THE FIRST CLASS MATHEMATICS

일등급 수학 · 확률과 통계

[해설편]

Ⅰ 경우의 수

Ⅱ 확률

Ⅲ 통계

빠른 정답 찾기

I 경우의 수

01 순열과 조합

01 ②	02 12	03 ①	04 96
05 60	06 144	07 ④	08 ②
09 ②	10 24	11 131	12 ②
13 ⑤	14 ②	15 700	16 16
17 165	18 166	19 126	20 48
21 ②	22 150	23 ①	24 840
25 11	26 1215	27 216	28 ④
29 ④	30 104	31 128	32 ⑤
33 13	34 126	35 180	36 30
37 240	38 ③	39 ③	40 100
41 ③	42 ④	43 15	44 30
45 240	46 ⑤	47 21	48 120
49 ③	50 189	51 ④	52 300
53 30	54 153	55 28	56 ②
57 ④	58 32	59 ②	60 13
61 65	62 ②	63 60	64 200
65 336	66 70		

02 이항정리

01 ①	02 20	03 ④	04 ①
05 9	06 ④	07 72	08 ⑤
09 28	10 ⑤	11 240	12 ④
13 ⑤	14 ④	15 ②	16 165
17 ③	18 ②	19 ④	20 ④
21 6	22 ③	23 50	24 ⑤
25 ④	26 ②	27 19	28 ②
29 265	30 660	31 ④	32 ⑤
33 172	34 ②	35 ④	36 ⑤
37 216	38 21	39 98	40 3
41 ②	42 12	43 ⑤	44 ③
45 ④	46 ②	47 ②	48 ②
49 ②			

Ⅱ 확률

03 확률의 뜻과 활용

01 ②	02 310	03 ③	04 ④
05 ②	06 ⑤	07 ②	08 ⑤
09 ⑤	10 (1) 57 (2) 해설 참조	11 ③	
12 ②	13 ②	14 ⑤	15 ⑤
16 ④	17 ②	18 ①	19 ④
20 20	21 71	22 ③	23 6
24 467	25 163	26 25	27 ③
28 76	29 ②	30 13	31 68
32 312	33 8	34 53	35 11
36 ①	37 19	38 ⑤	39 ①
40 78	41 ③	42 ②	43 48
44 ⑤	45 186		

04 조건부확률

01 ②	02 ②	03 ③	04 ②
05 162	06 ②	07 55	08 ②
09 ②	10 29	11 ①	12 ④
13 ⑤	14 ④	15 ②	16 6
17 ④	18 ④	19 85	20 ⑤
21 ③	22 8	23 3	24 ②
25 ②	26 2	27 ③	28 ②
29 ④	30 10	31 ⑤	32 ②
33 19	34 ②	35 ④	36 ①
37 ②	38 ②	39 ④	40 25
41 15	42 679	43 ⑤	44 50
45 ④	46 ③	47 ③	48 ③
49 ④	50 ⑤	51 95	

Ⅲ 통계

05 확률분포

01 ③	02 ②	03 ①	04 73
05 ③	06 19	07 ③	08 250
09 ⑤	10 ①	11 2	12 ⑤
13 2	14 5	15 ②	16 190
17 ③	18 ④	19 100	20 10
21 ②	22 2	23 4	24 ①
25 16	26 24	27 ③	28 ②
29 ⑤	30 1	31 25	32 30
33 ③	34 ②	35 108	36 25
37 ⑤	38 25	39 5	40 ②
41 ④	42 18	43 60	44 40
45 ⑤	46 20	47 28	48 ⑤
49 ①	50 197	51 ⑤	52 ②
53 5	54 20	55 80	

06 정규분포

01 ③	02 14	03 3	04 ②
05 ②	06 85	07 ③	08 ④
09 157	10 15	11 24	12 5
13 2	14 450	15 79	16 ①
17 16	18 ②	19 2	20 ③
21 ①	22 6	23 16	24 ⑤
25 ③	26 ③	27 ③	28 116
29 ②	30 50	31 ②	32 ②
33 ②	34 ②	35 ②	36 ④
37 ②	38 80	39 49	40 16
41 62	42 155	43 ②	44 ④
45 ⑤	46 ②	47 117	48 ⑤
49 63	50 ③	51 533	

07 통계적 추정

01 ⑤	02 ④	03 ②	04 ④
05 ③	06 ④	07 ③	08 ③
09 ⑤	10 98	11 ④	12 256
13 12	14 ①	15 ④	16 64
17 385	18 ①	19 ①	20 ②
21 ④	22 ③	23 ③	24 ②
25 ⑤	26 ③	27 ④	28 19
29 ⑤	30 ③	31 ②	32 ③
33 ③	34 ③	35 ③	36 ⑤
37 ④	38 261	39 27	40 36
41 ①	42 ③	43 ⑤	44 ④
45 12	46 99	47 ③	48 ③
49 17	50 20		

I 경우의 수

01 순열과 조합

문제편 9P

01 답 ②

A, B를 한 묶음으로 보고 (A, B), C, D, E를 원형으로 배열하는 방법의 수는 $\frac{4!}{4}=6$

(A, B)가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\times2=12$

02 답 12

C, D, E, F를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $4!$

회전하였을 때 같은 배열이 되는 경우의 수는 2

따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{4!}{2}=12$

03 답 ①

${}_4\Pi_5=4^5=1024$

04 답 96

a끼리 이웃하는 경우의 수는 (a, a)를 한 묶음으로 보고 (a, a), b, b, c, d를 배열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!}=60$

b끼리 이웃하는 경우의 수는 (b, b)를 한 묶음으로 보고 a, a, (b, b), c, d를 배열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!}=60$

a끼리 이웃하고 b끼리도 이웃하는 경우의 수는 둘 다 한 묶음으로 보고 (a, a), (b, b), c, d를 배열하는 방법의 수와 같으므로

$4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는 $60+60-24=96$

05 답 60

방정식 $x+y+z=20$에서

(i) $x\ge0$, $y\ge0$, $z\ge0$일 때

$a={}_3H_{20}={}_{22}C_{20}={}_{22}C_2=\frac{22\times21}{2\times1}=231$

(ii) $x\ge1$, $y\ge1$, $z\ge1$일 때 $x-1=x'$, $y-1=y'$, $z-1=z'$이라 하면 $x+y+z=20$에서 $x'+y'+z'=17$이고, $x'\ge0$, $y'\ge0$, $z'\ge0$이므로

$b={}_3H_{17}={}_{19}C_{17}={}_{19}C_2=\frac{19\times18}{2\times1}=171$

$\therefore a-b=231-171=60$

06 답 144

서로 다른 4개의 상자 중 빈 상자 하나를 택하는 경우의 수는 4이고, 빈 상자가 아닌 서로 다른 3개의 상자에 넣은 공의 개수를 각각 a, b, c라 하자.

공을 넣는 경우의 수는 방정식 $a+b+c=10$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

따라서 구하는 경우의 수는 $4\times36=144$

07 답 ④

서로 다른 음료수 5개를 2개, 2개, 1개로 묶는 방법의 수는

${}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=15$

세 묶음을 A, B, C 3명에게 나누어 주는 방법의 수는

$15\times3!=90$

08 답 ②

정중앙 영역에 칠하는 경우의 수는 ${}_9C_1$

정사각형 외부의 네 원의 네 영역에 네 가지 색을 택하여 칠하는 경우의 수는 ${}_8C_4\times(4-1)!$

정사각형 내부의 네 원의 네 영역에 나머지 색을 칠하는 경우의 수는 $4!$

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_9C_1\times{}_8C_4\times3!\times4!=9\times\frac{8\times7\times6\times5}{4!}\times3!\times4!$$
$$=9\times8\times7\times6\times5\times3!=\frac{9!}{4}$$

09 답 ②

A회사 임원 6명 중 3명을 선택하여 원순열로 배치한 후 B회사 임원 5명 중 3명을 선택하여 A회사 임원 사이에 앉히면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 ${}_6C_3\times(3-1)!\times{}_5P_3=2400$

10 답 24

(i) 두 가지 색을 사용하는 경우

두 가지 색을 선택하는 방법의 수는 ${}_4C_2$이고, 두 가지 색을 회전판에 색칠하는 방법은 한 가지뿐이므로 방법의 수는 ${}_4C_2\times1=6$

(ii) 세 가지 색을 사용하는 경우

세 가지 색을 선택하는 방법의 수는 ${}_4C_3$,

그 중 두 번 칠할 색을 선택하는 경우는 ${}_3C_1$가지이다.

이때, 세 가지 색을 선택하여 회전판에 색칠하는 방법은 한 가지 뿐이므로 방법의 수는 ${}_4C_3\times{}_3C_1\times1=12$

(iii) 네 가지 색을 사용하는 경우

원순열의 경우와 같으므로 색칠하는 방법의 수는 $(4-1)!=6$

(i), (ii), (iii)에 의하여 색칠하는 방법의 수는

$6+12+6=24$

11 답 131

서로 다른 과일 5개를 세 그릇 A, B, C에 남김없이 담는 방법의 수는 ${}_3\Pi_5=3^5=243$

(ⅰ) 그릇 A에 1개의 과일만 담는 방법의 수

과일 1종류를 선택하는 방법이 ${}_5C_1$가지이고, 나머지 과일 4개를 B, C 그릇에 담는 방법이 ${}_2\Pi_4=2^4$(가지)이므로 $5\times16=80$

(ⅱ) 그릇 A에 과일을 담지 않는 방법의 수

과일 5개를 B, C 그릇에 담는 방법의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 방법의 수는 $243-80-32=131$

12 답 ②

(ⅰ) 1, 2, 3을 사용하여 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

3^5 ⋯ ㉠

(ⅱ) 2, 3을 사용하여 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

2^5 ⋯ ㉡

(ⅲ) 1, 3을 사용하여 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는

2^5 ⋯ ㉢

1과 2를 반드시 포함하는 경우는 ㉠에서 ㉡, ㉢을 제외하는 경우이다.

이때, 33333은 ㉡, ㉢에 모두 포함되므로 구하는 자연수의 개수는

$3^5-(2^5+2^5-1)=180$

13 답 ⑤

2층에서 10층까지 9개의 층에 6명이 내리는 총 방법의 수는 2, 3, ⋯, 10의 9개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_9\Pi_6=9^6$

이때, 철수와 영희가 같은 층에 내리는 방법의 수는 철수와 영희를 한 묶음으로 보면 되므로 ${}_9\Pi_5=9^5$

따라서 구하는 방법의 수는 $9^6-9^5=8\times9^5$

14 답 ②

일곱 개의 문자 a, a, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{7!}{2!2!3!}=210$

(ⅰ) a, a가 이웃하는 경우

a, a를 하나의 묶음으로 하여 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!3!}=60$

(ⅱ) b, b가 이웃하는 경우

(ⅰ)과 마찬가지 방법으로 하면 구하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!3!}=60$

(ⅲ) a, a와 b, b가 각각 이웃하는 경우

a, a와 b, b를 각각 한 묶음으로 하여 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!}=20$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$210-(60+60-20)=110$

15 답 700

파란 공 3개와 노란 공 3개를 먼저 나열한 후 양 끝과 사이 7곳 중 3곳을 택하여 빨간 공을 배치하면 된다.

파란 공 3개와 노란 공 3개를 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{6!}{3!3!}=20$

양 끝과 사이 7곳 중 3곳을 택하는 방법의 수는 ${}_7C_3=35$

따라서 구하는 방법의 수는 $20\times35=700$

16 답 16

9의 배수는 모든 자릿수의 합이 9의 배수이다.

1, 2, 3에서 중복을 허락하여 택한 4개의 수의 합은 최대 12이므로 4개의 수의 합이 9인 경우만 조사하면 (1, 2, 3, 3), (2, 2, 2, 3)의 2가지이다.

(1, 2, 3, 3)을 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

(2, 2, 2, 3)을 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

따라서 네 자리 자연수 중 9의 배수의 개수는 $12+4=16$

17 답 165

각 자리의 숫자의 합이 9가 되는 자연수의 개수는 서로 다른 4개의 상자에 9개의 공을 넣는 방법의 수와 같다. 이때, 천의 자리의 숫자가 0이 되지 않아야 하므로 천의 자리에 한 개의 공을 먼저 넣고 4개의 상자에 8개의 공을 중복을 허락하여 넣는 방법의 수와 같다.

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

${}_4H_8={}_{4+8-1}C_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

18 답 166

(ⅰ) 방정식 $x+y+z=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 x, y, z 중에서 중복을 허락하여 9개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$a={}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

(ⅱ) 부등식 $x+y+z<9$를 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 자연수 w에 대하여 방정식 $x+y+z+w=9$를 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수와 같다. 또한, 방정식 $x+y+z+w=9$를 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 방정식 $x'+y'+z'+w'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z', w'의 모든 순서쌍 (x', y', z', w')의 개수와 같으므로

$b={}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

(ⅲ) $(x+y+z)^9$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 x, y, z 중에서 중복을 허락하여 9개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$c={}_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$a+b+c=55+56+55=166$

19 답 126

빨간 구슬 5개를 서로 다른 세 상자에 나누어 넣는 방법은 서로 다른 세 상자에서 빨간 구슬을 넣을 상자를 5회 뽑는 것이므로 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 뽑는 중복조합과 같다. 즉, 방법의 수는

${}_{3}H_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$

마찬가지로 흰 구슬 2개를 서로 다른 세 상자에 넣는 방법의 수는

${}_{3}H_{2}={}_{4}C_{2}=6$

빨간 구슬을 넣는 방법과 흰 구슬을 넣는 방법은 서로 독립이므로 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $21\times6=126$

20 답 48

학생회장과 2명의 부회장을 한 묶음으로 생각한 원순열의 수는 $(5-1)!$

이때, 2명의 부회장이 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 구하는 경우의 수는 $(5-1)!\times2=48$

21 답 ②

(i) 정사각형의 각 영역을 칠하는 방법의 수는

직순열의 수 $8!$이다.

이때, 회전하였을 때 같은 배열이 되는 경우의 수는 4이므로

$a=\dfrac{8!}{4}=2\times7!$

(ii) 원의 영역을 칠하는 방법의 수는

$b=(8-1)!=7!$

$\therefore a-b=7!$

22 답 150

주어진 5개의 색 중에서 3개의 색을 택하는 경우의 수는 ${}_{5}C_{3}=10$

주어진 경우의 수는 정중앙의 원에 색을 칠하는 경우와 그렇지 않은 경우로 분류할 수 있다.

(i) 정중앙의 원에 색을 칠하는 경우

택해진 3개의 색 중에서 중앙에 칠할 색을 정하는 경우의 수는 ${}_{3}C_{1}$

이때, 정사각형의 네 꼭짓점에 2개의 색을 칠하는 경우의 수는 2개의 색과 2개의 빈자리를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로 $\dfrac{(4-1)!}{2}=3$

이때의 경우의 수는 $10\times{}_{3}C_{1}\times3=90$

(ii) 정중앙의 원에 색칠하지 않는 경우

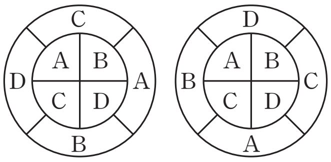
이 경우는 결국 3개의 색과 한 개의 빈자리를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$10\times(4-1)!=60$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $90+60=150$

23 답 ①

서로 다른 네 가지 색을 각각 A, B, C, D라 하면 작은 원의 내부 영역을 칠하는 방법의 수는 원순열의 수이므로



$(4-1)!$이다. 이때, 두 원 사이의 영역을 칠하는 방법의 수는 그림과 같이 각각의 방법에 대하여 두 가지씩 존재하므로 구하는 방법의 수는 $(4-1)!\times2=12$

24 답 840

5명과 빈의자를 각각 문자로 A, B, C, D, E, O, O, O라 하자.

A, B, C, D, E, O, O, O를 일렬로 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{8!}{3!}$

둥글게 배열한 후 회전하였을 때 같은 배열이 되는 가짓수는 8

따라서 구하는 방법의 수는 $\dfrac{8!}{3!}\times\dfrac{1}{8}=840$

25 답 11

정사면체의 아랫면의 각 변에 맞물리는 삼각형의 숫자가

(i) 셋 모두 같은 수가 오는 경우

$(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(3, 3, 3)$의 3가지

(ii) 둘이 같고 하나가 다른 경우

두 번 들어가는 수를 택하는 방법의 수는 3

남은 두 수 중 하나를 택하는 방법의 수는 2

택한 세 수를 삼각형의 변에 배열하는 방법의 수는 1

따라서 이때의 방법의 수는 $3\times2\times1=6$

(iii) 셋 모두 다른 경우

서로 다른 세 수를 삼각형의 변에 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{3!}{3}=2$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는 $3+6+2=11$

26 답 1215

A가 받을 과일 종류를 선택하는 경우의 수는 ${}_{6}C_{2}=15$

나머지 서로 다른 과일 4개를 나머지 B, C, D 세 명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 ${}_{3}\Pi_{4}=81$

따라서 구하는 경우의 수는 $15\times81=1215$

27 답 216

문자 a, b, c, d에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 만들 수 있는 네 자리 문자열의 개수는 ${}_{4}\Pi_{4}=4^{4}=256$

네 자리 문자열 중에서

(i) a가 두 개 연속되는 문자열은

aa○○ 꼴: $3\times4=12$(개)

○○aa 꼴: $4\times3=12$(개)

○aa○ 꼴: $3\times3=9$(개)

즉, $12+12+9=33$(개)

(ii) a가 세 개 연속되는 문자열은

aaa○ 꼴: 3개

○aaa 꼴: 3개

즉, $3+3=6$(개)

(iii) a가 네 개 연속되는 문자열은 $aaaa$의 1개

따라서 a가 연속되지 않은 문자열의 개수는

$256-(33+6+1)=216$(개)

28 답 ④

서로 다른 6개의 주사위를 동시에 던질 때 모두 4 이하의 눈이 나오는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_6=4^6$

한편, 서로 다른 6개의 주사위를 동시에 던질 때 모두 3 이하의 눈이 나오는 경우의 수는 ${}_3\Pi_6=3^6$

따라서 최대인 수가 4가 되는 모든 경우의 수는 4^6-3^6이다.

29 답 ④

중복을 허락하여 만들 수 있는 세 자리 자연수 중 짝수의 개수는

$4\times5\times3=60$

백의 자리 수는 1, 2, 3, 4가 각각 $\frac{60}{4}=15$(개)씩 존재하므로

백의 자리 수의 합은 $(1+2+3+4)\times100\times15=15000$

십의 자리 수는 0, 1, 2, 3, 4가 각각 $\frac{60}{5}=12$(개)씩 존재하므로

십의 자리 수의 합은 $(0+1+2+3+4)\times10\times12=1200$

일의 자리 수는 0, 2, 4가 각각 $\frac{60}{3}=20$(개)씩 존재하므로

일의 자리 수의 합은 $(0+2+4)\times1\times20=120$

따라서 세 자리 자연수 중 짝수의 합은

$15000+1200+120=16320$

30 답 104

조건 (가)에서 일의 자리의 숫자는 1 또는 3이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 1일 때(□□□□1 꼴)

나머지 4자리에서

① 1이 사용되지 않는 경우: $2^4=16$

② 1이 한 번 사용되는 경우: $3\times2^3=24$

③ 1이 두 번 사용되는 경우: 1□1□1 꼴이어야 하므로 $2^2=4$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3일 때(□□□□3 꼴)

① 1이 사용되지 않는 경우: $2^4=16$

② 1이 한 번 사용되는 경우: $4\times2^3=32$

③ 1이 두 번 사용되는 경우:

1□1□3, 1□□13, □1□13 꼴의 각 경우에서

$3\times2^2=12$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$(16+24+4)+(16+32+12)=104$

31 답 128

(i) $f(3)=2$인 경우

1, 2는 1, 2 중 하나로, 4, 5는 2, 3, 4, 5 중 하나로 대응되므로

경우의 수는 ${}_2\Pi_2\times{}_4\Pi_2=64$

(ii) $f(3)=4$인 경우

1, 2는 1, 2, 3, 4 중 하나로, 4, 5는 4, 5 중 하나로 대응되므로

경우의 수는 ${}_4\Pi_2\times{}_2\Pi_2=64$

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $64+64=128$

32 답 ⑤

먼저 세 홀수 1, 3, 5를 각각 a, a, a라 하면

a, a, a, 2, 4의 5개의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

0은 맨 앞에 올 수 없으므로 1, 2, 3, 4, 5의 카드가 배열된 사이 또는 맨 마지막 자리의 5곳 중에서 하나를 택하여 0을 넣는 방법의 수는 5이다.

따라서 구하는 여섯 자리 자연수의 개수는

$20\times5=100$

33 답 13

네 자연수의 합이 8인 경우는

$1+1+1+5$, $1+1+2+4$, $1+1+3+3$, $1+2+2+3$,

$2+2+2+2$의 5가지이다. 이 중 네 수의 곱이 8의 배수인 경우는

$1+1+2+4$, $2+2+2+2$이므로

1, 1, 2, 4를 배열하는 방법의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

2, 2, 2, 2를 배열하는 방법의 수는 1

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $12+1=13$

34 답 126

1단과 2단을 선택하는 방법은

1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2

를 일렬로 배열하는 방법과 같다.

따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{9!}{5!4!}=126$

35 답 180

오전에 (국어, 영어, 영어, 수학, 수학, 수학)을 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!3!}=60$

이때, 오전에 국어 또는 영어를 공부하는 경우에는 오후에 반드시 수학을 공부해야 하므로 경우의 수는 1이고 오전에 수학을 공부하는 경우 오후에 (국어, 영어, 영어)를 배치하는 경우와 같으므로 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 방법의 수는 $60\times1\times3=180$

36 답 30

소인수가 2 또는 5만 있는 수는 2, 4, 5, 8이다.

조건 (나)에서 a, b, c, d, e 중에서 5가 3개 있어야 하므로 나머지 두 수의 곱이 2^4이어야 한다.

즉, $(2, 8)$ 또는 $(4, 4)$이다.

$(2, 8, 5, 5, 5)$를 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{3!}=20$

$(4, 4, 5, 5, 5)$를 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{2!3!}=10$

따라서 자연수 N의 개수는 $20+10=30$

37 답 240

4명이 각자 달리는 거리의 합이 10 km가 되는 경우는

$(3, 3, 3, 1)$ 또는 $(3, 3, 2, 2)$일 때이다.

A, B, C, D가 각자 달리는 거리를 정하는 방법의 수는

3, 3, 3, 1을 배열하는 방법의 수가 $\dfrac{4!}{3!}=4$

3, 3, 2, 2를 배열하는 방법의 수가 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$

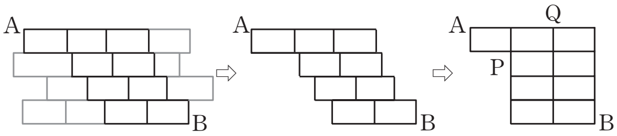
이므로 $4+6=10$

한편, A, B, C, D 4명이 달리는 순서를 정하는 방법의 수는

$4!=24$이므로 서로 다르게 달리는 방법의 수는 $10\times24=240$

38 답 ③

최단경로와 관련이 없는 길을 생략하고 경로를 단순화하면



$A \rightarrow P \rightarrow B$로 가는 최단경로의 수는 $2\times\dfrac{5!}{2!3!}=20$

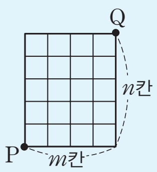
$A \rightarrow Q \rightarrow B$로 가는 최단경로의 수는 $\dfrac{5!}{4!}=5$

따라서 구하는 최단경로의 수는 $20+5=25$

일등급 UP

*** 최단거리로 길을 찾아가는 문제**

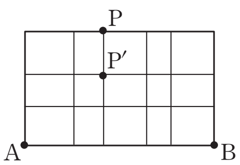
그림의 점 P에서 점 Q로 최단거리로 가는 방법의 수는 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위로 한 칸 가는 것을 b라 하면 m개의 a와 n개의 b를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $\dfrac{(m+n)!}{m!n!}$이다.



39 답 ③

$A \rightarrow P \rightarrow B$로 가는 최단경로의 수는

$\dfrac{5!}{2!3!}\times\dfrac{6!}{3!3!}=200$



이때, 한 번 지난 도로를 다시 지나는 경로는 그림과 같이

$A \rightarrow P' \rightarrow P \rightarrow P' \rightarrow B$

이므로 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{5!}{3!2!}=60$

따라서 구하는 방법의 수는 $200-60=140$

40 답 100

(ⅰ) 1 이상 10 이하의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개를 택한 후 작은 순서대로 x, y, z로 정하면 $1\le x<y<z\le10$을 만족시킨다.

$\therefore n(A)={}_{10}C_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

(ⅱ) 1 이상 10 이하의 자연수 중에서 중복을 허락하여 임의로 3개를 택한 후 작은 순서대로 x, y, z로 정하면 $1\le x\le y\le z\le10$을 만족시킨다.

$\therefore n(B)={}_{10}H_3={}_{12}C_3=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n(B)-n(A)=220-120=100$

[다른 풀이]

$1\le x\le y\le z\le10$에서 $1\le x<(y+1)<(z+2)\le12$

이때, $y+1=y'$, $z+2=z'$이라 하면 y와 y', z와 z'은 각각 일대일 대응이므로 y', z'이 결정되면 y와 z도 유일하게 결정된다.

따라서 $1\le x\le y\le z\le10$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $1\le x<y'<z'\le12$의 개수와 같다.

즉, $n(B)={}_{12}C_3=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

$\therefore n(B)-n(A)=220-120=100$

41 답 ③

ㄱ. 순열의 정의에 의하여 $m=n$이다. (참)

ㄴ. 【반례】 ${}_{10}C_6={}_{10}C_{10-6}={}_{10}C_4$ (거짓)

ㄷ. ${}_{10}H_m={}_{10}H_n$에서 ${}_{9+m}C_m={}_{9+n}C_n$

${}_{9+m}C_{9+m-m}={}_{9+n}C_{9+n-n}$

${}_{9+m}C_9={}_{9+n}C_9$

${}_{9+m}P_9={}_{9+n}P_9$

$\therefore m=n$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

42 답 ④

x의 값을 기준으로 경우를 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) $x=0$일 때, $y+z=5$이므로 구하는 해의 개수는

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

(ⅱ) $x=1$일 때, $y+z=4$이므로 구하는 해의 개수는

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(ⅲ) $x=2$일 때, $y+z=1$이므로 구하는 해의 개수는

${}_2H_1={}_{2+1-1}C_1={}_2C_1=2$

(ⅳ) $x\ge3$일 때, 해가 없다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 구하는 해의 개수는 $6+5+2=13$

43 답 15

갑이 이미 6표를 얻은 것으로 가정하고, 나머지 네 표가 세 사람에게 나누어지는 것으로 생각하면 된다.

$\therefore {}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

44 답 30

진행 방향이 가로, 세로인 것을 각각 →, ↑로 나타내자.

5개의 →와 4개의 ↑를 배열하는데, →↑ 또는 ↑→와 같이 화살표의 방향이 4번 바뀌어야 한다. (예 : →→↑→↑↑↑→→)

(i) 처음에 →로 시작하는 경우

→↑→↑→에서 두 개의 ↑ 중 중복을 허락하여 2개를 택하고 세 개의 → 중 중복을 허락하여 2개를 택하면 되므로

${}_2H_2\times{}_3H_2={}_3C_2\times{}_4C_2=3\times6=18$

(ii) 처음에 ↑로 시작하는 경우

↑→↑→↑에서 세 개의 ↑ 중 1개를 택하고 두 개의 → 중 중복을 허락하여 3개를 택하면 되므로

${}_3C_1\times{}_2H_3={}_3C_1\times{}_4C_3=3\times4=12$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $18+12=30$

45 답 240

$55=11\times5$이고 $x+y+z\geq3$, $p+q\geq2$이므로 주어진 식을 만족시키는 경우는

$x+y+z=11$, $p+q=5$ 또는 $x+y+z=5$, $p+q=11$

이때, 자연수 x, y, z, p, q의 모든 순서쌍 (x, y, z, p, q)의 개수는 다음과 같다.

(i) $x+y+z=11$, $p+q=5$일 때

${}_3H_8\times{}_2H_3={}_{10}C_8\times{}_4C_3={}_{10}C_2\times{}_4C_1=180$

(ii) $x+y+z=5$, $p+q=11$일 때

${}_3H_2\times{}_2H_9={}_4C_2\times{}_{10}C_9={}_4C_2\times{}_{10}C_1=60$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $180+60=240$

46 답 ⑤

a, b, c가 모두 소수이므로 중복을 허락하여 3개를 택해 만들어진 수는 모두 다르다. 따라서 만들어지는 정수의 개수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

따라서 10개의 정수를 곱할 때, 곱해진 소수의 개수는 모두 30개이므로 $(abc)^n$에서 $n=10$이다.

47 답 21

$a=6-a'$, $b=6-b'$, $c=6-c'$이라 하면 $a+b+c=13$에서

$(6-a')+(6-b')+(6-c')=13$

$\therefore a'+b'+c'=5$ (단, a', b', c'은 0 이상 5 이하인 정수)

따라서 구하는 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

[다른 풀이]

(i) 6, 6, 1인 경우 순서쌍의 개수 $\dfrac{3!}{2!}=3$

(ii) 6, 5, 2인 경우 순서쌍의 개수 $3!=6$

(iii) 6, 4, 3인 경우 순서쌍의 개수 $3!=6$

(iv) 5, 5, 3인 경우 순서쌍의 개수 $\dfrac{3!}{2!}=3$

(v) 5, 4, 4인 경우 순서쌍의 개수 $\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $3+6+6+3+3=21$

48 답 120

갑, 을이 출발점 가, 나, 다, 라에 서는 방법의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

각 경우마다 도착하는 방법은 출발점에 서는 순서에 따라 도착 순서가 정해져 있고 같은 도착점에 이를 수도 있으므로 도착점 A, B, C, D 중 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

따라서 구하는 방법의 수는 $12\times10=120$

49 답 ③

사과 x개, 배 y개, 감 z개, 귤 w개를 담는다고 하면

$x+y+z+w=15$ (단, $x\geq3$, $y\geq3$, $z\geq0$, $w\geq0$인 정수)

여기서 $x-3=a$, $y-3=b$, $z=c$, $w=d$라 하면 a, b, c, d는 음이 아닌 정수이고, $a+b+c+d=9$이므로 구하는 방법의 수는 방정식 $a+b+c+d=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같으므로

${}_4H_9={}_{4+9-1}C_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3$

50 답 189

조건 (가)에서 $f(2)=3$ 또는 $f(4)=4$이므로 조건 (나)에 의하여

(i) $f(2)=3$인 경우 : 정의역의 원소 1의 함숫값은 1, 2, 3 중 하나이고 3, 4, 5, 6의 함숫값은 3, 4, 5, 6 중에서 4개를 중복하여 택한 후 $f(a)\leq f(b)$가 되도록 대응시키면 되므로 구하는 경우의 수는 $3\times{}_4H_4=3\times{}_7C_4=105$

(ii) $f(4)=4$인 경우 : 정의역의 원소 1, 2, 3의 함숫값은 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 중복하여 택하고, 5, 6의 함숫값은 4, 5, 6 중에서 2개를 중복하여 택한 후 $f(a)\leq f(b)$가 되도록 대응시키면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_4H_3\times{}_3H_2={}_6C_3\times{}_4C_2=120$

(iii) $f(2)=3$, $f(4)=4$인 경우 : 정의역의 원소 1의 함숫값은 1, 2, 3 중 하나이고, 원소 3의 함숫값은 3, 4 중 하나이다. 또한, 5, 6의 함숫값은 4, 5, 6 중에서 2개를 중복하여 택한 후 $f(a)\leq f(b)$가 되도록 대응시키면 되므로 구하는 경우의 수는 $3\times2\times{}_3H_2=3\times2\times{}_4C_2=36$

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$105+120-36=189$

51 답 ④

6명을 2개 조로 나누어 정류장에 배치하자.

(1명, 5명) : ${}_6C_1\times{}_5C_5\times{}_3P_2=36$

(2명, 4명) : ${}_6C_2\times{}_4C_4\times{}_3P_2=90$

(3명, 3명) : ${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}\times{}_3P_2=60$

따라서 모든 경우의 수는 $36+90+60=186$

52 답 300

치역의 원소 중 1이 아닌 원소를 p, $q\,(p\neq q)$라 하면

두 원소 p, q를 정하는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

각 경우에 대하여 나머지 원소를 대응시키는 방법의 수를 다음과 같이 경우를 나누어 구하자.

(i) 1에 대응하는 정의역의 원소가 1뿐일 때

정의역의 원소 2, 3, 4, 5를 2개의 조로 나누어 각각 p, q에 대응시키면 되므로

(1개, 3개)조 : ${}_4C_1\times2!=8$

(2개, 2개)조 : ${}_4C_2\times\frac{1}{2!}\times2!=6$

에서 $8+6=14$(가지)

(ii) 1에 대응하는 정의역의 원소가 1을 포함하여 2개일 때

정의역의 원소 2, 3, 4, 5 중 1에 대응하는 원소 하나를 택하는 방법의 수는 4

나머지 세 원소를 1개, 2개의 조로 나누어 각각 p, q에 대응시키는 방법의 수는 ${}_3C_1\times2!=6$

에서 $4\times6=24$(가지)

(iii) 1에 대응하는 정의역의 원소가 1을 포함하여 3개일 때

정의역의 원소 2, 3, 4, 5 중 1에 대응하는 원소 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$

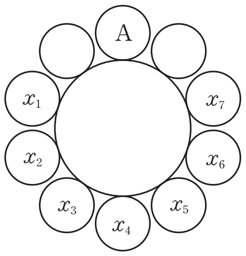
나머지 두 원소를 각각 p, q에 대응시키는 방법의 수는 $2!=2$

에서 $6\times2=12$

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $6\times(14+24+12)=300$

53 답 30

먼저 A가 앉은 자리를 고정하자. 이웃하여 앉을 수 없으므로 A의 좌우 자리는 빈자리로 두고 나머지 7개의 자리를 차례로 x_1, x_2, $\cdots$, x_7이라 하자.



ⓐ

x_1, x_2, $\cdots$, x_7에서 서로 이웃하지 않은 두 자리를 선택하는 방법의 수는 ${}_7C_2-6=15$ ---------- ⓑ

각 경우에 B와 C가 앉는 방법의 수는 2가지씩이므로

구하는 방법의 수는 $15\times2=30$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ A가 앉은 자리를 고정하여 생각한다.	[40%]
ⓑ x_1, x_2, $\cdots$, x_7에서 서로 이웃하지 않은 두 자리를 선택하는 방법의 수를 구한다.	[50%]
ⓒ A, B, C 3명이 서로 이웃하지 않게 앉는 방법의 수를 구한다.	[10%]

54 답 153

(i) 모두 같은 것을 내는 경우의 수는 3 ---------- ⓐ

(ii) 모두 다른 것을 내는 경우는 5명을 세 조로 나누어 다른 것을 내는 경우이므로

① 5명을 1명, 1명, 3명의 세 조로 나누어 다른 것을 내는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}\times3!=60$ ---------- ⓑ

② 1명, 2명, 2명의 세 조로 나누어 다른 것을 내는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\times3!=90$ ---------- ⓒ

따라서 구하는 경우의 수는 $3+60+90=153$ ---------- ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ 모두 같은 것을 내는 경우의 수를 구한다.	[10%]
ⓑ 1명, 1명, 3명의 세 조로 나누어 다른 것을 내는 경우의 수를 구한다.	[40%]
ⓒ 1명, 2명, 2명의 세 조로 나누어 다른 것을 내는 경우의 수를 구한다.	[40%]
ⓓ 비기는 경우의 수를 구한다.	[10%]

55 답 28

$x'=x-1$, $y'=y-3$, $z'=z-4$라 하면 $x'\geq0$, $y'\geq0$, $z'\geq0$

이때, $x+y+z=14$에서 $(x'+1)+(y'+3)+(z'+4)=14$

$\therefore\ x'+y'+z'=6$ ---------- ⓐ

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $x'+y'+z'=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같으므로

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$ ---------- ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 방정식 $x+y+z=14$를 $x'+y'+z'=6$으로 변형한다.	[60%]
ⓑ 방정식 $x'+y'+z'=6$을 이용하여 $x+y+z=14$를 만족시키는 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구한다.	[40%]

56 답 ②

여학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!$

각 경우에 대하여 여학생과 여학생 사이 세 곳에 앉는 남학생의 수는 모두 달라야 하므로 각각 1명, 2명, 3명이고 이를 정하는 경우의 수는 $3!$

남학생을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!$

따라서 구하는 경우의 수는 $2!\times3!\times6!=12\times6!$

$\therefore\ n=12$

[다른 풀이]

여학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!$

각 경우에 대하여 여학생과 여학생 사이 세 곳에 앉는 남학생의 수는 모두 다르므로 남학생 6명이 3명, 2명, 1명의 세 조로 나뉘어 여학생과 여학생 사이에 앉아야 한다.

이와 같이 남학생을 세 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=\frac{6!}{3!2!}$$

각 경우에 대하여 세 조를 여학생과 여학생 사이의 세 곳에 배열하는 경우의 수는 $3!$

각 경우에 대하여 남학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!\times2!\times1!$

이므로 구하는 경우의 수는

$$2!\times\frac{6!}{3!2!}\times3!\times3!\times2!\times1!=12\times6!$$

$\therefore n=12$

57 답 ④

(i) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든 경우의 수는 216이다.

(ii) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택한 후 일렬로 배열하는 중복순열과 같으므로 이 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=\overset{(가)}{\boxed{27}}$이다.

(iii) 6 이하의 짝수는 2, 4, 6이므로 세 수의 곱이 2인 경우의 수는 2, 1, 1을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!}=3$$

세 수의 곱이 4인 경우의 수는 4, 1, 1 또는 2, 2, 1을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=3+3=6$$

세 수의 곱이 6인 경우의 수는 6, 1, 1 또는 3, 2, 1을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!}+3!=3+6=9$$

그러므로 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 6 이하의 짝수인 경우의 수는 $3+6+9=\overset{(나)}{\boxed{18}}$이다.

따라서 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 8 이상의 짝수인 경우의 수는 $216-27-18=\overset{(다)}{\boxed{171}}$이다.

즉, $a=27$, $b=18$, $c=171$이므로

$3a+2b+c=288$

58 답 32

조건 (나)에서 $2^a\times4^b=2^{a+2b}$이고 이 수가 8의 배수이어야 하므로

$a+2b\geq3$

(i) $b=0$일 때,

$a\geq3$이므로 조건 (가)에서 $a=a'+3$ (a'은 음이 아닌 정수)라 하면

$a+b+c=(a'+3)+c=7$

$\therefore a'+c=4$

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(ii) $b=1$일 때,

$a\geq1$이므로 조건 (가)에서 $a=a'+1$(a'은 음이 아닌 정수)라 하면

$a+b+c=(a'+1)+1+c=7$

$\therefore a'+c=5$

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

(iii) $b\geq2$일 때,

$a\geq0$이면 되므로 조건 (가)에서 $b=b'+2$ (b'은 음이 아닌 정수)라 하면

$a+b+c=a+(b'+2)+c=7$

$a+b'+c=5$

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$5+6+21=32$

59 답 ②

서로 다른 상자 4개에 서로 다른 4개의 공을 넣는 모든 방법의 수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 1인 경우가 하나도 없는 것은 넣은 공의 개수가 4, 0, 0, 0 또는 2, 2, 0, 0인 경우이므로

(i) 넣은 공의 개수가 4, 0, 0, 0인 경우

4개의 공이 모두 들어갈 상자를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_1=4$

(ii) 넣은 공의 개수가 2, 2, 0, 0인 경우

2개의 공이 들어갈 상자 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$

서로 다른 4개의 공을 2개씩 서로 다른 2개의 상자에 넣는 방법의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2=6\times1=6$

이므로 $6\times6=36$

따라서 구하는 방법의 수는 $256-(4+36)=216$

[다른 풀이]

(i) 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 0, 0, 1, 3인 경우

서로 다른 4개의 공을 0개, 0개, 1개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_0\times{}_4C_0\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=2$$

4개의 묶음을 서로 다른 4개의 상자에 넣는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 이때의 경우의 수는 $2\times24=48$

(ii) 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 0, 1, 1, 2인 경우

서로 다른 4개의 공을 0개, 1개, 1개, 2개로 나누는 경우의 수는

${}_4C_0\times{}_4C_1\times{}_3C_1\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6$

4개의 묶음을 서로 다른 4개의 상자에 넣는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 이때의 경우의 수는 $6\times24=144$

(iii) 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 1, 1, 1, 1인 경우

서로 다른 공 4개를 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 1, 1, 1, 1인 경우의 수는 $4!=24$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $48+144+24=216$

60 답 13

펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3이라 하고 곰 인형을 크기가 작은 것부터 b_1, b_2, b_3, b_4라 하자.

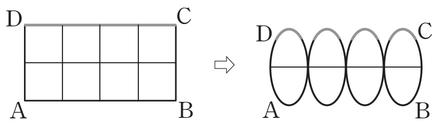
(i) a_3이 b_2보다 왼쪽에 있는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

(ii) a_3이 b_2보다 오른쪽에 있는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $4+9=13$

61 답 65

경로의 모양을 바꾸어 생각해 보면 다음 그림과 같다.



이때, 도로 DC 위의 점을 적어도 한 번 지나는 방법의 수는 세 갈래 길 중 한 길을 택하는 방법의 수에서 아래쪽 두 길만 택하는 방법의 수를 뺀 것과 같으므로 구하는 방법의 수는 $3^4-2^4=65$

62 답 ②

일의 자리의 수를 x, 십의 자리의 수를 y, 백의 자리의 수를 z라 하면 $x+y+z=13$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 중에서 x, y, z가 10 이상인 것을 제외하면 된다.

$x+y+z=13$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_{13}={}_{15}C_{13}={}_{15}C_2=\frac{15\times14}{2\times1}=105$

한편, 두 수가 동시에 10 이상일 수 없으므로 한 수가 10 이상인 경우를 제외하면 된다.

한 수가 10인 경우의 수 : ${}_2H_3={}_4C_3=4$

한 수가 11인 경우의 수 : ${}_2H_2={}_3C_2=3$

한 수가 12인 경우의 수 : ${}_2H_1={}_2C_1=2$

한 수가 13인 경우의 수 : ${}_2H_0={}_1C_0=1$

그런데 x, y, z 중 10 이상인 한 수를 정하는 경우의 수가 3가지이므로 $x+y+z=13$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 중에서 x, y, z가 10 이상인 것의 개수는 $3\times(4+3+2+1)=30$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $105-30=75$

63 답 60

문제의 조건에서 $|f(x)-f(y)|\geq2$를 만족시키는 치역의 원소는 그 값의 차가 2 이상인 서로 다른 세 수이다.

이는 연속하지 않은 세 수이므로 다음과 같이 4개의 × 사이 또는 양 끝에 세 개의 ○를 넣고 순서대로 1, 2, 3, …, 7을 배정하는 것과 같으므로 경우의 수는 ${}_5C_3$

1	2	3	4	5	6	7
○	×	×	○	×	○	×

이렇게 선택된 치역의 원소에 정의역을 일대일로 대응시키면 되므로 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_5C_3\times3!=60$

64 답 200

조건 (나)에서 함수 $f:X\longrightarrow X$의 치역의 개수는 3개이고, 조건 (가)에 의하여 치역의 원소 3개 중에서 중복을 허락하여 6개를 뽑되 모든 원소가 적어도 한 번은 뽑혀야 한다.

즉, 치역의 원소 y_1, y_2, y_3에 대하여 y_1, y_2, y_3이 뽑힌 횟수를 각각 p, q, r라 하면 조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는 방정식 $p+q+r=6$을 만족시키는 자연수 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)의 개수와 같다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_6C_3\times{}_3H_3={}_6C_3\times{}_5C_3=200$

65 답 336

세 쌍의 부부가 모두 같이 앉는 경우와 한 쌍의 부부가 각각 앉는 경우로 나누어 생각해보면

(i) 세 쌍의 부부가 모두 같이 앉는 경우

세 쌍의 부부가 네 개의 의자에 앉는 경우는 $(4-1)!$가지이고 각각의 부부는 같은 의자에서 자리를 바꾸어 앉을 수 있으므로 방법의 수는

$(4-1)!\times2!\times2!\times2!=48$

(ii) 한 쌍의 부부가 다른 의자에 앉는 경우

각자 다른 의자에 앉을 부부를 선택하는 경우는 ${}_3C_1$이고, 세 쌍의 부부가 네 개의 의자에 앉는 경우는 $(4-1)!$가지이다.

또한, 같이 앉은 부부 또는 각자 앉은 부부가 자리를 바꾸어 앉을 수 있으므로 방법의 수는

${}_3C_1\times(4-1)!\times2!\times2!\times2!\times2!=288$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$48+288=336$

66 답 70

1	4	4	3
2	3	1	2
3	2	1	4
4	1	2	3

그림에서 큰 정사각형의 가운데에 모이는 4개의 숫자의 배열이 다르면 숫자 무늬도 달라진다. 따라서 무늬의 개수는 가로 2칸, 세로 2칸의 정사각형에 1, 2, 3, 4를 중복을 허락하여 배열하는 방법의 수와 같다.

(i) 같은 숫자가 4개 들어갈 때

4개 들어갈 숫자를 택하는 방법의 수는 4,

네 숫자를 배열하는 방법의 수는 1가지이므로

$4\times1=4$

(ii) 같은 숫자가 3개 들어갈 때

3개 들어갈 숫자를 택하는 방법의 수는 4,

나머지 1개의 숫자를 택하는 방법의 수는 3,

네 숫자를 배열하는 방법의 수는 1가지이므로

$4\times3\times1=12$

(iii) 같은 숫자가 2개, 2개 들어갈 때

숫자를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$,

네 숫자를 배열하는 방법의 수는 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2&2\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2&1\\\hline\end{array}$ 의 2이므로

$6\times2=12$

(iv) 같은 숫자가 2개, 1개, 1개 들어갈 때

숫자를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_1\times{}_3C_2=12$

네 숫자를 배열하는 방법의 수는 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2&3\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3&2\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&1\\\hline\end{array}$ 의 3

이므로

$12\times3=36$

(v) 모두 다른 숫자가 들어갈 때

숫자를 택하는 방법의 수는 1,

네 숫자를 배열하는 방법의 수는 원순열과 같으므로

$(4-1)!=6$

에서 $1\times6=6$

따라서 서로 다른 무늬의 수는

$4+12+12+36+6=70$

01 답 ①

다항식 $(x+a)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r x^{6-r}a^r$ ⋯ ㉠

x^3의 계수가 160이므로 ㉠에 $r=3$을 대입하면 $20a^3=160$

$a^3=8 \quad \therefore a=2$

따라서 다항식 $(x+a)^6=(x+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는

${}_6C_2 2^2=60$이다.

02 답 20

$(2+x)(1+x)^5=\{1+(1+x)\}(1+x)^5=(1+x)^5+(1+x)^6$

$(1+x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_5C_4$,

$(1+x)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_6C_4$이므로

$(2+x)(1+x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는

${}_5C_4+{}_6C_4={}_5C_1+{}_6C_2=5+15=20$

03 답 ④

$(a+2b+3c)^6$의 전개식에서 일반항은

$\dfrac{6!}{p!q!r!}a^p(2b)^q(3c)^r=\dfrac{6!}{p!q!r!}2^q3^r\times a^pb^qc^r$

(단, p, q, r는 음이 아닌 정수이고, $p+q+r=6$)

따라서 a^3b^2c의 계수는

$\dfrac{6!}{3!2!1!}\times2^2\times3=6\times5\times4\times2\times3=720$

04 답 ①

$(1+x)^5={}_5C_0+{}_5C_1x+{}_5C_2x^2+{}_5C_3x^3+{}_5C_4x^4+{}_5C_5x^5$의 양변에 $x=1$을 대입하면

${}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=2^5=32$

$\therefore {}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=32-{}_5C_0=32-1=31$

05 답 9

좌변 $(1+x)^{n+1}$의 전개식에서 x^k의 계수는

${}_{n+1}C_k$ ⋯ ㉠

우변은

$(1+x)(1+x)^n=(1+x)^n+x(1+x)^n$이고

$(1+x)^n$의 전개식에서 x^k의 계수는 ${}_nC_k$,

$x(1+x)^n$의 전개식에서 x^k의 계수는 $(1+x)^n$의 전개식에서

x^{k-1}의 계수와 같으므로 ${}_nC_{\underbrace{k-1}_{(가)}}$이다.

따라서 $(1+x)(1+x)^n$의 전개식에서 x^k의 계수는

${}_nC_k+{}_nC_{k-1}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 ${}_{n+1}C_k={}_nC_k+{}_nC_{k-1}$

따라서 $f(k)=k-1$이므로 $f(10)=9$

06 답 ④

(i) ${}_1C_0+{}_2C_0+{}_3C_0+\cdots+{}_9C_0=1+1+1+\cdots+1=9$

(ii) ${}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_9C_1=1+2+3+4+\cdots+9=45$

(i), (ii)에 의하여 색칠한 부분의 모든 수의 합은 $9+45=54$이다.

07 답 72

$(2x+3)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}3^r={}_5C_r2^{5-r}3^rx^{5-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 5)$

x^2의 계수는 ${}_5C_3\times2^2\times3^3=1080$

$(ax+1)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_s(ax)^{6-s}={}_6C_sa^{6-s}x^{6-s}$ $(s=0, 1, 2, \cdots, 6)$

x^2의 계수는 ${}_6C_4\times a^2=15a^2$

따라서 $1080=15a^2$이므로

$a^2=72$

08 답 ⑤

$(x^2+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}+\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$이고

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 일반항은

${}_{10}C_rx^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_{10}C_rx^{10-2r}$

(i) $x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$에서 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$의 상수항은 $r=5$일 때이므로 ${}_{10}C_5$

(ii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$에서 x^2의 계수는 $r=4$일 때이므로 ${}_{10}C_4$

따라서 $(x^2+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 x^2의 계수는

${}_{10}C_5+{}_{10}C_4={}_{11}C_5$

09 답 28

$$f(n)={}_nC_0+\frac{{}_nC_1}{3}+\frac{{}_nC_2}{3^2}+\frac{{}_nC_3}{3^3}+\cdots+\frac{{}_nC_n}{3^n}$$
$$={}_nC_0+{}_nC_1\left(\frac{1}{3}\right)+{}_nC_2\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_nC_3\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

이므로

$$f(10)-f(9)=\left(\frac{4}{3}\right)^{10}-\left(\frac{4}{3}\right)^9=\left(\frac{4}{3}\right)^9\left(\frac{4}{3}-1\right)=\frac{2^{18}}{3^{10}}=\frac{2^a}{3^b}$$

따라서 $a=18$, $b=10$이므로

$a+b=28$

10 답 ⑤

$\left(x^2+\frac{1}{x}+1\right)^6$의 전개식에서 일반항은

$$\frac{6!}{p!q!r!}\times(x^2)^p\times\left(\frac{1}{x}\right)^q\times1^r=\frac{6!}{p!q!r!}\times x^{2p-q}$$

(단, p, q, r는 음이 아닌 정수이고, $p+q+r=6$)

x^3의 계수는 $2p-q=3$, $p+q+r=6$을 만족시켜야 한다.

한편, p, q, r는 음이 아닌 정수이므로 순서쌍 (p, q, r)는

$(2, 1, 3)$ 또는 $(3, 3, 0)$

따라서 x^3의 계수는

$$\frac{6!}{2!1!3!}+\frac{6!}{3!3!}=60+20=80$$

11 답 240

$\left(x^2-\frac{2}{x}+3y\right)^6$과 $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$의 상수항은 서로 같다.

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r(x^2)^{6-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r=(-2)^r{}_6C_rx^{12-3r}$

따라서 $\left(x^2-\frac{2}{x}+3y\right)^6$의 상수항은 $(-2)^4{}_6C_4=240$

12 답 ④

$(x^2+x+1)^6$의 전개식에서 일반항은

$$\frac{6!}{p!q!r!}\times(x^2)^p\times x^q\times1^r=\frac{6!}{p!q!r!}\times x^{2p+q}$$

(단, p, q, r는 음이 아닌 정수이고 $p+q+r=6$)

a_4의 값은 x^4의 계수와 같고, p, q, r는 음이 아닌 정수이므로

$2p+q=4$, $p+q+r=6$을 만족시키는 순서쌍 (p, q, r)는

$(0, 4, 2)$ 또는 $(1, 2, 3)$ 또는 $(2, 0, 4)$

$$\therefore a_4=\frac{6!}{4!2!}+\frac{6!}{1!2!3!}+\frac{6!}{2!4!}=15+60+15=90$$

13 답 ⑤

$(1+x)^{41}={}_{41}C_0+{}_{41}C_1x+{}_{41}C_2x^2+\cdots+{}_{41}C_{41}x^{41}$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{41}={}_{41}C_0+{}_{41}C_1+{}_{41}C_2+\cdots+{}_{41}C_{41}$ ⋯ ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0={}_{41}C_0-{}_{41}C_1+{}_{41}C_2-\cdots-{}_{41}C_{41}$ ⋯ ㉢

ㄱ. ㉡+㉢을 하면

$2({}_{41}C_0+{}_{41}C_2+\cdots+{}_{41}C_{40})=2^{41}$

$\therefore {}_{41}C_0+{}_{41}C_2+\cdots+{}_{41}C_{40}=2^{40}$ (참)

ㄴ. ㉡−㉢을 하면

$2({}_{41}C_1+{}_{41}C_3+\cdots+{}_{41}C_{41})=2^{41}$

$\therefore {}_{41}C_1+{}_{41}C_3+\cdots+{}_{41}C_{41}=2^{40}$ (참)

ㄷ. ${}_{41}C_0+{}_{41}C_1+{}_{41}C_2+{}_{41}C_3+\cdots+{}_{41}C_{20}=A$라 하면

${}_{41}C_0={}_{41}C_{41}$, ${}_{41}C_1={}_{41}C_{40}$, $\cdots$, ${}_{41}C_{20}={}_{41}C_{21}$이므로

${}_{41}C_0+{}_{41}C_1+{}_{41}C_2+{}_{41}C_3+\cdots+{}_{41}C_{20}$

$={}_{41}C_{41}+{}_{41}C_{40}+{}_{41}C_{39}+{}_{41}C_{38}+\cdots+{}_{41}C_{21}=A$

㉡에서 $2A=2^{41}$ $\quad\therefore A=2^{40}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14 답 ④

${}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r}$임을 이용하자.

주어진 식의 합을 S라 하면

$S=2\times{}_{10}C_{1}+3\times{}_{10}C_{2}+4\times{}_{10}C_{3}+\cdots+10\times{}_{10}C_{9}$에서

$S=2\times{}_{10}C_{9}+3\times{}_{10}C_{8}+4\times{}_{10}C_{7}+\cdots+10\times{}_{10}C_{1}$이다.

두 식을 더하면

$2S=12({}_{10}C_{1}+{}_{10}C_{2}+{}_{10}C_{3}+\cdots+{}_{10}C_{9})$

$\quad=12\{({}_{10}C_{0}+{}_{10}C_{1}+{}_{10}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{10})-{}_{10}C_{0}-{}_{10}C_{10}\}$

$\quad=12(2^{10}-2)$

$\therefore\ S=3\times2^{11}-12$

15 답 ②

$(1+x)^{5}(1+x)^{10}=({}_{5}C_{0}+{}_{5}C_{1}x+{}_{5}C_{2}x^{2}+\cdots+{}_{5}C_{5}x^{5})$

$\qquad\times({}_{10}C_{0}+{}_{10}C_{1}x+{}_{10}C_{2}x^{2}+\cdots+{}_{10}C_{10}x^{10})$

우변의 전개식에서 x^{4}의 계수는

${}_{5}C_{0}\times{}_{10}C_{4}+{}_{5}C_{1}\times{}_{10}C_{3}+{}_{5}C_{2}\times{}_{10}C_{2}+{}_{5}C_{3}\times{}_{10}C_{1}+{}_{5}C_{4}\times{}_{10}C_{0}$

좌변 $(1+x)^{5}(1+x)^{10}=(1+x)^{15}$의 전개식에서 x^{4}의 계수는 ${}_{15}C_{4}$이다.

$\therefore\ {}_{5}C_{0}\times{}_{10}C_{4}+{}_{5}C_{1}\times{}_{10}C_{3}+{}_{5}C_{2}\times{}_{10}C_{2}+{}_{5}C_{3}\times{}_{10}C_{1}+{}_{5}C_{4}\times{}_{10}C_{0}={}_{15}C_{4}$

16 답 165

${}_{2}C_{2}={}_{3}C_{3}$이므로

$({}_{2}C_{2}+{}_{3}C_{2})+{}_{4}C_{2}+{}_{5}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{2}$

$=({}_{3}C_{3}+{}_{3}C_{2})+{}_{4}C_{2}+{}_{5}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{2}$

$=({}_{4}C_{3}+{}_{4}C_{2})+{}_{5}C_{2}+{}_{6}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{2}$

$=({}_{5}C_{3}+{}_{5}C_{2})+{}_{6}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{2}$

$=({}_{6}C_{3}+{}_{6}C_{2})+{}_{7}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{2}$

$\vdots$

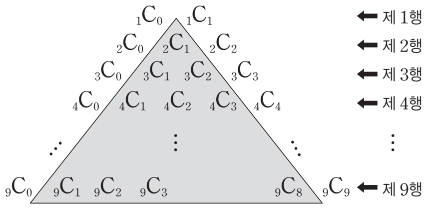
$=({}_{9}C_{3}+{}_{9}C_{2})+{}_{10}C_{2}$

$={}_{10}C_{3}+{}_{10}C_{2}={}_{11}C_{3}$

$=165$

17 답 ③

그림에서 제 k행의 총합은 2^{k}이므로 제 k행에서 색칠한 영역에 있는 수의 총합은 $2^{k}-2$이다.



따라서 구하는 총합을 S라 하면

$S=(2^{1}-2)+(2^{2}-2)+(2^{3}-2)+\cdots+(2^{9}-2)$

$\quad=(2^{1}+2^{2}+2^{3}+\cdots+2^{9})-18$

이때,

$2^{10}-1=(2-1)(2^{9}+2^{8}+\cdots+2+1)=2^{9}+2^{8}+\cdots+2+1$

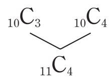
이므로

$S=(2^{10}-2)-18=2^{10}-20=1024-20=1004$

18 답 ②

제 11행의 왼쪽에서 5번째 수는 ${}_{11}C_{4}$이고, 제 10행의 왼쪽에서 5번째 수는 ${}_{10}C_{4}$이다.

따라서 오른쪽 파스칼의 삼각형에서



${}_{11}C_{4}-{}_{10}C_{4}={}_{10}C_{3}=120$

19 답 ④

$(1-x)^{3}$의 전개식에서 일반항은

${}_{3}C_{r}(-x)^{r}={}_{3}C_{r}(-1)^{r}x^{r}$ (단, $r=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

$(2-x)^{4}$의 전개식에서 일반항은

${}_{4}C_{s}2^{4-s}(-x)^{s}={}_{4}C_{s}2^{4-s}(-1)^{s}x^{s}$ (단, $s=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)

(상수항)×(이차항), (일차항)×(일차항), (이차항)×(상수항)은 이차항이므로

${}_{3}C_{0}\times{}_{4}C_{2}\times2^{2}+{}_{3}C_{1}\times(-1)\times{}_{4}C_{1}\times2^{3}\times(-1)$

$+{}_{3}C_{2}\times(-1)^{2}\times{}_{4}C_{0}\times2^{4}\times(-1)^{0}$

$=24+96+48$

$=168$

20 답 ④

$(x+y)^{5}$의 전개식에서 일반항은 ${}_{5}C_{r}x^{5-r}y^{r}$ (단, $r=0,\ 1,\ \cdots,\ 5$)

$\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{5}$의 전개식에서 일반항은

${}_{5}C_{s}\left(\dfrac{1}{xy}\right)^{s}={}_{5}C_{s}x^{-s}y^{-s}$ (단, $s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5$)

즉, $(x+y)^{5}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{5}$의 전개식에서 일반항은

${}_{5}C_{r}x^{5-r-s}\times{}_{5}C_{s}y^{r-s}$

따라서 $x^{2}y$의 계수는 $5-r-s=2,\ r-s=1$을 만족시키는 $r=2$, $s=1$일 때, ${}_{5}C_{2}\times{}_{5}C_{1}=50$

21 답 6

$(x+a)^{n}$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 ${}_{n}C_{1}a=na$이다.

$(x-a)(x+a)^{n}=x(x+a)^{n}-a(x+a)^{n}$이므로

$x(x+a)^{n}$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

${}_{n}C_{2}a^{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}\times a^{2}$이고,

$a(x+a)^{n}$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 $a\times{}_{n}C_{1}a=na^{2}$이다.

따라서 $(x-a)(x+a)^{n}$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$\dfrac{n(n-1)}{2}\times a^{2}-na^{2}$이다.

$na=\dfrac{n(n-1)}{2}\times a^{2}-na^{2}$에서 $a=\dfrac{2}{n-3}$

여기서 a는 자연수이므로 $n-3$은 2의 약수이다.

즉, $n-3=1$ 또는 $n-3=2$이므로

$n=4$ 또는 $n=5$

따라서 $n=4$일 때 $a=2$, $n=5$일 때 $a=1$이므로

두 경우 모두 $a+n=6$이다.

22 답 ③

(i) $6^{50}=36^{25}=(1+35)^{25}$

$$={}_{25}C_0\times1+{}_{25}C_1\times35+{}_{25}C_2\times35^2+\cdots+{}_{25}C_{25}\times35^{25}$$

이때, 제2항 이후는 35의 배수이므로 7의 배수이다.

$\therefore 6^{50}=7A+1$ (A는 자연수)

따라서 6^{50}을 7로 나눈 나머지는 1이다.

(ii) $8^{50}=(7+1)^{50}$

$$={}_{50}C_0\times1+{}_{50}C_1\times7+{}_{50}C_2\times7^2+\cdots+{}_{50}C_{50}\times7^{50}$$

마찬가지로 제2항 이후는 7의 배수이다.

$\therefore 8^{50}=7B+1$ (B는 자연수)

따라서 8^{50}을 7로 나눈 나머지는 1이다.

(i), (ii)에 의하여 $6^{50}+8^{50}$을 7로 나눈 나머지는 $1+1=2$

23 답 50

(i) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+{}_nC_1\frac{1}{n}+{}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\ge1+1+{}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$=2+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{n^2}$$

$$=2+\underbrace{\boxed{\frac{n-1}{2n}}}_{(가)}>2\ (\because n\ge2)$$

(ii) $${}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k=\frac{n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k!}\times\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$=\frac{1}{k!}\times\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}$$

$$<\frac{1}{k!}$$

이고, $k!=1\times2\times3\times\cdots\times k\ge2^{k-1}$에서 $\frac{1}{k!}\le\frac{1}{2^{k-1}}$이므로

$${}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k<\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+{}_nC_1\frac{1}{n}+{}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$<1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

그런데 $\frac{1}{2^n}-1=\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{2^1}+1\right)$

에서 $\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{2^1}+1=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}$

이므로

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=3-\underbrace{\boxed{\frac{1}{2^{n-1}}}}_{(나)}<3$$

(i), (ii)에 의하여 $n\ge2$인 자연수 n에 대하여

부등식 $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$이 성립한다.

따라서 $f(n)=\frac{n-1}{2n}$, $g(n)=\frac{1}{2^{n-1}}$이므로

$$100\{f(8)+g(5)\}=100\left(\frac{7}{16}+\frac{1}{16}\right)=50$$

24 답 ⑤

x^4은 x^3의 계수를 정하는 데 영향을 주지 않으므로

$(-x^2+2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하면 된다.

$(-x^2+2x+1)^5$의 전개식에서 일반항은

$$\frac{5!}{p!q!r!}\times(-x^2)^p\times(2x)^q\times1^r=\frac{5!}{p!q!r!}\times(-1)^p2^q\times x^{2p+q}$$

(단, $p+q+r=5$)

이때, $2p+q=3$, $p+q+r=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)는 $(0, 3, 2)$ 또는 $(1, 1, 3)$

따라서 x^3의 계수는

$$\frac{5!}{3!2!}\times(-1)^0\times2^3+\frac{5!}{1!1!3!}\times(-1)^1\times2^1=80-40=40$$

25 답 ④

$\{a+(2b+c)^2\}^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_ka^{6-k}(2b+c)^{2k}$

여기서 $a^{6-k}(2b+c)^{2k}$이 8차항이 되는 것은 $k=2$일 때이다.

즉, ${}_6C_2a^4(2b+c)^4$

이때, 8차항의 계수의 총합은 모든 문자의 값이 1일 때, 즉 $a=1$, $b=1$, $c=1$일 때의 식의 값과 같으므로

$${}_6C_2\times1^4\times(2+1)^4=\frac{6\times5}{2\times1}\times3^4=1215$$

26 답 ②

좌변에 $11!$을 곱하면

$$(좌변)=\frac{11!}{1!10!}+\frac{11!}{3!8!}+\frac{11!}{5!6!}+\frac{11!}{7!4!}+\frac{11!}{9!2!}+\frac{11!}{11!0!}$$

$$={}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+{}_{11}C_7+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{11}=2^{11-1}=2^{10}$$

$$\therefore \frac{1}{1!10!}+\frac{1}{3!8!}+\frac{1}{5!6!}+\frac{1}{7!4!}+\frac{1}{9!2!}+\frac{1}{11!0!}=\frac{2^{10}}{11!}$$

따라서 $m=10$, $n=11$이므로 $m+n=10+11=21$

27 답 19

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

$S_n={}_nC_0+3{}_nC_1+5{}_nC_2+7{}_nC_3+\cdots+(2n+1){}_nC_n$에서

$S_n=(2n+1){}_nC_0+(2n-1){}_nC_1+(2n-3){}_nC_2+\cdots+3{}_nC_{n-1}+{}_nC_n$

두 식을 더하면

$2S_n=(2n+2)({}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n)=2(n+1)\times2^n$

$\therefore S_n=(n+1)\times2^n$

즉, $S_{15}=16\times2^{15}=2^{19}$이므로 $p=19$

28 답 ②

먼저 20개의 같은 제품에서 몇 개를 뽑고 나머지를 서로 다른 제품에서 뽑으면 된다. 이때, 같은 제품에서 뽑는 경우의 수는 수량에 관계없이 1가지이므로

같은 제품 20개와 서로 다른 제품 0개를 뽑는 방법의 수는 $1\times{}_{20}C_0$

같은 제품 19개와 서로 다른 제품 1개를 뽑는 방법의 수는 $1\times{}_{20}C_1$

같은 제품 18개와 서로 다른 제품 2개를 뽑는 방법의 수는 $1\times{}_{20}C_2$

$\vdots$

같은 제품 0개와 서로 다른 제품 20개를 뽑는 방법의 수는 $1\times{}_{20}C_{20}$

따라서 구하는 방법의 수는

${}_{20}C_0+{}_{20}C_1+{}_{20}C_2+\cdots+{}_{20}C_{20}=2^{20}$

29 답 265

(i) 정지하는 횟수만 구별할 때 2층에서 9층까지 정지하는 횟수는 0, 1, 2, …, 8회까지 가능하므로 $m=9$

(ii) 정지하는 층과 횟수를 구별할 때,
정지하는 횟수를 $k(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$라 하면 k회 정지하고 올라가는 방법의 수가 ${}_8C_k$이므로 $n={}_8C_0+{}_8C_1+\cdots+{}_8C_8=2^8=256$

$\therefore\ m+n=9+256=265$

30 답 660

$(1+2x)^k$의 전개식에서 일반항은

${}_kC_r(2x)^r={}_kC_r2^rx^r$이므로 x^r의 계수는 ${}_kC_r2^r$이다.

따라서 $(1+2x)^2+(1+2x)^3+(1+2x)^4+\cdots+(1+2x)^{10}$의 전개식에서 x^2의 계수는

${}_2C_22^2+{}_3C_22^2+{}_4C_22^2+\cdots+{}_{10}C_22^2$

$=2^2({}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2)$

$=2^2\times{}_{11}C_3$

$=2^2\times\dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=660$

31 답 ④

$x-1=t$라 하면 $x=1+t$이므로

$f(x-1)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에서

$f(t)=1+(1+t)+(1+t)^2+\cdots+(1+t)^{10}$

즉, $f(x)=1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$

$\qquad=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$

따라서 a_4는 $1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^4의 계수와 같다.

$(1+x)^4$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_4C_4$

$(1+x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_5C_4$

$\vdots$

$(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_{10}C_4$

이므로

$a_4={}_4C_4+{}_5C_4+\cdots+{}_{10}C_4={}_{11}C_5$

[다른 풀이]

$x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)$에서

$x^{10}+x^9+\cdots+x+1=\dfrac{x^{11}-1}{x-1}$이므로

$f(x-1)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}=\dfrac{x^{11}-1}{x-1}$

여기서 $x-1=t$라 하면 $x=1+t$이므로

$f(t)=\dfrac{(1+t)^{11}-1}{(1+t)-1}=\dfrac{(1+t)^{11}-1}{t}$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{(1+x)^{11}-1}{x}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$

위 식의 양변에 x를 곱하여 정리하면

$(1+x)^{11}=1+a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\cdots+a_{10}x^{11}$

따라서 a_4는 $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^5의 계수와 같으므로

$a_4={}_{11}C_5$

32 답 ⑤

$(k+1)(1+x)^k$의 전개식에서 x^2의 계수는 $(k+1){}_kC_2$이다.

$(k+1){}_kC_2=(k+1)\times\dfrac{k!}{(k-2)!2!}=\dfrac{(k+1)!}{(k-2)!2!}$

$\qquad=3\times\dfrac{(k+1)!}{(k-2)!3!}=3\times{}_{k+1}C_3$

이때, $k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 99$이므로 x^2의 계수는

$3({}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{99}C_3+{}_{100}C_3)=3\times{}_{101}C_4$

33 답 172

(i) ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_9C_7={}_{10}C_7$

(ii) ${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_9C_8={}_{10}C_8$이므로
${}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_9C_8={}_{10}C_8-{}_1C_0={}_{10}C_8-1$

(iii) ${}_2C_2+{}_3C_3+{}_4C_4+\cdots+{}_9C_9=8$

따라서 색칠한 부분의 모든 수의 합은

${}_{10}C_7+({}_{10}C_8-1)+8={}_{11}C_8+7=165+7=172$

34 답 ②

${}_nC_r+{}_nC_{r+1}={}_{n+1}C_{r+1}$이므로

$({}_0C_0+{}_1C_0)+{}_2C_0+{}_3C_0+\cdots+{}_6C_0$

$=({}_1C_1+{}_1C_0)+{}_2C_0+{}_3C_0+\cdots+{}_6C_0$

$=({}_2C_1+{}_2C_0)+{}_3C_0+\cdots+{}_6C_0$

$=({}_3C_1+{}_3C_0)+\cdots+{}_6C_0$

$\vdots$

$={}_7C_1$

마찬가지로

${}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_7C_1={}_8C_2$

${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_8C_2={}_9C_3$

${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3={}_{10}C_4$

따라서 주어진 모든 수의 합을 S라 하면

$S={}_7C_1+{}_8C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4$

$\quad=({}_6C_0+{}_7C_1+{}_8C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4)-{}_6C_0$

$\quad={}_{11}C_4-1=329$

35 답 ④

$2{}_{12}C_0+3{}_{12}C_1+4{}_{12}C_2+\cdots+14{}_{12}C_{12}$

$=2({}_{12}C_0+{}_{12}C_1+{}_{12}C_2+\cdots+{}_{12}C_{12})$

$\quad+({}_{12}C_1+2{}_{12}C_2+3{}_{12}C_3+\cdots+12{}_{12}C_{12})$

$=2\times2^{12}+12\times2^{11}$

$=2^{13}+3\times2^{13}$

$=(1+3)\times2^{13}=2^{15}$

$\therefore n=15$

36 답 ⑤

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$임을 이용하자.

ㄱ. ${}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_6+{}_{10}C_7$

$={}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3+{}_{10}C_3$

$={}_{11}C_4={}_{11}C_7$ (참)

ㄴ. $S={}_8C_1+2{}_8C_2+3{}_8C_3+\cdots+7{}_8C_7+8{}_8C_8$이라 하면

$S={}_8C_7+2{}_8C_6+3{}_8C_5+\cdots+7{}_8C_1+8{}_8C_0$

두 식을 더하면

$2S=8({}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_7+{}_8C_8)=8\times2^8=2^{11}$

$\therefore S=2^{10}$ (참)

ㄷ. $({}_5C_0)^2+({}_5C_1)^2+({}_5C_2)^2+\cdots+({}_5C_5)^2$

$={}_5C_0\times{}_5C_0+{}_5C_1\times{}_5C_1+{}_5C_2\times{}_5C_2+\cdots+{}_5C_5\times{}_5C_5$

$={}_5C_0\times{}_5C_5+{}_5C_1\times{}_5C_4+{}_5C_2\times{}_5C_3+\cdots+{}_5C_5\times{}_5C_0$

위의 식은 $(1+x)^5(1+x)^5$의 전개식에서 x^5의 계수와 같다.

즉, $(1+x)^5(1+x)^5=(1+x)^{10}$에서 x^5의 계수는 ${}_{10}C_5$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

일등급 UP

*** 파스칼의 삼각형의 성질**

하키스틱 패턴을 이용하여 복잡해 보이는 식의 합을 간단히 나타낼 수 있다.

${}_rC_r+{}_{r+1}C_r+{}_{r+2}C_r+\cdots+{}_nC_r={}_{n+1}C_{r+1}$ (단, $r\le n$)

37 답 216

$N=69^5+5\times69^4+10\times69^3+10\times69^2+5\times69+1$

$={}_5C_0 69^5+{}_5C_1 69^4+{}_5C_2 69^3+{}_5C_3 69^2+{}_5C_4 69+{}_5C_5$

$=(69+1)^5=70^5$

$=2^5\times5^5\times7^5$ ········ ⓐ

따라서 N의 약수의 개수는

$(5+1)(5+1)(5+1)=6^3=216$ ········ ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ N을 소인수분해한다.	[60%]
ⓑ N의 약수의 개수를 구한다.	[40%]

38 답 21

$21^{21}=(1+20)^{21}$

$=1+{}_{21}C_1\times20+{}_{21}C_2\times20^2+{}_{21}C_3\times20^3+\cdots+{}_{21}C_{21}\times20^{21}$ ········ ⓐ

이때, ${}_{21}C_2\times20^2$ 이후는 40으로 나누어떨어지므로 ${}_{21}C_2\times20^2$부터 ${}_{21}C_{21}\times20^{21}$까지의 합을 40으로 나눈 몫을 m이라 하면

$21^{21}=1+{}_{21}C_1\times20+40m=421+40m$

$=40\times10+21+40m=40(10+m)+21$

따라서 구하는 나머지는 21이다. ········ ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ $(1+20)^{21}$을 전개한다.	[40%]
ⓑ 21^{21}을 40으로 나눈 나머지를 구한다.	[60%]

39 답 98

구하는 부분집합은

(홀수가 홀수 개 있는 집합)∪(짝수가 없거나 짝수 개인 집합)의 꼴인 집합이다. ········ ⓐ

1부터 100까지의 자연수 중 홀수와 짝수가 각각 50개씩이므로 홀수가 홀수 개 있는 부분집합의 개수는

${}_{50}C_1+{}_{50}C_3+\cdots+{}_{50}C_{49}=2^{49}$

또한, 짝수가 짝수 개 있는 부분집합의 개수는 공집합을 포함하여

${}_{50}C_0+{}_{50}C_2+\cdots+{}_{50}C_{50}=2^{49}$ ········ ⓑ

따라서 $N=2^{49}\times2^{49}=2^{98}$

$\therefore k=98$ ········ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 구하는 부분집합의 꼴을 이해한다.	[20%]
ⓑ 부분집합의 개수를 구한다.	[50%]
ⓒ k의 값을 구한다.	[30%]

[다른 풀이]

1부터 100까지 수를 원소로 갖는 집합에 대하여

원소가 홀수 개인 부분집합의 개수는

${}_{100}C_1+{}_{100}C_3+\cdots+{}_{100}C_{99}=2^{99}$

이때, 홀수가 홀수 개이고 짝수가 없거나 짝수 개인 부분집합의 개수와 홀수가 없거나 짝수 개이고 짝수가 홀수 개인 부분집합의 개수가 같으므로 구하는 부분집합의 개수는 $\frac{2^{99}}{2}=2^{98}$이다.

40 답 3

$\left(ax+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4C_r(ax)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r a^{4-r}x^{4-2r}$

상수항은 $r=2$일 때이므로

상수항은 ${}_4C_2\times a^2=54$

$a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

41 답 ②

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ (단, $n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$)의 전개식에서 일반항은

${}_nC_r x^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_nC_r x^{n-2r}$이므로

$n-2r=2$에서

(i) $n=3,\ n=5$일 때,

$n-2r=2$를 만족시키는 정수 r의 값이 존재하지 않으므로 x^2항은 존재하지 않는다.

(ii) $n=2,\ n=4,\ n=6$일 때,

$n-2r=2$를 만족시키는 r의 값은 각각 0, 1, 2이므로 x^2의 계수는

${}_2C_0+{}_4C_1+{}_6C_2=1+4+15=20$

42 답 12

$2(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$2{}_nC_1a=2an$

$(x-1)(x+a)^n=x(x+a)^n-(x+a)^n$의 전개식에서

x^{n-1}의 계수는 ${}_nC_2a^2-an=\frac{n(n-1)}{2}a^2-an$

이때, $2an=\frac{n(n-1)}{2}a^2-an$에서

$3an=\frac{n(n-1)}{2}a^2$이므로 $3=\frac{n-1}{2}a$

$\therefore\ a(n-1)=6\ \cdots$ ㉠

㉠을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

a	$n-1$	n	an
1	6	7	7
2	3	4	8
3	2	3	9
6	1	2	12

따라서 구하는 an의 최댓값은 12이다.

43 답 ⑤

$(x+1)^{24}$에서 x^{22}의 계수는 ${}_{24}C_{22}={}_{24}C_2$

$x(x+1)^{23}$에서 x^{22}의 계수는 ${}_{23}C_{21}={}_{23}C_2$

$x^2(x+1)^{22}$에서 x^{22}의 계수는 ${}_{22}C_{20}={}_{22}C_2$

$\vdots$

$x^{22}(x+1)^2$에서 x^{22}의 계수는 ${}_2C_0={}_2C_2$

따라서 구하는 계수는

${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{24}C_2={}_{25}C_3=2300$

44 답 ③

(1) $c=2k_1,\ d=2k_2$인 경우

$2a+2b+c+d=2n$, 즉 $2a+2b+2k_1+2k_2=2n$에서

$a+b+k_1+k_2=n$이므로 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_4H_n={}_{n+3}C_n=\underbrace{{}_{n+3}C_3}_{(가)}$

(2) $c=2k_3+1,\ d=2k_4+1$인 경우

$2a+2b+c+d=2n$에서 $2a+2b+2k_3+1+2k_4+1=2n$

$a+b+k_3+k_4=n-1$이므로 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_4H_{n-1}={}_{n+2}C_{n-1}=\underbrace{{}_{n+2}C_3}_{(나)}$

(1), (2)에 의하여

$a_n={}_{n+3}C_3+{}_{n+2}C_3$

이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8$

$=({}_4C_3+{}_3C_3)+({}_5C_3+{}_4C_3)+({}_6C_3+{}_5C_3)+\cdots$

$+({}_{10}C_3+{}_9C_3)+({}_{11}C_3+{}_{10}C_3)$

$={}_3C_3+2({}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3)+{}_{11}C_3$

$=2({}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3)+{}_{11}C_3-{}_3C_3$

$=2{}_{11}C_4+{}_{11}C_3-{}_3C_3$

$={}_{12}C_4+{}_{11}C_4-{}_3C_3$

$=495+330-1=\underbrace{824}_{(다)}$

따라서 $f(n)={}_{n+3}C_3,\ g(n)={}_{n+2}C_3,\ r=824$이므로

$f(6)+g(5)+r={}_9C_3+{}_7C_3+824$

$=84+35+824$

$=943$

45 답 ④

$S={}_{30}C_0+{}_{30}C_4+{}_{30}C_8+{}_{30}C_{12}+{}_{30}C_{16}+{}_{30}C_{20}+{}_{30}C_{24}+{}_{30}C_{28}$이라 하면 ${}_{30}C_r={}_{30}C_{30-r}\ (0\le r\le 30)$이므로

$S={}_{30}C_{30}+{}_{30}C_{26}+{}_{30}C_{22}+{}_{30}C_{18}+{}_{30}C_{14}+{}_{30}C_{10}+{}_{30}C_6+{}_{30}C_2$

두 식을 변끼리 더하면

$2S={}_{30}C_0+{}_{30}C_2+{}_{30}C_4+{}_{30}C_6+\cdots+{}_{30}C_{28}+{}_{30}C_{30}=2^{29}$

$\therefore\ S=2^{28}$

46 답 ②

ㄱ. 파스칼의 삼각형에서

${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3+{}_{10}C_3={}_{11}C_4$ (참)

ㄴ. ${}_nP_3={}_nC_3\times 3!$이므로

${}_3P_3+{}_4P_3+{}_5P_3+\cdots+{}_9P_3+{}_{10}P_3$

$=3!\times({}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_3+{}_{10}C_3)$

$=3!\times{}_{11}C_4=3!\times\frac{{}_{11}P_4}{4!}=\frac{1}{4}{}_{11}P_4$ (참)

ㄷ. ${}_nH_3={}_{n+2}C_3$이므로

${}_3H_3+{}_4H_3+{}_5H_3+\cdots+{}_9H_3+{}_{10}H_3$

$={}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+\cdots+{}_{12}C_3$

$=({}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+\cdots+{}_{12}C_3)-({}_3C_3+{}_4C_3)$

$={}_{13}C_4-(1+4)={}_{10}H_4-5$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

47 답 ②

항등식 $(1+x)^{10}(1-x)^{10}=(1-x^2)^{10}$에서

$(1+x)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1x+{}_{10}C_2x^2+\cdots+{}_{10}C_{10}x^{10}$

$(1-x)^{10}={}_{10}C_0-{}_{10}C_1x+{}_{10}C_2x^2-\cdots+{}_{10}C_{10}x^{10}$

이므로 두 식을 곱한 식의 우변에서 x^{10}의 계수는

${}_{10}C_0\times{}_{10}C_{10}-{}_{10}C_1\times{}_{10}C_9+{}_{10}C_2\times{}_{10}C_8-\cdots+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_0$

$=({}_{10}C_0)^2-({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2-\cdots-({}_{10}C_9)^2+({}_{10}C_{10})^2$

한편, 두 식을 곱한 식의 좌변 $(1+x)^{10}(1-x)^{10}=(1-x^2)^{10}$의 전개식에서 일반항은

${}_{10}C_k(-x^2)^k={}_{10}C_k(-1)^k\times x^{2k}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$

x^{10}의 계수는 $k=5$일 때이므로

${}_{10}C_5(-1)^5=-{}_{10}C_5$

$\therefore\ ({}_{10}C_0)^2-({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2-\cdots-({}_{10}C_9)^2+({}_{10}C_{10})^2=-{}_{10}C_5$

48 답 ②

원소의 개수가 k인 집합 X의 부분집합 B의 개수는 ${}_{10}C_k(1\le k\le 10)$이고, 원소의 개수가 k인 집합 B의 부분집합 중 공집합이 아닌 부분집합 A의 개수는 2^k-1이므로 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

${}_{10}C_1(2^1-1)+{}_{10}C_2(2^2-1)+{}_{10}C_3(2^3-1)+\cdots+{}_{10}C_{10}(2^{10}-1)$

$=({}_{10}C_0+{}_{10}C_1 2^1+{}_{10}C_2 2^2+{}_{10}C_3 2^3+\cdots+{}_{10}C_{10}2^{10})$

$-({}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10})$

$=(1+2)^{10}-(1+1)^{10}$

$=3^{10}-2^{10}$

49 답 ②

공의 수를 $k(1\le k\le 10)$라 하면

10개의 공 중에서 k개를 꺼내는 방법의 수는 ${}_{10}C_k$

꺼낸 서로 다른 k개의 공을 A, B, C 세 상자에 넣는 방법의 수는

${}_3\Pi_k=3^k$

따라서 k개의 공을 꺼내 세 상자에 넣는 방법의 수는 ${}_{10}C_k\times 3^k$이고

$1\le k\le 10$이므로 구하는 방법의 수는

${}_{10}C_1\times 3+{}_{10}C_2\times 3^2+{}_{10}C_3\times 3^3+\cdots+{}_{10}C_{10}\times 3^{10}$

$=({}_{10}C_0\times 3^0+{}_{10}C_1\times 3+{}_{10}C_2\times 3^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times 3^{10})-{}_{10}C_0\times 3^0$

$=(1+3)^{10}-1$

$=4^{10}-1$

Ⅱ 확률

1st 03 확률의 뜻과 활용

문제편 33P

01 답 ②

①, ③, ④, ⑤ {7}

② {5, 7}

02 답 310

1, 2, 3, 4, 5, 6이 각각 적힌 여섯 장의 카드 중 임의로 서로 다른 두 장을 뽑아서 카드에 적힌 수로 두 자리의 정수를 만드는 시행의 표본 공간의 원소의 개수 $n={}_6P_2=30$

그 중 3의 배수는 12, 15, 21, 24, 36, 42, 45, 51, 54, 63의 10개이므로 $k=10$

또한, 확률 $p=\dfrac{k}{n}$이므로

$n(k+p)=n\left(k+\dfrac{k}{n}\right)=(n+1)k=310$

03 답 ③

5명의 출연 순서를 정하는 경우의 수는 $5!$

첫 번째와 마지막 출연자가 모두 여학생인 경우의 수는 ${}_3P_2\times 3!$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{{}_3P_2\times 3!}{5!}=\dfrac{3}{10}$

04 답 ④

통계적 확률이 $\dfrac{60}{75}=\dfrac{4}{5}$이므로 페널티킥을 10번 시도하여 x골을 넣을 것으로 기대된다고 하면 $\dfrac{x}{10}=\dfrac{4}{5}$에서 $x=8$이다.

05 답 ②

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$P(A\cup B)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{3}-P(A\cap B)$

이때, $P(A\cup B)\le 1$이므로

$\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{3}-P(A\cap B)\le 1$

$\therefore\ P(A\cap B)\ge\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{3}-1=\dfrac{4}{15}$

따라서 $P(A\cap B)$의 최솟값은 $\dfrac{4}{15}$이다.

06 답 ⑤

① 두 사건 $A,\ B$가 모두 전사건이면

$P(A)=P(B)=P(A\cap B)=1$이고

$P(A)+P(B)+P(A\cap B)$의 최댓값은 3이다. (참)

② 확률의 덧셈정리에서

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$ (참)

③ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$P(A\cap B)=0$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다. (참)

④ $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$ (참)

⑤ $P(A)+P(B)+P(A^C\cap B^C)$

$=P(A)+P(B)+1-P(A\cup B)$

$=1+P(A\cap B)$ (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

07 답 ②

주어진 조건에서

$P(A\cup B)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{6}$이고

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\therefore P(A)=P(A\cup B)-P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

08 답 ⑤

5개의 의자 중 A, B 두 사람이 앉을 자리를 ●로 표시하면 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는 그림과 같이 4가지 경우이고 각 경우에 서로 위치를 바꿀 수 있으므로 $4\times2=8$이다.

● ● ○ ○ ○
○ ● ● ○ ○
○ ○ ● ● ○
○ ○ ○ ● ●

즉, A, B 두 사람이 이웃하게 앉을 확률은 $\frac{8}{{}_5P_2}=\frac{2}{5}$이므로 구하는 확률은 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

[다른 풀이]

A, B 두 사람이 서로 이웃하지 않게 앉는 경우는 다음 6가지 경우이다.

● ○ ● ○ ○
● ○ ○ ● ○
● ○ ○ ○ ●
○ ● ○ ● ○
○ ● ○ ○ ●
○ ○ ● ○ ●

이때, 위의 각각의 경우에 A, B 두 명이 앉는 방법의 수는 $2!$이므로 두 사람이 이웃하지 않게 앉는 방법의 수는 $6\times2!=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{{}_5P_2}=\frac{3}{5}$

09 답 ⑤

주사위를 1회 던지는 시행에서

시행 : 주사위를 던져 나오는 눈의 수를 관찰

표본공간 : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

근원사건 : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$

사건 : $\varnothing$ ⇨ 7 이상의 눈이 나오는 사건

$\{1\}$ ⇨ 1의 눈이 나오는 사건

$\{1, 3, 5\}$ ⇨ 홀수의 눈이 나오는 사건

⋮

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ⇨ 전사건

ㄱ. 표본공간의 원소는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다. (참)

ㄴ. 시행의 결과로 나타나는 사건의 가짓수는 표본공간의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^6=64$ (참)

ㄷ. 근원사건은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$의 6개이므로 표본공간의 원소의 개수와 같다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 (1) 57 (2) 해설 참조

(1) 표본공간 S_1의 원소의 개수는 중복을 허락하여 6개의 눈에서 2개를 선택하는 경우의 수이므로 ${}_6H_2$

표본공간 S_2의 원소의 개수는 중복을 허락하여 6개의 눈에서 2개를 나열하는 경우의 수이므로 ${}_6\Pi_2$

$\therefore n(S_1)+n(S_2)={}_6H_2+{}_6\Pi_2=21+36=57$

(2) 표본공간 S_1은 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 같지 않으므로 눈의 수의 합이 2가 될 확률은 서로 다른 주사위 2개를 동시에 던질 때인 표본공간 S_2를 선택하여야 한다. 이때, 눈의 수의 합이 2가 되는 사건을 A라고 하면 $A=\{(1, 1)\}$이므로 구하는 확률은

$\frac{n(A)}{n(S_2)}=\frac{1}{36}$

11 답 ③

근원사건이 일어날 가능성이 같게 하려면 공 5개가 서로 다르고, 세 개의 상자도 서로 다르다고 생각한다.

서로 다른 공 5개를 서로 다른 세 개의 상자에 임의로 넣는 경우의 수는 ${}_3\Pi_5$

또한, 두 상자를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2$이고, 두 상자에 공을 넣는 경우의 수는 ${}_2\Pi_5$이다. 이때, 선택한 두 상자 중 한 상자에만 공이 들어가는 경우는 2가지이므로 두 개의 상자에만 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3C_2\times({}_2\Pi_5-2)$

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_3C_2\times({}_2\Pi_5-2)}{{}_3\Pi_5}=\frac{90}{243}=\frac{10}{27}$

12 답 ②

다섯 장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$

이 중 세 자리가 일치하는 경우는 원래의 카드에서 두 자리만 선택해 자리를 바꾸는 경우이므로 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

네 자리가 일치하는 경우는 없다.

다섯 자리가 일치하는 경우의 수는 1

따라서 구하는 확률은 $\frac{10+1}{120}=\frac{11}{120}$

13 답 ②

작년 입장객 1명이 음료수를 구입할 확률은

$\frac{150000}{250000}=\frac{3}{5}$이므로 이 확률대로 올해도 팔린다고 하면

$15000\times\frac{3}{5}=9000$(병)을 준비하는 것이 적당하다.

14 답 ⑤

ㄱ. $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$, $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$

이때, $A\subset B$이므로 $n(A)\le n(B)$

$\therefore P(A)\le P(B)$ (참)

ㄴ. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이고,

$P(A\cap B)\ge 0$이므로 $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$ (참)

ㄷ. $P(A\cup B)\le 1$이므로 $P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le 1$

$\therefore P(A\cap B)\ge P(A)+P(B)-1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15 답 ⑤

$P(A)=p\ (0\le p\le 1)$이라 하면 $P(B)=1-p$

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=1-P(A)\times P(B)=1-p(1-p)\\&=p^2-p+1=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ (0\le p\le 1)\end{aligned}$$

따라서 $p=\frac{1}{2}$일 때 $P(A\cup B)$는 최솟값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

16 답 ④

1, 2, 3, 4, 5, 6이 각각 적힌 6장의 카드 중 세 카드를 택하여 일렬로 나열해 만든 세 자리의 자연수의 개수는 ${}_6P_3=120$이다.

이 자연수가 2의 배수가 되는 사건을 A, 3의 배수가 되는 사건을 B라 하자.

(i) 2의 배수는 일의 자리의 수가 2, 4, 6 중 하나이고 백의 자리와 십의 자리에 남은 5개의 숫자 중에 2개를 나열하는 것이므로 $3\times{}_5P_2=60$이다.

즉, $P(A)=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$

(ii) 3의 배수는 각 자리의 세 수의 합이 3의 배수가 되도록 수를 선택하여 나열하면 된다. 여섯 개의 수를 다음과 같이 분류하면

3으로 나누어 1이 남는 수 : 1, 4

3으로 나누어 2가 남는 수 : 2, 5

3으로 나누어떨어지는 수 : 3, 6

각 그룹에서 각각 하나씩을 선택해 나열하는 방법은

$2^3\times 3!=48$이다.

즉, $P(B)=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

(iii) 6의 배수는 2의 배수이면서 3의 배수이므로 일의 자리의 수가 짝수이고 (ii)의 세 그룹 중 일의 자리의 수로 선택된 짝수가 속하지 않은 두 그룹에서 각각 하나씩을 선택해 백의 자리와 십의 자리에 나열하는 것이므로 $3\times 2^2\times 2!=24$이다.

즉, $P(A\cap B)=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

(i), (ii), (iii)에서 2의 배수 또는 3의 배수가 될 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{7}{10}\end{aligned}$$

17 답 ②

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $P(A\cap B)=0$

따라서 $P(A\cap B^C)=P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A^C\cap B)=P(B)=\frac{1}{4}$

이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

18 답 ①

전체 문자열의 개수는 $5^3=125$

e를 포함하지 않은 문자열의 개수는 $4^3=64$

문자열이 e를 반드시 포함하는 사건은 문자열이 e를 포함하지 않는 사건의 여사건이므로 구하는 확률은 $1-\frac{64}{125}=\frac{61}{125}$

19 답 ④

숫자 k가 k번째 놓이는 사건을 $A_k\,(k=1, 2, \cdots, 5)$라 하면

$P(A_k)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$

한편, $P(A_1\cap A_5)=\frac{3!}{5!}=\frac{1}{20}$이므로

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_5)&=P(A_1)+P(A_5)-P(A_1\cap A_5)\\&=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=\frac{7}{20}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A_1^C\cap A_5^C)&=P((A_1\cup A_5)^C)\\&=1-P(A_1\cup A_5)\\&=1-\frac{7}{20}=\frac{13}{20}\end{aligned}$$

20 답 **20**

집합 $\{1,\ 2\}$를 표본공간으로 하는 시행에서 일어나는 사건은 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,\ 2\}$이므로 이 사건들을 근원사건으로 하는 새로운 시행의 표본공간 S는 $S=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\}$
이므로 표본공간 S의 원소의 개수 $n=4$이고
이 새로운 시행에서 나타나는 사건의 가짓수 $k=2^4=16$이다.
$\therefore n+k=20$

21 답 **71**

999 이하의 세 자리의 자연수의 개수는 900이고
$a\neq 0$이므로 $a\le b\le c$인 경우의 수는 9 이하의 자연수에서 중복을 허락하여 세 수를 선택하는 경우의 수와 같다.
즉, ${}_{9}\mathrm{H}_{3}={}_{11}\mathrm{C}_{3}=165$이므로 구하는 확률은 $\dfrac{165}{900}=\dfrac{11}{60}$
$\therefore p+q=60+11=71$

[다른 풀이]
999 이하의 세 자리의 자연수의 개수는 900이고
(i) $a=b=c$인 경우의 수는 9
(ii) $a=b<c$인 경우의 수는 ${}_{9}\mathrm{C}_{2}=36$
(iii) $a<b=c$인 경우의 수는 ${}_{9}\mathrm{C}_{2}=36$
(iv) $a<b<c$인 경우의 수는 ${}_{9}\mathrm{C}_{3}=84$
(i)~(iv)에 의하여 $a\le b\le c$일 확률은 $\dfrac{9+36+36+84}{900}=\dfrac{165}{900}=\dfrac{11}{60}$
$\therefore p+q=60+11=71$

22 답 ③

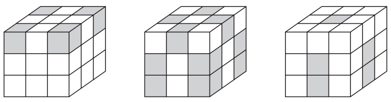
5개의 서로 다른 과일을 3개의 서로 다른 접시에 임의로 나누어 담는 모든 경우의 수는 $3^5=243$
그 중 어느 두 접시에 과일을 모두 담는 경우의 수는
${}_{3}\mathrm{C}_{2}\times(2^5-2)=90$
어느 한 접시에 과일을 모두 담는 경우의 수는 3가지이므로
빈 접시가 없는 경우의 수는 $243-90-3=150$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{150}{243}=\dfrac{50}{81}$

23 답 **6**

0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 세 자리 정수의 개수는 $5\times5\times4=100$
또한, 세 자리의 정수가 6의 배수이려면 짝수이면서 동시에 3의 배수이어야 한다. 이때, 짝수가 되려면 일의 자리에 짝수가 오고, 3의 배수가 되려면 각 자리 수의 합이 3의 배수이면 된다.
0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개의 숫자에서 3으로 나눈 나머지가 같은 수들로 분류하면 $(0,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(2,\ 5)$이고, 각 쌍에서 하나의 수를 택하여 세 자리의 수를 만들면 각 자리 수의 합이 3의 배수가 되므로 일의 자리의 수가 짝수일 때의 3의 배수인 세 자리의 정수를 살펴보면
(i) 일의 자리에 0이 올 때, 구하는 정수의 개수는 $2\times2\times2=8$
(ii) 일의 자리에 2가 올 때, 0은 백의 자리에 올 수 없으므로 구하는 정수의 개수는 $2\times2\times2-2=6$
(iii) 일의 자리에 4가 올 때, (ii)와 마찬가지 방법으로 하면 구하는 정수의 개수는 $2\times2\times2-2=6$
(i)~(iii)에 의하여 6의 배수인 세 자리 정수의 개수는
$8+6+6=20$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$
$\therefore p+q=5+1=6$

24 답 **467**

27개의 블록 중에서 두 개를 선택하는 모든 경우의 수는 ${}_{27}\mathrm{C}_{2}$



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

색칠한 면이 3개인 블록은 [그림 1]과 같이 4개
색칠한 면이 2개인 블록은 [그림 2]와 같이 12개
색칠한 면이 1개인 블록은 [그림 3]과 같이 9개
색칠한 면이 없는 블록은 $27-4-12-9=2$(개)
두 블록의 색칠되어진 면의 개수의 총합이 3이 되려면
색칠한 면이 1개, 2개인 블록을 각각 1개씩 선택하거나
색칠한 면이 없는 블록과 3개인 블록을 각각 1개씩 선택하면 되므로
구하는 확률은
$\dfrac{{}_{9}\mathrm{C}_{1}\times{}_{12}\mathrm{C}_{1}+{}_{2}\mathrm{C}_{1}\times{}_{4}\mathrm{C}_{1}}{{}_{27}\mathrm{C}_{2}}=\dfrac{9\times12+2\times4}{351}=\dfrac{116}{351}$
따라서 $p=351$, $q=116$이므로 $p+q=467$

25 답 **163**

한 개의 주사위를 3번 던져 나오는 모든 경우의 수는 $6^3=216$이다.
이때, $(a-b)(b-c)<0$인 경우의 수는 전체 경우의 수에서 $(a-b)(b-c)\ge0$인 경우의 수를 빼면 된다.
(i) $a-b\ge0$이고 $b-c\ge0$, 즉 $a\ge b\ge c$인 경우의 수는 서로 다른 6개에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 조합의 수이므로
${}_{6}\mathrm{H}_{3}={}_{8}\mathrm{C}_{3}=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$
(ii) $a-b\le0$이고 $b-c\le0$, 즉 $a\le b\le c$인 경우의 수는 (i)과 마찬가지로 56이다.
(i), (ii)에서 a, b, c가 모두 같은 경우가 중복하므로
$(a-b)(b-c)\ge0$인 경우의 수는 $56+56-6=106$
따라서 $(a-b)(b-c)<0$인 경우의 수는 $216-106=110$이므로
(구하는 확률)$=\dfrac{110}{216}=\dfrac{55}{108}$
$\therefore p+q=108+55=163$

일등급 UP

*** $(a-b)(b-c)$의 부호**

서로 다른 세 수 a, b, c의 대소에 따라 $(a-b)(b-c)$의 부호는 다음 표와 같다.

$(a-b)(b-c)>0$	$(a-b)(b-c)<0$
$a>b>c$ $c>b>a$	$a>c>b,\ b>a>c$ $b>c>a,\ c>a>b$

26 답 25

활을 50번 쏘아 성공률이 0.7인 것은 35번 과녁을 맞혔다는 것이다. 활을 최소로 더 쏘아서 성공률을 높이려면 앞으로 쏘는 모든 화살이 과녁에 맞아야 한다. 앞으로 x번의 화살을 모두 과녁에 맞힌다고 하면

성공률은 $\dfrac{35+x}{50+x}\geq 0.8$에서

$35+x\geq 40+0.8x,\ 0.2x\geq 5 \quad \therefore\ x\geq 25$

따라서 성공률이 0.8 이상이 되게 하려면 최소 25번의 화살을 쏘아야 한다.

27 답 ③

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $Y=\{-1,\ 0,\ 1\}$로의 함수 f는 모두 $3^4=81$(개)이다.

그 중 $f(1)\times f(2)=0$을 만족시키는 함수는

$f(1)=0$ 또는 $f(2)=0$인 함수이다.

$f(1)=0$인 함수가 선택되는 사건을 A,

$f(2)=0$인 함수가 선택되는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3^3}{81}=\dfrac{1}{3},\ \mathrm{P}(B)=\dfrac{3^3}{81}=\dfrac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3^2}{81}=\dfrac{1}{9}$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{5}{9}$

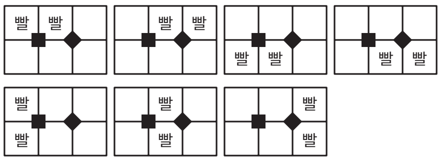
28 답 76

빨강, 파랑, 초록의 세 가지 색을 각각 두 번씩 사용하여 도형의 빈 곳을 색칠하는 방법의 수는 $\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$

(i) 빨강이 이웃하여 칠하여지는 사건을 A라 하면

다음 그림에서 $7\times\dfrac{4!}{2!2!}=42$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{42}{90}=\dfrac{7}{15}$

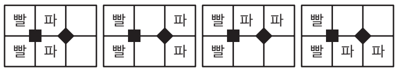


(ii) 파랑이 이웃하여 칠하여지는 사건을 B라 하면

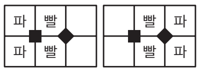
(i)과 같은 방법으로 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{7}{15}$

(iii) 빨강과 파랑이 모두 이웃하여 칠하여지는 경우의 수는

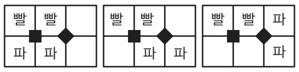
다음 그림에서



빨강 파랑 ⇨ $2\times 4=8$



빨강 파랑 ⇨ $1\times 2=2$



빨강 파랑 ⇨ $4\times 3=12$

$8+2+12=22$(가지)

이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{11}{45}$

(i)~(iii)에서 빨강이나 파랑이 이웃하여 색칠될 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{7}{15}+\dfrac{7}{15}-\dfrac{11}{45}=\dfrac{31}{45}$

$\therefore\ p+q=76$

29 답 ②

주어진 조건에서

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=1,\ \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(C)=\dfrac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=0$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$

에서 $1=\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(B\cap C)=\dfrac{6}{5}-1=\dfrac{1}{5}$

30 답 13

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$인 사건은

$(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$인 사건의 여사건이다.

$(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$인 사건은 $a,\ b,\ c$가 서로 다른 세 수인 경우이므로 경우의 수는 ${}_6\mathrm{P}_3$

따라서 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$일 확률은

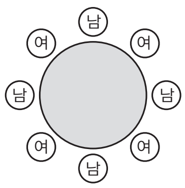
$1-\dfrac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3}=1-\dfrac{120}{216}=\dfrac{4}{9} \qquad \therefore\ p+q=9+4=13$

31 답 68

8명이 자리에 앉는 경우의 수는 $(8-1)!$

이때, 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되는 사건을 A라 하면 A^C은 4명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되지 않는 사건이다.

이때, A^C이 일어날 경우는 그림과 같이 배정하는 경우이다.



따라서 A^C이 일어나는 경우의 수는 $(4-1)!\times4!$이므로

$$p=\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{(4-1)!\times4!}{(8-1)!}$$

$$=1-\frac{3\times2\times1}{7\times6\times5}=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$$

$$\therefore\ 70p=70\times\frac{34}{35}=68$$

32 답 312

똑같은 세 개의 주사위를 동시에 던질 때 눈의 수의 합이

9인 경우는

$1+2+6,\ 1+3+5,\ 1+4+4,\ 2+2+5,\ 2+3+4,\ 3+3+3$

10인 경우는

$1+3+6,\ 1+4+5,\ 2+2+6,\ 2+3+5,\ 2+4+4,\ 3+3+4$

의 각각 6가지이므로 $a=6$ ········· ⓐ

서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6^3=216$이고, 눈의 수의 합이

9인 경우는

$(1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4)$ ⇨ 각각 $3!$가지

$(1, 4, 4), (2, 2, 5)$ ⇨ 각각 3가지

$(3, 3, 3)$ ⇨ 1가지

에서 $3\times3!+2\times3+1=25$(가지)이므로 $b=\frac{25}{216}$ ········· ⓑ

10인 경우는 $(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 3, 5)$ ⇨ 각각 $3!$가지

$(2, 2, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$ ⇨ 각각 3가지

에서 $3\times3!+3\times3=27$(가지)이므로 $c=\frac{27}{216}$ ········· ⓒ

$\therefore\ a^4\times(b+c)=6^4\times\left(\frac{25}{216}+\frac{27}{216}\right)=312$ ········· ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ a의 값을 구한다.	[30%]
ⓑ b의 값을 구한다.	[30%]
ⓒ c의 값을 구한다.	[30%]
ⓓ $a^4\times(b+c)$의 값을 구한다.	[10%]

33 답 8

주어진 식 $\frac{10x}{n}+\frac{n}{x}=7$의 양변에 nx를 곱하여 정리하면

$10x^2-7nx+n^2=0$

x가 자연수가 되기 위해서는 방정식 $10x^2-7nx+n^2=0$의 해 중 자연수가 존재하면 된다.

$10x^2-7nx+n^2=0$에서 $(2x-n)(5x-n)=0$

$\therefore\ x=\frac{n}{2}$ 또는 $x=\frac{n}{5}$

즉, 자연수 x가 존재할 확률은 n이 2의 배수 또는 5의 배수일 확률이다. ········· ⓐ

n이 2의 배수인 사건을 A, n이 5의 배수인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$$ ········· ⓑ

따라서 $p=5,\ q=3$이므로 $p+q=8$ ········· ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 자연수 x가 존재할 확률은 n이 2의 배수 또는 5의 배수일 확률임을 안다.	[50%]
ⓑ $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값을 구한다.	[40%]
ⓒ $p+q$의 값을 구한다.	[10%]

34 답 53

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{91}{216},\ \mathrm{P}(B)=1-\frac{3^3}{6^3}=\frac{189}{216}$ ········· ⓐ

$\mathrm{P}(A\cap B)$는 1의 눈과 짝수의 눈이 각각 적어도 한 번 나오는 사건의 확률이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각하자.

(i) 1, 짝수, 1이 아닌 홀수가 각각 한 번씩 나오는 경우

$3\times2\times3!=36$(가지)

(ii) 1이 두 번, 짝수가 한 번 나오는 경우

$3\times\frac{3!}{2!}=9$(가지)

(iii) 1이 한 번, 짝수가 두 번 나오는 경우

$3\times\frac{3!}{2!}+3\times3!=27$(가지)

(i), (ii), (iii)에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{36+9+27}{6^3}=\frac{72}{216}$ ········· ⓑ

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{91}{216}+\frac{189}{216}-\frac{72}{216}=\frac{208}{216}=\frac{26}{27}$$

$\therefore\ p+q=27+26=53$ ········· ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$의 값을 각각 구한다.	[30%]
ⓑ $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구한다.	[40%]
ⓒ $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값을 구하고 $p+q$의 값을 구한다.	[30%]

[다른 풀이]

$\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$에서 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$은 1이 나오지 않으며 홀수의 눈만 나오는 확률이므로 $\frac{2^3}{6^3}=\frac{1}{27}$이다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27}$$

(이하 동일)

35 답 11

갑이 주머니 A에서 두 장의 카드를 꺼내고, 을이 주머니 B에서 두 장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=36$

갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같은 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) 갑과 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 숫자가 모두 같을 때, 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

(ⅱ) 갑이 1과 4가 적힌 카드를 꺼내고 을은 2와 3이 적힌 카드를 꺼내거나 갑이 2와 3이 적힌 카드를 꺼내고 을은 1과 4가 적힌 카드를 꺼낼 경우의 수는 2

(ⅰ), (ⅱ)에서 갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같을 확률은

$\frac{6+2}{36}=\frac{2}{9}$

따라서 $p=9$, $q=2$이므로 $p+q=11$

36 답 ①

첫 번째와 두 번째 나온 수의 합이 4이려면

$4=2+2$ 또는 $4=1+3$ 또는 $4=3+1$

또, 세 번째 나온 수가 홀수이려면 1 또는 3의 수가 나와야 한다.

(ⅰ) (2, 2, 1) 또는 (2, 2, 3)인 경우

$\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{16}{216}$

(ⅱ) (1, 3, 1) 또는 (1, 3, 3)인 경우

$\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{12}{216}$

(ⅲ) (3, 1, 1) 또는 (3, 1, 3)인 경우

(ⅱ)와 마찬가지로 $\frac{12}{216}$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{16}{216}+\frac{12}{216}+\frac{12}{216}=\frac{40}{216}=\frac{5}{27}$

37 답 19

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_2=\frac{12\times11}{2\times1}=66$

이 중에서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립하려면

$x=y=z$일 수 없으므로 x, y, z 중에서 두 개가 서로 같아야 한다.

$x=y$를 만족시키는 순서쌍은

$(0, 0, 10)$, $(1, 1, 8)$, $\cdots$, $(5, 5, 0)$

의 6개이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3C_2\times6=3\times6=18$

따라서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립할 확률은

$\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$

이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$이 성립할 확률은

$1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$

$\therefore p+q=11+8=19$

38 답 ⑤

같은 숫자가 적혀 있는 카드가 2장 이상일 사건을 A라 하면 3장 모두 다른 카드가 나오는 사건은 A^C이다.

12장의 카드 중 3장의 카드를 선택하는 방법의 수는 ${}_{12}C_3$,

3장이 모두 다른 카드가 나오는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중 3개를 선택하는 방법의 수 ${}_4C_3$이고 선택된 숫자가 적혀 있는 카드 중 하나씩 선택하는 방법의 수는 각각 ${}_3C_1$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4C_3\times({}_3C_1)^3}{{}_{12}C_3}=\frac{27}{55}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{27}{55}=\frac{28}{55}$

39 답 ①

점 P가 세 번 이동할 때 두 점 A, P 사이의 거리는 1 또는 $\sqrt{3}$이다.

점 P가 세 번 이동하는 방법의 수는 $3^3=27$

이때, 두 점 A, P 사이의 거리가 $\sqrt{3}$인 방법의 수는 $3\times2\times1=6$

따라서 구하는 확률은

$1-\frac{6}{27}=\frac{21}{27}=\frac{7}{9}$

40 답 78

앞면이 보이도록 바닥에 놓여 있는 동전의 개수를 a, 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여 있는 동전의 개수를 b라 할 때, (a, b)로 나타내기로 하면 최초의 상태는 $(2, 3)$이고 3번의 시행의 결과도 $(2, 3)$이다.

가능한 경우를 표를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

<table>
<tr><th>경우</th><th></th><th>시행</th><th></th><th>시행</th><th></th><th>시행</th><th></th></tr>
<tr><td>(ⅰ)</td><td rowspan="6">(2, 3)</td><td rowspan="3">⇨</td><td rowspan="3">(2, 3)</td><td rowspan="3">⇨</td><td>(2, 3)</td><td rowspan="3">⇨</td><td rowspan="6">(2, 3)</td></tr>
<tr><td>(ⅱ)</td><td>(0, 5)</td></tr>
<tr><td>(ⅲ)</td><td>(4, 1)</td></tr>
<tr><td>(ⅳ)</td><td>⇨</td><td>(0, 5)</td><td>⇨</td><td>(2, 3)</td><td>⇨</td></tr>
<tr><td>(ⅴ)</td><td rowspan="2">⇨</td><td rowspan="2">(4, 1)</td><td rowspan="2">⇨</td><td>(2, 3)</td><td rowspan="2">⇨</td></tr>
<tr><td>(ⅵ)</td><td>(4, 1)</td></tr>
</table>

(ⅰ)의 경우의 확률은 $\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{27}{125}$

(ⅱ)의 경우의 확률은 $\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times1=\frac{3}{50}$

(ⅲ)의 경우의 확률은 $\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}=\frac{27}{250}$

(ⅳ)의 경우의 확률은 $\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times1\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{50}$

(ⅴ)의 경우의 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{27}{250}$

(ⅵ)의 경우의 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_1\times{}_1C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}=\frac{18}{250}$

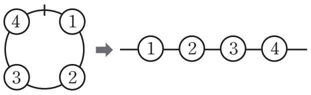
(ⅰ)~(ⅵ)에서 구하는 확률은

$p=\frac{27}{125}+\frac{3}{50}+\frac{27}{250}+\frac{3}{50}+\frac{27}{250}+\frac{18}{250}=\frac{78}{125}$

$\therefore 125p=78$

41 답 ③

그림과 같이 팔찌의 연결 끈을 끊어 일렬로 배열한 후, 차례로 1, 2, 3, 4의 번호를 붙이자.



검은 구슬과 흰 구슬을 각각 B, W라 하고 1, 2, 3, 4의 자리에 배열하면

B−B−W−W ⇨ a형 팔찌

B−W−B−W ⇨ b형 팔찌

B−W−W−B ⇨ a형 팔찌

W−B−B−W ⇨ a형 팔찌

W−B−W−B ⇨ b형 팔찌

W−W−B−B ⇨ a형 팔찌

즉, 팔찌가 만들어지는 경우의 수는 6이고, 이 중에서 a형 팔찌가 만들어지는 경우의 수는 4이므로 구하는 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

42 답 ②

조건 (i), (ii)에 의해

$p(1) \Rightarrow p(2) \Rightarrow p(2^2) \Rightarrow p(2^3) \Rightarrow p(2^4) \Rightarrow p(2^5) \Rightarrow p(2^6)$

이 모두 참이다.

위의 결과와 조건 (iii)에 의해

$p(1) \Rightarrow p(5) \Rightarrow p(5^2)$, $p(2) \Rightarrow p(2\times5) \Rightarrow p(2\times5^2)$

$p(2^2) \Rightarrow p(2^2\times5) \Rightarrow p(2^2\times5^2)$, $p(2^3) \Rightarrow p(2^3\times5)$

$p(2^4) \Rightarrow p(2^4\times5)$가 모두 참이다.

즉, $k=2^l\times5^m$(단, l, m은 음이 아닌 정수)인 100 이하의 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이다. 밑이 큰 5^m의 m을 기준으로 경우를 나누어 순서쌍 (m, l)의 개수를 구하면

$m=0$일 때, $1\le2^l\le100$에서 $0\le l\le6$의 7쌍

$m=1$일 때, $1\le5\times2^l\le100$에서 $0\le l\le4$의 5쌍

$m=2$일 때, $1\le5^2\times2^l\le100$에서 $0\le l\le2$의 3쌍

에서 $p(k)$가 참인 k의 값은 15개이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$

43 답 48

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=2\times\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=3\times\mathrm{P}(A\cap B)$

이때, $\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=3\times\mathrm{P}(A\cap B)$를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$인 경우

$n(A)=2$, $n(B)=1$, $n(A\cap B)=1$에서

$B\subset A$이므로 ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=12$(가지)

(ii) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$인 경우

(i)과 마찬가지로 12가지

(iii) $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{4}$인 경우

$n(A)=3$, $n(B)=3$, $n(A\cap B)=2$에서

$A\cap B$의 원소 두 개를 택하고 나머지 두 원소를 A, B에 각각 한 개씩 배열하는 방법이므로 ${}_4\mathrm{C}_2\times2!=12$(가지)

(iv) $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{4}$인 경우

$n(A)=4$, $n(B)=2$, $n(A\cap B)=2$에서

사건 A는 전사건이므로 ${}_4\mathrm{C}_2=6$(가지)

(v) $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{4}$인 경우

(iv)와 마찬가지로 6가지

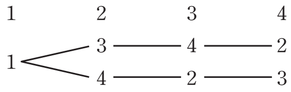
(i)~(v)에서 순서쌍 (A, B)의 개수는

$12+12+12+6+6=48$

44 답 ⑤

희재의 카드 1, 2, 3, 4에 대하여 의영이의 카드를 비교하는 모든 경우의 수는 $4!$이다.

이때, 같은 위치의 카드가 1장인 경우 1이 같다고 하면 경우의 수는 다음 수형도와 같이 2이다.



2, 3, 4의 경우도 마찬가지로 경우의 수는 각각 2이므로 구하는 경우의 수 $2\times4=8$ $\quad\therefore p_1=\frac{8}{4!}=\frac{1}{3}$

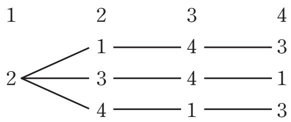
또한, 같은 위치의 카드가 3장인 경우는 없으므로 $p_3=0$

$\therefore p_0+p_2+p_4=1-(p_1+p_3)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

[다른 풀이]

(i) 같은 숫자의 카드가 없는 경우

1과 비교하여 나온 숫자가 2인 경우의 수는 다음 수형도와 같이 3이다.



3, 4의 경우도 마찬가지로 경우의 수는 각각 3이므로 구하는 경우의 수는 $3\times3=9$

$\therefore p_0=\frac{9}{4!}=\frac{9}{24}$

(ii) 같은 숫자의 카드가 2장인 경우

4장의 카드 중 2장이 같은 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$이고 나머지 두 장이 같지 않은 경우의 수는 1이므로 구하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$

$\therefore p_2=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{4!}=\frac{6}{24}$

(iii) 같은 숫자의 카드가 4장인 경우는 1가지이므로 구하는 확률은

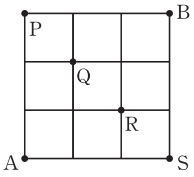
$p_4=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$p_0+p_2+p_4=\frac{9}{24}+\frac{6}{24}+\frac{1}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$

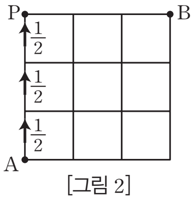
45 답 186

갑과 을이 만나는 경우는 오른쪽 그림과 같이 P, Q, R, S지점에서 만나는 4가지 경우이다.

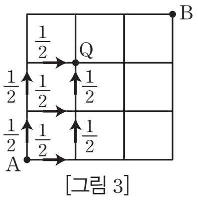


[그림 1]

(ⅰ) (조건 1)을 이용한 확률



[그림 2]



[그림 3]

A → P → B로 갈 확률은 [그림 2]에서 $\frac{1}{8}$이므로 P지점에서 갑과 을이 만날 확률은 $\left(\frac{1}{8}\right)^2$

A → Q → B로 갈 확률은 [그림 3]에서 $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$이므로 Q지점에서 갑과 을이 만날 확률은 $\left(\frac{3}{8}\right)^2$

R, S지점은 각각 Q, P지점과 대칭이므로 네 지점에서 갑과 을이 만날 확률은

$2\left\{\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2\right\}=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$

따라서 (조건 1)에 의해 두 사람이 서로 만나지 않고 각각 B, A 지점에 도착할 확률은 $1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$

(ⅱ) (조건 2)를 이용한 확률

모든 경우의 수는 $\left(\frac{6!}{3!3!}\right)^2=400$

A → P → B로 가는 경로의 수는 1

따라서 P지점에서 만나는 경우의 수는 1

A → Q → B로 가는 경로의 수는 $\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}$

따라서 Q지점에서 만나는 경우의 수는

$\left(\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)^2=81$

R, S지점은 각각 Q, P지점과 대칭이므로 네 지점에서 만나는 경우의 수는 $2(1+81)=164$

따라서 (조건 2)에 의해 두 사람이 서로 만나지 않고 각각 B, A 지점에 도착할 확률은 $1-\frac{164}{400}=\frac{59}{100}$

$\therefore p_1+p_2+q_1+q_2=16+100+11+59=186$

04 조건부확률

문제편 41P

01 답 ②

남학생인 사건을 M, 여학생인 사건을 F, 통학 수단이 자전거인 사건을 A라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(F|A)$이다.

$$\mathrm{P}(F|A)=\frac{\mathrm{P}(F\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(F\cap A)}{\mathrm{P}(M\cap A)+\mathrm{P}(F\cap A)}=\frac{\frac{18}{440}}{\frac{72}{440}+\frac{18}{440}}=\frac{18}{72+18}=\frac{1}{5}$$

02 답 ②

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C|A)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B|A)\}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{10}\right)=\frac{7}{20}$$

[다른 풀이]

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B|A)\}=\frac{7}{20}$$

03 답 ③

상자 A, B에서 꺼내는 공을 순서쌍 (A, B)로 표현하면

상자 C에 검은 공이 2개 들어갈 확률은 (검, 검)이므로

$\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{10}$

상자 C에 흰 공 1개, 검은 공 1개가 들어갈 확률은

(흰, 검) 또는 (검, 흰)이므로

$\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

따라서 상자 C에서 공을 1개 꺼낼 때, 검은 공을 꺼낼 확률은

$\frac{3}{10}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{20}$

04 답 ②

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

$$\mathrm{P}(A\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B)=1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=1-\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$$

에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}$

05 답 162

이차방정식 $ax^2-bx+1=0$의 두 근이 $\mathrm{P}(A^C\cap B)$, $\mathrm{P}(A\cap B^C)$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}=\frac{b}{a}$$
$$\mathrm{P}(A^C\cap B)\times\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A\cap B)\times\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}=\frac{1}{a}$$

따라서 $a=18$, $b=9$이므로 $ab=18\times9=162$

06 답 ②

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(n-2)x+n=0$이 실근을 가지므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(n-2)^2-n=n^2-5n+4\geq0$에서

$(n-1)(n-4)\geq0$

$n\leq1$ 또는 $n\geq4$

즉, 5개의 동전을 동시에 던져서 나온 앞면의 개수가 0, 1, 4, 5이면 주어진 이차방정식이 실근을 가진다.

따라서 여사건의 확률을 이용하면 구하는 확률은

$$1-{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^5-{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^5=1-\frac{5}{16}-\frac{5}{16}=\frac{3}{8}$$

07 답 55

주사위를 던져 1, 2, 3의 눈이 나오고 각각의 경우에 동전은 앞면이 1개, 2개, 3개 나올 확률은

$$\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3({}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_3)=\frac{7}{48}$$

$\therefore p+q=48+7=55$

08 답 ②

불량품이 나오는 사건을 E, A회사 제품이 나오는 사건을 A, B회사 제품이 나오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)}$$
$$=\frac{\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_{15}\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_3}}{\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_{15}\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_{15}\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_3}}$$
$$=\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1}=\frac{2}{5}$$

[다른 풀이]

각 제품이 선택될 가능성이 동등하고, 전체 5개의 불량품 중 2개가 A회사 제품이므로

꺼낸 불량품 하나가 A회사 제품일 확률은 $\frac{2}{5}$

09 답 ②

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}$이므로

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{3}$$

한편, $\mathrm{P}(A\cap B)=2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 위 식에 대입하면

$$\frac{2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{3}$$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{5}{18}$$

10 답 29

a_1, a_2, a_3, a_4를 일렬로 나열할 때 이웃한 두 수가 같지 않은 경우의 수는 $6\times5\times5\times5$

이 중에서 $a_1=a_4$인 경우를 a_1부터 a_4까지 차례로 정한다고 하면

(ⅰ) a_1과 a_4가 같은 숫자인 경우의 수는 6

(ⅱ) a_2는 a_1과 다르므로 경우의 수는 5

(ⅲ) a_3은 a_2, $a_4(=a_1)$와 다르므로 경우의 수는 4

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $a_1=a_4$인 경우의 수는 $6\times5\times4$이므로

구하는 확률은 $\frac{6\times5\times4}{6\times5\times5\times5}=\frac{4}{25}$

따라서 $p=25$, $q=4$이므로 $p+q=29$

11 답 ①

갑이 당첨제비를 뽑을 확률은 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore p_1=\frac{1}{5}$

을이 당첨제비를 뽑을 확률은 $\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore p_2=\frac{1}{5}$

병이 당첨제비를 뽑을 확률은

$\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore p_3=\frac{1}{5}$

$\therefore p_1=p_2=p_3=\frac{1}{5}$

일등급 UP

*** 같은 것이 있는 순열을 이용한 당첨 확률 구하기**

10개의 제비 중 2개의 당첨제비가 들어 있는 상자에서 제비뽑기를 10명이 순서대로 뽑는다는 것은 당첨을 O, 꽝을 X라 하면

O, O, X, X, X, X, X, X, X, X

를 나열하는 경우 중 하나를 선택하는 것이다.

모든 경우의 수는 $\frac{10!}{2!8!}=45$이고

첫 번째, 두 번째, 세 번째, $\cdots$, 열 번째에 각각 당첨되는 경우의 수는

$\frac{9!}{8!1!}=9$이므로 확률은 항상 $\frac{1}{5}$이다.

12 답 ④

A가 이기는 경우는 A가 흰 공 2개를 꺼내거나, A가 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내고, B가 검은 공 3개를 꺼내는 경우이다.

(i) A가 흰 공 2개를 꺼내는 경우 A가 이길 확률은

$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

(ii) A가 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내고, B가 검은 공 3개를 꺼내는 경우 A가 이길 확률은

$\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}\times\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{12}{21}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{35}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{7}+\frac{2}{35}=\frac{1}{5}$

13 답 ⑤

(i) 첫 번째 꺼낸 것이 흰 공이고 흰 공 5개, 빨간 공 2개가 들어 있는 상자에서 2개의 공을 꺼낼 때 적어도 흰 공을 하나 꺼낼 확률은

$\frac{4}{6}\times\left(1-\frac{{}_2C_2}{{}_7C_2}\right)=\frac{40}{63}$

(ii) 첫 번째 꺼낸 것이 빨간 공이고 흰 공 4개, 빨간 공 3개가 들어 있는 상자에서 2개의 공을 꺼낼 때 적어도 흰 공을 하나 꺼낼 확률은

$\frac{2}{6}\times\left(1-\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}\right)=\frac{18}{63}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{40}{63}+\frac{18}{63}=\frac{58}{63}$

[다른 풀이]

흰 공을 적어도 하나 꺼낼 사건은 두 개 모두 빨간 공을 꺼낼 사건의 여사건이므로 구하는 확률은

$1-\left(\frac{4}{6}\times\frac{{}_2C_2}{{}_7C_2}+\frac{2}{6}\times\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}\right)=1-\left(\frac{2}{63}+\frac{3}{63}\right)=\frac{58}{63}$

14 답 ④

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{3, 6\}$에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(C\cap A)=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(B\cup C)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))=\frac{1}{3}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\neq\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

ㄴ. $\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$

ㄷ. $\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(C\cap A)=\frac{1}{6}$

ㄹ. $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))=\frac{1}{3}$

따라서 서로 독립인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

15 답 ②

ㄱ. A와 B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(B|A)$ (거짓)

ㄴ. A와 B가 서로 독립이면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

즉, A^C과 B^C도 서로 독립이다. (참)

ㄷ. 【반례】 $S=\{1, 2\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2\}$일 때,

$\mathrm{P}(A\cup B)=1$이지만 $B\neq A^C$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

16 답 6

$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{14+x}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{9+x}{14+x}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{14+x}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{9}{14+x}=\frac{12}{14+x}\times\frac{9+x}{14+x}$

양변에 $(14+x)^2$을 곱하면

$9(14+x)=12(9+x)$

$\therefore x=6$

17 답 ④

주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로

구하는 확률은

$${}_{10}C_8\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_{10}C_9\left(\frac{1}{3}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)+{}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$=\frac{180}{3^{10}}+\frac{20}{3^{10}}+\frac{1}{3^{10}}=\frac{201}{3^{10}}=\frac{67}{3^9}$$

18 답 ④

ㄱ. ${}_{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6={}_{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4$ (참)

ㄴ. ${}_{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\neq{}_{20}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ (거짓)

ㄷ. ${}_8C_0\left(\frac{1}{2}\right)^8+{}_8C_1\left(\frac{1}{2}\right)^8+{}_8C_2\left(\frac{1}{2}\right)^8$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^8({}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2)=\frac{37}{2^8}<\frac{64}{2^8}=\frac{1}{4}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

19 답 85

6의 약수는 1, 2, 3, 6이고 4 이상의 수는 4, 5, 6이므로 주사위를 3번 던져 1, 2, 3 중의 한 수가 a회 나오고 4, 5 중의 한 수가 b회 나왔다고 하면 6은 $(3-a-b)$회 나온 것이다.

이때, $m=a+(3-a-b)=3-b$, $n=b+(3-a-b)=3-a$ 이므로

$|m-n|=|a-b|$

따라서 $i^{|m-n|}=-1$에서

$i^{|a-b|}=-1$, $|a-b|=2$

즉, $a=2$, $b=0$ 또는 $a=0$, $b=2$

(i) $a=2$, $b=0$일 때,

1, 2, 3 중의 한 수가 2회 나오고 6이 1회 나오는 것이므로

확률은 ${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$

(ii) $a=0$, $b=2$일 때,

4, 5 중의 한 수가 2회 나오고 6이 1회 나오는 것이므로

확률은 ${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{1}{18}=\frac{13}{72}$

따라서 $p=72$, $q=13$이므로 $p+q=85$

20 답 ⑤

하림이가 가위, 바위, 보를 내는 사건을 각각 A, B, C라 하고, 하림이가 이기는 사건을 E라 하면 다음 표에서

하림	지은	확률
가위	보	$0.3\times0.3=0.09$
바위	가위	$0.3\times0.3=0.09$
보	바위	$0.4\times0.4=0.16$

$\therefore \mathrm{P}(C|E)=\frac{\mathrm{P}(C\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.16}{0.09+0.09+0.16}=\frac{8}{17}$

21 답 ③

상금을 받을 확률은

(i) 상자 A를 택해 가설에 맞게 나온 경우

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{3}{10}$

(ii) 상자 B를 택해 가설에 맞지 않게 나온 경우

$\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{{}_3C_2\times{}_3C_1}{{}_6C_3}\right)=\frac{11}{40}$

(i), (ii)에 의하여 상금을 받았을 때, 처음 선택한 상자가 A이었을

확률은 $\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}+\frac{11}{40}}=\frac{12}{23}$

22 답 8

두 상자 A, B에 들어 있는 구슬의 개수가 다음 표와 같다고 하자.

	상자 A	상자 B
흰 구슬	$2x$	$20-x$
검은 구슬	$20-2x$	x
합계	20	20

두 상자 A, B에서 모두 흰 구슬을 1개씩 꺼낼 확률은

$\frac{2x}{20}\times\frac{20-x}{20}=\frac{x(20-x)}{200}$

이고, 두 상자 A, B에서 모두 검은 구슬을 1개씩 꺼낼 확률은

$\frac{20-2x}{20}\times\frac{x}{20}=\frac{x(10-x)}{200}$

한편, 두 상자에서 각각 1개씩 임의로 꺼낸 구슬이 서로 같은 색일 때, 그 색이 흰색일 확률이 $\frac{8}{11}$이므로

$\frac{\frac{x(20-x)}{200}}{\frac{x(20-x)}{200}+\frac{x(10-x)}{200}}=\frac{8}{11}$, $\frac{20-x}{30-2x}=\frac{8}{11}$

$x=4$이므로 상자 A에 들어 있는 흰 구슬의 개수는 $2x=8$이다.

23 답 3

A, B검표소를 통과하는 사건을 각각 A, B, 검표소를 통과하는 학생이 남학생, 여학생일 사건을 각각 M, F라 하자.

이때, A검표소를 통과한 남학생이 4명, 여학생이 n명이므로 B검표소를 통과한 남학생은 3명, 여학생은 $(7-n)$명이다.

$p=\mathrm{P}(A|F)=\frac{n}{7}$

$q=\mathrm{P}(M|B)=\frac{3}{3+(7-n)}=\frac{3}{10-n}$

$p=q$에서 $\frac{n}{7}=\frac{3}{10-n}$, $n^2-10n+21=0$

$(n-3)(n-7)=0$ $\quad\therefore n=3$ 또는 $n=7$

이때, $n=7$이면 B검표소를 통과한 여학생은 0명이 되어 문제의 조건에 모순이다. $\quad\therefore n=3$

24 답 ②

구하는 확률은 $(a-b)(b-c)\neq0$인 사건의 여사건의 확률이다.

$(a-b)(b-c)\neq0$이려면 $(a-b)\neq0$이고, $(b-c)\neq0$

(i) $a-b\neq0$, 즉 $a\neq b$인 경우

$\frac{6\times5}{36}=\frac{5}{6}$

(ii) $b-c\neq0$, 즉 $b\neq c$인 경우

(i)과 마찬가지로 $\frac{5}{6}$

(i), (ii)에 의하여

$(a-b)(b-c)\neq0$일 확률은 $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$

[다른 풀이]

$a=b$ 또는 $b=c$인 경우의 수는 각각 6^2

$a=b=c$인 경우의 수는 6

즉, $(a-b)(b-c)=0$인 경우의 수는

$6^2+6^2-6=66$

따라서 구하는 확률은 $\frac{66}{6\times6\times6}=\frac{11}{36}$

25 답 ②

갑, 을, 병이 학생회장에 당선되는 사건을 각각 A_1, A_2, A_3이라 하고, 두발 자율화가 실행되는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A_1)=\frac{8}{8+7+5}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A_2)=\frac{7}{20}$, $\mathrm{P}(A_3)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(B|A_1)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(B|A_2)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B|A_3)=\frac{3}{10}$

따라서 두발 자율화가 실행될 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B|A_1)+\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B|A_2)+\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(B|A_3)$$
$$=\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}+\frac{7}{20}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{10}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{7}{40}+\frac{3}{40}=\frac{1}{2}$$

26 답 2

프랑스가 어느 한 쪽의 조에 속하였다고 가정하자.

(i) 프랑스가 어느 한 쪽의 조에 속할 확률은 $\frac{1}{2}$

(ii) 크로아티아가 반대쪽에 속할 확률은 $\frac{8}{15}$

(iii) 두 팀 모두 3승을 거둘 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$

이때, 프랑스가 속할 수 있는 조는 2가지이므로

(i)~(iii)에 의하여 두 팀이 결승에서 만날 확률 p는

$p=2\times\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{120}$

$\therefore\ 240p=240\times\frac{1}{120}=2$

[다른 풀이]

16개의 나라 중에서 결승에서 만날 두 팀을 고르는 방법의 수는 ${}_{16}\mathrm{C}_2$

그 중 두 팀이 프랑스와 크로아티아인 경우의 수는 1이므로

구하는 확률은 $\frac{1}{{}_{16}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{120}$

(이하 동일)

27 답 ③

가위바위보 게임을 두 번 하여 한 사람의 승자가 정해지는 경우는

(i) 첫 게임에서 세 명 모두 승부가 나지 않고, 두 번째 게임에서 한 명만 이기는 경우

세 명 모두 같은 것을 내거나 모두 서로 다른 것을 낼 확률은

$\frac{3}{3^3}+\frac{3!}{3^3}=\frac{1}{3}$이고 세 명의 가위바위보 게임에서 한 명만 이길

확률은 $\frac{3\times3}{3^3}=\frac{1}{3}$이므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(ii) 첫 게임에서 두 명이 이기고, 두 번째 게임에서 첫 번째 게임 후 남은 두 사람 중 한 명이 이기는 경우

세 명의 가위바위보 게임에서 두 명이 이길 확률은 $\frac{3\times3}{3^3}=\frac{1}{3}$

이고 두 명의 가위바위보 게임에서 승부가 결정될 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{P}_2}{3^2}=\frac{2}{3}$이므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은 $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$

28 답 ②

A팀이 이긴 후 다음 경기에서 이길 확률은 $\frac{2}{5}$

A팀이 이긴 후 다음 경기에서 질 확률은 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

A팀이 진 후 다음 경기에서 질 확률은 $\frac{1}{3}$

A팀이 진 후 다음 경기에서 이길 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

따라서 가능한 모든 경우에 따른 확률을 구하면 다음과 같다.

(i)

1번째	2번째	3번째	4번째	5번째
승	승 $\frac{2}{5}$	패 $\frac{3}{5}$	패 $\frac{1}{3}$	승 $\frac{2}{3}$

이때의 확률은 $\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{75}$

(ii)

1번째	2번째	3번째	4번째	5번째
승	패 $\frac{3}{5}$	승 $\frac{2}{3}$	패 $\frac{3}{5}$	승 $\frac{2}{3}$

이때의 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{25}$

(iii)

1번째	2번째	3번째	4번째	5번째
승	패 $\frac{3}{5}$	패 $\frac{1}{3}$	승 $\frac{2}{3}$	승 $\frac{2}{5}$

이때의 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{75}$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{4}{75}+\frac{4}{25}+\frac{4}{75}=\frac{4}{15}$

29 답 ④

① $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A\cap B^C)$

즉, 두 사건 A와 B^C은 서로 독립이다. (참)

② $P(A^C)P(B^C)=\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}$

$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$

$=1-\{P(A)+P(B)-P(A)P(B)\}$

$=1-P(A\cup B)=P(A^C\cap B^C)$

즉, 두 사건 A^C과 B^C도 서로 독립이다. (참)

③ $P(A|B^C)=\dfrac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}$

$=\dfrac{P(A)-P(A)P(B)}{1-P(B)}$

$=\dfrac{P(A)\{1-P(B)\}}{1-P(B)}=P(A)$

$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$

$\therefore P(A|B^C)=P(A|B)$ (참)

④ 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로 $P(A\cap B)=0$

한편, $P(A)\neq0$, $P(B)\neq0$이므로 $P(A)P(B)\neq0$

$\therefore P(A)P(B)\neq P(A\cap B)$

즉, 두 사건 A와 B는 종속이다. (거짓)

⑤ 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 A^C과 B^C도 서로 독립이므로

$P(A^C)P(B^C)=P(A^C\cap B^C)$

즉, $\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}=1-P(A\cup B)$ (참)

30 답 10

$P(A|B)=P(A)=\dfrac{1}{4}$에서 $P(A^C)=\dfrac{3}{4}$

$P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)=P(A)P(B^C)+P(A^C)P(B)$

$=\dfrac{1}{4}\{1-P(B)\}+\dfrac{3}{4}P(B)$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}P(B)=\dfrac{5}{12}$

에서 $P(B)=\dfrac{1}{3}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore 20P(A\cup B)=20\times\dfrac{1}{2}=10$

31 답 ⑤

축구, 야구를 좋아하는 학생이 선택되는 사건을 각각 A, B라 하고 야구를 좋아하는 학생의 수를 x라 하면

$n(A)=12$, $n(B)=x$, $n((A\cup B)^C)=12$

$n(U)=n(A\cup B)+n((A\cup B)^C)$

$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n((A\cup B)^C)$

$=12+x-n(A\cap B)+12=30$

$\therefore n(A\cap B)=x-6$

또한, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A)=P(A|B)$, $\dfrac{12}{30}=\dfrac{x-6}{x}$ $\qquad\therefore x=10$

따라서 야구를 좋아하는 학생은 10명이다.

32 답 ②

$P(A)=a$, $P(B)=b$라 하면 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)=P(A)\{1-P(B)\}=\dfrac{1}{6}$

$a(1-b)=\dfrac{1}{6}$ $\qquad\therefore a-ab=\dfrac{1}{6}$ ⋯ ㉠

마찬가지로 $P(A^C\cap B)=\dfrac{1}{3}$에서

$(1-a)b=\dfrac{1}{3}$ $\qquad\therefore b-ab=\dfrac{1}{3}$ ⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면 $b-a=\dfrac{1}{6}$에서 $b=a+\dfrac{1}{6}$ ⋯ ㉢

이 식을 ㉠에 대입하면

$a-a\left(a+\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{6}$

$6a^2-5a+1=0$, $(2a-1)(3a-1)=0$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=\dfrac{1}{3}$

이를 ㉢에 대입하면 $b=\dfrac{2}{3}$ 또는 $b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{2}{3}$ 또는 $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{1}{2}$

즉, $P(A\cap B)=P(A)P(B)=ab=k$이므로

$k=\dfrac{1}{3}$ 또는 $k=\dfrac{1}{6}$

따라서 가능한 모든 상수 k의 값의 곱은 $\dfrac{1}{18}$이다.

[다른 풀이]

$P(A^C\cap B^C)=1-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}-k=\dfrac{1}{2}-k$이므로

$k\times\left(\dfrac{1}{2}-k\right)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{3}$

$k^2-\dfrac{1}{2}k+\dfrac{1}{18}=0$에서 두 실근의 곱은 $\dfrac{1}{18}$이다.

33 답 19

$A=\{1, 3, 5\}$에서 $P(A)=\dfrac{1}{2}$이고, $P(A^C)=\dfrac{1}{2}$

(i) $n(A\cap B)=1$, 즉 $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$일 때,

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서 $P(B)=\dfrac{1}{3}$이므로

$n(A\cap B)=1$, $n(B\cap A^C)=1$

즉, 사건 B는 사건 A의 원소 중 1개와 사건 A^C의 원소 중 1개를 원소로 가진다.

따라서 가능한 사건 B의 개수는 ${}_3C_1\times{}_3C_1=9$

(ii) $n(A\cap B)=2$, 즉 $P(A\cap B)=\dfrac{2}{6}$일 때,

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서 $P(B)=\dfrac{2}{3}$이므로

$n(A\cap B)=2$, $n(B\cap A^C)=2$

즉, 사건 B는 사건 A의 원소 중 2개와 사건 A^C의 원소 중 2개를 원소로 가진다.

따라서 가능한 사건 B의 개수는 ${}_3C_2\times{}_3C_2=9$

(iii) $n(A\cap B)=3$, 즉 $P(A\cap B)=\frac{3}{6}$일 때,

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서 $P(B)=1$이므로

$n(A\cap B)=3$, $n(B\cap A^C)=3$

즉, 가능한 사건 B는 전사건 1개

(i)~(iii)에 의하여 가능한 사건 B의 개수는

$9+9+1=19$

[다른 풀이]

$n(A\cap B)=x$, $n(A^C\cap B)=y$라 하면

$n(A\cap B^C)=3-x$, $n(A^C\cap B^C)=3-y$이므로

$x(3-y)=y(3-x)$

즉, $x=y$에서

(i) $x=y=1$ (ii) $x=y=2$ (iii) $x=y=3$

(이하 동일)

34 답 ②

6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

(i) 6의 약수의 눈이 0회, 6의 약수가 아닌 수의 눈이 6회 나올 확률은

$_6C_0\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{1}{3^6}$

(ii) 6의 약수의 눈이 1회, 6의 약수가 아닌 수의 눈이 5회 나올 확률은

$_6C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{12}{3^6}$

(iii) 6의 약수의 눈이 2회, 6의 약수가 아닌 수의 눈이 4회 나올 확률은

$_6C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{60}{3^6}$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1+12+60}{3^6}=\frac{73}{729}$

35 답 ④

경기에서 이긴 횟수를 a, 진 횟수를 $5-a$라 하면

$2a-(5-a)=4$ $\therefore a=3$

즉, 다섯 경기 중 세 번 이기고 두 번 지면 승점이 4점이 되므로

승점이 4점일 확률은

$_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$

36 답 ①

나영이가 청소 당번이 되는 경우를 살펴보면

2번째에 결정날 확률 : $_2C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

3번째에 결정날 확률 : $_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

4번째에 결정날 확률 : $_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{9}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27}=\frac{11}{27}$

[다른 풀이]

여사건의 확률을 이용하기 위해 지영이가 청소 당번이 되는 확률을 살펴보면

3번째에 결정날 확률 : $_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

4번째에 결정날 확률 : $_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

따라서 나영이가 청소 당번이 될 확률은

$1-\left(\frac{8}{27}+\frac{8}{27}\right)=\frac{11}{27}$

37 답 ②

8의 양의 약수인 1, 2, 4, 8이 각각 적힌 4장의 카드 중에서 중복을 허락하여 네 카드를 뽑을 때, 뽑힌 네 카드에 적힌 수의 합이 홀수인 경우와 그 확률은 다음과 같다.

(i) 홀수 1개, 짝수 3개일 때의 확률은 $_4C_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

(ii) 홀수 3개, 짝수 1개일 때의 확률은 $_4C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{64}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{27}{64}+\frac{3}{64}=\frac{15}{32}$

38 답 ②

주사위의 3의 배수의 눈이 2번 나오는 경우와 확률은 다음과 같다.

(i) 두 개의 동전을 던져 모두 앞면이 나올 경우

$\frac{1}{4}\times{}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{27}$

(ii) 두 개의 동전을 던져 뒷면이 적어도 한 개 나올 경우

$\frac{3}{4}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{2}{27}}{\frac{2}{27}+\frac{1}{6}}=\frac{4}{13}$

39 답 ④

동전을 6번 던져 앞면이 나온 횟수를 $a\,(0\le a\le 6)$라 하면 뒷면이 나온 횟수는 $6-a$이므로 점 P가 시계 방향으로 전진한 칸수는

$a\times2+(6-a)\times1=a+6$

점 P가 시계 방향으로 최소 6칸, 최대 12칸을 이동할 수 있다.

이때, 점 P가 점 C에 오려면 A에서 시계 방향으로 오른쪽 두 칸 뒤이므로 $5n+2$ (n은 정수)로 놓고 범위를 구하면

$6\le 5n+2\le 12$에서 $\frac{4}{5}\le n\le 2$

$\therefore n=1$ 또는 $n=2$

(i) $n=1$일 때, $5n+2=7$

즉, 점 P가 7칸 전진할 때

$a+6=7$에서 앞면이 1번 나올 때의 확률은

$_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{6}{64}$

(ⅱ) $n=2$일 때, $5n+2=12$

즉, 점 P가 12칸 전진할 때

$a+6=12$에서 앞면이 6번 나올 때의 확률은

$${}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}$$

40 답 25

가영이가 모자를 A, B, C의 집에 놓고 오는 사건을 각각 A, B, C라 하면

(ⅰ) A의 집에 놓고 올 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

(ⅱ) B의 집에 놓고 올 확률은

A의 집에는 놓고 오지 않아야 하므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

(ⅲ) C의 집에 놓고 올 확률은

A, B의 집에는 놓고 오지 않아야 하므로

$$\mathrm{P}(C)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$$

즉, 가영이가 모자를 친구네 집에 놓고 오는 사건을 E라 하면

$E=A\cup B\cup C$(단, A, B, C는 배반사건이다.)

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}=\frac{19}{27} \text{ ---------- ⓐ}$$

따라서 가영이가 모자를 친구네 집에 놓고 왔을 때, B의 집에 놓고 왔을 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(E)}$$
$$=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{19}{27}}=\frac{6}{19} \text{ ---------- ⓑ}$$

따라서 $p=19$, $q=6$이므로 $p+q=25$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 가영이가 모자를 친구네 집에 놓고 올 확률을 구한다. [50%]

ⓑ 가영이가 모자를 친구네 집에 놓고 왔을 때, B의 집에 놓고 왔을 확률을 구한다. [40%]

ⓒ $p+q$의 값을 구한다. [10%]

[다른 풀이]

가영이가 모자를 친구네 집에 놓고 오지 않을 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

따라서 가영이가 모자를 친구네 집에 놓고 올 확률은

$$\mathrm{P}(E)=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

(이하 동일)

41 답 15

첫 번째 시행에서 갑이 어느 한 숫자를 선택했을 때, 을이 갑과 다른 숫자를 선택할 확률은

$${}_5C_1\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5} \text{ ---------- ⓐ}$$

두 번째 시행에서 갑이 첫 번째 시행에서 나왔던 숫자 2개를 제외한 나머지 3개의 숫자 중에서 한 개를 선택하고, 을은 갑이 꺼낸 카드의 숫자와 같은 숫자를 선택할 확률은

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16} \text{ ---------- ⓑ}$$

따라서 $p=\frac{4}{5}\times\frac{3}{16}=\frac{3}{20}$이므로

$100p=15$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 첫 번째 시행에서 갑이 어느 한 숫자를 선택했을 때, 을이 갑과 다른 숫자를 선택할 확률을 구한다. [45%]

ⓑ 두 번째 시행에서 갑이 첫 번째 시행에서 나왔던 숫자 2개를 제외한 나머지 3개의 숫자 중에서 한 개를 선택하고, 을은 갑이 꺼낸 카드의 숫자와 같은 숫자를 선택할 확률을 구한다. [45%]

ⓒ $100p$의 값을 구한다. [10%]

42 답 679

어느 한 사람이 3층이나 5층에서 내릴 확률은 각각 $\frac{1}{5}$이고, 나머지 3개 층에서 내릴 확률은 $\frac{3}{5}$이다. ---------- ⓐ

5명이 탔으므로 3층에서 2명, 5층에서 1명, 나머지 층에서 2명이 내릴 확률은

$$\frac{5!}{2!1!2!}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{625} \text{ ---------- ⓑ}$$

따라서 $p=625$, $q=54$이므로

$p+q=679$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 어느 한 사람이 3층이나 5층에서 내릴 확률과 나머지 3개 층에서 내릴 확률을 각각 구한다. [40%]

ⓑ 3층에서 2명, 5층에서 1명, 나머지 층에서 2명이 내릴 확률을 구한다. [50%]

ⓒ $p+q$의 값을 구한다. [10%]

43 답 ⑤

고등학교 학생 중 임의로 선택한 1명이 지역 A를 희망한 학생일 사건을 A, 고등학교 학생 중 임의로 선택한 1명이 지역 B를 희망한 학생일 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{140}{500}}{\frac{180}{500}}=\frac{7}{9}$$

44 답 50

갑, 을, 병이 뽑은 카드에 적힌 수를 각각 a, b, c라 하면 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$6\times3\times3=54$

(i) $a>b$인 사건을 A, $a>b$이고 $a>b+c$인 사건을 B라 하고, 사건 A의 경우를 순서쌍 (a, b, c)로 살펴보면

(Ⅰ) $b=1$일 때, $(a, 1, c)$에서

a는 5가지, c는 3가지이므로 15개

(Ⅱ) $b=2$일 때, $(a, 2, c)$에서

a는 4가지, c는 3가지이므로 12개

(Ⅲ) $b=3$일 때, $(a, 3, c)$에서

a는 3가지, c는 3가지이므로 9개

(Ⅰ)~(Ⅲ)에서 36가지이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{36}{54}=\frac{2}{3}$

(ii) 사건 $A\cap B$의 경우를 순서쌍 (a, b, c)로 살펴보면

$a>b+c=2$일 때, a는 4가지, (b, c)는 1가지에서 4개

$a>b+c=3$일 때, a는 3가지, (b, c)는 2가지에서 6개

$a>b+c=4$일 때, a는 2가지, (b, c)는 3가지에서 6개

$a>b+c=5$일 때, a는 1가지, (b, c)는 2가지에서 2개

에서 18가지이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{18}{54}=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에 의하여 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$

따라서 $k=\frac{1}{2}$이므로 $100k=50$

45 답 ④

남학생인 사건을 A, 수학동아리에 가입한 사건을 B라 하자.

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{3}{5}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{5}\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}\{1-\mathrm{P}(A)\}$

또한, $p_1=\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{3\mathrm{P}(A)}{5\mathrm{P}(B)}$

$p_2=\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1-\mathrm{P}(A)}{2\mathrm{P}(B)}$

이고 $p_1=2p_2$이므로

$\frac{3\mathrm{P}(A)}{5\mathrm{P}(B)}=2\times\frac{1-\mathrm{P}(A)}{2\mathrm{P}(B)}$

$3\mathrm{P}(A)=5-5\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}$

따라서 구하는 남학생의 수는 $320\times\frac{5}{8}=200$(명)

46 답 ③

갑이 상자 B를 선택하였을 때, 을이 (가)처럼 판단할 경우 틀린 판단을 하게 된다. 즉, 을의 판단이 틀릴 확률은 갑이 상자 B를 선택하여 빨간 공이 3회 이하 나올 확률과 같다.

따라서 구하는 확률은 여사건의 확률을 이용하면

$1-\left\{{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\right\}=\frac{131}{3^5}$

47 답 ③

5번 시행 후 B가 주사위를 가지고 있는 경우와 그 확률은 다음과 같다.

(i) 시계 방향으로 3번, 시계 반대 방향으로 2번 이동한 경우

${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{3^5}$

(ii) 시계 반대 방향으로 5번 이동한 경우

${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{3^5}$

(i), (ii)에서 B가 주사위를 가지고 있을 확률은

$\frac{40+32}{3^5}=\frac{8}{27}$

48 답 ③

(i) 검은 공을 꺼내 상품을 탈 경우

처음 주사위를 던져 1, 2가 나올 확률은 $\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$

두 번째 주사위를 던져 1, 2가 나올 확률은 $\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{5}$

(ii) 흰 공을 꺼내 상품을 탈 경우

처음 주사위를 던져 6이 나올 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$

두 번째 주사위를 던져 6이 나올 확률은 $\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{3}{20}$

(i), (ii)에 의하여 상품을 탔을 때, 검은 공을 꺼냈을 확률은

$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{3}{20}}=\frac{4}{7}$

49 답 ④

5번째로 지나간 개구리가 뱀에게 먹히지 않고 살아남을 수 있는 모든 경우의 확률은 다음과 같다. (○ : 먹힌다. ×: 먹히지 않는다.)

(i) 처음 세 마리 개구리를 잡아 먹어 살아남을 확률은

(○ ○ ○) × ×

$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times1\times1=\frac{1}{8}$

(ii) 처음 세 마리 개구리 중 두 마리와 네 번째 개구리를 먹어 살아남을 확률은

(○○×)(○)×

$_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}\times1=\frac{3}{16}$

(iii) 앞의 네 마리 중 두 마리만 먹었는데 살아남을 확률은

(○○××)×

$_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

(iv) 앞의 네 마리 중 한 마리만 먹었는데 살아남을 확률은

(○×××)×

$_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(v) 앞의 네 마리 모두 먹지 않았는데 살아남을 확률은

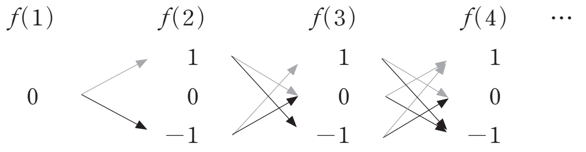
(××××)×

$_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$

(i)~(v)에서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}}{\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}}=\frac{11}{21}$$

50 답 ⑤



그림과 같이 ⟶ 선을 따라갈 확률이 $\frac{2}{3}$, ⟶ 선을 따라갈 확률이 $\frac{1}{3}$이다.

ㄱ. $f(2)=1$인 경우는 $0\rightarrow1$의 1가지이고 이때의 확률은 $\frac{2}{3}$이다. (참)

ㄴ. $f(3)=1$인 경우는 $0\rightarrow-1\rightarrow1$의 1가지이고 이때의 확률은

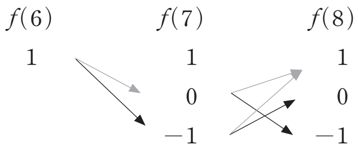
$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

$f(4)=0$인 경우는 $0\rightarrow-1\rightarrow1\rightarrow0$과 $0\rightarrow1\rightarrow-1\rightarrow0$의 2가지이고 이때의 확률은

$\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$이다. (참)

ㄷ. $f(6)=1$일 확률이 p이면 $f(8)=1$일 확률은

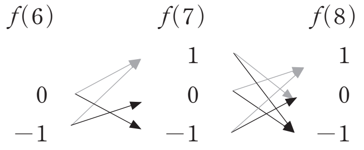
(i) $f(6)=1$일 경우 다음 그림에서



$f(8)=1$인 경우는 $1\rightarrow0\rightarrow1$과 $1\rightarrow-1\rightarrow1$의 2가지 경우이고 이때의 확률은

$\left(p\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)+\left(p\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}p$

(ii) $f(6)\neq1$일 경우 다음 그림에서



$f(8)=1$인 경우는 $0\rightarrow-1\rightarrow1$과 $-1\rightarrow0\rightarrow1$의 2가지 경우이고 두 경우 모두 확률이 $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$이므로 확률은 $\frac{2}{9}(1-p)$이다.

(i), (ii)에서 $f(8)=1$일 확률은

$\frac{2}{3}p+\frac{2}{9}(1-p)=\frac{4p+2}{9}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

51 답 95

다섯 번째에서 '품'을 받는 경우로 생각하면

(i) 네 번째까지 '사' 1장, '은' 3장을 받을 확률은

$_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{4}{81}$

(ii) 네 번째까지 '사' 2장, '은' 2장을 받을 확률은

$_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{81}$

(iii) 네 번째까지 '사' 3장, '은' 1장을 받을 확률은

$_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4}{81}$

위의 (i)~(iii) 이후에 '품'을 받아야 하므로

$\left(\frac{4}{81}+\frac{6}{81}+\frac{4}{81}\right)\times\frac{1}{3}$

이때, 다섯 번째에 '사', '은'을 받는 경우도 마찬가지이므로

구하는 확률은

$\left(\frac{4}{81}+\frac{6}{81}+\frac{4}{81}\right)\times\frac{1}{3}\times3=\frac{14}{81}$

따라서 $p=81$, $q=14$이므로 $p+q=95$

[다른 풀이]

다섯 번째에 '품'을 받는 경우로 생각하면 네 번째까지 '사', '은'을 모두 받아야 하고, 4개 모두 '사'가 나오거나 '은'이 나오는 2가지 경우는 제외해야 하므로 $\frac{2^4-2}{3^4}=\frac{14}{81}$

이때, 마지막에 '품'을 받을 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 다섯 번째에 '사', '은'을 받는 경우도 마찬가지 3이므로

$\frac{14}{81}\times\frac{1}{3}\times3=\frac{14}{81}$

$\therefore p+q=81+14=95$

Ⅲ 통계

05 확률분포

문제편 53P

01 답 ③

$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$에서

$\frac{-a+2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{a+2}{10}+\frac{2a+2}{10}=1$

$\frac{2a+8}{10}=1 \quad \therefore a=1$

$\therefore \mathrm{P}(0\le X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}$

02 답 ②

네 수 1, 2, 3, 4가 적힌 정사면체를 두 번 던질 때, 첫 번째 수를 a, 두 번째 수를 b라 하면

가능한 모든 경우의 수는 $4\times 4=16$이고

$|a-b|=2$인 경우는 순서쌍 (a, b)가

$(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)$

인 4가지이다.

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

03 답 ①

$a+\frac{1}{3}+2a+\frac{1}{6}=1$에서 $a=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{6}=\frac{11}{3}$

04 답 73

10개의 실수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$의 값을 가지는 확률변수를 X라 하면

$\mathrm{E}(X)=8, \mathrm{V}(X)=3^2=9$

이때, $\frac{1}{10}(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_{10}{}^2)=\mathrm{E}(X^2)$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=9+8^2=73$

05 답 ③

$\mathrm{E}(X)=4$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\{(X-4)^2\}$

$=\mathrm{E}(X^2-8X+16)$

$=\mathrm{E}(X^2-8X)+16$

$=8+16=24$

06 답 19

$\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)=16a^2=16$에서 $a^2=1$

$\therefore a=-1\ (\because a\ne 1)$

또한, $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b=10a+b=10$에서

$-10+b=10 \quad \therefore b=20$

$\therefore a+b=-1+20=19$

07 답 ③

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(10, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=10p, \mathrm{V}(X)=10p(1-p)$

$(10p)^2=10p(1-p)$에서

$10p=1-p\ (\because 0<p<1) \quad \therefore p=\frac{1}{11}$

08 답 250

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np=40, \mathrm{V}(X)=np(1-p)=24$

위의 두 식을 연립하면 $n=100, p=\frac{2}{5}$

$\therefore \frac{n}{p}=100\times\frac{5}{2}=250$

09 답 ⑤

$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} k-\frac{x}{9} & (x=-2, -1, 0) \\ k+\frac{x}{9} & (x=1, 2) \end{cases}$

에서

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\cdots+\mathrm{P}(X=2)=1$

$\left(k+\frac{2}{9}\right)+\left(k+\frac{1}{9}\right)+k+\left(k+\frac{1}{9}\right)+\left(k+\frac{2}{9}\right)=5k+\frac{2}{3}=1$

$\therefore k=\frac{1}{15}$

한편, $X^2-3X\le 0$에서 $0\le X\le 3$이고, X가 가질 수 있는 값이 $-2, -1, 0, 1, 2$이므로

$\mathrm{P}(X^2-3X\le 0)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=k+\left(k+\frac{1}{9}\right)+\left(k+\frac{2}{9}\right)$

$=3k+\frac{1}{3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$

10 답 ①

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)=1$

이때, $\mathrm{P}(X=k)=\frac{a}{k(k+1)}=a\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$이므로

$a\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\right\}=\frac{5}{6}a=1 \quad \therefore a=\frac{6}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(X=3)=\frac{\frac{6}{5}}{3\times 4}=\frac{1}{10}$

11 답 2

x번째 시행에서 처음으로 1의 눈이 나오므로 $(x-1)$번째까지는 1이 아닌 눈이 나오고, x번째에 1의 눈이 나와야 한다.

$\therefore \mathrm{P}(X=x)=\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\frac{1}{6}=\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{x}$

따라서 $a=\frac{1}{5}$이므로 $10a=2$

12 답 ⑤

확률의 총합은 1이므로 $a+b+c=1$ ⋯ ㉠

$\mathrm{E}(X)=a+2b+3c=2$ ⋯ ㉡

$\mathrm{V}(X)=1^2\times a+2^2\times b+3^2\times c-2^2=a+4b+9c-4=\frac{1}{2}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=b=\frac{1}{2}$

13 답 2

두 점 A, B 사이의 거리 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, $\sqrt{3}$, 2이다.

주사위를 처음 던져서 나온 임의의 점 A에 대하여 두 번째 점 B가 $X=0$일 확률은 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6}$

마찬가지 방법으로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=\sqrt{3})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ \ \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	$\sqrt{3}$	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{3}+(\sqrt{3})^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{6}$

$=0+\frac{1}{3}+1+\frac{2}{3}=2$

14 답 5

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	9	10	11	$4+k$	$5+k$	$6+k$	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{8}\{9+2\times10+11+(4+k)+2\times(5+k)+(6+k)\}$

$=\frac{k+15}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{8}\{81+2\times100+121+(4+k)^2+2\times(5+k)^2+(6+k)^2\}$

$=\frac{k^2+10k+126}{2}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{k^2-10k+27}{4}$

$=\frac{1}{4}(k-5)^2+\frac{1}{2}$

따라서 $k=5$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값이 최소가 된다.

15 답 ②

$\mathrm{E}((X+2)^2)=\mathrm{E}(X^2+4X+4)$

$=\mathrm{E}(X^2)+4\mathrm{E}(X)+4=13$ ⋯ ㉠

$\mathrm{E}((X-2)^2)=\mathrm{E}(X^2-4X+4)$

$=\mathrm{E}(X^2)-4\mathrm{E}(X)+4=5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\mathrm{E}(X^2)=5,\ \mathrm{E}(X)=1$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-1=4$

16 답 190

$Y=\frac{1}{10}X-15$에서 $10Y=X-150$

$\therefore X=10Y+150$

$\mathrm{E}(Y)=0.5,\ \mathrm{E}(Y^2)=0.6$이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(10Y+150)=10\mathrm{E}(Y)+150$

$=10\times0.5+150=155$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=0.6-(0.5)^2=0.35$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(10Y+150)=10^2\mathrm{V}(Y)$

$=100\times0.35=35$

$\therefore \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=155+35=190$

17 답 ③

A반, B반 학생의 점수를 각각 확률변수 X, Y라 하면

$\mathrm{E}(X)=30,\ \sigma(X)=20,\ \mathrm{E}(Y)=30,\ \sigma(Y)=15$

ㄱ. $\mathrm{E}(X+30)=\mathrm{E}(X)+30=60$

$\mathrm{E}(2Y)=2\mathrm{E}(Y)=60$

$\therefore \mathrm{E}(X+30)=\mathrm{E}(2Y)$ (참)

ㄴ. $\sigma(X+30)=\sigma(X)=20$ (거짓)

ㄷ. $\sigma(2Y)=2\sigma(Y)=30$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18 답 ④

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np=\frac{4}{3}$ ⋯ ㉠

한편, X의 확률질량함수는

$P(X=r)={}_nC_r p^r q^{n-r}$ (단, $q=1-p$, $0\le r\le n$)이므로

$2P(X=0)=P(X=1)$에서

$2\times{}_nC_0 p^0 q^n={}_nC_1 p^1 q^{n-1}$, $2q=np$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2q=\frac{4}{3}$에서 $q=\frac{2}{3}$

$\therefore V(X)=npq=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$

19 답 100

$p(x)=\frac{{}_nC_x}{2^n}={}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$이므로

확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

즉, $E(X)=\frac{n}{2}$, $V(X)=\frac{n}{4}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{n}}{2}$

$E(Z)=0$, $E\left(\frac{1}{5}X-10\right)=\frac{1}{5}E(X)-10=\frac{1}{5}\times\frac{n}{2}-10=0$

$\therefore n=100$

20 답 10

10회 중 앞면이 나온 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(Y)=10\times\frac{1}{2}=5$, $V(Y)=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

한편, 뒷면이 나온 횟수는 $10-Y$이므로

$X=Y-(10-Y)=2Y-10$

$\therefore V(X)=V(2Y-10)=4V(Y)=4\times\frac{5}{2}=10$

21 답 ②

확률의 총합은 1이므로

$(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+\cdots+(10a+b)=1$

$55a+10b=1$ ⋯ ㉠

한편, $P(X=2)=3P(X=8)$에서 $2a+b=3(8a+b)$

$11a+b=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{55}$, $b=\frac{1}{5}$

$\therefore P(X=1)=a+b=-\frac{1}{55}+\frac{1}{5}=\frac{2}{11}$

22 답 2

확률변수 X는 1, 2, 3, 4, 5의 값을 가지므로

$P(X\le 5)=a\times 5^2=1$

$\therefore a=\frac{1}{25}$

이때, $P(X=3)=P(X\le 3)-P(X\le 2)=\frac{9}{25}-\frac{4}{25}=\frac{1}{5}$

$\therefore 10P(X=3)=10\times\frac{1}{5}=2$

23 답 4

확률의 총합은 1이므로

$(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+(4a+b)+(5a+b)=1$

즉, $15a+5b=1$ ⋯ ㉠

또한, $E(X)=2$에서

$(a+b)+2(2a+b)+3(3a+b)+4(4a+b)+5(5a+b)=2$

즉, $55a+15b=2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{10}$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore 10P(X=1)=10(a+b)=-1+5=4$

24 답 ①

확률의 총합은 1이므로 $a+\frac{1}{4}+b=1$

$a\ge 0$, $b\ge 0$이므로 $a=\frac{3}{4}-b\ge 0$에서 $0\le b\le\frac{3}{4}$

$E(X)=0\times a+2\times\frac{1}{4}+3\times b=3b+\frac{1}{2}$

$E(X^2)=0^2\times a+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times b=9b+1$

$$\begin{aligned}V(X)&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\&=9b+1-\left(3b+\frac{1}{2}\right)^2\\&=9b+1-9b^2-3b-\frac{1}{4}\\&=-9b^2+6b+\frac{3}{4}\\&=-9\left(b-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{7}{4}\ \left(0\le b\le\frac{3}{4}\right)\end{aligned}$$

따라서 $V(X)$는 $b=\frac{1}{3}$일 때 최댓값 $\frac{7}{4}$을 가지고,

$b=\frac{3}{4}$일 때 최솟값 $\frac{3}{16}$을 가진다.

따라서 $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{3}{4}$이므로

$pq=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

25 답 16

동시에 2개의 공을 꺼낼 때 나오는 흰 공의 개수가 k일 확률은

$P(X=k)=\frac{{}_2C_k\times{}_3C_{2-k}}{{}_5C_2}$ $(k=0, 1, 2)$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{6}{10}+2^2\times\frac{1}{10}=1$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

따라서 $a=25$, $b=9$이므로

$a-b=25-9=16$

26 답 24

사격에서 얻는 점수를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	x	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{25}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{9}{25}+3\times\frac{7}{25}+5\times\frac{5}{25}+7\times\frac{3}{25}+x\times\frac{1}{25}$

$=\frac{9+21+25+21+x}{25}=\frac{76+x}{25}=4$

$76+x=100 \qquad \therefore x=24$

27 답 ③

k회에 검사가 끝난다고 하면 $2\le k\le 6$이고, $(k-1)$회까지 불량품이 1개 나오고 k회에 불량품이 나오면 되므로

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{{}_4\mathrm{C}_{k-2}\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_{k-1}}\times\frac{1}{6-(k-1)}$$

$$=\frac{\frac{4!\times 2}{(k-2)!(6-k)!}}{\frac{6!}{(k-1)!(7-k)!}}\times\frac{1}{7-k}$$

$$=\frac{k-1}{15}\ (k=2,\ 3,\ \cdots,\ 6)$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{15}+3\times\frac{2}{15}+4\times\frac{3}{15}+5\times\frac{4}{15}+6\times\frac{5}{15}=\frac{14}{3}$

28 답 ②

(ⅰ) $X=1$이 되는 경우는 첫 번째에 1이 나오거나 첫 번째에 짝수의 눈이 나오고 두 번째에 1의 눈이 나올 경우이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$

(ⅱ) $X=2$가 되는 경우는 첫 번째에 짝수의 눈이 나오고 두 번째에 2의 눈이 나올 경우이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

이때, 확률변수가 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고,

(ⅲ) $X=1,\ 3,\ 5$일 때는 $\mathrm{P}(X=1)$과 같고,

(ⅳ) $X=2,\ 4,\ 6$일 때는 $\mathrm{P}(X=2)$와 같으므로

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=(1+3+5)\times\frac{1}{4}+(2+4+6)\times\frac{1}{12}=\frac{13}{4}$

29 답 ⑤

A가 이기는 경우를 ○, 지는 경우를 ×라 하면

(ⅰ) ○○인 경우의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ⅱ) ×○○, ○×○인 경우의 확률은

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 2=\frac{1}{4}$

(ⅲ) ××○○, ×○×○, ○××○인 경우의 확률은

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 3=\frac{3}{16}$

(ⅰ) ~ (ⅲ)에 의하여 A가 이길 확률은

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$

상금을 k원이라 할 때, 이기면 $\frac{4}{5}k$원을, 지면 $\frac{1}{5}k$원을 받으므로

A의 기대 금액 $A=\frac{11}{16}\times\frac{4}{5}k+\frac{5}{16}\times\frac{1}{5}k=\frac{49}{80}k$

B의 기대 금액 $B=\frac{5}{16}\times\frac{4}{5}k+\frac{11}{16}\times\frac{1}{5}k=\frac{31}{80}k$

$\therefore A:B=49:31$

30 답 1

A주머니에서 만든 각 수에 대하여 B주머니에서 만들 수 있는 수의 개수는 $4!=24$이므로 각각의 경우를 살펴보면 다음과 같다.

(ⅰ) $X=1$일 때, 자릿수 1개를 정하는 방법이 ${}_4\mathrm{C}_1=4$(가지)이고, 나머지 자릿수의 숫자를 서로 다르게 배열하는 방법이 2가지이므로 구하는 경우의 수는 $4\times 2=8$이다.

$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

(ⅱ) $X=2$일 때, 자릿수 2개를 정하는 방법이 ${}_4\mathrm{C}_2=6$(가지)이고 나머지 자릿수의 숫자를 서로 다르게 배열하는 방법이 1가지이므로 구하는 경우의 수는 $6\times 1=6$이다.

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

(ⅲ) $X=3$인 경우는 없으므로 $\mathrm{P}(X=3)=0$

(ⅳ) $X=4$인 경우는 두 수가 같을 때 뿐이므로 $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{24}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\mathrm{P}(X=0)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{24}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\mathrm{P}(X=0)+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{4}+3\times 0+4\times\frac{1}{24}$

$=1$

31 답 25

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{10}(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{10}\times\frac{n(n+1)}{2}=1$

$n(n+1)=20,\ (n-4)(n+5)=0$

이때, n은 자연수이므로 $n=4$

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{10}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{4}{10}=\frac{30}{10}=3$

$\therefore \mathrm{E}(10X-5)=10\mathrm{E}(X)-5=10\times3-5=25$

32 답 30

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{10}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{4}{10}=\frac{30}{10}=3$

$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{2}{10}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{4}{10}-3^2=\frac{100}{10}-9=1$

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b=3a+b=50$ ⋯ ㉠

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)=a^2=100$ $\quad\therefore a=10$ ($\because a>0$)

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=20$

$\therefore a+b=10+20=30$

33 답 ③

ㄱ. $\mathrm{P}(Y=k)=\mathrm{P}(X=20-k)$이므로

$\mathrm{P}(8\le Y\le12)=\mathrm{P}(8\le X\le12)$ (참)

ㄴ. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{2}\times20=10$

또한, $Y=20-X$에서

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(20-X)=20-\mathrm{E}(X)=10$

$\therefore \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)$ (참)

ㄷ. $Y=20-X$에서

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(20-X)=\mathrm{V}(X)$

$\therefore \mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(X)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

34 답 ②

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=\frac{n}{2}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{n}{4}$

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$105=\frac{n}{4}+\frac{n^2}{4}$

$n^2+n-420=0$, $(n-20)(n+21)=0$

$\therefore n=20$ ($\because n>0$)

35 답 108

$\mathrm{P}(X=k)={}_{50}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{50-k}$이라 하면

$\mathrm{P}(X=k)$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50, \frac{1}{5}\right)$을 따르는 확률변수 X의 확률질량함수이므로

$\mathrm{E}(X)=50\times\frac{1}{5}=10$, $\mathrm{V}(X)=50\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=8$

이때, $f(k)=k^2\times{}_{50}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{50-k}=k^2\times\mathrm{P}(X=k)$이므로

$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(50)$

$=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=8+100=108$

36 답 25

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(100, p)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=100pq$ (단, $q=1-p$)

$p>0$, $q>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{p+q}{2}\ge\sqrt{pq}$ (단, 등호는 $p=q$일 때 성립)

$q=1-p$에서 $p+q=1$이므로 위 식에 대입하면

$\sqrt{pq}\le\frac{1}{2}$, $pq\le\frac{1}{4}$

$\mathrm{V}(X)=100pq\le\frac{100}{4}=25$

따라서 $\mathrm{V}(X)$의 최댓값은 25이다.

37 답 ⑤

A, B 두 회사의 하루 운휴하는 차량 수를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 이항분포 $\mathrm{B}_X\left(12, \frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{B}_Y\left(16, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{E}(X)=12\times\frac{1}{3}=4$, $\mathrm{E}(Y)=16\times\frac{1}{4}=4$이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y)$ (거짓)

ㄴ. $\mathrm{V}(X)=12\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$, $\mathrm{V}(Y)=16\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=3$

이므로 $\mathrm{V}(X)<\mathrm{V}(Y)$ (참)

ㄷ. 하루 운휴하는 차량 수의 평균은 A, B 두 회사가 같고,

A회사의 경우

$\mathrm{P}(X=0)={}_{12}\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$이고

B회사의 경우 $\mathrm{P}(Y=0)={}_{16}\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{4}\right)^{16}$

$\therefore \mathrm{P}(X=0)<\mathrm{P}(Y=0)$

즉, 어느 날 운휴 차량이 한 대도 없을 확률은 A회사가 B회사보다 작다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

38 답 25

정사면체를 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=20\times\frac{1}{4}=5$

따라서 20회 중 1의 눈은 평균 5회 나온다고 기대할 수 있으므로 그 이외의 눈은 평균 15회가 나온다.

즉, 점 P는 x축의 방향으로 평균 $5\times2=10$만큼 움직이고, y축의 방향으로 평균 $15\times1=15$만큼 움직인다.

따라서 20회 시행 후 점 P는 $\mathrm{P}(10, 15)$에 있을 것으로 기대되므로

$a+b=10+15=25$

39 답 5

1회의 시행에서 검은 공이 나올 확률은 $\frac{x}{3+x}$ 이므로

X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{x}{3+x}\right)$를 따른다.

이때, $\mathrm{E}(X)=n\times\frac{x}{3+x}=40$ ⋯ ㉠

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{x}{3+x}\times\left(1-\frac{x}{x+3}\right)=15$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$40\times\left(1-\frac{x}{x+3}\right)=15,\ 1-\frac{x}{x+3}=\frac{3}{8}$

$\frac{x}{x+3}=\frac{5}{8},\ 8x=5x+15$

$\therefore x=5$

40 답 ②

두 확률변수 X, Y에 대하여 X와 Y의 합은 전체 횟수 n과 같으므로 $X+Y=n$

$Z=2X+Y=n+X$에서 $Z-n=X$

ㄱ. $\mathrm{P}(Z=n+k)=\mathrm{P}(Z-n=k)=\mathrm{P}(X=k)$ (참)

ㄴ. $\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}(X+n)=\mathrm{E}(X)+n$ (참)

ㄷ. $\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}(X+n)=\mathrm{V}(X)\neq 4\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

41 답 ④

$m=1$일 때, $n^2\le 35$에서 $n=1, 2, 3, 4, 5$의 5가지

$m=2$일 때, $n^2\le 32$에서 $n=1, 2, 3, 4, 5$의 5가지

$m=3$일 때, $n^2\le 27$에서 $n=1, 2, 3, 4, 5$의 5가지

$m=4$일 때, $n^2\le 20$에서 $n=1, 2, 3, 4$의 4가지

$m=5$일 때, $n^2\le 11$에서 $n=1, 2, 3$의 3가지

$\therefore \mathrm{P}(E)=\frac{5+5+5+4+3}{36}=\frac{11}{18}$

따라서 사건 E가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하므로

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36, \frac{11}{18}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=36\times\frac{11}{18}\times\frac{7}{18}=\frac{77}{9}$

42 답 18

먼저 꺼낸 3개의 공에 적힌 번호와 일치한 공의 개수를 k라 하면 가능한 k의 값은 1, 2, 3이다.

이때, 번호가 일치한 공의 개수가 k이려면 먼저 꺼낸 3개의 공 중에서 k개가 뽑히고 나머지 2개 중에서 $3-k$개가 뽑히면 되므로

$\mathrm{P}(X=k)=\frac{{}_3\mathrm{C}_k\times{}_2\mathrm{C}_{3-k}}{{}_5\mathrm{C}_3}$

$=\frac{{}_3\mathrm{C}_k\times{}_2\mathrm{C}_{3-k}}{10}\ (k=1, 2, 3)$ ---------- ⓐ

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{6}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$ ---------- ⓑ

$\therefore \mathrm{E}(10X)=10\mathrm{E}(X)=10\times\frac{9}{5}=18$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 확률변수 X의 확률질량함수를 구한다. [30%]

ⓑ $\mathrm{E}(X)$의 값을 구한다. [50%]

ⓒ $\mathrm{E}(10X)$의 값을 구한다. [20%]

43 답 60

기존 수학 점수 X의 평균이 25점이고, 새로운 점수 Y의 평균이 40점이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b=25a+b=40$ ⋯ ㉠ ---------- ⓐ

마찬가지로 100점을 받은 학생의 새로운 점수는 여전히 100점이므로 $Y=aX+b$에서

$100=100a+b$ ⋯ ㉡ ---------- ⓑ

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{4}{5}$, $b=20$

$\therefore Y=\frac{4}{5}X+20$

따라서 기존에 50점을 받은 학생이 받게 될 새로운 수학 점수는

$\frac{4}{5}\times 50+20=60$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 기존 평균과 새로운 평균으로부터 a, b의 관계식을 구한다. [30%]

ⓑ 기존 100점을 받은 학생의 점수가 여전히 100점을 받는다는 사실로부터 a, b 사이의 관계식을 구한다. [30%]

ⓒ 시험에서 50점을 받은 학생이 받게 될 새로운 수학 점수를 구한다. [40%]

44 답 40

주머니에서 꺼낸 3개의 공에 적힌 수 중 두 수의 평균이 나머지 한 수와 같은 경우는 세 수가 (1, 2, 3) (2, 3, 4), (1, 3, 5), (3, 4, 5)인 경우이다. ---------- ⓐ

꺼낸 세 수가 위와 같을 확률은 $\frac{4}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{2}{5}$이므로

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{2}{5}\right)$를 따른다. ---------- ⓑ

$\therefore \mathrm{E}(X)=100\times\frac{2}{5}=40$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 주머니에서 꺼낸 3개의 공에 적힌 수 중 두 수의 평균이 나머지 한 수와 같은 경우를 찾는다. [40%]

ⓑ 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{2}{5}\right)$를 따름을 안다. [30%]

ⓒ $\mathrm{E}(X)$의 값을 구한다. [30%]

45 답 ⑤

확률의 총합이 1이므로 $\frac{1}{k}({}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4)=1$

이항정리에 의해

$k={}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=2^4-1=15$

$E(X)=\frac{1}{15}(2\times{}_4C_1+2^2\times{}_4C_2+2^3\times{}_4C_3+2^4\times{}_4C_4)$

$=\frac{1}{15}(3^4-1)=\frac{1}{15}\times 80=\frac{16}{3}$

$\therefore E(3X+1)=3E(X)+1=16+1=17$

46 답 20

5개 중 임의로 2개를 배정하는 방법의 수는 ${}_5C_2=10$

배정된 서랍의 번호를 순서쌍으로 나타내면

(i) $X=1$인 경우

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$이므로

$P(X=1)=\frac{4}{10}$

(ii) $X=2$인 경우 $(2, 3), (2, 4), (2, 5)$이므로

$P(X=2)=\frac{3}{10}$

(iii) $X=3$인 경우 $(3, 4), (3, 5)$이므로 $P(X=3)=\frac{2}{10}$

(iv) $X=4$인 경우 $(4, 5)$이므로 $P(X=4)=\frac{1}{10}$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=2$이므로

$E(10X)=10\times E(X)=20$

47 답 28

$P(X=k)=p_k(k=1, 2, 3, 4, 5)$라 하면

두 이산확률변수 X와 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	1

Y	1	2	3	4	5	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_3+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_4+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}$	1

$E(X)=p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5=4$

$E(Y)=\left(\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}\right)+2\left(\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}\right)+\cdots+5\left(\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{1}{2}(p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5)+\frac{1+2+3+4+5}{10}$

$=\frac{1}{2}\times 4+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}=a$

$\therefore 8a=8\times\frac{7}{2}=28$

48 답 ⑤

$Y=10X-2.21$이라 하자.

확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	-1	0	1	합계
$P(Y=y)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

확률의 총합이 1이므로 $a+b+\frac{2}{3}=1$

즉, $a+b=\frac{1}{3}$ ⋯ ㉠

또, $E(Y)=10E(X)-2.21=0.5$이므로

$E(Y)=(-1)\times a+0\times b+1\times\frac{2}{3}=-a+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\underbrace{\boxed{\frac{1}{6}}}_{(가)}$, $b=\underbrace{\boxed{\frac{1}{6}}}_{(나)}$

이고 $V(Y)=\frac{7}{12}$이다.

한편, $Y=10X-2.21$이므로 $V(Y)=\underbrace{\boxed{100}}_{(다)}\times V(X)$이다.

따라서 $V(X)=\frac{1}{\underbrace{\boxed{100}}_{(다)}}\times\frac{7}{12}$이다.

$\therefore p=\frac{1}{6}, q=\frac{1}{6}, r=100 \Rightarrow pqr=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 100=\frac{25}{9}$

49 답 ①

$E(3X+1)=3E(X)+1=19$이므로 $E(X)=6$이다.

또, $E(X^2)=40$이므로 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=4$이다.

따라서 $q=1-p$일 때, $np=6$, $npq=4$이므로

$n=18$, $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$이다.

$\therefore \frac{P(X=1)}{P(X=2)}=\frac{{}_{18}C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{17}}{{}_{18}C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{16}}=\frac{4}{17}$

50 답 197

나온 눈의 수 중 작지 않은 수를 k라 하면 $1\le k\le 6$이고

$P(X=k)=P(X\le k)-P(X\le k-1)$

$=\left(\frac{k}{6}\right)^2-\left(\frac{k-1}{6}\right)^2=\frac{2k-1}{36}$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{9}{36}+6\times\frac{11}{36}$

$=\frac{161}{36}$

따라서 $a=36$, $b=161$이므로 $a+b=197$

51 답 ⑤

ㄱ. $X=k$는 k를 뽑고 $(k+1)$부터 n까지의 카드에서 4장을 뽑는 것이므로

$\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{{}_{n-k}\mathrm{C}_4}{{}_n\mathrm{C}_5}$ (단, $1\le k\le n-4$) (참)

ㄴ. ㄱ과 마찬가지로 $Y=l$은 l을 뽑고 1부터 $(l-1)$까지의 카드에서 4장을 뽑는 것이므로

$\mathrm{P}(Y=l)=\dfrac{{}_{l-1}\mathrm{C}_4}{{}_n\mathrm{C}_5}$ (단, $5\le l\le n$)

또한, $\mathrm{P}(X=n+1-l)=\dfrac{{}_{n-(n+1-l)}\mathrm{C}_4}{{}_n\mathrm{C}_5}=\dfrac{{}_{l-1}\mathrm{C}_4}{{}_n\mathrm{C}_5}$

$\therefore \mathrm{P}(Y=l)=\mathrm{P}(X=n+1-l)$ (참)

ㄷ. $n=10$이면

$\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{{}_{10-k}\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5}$ (단, $1\le k\le 6$)이고

$\mathrm{P}(Y=l)=\dfrac{{}_{l-1}\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5}$ (단, $5\le l\le 10$)이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\times\mathrm{P}(X=1)+2\times\mathrm{P}(X=2)+\cdots+6\times\mathrm{P}(X=6)\\&=\frac{1}{{}_{10}\mathrm{C}_5}({}_9\mathrm{C}_4+2{}_8\mathrm{C}_4+3{}_7\mathrm{C}_4+4{}_6\mathrm{C}_4+5{}_5\mathrm{C}_4+6{}_4\mathrm{C}_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=5\times\mathrm{P}(Y=5)+6\times\mathrm{P}(Y=6)+\cdots+10\times\mathrm{P}(Y=10)\\&=\frac{1}{{}_{10}\mathrm{C}_5}(5{}_4\mathrm{C}_4+6{}_5\mathrm{C}_4+7{}_6\mathrm{C}_4+8{}_7\mathrm{C}_4+9{}_8\mathrm{C}_4+10{}_9\mathrm{C}_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)&=\frac{11}{{}_{10}\mathrm{C}_5}({}_4\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_4+{}_8\mathrm{C}_4+{}_9\mathrm{C}_4)\\&=\frac{11}{{}_{10}\mathrm{C}_5}\times{}_{10}\mathrm{C}_5=11\ (\text{참})\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

52 답 ②

이 상자에서 카드 1장을 꺼낼 때, 이 카드에 적힌 숫자를 확률변수 Y라 하고, 1, 2, 3일 확률을 각각 p, q, r (단, $p+q+r=1$)라 하면

(i) 두 수 중 작지 않은 수가 1이 되는 경우는 두 수 모두 1이 나오는 경우이므로 $\mathrm{P}(X=1)=p\times p=p^2$

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{1}{4}$이므로 $p^2=\dfrac{1}{4}$에서 $p=\dfrac{1}{2}$

(ii) 두 수 중 작지 않은 수가 3이 되는 경우는 두 수 모두 2 이하가 나오는 경우를 제외하면 되므로

$\mathrm{P}(X=3)=1-(1-r)^2=\dfrac{5}{9}$ $\qquad\therefore r=\dfrac{1}{3}$ ($\because 0<r<1$)

한편, $p+q+r=1$이므로 $q=\dfrac{1}{6}$

따라서 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1

$\therefore \mathrm{E}(Y)=1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{6}+3\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{6}$

53 답 5

$a_kb_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$는 0 또는 1 중 하나의 값만 갖고, $a_kb_k=1$일 확률을 p라 하면 확률 p는 두 개의 동전이 모두 앞면이 나올 확률과 같으므로

$p=\dfrac{1}{4}$

확률변수 $X=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{20}b_{20}$은 $a_kb_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$의 값 중 1이 나오는 횟수와 같으므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=20\times\dfrac{1}{4}=5$

54 답 20

변 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{A_2B_2}$, $\cdots$, $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 각각 x_1, x_2, $\cdots$, x_n이라 하면 확률변수 $X=x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=7$, $\sigma(X)=1$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=1^2+7^2=50$

한편, 직사각형 $\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i\mathrm{C}_i\mathrm{D}_i$의 둘레의 길이가 20이고, 가로의 길이 $\overline{\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i}=x_i$에서 세로의 길이 $\overline{\mathrm{B}_i\mathrm{C}_i}=10-x_i$이므로

직사각형 $\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i\mathrm{C}_i\mathrm{D}_i$의 넓이는 $\overline{\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i}\times\overline{\mathrm{B}_i\mathrm{C}_i}=x_i(10-x_i)$

따라서 이 직사각형들의 넓이의 평균은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X(10-X))&=\mathrm{E}(10X-X^2)\\&=10\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(X^2)\\&=10\times7-50=20\end{aligned}$$

55 답 80

노란 공이 나올 사건을 A, 1이 적힌 공이 나올 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$이고 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

노란 공이거나 1이 적힌 공이 나올 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

이때, 노란 공이거나 1이 적힌 공이 나온 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(120,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=120\times\dfrac{2}{3}=80$

06 정규분포

문제편 63P

01 답 ③

구간 $[-4a, 4a]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 이 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times(2a+8a)\times1=1$에서 $a=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}\left(|X|\le\frac{2}{5}\right)=1-2\times\mathrm{P}\left(\frac{2}{5}\le X\le\frac{4}{5}\right)$

$=1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{11}{15}$

02 답 14

$\mathrm{P}(10\le X\le k)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-10}{4}\right)$

$\mathrm{P}(k\le Y\le20)=\mathrm{P}\left(\frac{k-20}{6}\le Z\le0\right)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{20-k}{6}\right)$

이므로 $\frac{k-10}{4}=\frac{20-k}{6}$에서 $k=14$

03 답 3

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(8, \sigma^2)$을 따르므로

$\frac{a+(a+10)}{2}=8$

$\therefore a=3$

04 답 ②

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(6, 2^2)$을 따르므로

$m=6, \sigma=2$

$\mathrm{P}(|X-6|\le2)=\mathrm{P}(-2\le X-6\le2)$

$=\mathrm{P}(6-2\le X\le6+2)$

$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)$

$=2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.6826$

에서 $\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=0.3413$

$\therefore \mathrm{P}(Y\ge15)=\mathrm{P}(2X-1\ge15)$

$=\mathrm{P}(X\ge8)=\mathrm{P}(X\ge m+\sigma)$

$=0.5-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

05 답 ②

제품 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(800, 50^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\ge830)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{830-800}{50}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge0.6)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.6)$

$=0.5-0.2257=0.2743$

06 답 85

수험생 1명의 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50, 20^2)$을 따른다. 이때, 상위 4 % 이내에 속하는 최소 점수를 a점이라 하면

$\mathrm{P}(X\ge a)=0.04$

$\therefore \mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-50}{20}\right)=0.04 \cdots$ ㉠

㉠에서 $\frac{a-50}{20}>0$이므로

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-50}{20}\right)=0.04$에서

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-50}{20}\right)=0.46$

주어진 표준정규분포표에 의하여 $\frac{a-50}{20}=1.75$에서

$a=85$

따라서 상위 4 % 이내에 속하려면 최소 85점이어야 한다.

07 답 ③

한 개의 주사위를 72번 던질 때 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=72\times\frac{1}{3}=24$

$\mathrm{V}(X)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$

이때, 72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(24, 4^2)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\ge32)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{32-24}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

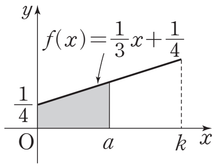
08 답 ④

$5\mathrm{P}(0\le X\le a)=\mathrm{P}(a\le X\le k)$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le k)=\mathrm{P}(0\le X\le a)+\mathrm{P}(a\le X\le k)$

$=6\mathrm{P}(0\le X\le a)=1$

$\therefore \mathrm{P}(0\le X\le a)=\frac{1}{6}$



이때, $\mathrm{P}(0\le X\le a)$의 값은 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{4}+\left(\frac{a}{3}+\frac{1}{4}\right)\right\}\times a=\frac{1}{6}$

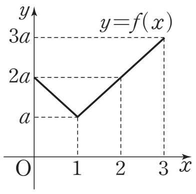
$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

09 답 157

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)$

$=\frac{1}{2}\times 1\times(2a+a)+\frac{1}{2}\times 2\times(a+3a)$

$=\frac{3}{2}a+4a=\frac{11}{2}a=1$



따라서 $a=\frac{2}{11}$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 11a)=\mathrm{P}(0\le X\le 2)=2\mathrm{P}(0\le X\le 1)$

$=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{11}+\frac{4}{11}\right)\times 1=\frac{6}{11}$

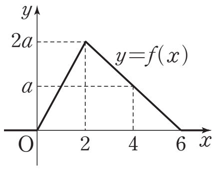
따라서 $p=11$, $q=6$이므로

$p^2+q^2=11^2+6^2=157$

10 답 15

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로



$\frac{1}{2}\times 6\times 2a=1$에서 $a=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 4)=\frac{1}{2}\times(6-4)\times a=\frac{1}{6}$

$\therefore 90p=90\times\frac{1}{6}=15$

11 답 24

$\mathrm{E}(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$라 하면 조건 (가)에 의하여

$\mathrm{E}(Y)=am$, $\sigma(Y)=a\sigma$ ($\because a>0$)

조건 (나)에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{10-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{20-am}{a\sigma}\right)=1$이므로

$\frac{10-m}{\sigma}=\frac{20-am}{a\sigma}$에서

$a=2$ ($\because \sigma>0$)

조건 (다)에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{16-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{16-2m}{2\sigma}\right)$ ($\because a=2$)이므로

$\frac{16-m}{\sigma}=\frac{2m-16}{2\sigma}$에서

$m=12$ ($\because \sigma>0$)

$\therefore \mathrm{E}(Y)=am=24$

12 답 5

표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}(Y\ge a)=\mathrm{P}(Z\ge k)$라 하면

$k=\frac{a-2}{3}=\frac{a-3}{2}$

$\therefore a=5$

13 답 2

$\mathrm{P}\left(X\ge x\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{x-am}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}\left(Y\ge y\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{y-m}{\sqrt{b}\sigma}\right)$이므로 조건 (가)에서

$-\frac{am}{\sigma}=-\frac{m}{\sqrt{b}\sigma}$ $\quad\therefore a\sqrt{b}=1$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 $\mathrm{P}\left(Z\le\frac{1-am}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2-m}{\sqrt{b}\sigma}\right)=1$

$\frac{1-am}{\sigma}=\frac{2-m}{\sqrt{b}\sigma}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=4$ $\quad\therefore ab=2$

14 답 450

응시자 한 명이 얻은 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(420,\ 15^2)$을 따른다.

또한, 경쟁률이 50 : 1이므로 합격하기 위해서는 상위 2% 이내에 들어야 한다. 이때, 합격자의 최저 점수를 k라 하면

$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-420}{15}\right)=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-420}{15}\right)=0.02$

즉, $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-420}{15}\right)=0.48$이므로 주어진 표준정규분포표에서

$\frac{k-420}{15}=2$ $\quad\therefore k=450$

따라서 합격자의 최저점수는 450점이다.

15 답 79

6월에 받은 점수 82점을 표준화하면 $\frac{82-70}{8}=\frac{3}{2}$

따라서 9월에 받은 점수가 a점이므로 $\frac{x-64}{10}=\frac{3}{2}$이 되어야 한다.

$a-64=15$ $\quad\therefore a=79$

16 답 ①

제품의 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(474,\ 50^2)$을 따른다. 이때,

$\mathrm{P}(X\ge 500)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{500-474}{50}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0.52)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.52)=0.3$

이므로 제품의 무게와 불량인 제품의 비율에 대한 표는 다음과 같다.

	불량인 제품	불량이 아닌 제품	합계
500 g 미만	0.1×0.7	0.9×0.7	0.7
500 g 이상	0.05×0.3	0.95×0.3	0.3
합계			1

여기서 불량인 제품인 사건을 A, 제품의 무게가 500g 이상인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.05\times 0.3}{0.1\times 0.7+0.05\times 0.3}=\frac{15}{85}=\frac{3}{17}$

17 답 16

제품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(28,\ 4^2)$을 따르므로 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(X\le 20)=\mathrm{P}(Z\le -2)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.48=0.02$

따라서 불량품의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.02)$를 따른다.

이때, $\mathrm{E}(Y)=2500\times 0.02=50, \mathrm{V}(Y)=2500\times 0.02\times 0.98=7^2$

따라서 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\ge 57)=\mathrm{P}(Z\ge 1)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.34=0.16$

따라서 $p=0.16$이므로 $100p=16$

18 답 ②

임의로 택한 900명의 방문객 중에서 고등학생의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(900,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=900\times\frac{1}{5}=180,\ \mathrm{V}(X)=900\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=144=12^2$

이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 12^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le 162)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{162-180}{12}\right)=\mathrm{P}(Z\le -1.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

19 답 2

원 O_1의 넓이는 원 O_2의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로 한 점이 원 O_1의 내부에 찍힐 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 원 O_1의 내부에 찍히는 점의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(108,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다. 이때,

$\mathrm{E}(X)=108\times\frac{1}{4}=27,\ \sigma(X)=\sqrt{108\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=\frac{9}{2}$이고

108은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(27,\ \left(\frac{9}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 36)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{36-27}{\frac{9}{2}}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.5-0.48=0.02$

따라서 $p=0.02$이므로 $100p=2$

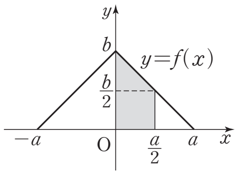
20 답 ③

ㄱ. $-a\le x\le a$에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 2a\times b=1\qquad \therefore\ ab=1$

따라서 a의 값이 커지면 b의 값은 작아진다. (참)

ㄴ. $p=\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{a}{2}\right)$는 그림의 어두운 부분의 넓이이고, $f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{b}{2}$이므로



$\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{a}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\left(b+\frac{b}{2}\right)$

$=\frac{3}{8}ab=\frac{3}{8}\ (\because\ ab=1)$

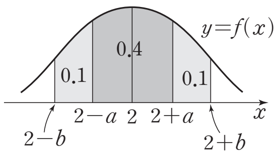
즉, a의 값에 관계없이 $p=\frac{3}{8}$으로 항상 일정하다. (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 b의 값에 관계없이 p의 값은 $\frac{3}{8}$으로 항상 일정하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다

21 답 ①

$f(2+x)=f(2-x)$에서 곡선 $f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. 그림에서



$\mathrm{P}(2+a\le X\le 2+b)$

$=\mathrm{P}(2-b\le X\le 2-a)=0.1$이므로

$\mathrm{P}(2-b\le X\le 2+b)=\mathrm{P}(2-b\le X\le 2-a)+\mathrm{P}(2-a\le X\le 2+b)$

$=0.1+0.5=0.6$

22 답 6

확률밀도함수 $f(x)=\frac{a}{4}x\ (0\le x\le a)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이므로 $\frac{1}{2}\times a\times\frac{a^2}{4}=1$에서 $a^3=8\qquad \therefore\ a=2(\because\ a$는 실수)

한편, 사건 A가 일어날 확률을 $\mathrm{P}(0\le X\le k)=p(0\le p\le 1)$라 하면 3회의 독립시행에서 사건 A가 2회 이상 일어날 확률이 $\frac{1}{2}$이므로

${}_3\mathrm{C}_2p^2(1-p)+{}_3\mathrm{C}_3p^3=\frac{1}{2}$에서 $-2p^3+3p^2=\frac{1}{2}$

$4p^3-6p^2+1=0,\ (2p-1)(2p^2-2p-1)=0\qquad \therefore\ p=\frac{1}{2}$

이때, $\mathrm{P}(0\le X\le k)=\frac{1}{2}\times k\times\frac{k}{2}=\frac{k^2}{4}$이므로

$\frac{k^2}{4}=\frac{1}{2}$에서 $k^2=2$

$\therefore\ a^2+k^2=2^2+2=6$

23 답 16

$\mathrm{E}(X)=10$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X+4)=3\mathrm{E}(X)+4=34$

$\sigma(X)=\sigma\ \ (\sigma>0)$라 하면

$\sigma(Y)=\sigma(3X+4)=3\sigma$

$\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}(Y\ge k)$에서 $\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-10}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-34}{3\sigma}\right)$

따라서 $\frac{k-10}{\sigma}=\frac{34-k}{3\sigma}$에서 $3k-30=34-k$

$\therefore\ k=16$

24 답 ⑤

$f(50-x)=f(50+x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=50$에 대하여 대칭이다. $\therefore m=50$

또한, $\mathrm{P}(m\le X\le m+10)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{10}{\sigma}\right)=0.4772$에서

$\frac{10}{\sigma}=2 \qquad \therefore \sigma=5$

$\therefore \mathrm{P}(40\le X\le 65)=\mathrm{P}(-2\le Z\le 3)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$
$=0.4772+0.4987=0.9759$

25 답 ③

$\mathrm{P}(|X|\le a)=\mathrm{P}\left(|Z|\le \frac{a-0}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(|Z|\le \frac{a}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(|Y|\le b)=\mathrm{P}\left(|Z|\le \frac{b-0}{\sqrt{2}\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(|Z|\le \frac{b}{\sqrt{2}\sigma}\right)$

이므로 $\mathrm{P}(|X|\le a)=\mathrm{P}(|Y|\le b)$이면 $a=\frac{b}{\sqrt{2}}$이다.

ㄱ. $a=\frac{b}{\sqrt{2}}$이고 $a>0$, $b>0$이므로 $a<b$ (참)

ㄴ. $\mathrm{P}(Y>2a)=\mathrm{P}(Y>\sqrt{2}b)$
$=\mathrm{P}\left(Z>\frac{\sqrt{2}b-0}{\sqrt{2}\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z>\frac{b}{\sigma}\right)$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(X>a)=1-\mathrm{P}(X\le a)=0.2$이므로
$\mathrm{P}(|X|\le a)=1-\mathrm{P}(|X|\ge a)=1-2\mathrm{P}(X>a)$
$=1-2\times 0.2=0.6$
$\therefore \mathrm{P}(|X|\le a)=\mathrm{P}(|Y|\le b)=0.6$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

26 답 ③

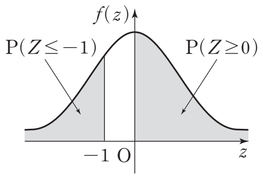
두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 각각 대칭이다.
구하는 넓이를 S라 하면

$S=2\{\mathrm{P}(0\le X\le 1)-\mathrm{P}(0\le Y\le 1)\}$
$=2\{\mathrm{P}(0\le Z\le 1)-\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)\}$
$=2[\mathrm{P}(0\le Z\le 1)-\{\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\}]$
$=2\{2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\}$
$=2(2\times 0.3413-0.4772)=0.4108$

27 답 ③

$y=x^2-(2X-1)x+3$과 $y=x+(X+1)$에서
$x^2-(2X-1)x+3=x+(X+1)$
$x^2-2Xx+(2-X)=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=X^2-(2-X)\ge 0$
$(X-1)(X+2)\ge 0$
$X\le -2$ 또는 $X\ge 1$

$\therefore \mathrm{P}(X\le -2$ 또는 $X\ge 1)$
$=\mathrm{P}(Z\le -1$ 또는 $Z\ge 0)$
$=1-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=1-0.3413=0.6587$



28 답 116

학생들의 수학 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(82,\ 5^2)$을 따른다.

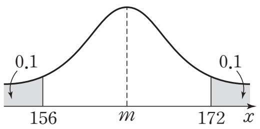
$\therefore \mathrm{P}(86\le X\le 90)=\mathrm{P}\left(\frac{86-82}{5}\le Z\le \frac{90-82}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(0.8\le Z\le 1.6)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)$
$=\frac{32}{200}=0.16$

즉, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)=0.45-0.16=0.29$이므로
$\mathrm{P}(78\le X\le 86)=\mathrm{P}(-0.8\le Z\le 0.8)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)$
$=2\times 0.29=0.58$

따라서 78점 이상 86점 이하의 점수를 받은 학생의 수는
$0.58\times 200=116$

29 답 ②

조사한 중학교 학생들의 키를 확률변수 X라 하면 X가 정규분포를 따르므로 평균 m은



$m=\frac{156+172}{2}=164$

즉, X는 정규분포 $\mathrm{N}(164,\ \sigma^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\ge 172)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{172-164}{\sigma}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{8}{\sigma}\right)=0.1$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{8}{\sigma}\right)=0.5-0.1=0.4$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.28)=0.4$에서 $\frac{8}{\sigma}=1.28$

$\therefore \sigma=6.25$

30 답 50

두 확률변수 X, Y를 각각 수학 성적, 영어 성적이라 하면 σ_X가 수학 성적의 표준편차, σ_Y가 영어 성적의 표준편차이므로 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다고 하면

$\mathrm{P}(40\le X\le 55)=\mathrm{P}(40\le Y\le 70)$

$\mathrm{P}\left(\frac{40-45}{\sigma_X}\le Z\le \frac{55-45}{\sigma_X}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{40-60}{\sigma_Y}\le Z\le \frac{70-60}{\sigma_Y}\right)$

$\mathrm{P}\left(-\frac{5}{\sigma_X}\le Z\le 2\times \frac{5}{\sigma_X}\right)=\mathrm{P}\left(-2\times \frac{10}{\sigma_Y}\le Z\le \frac{10}{\sigma_Y}\right)$

$\dfrac{5}{\sigma_X}=\dfrac{10}{\sigma_Y}$, $\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}=\dfrac{1}{2}=k$이므로

$100k=50$

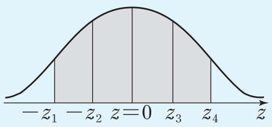
일등급 UP

＊ 표준정규분포곡선의 성질

$z_i \geq 0\,(i=1, 2, 3, 4)$에 대하여

$P(-z_1 \leq Z \leq z_3)=P(-z_2 \leq Z \leq z_4)$이면

$z_2=z_3$이고 $z_1=z_4$이다.



31 답 ②

A, B, C 세 사람의 월급을 표준화하여 얻어진 값을 각각 a, b, c라 하면

$a=\dfrac{184-170}{10}=\dfrac{7}{5}$, $b=\dfrac{2250-2000}{300}=\dfrac{5}{6}$, $c=\dfrac{21-18}{2.5}=\dfrac{6}{5}$

따라서 $a>c>b$이므로 A, C, B의 순서로 자국 내에서 상대적으로 월급을 많이 받는다고 볼 수 있다.

32 답 ②

배의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(358, 50^2)$을 따른다.

수확한 배 중 1등급 상품이 될 확률은

$P(X \geq 400)=P\left(Z \geq \dfrac{400-358}{50}\right)=P(Z \geq 0.84)$

$=0.5-0.3=0.2$

임의로 선택한 100개의 배 가운데 1등급 상품인 배의 개수를 Y라 하면 Y는 이항분포 $B(100, 0.2)$를 따르므로

$E(Y)=100\times 0.2=20$, $V(Y)=100\times 0.2\times 0.8=16$

이때, 100은 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따른다.

$\therefore P(Y \geq 24)=P\left(Z \geq \dfrac{24-20}{4}\right)=P(Z \geq 1)$

$=0.5-0.34=0.16$

33 답 ②

400명 중 혈액형이 AB형인 사람의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(400, \dfrac{1}{10}\right)$을 따른다.

$\therefore m=400\times\dfrac{1}{10}=40$, $\sigma^2=400\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{9}{10}=36=6^2$

따라서 X는 정규분포 $N(40, 6^2)$을 따르므로

$P(43 \leq X \leq 49)=P(0.5 \leq Z \leq 1.5)$

$=P(0 \leq Z \leq 1.5)-P(0 \leq Z \leq 0.5)$

$=0.4332-0.1915$

$=0.2417$

34 답 ②

10점을 얻는 횟수, 2점을 잃는 횟수를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X는 이항분포 $B\left(1600, \dfrac{1}{5}\right)$을 따른다.

$E(X)=1600\times\dfrac{1}{5}=320$

$V(X)=1600\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=256=16^2$

이때, 1600은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(320, 16^2)$을 따른다.

또한, $X+Y=1600$에서 $Y=1600-X$ ⋯ ㉠

$10X-2Y \geq 928$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$10X-2(1600-X) \geq 928$ $\quad\therefore X \geq 344$

$\therefore P(X \geq 344)=P\left(Z \geq \dfrac{344-320}{16}\right)=P(Z \geq 1.5)$

$=P(Z \geq 0)-P(0 \leq Z \leq 1.5)$

$=0.5-0.43=0.07$

35 답 ②

이항분포 $B\left(100, \dfrac{4}{5}\right)$를 따르는 확률변수를 X라 하면

$E(X)=100\times\dfrac{4}{5}=80$, $V(X)=100\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{5}=16=4^2$

이때, 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(80, 4^2)$을 따른다.

$k=0, 1, 2, \cdots, 100$일 때, 함수 $f(x)$는 확률변수 X의 확률질량함수와 같으므로

$f(86)+f(87)+\cdots+f(100)=P(X \geq 86)$

$=P\left(Z \geq \dfrac{86-80}{4}\right)=P(Z \geq 1.5)$

$=0.5-P(0 \leq Z \leq 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

36 답 ④

예약을 취소한 사람의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(400, 0.1)$을 따른다.

$E(X)=400\times 0.1=40$, $V(X)=400\times 0.1\times 0.9=36=6^2$

400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(40, 6^2)$을 따른다.

이때, 비행장에 나온 모든 사람이 비행기를 타려면 예약을 취소하는 사람이 28명 이상이어야 한다.

$\therefore P(X \geq 28)=P\left(Z \geq \dfrac{28-40}{6}\right)=P(Z \geq -2)$

$=P(-2 \leq Z \leq 0)+P(Z \geq 0)$

$=P(0 \leq Z \leq 2)+0.5$

$=0.4772+0.5=0.9772$

37 답 ②

제품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(836,\ 100^2)$을 따른다. 이때,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 800)&=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{800-836}{100}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq -0.36)\\&=\mathrm{P}(-0.36\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(Z\geq 0)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.36)+0.5\\&=0.14+0.5=0.64\end{aligned}$$

따라서 임의로 추출한 100개의 제품 중에서 판매할 수 있는 제품의 수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.64)$를 따른다.

이때, $\mathrm{E}(Y)=100\times 0.64=64$

$\mathrm{V}(Y)=100\times 0.64\times 0.36=8^2\times\left(\frac{6}{10}\right)^2=4.8^2$

또한, 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(64,\ 4.8^2)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(Y\geq 70)&=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{70-64}{4.8}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 1.25)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.25)\\&=0.5-0.39=0.11\end{aligned}$$

38 답 80

$\mathrm{P}(X\leq 120)=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{120-100}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{20}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(Y\geq k)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{k-120}{2\sigma}\right)$ ---------- ⓐ

따라서 $\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{20}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{k-120}{2\sigma}\right)$에서

$\frac{20}{\sigma}=-\frac{k-120}{2\sigma}$

$120-k=40$

$\therefore k=80$ ---------- ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ $\mathrm{P}(X\leq 120)$, $\mathrm{P}(Y\geq k)$를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 각각 표준화한다. [50%]

ⓑ 상수 k의 값을 구한다. [50%]

39 답 49

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르고, n은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{n}{2},\ \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2\right)$을 따른다. ---------- ⓐ

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\left|X-\frac{n}{2}\right|\leq 7\right)&=\mathrm{P}\left(-7\leq X-\frac{n}{2}\leq 7\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{14}{\sqrt{n}}\leq Z\leq \frac{14}{\sqrt{n}}\right)\\&\geq 0.954\end{aligned}$$

이때, $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.477$에서

$\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 2)=0.954$이므로

$\frac{14}{\sqrt{n}}\geq 2$

$\therefore n\leq 49$

따라서 n의 최댓값은 49이다. ---------- ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{n}{2},\ \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2\right)$을 따름을 안다. [50%]

ⓑ n의 최댓값을 구한다. [50%]

40 답 16

인삼 한 뿌리의 무게를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 5^2)$을 따른다.

이때, 임의의 인삼 한 뿌리가 우수상품일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 45)&=\mathrm{P}(Z\geq 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.16\end{aligned}$$ ---------- ⓐ

즉, 인삼 100 뿌리를 임의로 선택하였을 때 우수상품으로 분류되는 뿌리의 개수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.16)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=100\times 0.16=16$ ---------- ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ $\mathrm{P}(X\geq 45)$의 값을 구한다. [50%]

ⓑ $\mathrm{E}(Y)$의 값을 구한다. [50 %]

41 답 62

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

한편, 조건 (가)에서 $f(10)>f(20)$이므로

$m<\frac{10+20}{2}$

$\therefore m<15$ ⋯ ㉠

또, 조건 (나)에서 $f(4)<f(22)$이므로

$m>\frac{4+22}{2}$

$\therefore m>13$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 m은 자연수이므로

$m=14$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(17\leq X\leq 18)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{17-14}{5}\leq \frac{X-14}{5}\leq \frac{18-14}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(0.6\leq Z\leq 0.8)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.8)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)\\&=0.288-0.226=0.062\end{aligned}$$

따라서 $a=0.062$이므로

$1000a=62$

42 답 155

$P(0\leq Z\leq 0.52)=0.2$에서

$P(Z\geq 0.52)=0.5-P(0\leq Z\leq 0.52)=0.3$이고

$P(X\leq 3)=0.3$이므로

$3=m-0.52\sigma$ ⋯ ㉠

또, $P(0\leq Z\leq 0.25)=0.1$에서

$P(Z\leq 0.25)=0.5+P(0\leq Z\leq 0.25)=0.5+0.1=0.6$이고

$P(X\leq 3)=P(3\leq X\leq 80)=0.3$에서

$P(X\leq 80)=P(X\leq 3)+P(3\leq X\leq 80)=0.3+0.3=0.6$

이므로 $80=m+0.25\sigma$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

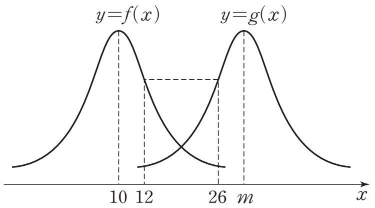
$m=55,\ \sigma=100$

$\therefore\ m+\sigma=55+100=155$

43 답 ②

두 확률변수 X, Y의 표준편차가 4로 같고 확률변수 Y는 정규분포 $N(m,\ 4^2)$을 따르며 $P(Y\geq 26\geq 0.5)$이므로

$f(12)=g(26)$에서 두 정규분포곡선은 다음과 같다.



그림에서 $P(X\geq 12)=P(Y\leq 26)$이므로

$\dfrac{12-10}{4}=-\dfrac{26-m}{4}$

즉, $m=28$

$\therefore\ P(Y\leq 20)=P\left(Z\leq\dfrac{20-28}{4}\right)$

$=P(Z\leq -2)$

$=0.5-P(0\leq Z\leq 2)$

$=0.0228$

44 답 ④

이 양계장에서 생산하는 계란 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(52,\ 8^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-52}{8}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(60\leq X\leq 68)$

$=P\left(\dfrac{60-52}{8}\leq Z\leq\dfrac{68-52}{8}\right)$

$=P(1\leq Z\leq 2)=P(0\leq Z\leq 2)-P(0\leq Z\leq 1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$

45 답 ⑤

A과목과 B과목의 점수를 각각 확률변수 X, Y라 하면

X는 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르고 Y는 정규분포 $N(m+3,\ \sigma^2)$을 따른다.

$P(X\geq 80)=P\left(Z\geq\dfrac{80-m}{\sigma}\right)=0.09$에서

$P\left(0\leq Z\leq\dfrac{80-m}{\sigma}\right)=0.41$

$P(Y\geq 80)=P\left(Z\geq\dfrac{80-m-3}{\sigma}\right)=0.15$에서

$P\left(0\leq Z\leq\dfrac{80-m-3}{\sigma}\right)=0.35$

한편, $P(0\leq Z\leq 1.34)=0.41$, $P(0\leq Z\leq 1.04)=0.35$이므로

$\dfrac{80-m}{\sigma}=1.34,\ \dfrac{80-m-3}{\sigma}=1.04$

두 식을 연립하여 풀면 $\sigma=10,\ m=66.6$

$\therefore\ m+\sigma=76.6$

46 답 ②

72회의 시행 중 3의 배수의 눈이 나온 횟수를 Y라 하면 그 외의 눈이 나오는 횟수는 $72-Y$이므로

$X=3Y-2(72-Y)=5Y-144$

$X\geq 11$에서 $5Y-144\geq 11$

$\therefore\ Y\geq 31$

확률변수 Y는 이항분포 $B\left(72,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(Y)=72\times\dfrac{1}{3}=24,\ V(Y)=72\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=4^2$이고

72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로

정규분포 $N(24,\ 4^2)$을 따른다.

$\therefore\ P(X\geq 11)=P(Y\geq 31)=P\left(Z\geq\dfrac{31-24}{4}\right)=P(Z\geq 1.75)$

$=0.5-P(0\leq Z\leq 1.75)=0.5-0.4599=0.0401$

47 답 117

확률변수 X가 이항분포 $B\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따르므로

$E(X)=720\times\dfrac{1}{6}=120,\ \sigma(X)=\sqrt{720\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}}=10$

즉, 확률변수 X는 정규분포 $N(120,\ 10^2)$을 따르므로

$P(X\geq 125)=P\left(Z\geq\dfrac{125-120}{10}\right)=P(Z\geq 0.5)$

$=0.5-P(0\leq Z\leq 0.5)=0.5-0.191=0.309$

$P(X\geq a)=P\left(Z\geq\dfrac{a-120}{10}\right)=2\times 0.309=0.618$

$=0.5+0.118=0.5+P(0\leq Z\leq 0.3)$

$=0.5+P(-0.3\leq Z\leq 0)=P(Z\geq -0.3)$

즉, $\dfrac{a-120}{10}=-0.3$이므로 $a-120=-3$

$\therefore\ a=117$

48 답 ⑤

확률변수 X는 정규분포 $N(k, 2^2)$을 따르므로

$f(k)=P(0\le X\le 4)$

$=P\left(-\frac{k}{2}\le Z\le 2-\frac{k}{2}\right)$

ㄱ. $f(0)=P(0\le Z\le 2)$

$=P(-2\le Z\le 0)$

$=f(4)$ (참)

ㄴ. $f(k)=P\left(-\frac{k}{2}\le Z\le 2-\frac{k}{2}\right)$에서 k 대신 $4-k$를 대입하면

$f(4-k)=P\left(-\frac{4-k}{2}\le Z\le 2-\frac{4-k}{2}\right)$

$=P\left(\frac{k}{2}-2\le Z\le \frac{k}{2}\right)$

한편, $(a\le Z\le b)=P(-b\le Z\le -a)$ (a, b는 상수)이므로

$f(k)=P\left(-\frac{k}{2}\le Z\le 2-\frac{k}{2}\right)$

$=P\left(\frac{k}{2}-2\le Z\le \frac{k}{2}\right)$

$=f(4-k)$ (참)

ㄷ. $f(k)$가 최대일 때, $\frac{0+4}{2}=k$이므로 $k=2$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

49 답 63

남학생과 여학생의 점수를 각각 확률변수 X, Y라 하면

$P(X\ge 70)=P\left(Z\ge \frac{70-60}{10}\right)$

$=P(Z\ge 1)$

$=0.5-P(0\le Z\le 1)$

$=0.16$

즉, 남학생 중에서 70점 이상인 학생의 수는

$1000\times 0.16=160$

이므로 여학생 중에서 70점 이상인 학생의 수는

$3\times 160=480$

$P(Y\ge 70)=\frac{480}{2000}=0.24$에서

$P(Y\ge 70)=P\left(Z\ge \frac{70-m}{10}\right)$

$=0.5-P\left(0\le Z\le \frac{70-m}{10}\right)$

$=0.24$

이고, $P\left(0\le Z\le \frac{70-m}{10}\right)=0.26$이므로

$\frac{70-m}{10}=0.70$

$\therefore m=63$

50 답 ③

주사위를 450회 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 X라 할 때, 점 P의 위치 Y는

$Y=2X-(450-X)=3X-450$이므로

$P(Y\ge 30)=P(3X-450\ge 30)=P(X\ge 160)$

한편, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(450, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=450\times\frac{1}{3}=150$, $V(X)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100=10^2$

또, 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 정규분포 $N(150, 10^2)$을 따른다.

$\therefore P(Y\ge 30)=P(X\ge 160)=P\left(Z\ge\frac{160-150}{10}\right)$

$=P(Z\ge 1)=0.5-P(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.34=0.16$

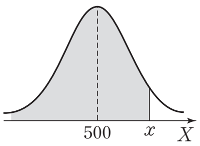
51 답 533

어느 한 식당을 선택하는 학생의 수를 확률변수 X라 하면 매 회의 시행에서 어느 한 식당을 선택할 확률은 $\frac{1}{5}$이고, 이러한 시행을 2500회 시행하는 것이므로 X는 이항분포 $B\left(2500, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

이때, $E(X)=2500\times\frac{1}{5}=500$

$V(X)=2500\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=400=20^2$

또한, 2500은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(500, 20^2)$을 따른다.



준비된 식사의 수를 x라 하면

$P(X\le x)=P\left(Z\le\frac{x-500}{20}\right)\ge 0.95$

$P(0\le Z\le 1.65)=0.450$이므로

$P(Z\le 1.65)=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.65)$

$=0.5+0.45=0.95$

$\frac{x-500}{20}\ge 1.65$이므로 $x-500\ge 33$

$\therefore x\ge 533$

따라서 적어도 533명의 식사를 준비해야 한다.

01 답 ⑤

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+3a+5b=\frac{10}{3}$이므로

$3a+5b=\frac{19}{6}$ ⋯ ㉠

$\frac{1}{6}+a+b=1$에서 $a+b=\frac{5}{6}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{3}$

$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{2}+5^2\times\frac{1}{3}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{17}{9}$

$\therefore \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{17}{9}\times\frac{1}{49}=\frac{17}{441}$

02 답 ④

크기가 2인 표본의 개수는 9이고 표본평균 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

(i) $\overline{X}=0$인 경우

두 표본이 모두 0인 경우이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

(ii) $\overline{X}=1$인 경우

두 표본이 0, 2이거나 2, 0인 경우이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}\geq 2)=1-\{\mathrm{P}(\overline{X}=0)+\mathrm{P}(\overline{X}=1)\}$

$=1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{16}$

03 답 ②

이 고등학교 학생의 수학 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 8^2)$을 따르므로 이 고등학교 3학년 학생 중 임의추출한 4명의 수학 점수의 평균을 표본평균 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 4명의 수학 점수의 평균이 78점 이상일 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 78)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{78-70}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\geq 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.5-0.4772=0.0228$

04 답 ④

모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$36-1.96\times\frac{10}{\sqrt{25}}\leq m\leq 36+1.96\times\frac{10}{\sqrt{25}}$

$\therefore 32.08\leq m\leq 39.92$

05 답 ③

표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\sigma=5$이므로 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{X}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{16}}\leq m\leq\overline{X}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{16}}$

이때, $a+b=2\overline{X}=180$에서 $\overline{X}=90$

$\therefore a=90-1.96\times\frac{5}{\sqrt{16}}=90-2.45=87.55$

06 답 ④

$\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=0$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=(-1)^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}-0^2=\frac{3}{2}$

이므로 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{8}}=\frac{1}{\sqrt{8}}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

07 답 ③

크기가 5인 표본을 복원추출하였을 때,

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{5}=\frac{11}{20}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\frac{11}{4}$ ⋯ ㉠

이때, $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{2}+2a+4\left(\frac{1}{2}-a\right)=2a+2-4a=2-2a$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{2}+2^2\times a+4^2\times\left(\frac{1}{2}-a\right)$

$=4a+8-16a=8-12a$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=(8-12a)-(2-2a)^2$

$=8-12a-(4-8a+4a^2)=4-4a-4a^2$

즉, ㉠에 의하여

$4-4a-4a^2=\frac{11}{4}$에서

$4a^2+4a-\frac{5}{4}=0$

$16a^2+16a-5=0$

$(4a-1)(4a+5)=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}\ (\because a\geq 0)$

08 답 ③

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=2.5$이므로

$\mathrm{E}(X)=3a+6\left(\frac{2}{3}-a\right)=4-3a=2.5$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

크기가 2인 표본을 복원추출할 때, $\overline{X}=3$인 경우는 0과 6, 3과 3, 6과 0을 추출하는 경우이다.

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=3)$

$=\mathrm{P}(X=0)\times\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=3)\times\mathrm{P}(X=3)$
$+\mathrm{P}(X=6)\times\mathrm{P}(X=0)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{18}+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}=\frac{13}{36}$

09 답 ⑤

이 회사에서 생산된 축구공의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(400, 16^2)$을 따른다.

크기가 64인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=400$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{16^2}{64}=2^2$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(400, 2^2)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}\le 396$ 또는 $\overline{X}\ge 405)$

$=\mathrm{P}(\overline{X}\le 396)+\mathrm{P}(\overline{X}\ge 405)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{396-400}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{405-400}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -2)+\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)+\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$

$=(0.5-0.4772)+(0.5-0.4938)$

$=0.0228+0.0062$

$=0.0290$

10 답 98

확률밀도함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(200-x)=f(x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=100$에 대하여 대칭이다. 따라서 확률변수 X의 평균은 $m=100$이므로 모집단은 정규분포 $\mathrm{N}(100, 10^2)$을 따른다.

이때, 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=100$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{10^2}{25}=2^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(100, 2^2)$을 따른다.

한편, $\mathrm{P}(\overline{X}\le a)=0.1587$에서 $a<100$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\le a)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-100}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{100-a}{2}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{100-a}{2}\right)$

$=0.1587$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{100-a}{2}\right)=0.3413$

따라서 주어진 표준정규분포표에 의하여

$\frac{100-a}{2}=1$에서 $a=98$

11 답 ④

모집단의 평균을 m이라 하면 모집단은 정규분포 $\mathrm{N}(m, 6^2)$을 따르므로 표본의 크기가 9인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{6}{\sqrt{9}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m, 2^2)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 3)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{2}\right|\le\frac{3}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(|Z|\le 1.5)$

$=2\times 0.4332$

$=0.8664$

12 답 256

이 회사가 생산하는 음료수 1병의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 6^2)$을 따른다.

이때, 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{6^2}{9}=2^2$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 2^2)$을 따른다.

한편, $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 250)=\mathrm{P}(\overline{X}\le a)=0.9332>0.5$이므로 $250<m<a$이다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 250)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{250-m}{2}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-250}{2}\right)=0.9332$

에서 $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-250}{2}\right)=0.4332$이므로

$\frac{m-250}{2}=1.5$ $\quad\therefore m=253$

또, $\mathrm{P}(\overline{X}\le a)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-253}{2}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-253}{2}\right)=0.9332$

에서 $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-253}{2}\right)=0.4332$이므로

$\frac{a-253}{2}=1.5$

$\therefore a=256$

13 답 12

우유 1팩의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200, \sigma^2)$을 따르므로 우유 9팩의 용량의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200, \left(\frac{\sigma}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $\mathrm{P}(\overline{X}>204)=\mathrm{P}\left(Z>\frac{204-200}{\frac{\sigma}{3}}\right)=0.1587$에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이고 $0.1587=0.5-0.3413$이므로

$\frac{204-200}{\frac{\sigma}{3}}=1$

$\therefore \sigma=12$

14 답 ①

정규분포 $N(60,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{X}$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(60,\ \left(\frac{4}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$, 즉 $N(60,\ 2^2)$을 따른다.

정규분포 $N(72,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{Y}$이므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포

$N\left(72,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\right)^2\right)$, 즉 $N\left(72,\ \left(\frac{\sigma}{6}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-60}{2}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\le 64)=P(Z\le 2)=0.5+P(0\le Z\le 2)$

또한, $Z=\frac{\overline{Y}-72}{\frac{\sigma}{6}}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{Y}\le 68)=P\left(Z\le -\frac{24}{\sigma}\right)=0.5-P\left(0\le Z\le \frac{24}{\sigma}\right)$

이때, $P(\overline{X}\le 64)+P(\overline{Y}\le 68)=1$이므로

$P(0\le Z\le 2)=P\left(0\le Z\le \frac{24}{\sigma}\right)$에서

$\frac{24}{\sigma}=2 \qquad \therefore\ \sigma=12$

따라서 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $N(72,\ 2^2)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(\overline{Y}\ge 70)&=P\left(Z\ge \frac{70-72}{2}\right)\\&=P(Z\ge -1)\\&=0.5+P(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

15 답 ④

$E(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(m,\ 2^2)$을 따른다.

$P(-1.65\le Z\le 1.65)=0.90$에서 모평균 m에 대한 신뢰도 90 %의 신뢰구간은

$\overline{X}-1.65\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+1.65\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$165-1.65\times 2\le m\le 165+1.65\times 2$

$\therefore\ 161.7\le m\le 168.3$

16 답 64

표본의 크기가 n일 때 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간의 길이가 6 이하이어야 하므로

$2\times 2\times \frac{12}{\sqrt{n}}\le 6$에서 $\sqrt{n}\ge 8$

$\therefore\ n\ge 64$

따라서 n의 최솟값은 64이다.

17 답 385

신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m과 표본평균과의 차는 $1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$1.96\times\frac{20}{\sqrt{n}}\le 2$에서

$n\ge 384.16$

따라서 적어도 385개 이상의 계란을 추출해야 하므로

$n=385$

18 답 ①

$E(X)=\frac{1}{20}(1\times 3+2\times 4+3\times 6+4\times 4+5\times 3)=3$

$E(X^2)=\frac{1}{20}(1^2\times 3+2^2\times 4+3^2\times 6+4^2\times 4+5^2\times 3)=10.6$

$\therefore\ V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=10.6-9=1.6$

이때, 표본의 크기가 10이므로

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{10}=0.16$

19 답 ①

표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\frac{Y}{4}=\overline{X}$

$\therefore\ Y=4\overline{X}$

한편, $E(\overline{X})=8,\ V(\overline{X})=\frac{4}{4}=1$이므로

$$\begin{aligned}E(Y)+V(Y)&=E(4\overline{X})+V(4\overline{X})\\&=4E(\overline{X})+4^2V(\overline{X})\\&=32+16=48\end{aligned}$$

20 답 ②

주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 나온 공에 적혀 있는 수를 확률변수 Y라 하면

$E(Y)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=2$

$V(Y)$

$=(1-2)^2\times\frac{4}{10}+(2-2)^2\times\frac{3}{10}+(3-2)^2\times\frac{2}{10}+(4-2)^2\times\frac{1}{10}$

$=1\times\frac{4}{10}+0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=1$

이때, 크기가 4인 표본을 임의로 복원추출하여 그 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면

$\overline{Y}=\frac{X}{4}$에서 $X=4\overline{Y}$

한편, $\sigma(\overline{Y})=\frac{\sigma(Y)}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\sigma(X)&=\sigma(4\overline{Y})=4\sigma(\overline{Y})\\&=4\times\frac{1}{2}=2\end{aligned}$$

21 답 ④

모집단의 확률변수를 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=18\times\frac{1}{3}=6,\ \mathrm{V}(X)=18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=6,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=1$

이때, $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=1+6^2=37$

22 답 ③

ID 1개당 이용시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60, 10^2)$을 따른다. 따라서 ID 25개의 이용시간의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(60, 2^2)$을 따른다.

ID 25개의 이용시간의 총합이 1550분이므로 $\overline{X}=\frac{1550}{25}=62$이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\le 62)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{62-60}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5+0.3413=0.8413$

23 답 ③

X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 3^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-m}{3}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m\le X\le a)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-m}{3}\right)=0.4332$에서

$\frac{a-m}{3}=1.5$이므로 $a-m=4.5$ ⋯ ㉠

이때, 크기가 9인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\le a-6)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-6-m}{1}\right)=\mathrm{P}(Z\le -1.5)$ ($\because$ ㉠)

$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)=0.5-0.4332=0.0668$

24 답 ②

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(1640, \frac{400^2}{n}\right)$을 따른다. 이때,

$0.90=0.5+0.40=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.28)=\mathrm{P}(Z\le 1.28)$

이므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le 1768)\ge 0.90$에서

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 1768)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{1768-1640}{\frac{400}{\sqrt{n}}}\right)\ge\mathrm{P}(Z\le 1.28)$

즉, $1768\ge 1640+1.28\times\frac{400}{\sqrt{n}}$에서 $128\ge 1.28\times\frac{400}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}\ge 4\qquad\therefore\ n\ge 16$

따라서 자연수 n의 최솟값은 16이다.

25 답 ⑤

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{12^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m, 3^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 4)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{4-m}{3}\right)\ge 0.975$이므로

$0.5+\mathrm{P}\left(\frac{4-m}{3}\le Z\le 0\right)\ge 0.975$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-4}{3}\right)\ge 0.475$

즉, $\frac{m-4}{3}\ge 1.96$에서 $m\ge 9.88$이므로 m의 최솟값은 9.88이다.

26 답 ③

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 20^2)$을 따르므로 크기가 16인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 5^2)$을 따른다. 즉,

$f(k)=\mathrm{P}(X\le m+20k)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{m+20k-m}{20}\right)=\mathrm{P}(Z\le k)$

$g(k)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge m-20k)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m-20k-m}{5}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -4k)$

ㄱ. $f(0)=\mathrm{P}(Z\le 0)=0.5,\ g(0)=\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.5$이므로

$f(0)=1-g(0)$ (참)

ㄴ. $f(4)=\mathrm{P}(Z\le 4)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 4)$

$g(1)=\mathrm{P}(Z\ge -4)=\mathrm{P}(-4\le Z\le 0)+0.5$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 4)$

$\therefore\ f(4)=g(1)$ (참)

ㄷ. $f(1)=\mathrm{P}(Z\le 1)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$g(1)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 4)$

$\therefore\ f(1)+g(1)=1+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 4)$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 4)>0$이므로

$f(1)+g(1)>1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

27 답 ④

이 제과점에서 생산한 빵 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200, 6^2)$을 따른다. 이때, 빵 4개 묶음의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200, \frac{6^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(200, 3^2)$을 따른다.

이때, 한 묶음의 무게가 764 g 이상 812 g 이하이어야 하므로

$\mathrm{P}\left(\frac{764}{4}\le\overline{X}\le\frac{812}{4}\right)=\mathrm{P}(191\le\overline{X}\le 203)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{191-200}{3}\le Z\le\frac{203-200}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(-3\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(-3\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4987+0.3413=0.84$

따라서 두 사람 모두 한 번에 고른 빵을 구매할 확률은

$0.84\times 0.84=0.7056$

28 답 19

모집단의 표준편차를 σ라 하면 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

조건 (가)에서 $\mathrm{P}(X\le 15)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge 15)$이므로

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{15-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{15-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$\frac{15-m}{\sigma}=-\frac{15-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$에서 $n>1$이므로 $m=15$

즉, 두 확률변수 X, $\overline{X}$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(15, \sigma^2)$, $\mathrm{N}\left(15, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

조건 (나)에서 $\mathrm{P}(X\ge 21)=\mathrm{P}(\overline{X}\le 12)$이므로

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{6}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{-3}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$\frac{6}{\sigma}=\frac{3}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$에서 $\sqrt{n}=2$이므로 $n=4$

$\therefore m+n=15+4=19$

29 답 ⑤

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{5000^2}{n}\right)$을 따르므로 확률변수

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{5000}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르고

$$\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 2000)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{5000}{\sqrt{n}}}\right|\le\frac{2000}{\frac{5000}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{2}{5}\sqrt{n}\right)$$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$이므로

$\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{2}{5}\sqrt{n}\right)\ge\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)$에서

$\frac{2}{5}\sqrt{n}\ge 1.96$, $\sqrt{n}\ge\frac{5}{2}\times 1.96$, $\sqrt{n}\ge 4.9$

$\therefore n\ge 4.9^2=24.01$

따라서 자연수 n의 최솟값은 25이다.

30 답 ③

음료수 1병에 들어 있는 카페인 함유량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다.

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$59.36-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le 59.36+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

이때, 신뢰구간이 $a\le m\le 60.34$이므로

$1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=60.34-59.36=0.98$

$0.49\sigma=0.98$ $\quad\therefore \sigma=2$

$\therefore a=59.36-1.96\times\frac{2}{4}=58.38$

$\therefore a+\sigma=58.38+2=60.38$

31 답 ②

신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간의 길이는 $2\times 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간의 길이는 $2\times 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 신뢰도가 클수록, 표본의 크기가 작을수록 신뢰구간의 길이는 길어지므로 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ②이다.

32 답 ③

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X_A})=m_1$이고 $\mathrm{E}(\overline{X_B})=m_2$이므로 $m_1<m_2$이면 $\mathrm{E}(\overline{X_A})<\mathrm{E}(\overline{X_B})$이다. (참)

ㄴ. $\overline{X_A}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_1, \frac{\sigma^2}{n_1}\right)$을 따른다. 이때, n_1의 크기를 크게 할수록 $\frac{\sigma^2}{n_1}$의 값이 작아지므로 $\overline{X_A}$의 분산은 모집단의 분산 σ^2보다 작아진다. (거짓)

ㄷ. m_1에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a\le m_1\le b$이므로 $b-a$의 값은 m_1에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이이다.
즉, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=0.95$인 상수 k에 대하여
$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$이다.
마찬가지로 $c\le m_2\le d$에서
$$d-c=2k\frac{\frac{\sigma}{3}}{\sqrt{n_2}}=2k\frac{\sigma}{3\sqrt{n_2}}$$
따라서 $b-a=d-c$이면 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=2k\frac{\sigma}{3\sqrt{n_2}}$에서
$$\frac{1}{\sqrt{n_1}}=\frac{1}{3\sqrt{n_2}}$$
$\therefore n_1=9n_2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

33 답 ③

(신뢰구간의 길이)$=2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (k는 상수)이므로

ㄱ. 신뢰도를 낮추면 신뢰구간의 길이는 짧아지고 신뢰도를 높이면 신뢰구간의 길이는 길어진다. (참)

ㄴ. 표본의 크기를 크게 하면 신뢰구간의 길이는 짧아진다. (참)

ㄷ. 신뢰도 α%로 모평균을 추정한다는 것은 추정된 신뢰구간에 모평균이 들어 있을 확률이 α%라는 의미이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

34 답 ③

신뢰도 95 %로 모평균을 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times 2\times\frac{10}{\sqrt{n}}=4$에서

$\sqrt{n}=10$

$\therefore n=100$

35 답 ③

모집단의 분포가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따른다고 하자.

$P(0 \le Z \le k) = 0.45$이고 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 신뢰도 90%의 신뢰구간은

$\overline{X} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이고 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

같은 신뢰도로 구간의 길이를 반으로 줄이는 표본의 크기를 n'이라 하면

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2} \times 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n'} = 2\sqrt{n}$

$\therefore n' = 4n$

36 답 ⑤

$P(-k \le Z \le k) = 0.8$인 k의 값은 1.28이므로

$l = 2 \times 1.28 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 신뢰구간의 길이가 $2l$이면

$2l = 2 \times 2.56 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이므로 $P(-2.56 \le Z \le 2.56) = 2 \times 0.495 = 0.99$

따라서 신뢰구간의 길이가 $2l$인 신뢰구간의 신뢰도는 99 %이다.

37 답 ④

표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $E(\overline{X}) = m$, $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$이므로

$\overline{X}$는 정규분포 $N(m, 2^2)$을 따른다.

$P(-1.65 \le Z \le 1.65) = 0.90$에서 신뢰도 90 %일 때 신뢰구간은

$\overline{X} - 1.65\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 1.65\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때, $\overline{X} = 165$, $\sigma = 10$, $n = 25$이면

$165 - 1.65 \times 2 \le m \le 165 + 1.65 \times 2$

$\therefore 161.7 \le m \le 168.3$

$160 \le m \le 170$에서

$165 - 5 \le m \le 165 + 5$

$165 - 2.5 \times 2 \le m \le 165 + 2.5 \times 2$

$\overline{X} - 2.5\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 2.5\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 $P(-2.5 \le Z \le 2.5) = 2 \times 0.493 = 0.986$이므로

구하는 신뢰도는 98.6 %이다.

38 답 261

자율학습실 이용시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m, 6^2)$을 따른다.

신뢰도 90 %의 신뢰구간 $70 - a \le m \le 70 + a$에서

표본의 크기 $n = 36$이고 $P(0 \le Z \le 1.65) = 0.45$이므로

$a = 1.65 \times \frac{6}{\sqrt{36}} = 1.65$이고 $\overline{x_1} = 70$

신뢰도 95 %의 신뢰구간 $\frac{13}{14}\overline{x_1} - \frac{28}{55}a \le m \le \frac{13}{14}\overline{x_1} - \frac{28}{55}a$에서

$\overline{x_2} = \frac{13}{14}\overline{x_1} = \frac{13}{14} \times 70 = 65$이고

$P(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$이므로 $1.96 \times \frac{6}{\sqrt{n}} = \frac{28}{55} \times 1.65$에서

$n = 196$

$\therefore n + \overline{x_2} = 196 + 65 = 261$

39 답 27

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \frac{4}{k} = 1$

$\frac{10}{k} = 1$

$\therefore k = 10$ ---------- ⓐ

$E(X) = 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{2}{10} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{4}{10}$

$= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{10} = \frac{30}{10} = 3$

$E(X^2) = 1 \times \frac{1}{10} + 2^2 \times \frac{2}{10} + 3^2 \times \frac{3}{10} + 4^2 \times \frac{4}{10}$

$= \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{10} = \frac{100}{10} = 10$

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 10 - 3^2 = 1$이고, $n = 3$이므로

$V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{1}{3}$ ---------- ⓑ

$E(\overline{X}) = E(X) = 3$이고,

$E(\overline{X}^2) = V(\overline{X}) + \{E(\overline{X})\}^2 = \frac{1}{3} + 3^2 = \frac{28}{3}$이므로

$E(3\overline{X}^2 - 1) = 3E(\overline{X}^2) - 1 = 3 \times \frac{28}{3} - 1 = 28 - 1 = 27$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 상수 k의 값을 구한다.	[30%]
ⓑ $V(\overline{X})$의 값을 구한다.	[40%]
ⓒ $E(3\overline{X}^2 - 1)$의 값을 구한다.	[30%]

40 답 36

표본평균을 $\overline{X}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{X} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이고

$9.42 \le m \le 14.58$이므로

$2\overline{X} = 24 \quad \therefore \overline{X} = 12$ ---------- ⓐ

또한, $12 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 14.58$에서

$2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.58 \quad \therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1$ ---------- ⓑ

모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$12 - 1.96 \times 1 \le m \le 12 + 1.96 \times 1$

$10.04 \le m \le 13.96$

따라서 신뢰도 95 %의 신뢰구간에 속하는 자연수 m은 11, 12, 13이므로 모든 자연수 m의 합은 $11 + 12 + 13 = 36$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 표본평균 $\overline{X}$의 값을 구한다. [40%]

ⓑ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값을 구한다. [30%]

ⓒ 신뢰도 95 %의 신뢰구간에 속하는 모든 자연수 m의 값의 합을 구한다. [30%]

41 답 ①

확률의 총합이 1이므로 $a=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ $\qquad \therefore a=\frac{1}{6}$

$\mathrm{E}(X)=(-2)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{3}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{16}=\frac{5}{64}$

42 답 ③

표본평균 $\overline{X}$, $\overline{Y}$에 대하여 각각 확률변수 X, Y라 하면

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(0, \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$을, $Z=\frac{\overline{X}-0}{\frac{4}{3}}$이라 하면 확률변수 Z는

표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르고, $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을,

$Z=\frac{\overline{Y}-3}{\frac{1}{2}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 1)=\mathrm{P}(\overline{Y}\leq a)$에서

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 1)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{1-0}{\frac{4}{3}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{3}{4}\right)$

$\mathrm{P}(\overline{Y}\leq a)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{a-3}{\frac{1}{2}}\right)$

$\qquad =\mathrm{P}(Z\leq 2(a-3))=\mathrm{P}(Z\geq -2(a-3))$

$\frac{3}{4}=-2(a-3)$, $3=-8a+24$, $8a=21$

$\therefore a=\frac{21}{8}$

43 답 ⑤

공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(201.5, 1.8^2)$을 따른다.

이때, 이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개의 화장품 내용량을 표본평균 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(201.5, \frac{1.8^2}{9}\right)$

즉, $\mathrm{N}(201.5, 0.6^2)$을 따르고, $Z=\frac{\overline{X}-201.5}{0.6}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}\geq 200)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-201.5}{0.6}\geq\frac{200-201.5}{0.6}\right)$

$\qquad =\mathrm{P}(Z\geq -2.5)$

$\qquad =\mathrm{P}(-2.5\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(Z\geq 0)$

$\qquad =\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)+\mathrm{P}(Z\geq 0)$

$\qquad =0.4938+0.5$

$\qquad =0.9938$

44 답 ④

이 농가에서 생산하는 석류의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 표준편차가 $\sigma=40$이고 표본의 크기가 $n=64$, 표본평균의 값이 $\overline{x}$일 때,

$\overline{x}-2.58\times\frac{40}{\sqrt{64}}\leq m\leq\overline{x}+2.58\times\frac{40}{\sqrt{64}}$

$\overline{x}-2.58\times 5\leq m\leq\overline{x}+2.58\times 5$

$\overline{x}-12.9\leq m\leq\overline{x}+12.9$

$\therefore c=12.9$

45 답 12

주민 16명을 임의추출한 표본평균 75에 대한 신뢰도 95 % 신뢰구간은

$75-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\leq m\leq 75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

이므로 $b=75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=75+0.49\times\sigma$

주민 16명을 임의추출한 표본평균 77에 대한 신뢰도 99 % 신뢰구간은

$77-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\leq m\leq 77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

이므로 $d=77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=77+0.645\times\sigma$

$d-b=77+0.645\times\sigma-(75+0.49\times\sigma)=2+0.155\sigma=3.86$

에서 $0.155\sigma=1.86$ $\qquad \therefore \sigma=\frac{1.86}{0.155}=12$

46 답 99

A회사에서 생산되는 배터리의 수명을 확률변수 X라 하면 X가 정규분포 $\mathrm{N}(5000, 300^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(5000, \left(\frac{300}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}(4950\leq\overline{X}\leq 5050)=\mathrm{P}\left(\frac{4950-5000}{\frac{300}{\sqrt{n}}}\leq Z\leq\frac{5050-5000}{\frac{300}{\sqrt{n}}}\right)$

$\qquad =2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{6}\right)\geq 0.9$

에서 $\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{6}\right)\geq 0.45$

$\frac{\sqrt{n}}{6}\geq 1.65$이므로 $\sqrt{n}\geq 9.9$ $\qquad \therefore n\geq 98.01$

따라서 자연수 n의 최솟값은 99이다.

47 답 ③

구입한 상자에 들어 있는 제품 4개의 무게를 각각 X_1, X_2, X_3, X_4라 하면 한 상자의 무게 Y는 $Y=X_1+X_2+X_3+X_4$이고

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}=\frac{Y}{4}$는 크기가 4인 표본평균이다.

이 공장에서 생산한 제품 1개의 무게를 확률변수 $X_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$라 하면 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 4^2)$을 따르므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(15,\ \frac{4^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(15,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 구입한 상자의 무게가 52 g 이상 76 g 이하가 될 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(52\le Y\le 76)&=\mathrm{P}(52\le 4\overline{X}\le 76)\\&=\mathrm{P}(13\le \overline{X}\le 19)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{13-15}{2}\le Z\le\frac{19-15}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

48 답 ③

바닥에 닿은 면에 적힌 수의 평균과 표준편차를 구하면

$$m=\frac{0\times2+1\times4+2\times3+3\times2+4\times1}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$$

$$\sigma^2=\frac{0^2\times2+1^2\times4+2^2\times3+3^2\times2+4^2\times1}{12}-\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$=\frac{50}{12}-\frac{25}{9}=\frac{25}{6}-\frac{25}{9}=\frac{25}{18}$$

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=\frac{5}{3}$이고 $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\frac{5}{3\sqrt{2}}}{\sqrt{32}}=\frac{5}{24}$

표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{5}{3},\ \left(\frac{5}{24}\right)^2\right)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-m}{\sigma}\right)=0.0228$

$\mathrm{P}(Z\ge 2.0)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.0)=0.5-0.4772=0.0228$이므로

$\frac{k-m}{\sigma}=\frac{k-\frac{5}{3}}{\frac{5}{24}}=2.0$에서

$k-\frac{5}{3}=2\times\frac{5}{24}\qquad \therefore k=\frac{25}{12}$

49 답 17

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{1}{n}\right)$을 따르므로

$$f(m)=\mathrm{P}\left(\overline{X}\le\frac{1.64}{\sqrt{n}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{1.64}{\sqrt{n}}-m}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$$

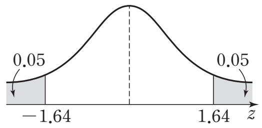
$$=\mathrm{P}(Z\le 1.64-m\sqrt{n})$$

이때, $f(0)=\mathrm{P}(Z\le 1.64)=0.950$

$f(0.8)=\mathrm{P}(Z\le 1.64-0.8\sqrt{n})$

$f(0)+f(0.8)\le 1$에서 $0.950+\mathrm{P}(Z\le 1.64-0.8\sqrt{n})\le 1$

$\therefore \mathrm{P}(Z\le 1.64-0.8\sqrt{n})\le 0.05$ ⋯ ㉠



㉠이 성립하려면 위의 그림에서

$1.64-0.8\sqrt{n}\le -1.64$

$\sqrt{n}\ge\frac{3.28}{0.8}=4.1$

$\therefore n\ge 16.81$

따라서 자연수 n의 최솟값은 17이다.

50 답 20

공책 1상자의 무게를 T라 하면 표본의 크기가 100인 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\overline{X}=\frac{T}{100}$이고, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60,\ \left(\frac{4}{\sqrt{100}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(60,\ 0.4^2)$을 따른다.

따라서 임의의 한 상자가 불량품일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T<5920)&=\mathrm{P}(\overline{X}<59.2)=\mathrm{P}\left(Z<\frac{59.2-60}{0.4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z<-2)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

따라서 하루에 평균 k상자의 불량품이 생긴다고 하면 하루에 10만 권의 공책, 즉 1000상자가 출고되므로

$k=1000\times\mathrm{P}(T<5920)=1000\times0.02=20$

원주율의 역사

원의 둘레를 지름으로 나눈 값, 즉 원주율이 약 3.14…가 된다는 사실은 초등학교 때부터 배워서 잘 알고 있을 것이다. 원주율을 흔히 π라고 표시하는 이유는 그리스어로 둘레를 뜻하는 '$\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho o\varsigma$'의 첫 글자에서 따왔기 때문에 누가 처음 사용했는지 확실하지는 않으나 18세기 스위스의 유명한 수학자인 오일러(Leonhard Euler; 1707~1783)가 자신의 저서에서 쓰기 시작한 후부터 다른 학자들도 이 표현을 따랐다고 한다. 『성경』의 기록을 보면, 구약성경 '열왕기상'과 '역대하'에서 '바다를 부어 만들었으니 지름이 십 규빗(길이의 단위)이요, 그 모양이 둥글고 그 고는 다섯 규빗이며 주위는 삼십 규빗 줄을 두를 만하며…'라고 나와 있는데, 주위를 지름으로 나누면 3이 되므로 기원 전 10세기 무렵인 솔로몬 왕 때에 사용한 원주율 값은 3정도라는 것을 알 수 있다.

이보다 앞선 기원 전 약 1700년 전에 기록되었을 것으로 추측되는 고대 이집트의 책 『린드 파피루스』에는 "원의 넓이를 구하려면, 지름의 $\frac{1}{9}$을 뺀 후 그것을 제곱한다."라고 되어 있는데, 이 방식을 따라서 계산하면 원주율이 3.16049…가 되는 셈이다. 피라미드를 건설했던 고대 이집트 사람들은 실용적인 기하학적 지식이 매우 뛰어났음을 짐작할 수 있다.

소수점 아래 둘째 자리까지의 정확한 원주율을 처음으로 계산해 낸 이는 그리스의 수학자 아르키메데스(Archimedes; BC 287?~212)이다. 여러 일화들을 남긴 이 수학자는 다각형들을 원에 내접, 외접시켜가면서 원주율을 계산한 결과보다는 크고 3보다는 작다는 사실을 알아냈다. 즉, $\pi=3.14\cdots$라는 값을 밝힌 것이며, 이 근삿값은 오늘날까지도 널리 쓰이고 있다.

한편, 고대 동양에서도 당시 서양 못지않게 정확한 원주율 값들을 계산한 바 있다. 1세기경에 쓰여진 것으로 추측되는 고대 중국의 유명한 수학교과서 『구장산술(九章算術)』은 246가지의 예제가 실려 있는 당대 세계 최고 수준의 수학책이라 볼 수 있는데, 초기에 이 책에 나타난 원주율은 약 3정도였다. 또한 6세기 경, 중국 남북조 시대 송(宋)나라의 수학자이자 과학자였던 조충지(祖沖之; 429~500)는 비슷한 방법으로 $\pi=3.1415926\cdots$이라는 놀랄만한 원주율 값을 계산해 자신의 저서 『철술(綴術)』에 기록하였다. 이는 $\frac{355}{113}$라는 근삿값으로 서양에도 전해졌고, 서양에서는 15세기까지도 이처럼 정확한 원주율 값은 나오지 않았다.

[출처 http://www.scieng.net/zero/view.php?id=zine&no=362]