\int_0^3 (6-2t)dt+\int_3^5 (2t-6)dt$$

$$=9+4=13$$

$$\therefore x+s=8+13=21$$

08 답 ⑤

$f(t)=\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^t (-x^2+tx)dx+\int_t^1 (x^2-tx)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{t}{2}x^2\right]_0^t+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{t}{2}x^2\right]_t^1$

$=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}$

$f'(t)=t^2-\frac{1}{2}=0$에서 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 극소이면서 최소이다.

09 답 ②

$f(a)=\int_{a-1}^{a+1}|x^2-x|dx$이므로

$f(1)+f(3)=\int_0^2|x^2-x|dx+\int_2^4|x^2-x|dx$

$=\int_0^4|x^2-x|dx$

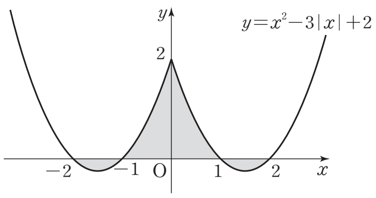
$=\int_0^1 |x^2-x|dx+\int_1^4 |x^2-x|dx$

$=\int_0^1 (x-x^2)dx+\int_1^4 (x^2-x)dx$

$=\frac{1}{6}+\frac{27}{2}=\frac{41}{3}$

10 답 ②

$y=x^2-3|x|+2$의 그래프는 다음과 같다.



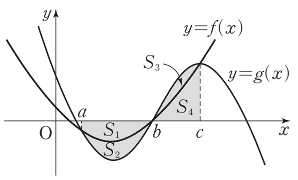
따라서 곡선 $y=x^2-3|x|+2$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$2\left\{\int_0^1 (x^2-3x+2)dx-\int_1^2 (x^2-3x+2)dx\right\}$

$=2\left\{\frac{5}{6}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right\}=2$

11 답 ②

그림과 같이 각 영역의 넓이를 S_1, S_2, S_3, S_4라 하면



$A=\int_a^c |f(x)-g(x)|dx=S_2+S_3$

$B=\int_a^c \{|f(x)|-|g(x)|\}dx$

$=\int_a^c|f(x)|dx-\int_a^c |g(x)|dx$

$=(S_1+S_4)-(S_1+S_2+S_3+S_4)=-(S_2+S_3)$

$C=\left|\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx\right|$

$=\left|\int_a^c f(x)dx-\int_a^c g(x)dx\right|$

$=|(-S_1+S_4)-(-S_1-S_2+S_3+S_4)|$

$=|S_2-S_3|$

$\therefore A>C>B$

12 답 ③

$x^4-2x^2+x-2=x^3+x-2$에서 $x^4-x^3-2x^2=0$

$\therefore x^2(x+1)(x-2)=0$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^2 |x^4-x^3-2x^2|dx$

$=\int_{-1}^0 |x^4-x^3-2x^2|dx+\int_0^2 |x^4-x^3-2x^2|dx$

$=\left|\int_{-1}^0 (x^4-x^3-2x^2)dx\right|+\left|\int_0^2 (x^4-x^3-2x^2)dx\right|$

$=-\int_{-1}^0 (x^4-x^3-2x^2)dx-\int_0^2 (x^4-x^3-2x^2)dx$

$=\frac{13}{60}+\frac{44}{15}=\frac{63}{20}$

13 답 ①

곡선 $y=-x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^2 (-x^2+2x)dx=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$

따라서 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{2}{3}$이다. 또한, 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=mx$에서 $x\{x-(2-m)\}=0$

$\therefore x=2-m$ 또는 $x=0$

즉, $\int_0^{2-m} \{-x^2+(2-m)x\}dx=\frac{(2-m)^3}{6}=\frac{2}{3}$에서

$(2-m)^3=4 \qquad \therefore m=2-\sqrt[3]{4}$

14 답 ②

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 a이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 $3a$인 이차함수이다. 또한, 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가지므로 $f'(x)=3a(x-\alpha)(x-\beta)$

이때, 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$|f(\alpha)-f(\beta)|=\left|\int_\alpha^\beta f'(x)dx\right|$

$=\left|\frac{3a}{6}(\beta-\alpha)^3\right|$

$=\left|\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3\right|$

$\therefore k=2$

15 답 ①

곡선 $y=x^3-4x$ 위의 한 점 $(-1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$3\times(-1)^2-4=-1$이므로 접선의 방정식은

$y=-(x+1)+3=-x+2$

곡선과 접선의 교점의 x좌표는

$x^3-4x=-x+2$에서 $x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\left|\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)dx\right|$$

$$=\left|\int_{-1}^{2}(x^3-3x-2)dx\right|=\frac{27}{4}$$

[다른 풀이 1]

$$S=\left|\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)dx\right|$$

$$=\left|\int_{0}^{3}x^2(x-3)dx\right|$$

$$=\left|\int_{0}^{3}(x^3-3x^2)dx\right|=\frac{27}{4}$$

[다른 풀이 2]

넓이 공식을 이용하면

$$S=\left|\frac{1}{3\times4}\{2-(-1)\}^4\right|=\frac{27}{4}$$

16 답 ①

곡선 $y=x^2-2\alpha x+\alpha^2$과 직선 $y=x-\alpha$의 교점의 x좌표는

$x^2-2\alpha x+\alpha^2=x-\alpha$에서

$x^2-(2\alpha+1)x+\alpha(\alpha+1)=0$

$(x-\alpha)(x-\alpha-1)=0$ $\quad\therefore x=\alpha$ 또는 $x=\alpha+1$

따라서 곡선 $y=x^2-2\alpha x+\alpha^2$과 직선 $y=x-\alpha$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\left|\int_{\alpha}^{\alpha+1}\{x^2-(2\alpha+1)x+\alpha(\alpha+1)\}dx\right|$$

$$=\left|\frac{3\alpha^2+3\alpha+1}{3}-\frac{(2\alpha+1)^2}{2}+\alpha(\alpha+1)\right|=\frac{1}{6}$$

일등급 UP

*** 이차함수의 그래프와 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이**

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 두 점에서 만나는 직선의 교점의 x좌표 α, β의 차가 $|\beta-\alpha|=k$로 일정하면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$와 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\left|\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right|=\frac{|a|}{6}k^3$으로 일정함을 알 수 있다.

17 답 ③

$\int_a^b f(x)dx+\int_{-a}^{-b}f(x)dx=0$에서

$\int_a^b f(x)dx=-\int_{-a}^{-b}f(x)dx$

$\therefore \int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a}f(x)dx$ $\cdots$ ㉠

즉, $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$f(x)=f(-x)$

ㄱ. ㉠에 $a=0$, $b=1$을 대입하면

$\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx$ (참)

ㄴ. $f(x)+f(-x)=0$에서 $f(x)=-f(-x)$이므로 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 되어 조건을 만족시키지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=f(-x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(-x)=-f'(x)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

㉠에 $a=0$, $b=t$를 대입하면

$\int_0^t f(x)dx=\int_{-t}^{0}f(x)dx$

양변을 t에 대하여 미분하면 $f(t)=f(-t)$이므로 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

18 답 ②

$\int_1^3 f(x)dx=a$ $\cdots$ ㉠라 하면 주어진 식은 $f(x)=3x^2+a$

위 식을 ㉠에 적용하면

즉, $\int_1^3(3x^2+a)dx=a$에서 $26+2a=a$

$\therefore a=-26$

따라서 $f(x)=3x^2-26$이고, $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-1}^{-3}f(x)dx=-\int_{-3}^{-1}f(x)dx=-\int_1^3 f(x)dx=26$

19 답 ②

$f(x)=x^5+ax^3+bx+2$에서

$f(x)-2=x^5+ax^3+bx$이므로 $y=f(x)-2$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

즉, $\int_0^2\{f(x)-2\}dx=\int_0^{-2}\{f(x)-2\}dx$이므로

$\int_0^2 f(x)dx-4=\int_0^{-2}f(x)dx+4$

$\therefore \int_0^{-2}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx-8=-3$

20 답 4

조건 (가)에서 $f(4-x)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$$
$$=\int_2^4 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

이므로 조건 (나), (다)에 의하여

$k^2=k+12$에서 $k^2-k-12=0$, $(k-4)(k+3)=0$

$\therefore k=4\ (\because k>0)$

21 답 4

조건 (나)에서 $f(4)=0$이므로 조건 (가)에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f(4)=2$에서 $f(0)=2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_0^4 |f(x)|dx$$
$$=\int_0^4 \{2-f(4-x)\}dx$$
$$=8-\int_0^4 f(4-x)dx$$

x축의 방향으로 -4만큼 평행이동

$$=8-\int_{-4}^0 f(-x)dx$$

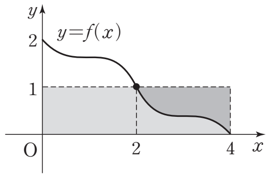
y축에 대하여 대칭이동

$$=8-\int_0^4 f(x)dx$$
$$=8-S$$

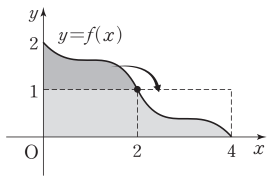
즉, $S=8-S$이므로 $S=4$

[다른 풀이]

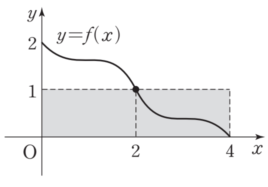
조건 (가)의 $f(x)+f(4-x)=2$에서 함수 $f(x)$가 점 $\left(\frac{x+(4-x)}{2}, \frac{2}{2}\right)$, 즉 $(2, 1)$에 대하여 대칭이므로 조건 (가), (나)를 참고하여 그래프를 그려 보면 다음 그림과 같은 형태이다.



함수 $f(x)$가 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭하므로 [그림 1]과 같이 이동하면 구하는 넓이는 [그림 2]의 직사각형의 넓이와 같다.



[그림 1]



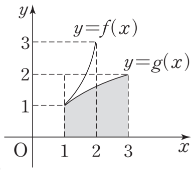
[그림 2]

따라서 구하는 넓이는 $4\times1=4$

22 답 ④

$g(3)=2$에서 $f(2)=3$이므로

$$\int_1^3 g(x)dx=3\times2-1\times1-\int_1^2 f(x)dx$$
$$=5-S$$



23 답 ③

ㄱ. 처음 속도는 0이지만 출발한 위치는 알 수 없다. 속도 $v(t)$의 부호가 바뀌는 순간이 운동 방향이 바뀌는 순간이다. 즉, $t=2$, $t=\frac{7}{2}$에서 두 번 바뀐다. (참)

ㄴ. $\int_0^3 v(t)dt=\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times1\times2=1>0$이므로 3초 후에는 처음 출발한 방향으로 1만큼의 거리를 지나는 중이다. (참)

ㄷ. $\int_0^x v(t)dt=0$을 만족시키는 x의 값이 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

24 답 25

시간 t에서 높이 $h(t)$는 $h(t)=\int v(t)dt$, $h(0)=15$에서

$h(t)=-5t^2+10t+15$이고 물체가 지면에 떨어지는 순간의 시각은

$-5t^2+10t+15=0\qquad \therefore t=3\ (\because t>0)$

따라서 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리 s는

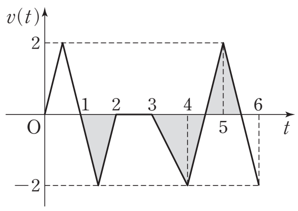
$$s=\int_0^3 |v(t)|dt=10\int_0^3 |1-t|dt$$
$$=10\left\{\int_0^1 |1-t|dt+\int_1^3 |1-t|dt\right\}$$
$$=10\left\{\int_0^1 (1-t)dt+\int_1^3 (t-1)dt\right\}=25$$

25 답 ②

운동 방향을 바꾼 순간은 $v(t)$의 값의 부호가 바뀌는 순간이므로 $t=1$, $t=\frac{9}{2}$, $t=\frac{11}{2}$일 때이다.

따라서 점 P가 움직인 거리는 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같다. 이때, 색칠한 세 삼각형의 높이는 모두 2이므로

$$\frac{1}{2}\times2\times\left(1+\frac{3}{2}+1\right)=\frac{7}{2}$$



26 답 ②

조건 (가)에서

$$\int_0^b f(x)dx+\int_a^c f(x)dx=0$$

$(-S_1+S_2)+(S_2-S_3)=0$

$S_1+S_3=2S_2$

조건 (나)에서 $S_2=6$

$\therefore \int_0^c f(x)dx=-S_1+S_2-S_3=S_2-(S_1+S_3)$

$=S_2-2S_2=-S_2=-6$

[다른 풀이]

조건 (가)에서

$\int_0^b f(x)dx+\int_a^c f(x)dx=0$

$\int_0^a f(x)dx+2\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=0$

$\int_0^c f(x)dx+\int_a^b f(x)dx=0$

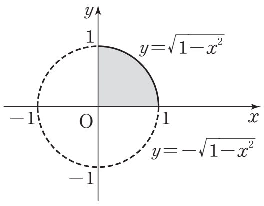
$\therefore \int_0^c f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx=-6$

27 답 ①

$y=\sqrt{1-x^2}$에서 $y^2=1-x^2$, $x^2+y^2=1$

즉, 곡선 $y=\sqrt{1-x^2}$은 원 $x^2+y^2=1$의 위쪽 반원이다.

따라서 그림에서 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$는 반지름의 길이가 1인 원의 $\frac{1}{4}$에 해당하는 부분의 넓이와 같다.



$\therefore \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$

28 답 28

$f(x)\geq 0$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_a^b f(x)dx$이다.

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)(a^2+ab+b^2+1)$이 임의의 실수 b에 대하여 성립하므로 $b=x$를 대입하면

$\int_a^x f(t)dt=(x-a)(a^2+ax+x^2+1)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+1$

$\therefore f(3)=28$

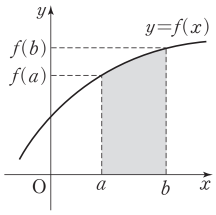
29 답 ④

주어진 부등식을 변형하면

$\int_a^b f(x)dx>\frac{1}{2}(b-a)\{f(a)+f(b)\}$

이때, 좌변 $\int_a^b f(x)dx$는 함수 $f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이이고, 우변 $\frac{1}{2}(b-a)\{f(a)+f(b)\}$는 네 점 $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 꼭짓점으로 하는 사다리꼴의 넓이이다.

따라서 임의의 두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 부등식 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx>\frac{f(a)+f(b)}{2}$를 만족시키려면 그림과 같이 함수 $f(x)$가 항상 위로 볼록한 모양이어야 한다.



[참고]

문제의 두 조건 $a<b$, $f(x)\geq 0$은 생각의 편의를 주기 위한 것일 뿐 두 조건이 없어도 임의의 두 실수 a, b에 대하여 부등식 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx>\frac{f(a)+f(b)}{2}$를 만족시키려면 함수 $f(x)$가 항상 위로 볼록한 모양이어야 한다.

30 답 ①

곡선 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$는 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 공통접선의 기울기는 1이다. 이때, 공통접선의 방정식을 $y=x+k$라 하면

이차방정식 $\frac{1}{2}x^2=x+k$, 즉 $x^2-2x-2k=0$이 중근을 가지므로 $k=-\frac{1}{2}$이고, 중근은 $x=1$이다. 한편, 두 곡선의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$에서 $x=2$

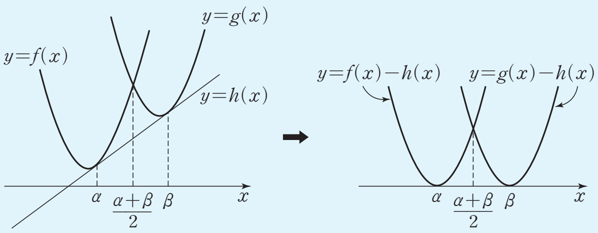
따라서 구하는 넓이는

$2\int_1^2\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx=\int_1^2(x^2-2x+1)dx=\frac{1}{3}$

일등급 UP

＊두 이차함수의 공통접선의 변형

최고차항의 계수가 같은 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 공통접선에 대하여 다음 그림과 같이 변형할 수 있다.



31 답 ②

$f(x)-g(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$이므로

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^2 |x^3-3x^2+2x|dx$

$=\left|\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx\right|+\left|\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx\right|$

$=2\left|\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx\right|=\frac{1}{2}$

32 답 ②

평행이동한 곡선의 방정식은

$y=(x-1)^3+(x-1)+2=x^3-3x^2+4x$이므로 두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^3+x=x^3-3x^2+4x$에서

$3x^2-3x=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=1$

두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\left|\int_0^1 \{(x^3+x)-(x^3-3x^2+4x)\}dx\right|$

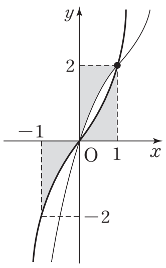
$=3\left|\int_0^1 (x^2-x)dx\right|=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

한편, $\int_0^1 |x^3+x|dx=\frac{3}{4}$이므로 구간 $0\le x\le 1$에서 직선 $y=2x$와 곡선 $y=x^3+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$임을 알 수 있다.

따라서 직선 $y=2x$가 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 이등분한다.

[다른 풀이]

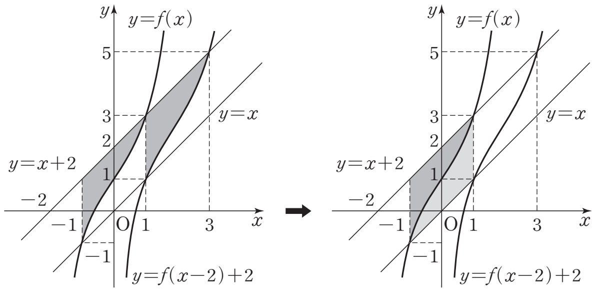
곡선 $y=x^3+x$가 원점에 대하여 대칭이고, 이 곡선을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선은 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이므로 다음 그림에서 색칠한 세 부분의 넓이가 같다.



따라서 두 교점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$를 지나는 직선 $y=2x$에 의하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 이등분된다.

33 답 4

곡선 $y=f(x-2)+2$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고 평행이동하는 방향과 두 직선의 기울기가 같으므로 다음 그림의 두 부분의 넓이는 같다.



따라서 구하는 넓이는 평행사변형의 넓이와 같으므로 4이다.

34 답 1

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 $\sqrt{k}$이므로

$S_1+S_2=\int_0^{\sqrt{k}}(k-x^2)dx+\int_{\sqrt{k}}^2 (x^2-k)dx$

$=\frac{4}{3}k\sqrt{k}-2k+\frac{8}{3}$

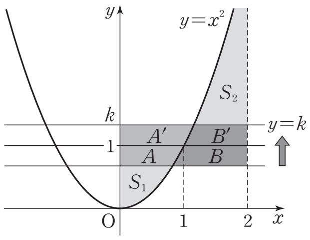
이때, $\sqrt{k}=t$라 하고 $S_1+S_2=f(t)$라 하면

$f(t)=\frac{4}{3}t^3-2t^2+\frac{8}{3} \qquad \therefore f'(t)=4t^2-4t=4t(t-1)$

따라서 $f(t)$는 $t=1$에서 극솟값을 갖는다. 즉, $t=1$일 때, $f(t)$는 최소가 되므로 $k=1$일 때 S_1+S_2의 값이 최소이다.

[참고]

그림과 같이 k의 값이 증가함에 따라 함수 $y=x^2$의 왼쪽에 S_1의 증가량 A, A'이 , 오른쪽에 S의 감소량 B, B'이 나타난다. $y=k$가 $x=1$ (0과 2의 중점)인 점을 지날 때, $A<B$에서 $A'>B'$이 되므로 증가하는 넓이가 감소하는 넓이보다 크다.



즉, $k=1$일 때, S_1+S_2의 값이 최소이다.

35 답 ②

두 곡선 $y=x^3-ax^2+3x-a$, $y=4x^2-4ax+2a$의 교점의 x좌표는

$x^3-ax^2+3x-a=4x^2-4ax+2a$

$x^3-(a+4)x^2+(4a+3)x-3a=0$

$(x-a)(x^2-4x+3)=0$

$(x-a)(x-1)(x-3)=0$

이때, $1<a<3$이고, 두 곡선 $y=x^3-ax^2+3x-a$, $y=4x^2-4ax+2a$로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같으므로

$\int_1^3 \{x^3-(a+4)x^2+(4a+3)x-3a\}dx=0$

$20-\frac{26}{3}(a+4)+4(4a+3)-6a=0$

$\frac{4}{3}a-\frac{8}{3}=0$

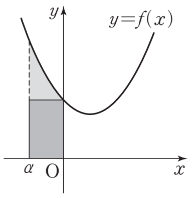
$\therefore a=2$

[참고]

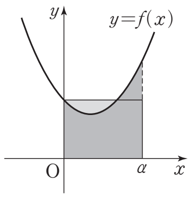
$1<a<3$일 때, 곡선 $y=(x-1)(x-a)(x-3)$과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같을 때는 $a=\frac{1+3}{2}=2$일 때이다.

36 답 3

$f(x)>0$이고 다음 그림에서 $\alpha>0$이다.

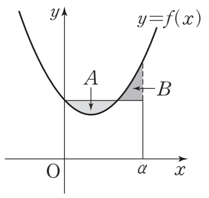


($\alpha<0$일 때)



($\alpha>0$일 때)

오른쪽 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=\alpha$로 둘러싸인 부분의 넓이와 직사각형의 넓이가 같다는 것은 두 부분 A, B의 넓이가 같다는 것이므로



$\int_0^{\alpha}\{f(x)-f(0)\}dx=0$에서

$\int_0^{\alpha}(3x^2-6x)dx=\alpha^3-3\alpha^2=0$, $\alpha^2(\alpha-3)=0$

$\therefore \alpha=3$ ($\because \alpha\neq0$)

[다른 풀이]

곡선 $y=f(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=\alpha$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^{\alpha}f(x)dx=\int_0^{\alpha}(3x^2-6x+4)dx=\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha$

한편, 직사각형의 넓이는 $\alpha f(0)=4\alpha$

두 부분의 넓이가 같으므로 $\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha=4\alpha$에서

$\alpha^2(\alpha-3)=0 \qquad \therefore \alpha=3$ ($\because \alpha\neq0$)

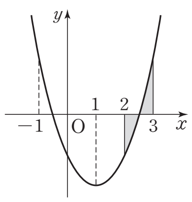
37 답 ③

ㄱ. $\int_2^k f(x)dx=\int_3^k f(x)dx$에서

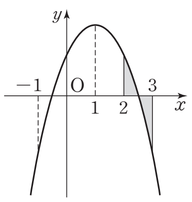
$\int_2^3 f(x)dx+\int_3^k f(x)dx=\int_3^k f(x)dx$

$\therefore \int_2^3 f(x)dx=0$ (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고 $\int_2^3 f(x)dx=0$ ($\because$ ㄱ)이므로 다음 그림과 같이 x축에 의해 나뉘는 색칠한 부분의 넓이가 같다.



또는



즉, $f(2)$와 $f(3)$의 부호가 다르다.

$\therefore f(2)f(3)<0$ (거짓)

ㄷ. $f(2)f(3)<0$이라는 것은 이차방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 한 근이 구간 $(2, 3)$에 존재한다는 것이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대칭이므로 다른 한 근은 구간 $(-1, 0)$에 존재한다.

방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 두 근은 $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-ab}}{a}$이고, 이 두 근은 $2<\frac{a+\sqrt{a^2-ab}}{a}<3$, $-1<\frac{a-\sqrt{a^2-ab}}{a}<0$을 만족시킨다. (참)

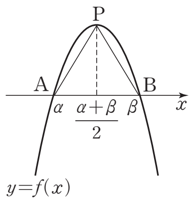
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

38 답 ③

그림에서 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a<0)$의 꼭짓점 P의 y좌표는

$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=-a\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$

따라서 삼각형 PAB의 넓이 S는



$S=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\times\left\{-a\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right\}$

$=-\frac{a}{8}(\beta-\alpha)^3$

한편, 이차함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

이므로

$S=-\frac{a}{8}(\beta-\alpha)^3=\frac{3}{4}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \qquad \therefore k=\frac{3}{4}$

39 답 4

곡선 $y=(x-p)(x-q)$가 점 $(2, -1)$을 지나므로

$-1=(2-p)(2-q)$

$\therefore p=2-\frac{1}{q-2}$

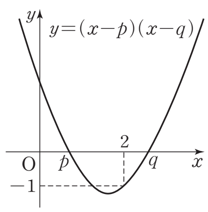
한편, 곡선 $y=(x-p)(x-q)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{6}|q-p|^3=\frac{1}{6}\left|q-\left(2-\frac{1}{q-2}\right)\right|^3$

$=\frac{1}{6}\left|(q-2)+\frac{1}{q-2}\right|^3$

이때, 그림에서 $q>2$

즉, $q-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여



$q-2+\frac{1}{q-2}\geq2\sqrt{(q-2)\times\frac{1}{q-2}}=2$

(단, 등호는 $q=3$일 때 성립)

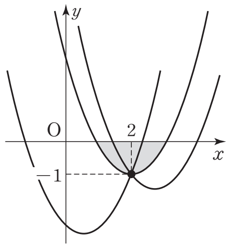
$\frac{1}{6}\left|(q-2)+\frac{1}{q-2}\right|^3\geq\frac{1}{6}\times2^3=\frac{4}{3}$에서 $p=1$, $q=3$일 때, 최솟값 $\frac{4}{3}$를 갖는다.

따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$, $m=\frac{4}{3}$이므로

$m\times\alpha\times\beta=4$

[다른 풀이]

그림에서 곡선 $y=(x-p)(x-q)$는 p, q의 값이 바뀌어도 모양은 일정하게 유지되므로 점 $(2,\ -1)$을 꼭짓점으로 할 때 넓이가 최소가 됨을 알 수 있다.



따라서 $y=(x-2)^2-1=(x-1)(x-3)$에서

$p=1$, $q=3$일 때, 최솟값 $\frac{1}{6}(3-1)^3=\frac{4}{3}$를 갖는다.

40 답 ③

S_1+S_2의 값이 최소가 되려면 $0<t<3$이어야 한다.

한편, 직선 OP, 직선 PA의 방정식이 각각

$y=(4-t)x$, $y=(1-t)x+3t$이므로

$$S_1=\int_0^t\{(-x^2+4x)-(4-t)x\}dx=\frac{1}{6}t^3$$

$$S_2=\int_t^3\{(-x^2+4x)-(x-tx+3t)\}dx=\frac{1}{6}(3-t)^3$$

$$\therefore S_1+S_2=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{6}(3-t)^3=\frac{1}{6}\{t^3-(t-3)^3\}$$

$$=\frac{1}{6}(9t^2-27t+27)=\frac{3}{2}(t^2-3t+3)$$

$$=\frac{3}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$$

따라서 $t=\frac{3}{2}$일 때, S_1+S_2의 값이 최소가 된다.

[참고]

S_1+S_2의 값이 최소가 될 때는 삼각형 OPA의 넓이가 최대가 될 때이고, 삼각형 OPA의 넓이의 최댓값은 곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 $\frac{3}{4}$(문제 38번 참조)이므로 S_1+S_2의 최솟값은

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}(3-0)^3=\frac{9}{8}$$

41 답 ⑤

$$\int_{-1}^1\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^1(x^2+x+1)^2dx$$

$$=\int_{-1}^1(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)dx$$

$$=2\int_0^1(x^4+3x^2+1)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{5}x^5+x^3+x\right]_0^1=\frac{22}{5}$$

$$k\int_{-1}^1 f(x)dx=k\int_{-1}^1(x^2+x+1)dx=2k\int_0^1(x^2+1)dx$$

$$=2k\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{8}{3}k$$

이므로 $\frac{22}{5}=\frac{8}{3}k$에서 $k=\frac{33}{20}$

42 답 8

조건 (가)에서 $g'(0)$의 값이 존재하려면 $f'(0)=0$이어야 한다.

$\therefore b=0$

조건 (나)에서 $h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 $h(x)$는 $x=-3$일 때 최솟값을 갖는 사차함수이므로 $h(x)$는 $x=-3$일 때 극소이다.

$h'(x)=f(x)$에서

$h'(-3)=f(-3)=-27+9a=0 \qquad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2$이므로

$$\int_0^1 f(x)dx+\int_0^3 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^3 f(-x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_{-3}^0 f(x)dx$$

$$=\int_{-3}^1 f(x)dx=\int_{-3}^1(x^3+3x^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_{-3}^1=8$$

43 답 ③

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1(ax^2+c)dx=\frac{2}{3}a+2c$$

$$(\text{우변})=\frac{p}{6}(2a-\sqrt{2}b+c)+\frac{q}{6}c+\frac{r}{6}(2a+\sqrt{2}b+c)$$

$$=\left(\frac{p+r}{3}\right)a+\left(\frac{\sqrt{2}r-\sqrt{2}p}{6}\right)b+\left(\frac{p+q+r}{6}\right)c$$

주어진 식은 a, b, c에 대한 항등식이므로

$$\frac{p+r}{3}=\frac{2}{3},\ \frac{\sqrt{2}r-\sqrt{2}p}{6}=0,\ \frac{p+q+r}{6}=2$$

세 식을 연립하면 $p=1$, $q=10$, $r=1 \qquad \therefore pqr=10$

44 답 7

조건 (가), (나)에서 함수 $f(x)$가 점 $(3,\ 0)$에 대하여 대칭이고 $x<3$일 때 $f(x)<0$, $x>3$일 때 $f(x)>0$임을 알 수 있다.

조건 (다)에서 $\int_0^3\{-f(x)\}dx=\int_3^6 f(x)dx=4$

$$\therefore \int_3^7 f(x)dx=-\int_{-1}^3 f(x)dx$$

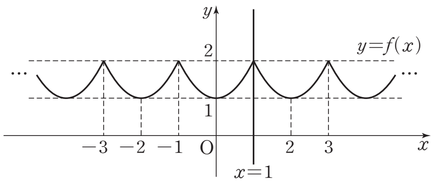
$$=-\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^3 f(x)dx$$

$$=\int_0^{-1} f(x)dx+\int_0^3\{-f(x)\}dx$$

$$=3+4=7$$

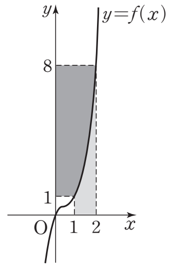
45 답 16

조건 (나), (다)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축과 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 2를 주기로 같은 모양이 반복된다.



$$\therefore \int_{-6}^{6} f(x)dx=6\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx$$
$$=12\int_{0}^{1}(x^2+1)dx$$
$$=12\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1$$
$$=12\times\frac{4}{3}=16$$

46 답 ④



$2x^3-3x^2+2x=1$에서

$2x^3-3x^2+2x-1=0$

$(x-1)(2x^2-x+1)=0$

$\therefore x=1$

$2x^3-3x^2+2x=8$에서

$2x^3-3x^2+2x-8=0$

$(x-2)(2x^2+x+4)=0$

$\therefore x=2$

따라서 $f(1)=1$, $f(2)=8$이므로 그림에서

$$\int_1^8 g(x)dx=2\times8-1\times1-\int_1^2 f(x)dx$$
$$=15-\int_1^2(2x^3-3x^2+2x)dx$$
$$=\frac{23}{2}$$

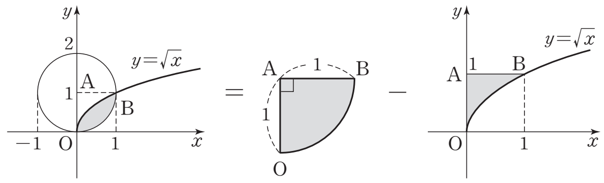
47 답 ②

두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 두 함수의 역함수인 $y=(x-2)^2+1\ (x\geq2)$의 그래프와 직선 $y=x-1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. $y=(x-2)^2+1\ (x\geq2)$의 그래프와 직선 $y=x-1$의 교점이 $(2,\ 1)$, $(3,\ 2)$이므로 구하는 넓이는

$$\int_2^3\{(x-1)-(x^2-4x+5)\}dx=\int_2^3(-x^2+5x-6)dx$$
$$=\frac{1}{6}(3-2)^3$$
$$=\frac{1}{6}$$

48 답 ③

그림과 같이 두 그래프의 교점은 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$이다.



따라서 구하는 넓이는 $\frac{\pi}{4}-\int_0^1 x^2dx=\frac{3\pi-4}{12}$

49 답 1

함수 $f(x)$는 $x\geq0$인 구간에서 증가하는 함수이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $y=f(x)$와 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.

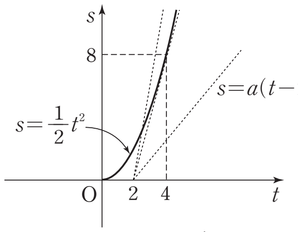
또한, 방정식 $x^n=x$의 두 근이 0, 1이므로

$$S_n=2\int_0^1(x-x^n)dx=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{2}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=1$$

50 답 ③

두 점 P, Q의 t초에서의 속도가 각각 t, a이므로 t초에서의 위치(s)는 각각 $\frac{1}{2}t^2\ (t\geq0)$, $a(t-2)\ (t\geq2)$이다.



또한, 두 그래프가 접할 때, 즉 방정식 $\frac{1}{2}t^2=a(t-2)$가 중근을 가지므로 판별식 $D=0$에서 $a=4\ (\because a>0)$ … ㉠

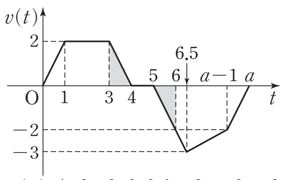
ㄱ. 그림에서 $t=2$일 때, 점 Q는 출발하고, 점 P의 위치는 2이다. (참)

ㄴ. $a=2$이면 ㉠에서 근이 존재하지 않으므로 만나지 않는다. (참)

ㄷ. $a=4$이면 ㉠에서 중근을 가지므로 한 점에서 만나지만 추월하지는 못한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

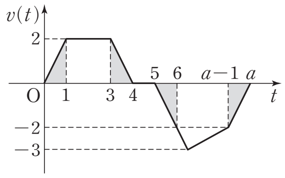
51 답 ③



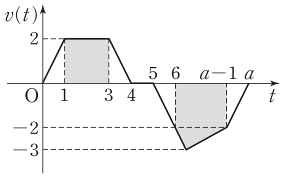
ㄱ. 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 같으므로 점 P는 출발 후 3초일 때와 6초일 때 같은 위치에 있다. (참)

ㄴ. 점 P는 출발 후 6.5초일 때 속력($|v(t)|$)이 최댓값을 갖는다. 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있을 때는 출발 후 4초일 때이다. (거짓)

ㄷ. [그림 1]에서 색칠한 부분의 넓이가 같으므로 [그림 2]의 색칠한 부분의 넓이가 같을 때, 점 P는 원점에 위치한다.



[그림 1]



[그림 2]

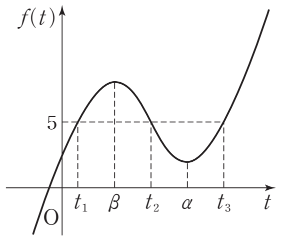
즉, $4 \le 2(a-7)+\frac{1}{2}(a-7)$에서 $a \ge 8.6$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

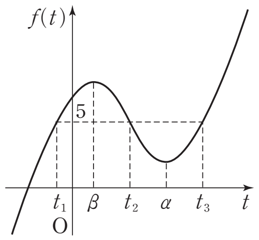
52 답 ②

ㄱ. 함수 $f(t)$가 $t=2$에서 극댓값 3을 가지면 이 물체는 $t=2$일 때 눈금이 3인 지점에서 왔던 길을 되돌아간다. (거짓)

ㄴ. $f'(t)=(t-\alpha)(t-\beta)$이면 함수 $f(t)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고, 그래프의 개형은 다음과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서는 눈금이 5인 지점을 t가 t_1, t_2, t_3일 때 세 번 지나지만 [그림 2]에서는 t가 t_2, t_3일 때 두 번만 지나므로 눈금이 5인 지점을 항상 3회 통과하지는 않는다. (거짓)

ㄷ. $t=a$일 때부터 $t=b$일 때까지 물체의 위치의 변화량은

$\int_a^b f'(t)dt=f(b)-f(a)$이고, 물체가 실제로 움직인 거리는

$\int_a^b |f'(t)|dt$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

53 답 3

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 또는 y축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같으므로

$\int_0^a (x-1)(x-a)dx=0$ ---------- ⓐ

$$\int_0^a (x-1)(x-a)dx=\int_0^a \{x^2-(a+1)x+a\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a+1}{2}x^2+ax\right]_0^a$$
$$=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{2}a^2$$

에서 $-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{2}a^2=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>1$) ---------- ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ $\int_0^a (x-1)(x-a)dx=0$임을 안다. [50%]

ⓑ a의 값을 구한다. [50%]

54 답 2

$f(1)=5$, $f(2)=14$이므로

$$\int_5^{14} g(x)dx=2\times14-1\times5-\int_1^2 (3x^2+2)dx$$
$$=23-9=14$$ ---------- ⓐ

$f(x)=\int_5^{14} g(x)dx$에서 $3x^2+2=14$

$\therefore x=2$ ($\because x\ge0$) ---------- ⓑ

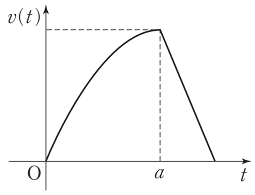
| 채점기준 |

ⓐ $\int_5^{14} g(x)dx$의 값을 구한다. [50%]

ⓑ 방정식을 만족시키는 x의 값을 구한다. [50%]

55 답 110

그림과 같이 포물선의 꼭짓점의 좌표를 $(a, v(a))$라 하면 포물선의 방정식은 꼭짓점을 $(a, v(a))$로 하고 원점을 지나므로



$v(t)=kt(t-2a)=kt^2-2akt$

$(k<0)$이고 원점에서 80의 거리에 있을 때 최고 속도를 냈으므로

$\int_0^a (kt^2-2akt)dt=80$에서 $-\frac{2}{3}ka^3=80$

$\therefore ka^3=-120$ ---------- ⓐ

한편, $v(a)=ka^2-2ka^2=-ka^2$이고 속도가 증가하는 시간과 속도가 감소하는 시간의 비율이 $2:1$에서 직선의 x절편은 $\frac{3}{2}a$이므로

직선과 x축 사이의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}a-a\right)\times(-ka^2)=-\frac{1}{4}ka^3=30$ ---------- ⓑ

따라서 이 물체가 움직인 총 거리는 $80+30=110$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

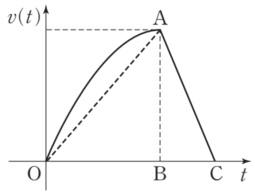
ⓐ 포물선의 꼭짓점을 $(a, v(a))$로 놓고 방정식을 세워 관계식을 구한다. [40%]

ⓑ 직선과 x축 사이의 넓이를 구한다. [40%]

ⓒ 물체가 움직인 총 거리를 구한다. [20%]

[다른 풀이]

오른쪽 그림에서 포물선 아래 부분과 △AOB의 넓이의 비가 $4:3$이므로



△AOB의 넓이는 $80\times\frac{3}{4}=60$

△AOB와 △ABC의 넓이의 비가 $2:1$이므로 △ABC의 넓이는 $60\times\frac{1}{2}=30$

따라서 이 물체가 움직인 총 거리는 $80+30=110$

56 답 45

$f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라 하자.

조건 (가)에 의하여

$\int_0^2 |f(x)|dx=4$, $\int_0^2 f(x)dx=-4$이므로 구간 $[0,\ 2]$에서

$f(x)\leq0$이다.

또한, 조건 (나)에 의하여

$\int_2^3 |f(x)|dx=\int_2^3 f(x)dx$이므로 구간 $[2,\ 3]$에서 $f(x)\geq0$이다.

따라서 $f(2)=0$이므로 $f(2)=4a+2b=0$

$\therefore b=-2a$

즉, $f(x)=ax^2-2ax$이므로

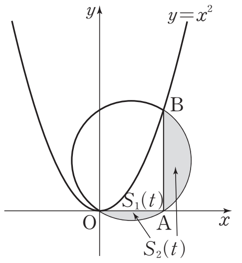
$$\int_0^2 (ax^2-2ax)dx=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2\right]_0^2=\frac{8}{3}a-4a=-\frac{4}{3}a=-4$$

$\therefore a=3$

따라서 $f(x)=3x^2-6x$이므로

$f(5)=3\times5^2-6\times5=75-30=45$

57 답 13



세 점 $O(0,\ 0)$, $A(t,\ 0)$, $B(t,\ t^2)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB는 직각삼각형이므로 원 C의 반지름의 길이 r는

$$r=\frac{1}{2}\overline{OB}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}$$

그림에서 $S_2(t)$의 넓이는

$S_2(t)=$(반원의 넓이)$-$(직각삼각형 OAB의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\right)^2-\frac{1}{2}\times t\times t^2$$

$$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3$$

그림에서 $S_1(t)$의 넓이는

$$S_1(t)=\int_0^t x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3$$

따라서 구하는 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=S_1(t)+S_2(t)=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{3}t^3$$

$$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{6}t^3$$

$$S'(t)=\frac{1}{8}(2t+4t^3)\pi-\frac{1}{2}t^2$$

$$\therefore S'(1)=\frac{1}{8}(2+4)\pi-\frac{1}{2}=\frac{3\pi-2}{4}$$

따라서 $p=3$, $q=-2$이므로 $p^2+q^2=9+4=13$

58 답 ①

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$이므로 다항함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $h(0)=0$이다.

$h(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x$로 놓으면

$h'(x)=(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_1$

이므로 $h'(-x)=h'(x)$를 만족시킨다.

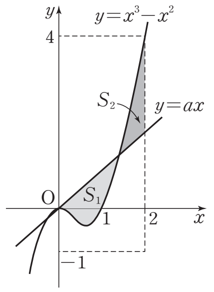
$$\int_{-3}^3 \{xh'(x)+5h'(x)\}dx=2\int_0^3 5h'(x)dx=10\Big[h(x)\Big]_0^3$$

$$=10\{h(3)-h(0)\}=10$$

$\therefore h(3)=h(0)+1=0+1=1$

59 답 200

영역 A와 영역 C의 넓이가 같으므로 $S_1=S_2$



$\int_0^2 (x^3-x^2-ax)dx=0$에서 $a=\frac{2}{3}$

따라서 $300a=200$

60 답 3

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$g'(1)=\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

조건 (가)에서 $1<x<2$일 때, $g(x)=f(2-x)$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}$$

$$=-\lim_{x\to1+}\frac{f(2-x)-f(1)}{(2-x)-1}$$

$$=-f'(1)$$

즉, $f'(1)=-f'(1)$에서 $f'(1)=0$ $\cdots$ ㉠

또, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$g'(0)=\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

$-1<x<0$일 때, $1<x+2<2$이고

$g(x)=g(x+2)=f(2-(x+2))=f(-x)$이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f(-x)-f(0)}{x}$$

$$=-\lim_{x\to0-}\frac{f(-x)-f(0)}{(-x)-0}=-f'(0)$$

즉, $f'(0)=-f'(0)$에서 $f'(0)=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f'(x)=3x(x-1)=3x^2-3x$이므로

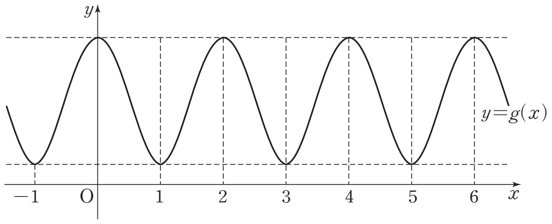
$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

함수 $g(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$g(6)-g(3)=g(0)-g(1)=f(0)-f(1)$

$$=C-\left(1-\frac{3}{2}+C\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 $p+q=2+1=3$



61 답 35

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x & (x\le 0)\\ x^2-2x & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$f(x+1)=\begin{cases}-x^2-4x-3 & (x\le -1)\\ x^2-1 & (x\ge -1)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & \left(x\le -\frac{3}{2}\right)\\ f(x+1) & \left(-\frac{3}{2}\le x\le 0\right)\\ f(1) & (0\le x\le 1)\\ f(x) & (x\ge 1)\end{cases}$$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\{f(x)-f(x+1)\}dx+\int_0^1\{f(x)-f(1)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{3}{2}}^{-1}\{(-x^2-2x)-(-x^2-4x-3)\}dx$$

$$+\int_{-1}^{0}\{(-x^2-2x)-(x^2-1)\}dx$$

$$+\int_0^1\{(x^2-2x)-(-1)\}dx$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{23}{12}$$

$\therefore p+q=12+23=35$

62 답 4

$$\int_{-2}^{2}|f(x)|dx=\int_{-2}^{0}|f(x)|dx+\int_0^2|f(x)|dx$$

$$=\int_0^2|f(x-2)|dx+\int_0^2|f(x)|dx \quad \cdots ㉠$$

이때, 조건 (나)의 양변에 x 대신 $x-2$를 대입하면

$f(x)=f(x-2)+2$ $\quad\therefore f(x-2)=f(x)-2$

이 식을 ㉠에 대입하면

$$\int_{-2}^{2}|f(x)|dx=\int_0^2|f(x)-2|\,dx+\int_0^2|f(x)|dx$$

$0\le x<2$에서 $0\le f(x)<2$이므로

$$\int_{-2}^{2}|f(x)|dx=\int_0^2\{2-f(x)\}dx+\int_0^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^2 2dx=4$$

63 답 20

구간 $0\le t\le 2$에서 $f(t)\ge g(t)$이므로

$$h(x)=\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt$$

$h'(x)=f(x)-g(x)$이므로 $y=h(x)$의 그래프 위의 점

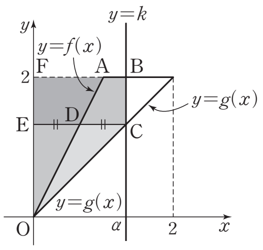
$(\alpha, h(\alpha))$에서의 접선의 방정식은

$y=h'(\alpha)(x-\alpha)+h(\alpha)=\{f(\alpha)-g(\alpha)\}(x-\alpha)+h(\alpha)$

이 직선이 원점을 지나므로

$\alpha\{f(\alpha)-g(\alpha)\}=h(\alpha)$

이것은 다음 그림에서 사각형 OABC와 사각형 ECBF의 넓이가 같다는 것이다. 사각형 DABC가 공통부분이고 $\overline{\mathrm{ED}}=\overline{\mathrm{DC}}$이므로 $\triangle\mathrm{OCD}=\triangle\mathrm{ODE}=\square\mathrm{EDAF}$이다.



$\triangle\mathrm{OED}\backsim\triangle\mathrm{OFA}$ (AA 닮음)이고 $\triangle\mathrm{OFA}=2\triangle\mathrm{OED}$이므로

$\overline{\mathrm{OE}}^2:\overline{\mathrm{OF}}^2=1:2$에서 $\overline{\mathrm{OE}}=\sqrt{2}$이다. 즉, $\alpha=\overline{\mathrm{OE}}=\sqrt{2}$

따라서 $10\alpha^2=20$

64 답 17

조건 (가)에 의하여 $f(0)=0$

조건 (나)에 $x=0$을 대입하면 $f(1)=f(0)+1=1$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$에서 $a=1$

함수 $f(x)$가 연속함수이므로 임의의 실수 n에 대하여

$$\int_{n+1}^{n+2}f(x)dx=\int_n^{n+1}f(x+1)dx=\int_n^{n+1}\{f(x)+1\}dx$$

$$=\int_n^{n+1}f(x)dx+1$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+1$$

$$\int_2^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+1=\int_0^1 f(x)dx+2$$

$$\vdots$$

$$\int_5^6 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+5$$

이므로

$\int_0^6 f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\cdots+\int_5^6 f(x)dx$

$=6\int_0^1 f(x)dx+(1+2+3+4+5)$

$=6\int_0^1 f(x)dx+15$

한편, $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$이므로

$\int_0^6 f(x)dx=6\int_0^1 f(x)dx+15=17$

65 답 ③

$S_2(t)+S_4(t)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$ $\cdots$ ㉠

$S_1(t)+S_3(t)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ $\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$S_2(t)+S_4(t)-S_1(t)-S_3(t)=-\frac{1}{3}$

$S_2(t)-S_3(t)=S_1(t)-S_4(t)-\frac{1}{3}$

$\therefore y=|S_1(t)-S_4(t)|+|S_2(t)-S_3(t)|$

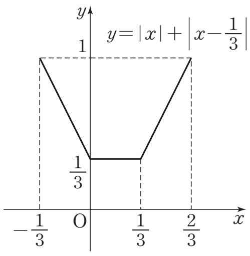
$\quad=|S_1(t)-S_4(t)|+\left|S_1(t)-S_4(t)-\frac{1}{3}\right|$

이때, $S_1(t)-S_4(t)=x$라 하면

$y=|x|+\left|x-\frac{1}{3}\right|$

$\left(-\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}\right)$

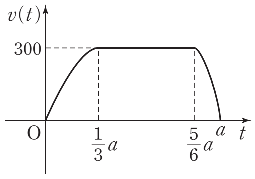
이고 그래프는 그림과 같다.



따라서 $0\le x\le\frac{1}{3}$일 때, 최솟값 $\frac{1}{3}$을 갖는다.

66 답 ②

전체 운행시간을 a시간이라 하면 가속구간은 $\frac{1}{3}a$시간, 감속구간은 $\frac{1}{6}a$시간이므로 속도 그래프를 시간별로 나누어 보면 다음 그림과 같다.



가속할 때와 감속할 때의 속도 그래프는 각각 점 $\left(\frac{1}{3}a,\ 300\right)$, 점 $\left(\frac{5}{6}a,\ 300\right)$을 꼭짓점으로 하는 포물선이고 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 이동거리이므로

$\frac{2700}{a^2}\int_0^{\frac{1}{3}a} t\left(\frac{2}{3}a-t\right)dt+150a$

$\quad+\frac{10800}{a^2}\int_{\frac{5}{6}a}^{a}\left(t-\frac{2}{3}a\right)(a-t)dt=250$

$\frac{1}{2}\times\frac{2700}{a^2}\times\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}a-0\right)^3+150a$

$\quad+\frac{1}{2}\times\frac{10800}{a^2}\times\frac{1}{6}\left(a-\frac{2}{3}a\right)^3=250$

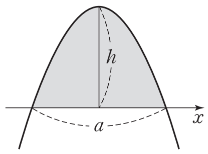
$\frac{200}{3}a+150a+\frac{100}{3}a=250$

$250a=250$

$\therefore a=1$

[다른 풀이]

그림과 같이 포물선의 넓이 공식을 이용하면 간단히 계산할 수 있다.

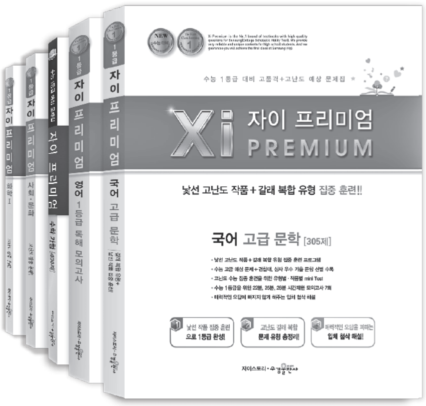


(포물선의 넓이)$=\frac{2}{3}ah$

따라서 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}a\times300+150a+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}a\times300=250$

"신유형+고난도 유형 집중 훈련!!"

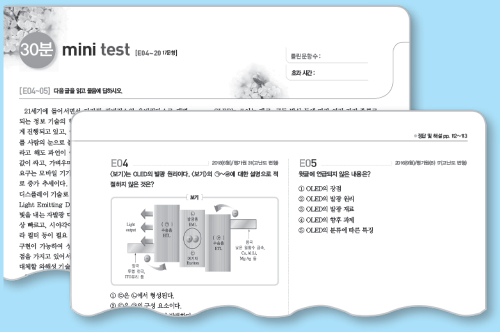


1등급을 위한 완벽 훈련서

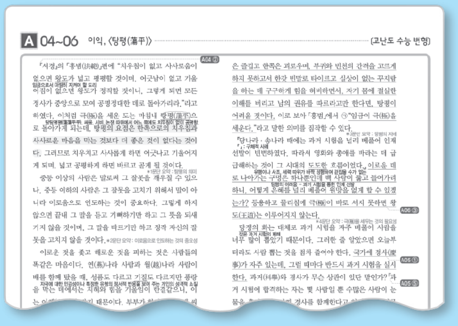
자이 프리미엄

- 경찰대, 사관학교, 리트 우수기출 문제 수록
- 수능 1등급을 위한 고품격 문제들만을 엄선 수록

❶ 신유형 + 고난도 유형 집중 훈련



❷ 다시는 안 틀리게 하는 입체 첨삭 해설



★ 국어 고급 독서 [303제]

- 1등급 유형과 제재 분석 및 풀이 비법 수록
- 경찰대 + 삼사 + LEET 우수 기출 문제 선별
- 난이도별 15분, 20분, 30분, 35분, mini test
- 1등급 수능 실전 27분, 29분 시간 제한 모의고사

★ 영어 1등급 유형 독해 [364제]

- 1등급 필수 8개 유형 집중 훈련
- 최신 경찰대 + 삼사 기출문제 수록
- 1등급 고난도 문제 특별 예상 문제 수록
- 1등급 독해 유형 모의고사 4회(16문항)

★ 수학 고급 가형 · 나형 [400제]

- 1등급 고난도 경향 분석 및 개념 체크
- 경찰대+ 삼사 우수 문항 + 예상 문제
- 1등급 마스터 – 최고난도 21번, 29번, 30번 대비
- 수능 1등급 실전 고난도 모의고사

★ 국어 고급 문학 [305제]

- 1등급 유형과 작품 분석 및 풀이 비법 수록
- 경찰대 + 삼사 우수 기출 문제 선별
- 난이도별 12분, 15분, 17분, 19분, 24분, 30분, 34분 mini test
- 1등급 수능 실전 22분, 25분, 28분 시간 제한 모의고사

★ 영어 1등급 독해 모의고사 [10회]

- 1등급 수능 출제 기준에 맞춘 모의고사
- 최신 경찰대+ 삼사 기출문제 수록
- 다시는 틀리지 않게 부족한 개념을 완벽 보충하는 입체 첨삭 해설

★ 생활과 윤리, 사회 · 문화 [221제]
★ 생명과학 I , 화학 I , 지구과학 I [220제]

- 최신 출제 고난도 개념 완벽 정리
- 1등급 킬러 문제 특별 공략법 제시
- 고난도 유형 훈련을 위한 단계별 접근법 수록
- 고난도 실전 프리미엄 모의고사 3회