THE FIRST CLASS MATHEMATICS

1 일등급 수학 · **미적분**

[해설편]

Ⅰ 수열의 극한

Ⅱ 미분법

Ⅲ 적분법

Ⅰ 수열의 극한

01 수열의 극한

01 ②	02 ③	03 ②	04 12
05 99	06 ①	07 2	08 ③
09 ②	10 ③	11 ②	12 ③
13 ④	14 ②	15 18	16 ④
17 ③	18 12	19 ⑤	20 ④
21 2	22 ③	23 ②	24 ②
25 ⑤	26 ③	27 ②	28 ③
29 ①	30 ①	31 ③	32 ②
33 ③	34 ③	35 1	36 ③
37 ②	38 ①	39 ⑤	40 ②
41 20	42 150	43 ①	44 ⑤
45 ③	46 1	47 ④	48 ①
49 ④	50 5	51 2	52 8
53 3	54 2	55 ②	56 16
57 33	58 ②	59 ③	60 ②
61 ②	62 ②	63 ②	64 ③
65 ③			

02 급수

01 ①	02 ①	03 ③	04 4
05 ③	06 ③	07 ④	08 ②
09 ①	10 ④	11 ②	12 ③
13 ⑤	14 ⑤	15 ⑤	16 ④
17 ①	18 ⑤	19 32	20 162
21 ①	22 145	23 ②	24 ②
25 ①	26 ⑤	27 ⑤	28 ⑤
29 ①	30 ①	31 ②	32 ②
33 ④	34 ④	35 14	36 23
37 ②	38 ④	39 25	40 ④
41 ③	42 ④	43 ③	44 ②
45 8	46 2	47 5	48 ①
49 ③	50 ②	51 ③	52 ④
53 ②	54 1	55 3	56 97

Ⅱ 미분법

03 여러 가지 함수의 미분

01 ④	02 ②	03 ②	04 ②
05 ④	06 ③	07 ①	08 ⑤
09 ④	10 ②	11 ①	12 ③
13 ①	14 ②	15 2	16 ③
17 ③	18 ④	19 2	20 ③
21 ⑤	22 ②	23 2	24 1
25 ⑤	26 ④	27 ④	28 ②
29 ①	30 ②	31 ⑤	32 ③
33 ④	34 ②	35 ④	36 10
37 2	38 ②	39 ③	40 ①
41 ④	42 ①	43 ④	44 ②
45 ②	46 ②	47 ④	48 ⑤
49 ②	50 4	51 ⑤	52 ②

53 ②	54 ⑤	55 ②	56 ⑤
57 ②	58 ⑤	59 ①	60 ③
61 ①	62 ②	63 4	64 3
65 6	66 2	67 ②	68 ①
69 ②	70 ①	71 ③	72 ⑤
73 ②	74 1	75 ②	76 ④
77 14			

04 여러 가지 미분법

01 5	02 ①	03 ①	04 ④
05 1	06 ②	07 1	08 41
09 ④	10 ②	11 ③	12 ①
13 ⑤	14 ②	15 ⑤	16 18
17 ③	18 ②	19 ②	20 ③
21 ②	22 ①	23 1	24 ③
25 ③	26 ②	27 ②	28 ①
29 ④	30 6	31 3	32 ②
33 ④	34 3	35 ⑤	36 ④
37 ①	38 ①	39 ①	40 ④
41 ③	42 ②	43 ②	44 ③
45 ③	46 ③	47 ①	48 ④
49 ③	50 ⑤	51 ③	52 ②
53 ②	54 1	55 16	56 5
57 ①	58 10	59 ④	60 ①
61 ②	62 ①	63 ②	64 ③
65 ③	66 5	67 ④	68 ⑤

05 도함수의 활용(1)

01 ②	02 ④	03 ②	04 3
05 ⑤	06 ①	07 ③	08 ⑤
09 ④	10 ③	11 ④	12 ②
13 ⑤	14 ④	15 ⑤	16 ②
17 ③	18 ②	19 ⑤	20 ③
21 ②	22 ④	23 ①	24 ②
25 ④	26 ③	27 ①	28 ③
29 ⑤	30 ②	31 ②	32 ④
33 ③	34 6	35 ③	36 ③
37 ④	38 ①	39 ③	40 ②
41 ①	42 ①	43 ④	44 ①
45 11	46 13	47 5	48 4
49 48	50 ③	51 ④	52 216
53 ③	54 ③	55 ③	56 ④
57 ⑤	58 ④		

06 도함수의 활용(2)

01 ③	02 ⑤	03 2	04 ④
05 5	06 ②	07 ④	08 ②
09 ⑤	10 ⑤	11 ⑤	12 ④
13 ④	14 ⑤	15 ③	16 ②
17 ③	18 ②	19 1	20 1
21 8	22 ③	23 ①	24 ②
25 ①	26 ⑤	27 ⑤	28 ④
29 ③	30 ④	31 ⑤	32 ③
33 ⑤	34 27	35 4	36 ③

37 ③	38 ③	39 ④	40 ④
41 ②	42 ③	43 96	44 ⑤
45 1	46 5	47 4	48 ④
49 ①	50 23	51 16	52 96
53 ①	54 72	55 ④	56 4
57 ⑤	58 ⑤	59 ⑤	60 ③
61 ①			

Ⅲ 적분법

07 여러 가지 적분법

01 풀이 참조	02 풀이 참조
03 풀이 참조	04 풀이 참조
05 풀이 참조	06 풀이 참조

07 ④	08 ④	09 ④	10 ①
11 ③	12 ⑤	13 ①	14 ②
15 ②	16 ⑤	17 ②	18 ④
19 ①	20 ②	21 ⑤	22 ⑤
23 ③	24 ①	25 ⑤	26 ②
27 ②	28 ①	29 ④	30 ②
31 ⑤	32 25	33 1	34 50
35 ①	36 ④	37 ⑤	38 ④
39 ③	40 풀이 참조		41 ③
42 ④	43 ①	44 ④	45 ②

08 정적분의 활용

01 ③	02 ④	03 ④	04 ③
05 ①	06 ④	07 12	08 15
09 ①	10 ②	11 ③	12 ②
13 ②	14 ④	15 ④	16 ④
17 ④	18 ②	19 ④	20 ④
21 182	22 ⑤	23 15	24 256
25 ②	26 ①	27 ②	28 ⑤
29 ③	30 4	31 ①	32 ③
33 ①	34 ⑤	35 2	36 ①
37 ②	38 ①	39 ③	40 ④
41 ③	42 ⑤	43 ④	44 ③
45 ④	46 ②	47 ①	48 ③
49 ④	50 16	51 6	52 1
53 2	54 6	55 ③	56 100
57 ⑤	58 ⑤	59 ①	60 64
61 ③	62 ②	63 ②	64 ④
65 ④	66 160		

Ⅰ 수열의 극한

01 수열의 극한

문제편 9P

01 답 ②

분자와 분모를 $\sqrt{n}$으로 각각 나누면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

02 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=8$, $a_6=a+5d=17$

이 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{3+\frac{2}{n}}+\sqrt{3-\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

03 답 ②

$\frac{a_n+5}{2a_n+1}=b_n$이라 하면 $2a_nb_n+b_n=a_n+5$에서

$$a_n=\frac{5-b_n}{2b_n-1}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5}{2a_n+1}=\lim_{n\to\infty}b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5-b_n}{2b_n-1}=\frac{5-3}{2\times3-1}=\frac{2}{5}$$

04 답 12

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+2n}-bn)=\frac{1}{3}$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{an^2+2n}-bn)(\sqrt{an^2+2n}+bn)}{\sqrt{an^2+2n}+bn}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+2n}{\sqrt{an^2+2n}+bn}=\frac{1}{3}$$

이때, 이 식의 극한값이 존재하므로

$a-b^2=0$, $\frac{2}{\sqrt{a}+b}=\frac{1}{3}$

두 식을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=3$

$\therefore\ a+b=12$

05 답 99

주어진 등비수열의 공비가 $-1+\log x$이므로

이 수열이 수렴하려면 $-1<-1+\log x\le1$이어야 한다.

$0<\log x\le2$, $\log 1<\log x\le\log 10^2$

$\therefore\ 1<x\le100$

따라서 자연수 x의 개수는 99이다.

06 답 ①

(ⅰ) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-1}{x^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$\therefore\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

(ⅱ) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-1}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=\frac{x-0}{1+0}=x$$

$\therefore\ f(2)=2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(2)=(-1)+2=1$

07 답 2

$S_n=n\times2^{n+1}$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=n\times2^{n+1}-(n-1)\times2^n$

$=(2n-n+1)\times2^n=(n+1)\times2^n\ (n\ge2)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\times2^{n+1}}{(n+1)\times2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$$

08 답 ③

두 지수함수 $y=3^x$, $y=2^x$의 그래프와 직선 $x=n$의 교점 P_n, Q_n의 좌표는 각각 $(n, 3^n)$, $(n, 2^n)$이므로

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=3^n-2^n$, $\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}=3^{n+1}-2^{n+1}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=3$$

09 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1)}{n(1+2+3+\cdots+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k(k+1)}{n\sum_{k=1}^{n}k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k}{n\sum_{k=1}^{n}k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}{n\times\frac{n(n+1)}{2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{3}=\frac{2}{3}$$

10 답 ③

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{(n+1)+(n+2)+\cdots+2n}{1+2+\cdots+n}$$
$$=\frac{(1+2+\cdots+2n)-(1+2+\cdots+n)}{1+2+\cdots+n}$$
$$=\frac{\frac{2n(2n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}}$$
$$=\frac{2(2n+1)-(n+1)}{n+1}=\frac{3n+1}{n+1}$$

따라서 주어진 수열의 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+1}=3$$

11 답 ②

$S_n=a_1+2^2a_2+3^2a_3+\cdots+n^2a_n=8n^2+2n$이라 하면

$$n^2a_n=S_n-S_{n-1}=(8n^2+2n)-\{8(n-1)^2+2(n-1)\}$$
$$=16n-6\ (n\ge2)$$

$\therefore\ a_n=\frac{16n-6}{n^2}\ (n\ge2)$

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n^2+4n}{a_n-3n^2-4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n^2}+3+\frac{4}{n}}{\frac{a_n}{n^2}-3-\frac{4}{n}}=-1$$

12 답 ③

$$4+8+12+\cdots+4n=\sum_{k=1}^{n}4k=2n^2+2n$$

$$2+6+10+\cdots+(4n-2)=\sum_{k=1}^{n}(4k-2)=2n^2$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{4+8+12+\cdots+4n}-\sqrt{2+6+10+\cdots+(4n-2)})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+2n}-\sqrt{2n^2})=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n-2n^2}{\sqrt{2n^2+2n}+\sqrt{2n^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{2}{n}}+\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

13 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\sqrt{n+1}}}{2^{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$이므로

$$a=\lim_{n\to\infty}2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=2^0=1$$

또, $\log_2(8n+1)-\log_2(n-1)=\log_2\frac{8n+1}{n-1}$이므로

$$b=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{8n+1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{8+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=\log_2 8=3$$

$\therefore\ a+b=1+3=4$

14 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n+a)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+an-(n-a)^2}{\sqrt{n^2+an}+n-a}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3an-a^2}{\sqrt{n^2+an}+n-a}=\frac{3a}{2}=3$$

$\therefore\ a=2$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-an}-n-a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-2n}-n-2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-2n}+n+2}{n^2-2n-(n+2)^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-2n}+n+2}{-6n-4}$$
$$=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

15 답 18

주어진 식의 각 변에 $\frac{2n+4}{n}$를 곱하면

$$\frac{(2n+4)(9n^2+1)}{n(n^2+3)}\le a_n\le\frac{(2n+4)(9n^2+10)}{n(n^2+3)}$$

이때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)(9n^2+1)}{n(n^2+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)(9n^2+10)}{n(n^2+3)}=18$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=18$$

16 답 ④

모든 자연수 n에 대하여 $-1\le\cos\frac{n^2}{2}\pi\le1$이므로

각 변에 $2n$을 더하면

$$2n-1\le2n+\cos\frac{n^2}{2}\pi\le2n+1$$

다시 각 변에 $\frac{n}{n^2+3}$을 곱하면

$$\frac{n(2n-1)}{n^2+3}\le\frac{n\left(2n+\cos\frac{n^2}{2}\pi\right)}{n^2+3}\le\frac{n(2n+1)}{n^2+3}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{n^2+3}=2$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2n+\cos\frac{n^2}{2}\pi\right)}{n^2+3}=2$$

17 답 ③

$\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}}<a_n<\frac{2}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$에서

양 끝변을 유리화하면

$$\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}<a_n<\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$$

이 부등식에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$을 차례로 대입하면

$\sqrt{5}-\sqrt{3}<a_1<\sqrt{3}-\sqrt{1}$
$\sqrt{7}-\sqrt{5}<a_2<\sqrt{5}-\sqrt{3}$
$\sqrt{9}-\sqrt{7}<a_3<\sqrt{7}-\sqrt{5}$
$\vdots$
$\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}<a_n<\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$

각 변끼리 더하면

$\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sqrt{2n+1}-1$

$\therefore \dfrac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{n+1}}<\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sqrt{n+1}}<\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{n+1}}$

이때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{2}$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{2}$

18 답 12

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+3)a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2)a_n}{(2n+1)b_n}\times\frac{(2n+1)(10n+3)}{n^2+2}$$
$$=\frac{3}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(10+\frac{3}{n}\right)}{1+\frac{2}{n^2}}$$
$$=\frac{3}{5}\times 20=12$$

19 답 ⑤

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3n+2}\times\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{3n+2}\times\dfrac{2n+3}{b_n}\right)=50$

이때, $\dfrac{a_n}{3n+2}\times\dfrac{2n+3}{b_n}=c_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}c_n=50$이고

$\dfrac{a_n}{b_n}=c_n\times\dfrac{3n+2}{2n+3}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(c_n\times\frac{3n+2}{2n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}c_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+3}$$
$$=50\times\frac{3}{2}=75$$

20 답 ④

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=3$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{b_n}{a_n}\right)=0$에서 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8a_n^2}{b_n}-\frac{b_n^2}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{8a_n^3-b_n^3}{a_nb_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2a_n-b_n)(4a_n^2+2a_nb_n+b_n^2)}{a_nb_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)\times\lim_{n\to\infty}\frac{4+2\times\frac{b_n}{a_n}+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2}{\frac{b_n}{a_n}}$$
$$=3\times\frac{4+4+4}{2}=18$$

21 답 2

$f(r)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^{n+1}}{1+r^n}$ $(r\neq-1)$에서

(ⅰ) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$이므로

$$f(r)=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{\frac{1}{r^n}+1}=r$$

(ⅱ) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(ⅲ) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$f(r)=\frac{0}{1+0}=0$$

(ⅳ) $r<-1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동하지만

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$이므로

$$f(r)=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{\frac{1}{r^n}+1}=r$$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $f(r)=\begin{cases}r & (|r|>1)\\ \frac{1}{2} & (r=1)\\ 0 & (|r|<1)\end{cases}$ 이므로

$f(a)=2$에서 $a=2$, $f(b)=\dfrac{1}{2}$에서 $b=1$

$\therefore ab=2\times1=2$

22 답 ③

주어진 등비수열이 수렴하려면 첫째항이 0이거나 $-1<(\text{공비})\le1$이어야 한다. 이때, 등비수열 $\{(x-1)(x-2)^{n-1}\}$의 첫째항은 $x-1$이고 공비는 $x-2$이므로

(ⅰ) 첫째항이 0일 때, $x-1=0$에서 $x=1$

(ⅱ) $-1<x-2\le1$에서 $1<x\le3$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 정수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

23 답 ②

x^n을 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^n=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

위 식에 양변에 $x=1$을 대입하면 $a+b=1$ ⋯ ㉠

또, 양변에 $x=2$를 대입하면 $2a+b=2^n$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2^n-1$, $b=2-2^n$

따라서 $R(x)=(2^n-1)x+2-2^n$이므로

$R(0)=2-2^n$, $R(2)=(2^n-1)\times2+2-2^n=2^{n+1}-2^n=2^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{R(2)}{R(0)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2^{n-1}}-1}=-1$$

24 답 ②

원점 O에서 직선 $x+y=\frac{1}{n}$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면

(삼각형 OQ_nP_n의 높이)$=\overline{OH_n}=\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2n}$

(삼각형 OQ_nP_n의 밑변의 길이)$=\overline{P_nQ_n}=2\times\overline{P_nH_n}$

$$=2\sqrt{1-\overline{OH_n}^2}$$

$$=2\sqrt{1-\frac{2}{4n^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{4n^2-2}}{n}$$

따라서 삼각형 OQ_nP_n의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times\overline{P_nQ_n}\times\overline{OH_n}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{4n^2-2}}{n}\times\frac{\sqrt{2}}{2n}=\frac{\sqrt{2n^2-1}}{2n^2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\times A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2-1}}{2n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

25 답 ⑤

두 점 A_n, B_n의 좌표를 각각 $(\alpha, 2\alpha+n)$, $(\beta, 2\beta+n)$이라 하면 α와 β는 방정식 $x^2=2x+n$, 즉 $x^2-2x-n=0$의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-n$

$$\therefore a_n{}^2=(\beta-\alpha)^2+(2\beta-2\alpha)^2=5(\beta-\alpha)^2$$

$$=5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=5\{2^2-4\times(-n)\}=20n+20$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n{}^2}{5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{20n+20}{5n+1}=4$$

26 답 ③

점 A_n의 x좌표는 0이고, 두 원의 공통 할선의 방정식은

$$\begin{array}{rl} & (x-3)^2+y^2=9 \\ -) & x^2+(y-n)^2=n^2 \\ \hline & -6x+9+2ny-n^2=9-n^2 \end{array}$$

즉, $y=\frac{3}{n}x$이므로 이를 원 O의 방정식에 대입하면

$(x-3)^2+\frac{9}{n^2}x^2=9$에서 $x\{(n^2+9)x-6n^2\}=0$

따라서 점 B_n의 x좌표는 $\frac{6n^2}{n^2+9}$이므로

$$p_n=\frac{1\times\frac{6n^2}{n^2+9}+2\times0}{1+2}=\frac{2n^2}{n^2+9}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+9}=2$$

[다른 풀이]

극한의 상황을 생각해 보면 점 B_n의 x좌표는 6이므로

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1\times6+2\times0}{1+2}=2$$

27 답 ②

(주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

28 답 ③

$f(x)=(x+1)^{2n}+(x+3)^n$이라 하면

나머지 정리에 의하여

$a_n=f(1)=2^{2n}+4^n=2^{2n+1}$

$b_n=f(-1)=2^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 a_n+\log_2 b_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)+n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)=3$$

29 답 ①

n이 충분히 크면

$\sqrt{(n+15)^2}<\sqrt{n^2+32n+1}<\sqrt{(n+16)^2}$에서

$\sqrt{n^2+32n+1}$의 정수부분은 $n+15$이다.

따라서 소수 부분은 $a_n=\sqrt{n^2+32n+1}-(n+15)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+32n+1}-(n+15)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+32n+1-(n+15)^2}{\sqrt{n^2+32n+1}+(n+15)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-224}{\sqrt{n^2+32n+1}+n+15}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{224}{n}}{\sqrt{1+\frac{32}{n}+\frac{1}{n^2}}+1+\frac{15}{n}}$$

$$=\frac{2-0}{\sqrt{1+0+0}+1+0}=1$$

30 답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\alpha^2}-\sqrt{n+\beta^2}}{\sqrt{4n+\alpha}-\sqrt{4n+\beta}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+\alpha^2}-\sqrt{n+\beta^2}}{\sqrt{4n+\alpha}-\sqrt{4n+\beta}}\times\frac{\sqrt{n+\alpha^2}+\sqrt{n+\beta^2}}{\sqrt{4n+\alpha}+\sqrt{4n+\beta}}\times\frac{\sqrt{4n+\alpha}+\sqrt{4n+\beta}}{\sqrt{n+\alpha^2}+\sqrt{n+\beta^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\sqrt{4n+\alpha}+\sqrt{4n+\beta})}{(\alpha-\beta)(\sqrt{n+\alpha^2}+\sqrt{n+\beta^2})}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)\times(2+2)}{1+1}=2(\alpha+\beta)=2$$

$\therefore \alpha+\beta=1$

31 답 ③

$a+b+c=0$에서 $a=-b-c$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+2})$

$=\lim_{n\to\infty}\{(-b-c)\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+2}\}$

$=\lim_{n\to\infty}\{b(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+c(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{b(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{c(n+2-n)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{2c}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right)$

$=0$

32 답 ②

모든 자연수 n에 대하여 $-n\le(-1)^n n\le n$이고

각 변에 $2n^2$을 더한 후 n^2+3으로 나누면

$\frac{2n^2-n}{n^2+3}\le\frac{2n^2+(-1)^n n}{n^2+3}\le\frac{2n^2+n}{n^2+3}$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+3}=2$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+(-1)^n n}{n^2+3}=2$

[다른 풀이]

n이 홀수이면 $(-1)^n n=-n$이고, n이 짝수이면

$(-1)^n n=n$이므로 자연수 k에 대하여 $n=2k-1$, $n=2k$일 때로

나누어 극한값을 구하자.

(i) $n=2k-1$일 때, $n\to\infty$이면 $k\to\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+(-1)^n n}{n^2+3}$

$=\lim_{k\to\infty}\frac{2\times(2k-1)^2+(-1)^{2k-1}\times(2k-1)}{(2k-1)^2+3}$

$=\lim_{k\to\infty}\frac{8k^2-6k+3}{4k^2-4k+4}=2$

(ii) $n=2k$일 때, $n\to\infty$이면 $k\to\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+(-1)^n n}{n^2+3}=\lim_{k\to\infty}\frac{2\times(2k)^2+(-1)^{2k}\times 2k}{(2k)^2+3}$

$=\lim_{k\to\infty}\frac{8k^2+2k}{4k^2+3}=2$

(i), (ii)에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+(-1)^n n}{n^2+3}=2$

33 답 ③

$n-1<na_n<n+1$의 각 변을 n으로 나누면

$\frac{n-1}{n}<a_n<\frac{n+1}{n}$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

일등급 UP

* 부등식이 포함된 극한값의 계산에서 주의점

모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$일 때,

$\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$이 아니라 $\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n$이다.

즉, $a_n\ne b_n$이더라도 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$인 경우가 있다는 것이다.

예를 들어 $a_n=1-\frac{1}{n}$, $b_n=1+\frac{1}{n}$인 경우

$a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$이다.

34 답 ③

$n^2<a_n<n^2+n$에서 $\sum_{k=1}^{n}k^2<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\frac{3}{n(n+1)(n+2)}<\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}a_k}<\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$

$\frac{3n^2}{(n+1)(n+2)}<\frac{n^3}{\sum_{k=1}^{n}a_k}<\frac{6n^2}{(n+1)(2n+1)}$

이때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{(n+1)(2n+1)}=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\sum_{k=1}^{n}a_k}=3$

35 답 1

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2-1)a_n}{4n+1}=\lim_{n\to\infty}\left\{(3n+4)a_n\times\frac{2n^2-1}{(3n+4)(4n+1)}\right\}$

$=6\times\frac{2}{12}=1$

36 답 ③

$\frac{3a_n-4}{a_n-1}=b_n$이라 하면 $a_n=\frac{b_n-4}{b_n-3}$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-4}{b_n-3}=\frac{2-4}{2-3}=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+1}{a_n+1}=\frac{4\times2+1}{2+1}=3$

37 답 ②

$f(n)=2+4+6+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n}2k=n(n+1)$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-an^2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-an^2}{2n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a)n^2+n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a)n+1}{2+\frac{1}{n}}$

이때, 전체의 극한이 b로 수렴하고 분모의 극한이 2로 수렴하므로

분자의 극한도 수렴해야 한다.

따라서 $a=1$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{ab}=2$

38 답 ①

ㄱ. 다음과 같이 나열해 보면

$\{a_{2n-1}\}$ $\alpha \ \alpha \ \alpha \ \alpha \ \alpha \ \alpha \cdots$

$\{a_{2n}\}$ $\alpha \ \alpha \ \alpha \ \alpha \ \alpha \ \cdots$

$\{a_n\}$ $\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 극한이 α로 수렴함을 알 수 있다. (참)

ㄴ. 【반례】 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 주기적으로 6개의 항이 반복되는 경우

$\underline{\beta,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha},\ \underline{\beta,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha},\ \beta \cdots$

$\alpha \neq \beta$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n}=\alpha$이지만 수렴하지 않는다.

(거짓)

ㄷ. 【반례】 $a_n=\dfrac{4}{n}-2$, $b_n=2-\dfrac{4}{n}$이면

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n<\lim\limits_{n\to\infty} b_n$이지만, $a_1>b_1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

39 답 ⑤

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=2$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_{n+1})=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+3}-a_{n+2})=2$,

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+4}-a_{n+3})=2$

위 식을 변변 더하면

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)+\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_{n+1})+\lim_{n\to\infty}(a_{n+3}-a_{n+2})+\lim_{n\to\infty}(a_{n+4}-a_{n+3})=8$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_{n+4}-a_n)=8$$

40 답 ②

$a_nb_n=c_n$이라 하면 $b_n=\dfrac{c_n}{a_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{a_n}=0$

$$\begin{aligned} a_nb_n^2-a_nb_n-b_n+1&=a_nb_n(b_n-1)-(b_n-1)\\ &=(a_nb_n-1)(b_n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n\to\infty}(a_nb_n^2-a_nb_n-b_n+1)&=\lim_{n\to\infty}(a_nb_n-1)(b_n-1)\\ &=(2-1)(0-1)=-1 \end{aligned}$$

41 답 20

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\left\{\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)^{10}-\frac{1}{n^{10}}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\{(n^4+1)^{10}-n^{10}\}}{n^{k+20}}$$

이때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\{(n^4+1)^{10}-n^{10}\}}{n^{k+20}}$이 수렴하기 위해서는

$k+20\geq 40$이어야 하므로 k의 최솟값은 20이다.

42 답 150

$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n^2+3a_nb_n-2b_n^2)=7$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2b_n)(2a_n-b_n)=7$

이때, $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n^2+3a_nb_n-2b_n^2}{2a_n-b_n}=\frac{7}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2a_n-b_n)+(a_n+2b_n)}{5}=\frac{2\times2+\frac{7}{2}}{5}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore 100\lim_{n\to\infty} a_n=100\times\frac{3}{2}=150$$

43 답 ①

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-2^n}{x^n+2^n}$에서

(ⅰ) $-2<x<2$일 때, $-1<\dfrac{x}{2}<1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^n+1}=-1$$

(ⅱ) $|x|>2$일 때, $\left|\dfrac{x}{2}\right|>1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^n}=1$$

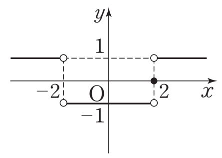
(ⅲ) $x=2$일 때, $f(2)=0$

(ⅳ) $x=-2$일 때, $f(-2)$는 정의되지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (|x|<2)\\ 0 & (x=2)\\ 1 & (|x|>2)\end{cases}$$

이것을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $\lim\limits_{x\to a-} f(x)>\lim\limits_{x\to a+} f(x)$를 만족시키는 실수 a의 값은 -2이다.

44 답 ⑤

$\lim\limits_{n\to\infty}\{(x-2)(x^2-4x+3)^{n-1}\}$이 수렴하기 위해서는

(ⅰ) $x-2=0$ $\quad\therefore x=2$

(ⅱ) $-1<x^2-4x+3\leq 1$

ⅰ) $x^2-4x+3>-1$에서 $x^2-4x+4>0$

$(x-2)^2>0$

$\therefore x\neq 2$인 모든 실수

ⅱ) $x^2-4x+3\leq 1$에서 $x^2-4x+2\leq 0$

$\therefore 2-\sqrt{2}\leq x\leq 2+\sqrt{2}$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $2-\sqrt{2}\leq x<2$, $2<x\leq 2+\sqrt{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 정수 x의 값은 1, 2, 3이므로

모든 x의 값의 합은 6이다.

45 답 ③

등비수열 $\{[r]^n\}$이 수렴하므로 $-1<[r]\le 1$에서

$[r]=0$ 또는 $[r]=1$ $\quad\therefore 0\le r<2$

ㄱ. $0\le r<2$에서 $0\le \dfrac{r}{2}<1$이므로 수열 $\left\{\left(\dfrac{r}{2}\right)^n\right\}$은 수렴한다. (참)

ㄴ. $0<r<2$에서 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{r}$이므로 수열 $\left\{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n\right\}$은 수렴하지 않을 수 있다. (거짓)

ㄷ. $0\le r<2$에서 $-1\le r-1<1$

$\therefore 0\le (r-1)^2\le 1$

따라서 수열 $\{(r^2-2r+1)^n\}=\{(r-1)^{2n}\}$은 수렴한다. (참)

따라서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄷ이다.

46 답 1

$a_n>0$이고 $a_{n+1}\le \dfrac{98}{99}a_n$이므로 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하면

$a_2\le \dfrac{98}{99}a_1$, $a_3\le \dfrac{98}{99}a_2$, $a_4\le \dfrac{98}{99}a_3$, $\cdots$, $a_n\le \dfrac{98}{99}a_{n-1}$

변변 곱하면

$a_2\times a_3\times a_4\times\cdots\times a_n\le \left(\dfrac{98}{99}\right)^{n-1}a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{n-1}$

따라서 $0<a_n\le\left(\dfrac{98}{99}\right)^{n-1}a_1$이고,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{98}{99}\right)^{n-1}a_1=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+2n-1}{-3a_n+2n+1}=1$

47 답 ④

(i) $|r|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n+1}}{r^{2n}+10}=\dfrac{0}{0+10}=0$

(ii) $|r|>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n+1}}{r^{2n}+10}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r}{1+\dfrac{10}{r^{2n}}}=r$

(iii) $r=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n+1}}{r^{2n}+10}=\dfrac{1}{1+10}=\dfrac{1}{11}$

(iv) $r=-1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n+1}}{r^{2n}+10}=\dfrac{-1}{1+10}=-\dfrac{1}{11}$

따라서 α의 값이 될 수 없는 것은 ④ $\dfrac{1}{10}$이다.

48 답 ①

(i) $|a|>|b|$일 때, 분자와 분모를 a^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-b\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}=a=3a\text{에서 }a=0$$

이때, $ab\ne 0$이므로 모순이다.

(ii) $|a|<|b|$일 때, 분자와 분모를 b^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\dfrac{a}{b}\right)^n-b}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+1}=-b=3a\text{에서}$$

$b=-3a$

따라서 $b=-3a$이므로

$\dfrac{a-3b}{2a+b}=\dfrac{a-3\times(-3a)}{2a+(-3a)}=\dfrac{10a}{-a}=-10$

49 답 ④

원 C_n의 중심이 점 $P_n(n, n^2)$이고 y축에 접하므로 원 C_n의 반지름의 길이는 n이다.

따라서 원 C_n의 넓이 S_n은 $S_n=n^2\pi$

또한, 원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은

$y=a_nx$에서 $a_nx-y=0$이다.

이때, 원 C_n과 직선 $a_nx-y=0$이 접하므로 원의 중심 $P_n(n, n^2)$에서 직선 $a_nx-y=0$에 이르는 거리가 n이다.

즉, $\dfrac{|na_n-n^2|}{\sqrt{a_n^2+1}}=n$에서 $\dfrac{|a_n-n|}{\sqrt{a_n^2+1}}=1$

양변을 제곱하여 정리하면

$a_n^2-2na_n+n^2=a_n^2+1$ $\qquad\therefore na_n=\dfrac{n^2-1}{2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{na_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\pi}{\dfrac{n^2-1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2\pi}{n^2-1}=2\pi$

50 답 5

각 행의 수의 자리의 수는 0 또는 1이므로 각 자리의 수의 합 a_n은 각 행에서 1의 개수를 구하면 된다. 이때, 맨 앞자리의 수는 항상 1이고 나머지 자리의 수에는 0 또는 1이 올 수 있으므로 제 n행의 수의 총 개수는 2^{n-1}이다. 따라서 제 n행의 수 중 맨 앞자리의 수가 1인 수의 총 개수는 2^{n-1}이다.

또한, 나머지 $n-1$개의 자리에서 자리의 수가 1인 수의 개수는 각각 2^{n-2}이므로

$a_n=2^{n-1}+(n-1)\times 2^{n-2}=(n+1)\times 2^{n-2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n\times 2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\times 2^{n-2}}{n\times 2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{4n}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $p=4$, $q=1$이므로 $p+q=5$

51 답 2

(i) $nf(a)\ge 1$, 즉 $f(a)\ge\dfrac{1}{n}$일 때, $nf(a)-1\ge 0$이므로

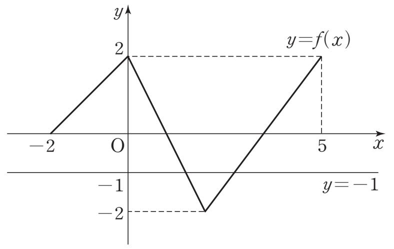
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1}{2n+3}=0\ne 1$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 상수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $nf(a)<1$, 즉 $f(a)<\frac{1}{n}$일 때, $nf(a)-1<0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2nf(a)}{2n+3}=-f(a)=1$$

$\therefore f(a)=-1$



이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$은 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만나므로 $f(a)=-1$을 만족시키는 상수 a는 2개이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 a의 값은 2개이다.

52 답 8

$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k=n^3$에서

$-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}=(2n)^3$ … ㉠

$-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{2n-2}-a_{2n-1}=(2n-1)^3$ … ㉡

$-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{2n-2}=(2n-2)^3$ … ㉢ ---------- ⓐ

㉠−㉡을 하면 $a_{2n}=(2n)^3-(2n-1)^3=12n^2-6n+1$

㉢−㉡을 하면 $a_{2n-1}=(2n-2)^3-(2n-1)^3=-12n^2+18n-7$

$\therefore a_{2n}-a_{2n-1}=(12n^2-6n+1)-(-12n^2+18n-7)$

$=24n^2-24n+8$ ---------- ⓑ

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-a_{2n-1}}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{24n^2-24n+8}{3n^2}=8$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ a_{2n}, a_{2n-1}을 구하기 위한 조건식을 찾는다.	[40%]
ⓑ $a_{2n}-a_{2n-1}$을 n에 대한 식으로 나타낸다.	[40%]
ⓒ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-a_{2n-1}}{3n^2}$의 값을 구한다.	[20%]

53 답 3

(i) $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+r+2}{r^n+1}=r+2$

즉, $r+2=\frac{5}{2}$에서 $r=\frac{1}{2}$ ---------- ⓐ

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+r+2}{r^n+1}=\frac{1+1+2}{1+1}=2\neq\frac{5}{2}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 r의 값이 존재하지 않는다.

---------- ⓑ

(iii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+r+2}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r+\frac{1}{r^{n-1}}+\frac{2}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=r$$

$\therefore r=\frac{5}{2}$ ---------- ⓒ

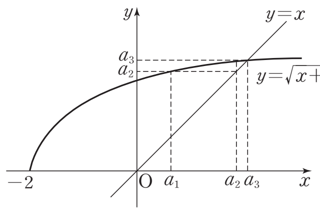
(i)~(iii)에 의하여 모든 r의 값은 $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$이므로 구하는 합은

$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$ ---------- ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ $0<r<1$일 때, 조건을 만족시키는 r의 값을 구한다.	[30%]
ⓑ $r=1$일 때, 조건을 만족시키는 r의 값이 존재하지 않음을 보인다.	[30%]
ⓒ $r>1$일 때, 조건을 만족시키는 r의 값을 구한다.	[30%]
ⓓ 모든 r의 값의 합을 구한다.	[10%]

54 답 2



그림과 같이 수열 $\{a_n\}$은 n의 값이 커짐에 따라 곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표값에 수렴한다. ---------- ⓐ

즉, $x=\sqrt{x+2}$에서 $x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=2(\because x>0)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=2$ ---------- ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 그래프를 이용하여 수열 $\{a_n\}$이 수렴하는 값을 추측한다.	[50%]
ⓑ 곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구해 수열 $\{a_n\}$의 극한값을 구한다.	[50%]

[다른 풀이]

$|a_{n+1}-2|=|\sqrt{a_n+2}-2|=\frac{|a_n-2|}{\sqrt{a_n+2}+2}$ … ㉠

그런데 $0<\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}<\frac{1}{2}$이므로 ㉠의 식은

$|a_{n+1}-2|<\frac{1}{2}|a_n-2|<\frac{1}{2^2}|a_{n-1}-2|<\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^n|a_1-2|$에서

$\lim_{n\to\infty}|a_n-2|\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-2|=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=2$

55 답 ②

$f(x)=n$에서 $(x-3)^2=n$

$\therefore x^2-6x+9-n=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=9-n$

이때, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=6^2-4(9-n)=4n$이므로

$h(n)=|\alpha-\beta|=\sqrt{4n}=2\sqrt{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=1$

56 답 16

두 점 P_n, P_{n+1}의 좌표는 각각 $(4^n, 2^n)$, $(4^{n+1}, 2^{n+1})$이므로

$$L_n=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}=\sqrt{(3\times4^n)^2+(2^n)^2}$$
$$=\sqrt{9\times16^n+4^n}$$

이고 $L_{n+1}=\sqrt{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\times16^n+4^n}}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}{9\times16^n+4^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times16+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$
$$=\frac{9\times16+4\times0}{9+0}=16$$

57 답 33

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}\text{에서}$$

(ⅰ) $\frac{6}{k}>1$, 즉 $1\le k<6$일 때,

분모와 분자를 $\left(\frac{6}{k}\right)^n$으로 각각 나누면

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{k}}{1+\left(\frac{k}{6}\right)^n}=\frac{6}{k}\ \left(\because 0<\frac{k}{6}<1\right)$$

(ⅱ) $\frac{6}{k}=1$, 즉 $k=6$일 때, $a_k=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(ⅲ) $0<\frac{6}{k}<1$, 즉 $k>6$일 때, $a_k=\frac{0}{0+1}=0$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}ka_k=\sum_{k=1}^{5}k\times\frac{6}{k}+\sum_{k=6}^{6}k\times\frac{1}{2}+\sum_{k=7}^{10}k\times0$$
$$=6\times5+6\times\frac{1}{2}=33$$

58 답 ②

(ⅰ) $a^2=b^2$, 즉 $a=b$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n+b^n}{a^{2n}+b^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{c}{a^2}\right)^n+\left(\frac{1}{b}\right)^n}{1+1}=1$$

에서 $b=1$, $c=a^2=1$

$\therefore (a, b, c)=(1, 1, 1)$

(ⅱ) $a^2>b^2$, 즉 $a>b$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n+b^n}{a^{2n}+b^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{c}{a^2}\right)^n+\left(\frac{b}{a^2}\right)^n}{1+\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^n}=1$$

에서 $c=a^2$

$\therefore (a, b, c)=(2, 1, 4), (3, 1, 9), (3, 2, 9)$

(ⅲ) $a^2<b^2$, 즉 $a<b$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n+b^n}{a^{2n}+b^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{c}{b^2}\right)^n+\left(\frac{1}{b}\right)^n}{\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n+1}=1$$

에서 $c=b^2$

$\therefore (a, b, c)=(1, 2, 4), (1, 3, 9), (2, 3, 9)$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 7이다.

59 답 ③

조건 (가)에서 $4^n<a_n<4^n+1$의 각 변을 4^n으로 나누면

$$1<\frac{a_n}{4^n}<1+\frac{1}{4^n}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)=1$이므로 수열의 극한의 대소 관계의

의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=1$ … ㉠

한편, $2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$이므로

조건 (나)에서 $2^{n+1}-2<b_n<2^{n+1}$의 각 변을 2^n으로 나누면

$$2-\frac{2}{2^n}<\frac{b_n}{2^n}<2$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}2=2$이므로 수열의 극한의 대소 관계에

의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^n}=2$ … ㉡

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+b_n}{2a_n+2^nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4a_n+b_n}{4^n}}{\frac{2a_n+2^nb_n}{4^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\frac{a_n}{4^n}+\frac{b_n}{2^n}\times\frac{1}{2^n}}{2\times\frac{a_n}{4^n}+\frac{b_n}{2^n}}$$
$$=\frac{4\times1+2\times0}{2\times1+2}\ (\because ㉠, ㉡)=1$$

60 답 ②

점 A_n의 좌표를 (x_n, y_n)이라 하면

조건 (나)에 의하여 점 B_n의 좌표는 (y_n+1, x_n)이고

조건 (다)에 의하여 점 A_{n+1}의 좌표는 (x_n+1, y_n+2)이다.

$\therefore x_{n+1}=x_n+1$, $y_{n+1}=y_n+2$

이때, 조건 (가)에 의하여 $x_1=1$, $y_1=2$이므로

$x_n=1+(n-1)\times1=n$, $y_n=2+(n-1)\times2=2n$

따라서 두 점 A_n, B_n의 좌표는 각각 $(n, 2n)$, $(2n+1, n)$이므로

$$\overline{A_nB_n}=\sqrt{(2n+1-n)^2+(n-2n)^2}=\sqrt{2n^2+2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{A_nB_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{2}$$

61 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n^2+n}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}=\log\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(2n^2+n)}{\log(3n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n^2+\log\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\log n^2+\log\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{\log\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\log n}}{2+\dfrac{\log\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{\log n}}=1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{\log\frac{2n^2+n}{3n^2+1}\times\frac{\log(2n^2+n)}{\log(3n^2+1)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n^2+n}{3n^2+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\log(2n^2+n)}{\log(3n^2+1)}$$

$$=\log\frac{2}{3}\times1=\log\frac{2}{3}$$

62 답 ②

(i) $\left[\frac{n}{3}\right]\le\frac{n}{3}<\left[\frac{n}{3}\right]+1$이므로 $\frac{n}{3}-1<\left[\frac{n}{3}\right]\le\frac{n}{3}$에서

$\frac{n-3}{3}<\left[\frac{n}{3}\right]\le\frac{n}{3}$, $\frac{2}{n}\times\frac{n-3}{3}<\frac{2}{n}\left[\frac{n}{3}\right]\le\frac{2}{n}\times\frac{n}{3}$

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\times\frac{n-3}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\times\frac{n}{3}\right)=\frac{2}{3}$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$A=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\frac{n}{3}\right]=\frac{2}{3}$

(ii) 수열 $\left\{\frac{n}{2}\left[\frac{3}{n}\right]\right\}$을 첫째항부터 차례로 나열하면

$\frac{3}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 0, 0, $\cdots$

$\therefore B=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left[\frac{3}{n}\right]=0$

$\therefore A+B=\frac{2}{3}+0=\frac{2}{3}$

63 답 ②

주어진 조건에서 피타고라스 정리에 의하여 $a_n=\sqrt{n^2+1}$

이때, $n<\sqrt{n^2+1}<n+1$이므로 $n<a_n<n+1$

이 부등식의 각 변에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하면

$1<a_1<2$

$2<a_2<3$

$3<a_3<4$

$\vdots$

$n<a_n<n+1$

변끼리 더하면

$1+2+3+\cdots+n<\sum_{k=1}^{n}a_k<2+3+4+\cdots+(n+1)$에서

$\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n(n+3)}{2}$

각 변을 n^2으로 나누면

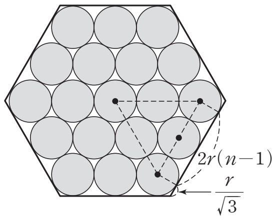
$\frac{n(n+1)}{2n^2}<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^2}<\frac{n(n+3)}{2n^2}$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+3)}{2n^2}=\frac{1}{2}$이므로 수열의 극한의

대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$

64 답 ③



그림과 같이 정육각형의 한 변에 n개의 원이 접할 때, 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$2r(n-1)+\frac{2r}{\sqrt{3}}=20$

$\therefore r=\frac{10}{n-1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}n-\sqrt{3}+1}$

따라서 한 개의 원의 넓이는 $\frac{300\pi}{(\sqrt{3}n-\sqrt{3}+1)^2}$

또한, 원의 개수는

$1+6+6\times2+\cdots+6\times(n-1)=1+6\times\frac{n(n-1)}{2}$

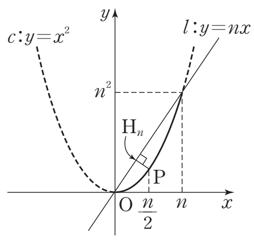
$=3n^2-3n+1$

이므로 정육각형의 내부에 그려진 모든 원들의 넓이의 총합 T_n은

$T_n=\frac{300\pi(3n^2-3n+1)}{(\sqrt{3}n-\sqrt{3}+1)^2}$

$\therefore \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{300\pi(3n^2-3n+1)}{(\sqrt{3}n-\sqrt{3}+1)^2}=300$

65 답 ③



$\overline{\mathrm{PH}_n}\perp l$이므로 직선 PH_n의 방정식은

$y-\frac{n^2}{4}=-\frac{1}{n}\left(x-\frac{n}{2}\right)$

$\therefore y=-\frac{1}{n}x+\frac{n^2}{4}+\frac{1}{2}$

이 직선과 직선 l이 만나는

점의 x좌표는

$nx=-\frac{x}{n}+\frac{n^2}{4}+\frac{1}{2}$에서

$\left(n+\frac{1}{n}\right)x=\frac{n^2}{4}+\frac{1}{2}$, $\frac{n^2+1}{n}x=\frac{n^2+2}{4}$

$\therefore x=\frac{n(n^2+2)}{4(n^2+1)}$

이때, 수선의 발 H_n의 x좌표가 h이므로 $h=\frac{n(n^2+2)}{4(n^2+1)}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{4(n^2+1)}=\frac{1}{4}$

01 답 ①

주어진 급수의 부분합 S_n은

$$S_n=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

따라서 주어진 급수의 합은 2이다.

02 답 ①

주어진 급수

$$(a_1-2)+\left(\frac{a_2}{2}-2\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{n}-2\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)$$

가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)=0$

이때, $\frac{a_n}{n}-2=b_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고

$a_n=n(b_n+2)$이다.

이것을 주어진 극한식에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-2a_n}{3n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n-2\times n(b_n+2)}{3n-n(b_n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2b_n}{1-b_n}$$

$$=\frac{1-2\times 0}{1-0}=1$$

03 답 ③

ㄱ. 대우인 '급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.'가 참이므로 주어진 명제도 참이다. (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\beta$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\beta-\alpha$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 수렴한다. (참)

ㄷ. 【반례】 $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, ⋯

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$이므로 0에 수렴한다.

이때, $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 답 4

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=7$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=7$

$\therefore \alpha-2\beta=7$ ⋯ ㉠

또, $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)=6$에서 $3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=6$

$\therefore 3\alpha-\beta=6$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=1$, $\beta=-3$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha-\beta=1-(-3)=4$$

05 답 ③

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

이 등비급수가 수렴하므로 $-1<r<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=6$ ⋯ ㉠

또, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$의 첫째항은 a^2, 공비는 r^2이고

이 등비급수가 수렴하므로 $0<r^2<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}\times\frac{a}{1+r}=12$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $6\times\frac{a}{1+r}=12$에서 $\frac{a}{1+r}=2$ ⋯ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $r=\frac{1}{2}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^3=a^3+a^3r^3+a^3r^6+\cdots=\frac{a^3}{1-r^3}=\frac{3^3}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{216}{7}$$

06 답 ③

$S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$이므로 $\sqrt{S_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{S_n}$

즉, 정사각형 S_n의 한 변 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$과 정사각형 S_{n+1}의 한 변 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$에 대하여 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}$이 성립한다.

이때, $S_1=1$에서 $\overline{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}$$

07 답 ④

$$\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}+\frac{1}{n+2}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

08 답 ②

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{(2a-1)n}{n+a}$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라 하면

$S_n=\frac{(2a-1)n}{n+a}$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2a-1)n}{n+a}=2a-1=3$

$\therefore a=2$

09 답 ①

주어진 급수의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k^2(k+2)^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}$

$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left\{\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}+\left\{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right\}\right]$

$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right\}$

따라서 주어진 급수의 합은

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{16}$

10 답 ④

$(a_1-1)+\left(\frac{a_2}{2}-2\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{n}-n\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-n\right)$

이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-n\right)=0$ ⋯ ㉠

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+4n-3n^2}{4a_n+3n-4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(a_n-n^2)+4n}{4(a_n-n^2)+3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\frac{a_n}{n}-n\right)+4}{4\left(\frac{a_n}{n}-n\right)+3}=\frac{0+4}{0+3}=\frac{4}{3}$

[다른 풀이]

㉠에서 $\frac{a_n}{n}-n=b_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고

$a_n=nb_n+n^2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+4n-3n^2}{4a_n+3n-4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(nb_n+n^2)+4n-3n^2}{4(nb_n+n^2)+3n-4n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3nb_n+4n}{4nb_n+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n+4}{4b_n+3}$

$=\frac{3\times0+4}{4\times0+3}=\frac{4}{3}$

11 답 ②

급수 $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$로 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=4-4=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+S_n}{S_n^{\ 2}}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

12 답 ③

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$은 발산한다.

ㄴ. 주어진 급수의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}S_n$은 발산한다.

ㄷ. 주어진 급수의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$은 1로 수렴한다.

따라서 급수의 합이 수렴하는 것은 ㄷ이다.

13 답 ⑤

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 α, β라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}=5$

$\therefore \frac{2-(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=5$ ⋯ ㉠

또, 등비수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\alpha\beta$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{1}{1-\alpha\beta}=\frac{3}{2}$　　$\therefore \alpha\beta=\frac{1}{3}$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $\alpha+\beta=\frac{7}{6}$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에서 α, β는 t에 대한 이차방정식

$t^2-\frac{7}{6}t+\frac{1}{3}=0$, 즉 $6t^2-7t+2=0$의 두 근이므로

$(2t-1)(3t-2)=0$　　$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{2}{3}$

$\therefore \alpha=\frac{1}{2}, \beta=\frac{2}{3}$ 또는 $\alpha=\frac{2}{3}, \beta=\frac{1}{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\ 2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{\ 2}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{47}{15}$

14 답 ⑤

$1+a+a^2+a^3+\cdots$는 첫째항이 1, 공비가 a인 등비급수이고

이 급수의 합이 4이므로 $-1<a<1$에서

$1+a+a^2+a^3+\cdots=\dfrac{1}{1-a}=4 \qquad \therefore a=\dfrac{3}{4}$

또, $b+b^2+b^3+b^4+\cdots$는 첫째항이 b, 공비가 b인 등비급수이고

이 급수의 합이 1이므로 $-1<b<1$에서

$b+b^2+b^3+b^4+\cdots=\dfrac{b}{1-b}=1 \qquad \therefore b=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{2}{3}$에서 $-1<\dfrac{b}{a}<1$이다.

이때, $1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{b^3}{a^3}+\cdots$는 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{b}{a}$인 등비급수

이므로

$1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{b^3}{a^3}+\cdots=\dfrac{1}{1-\dfrac{b}{a}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=3$

15 답 ⑤

$|x|<\dfrac{1}{2}$에서 $|2x|<1$이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\{2\times(2x)^{n-1}-x^{n-1}\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}2\times(2x)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\\&=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

양변에 $2(1-2x)(1-x)$를 곱하여 정리하면

$18x^2-27x+7=0,\ (3x-1)(6x-7)=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{3}\left(\because |x|<\dfrac{1}{2}\right)$

16 답 ④

먼저 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{3^n}-\frac{b^n}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{2}\right)^n$에서

각 등비급수가 수렴하는 경우를 구하면

$-1<\dfrac{a}{3}<1$에서 $-3<a<3 \qquad \therefore a=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

$-1<\dfrac{b}{2}<1$에서 $-2<b<2 \qquad \therefore b=-1,\ 0,\ 1$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $5\times3=15$

한편, $\dfrac{a^n}{3^n}-\dfrac{b^n}{2^n}=0$이면 급수의 합은 0이므로

$\dfrac{a^n}{3^n}-\dfrac{b^n}{2^n}=0$에서 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{2} \qquad \therefore b=\dfrac{2}{3}a$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$(3,\ 2),\ (6,\ 4),\ (9,\ 6),\ (-3,\ -2),\ (-6,\ -4),\ (-9,\ -6),$

$(0,\ 0)$의 7이다.

이때, $(0,\ 0)$은 앞의 경우와 중복되므로 가능한 순서쌍의 개수는

$15+7-1=21$이다.

17 답 ①

등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$

ㄱ. 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$의 공비가 $-r$이고

$-1<r<1$에서 $-1<-r<1$이므로 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은

수렴한다.

ㄴ. 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r+1}\right)^n$의 공비가 $\dfrac{1}{r+1}$이고

$-1<r<1$에서 $0<r+1<2 \qquad \therefore \dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{r+1}$

따라서 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r+1}\right)^n$은 $1\le\dfrac{1}{r+1}$일 때 발산한다.

ㄷ. 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2(r^2-1)^n$의 공비가 r^2-1이고

$-1<r<1$에서 $0\le r^2<1 \qquad \therefore -1\le r^2-1<0$

따라서 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2(r^2-1)^n$은 $r^2-1=-1$일 때 발산한다.

따라서 수렴하는 급수는 ㄱ이다.

18 답 ⑤

등비급수 $a-\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^3}{4}-\dfrac{a^4}{8}+\cdots-\left\{\dfrac{(-a)^n}{2^{n-1}}\right\}+\cdots$는

첫째항이 a, 공비가 $-\dfrac{a}{2}$이고 그 합이 $f(a)$로 수렴하므로

$-1<-\dfrac{a}{2}<1$에서 $-2<a<2$이다.

$\therefore f(a)=\dfrac{a}{1-\left(-\dfrac{a}{2}\right)}=\dfrac{2a}{2+a}(-2<a<2)$

이때, $\dfrac{2a}{2+a}=2-\dfrac{4}{a+2}$이므로 $-2<a<2$에서

$0<a+2<4,\ \dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{a+2},\ -\dfrac{4}{a+2}<-1$

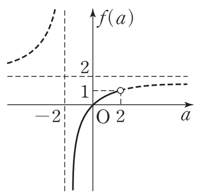
$\therefore 2-\dfrac{4}{a+2}<1$

따라서 $-2<a<2$일 때 $f(a)<1$이므로 $f(a)=1$이 될 수 없다.

[다른 풀이]

$f(a)=\dfrac{2a}{2+a}(-2<a<2)$의 그래프는

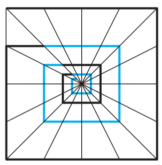
그림과 같으므로 $f(a)=1$은 될 수 없다.

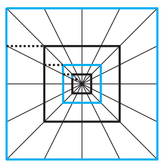


19 답 32

주어진 나선형의 도형은 [그림 1]과 같이 ⊏ 모양의 닮은 도형들을

연속으로 이어서 만들었다고 볼 수 있다.

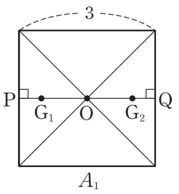

[그림 1]


[그림 2]

이 닮은 도형의 길이는 크기 순으로 공비 $\frac{1}{2}$인 등비수열을 이루고 그 첫째항은 [그림 2]와 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형의 둘레의 길이와 같으므로 나선형을 이루는 모든 선분의 길이의 합을 S라 하면

$$S=4\times4+4\times2+4\times1+\cdots=\frac{16}{1-\frac{1}{2}}=32$$

20 답 162



그림과 같이 정사각형 A_1의 두 대각선의 교점을 O, 마주보고 있는 두 삼각형의 무게중심을 G_1, G_2라 하면 두 세로변의 중점 P, Q에 대하여 P, G_1, O, G_2, Q는 일직선 위에 있고, $\overline{PQ}=3$이다.

$\therefore \overline{G_1G_2}=\frac{2}{3}\overline{PQ}=2$

이때, 정사각형 A_1의 한 대각선의 길이는 $3\sqrt{2}$이고 정사각형 A_2의 대각선의 길이는 $\overline{G_1G_2}=2$이므로 두 정사각형 A_1과 A_2의 닮음비는 $3\sqrt{2}:2$이다. 즉, 넓이의 비는 $(3\sqrt{2})^2:2^2=9:2$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=9$이고, 공비는 $\frac{2}{9}$이므로

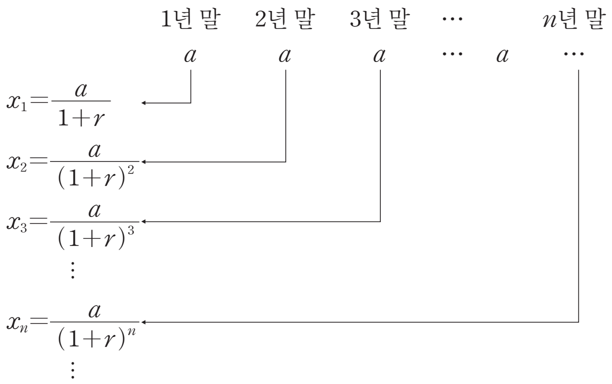
$$k=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{9}{1-\frac{2}{9}}=\frac{81}{7}$$

$$\therefore 14k=14\times\frac{81}{7}=162$$

21 답 ①

$a=1000$, $r=0.1$이라 하고 금년 말에 받을 a만 원의 금년 초에서의 금액을 x_1이라 하면 $x_1(1+r)=a$에서 $x_1=\frac{a}{1+r}$

마찬가지로 n년 말에 받을 a만 원의 금년 초에서의 금액을 x_n이라 하면 $x_n(1+r)^n=a$에서 $x_n=\frac{a}{(1+r)^n}$



따라서 금년 초에 일시불로 받는 연금은 첫째항이 $x_1=\frac{a}{1+r}$이고 공비가 $\frac{1}{1+r}$인 등비급수이다.

$$\therefore \frac{a}{1+r}+\frac{a}{(1+r)^2}+\cdots=\frac{\frac{a}{1+r}}{1-\frac{1}{1+r}}=\frac{a}{r}$$

$$=\frac{1000\text{만}}{0.1}=1\text{억(원)}$$

일등급 UP

*** 현재 금액의 n년 전과 n년 후의 가치**

연이율이 r일 때

n년 전	현재	n년 후
$a(1+r)^{-n}$ 원 ←	a 원	→ $a(1+r)^n$ 원

22 답 145

10으로 나눈 나머지는 일의 자리의 숫자이므로

$4^1=4$에서 $a_1=4$

$4^2=16$에서 $a_2=6$

$4^3=64$에서 $a_3=4$

$4^4=256$에서 $a_4=6$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 4, 6, 4, 6, …이고 $\frac{a_n}{10^n}$은 소수점 아래 n째 자리의 숫자가 a_n이라는 의미이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=0.\dot{4}\dot{6}=0.46+0.0046+0.000046+\cdots$$

$$=\frac{0.46}{1-0.01}=\frac{46}{99}$$

따라서 $p=99$, $q=46$이므로 $p+q=145$

[다른 풀이]

순환소수를 분수로 바꾸는 공식에서 $0.\dot{4}\dot{6}=\frac{46}{99}$

(이하 동일)

23 답 ②

a_n만큼의 종이를 생산하면 40 %가 폐지로 수집되고, 또 수집된 폐지의 50 %만큼의 종이를 만들 수 있으므로

$$a_{n+1}=\frac{4}{10}\times\frac{5}{10}a_n=\frac{1}{5}a_n$$

즉, 전체 생산되는 종이의 양은 첫째항이 a kg, 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비급수이므로 구하는 종이의 양을 S라 하면

$$S=\frac{a}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}a(\text{kg})$$

24 답 ②

ㄱ. 【반례】 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$일 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\text{이므로}$$

$$\alpha\beta=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

또, $a_nb_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{6}\right)^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\neq\alpha\beta$ (거짓)

ㄷ. 【반례】 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$일 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

25 답 ①

$S_n=\frac{9n}{n+2}$에서 $a_1=S_1=3$이고

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9n}{n+2}=9$이다. 한편,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}&=a_2+a_3+a_4+\cdots=-a_1+(a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots)\\&=-a_1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-3+9=6\end{aligned}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=9+6=15$$

26 답 ⑤

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})\\&=1\times(a_1-a_2)+2\times(a_2-a_3)+\cdots+n\times(a_n-a_{n+1})\\&=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}na_{n+1}=10-0=10\end{aligned}$$

27 답 ⑤

$\sqrt{n^2+3}\le\sqrt{n^2+3k}\le\sqrt{n^2+3n}$에서

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+3k}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3k}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+3n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3k}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3n}}\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3k}}\le\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$$

$$1\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3k}}\le1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3k}}=1$$

28 답 ⑤

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 1로 수렴하고 이 급수의 부분합이 S_n이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=1$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-2S_n+3n}{2a_n+S_n+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}-\frac{2S_n}{n}+3}{\frac{2a_n}{n}+\frac{S_n}{n}+2}=\frac{3}{2}$$

29 답 ①

ㄱ. 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

(ⅰ) $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$$\begin{aligned}S_{2m-1}&=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\right)\\&=1\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=1$

(ⅱ) $n=2m$ (m은 자연수)일 때,

$$\begin{aligned}S_{2m}&=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots\\&\qquad+\left(-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{m+1}\\&=1-\frac{1}{m+1}\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)=1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}S_{2m}=1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄴ, ㄷ. 주어진 급수의 일반항을 a_n이라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

따라서 수렴하는 급수는 ㄱ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

(ⅰ) $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$$\begin{aligned}S_{2m-1}&=2+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)+\cdots\\&\qquad+\left(-\frac{m+1}{m}+\frac{m+1}{m}\right)\\&=2\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=2$

(ⅱ) $n=2m$ (m은 자연수)일 때,

$$\begin{aligned}S_{2m}&=2+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)+\cdots\\&\qquad+\left(-\frac{m+1}{m}+\frac{m+1}{m}\right)-\frac{m+2}{m+1}\\&=2-\frac{m+2}{m+1}\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}\left(2-\frac{m+2}{m+1}\right)=1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}\neq\lim_{m\to\infty}S_{2m}$이므로 S_n은 발산한다.

30 답 ①

$5a_1+5^2a_2+\cdots+5^{n-1}a_{n-1}+5^na_n=2^n-1$ ⋯ ㉠

㉠에서 n 대신 $n-1$을 대입하면

$5a_1+5^2a_2+\cdots+5^{n-1}a_{n-1}=2^{n-1}-1$ ⋯ ㉡

㉠－㉡을 하면 $5^na_n=2^{n-1}$ $(n\ge 2)$

이 식은 $n=1$일 때에도 성립하므로 $a_n=\frac{1}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{8}$

31 답 ②

$\frac{3}{11}=\frac{27}{99}=0.\dot{2}\dot{7}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{8^n}=\frac{2}{8}+\frac{7}{8^2}+\frac{2}{8^3}+\frac{7}{8^4}+\cdots$$
$$=\left(\frac{2}{8}+\frac{2}{8^3}+\cdots\right)+\left(\frac{7}{8^2}+\frac{7}{8^4}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{64}}+\frac{\frac{7}{64}}{1-\frac{1}{64}}=\frac{23}{63}$$

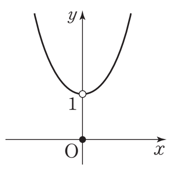
32 답 ②

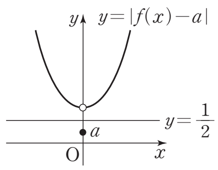
(i) $x=0$일 때, $f(x)=0$

(ii) $x\neq 0$일 때, $1+x^2>1$에서 $0<\frac{1}{1+x^2}<1$이므로

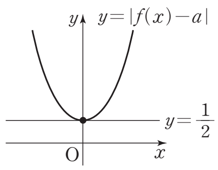
$$f(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^3}+\cdots$$
$$=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2$$

(i), (ii)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 a의 값의 범위에 따라 함수 $y=|f(x)-a|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점을 구하면 다음 그림과 같다.

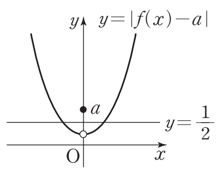




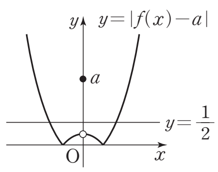
$\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$



$\left(a=\frac{1}{2}\right)$



$\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$



$(a>1)$

따라서 오직 하나의 해를 갖도록 하는 양수 a의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

33 답 ④

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공비를 s라 하자.

ㄱ. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $-1<r<1$, $-1<s<1$이고 수열 $\{a_nb_n\}$의 첫째항이 ab이고, 공비가 rs이므로 $-1<rs<1$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 수렴한다. (참)

ㄴ. 【반례】 $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$, $b_n=2^n$이면 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다. (거짓)

ㄷ. $\frac{b_n}{a_n}=c_n$이라 하면 $b_n=a_nc_n$이므로 ㄱ에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nc_n$은 수렴한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

34 답 ④

반지름의 길이가 2인 사분원에 내접하는 원 C_1의 반지름의 길이가 r_1이므로 $\sqrt{2}r_1+r_1=2$에서

$r_1=\frac{2}{\sqrt{2}+1}=2(\sqrt{2}-1)$

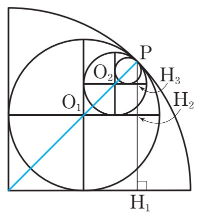
한편, $r_n=(\sqrt{2}+1)r_{n+1}$에서

$r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}r_n=(\sqrt{2}-1)r_n$이므로 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 $2(\sqrt{2}-1)$이고 공비가 $\sqrt{2}-1$인 등비수열이다.

따라서 $r_n=2(\sqrt{2}-1)^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}r_n=\sum_{n=1}^{\infty}2(\sqrt{2}-1)^n$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}$$

[다른 풀이]



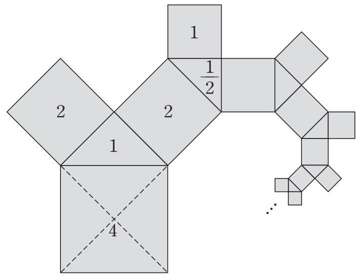
그림과 같이 사분원의 중심각을 이등분하는 직선이 사분원과 만나는 점을 P라 하고 점 P에서 각 사분원의 한 반지름에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자. 원 C_n의 중심을 O_n이라 하면

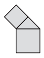
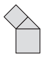
$n\to\infty$일 때 $O_n\to P$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}r_n=\overline{H_1H_2}+\overline{H_2H_3}+\overline{H_3H_4}+\cdots$$
$$=\overline{PH_1}=\sqrt{2}$$

35 답 14

각 도형의 넓이를 조사하면 그림과 같다.

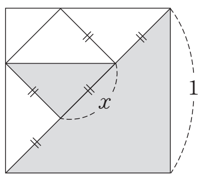


주어진 도형은  꼴의 육각형을 무한히 이어붙인 것과 같고, 이웃하는  꼴의 육각형의 넓이의 비가 $2:1$이므로 모든 도형의 넓이의 합은 첫째항이 $4+1+2=7$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수의 합과 같다.

따라서 구하는 넓이의 합을 S라 하면

$$S=\frac{7}{1-\frac{1}{2}}=14$$

36 답 23



처음 정사각형의 한 변의 길이는 1이므로 $S_1=\frac{1}{2}$이고, 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이다. 이때, 그림과 같이 색칠하지 않은 직각이등변삼각형에 내접하고 한 변이 대각선 위에 있는 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면 $3x=\sqrt{2}$에서

$$x=\frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \therefore S_2=\frac{1}{9}$$

한편, 도형의 닮음에 의하여

$$S_n:S_{n+1}=S_1:S_2=\frac{1}{2}:\frac{1}{9}=9:2\text{에서}$$

$$S_{n+1}=\frac{2}{9}S_n\text{이므로 }\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{9}}=\frac{9}{14}$$

$\therefore p+q=14+9=23$

37 답 ②

k번째 직사각형의 넓이를 a_k라 하면

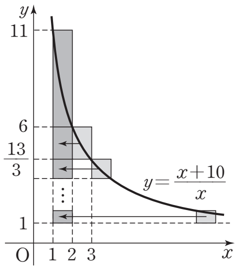
$$a_k=\left(\frac{k+10}{k}-\frac{k+11}{k+1}\right)\times 1=\frac{k+10}{k}-\frac{k+11}{k+1}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+10}{k}-\frac{k+11}{k+1}\right)\\&=\left(\frac{11}{1}-\frac{12}{2}\right)+\left(\frac{12}{2}-\frac{13}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+10}{n}-\frac{n+11}{n+1}\right)\\&=11-\frac{n+11}{n+1}\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\left(11-\frac{n+11}{n+1}\right)=11-1=10$$

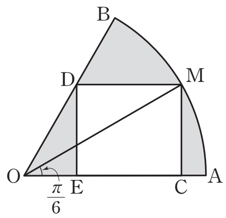
[다른 풀이]

분수함수 $y=\frac{x+10}{x}$의 그래프의 점근선이 $y=1$이므로 직사각형들을 왼쪽으로 정렬하면 그림과 같다.



따라서 모든 직사각형의 넓이의 합은 $1\times(11-1)=10$

38 답 ④



그림과 같이 부채꼴 OAB에 내접하는 직사각형을 사각형 CMDE라 하자.

직각삼각형 OCM에서

$$\overline{CM}=\overline{OM}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \overline{OC}=\overline{OM}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

직각삼각형 OED에서

$$\overline{OE}=\frac{\overline{DE}}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\overline{CM}}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

이때, $\overline{CE}=\overline{OC}-\overline{OE}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\square CMDE=\overline{CM}\times\overline{CE}=\frac{\sqrt{3}}{6}$이고 부채꼴 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$이다.

$$\begin{aligned}\therefore S_1&=(\text{부채꼴 OAB의 넓이})-\square CMDE\\&=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

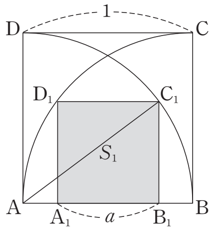
한편, 부채꼴 OAB와 두 번째 그림에서 만들어지는 부채꼴은 서로 닮음이고, 두 도형의 닮음비는 $\overline{OA}:\overline{CE}=1:\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 닮음인 두 도형의 넓이의 비는 $1^2:\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1:\frac{1}{3}$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi-\sqrt{3}}{6}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi-\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{4}$$

39 답 25

그림과 같이 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이를 a라 하면



$\overline{AA_1}=\dfrac{1-a}{2}$

또한, $\overline{AB_1}^2+\overline{B_1C_1}^2=\overline{AC_1}^2$이므로

$\left(\dfrac{1-a}{2}+a\right)^2+a^2=1$,

$5a^2+2a-3=0$

$(a+1)(5a-3)=0 \qquad \therefore a=\dfrac{3}{5}\ (\because a>0)$

따라서 $S_1=a^2=\dfrac{9}{25}$이고

$\square A_nB_nC_nD_n : \square A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$

$=\square ABCD : \square A_1B_1C_1D_1=1 : \dfrac{9}{25}$

이므로 넓이의 비는 $1 : \dfrac{9}{25}$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{9}{25}$이고 공비가 $\dfrac{9}{25}$인

등비수열이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\dfrac{9}{16}$

$\therefore p+q=16+9=25$

40 답 ④

$\triangle P_nQ_nR \backsim \triangle P_{n+1}Q_{n+1}R$ (AA 닮음)

$\triangle P_nQ_{n+1}P_{n+1} \backsim \triangle P_{n+1}Q_{n+2}P_{n+2}$ (AA 닮음)이므로

수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고

$a_1 : 8=a_2 : (8-a_1\cos\theta)$에서 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{8-a_1\cos\theta}{8}$

따라서 공비는 $\dfrac{8-a_1\cos\theta}{8}$이므로

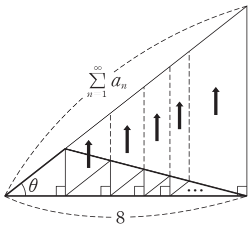
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-\frac{8-a_1\cos\theta}{8}}=\frac{8}{\cos\theta}=10$$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{4}{5}$

[다른 풀이]

오른쪽 그림에서

$\cos\theta=\dfrac{8}{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$



41 답 ③

$l_1=1\times3$

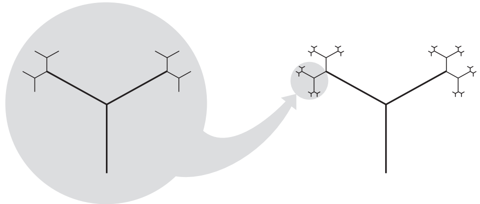
$l_2=1\times3+\dfrac{1}{5}\times3\times4$

$l_n=3+3\times\dfrac{4}{5}+3\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+\cdots+3\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}l_n=\dfrac{3}{1-\frac{4}{5}}=15$

[다른 풀이]

다음의 그림에서



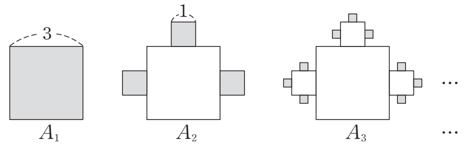
$l_{n+1}=\dfrac{1}{5}l_n\times4+3=\dfrac{4}{5}l_n+3$에서 $-1<\dfrac{4}{5}<1$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}l_{n+1}=\lim_{n\to\infty}l_n=\alpha$라 하면

$\alpha=\dfrac{4}{5}\alpha+3 \qquad \therefore \alpha=15$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}l_n=15$

42 답 ④



각 도형에서 새로 그려 추가된 부분의 넓이를 기준으로 계산하면 그림에서

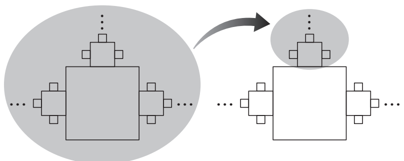
	한 개의 넓이	개수
A_1에서 추가된 부분	3^2	1
A_2에서 추가된 부분	1^2	3
A_3에서 추가된 부분	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	3^2
A_4에서 추가된 부분	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$	3^3
⋮	⋮	⋮

$\therefore S_n=3^2\times1+1^2\times3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times3^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\times3^3+\cdots$

$=9+3+1+\dfrac{1}{3}+\cdots$

$=\dfrac{3^2}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{27}{2}$

[다른 풀이]



구하는 넓이를 S라 하면 그림에서 닮음비가 $3 : 1$이므로 넓이의 비는 $9 : 1$이다.

즉, $S=\dfrac{S}{9}\times3+3^2 \qquad \therefore S=\dfrac{27}{2}$

43 답 ③

매년 지급한 불우이웃돕기 성금을 구해 보면

1년째 : $90\times1.1\times0.5$

2년째 : $90\times1.1\times0.5\times1.1\times0.5=90\times(1.1\times0.5)^2$

3년째 : $90\times(1.1\times0.5)^2\times1.1\times0.5=90\times(1.1\times0.5)^3$

⋮

n년째 : $90\times(1.1\times0.5)^n$

따라서 구하는 성금의 총액의 극한값은 첫째항이 $90\times1.1\times0.5$이고 공비가 1.1×0.5인 등비급수이므로

$\dfrac{90\times1.1\times0.5}{1-1.1\times0.5}=\dfrac{49.5}{0.45}=110$(억 원)

44 답 ②

사료 1 kg에 들어 있는 농약의 양을 x mg이라 하고, 1일 후 농약 성분이 닭의 체내에 남은 비율을 r라 하면 $r=\dfrac{4}{5}$이다.

이를 표로 정리하면 다음과 같다.

	1일째 섭취	2일째 섭취	3일째 섭취	4일째 섭취	⋯
1일째	x				⋯
2일째	$\frac{4}{5}x$	x			⋯
3일째	$\left(\frac{4}{5}\right)^2x$	$\frac{4}{5}x$	x		⋯
4일째	$\left(\frac{4}{5}\right)^3x$	$\left(\frac{4}{5}\right)^2x$	$\frac{4}{5}x$	x	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

따라서 무한히 산다고 가정한 닭의 체내에 남은 농약 성분의 양은

$x+\dfrac{4}{5}x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^3x+\cdots=\dfrac{x}{1-\dfrac{4}{5}}=5x\le10$

$\therefore x\le2$

따라서 사료 1 kg에 들어 있는 농약의 최대 허용치는 2 mg이다.

45 답 8

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n^2+1)a_n-\frac{n^3+2n}{3n+1}\right\}=2$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(n^2+1)a_n-\frac{n^3+2n}{3n+1}\right\}=0$ ---------- ⓐ

이때, $(n^2+1)a_n-\dfrac{n^3+2n}{3n+1}=b_n$이라 하면

$a_n=\dfrac{b_n}{n^2+1}+\dfrac{n^3+2n}{(3n+1)(n^2+1)}$이고, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{(3n+1)(n^2+1)}$

$=0+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$ ---------- ⓑ

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}(9a_n{}^2+6a_n+5)=9\times\frac{1}{9}+6\times\frac{1}{3}+5=8$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(n^2+1)a_n-\frac{n^3+2n}{3n+1}\right\}=0$임을 안다. [20%]

ⓑ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구한다. [50%]

ⓒ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(9a_n{}^2+6a_n+5)$의 값을 구한다. [30%]

46 답 2

$3^{n-1}+3^{n-2}\times2+3^{n-3}\times2^2+\cdots+3\times2^{n-2}+2^{n-1}$

$=(3-2)(3^{n-1}+3^{n-2}\times2+3^{n-3}\times2^2+\cdots+3\times2^{n-2}+2^{n-1})$

$=3^n-2^n$ ---------- ⓐ

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}+3^{n-2}\times2+3^{n-3}\times2^2+\cdots+3\times2^{n-2}+2^{n-1}}{4^n}$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{2}{4}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\dfrac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}-\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3-1=2$ ---------- ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 주어진 식의 분자를 간단히 한다. [60%]

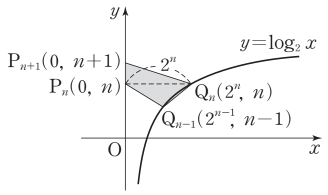
ⓑ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}+3^{n-2}\times2+3^{n-3}\times2^2+\cdots+3\times2^{n-2}+2^{n-1}}{4^n}$의 값을 구한다. [40%]

47 답 5

점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 하면 $\log_2 x_n=n$에서 $x_n=2^n$

따라서 점 Q_n의 좌표는 $(2^n, n)$이다.

이때, 사각형 $P_nQ_{n-1}Q_nP_{n+1}$의 각각의 꼭짓점의 좌표를 구하면 그림과 같다.



---------- ⓐ

한편,

$\square P_nQ_{n-1}Q_nP_{n+1}=\triangle P_nQ_{n-1}Q_n+\triangle P_nQ_nP_{n+1}$이므로

$a_n=\left(\dfrac{1}{2}\times\overline{P_nQ_n}\times1\right)\times2=2^n\ (\because \overline{P_nQ_n}=2^n)$ ---------- ⓑ

$\therefore \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\dfrac{1}{2}$이므로 $10\alpha=10\times\dfrac{1}{2}=5$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 사각형 $P_nQ_{n-1}Q_nP_{n+1}$의 각각의 꼭짓점의 좌표를 구한다. [40%]

ⓑ 사각형 $P_nQ_{n-1}Q_nP_{n+1}$의 넓이 a_n을 구한다. [40%]

ⓒ 10α의 값을 구한다. [20%]

48 답 ①

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 α는 방정식

$x^2-x+1=0$의 근이다.

즉, $\alpha^2-\alpha+1=0$에서 $\alpha^2=\alpha-1$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-\alpha)(k-\alpha^2)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-\alpha)(k+1-\alpha)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k-\alpha}-\frac{1}{k+1-\alpha}\right)\\&=\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{2-\alpha}\right)+\left(\frac{1}{2-\alpha}-\frac{1}{3-\alpha}\right)+\\&\qquad\cdots+\left(\frac{1}{n-\alpha}-\frac{1}{n+1-\alpha}\right)\\&=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{n+1-\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(k-\alpha)(k-\alpha^2)}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{n+1-\alpha}\right)\\&=\frac{1}{1-\alpha}\\&=-\frac{1}{\alpha^2}\ (\because \alpha^2-\alpha+1=0)\\&=\alpha\ \ (\because \alpha^3=-1)\end{aligned}$$

49 답 ③

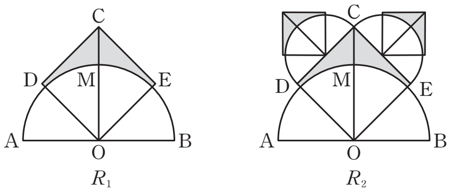


그림 R_1에서 $\overline{OC}=3$이므로 $\overline{OE}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

따라서 정사각형 CDOE의 넓이는 $\overline{OE}^2=\frac{9}{2}$이고, 정사각형 CDOE의 내부와 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 내부의 공통부분인 사분원의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{2}=\pi$이므로 $S_1=\frac{9}{2}-\pi$이다.

그림 R_2에서 새롭게 그려진 반원의 지름의 길이는

$\overline{OE}=\overline{CD}=\frac{3}{\sqrt{2}}$이므로 닮음비는 $4:\frac{3}{\sqrt{2}}=1:\frac{3}{4\sqrt{2}}$이다.

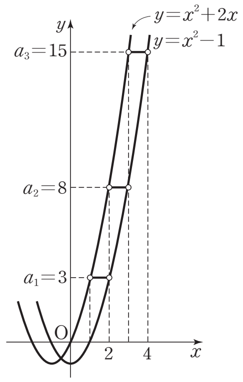
즉, 넓이의 비는 $1^2:\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2=1:\frac{9}{32}$이다.

한편, 과정을 반복할 때마다  모양의 개수가 2배씩 들어나므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{9}{2}-\pi$이고 공비가 $\frac{9}{32}\times2=\frac{9}{16}$인 등비수열의 합이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{9}{2}-\pi}{1-\frac{9}{16}}=\frac{72-16\pi}{7}$$

50 답 ②

두 함수 $y=x^2+2x$, $y=x^2-1$의 그래프는 그림과 같다.



자연수 1, 2는 $x=1$일 때 $1^2-1=0$과 $1^2+2\times1=3$ 사이의 수이다. 이때, $1\in A$이므로 $A\neq\varnothing$이다.

따라서 1, 2는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 없다.

그런데 $a=3$일 때, 부등식 $x^2-1<a<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $A=\varnothing$이다.

$\therefore a_1=3$

자연수 4, 5, 6, 7은 $x=2$일 때 $2^2-1=3$과 $2^2+2\times2=8$ 사이의 수이다. 이때, $2\in A$이므로 $A\neq\varnothing$이다. 따라서 4, 5, 6, 7은 수열 $\{a_n\}$의 둘째항이 될 수 없다.

그런데 위의 그림에서 $x^2-1<8<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $a_2=8$이다.

마찬가지로 자연수 9, 10, 11, 12, 13, 14는 $x=3$일 때 $3^2-1=8$과 $3^2+2\times3=15$ 사이의 수이다. 이때, $3\in A$이므로 $A\neq\varnothing$이다.

따라서 9, 10, 11, 12, 13, 14는 수열 $\{a_n\}$의 셋째항이 될 수 없다.

그런데 위의 그림에서 $x^2-1<15<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $a_3=15$이다.

⋮

위의 과정을 통해 집합 A를 공집합이 되도록 하는 자연수 a는 k^2-1 또는 k^2+2k (k는 자연수)의 값임을 알 수 있다.

그런데 $x=k$ (k는 자연수)일 때 k^2+2k의 값은 $x=k+1$ (k는 자연수)일 때 $(k+1)^2-1$의 값과 같고, $x=1$일 때, $1^2-1=0$은 자연수가 아니므로 $x=k$ (k는 자연수)일 때 k^2+2k인 자연수를 나열하면 된다.

따라서 n번째 나열된 수는 n^2+2n이므로

$a_n=n^2+2n=n(n+2)$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-0-0\right)=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$x^2-1<a<x^2+2x$를 정리하면

$x^2<a+1<x^2+2x+1$

$x^2<a+1<(x+1)^2$

$a+1$이 자연수 x에 대해 x^2 또는 $(x+1)^2$이면

부등식 $x^2-1<a<x^2+2x$의 해 중 자연수는 존재하지 않으므로

A가 공집합이다.

이때, $a+1=k^2$ (k는 2 이상의 자연수)를 만족시키는 자연수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이 수열 $\{a_n\}$이다.

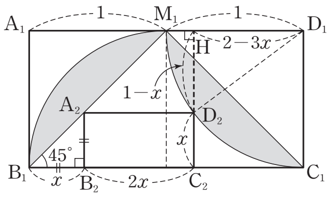
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)(k+1)}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{4}$$

51 답 ③



공비 r를 구하기 위해 먼저 닮음비 $\dfrac{\overline{C_2D_2}}{\overline{C_1D_1}}$를 구하자.

$\dfrac{\overline{C_2D_2}}{\overline{C_1D_1}}=\overline{C_2D_2}=x$라 하고, 점 D_2에서 $\overline{A_1D_1}$에서 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{B_1M_1}$과 $\overline{B_1C_1}$이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\overline{B_1B_2}=\overline{A_2B_2}=x$, $\overline{B_2C_2}=2x$, $\overline{HD_1}=\overline{C_1C_2}=2-3x$,

$\overline{HD_2}=1-x$이고 $\overline{HD_1}^2+\overline{HD_2}^2=\overline{D_1D_2}^2=1$에서

$(2-3x)^2+(1-x)^2=1$, $5x^2-7x+2=0$

$(x-1)(5x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{2}{5}$

이때, $x<1$이므로 $x=\frac{2}{5}$

따라서 닮음비가 $\frac{2}{5}$이므로 넓이의 비는 $\frac{4}{25}$이고, 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 $S_1=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\times2=\frac{\pi}{2}-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

52 답 ④

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$이므로

$$\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}=1-\frac{1}{a_{n+2}}\ (\because a_2=1)$$

한편, 수열 $\{a_n\}$은 증가하는 수열이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+2}}=0$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=1$$

53 답 ②

$(n+2)a_{n+1}=na_n+\frac{1}{n+1}$에서 양변에 $n+1$을 곱하면

$(n+1)(n+2)a_{n+1}=n(n+1)a_n+1$

즉, 수열 $\{n(n+1)a_n\}$은 첫째항이 $1\times2\times a_1=2$이고

공차가 1인 등차수열이므로

$n(n+1)a_n=2+(n-1)\times1=n+1$

$$\therefore a_n=\frac{n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

54 답 1

$a_n=0.\dot{1}00\cdots0\dot{0}=\dfrac{100\cdots00}{999\cdots99}=\dfrac{10^{n-1}}{10^n-1}$이므로

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{10^{n+1}-1}{10^n}-\frac{10^n-1}{10^{n-1}}$$

$$=10-\frac{1}{10^n}-10+\frac{1}{10^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{10^{n-1}}-\frac{1}{10^n}=\frac{1}{10^n}(10-1)$$

$$=\frac{9}{10^n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$$

55 답 3

점 P_n의 좌표를 (x_n, y_n)이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2^2}+\frac{\sqrt{3}}{2^4}-\frac{\sqrt{3}}{2^5}+\cdots$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2^4}+\cdots\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2^2}+\frac{\sqrt{3}}{2^5}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{8}}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2^2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2\sqrt{3}}{7}$$

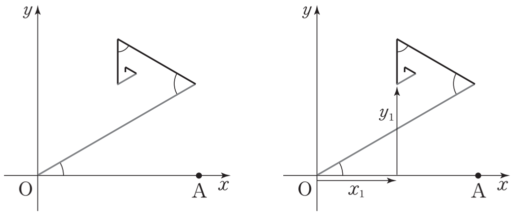
$$\lim_{n\to\infty} y_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^5}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4}{7}$$

$$\therefore \frac{7x^2}{y}=\frac{7\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{7}\right)^2}{\frac{4}{7}}=3$$

[다른 풀이]

다음 그림에서



공비는 $\frac{1}{8}$이고, $\begin{cases} x_1=\frac{\sqrt{3}}{4} \\ y_1=\frac{1}{2} \end{cases}$ 이므로 $\begin{cases} x_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \\ y_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \end{cases}$

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2\sqrt{3}}{7},\ y=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} y_k=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4}{7}$$

$$\therefore \frac{7x^2}{y}=3$$

56 답 97

한 변의 길이가 6인 정사각형의 넓이를 $A_0(A_0=36)$,

그림 C_1에서 그려진 2개의 정사각형의 넓이의 합을 A_1,

그림 C_2에서 그려진 4개의 정사각형의 넓이의 합을 A_2,

⋮

그림 C_n에서 그려진 2^n개의 정사각형의 넓이의 합을 A_n이라 하자.

그림 C_1에서 바깥 정사각형을 G_1이라 하고, G_1의 내부에 있는 두 정사각형을 크기 순서대로 G_2, G_3이라 하면 G_1, G_2, G_3의 넓이의 비는 $9:4:1$이므로 $A_1=\frac{5}{9}A_0$이다.

그림 C_n에서 한 정사각형과 그 정사각형의 내부에 있는 두 정사각형의 넓이의 비가 G_1, G_2, G_3의 넓이의 비와 같으므로 $A_n=\frac{5}{9}A_{n-1}$이다. 이때, 그림 C_n에서 색칠된 부분의 넓이가 S_n이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=A_0\left\{\frac{5}{9}-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=36\times\frac{\frac{5}{9}}{1-\left(-\frac{5}{9}\right)}=\frac{90}{7}$$

$$\therefore p+q=7+90=97$$

Ⅱ 미분법

1st 03 여러 가지 함수의 미분

문제편 35P

01 답 ④

$$f(k)=\lim_{x\to 0}(x^2+kx+1)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{(x^2+kx+1)^{\frac{1}{x^2+kx}}\right\}^{\frac{x^2+kx}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{(x^2+kx+1)^{\frac{1}{x^2+kx}}\right\}^{x+k}=e^k$$

이므로

$$\frac{f(3)}{f(2)}=\frac{e^3}{e^2}=e$$

02 답 ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\ln e=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{2\times\frac{1}{2x}\ln(1+2x)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}2\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}=2\ln e=1$$

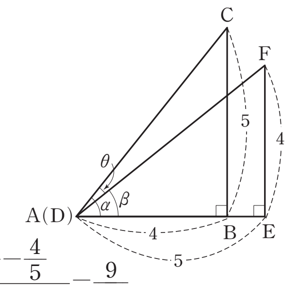
이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+2x)}{x}}{\frac{\ln(1+2x)}{x}}=\frac{2}{1}=2$$

03 답 ②

그림과 같이

$\angle BAC=\alpha$, $\angle EDF=\beta$라 하면



$\tan\alpha=\frac{5}{4}$, $\tan\beta=\frac{4}{5}$이고

$\theta=\alpha-\beta$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{5}{4}-\frac{4}{5}}{1+\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}}=\frac{9}{40}$$

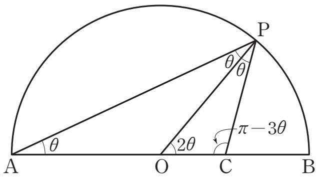
04 답 ②

$x-\pi=t$라 하면 $x=t+\pi$이고 $x\to\pi$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{2\cos\frac{x}{2}}{x^2-\pi^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos\frac{\pi+t}{2}}{(t+\pi)^2-\pi^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin\frac{t}{2}}{t^2+2\pi t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\times\frac{-1}{t+2\pi}\right)=1\times\frac{-1}{0+2\pi}=-\frac{1}{2\pi}$$

05 답 ④



삼각형 OCP에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{OP}}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\overline{OC}}{\sin\theta}$에서

$\overline{OC}=\dfrac{\overline{OP}}{\sin(\pi-3\theta)}\times\sin\theta=\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$\therefore \lim\limits_{\theta\to0+}\overline{OC}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\theta}{\sin3\theta}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{\dfrac{\sin3\theta}{3\theta}\times3}=\dfrac{1}{3}$

06 답 ③

$f'(x)=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$

$=\cos^2 x-\sin^2 x$

$=\cos 2x$

이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}-\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$=0-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

07 답 ①

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=f(0)$이 성립해야 한다.

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{e^{ax}-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{e^{ax}-1}{ax}\times\dfrac{2x}{\sin 2x}\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}(x^2+2x+3)=3$

이고 $f(0)=3$이므로

$\dfrac{a}{2}=3$에서 $a=6$

08 답 ⑤

ㄱ. $-x=t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}=e$

ㄴ. $-x=t$라 하면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

ㄷ. $x-1=t$라 하면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

따라서 극한값이 무리수 e인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

09 답 ④

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+b}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{b-a}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{b-a}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{b-a}\times\frac{b-a}{x+a}\times x}$

$x\to\infty$일 때 $\left(1+\dfrac{b-a}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{b-a}}\to e$이고 $\dfrac{b-a}{x+a}\times x\to b-a$

이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{b-a}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{b-a}\times\frac{b-a}{x+a}\times x}=e^{b-a}$

10 답 ②

(주어진 식)$=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left\{\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x-1}\times\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\times2}+\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)$

한편 $x\to\infty$일 때 $\dfrac{2}{x-1}\to0$이므로 위 식에서

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\times2}=\ln e^2=2$이고

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)=0$이므로

(구하는 극한값)$=2+0=2$

11 답 ①

(i) $x-1=h$라 하면 $x\to1$일 때, $h\to0$이고

$x^2-1=(h+1)^2-1=h(h+2)$이므로

$a=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{\ln(1+h)}{h}\times\dfrac{1}{h+2}\right\}$

$=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(ii) $b=\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left\{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right\}^{\frac{x^2}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right\}^{x}=e^0=1$

(iii) $c=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{e^x-1}{x}}{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}=\dfrac{-1}{1}=-1$

$\therefore a+b+c=\dfrac{1}{2}+1+(-1)=\dfrac{1}{2}$

12 답 ③

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^2)^x-\sqrt{e^x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{2x}-1)-(e^{\frac{x}{2}}-1)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times2-\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-1}{\dfrac{x}{2}}\times\dfrac{1}{2}\right)=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

13 답 ①

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(ax+b)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x\left(a+\frac{b}{x}\right)\right)}{\ln x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+\ln\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\ln x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{1+\frac{\ln\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\ln x}\right\}$$

이때, $x\to\infty$일 때 $\ln\left(a+\frac{b}{x}\right)=\ln a$이고 $\ln x\to\infty$이므로

(주어진 식)$=\lim_{x\to\infty}\left\{1+\frac{\ln\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\ln x}\right\}=1+0=1$

14 답 ②

$f(x)=xe^{1-x}$에서

$f'(x)=e^{1-x}+xe^{1-x}\times(-1)=(1-x)e^{1-x}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)e^{1-x}}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{e^{1-x}}{-x-1}=-\frac{1}{2}$

15 답 2

$f(x)=x^2\ln x$에서 $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)=2f'(1)$

이때, $f(x)=x^2\ln x$에서

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x$이므로 $f'(1)=1$

따라서 구하는 극한값은 $2f'(1)=2\times1=2$

16 답 ③

$f(x)=(ax^2+3)e^x$에서

$f'(x)=2axe^x+(ax^2+3)e^x=(ax^2+2ax+3)e^x$

이때, $e^x>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이려면

$ax^2+2ax+3>0$이어야 한다.

(i) $a=0$일 때, $ax^2+2ax+3=3>0$이므로 만족시킨다.

(ii) $a>0$일 때, $ax^2+2ax+3=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=a^2-3a<0$에서 $a(a-3)<0$ $\quad\therefore 0<a<3$

따라서 $f'(x)>0$을 만족시키는 정수 a는 1, 2이다.

(i), (ii)에 의하여 정수 a는 0, 1, 2의 3개이다.

17 답 ③

$\cos B<0$에서 $B>90^\circ$

즉, $0^\circ<A<90^\circ$이므로 $\cos A>0$

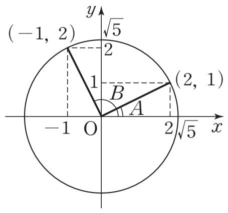
$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{2}{\sqrt5}$, $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{2}{\sqrt5}$

이때, $C=180^\circ-(A+B)$이므로

$\sin C=\sin(180^\circ-(A+B))=\sin(A+B)$
$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$
$=\frac{1}{\sqrt5}\times\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+\frac{2}{\sqrt5}\times\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

[다른 풀이]

삼각함수의 정의에 의하여 각 A, B의 크기는 각각 원점 O와 두 점 $(2, 1)$, $(-1, 2)$를 각각 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기와 같다.



$\therefore B=90^\circ+A$

한편, 삼각형 ABC에서 $C=180^\circ-(A+B)$이므로

$C=90^\circ-2A$

$\therefore \sin C=\sin(90^\circ-2A)=\cos 2A$
$=1-2\sin^2 A=1-2\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

18 답 ④

$\overline{PQ}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=1$이므로

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta=1$

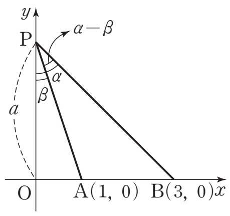
$2-2\cos(\alpha-\beta)=1 \qquad \therefore \cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$

19 답 2

$\mathrm{P}(0, a)$라 하면 $a>0$, $\overline{AP}=\sqrt{a^2+1}$

이때, $\angle OPB=\alpha$, $\angle OPA=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{3}{a}$, $\tan\beta=\frac{1}{a}$이므로



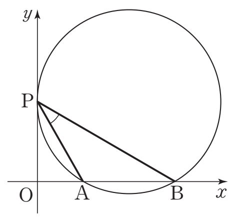
$\tan(\angle APB)=\tan(\alpha-\beta)$
$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$
$=\frac{\frac{3}{a}-\frac{1}{a}}{1+\frac{3}{a^2}}=\frac{2}{a+\frac{3}{a}}\le\frac{2}{2\sqrt3}=\frac{1}{\sqrt3}$

이고 등호는 $a=\frac{3}{a}$, 즉 $a=\sqrt3$일 때 성립하므로 $a=\sqrt3$일 때 $\angle APB$가 최대이다.

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{a^2+1}=2$

[다른 풀이]

그림과 같이 선분 AB를 현으로 하고 y축과 만나는 원 중에서 가장 작은 원으로 접할 때, 즉 점 P에서 y축과 접할 때, $\angle APB$가 최대가 된다.



이때, $\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OP}^2$에서

$1\times3=\overline{OP}^2$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OP}^2}=\sqrt{1+3}=2$

20 답 ③

$f(x)=x^2+2x$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{\sin f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+2\sin x}{\sin(x^2+2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sin x+2)}{\sin(x^2+2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x+2}{x+2}\times\frac{x^2+2x}{\sin(x^2+2x)}\right\}$$

$$=1\times\frac{2}{2}\times 1=1$$

21 답 ⑤

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\ln(x+b)}=2$ ⋯ ㉠에서 $x\to 0$일 때, (분자) $\to 0$이고,

(극한값) $\neq 0$이므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\ln(x+b)=0$에서

$\ln b=0 \qquad \therefore b=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}\times a}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=a=2$$

$\therefore a+b=2+1=3$

22 답 ②

$2x-\pi=t$라 하면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이고

$\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}\right)=\cos\frac{t}{2}$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)^2}{2(1-\sin x)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)}{2\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)}$$

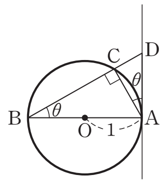
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)}{2\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)}{2\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\times\left(1+\cos\frac{t}{2}\right)\times 4\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times 1^2\times(1+1)\times 4=4$$

23 답 2



직각삼각형 ACB에서

$\overline{AC}=\overline{AB}\sin\theta=2\sin\theta$ ⋯ ㉠

한편, $\angle CAD=\angle CBA=\theta$이므로

직각삼각형 CAD에서

$\overline{CD}=\overline{AC}\tan\theta=2\sin\theta\tan\theta$ ($\because$ ㉠)

$$\therefore \lim_{\theta\to 0}\frac{\overline{CD}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin\theta\tan\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\left(2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right)$$

$$=2\times 1\times 1=2$$

24 답 1

삼각형 POA의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{AP}\times\sin(\angle OPA)=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{OA}\times\sin(\angle OAP)$$

$$\therefore \overline{OP}=\frac{\overline{OA}\times\sin(\angle OAP)}{\sin(\angle OPA)}=\frac{3\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{3\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

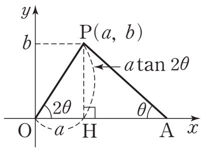
따라서 $a=\overline{OP}\cos 2\theta=\frac{3\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\cos 2\theta$이므로

$$\lim_{\theta\to 0}a=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{3\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\cos 2\theta\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\cos 2\theta\right)$$

$$=1\times 1\times 1=1$$

[다른 풀이]



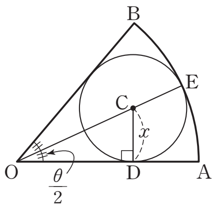
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OHP에서 $b=a\tan 2\theta$이고 직각삼각형 HAP에서 $\overline{HA}=\frac{b}{\tan\theta}$이므로

$$\overline{OA}=\overline{OH}+\overline{HA}=a+a\tan 2\theta\times\frac{1}{\tan\theta}=a\left(1+\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}\right)$$

이때, $\overline{OA}=3$이므로 $a=\frac{3}{1+\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}}$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0}a=\lim_{\theta\to 0}\frac{3}{1+\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}}=\frac{3}{1+2}=1$$

25 답 ⑤



부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하고, 원 C와 선분 OA, 호 AB의 접점을 각각 D, E라 하자.

직각삼각형 OCD에서

$\overline{OC}=\frac{x}{\sin\frac{\theta}{2}}$이므로

$$r=\overline{CE}+\overline{OC}=x+\frac{x}{\sin\frac{\theta}{2}}=x\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

즉, 호 AB의 길이 l은

$l=r\theta=x\left(1+\dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\theta$이므로 $\dfrac{l}{x}=\left(1+\dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{l}{x}=\lim_{\theta\to0+}\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\theta=\lim_{\theta\to0+}\left(\theta+\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\theta+\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times2\right)=0+2=2$$

26 답 ④

$f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$라 하면

$f'(x)=-\sin x$, $g'(x)=\cos x$이므로

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\cos x-\cos\alpha}{\sin x-\sin\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}}{\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}}{\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}}$$

$$=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha$$

27 답 ④

$f(x)=e^x\cos x$에서

$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $e^x(\cos x-\sin x)=0$

이때, $e^x>0$이므로 $\cos x-\sin x=0$에서

$\cos x=\sin x$, $\dfrac{\sin x}{\cos x}=1$ $\quad\therefore \tan x=1$

이때, $0<x<2\pi$이므로 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$

따라서 모든 실근의 합은 $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5}{4}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$이다.

28 답 ②

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$$

한편, $-1\le\sin\dfrac{1}{x}\le1$에서 $-|x|\le x\sin\dfrac{1}{x}\le|x|$

이때, $\lim\limits_{x\to0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to0}|x|=0$이므로 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\therefore f'(0)=0$

29 답 ①

함수 $f(x)$는 $x=e$에서 미분가능하면 모든 실수에서 미분가능하다.

(i) $x=e$에서 미분가능하면 $x=e$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to e-}f(x)=\lim\limits_{x\to e+}f(x)=f(e)$에서 $a^e=\log_a e$ ⋯ ㉠

(ii) $x=e$에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}a^x\ln a & (x<e)\\ \dfrac{1}{x\ln a} & (x>e)\end{cases}$에서 $\lim\limits_{x\to e-}a^x\ln a=\lim\limits_{x\to e+}\dfrac{1}{x\ln a}$

$\therefore a^e\ln a=\dfrac{1}{e\ln a}$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\log_a e\times\ln a=\dfrac{1}{e\ln a}$에서 $\ln a=\dfrac{1}{e}$

$\therefore a=e^{\frac{1}{e}}$

30 답 ②

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=k$가 성립해야 한다.

$$k=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{3^{2x}-1}{2^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3^{2x}-1}{2x}\times2x}{\frac{2^{3x}-1}{3x}\times3x}=\frac{2\ln3}{3\ln2}$$

$$=\frac{2}{3}\log_2 3$$

31 답 ⑤

$(\log_3 x-1)f(x)=x^2-4x+3$에서

$f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{\log_3 x-1}$ (단, $x\ne3$)

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.

$\therefore \lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{\log_3 x-1}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-1)}{\log_3 x-1}$$

이때, $x-3=t$라 하면 $\log_3 x-1=\log_3\left(\dfrac{t}{3}+1\right)$이고

$x\to3$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-1)}{\log_3 x-1}=\lim_{t\to0}\frac{t(t+2)}{\log_3\left(\frac{t}{3}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{3}\times3(t+2)}{\log_3\left(\frac{t}{3}+1\right)}=6\ln3$$

32 답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}f(1)f(2)\times\cdots\times f(n)\right\}^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}\times\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

33 답 ④

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\csc^2 x}=\lim_{x\to0}\{1+(\cos x-1)\}^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\{1+(\cos x-1)\}^{\frac{1}{\cos x-1}\times\frac{-1}{\cos x+1}}$$
$$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e}$$

34 답 ②

$\lim_{x\to0+}2^{\frac{1}{x}}=\infty$, $\lim_{x\to0+}2^{x+1}=2$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{2^{\frac{1}{x}}+a}{2^{\frac{1}{x}}+2^{x+1}}=\lim_{x\to0+}\frac{1+\frac{a}{2^{\frac{1}{x}}}}{1+\frac{2^{x+1}}{2^{\frac{1}{x}}}}=1\ \cdots ㉠$$

또, $\lim_{x\to0-}2^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim_{x\to0-}2^{x+1}=2$이므로 $\lim_{x\to0-}\frac{2^{\frac{1}{x}}+a}{2^{\frac{1}{x}}+2^{x+1}}=\frac{a}{2}$ ⋯ ㉡

극한값이 존재하려면 우극한값과 좌극한값이 같아야 하므로 ㉠, ㉡에서 $1=\frac{a}{2}$ $\quad\therefore a=2$

35 답 ④

$\ln x=A$라 하면 $x>1$에서 $A>0$

$$f(x)=\lim_{h\to0}\frac{A^h-1}{h}=\ln A=\ln(\ln x)$$
$$\therefore f(x^2)-f(x)=\ln(\ln x^2)-\ln(\ln x)=\ln\left(\frac{2\ln x}{\ln x}\right)=\ln 2$$

36 답 10

극한값이 존재하고 $x\to0$일 때, (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to0}\{(x+1)^2-a\}=0$에서 $1-a=0$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^2-1}{e^{bx}-e^x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+2)}{e^{bx}-e^x}=\lim_{x\to0}\frac{bx-x}{e^{bx}-e^x}\times\frac{x(x+2)}{x(b-1)}$$
$$=1\times\frac{2}{b-1}=\frac{1}{4}\qquad\therefore b=9$$

$\therefore a+b=1+9=10$

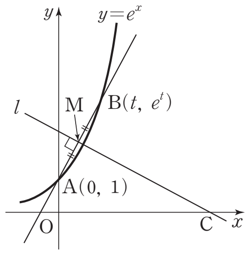
37 답 2

$$f(n)=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}-n}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}-n}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2+\frac{e^{3x}-1}{3x}\times3+\cdots+\frac{e^{nx}-1}{nx}\times n}$$
$$=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}$$
$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

38 답 ②

선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$\left(\frac{t}{2}, \frac{1+e^t}{2}\right)$



선분 AB의 기울기는 $\frac{e^t-1}{t}$이므로

선분 AB의 수직이등분선 l의 기울기는

$\frac{t}{1-e^t}$이다.

따라서 직선 l의 방정식은

$$y-\frac{1+e^t}{2}=\frac{t}{1-e^t}\left(x-\frac{t}{2}\right)$$

이때, 직선 l이 x축과 만나는 점 C의 좌표를 $(p, 0)$이라 하면

$$-\frac{1+e^t}{2}=\frac{t}{1-e^t}\left(p-\frac{t}{2}\right)$$
$$\therefore p=\frac{e^{2t}-1}{2t}+\frac{t}{2}$$

B → A이면 $t\to0$이므로

$$\lim_{t\to0}p=\lim_{t\to0}\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}+\frac{t}{2}\right)=1+0=1$$

따라서 점 B가 점 A에 한없이 가까워지면 점 C는 점 $(1, 0)$에 가까워진다.

39 답 ③

$$S_n=\frac{n+(n+1)}{2}\times\{f(n+1)-f(n)\}$$
$$=\frac{2n+1}{2}\times\{\ln(n+1)-\ln n\}$$
$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n}$$
$$=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n}$$

$n\to\infty$일 때, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$이고 $\frac{n+1}{n}\to1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\ln e+\frac{1}{2}\ln 1=1$$

40 답 ①

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+e^x)-\ln(3-e^x)}{(1+e^x)-(3-e^x)}\times\frac{2(e^x-1)}{x}$$

이때, $f(t)=\ln t$라 하면 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1+e^x)-f(3-e^x)}{(1+e^x)-(3-e^x)}=f'(c)=\frac{1}{c}$$

인 c가 $3-e^x$과 $1+e^x$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

$x\to0$일 때 $(1+e^x)\to2$이고 $(3-e^x)\to2$이므로 $c\to2$

$$\therefore(\text{주어진 식})=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+e^x)-\ln(3-e^x)}{(1+e^x)-(3-e^x)}\times\frac{2(e^x-1)}{x}$$
$$=\lim_{c\to2}\frac{1}{c}\times\lim_{x\to0}\frac{2(e^x-1)}{x}=\frac{1}{2}\times2=1$$

41 답 ④

함수 $f_n(x)$는 모든 실수에서 연속이고 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f_n(2x)-f_n(x)}{2x-x}=f_n'(c)$인 상수 c가 x와 $2x$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

이때, $x \to 0$이면 $c \to 0$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{f_n(2x)-f_n(x)}{x}=\lim_{c\to 0}f_n'(c)=f_n'(0)$

한편, $f_n'(x)=e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}$이므로

$f_n'(0)=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=45$

$n^2+n-90=0$, $(n-9)(n+10)=0$

$\therefore n=9\ (\because n>0)$

42 답 ①

함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 닫힌구간 $[e, e^3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수를 c라 하면 $\frac{f(e^3)-f(e)}{e^3-e}=f'(c)$이고, $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$\frac{\ln e^3-\ln e}{e^3-e}=\frac{2}{e^3-e}=\frac{1}{c}$

$\therefore c=\frac{e^3-e}{2}$

43 답 ④

$y=\ln\sqrt{x}=\ln x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln x$에서

$2y=\ln x$, $e^{2y}=x$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=e^{2x}$ $\quad\therefore g(x)=e^{2x}$

따라서 $g'(x)=2e^{2x}$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=2$

[다른 풀이]

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2=2$$

44 답 ②

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n+1}(\sqrt[n]{x}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n+1}(x^{\frac{1}{n}}-1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\times\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

이때, $\frac{1}{n}=h$라 하면 $n\to\infty$일 때, $h\to 0+$이므로

$f(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{2}{1+h}\times\frac{x^h-1}{h}=2\ln x$

따라서 $f'(x)=\frac{2}{x}$이므로 $f'(2)=1$

45 답 ②

방정식 $\frac{g'(x)}{f'(x)}+\frac{f'(x)}{g'(x)}=2$의 양변에 $f'(x)g'(x)$를 곱하여 정리하면

$\{f'(x)\}^2-2f'(x)g'(x)+\{g'(x)\}^2=0$

$\{f'(x)-g'(x)\}^2=0$

$\therefore f'(x)-g'(x)=0 \cdots$ ㉠

한편, $f(x)-g(x)=e^{2x}-4e^x-6x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-g'(x)=2e^{2x}-4e^x-6 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $2e^{2x}-4e^x-6=0$이므로

$(e^x)^2-2e^x-3=0$, $(e^x-3)(e^x+1)=0$

이때, $e^x>0$이므로 $e^x=3$ $\quad\therefore x=\ln 3$

46 답 ②

$$\tan 20^\circ=\tan(45^\circ-25^\circ)$$
$$=\frac{\tan 45^\circ-\tan 25^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 25^\circ}$$
$$=\frac{1-\tan 25^\circ}{1+\tan 25^\circ}\ (\because \tan 45^\circ=1)$$
$$=\frac{1-a}{1+a}$$

47 답 ④

삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\sin(x+y)\cos y-\cos(x+y)\sin y=\sin(x+y-y)$$
$$=\sin x$$

48 답 ⑤

$$\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\cos 3A}{\cos A}=\frac{\sin 3A\cos A-\cos 3A\sin A}{\sin A\cos A}$$
$$=\frac{\sin(3A-A)}{\sin A\cos A}=\frac{\sin 2A}{\sin A\cos A}$$
$$=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A\cos A}=2$$

49 답 ②

$g\left(\frac{1}{2}\right)=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=a$, $g\left(\frac{1}{3}\right)=f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=b$라 하면

$f(a)=\frac{1}{2}$, $f(b)=\frac{1}{3}$이므로 $\tan a=\frac{1}{2}$, $\tan b=\frac{1}{3}$에서

$0<a<\frac{\pi}{4}$, $0<b<\frac{\pi}{4}$이므로 $0<a+b<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$

$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{3}\right)=a+b=\frac{\pi}{4}$

50 답 4

두 직선 $2x+ay+5=0$, $3x+y+6=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$$\tan\alpha=-\frac{2}{a},\ \tan\beta=-3$$

$$\tan 45^\circ=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{-\frac{2}{a}+3}{1+\frac{6}{a}}\right|=\left|\frac{3a-2}{a+6}\right|=1$$

(ⅰ) $\frac{3a-2}{a+6}<0$일 때, $\frac{3a-2}{a+6}=-1$에서

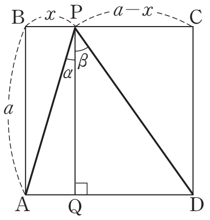
$3a-2=-(a+6)$, $4a=-4$ $\quad\therefore a=-1$

(ⅱ) $\frac{3a-2}{a+6}>0$일 때, $\frac{3a-2}{a+6}=1$에서

$3a-2=a+6$, $2a=8$ $\quad\therefore a=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 양수 a의 값은 4이다.

51 답 ⑤



그림과 같이 $\overline{BP}=x$, $\angle APQ=\alpha$, $\angle DPQ=\beta$라 하면

$\overline{AB}+\overline{BP}=a+x$, $\overline{PD}=\sqrt{(a-x)^2+a^2}$

이때, $\overline{AB}+\overline{BP}=\overline{PD}$에서

$a+x=\sqrt{(a-x)^2+a^2}$

제곱하여 정리하면 $x=\frac{a}{4}$

한편, $\angle APD=\theta=\alpha+\beta$이고

$$\tan\alpha=\frac{x}{a}=\frac{\frac{a}{4}}{a}=\frac{1}{4},\ \tan\beta=\frac{a-x}{a}=\frac{\frac{3}{4}a}{a}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=\frac{16}{13}$$

52 답 ②

$\triangle ABC=\triangle ADC+\triangle BCD$이므로

$$\frac{1}{2}ab\sin 2\theta=\frac{1}{2}\times b\times\overline{CD}\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times a\times\overline{CD}\times\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}ab\times 2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}(a+b)\times\overline{CD}\times\sin\theta$$

$$\overline{CD}(a+b)=2ab\cos\theta$$

$$\therefore \overline{CD}=\frac{2ab}{a+b}\cos\theta$$

53 답 ②

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan 2x}{x}+\frac{\tan 4x}{x}+\cdots+\frac{\tan 10x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\cdots+\frac{\sin 5x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\times\frac{\tan 2x}{2x}+4\times\frac{\tan 4x}{4x}+\cdots+10\times\frac{\tan 10x}{10x}}{\frac{\sin x}{x}+2\times\frac{\sin 2x}{2x}+\cdots+5\times\frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$=\frac{2+4+\cdots+10}{1+2+\cdots+5}=\frac{2(1+2+\cdots+5)}{1+2+\cdots+5}=2$$

54 답 ⑤

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin 2\theta-\sin(n-2)\theta}{\sin 4\theta-\sin(n-4)\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{\sin 2\theta}{\theta}-\frac{\sin(n-2)\theta}{\theta}}{\frac{\sin 4\theta}{\theta}-\frac{\sin(n-4)\theta}{\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times2-\frac{\sin(n-2)\theta}{(n-2)\theta}\times(n-2)}{\frac{\sin 4\theta}{4\theta}\times4-\frac{\sin(n-4)\theta}{(n-4)\theta}\times(n-4)}$$

$$=\frac{2-(n-2)}{4-(n-4)}=\frac{4-n}{8-n}=2$$

즉, $4-n=16-2n$ $\quad\therefore n=12$

55 답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-\cos x}{\ln(1+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(e^{\sin x}-1)+(1-\cos x)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{\ln(1+\sin x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}+\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)\times\frac{\sin x}{\ln(1+\sin x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left\{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}+\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}\right\}\times\frac{\sin x}{\ln(1+\sin x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\times\frac{\sin x}{\ln(1+\sin x)}\right\}$$

$$=(1+0)\times1=1$$

56 답 ⑤

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=1$ ⋯ ㉠에서

$x\to\frac{\pi}{2}$일 때, (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$에서 $\frac{\pi}{2}a+b=0$ $\quad\therefore b=-\frac{\pi}{2}a$ ⋯ ㉡

㉠에 ㉡을 대입하고 $x-\frac{\pi}{2}=t$라 하면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}=\lim_{t\to0}\frac{at}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{at}{-\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{(-a)\times\frac{t}{\sin t}\right\}=-a=1$$

따라서 $a=-1$, $b=\frac{\pi}{2}$ ($\because$ ㉡)이므로 $ab=-\frac{\pi}{2}$

57 답 ②

$\tan\alpha=\frac{1}{t}$, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{t}$에서

$$\tan\beta=\tan((\alpha+\beta)-\alpha)=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{3}{t}-\frac{1}{t}}{1+\frac{3}{t}\times\frac{1}{t}}=\frac{2t}{t^2+3}$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{2t}{t^2+3}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+3}{2t^2}=\frac{1}{2}$$

58 답 ⑤

$\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$에서 $\frac{2\pi}{n}=t$라 하면 $n=\frac{2\pi}{t}$

$n\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{2\pi}{t}\right)^2(1-\cos t)$$

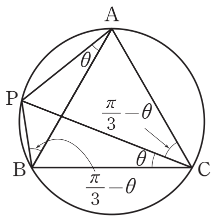
$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi^2(1-\cos t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi^2(1-\cos^2 t)}{t^2(1+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{4\pi^2}{1+\cos t}\times\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)$$

$$=\frac{4\pi^2}{1+1}\times 1^2=2\pi^2$$

59 답 ①



삼각형 APB에서

$\angle PAB=\theta$이므로

$\angle PCB=\theta$,

$\angle PBA=\angle PCA=\frac{\pi}{3}-\theta$,

$\angle BPA=\frac{2}{3}\pi$

이때, 삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이가 1이므로 사인법칙에 의하여 $\overline{BP}=2\sin\theta$, $\overline{AB}=2\sin\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3}$

$\overline{AP}=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$

따라서

$$\frac{\overline{AB}-\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\sqrt{3}-(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)}{2\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{2\sin\theta}+\frac{1}{2}$$

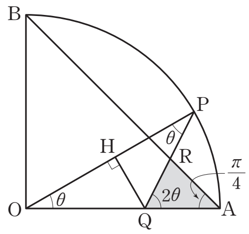
이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{AB}-\overline{AP}}{\overline{BP}}=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{2\sin\theta}+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\sqrt{3}(1-\cos^2\theta)}{2\sin\theta(1+\cos\theta)}+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

60 답 ③



점 Q에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 OQP는 $\overline{PQ}=\overline{OQ}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{OH}=\frac{1}{2}\overline{OP}=1$, $\angle OPQ=\angle POQ=\theta$이고

$\angle PQA=2\theta$, $\angle ARQ=\frac{3}{4}\pi-2\theta$

이때, $\overline{OQ}=\sec\theta$이므로

$\overline{QA}=\overline{OA}-\overline{OQ}=2-\sec\theta$

삼각형 AQR에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{QR}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\overline{QA}}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-2\theta\right)}$$

따라서

$$\overline{QR}=\frac{2-\sec\theta}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-2\theta\right)}\times\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{2-\sec\theta}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-2\theta\right)}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{QA}\times\overline{QR}\times\sin 2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{(2-\sec\theta)^2}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-2\theta\right)}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sin 2\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{(2-\sec\theta)^2}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-2\theta\right)}\times\sin 2\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{(2-\sec\theta)^2}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-2\theta\right)}\times\frac{\sin 2\theta}{\theta}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{(2-\sec\theta)^2}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-2\theta\right)}\times\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times 2\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{(2-1)^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\times 1\times 2=1$$

61 답 ①

$f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$에서

$f'(x)=2(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos 2x$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}-2h\right)}{h}=3f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\times 2\cos\frac{2}{3}\pi=-3$$

62 답 ②

$x \neq 0$에서 $f(x)$는 연속이므로 $x=0$에서 연속이면 모든 실수 x에서 함수 $f(x)$는 연속이 된다. 즉, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$이어야 한다.

$\therefore p = f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - a\cos x}{x^2}$

이때, $x \to 0$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x \to 0}(1 - a\cos x) = 0$에서 $1 - a = 0$ $\quad \therefore a = 1$

$\therefore p = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1+\cos x}\right) = \frac{1}{2}$

63 답 4

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 되려면

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = f(0)$이 성립해야 한다.

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{ax}{e^{2x}-1} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x}{e^{2x}-1} \times \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ ⋯ ㉠이고

$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{\ln(b-e^x)}{x}$의 값이 $\frac{a}{2}$로 존재한다.

이때, $x \to 0-$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 0-} \ln(b-e^x) = \ln(b-1) = 0$에서 $b=2$

$\therefore \lim_{x \to 0-} \frac{\ln(2-e^x)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{\ln\{1+(1-e^x)\}}{1-e^x} \times \frac{1-e^x}{x}$

$= 1 \times (-1) = -1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x)$에서

$\frac{a}{2} = -1 \quad \therefore a = -2$

또, $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = f(0)$에서 $c = -1$

$\therefore abc = (-2) \times 2 \times (-1) = 4$

64 답 3

$g(x) = f(x)e^{x-1} - x$라 하면

$g'(x) = f'(x)e^{x-1} + f(x)e^{x-1} - 1$ ········ ⓐ

또한, $g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$이므로

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)e^{x-1} - x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1)$ ········ ⓑ

따라서 구하는 극한값은

$g'(1) = f'(1) + f(1) - 1 = 3 + 1 - 1 = 3$ ········ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $g(x)=f(x)e^{x-1}-x$라 하고 $g'(x)$를 구한다.	[30%]
ⓑ $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)e^{x-1}-x}{x-1}$를 간단히 한다.	[40%]
ⓒ $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)e^{x-1}-x}{x-1}$의 값을 구한다.	[30%]

65 답 6

$A+B+C=\pi$에서 $C=\pi-(A+B)$이므로 ········ ⓐ

$\tan C = \tan(\pi-(A+B)) = -\tan(A+B)$

$= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ ········ ⓑ

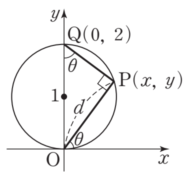
에서 $\tan C - \tan A \tan B \tan C = -\tan A - \tan B$

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C = 6$ ········ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ C를 A와 B에 대한 식으로 나타낸다.	[20%]
ⓑ $\tan C$를 $\tan A$와 $\tan B$에 대한 식으로 나타낸다.	[40%]
ⓒ $\tan A + \tan B + \tan C$의 값을 구한다.	[40%]

66 답 2



위의 그림에서 점 Q(0, 2)에 대하여

$\angle OPQ = 90°$이고 $\angle OQP = \theta$이므로 직각삼각형 OPQ에서

$d = \overline{OP} = \overline{OQ}\sin\theta = 2\sin\theta$ ········ ⓐ

$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{d}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\sin\theta}{\theta} = 2$ ········ ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ $\overline{OP}$의 길이 d를 θ에 대하여 나타낸다.	[60%]
ⓑ $\lim_{\theta \to 0+} \frac{d}{\theta}$의 값을 구한다.	[40%]

67 답 ②

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \to \infty} \left\{ f(x)\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) \times \frac{1}{x-3} \times \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)} \right\}$

$= \lim_{x \to \infty} \left\{ f(x)\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) \times \frac{2x}{x-3} \times \frac{\frac{1}{2x}}{\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)} \right\}$

$= \lim_{x \to \infty} f(x)\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) \times \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-3}$

$\times \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{2x}}{\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}$

$= 4 \times 2 \times 1 = 8$

[다른 풀이]

$\lim_{x \to \infty} \left\{ f(x)\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) \right\} = \lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{f(x)}{2x} \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} \right\} = 4$에서

$\lim_{x \to \infty} \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} = 1$이므로 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{2x} = 4$

$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{2x} \times \frac{2x}{x-3} = 8$

68 답 ①

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$에서

$\frac{5}{7}=\frac{4}{7}-\sin\alpha\sin\beta$ $\quad\therefore \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{7}$

69 답 ②

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} & (x\neq 0,\ x>-1)\\ 8b & (x=0)\end{cases}$$

이때, 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$ $\quad\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b$ ⋯ ㉠

한편, $x\to 0$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(x^2+ax+b)=0$에서 $b=0$

이것을 ㉠에 대입하면 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=0$에서

$\lim_{x\to 0}\frac{x+a}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=\frac{a}{1}=0$ $\quad\therefore a=0$

따라서 $f(x)=x^2$이므로 $f(3)=3^2=9$

70 답 ①

점 P의 좌표를 $(a, \ln a)(a>0)$라 하면 점 P는 직선 $x+y=t$ 위의 점이므로 $a+\ln a=t$에서 $\ln ae^a=t$

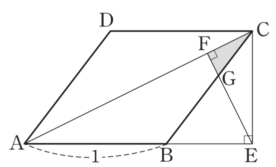
$\therefore ae^a=e^t$

한편, 점 Q의 좌표는 (a, e^a)이므로 삼각형 OHQ의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{HQ}=\frac{1}{2}\times a\times e^a=\frac{1}{2}ae^a=\frac{1}{2}e^t$

$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{2S(t)-1}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{e^t-1}{t}=1$

71 답 ③



직각삼각형 BEC에서 $\overline{BC}=1$, $\angle CBE=\angle DAB=\theta$이므로 $\overline{CE}=\overline{BC}\sin\theta=\sin\theta$

한편, $\angle CEF=\angle CAB=\angle BCA=\frac{\theta}{2}$이므로

직각삼각형 CFE에서 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{CF}}{\overline{CE}}$

$\therefore \overline{CF}=\overline{CE}\sin\frac{\theta}{2}=\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}$

또, 직각삼각형 CFG에서 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{FG}}{\overline{CF}}$

$\therefore \overline{FG}=\overline{CF}\tan\frac{\theta}{2}=\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$

따라서 직각삼각형 CFG의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{FG}=\frac{1}{2}\times\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}{2\theta^5}$$

$$=\frac{1}{16}\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{16}\times 1^2\times 1^2\times 1=\frac{1}{16}$$

72 답 ⑤

ㄱ. $g(x)=xf(x)+1$이라 하면 $g(0)=1$이므로

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{hf(h)}{h}=\lim_{h\to 0}f(h)=f(0)$$

따라서 함수 $y=xf(x)+1$은 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $g(x)=e^{xf(x)+1}$이라 하면 $g(0)=e$이므로

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-e}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{hf(h)+1}-e}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e\{e^{hf(h)}-1\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{e\times\frac{e^{hf(h)}-1}{hf(h)}\times f(h)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{e\times\frac{e^{hf(h)}-1}{hf(h)}\right\}\times\lim_{h\to 0}f(h)$$

$$=e\times 1\times f(0)$$

$$=ef(0)$$

따라서 함수 $y=e^{xf(x)+1}$은 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $g(x)=\ln[\{xf(x)\}^2+1]$이라 하면 $g(0)=0$이므로

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln[\{hf(h)\}^2+1]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\ln[\{hf(h)\}^2+1]}{\{hf(h)\}^2}\times\frac{\{hf(h)\}^2}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln[\{hf(h)\}^2+1]}{\{hf(h)\}^2}\times\lim_{h\to 0}h\{f(h)\}^2$$

$$=1\times 0=0$$

즉, 함수 $y=\ln[\{xf(x)\}^2+1]$은 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

73 답 ②

조건 (가)에서 주어진 등식의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)\qquad \therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{e^{-h}f(x)+e^{-x}f(h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{(e^{-h}-1)f(x)}{h}+e^{-x}\times\frac{f(h)}{h}\right\}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{e^{-h}-1}{-h}\times\{-f(x)\}+e^{-x}\times\frac{f(h)-f(0)}{h}\right\}\\&\qquad\qquad(\because f(0)=0)\\&=-f(x)+e^{-x}\times f'(0)\\&=e^{-x}-f(x)\ (\because \text{조건 (나)})\end{aligned}$$

74 답 1

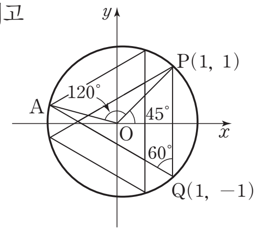
$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\times\frac{a_n}{n}}=\sqrt{e}$이므로

양변에 자연로그를 취하면

$$\frac{a_n}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\qquad\therefore a_n=\frac{\frac{1}{2}n}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{n+1}&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{n+1}\times\frac{\frac{1}{2}n}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right\}\\&=1\times1=1\end{aligned}$$

75 답 ②



$\angle AQP=60^\circ$이므로 $\angle AOP=120^\circ$이고 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 45°이므로 동경 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $45^\circ+120^\circ$이다.

따라서 점 A의 y좌표는

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\sin(45^\circ+120^\circ)\\&=\sqrt{2}(\sin45^\circ\cos120^\circ+\cos45^\circ\sin120^\circ)\\&=\sqrt{2}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\\&=\sqrt{2}\times\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{aligned}$$

76 답 ④

조건 (가)의 $f(x+1)=f(x-1)$에서 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x+2)=f(x)$

따라서 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이고, $f(x)$가 실수 전체에서 연속인 함수이므로 $x=0,\ x=1$에서도 연속이다.

즉, $f(1)=f(-1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{ax^2+b}=-1\ \cdots\ ㉠$$

이때, $x\to1-$일 때, 극한값이 0이 아니고 (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1-}(ax^2+b)=0$에서

$a+b=0\qquad\therefore b=-a$

한편, $x-1=t$라 하면 $x=t+1$이고 $x\to1-$일 때 $t\to0-$이므로 $b=-a$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{ax^2-a}&=\lim_{t\to0-}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)}{at(t+2)}\\&=\lim_{t\to0-}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}t}{at(t+2)}\\&=\lim_{t\to0-}\left\{\frac{-\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\times\frac{\frac{\pi}{2}}{a(t+2)}\right\}\\&=(-1)\times\frac{\pi}{4a}\\&=-\frac{\pi}{4a}=-1\end{aligned}$$

$\therefore a=\frac{\pi}{4}$

또한, $f(0)=m-1$에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}f(x)&=\lim_{x\to0+}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{a(x^2-1)}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{4}(x^2-1)}=\frac{1}{-\frac{\pi}{4}}\\&=-\frac{4}{\pi}=m-1\end{aligned}$$

$\therefore m=1-\frac{4}{\pi}$

77 답 14

$$\frac{\tan^n x-\sin^n x}{x^m}$$

$$=\frac{\frac{\sin^n x}{\cos^n x}-\sin^n x}{x^m}=\frac{\sin^n x-\sin^n x\cos^n x}{x^m\cos^n x}$$

$$=\frac{\sin^n x}{x^n}\times\frac{1-\cos^n x}{x^{m-n}\cos^n x}$$

$$=\frac{\sin^n x}{x^n}\times\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^{n-1} x)}{x^{m-n}\cos^n x}$$

$$=\frac{\sin^n x}{x^n}\times\frac{(1-\cos^2 x)(1+\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^{n-1} x)}{x^{m-n}\cos^n x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{\sin^n x}{x^n}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1+\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^{n-1} x}{\cos^n x(1+\cos x)}\times\frac{1}{x^{m-n-2}}$$

한편, $x\to0$일 때, $\frac{\sin^n x}{x^n}\to1$, $\frac{\sin^2 x}{x^2}\to1$,

$\frac{1+\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^{n-1} x}{\cos^n x(1+\cos x)}\to\frac{n}{2}$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^n x-\sin^n x}{x^m}=3$이려면 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^{m-n-2}}$이 0이 아닌 값으로 수렴해야 한다.

이때, $m-n-2>0$이면 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^{m-n-2}}$은 발산하고, $m-n-2<0$

이면 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^{m-n-2}}=0$이므로 $m-n-2=0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^{m-n-2}}=1$이고 $m=n+2$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan^n x-\sin^n x}{x^m}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin^n x}{x^n}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1+\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^{n-1} x}{\cos^n x(1+\cos x)}\times\frac{1}{x^{m-n-2}}\right\}$$

$$=\frac{n}{2}=3$$

따라서 $n=6$, $m=8$이므로 $m+n=8+6=14$

04 여러 가지 미분법

문제편 49P

01 답 5

$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=-f(x)$이므로

$h(x)=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$에서

$$h'(x)=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)$$
$$=2f(x)g(x)+2g(x)\{-f(x)\}=0$$

$\therefore h(x)=c$ (c는 상수)

이때, $h(5)=5$이므로 $c=5$

따라서 $h(x)=5$이므로 $h(10)=5$

02 답 ①

$f(x)=\tan x$에서 $f'(x)=\sec^2 x$

$$f'(\alpha)+f'(\beta)=\sec^2\alpha+\sec^2\beta=(1+\tan^2\alpha)+(1+\tan^2\beta)$$
$$=2$$

$\therefore \tan^2\alpha+\tan^2\beta=0$

이때, $\tan\alpha$, $\tan\beta$는 실수이고 $(\text{실수})^2\ge0$이므로

$\tan\alpha=\tan\beta=0$

$\therefore f(\alpha)f(\beta)=\tan\alpha\tan\beta=0$

03 답 ①

$f(x)=x^x$의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln f(x)=x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+1$

$\therefore f'(x)=f(x)(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

이때, $y=e^{f(x)}$에서 $y'=e^{f(x)}f'(x)$이므로

$y'=e^{x^x}\times x^x(\ln x+1)$

04 답 ④

$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\times2t}{(1+t^2)^2}=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}$

$y=\frac{2t}{1+t^2}$에서 $\frac{dy}{dt}=\frac{2(1+t^2)-2t\times2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}}{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}}=\frac{t^2-1}{2t}$$

05 답 1

$x^2+3y^2=4xy$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+6y\frac{dy}{dx}=4y+4x\frac{dy}{dx}$에서 $(4x-6y)\frac{dy}{dx}=2x-4y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x-2y}{2x-3y}$ $(2x\ne3y)$ ⋯ ㉠

따라서 곡선 $x^2+3y^2=4xy$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

㉠에 $x=1$, $y=1$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2\times1}{2\times1-3\times1}=1$

06 답 ②

$y=\sqrt[3]{(x+1)(x^2+1)}$에서 $y^3=(x+1)(x^2+1)$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3y^2\dfrac{dy}{dx}=(x^2+1)+(x+1)\times 2x=3x^2+2x+1$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2+2x+1}{3y^2}=\dfrac{3x^2+2x+1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2(x^2+1)^2}}$ ⋯ ㉠

따라서 함수 $y=\sqrt[3]{(x+1)(x^2+1)}$의 $x=0$에서의 미분계수는

㉠에 $x=0$을 대입하면 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3}$

07 답 1

$f(2f^{-1}(x)-x)=x$ ⋯ ㉠, $f(f^{-1}(x))=x$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $2f^{-1}(x)-x=f^{-1}(x)$ $\quad\therefore f^{-1}(x)=x$

즉, $f(x)=x$이므로 $f'(x)=1$ $\quad\therefore f'(1)=1$

08 답 41

$y=e^{2x}\sin x$ ⋯ ㉠에서

$y'=2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x=e^{2x}(2\sin x+\cos x)$ ⋯ ㉡

$y''=2e^{2x}(2\sin x+\cos x)+e^{2x}(2\cos x-\sin x)$

$\quad=e^{2x}(3\sin x+4\cos x)$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 $y''+ay'+by=0$에 대입하면

$e^{2x}(3\sin x+4\cos x)+ae^{2x}(2\sin x+\cos x)+be^{2x}\sin x=0$

$(3\sin x+4\cos x)+a(2\sin x+\cos x)+b\sin x=0(\because e^{2x}>0)$

$\therefore (2a+b+3)\sin x+(a+4)\cos x=0$

위 식이 모든 x에 대하여 성립하므로

$2a+b+3=0$, $a+4=0$ $\quad\therefore a=-4$, $b=5$

$\therefore a^2+b^2=16+25=41$

09 답 ④

$h(x)=f(g(x))$라 하면 $h(1)=f(g(1))=f(1)=-2$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(g(x))+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$

이때, $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(1)g'(1)=3\times2=6$

10 답 ②

$f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-(x^2+3)\times1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

이때, $f'(x)\le0$에서 $\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\le0$

$x\ne-1$이므로 양변에 $(x+1)^2$을 곱하면

$x^2+2x-3\le0$, $(x-1)(x+3)\le0$

$\therefore -3\le x<-1$ 또는 $-1<x\le1$

따라서 부등식 $f'(x)\le0$을 만족시키는 정수 x는 -3, -2, 0, 1의 4개이다.

11 답 ③

$g(x)=\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}^2$에서

$g'(x)=2\times\dfrac{f(x)}{x}\times\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}'$

$\quad=2\times\dfrac{f(x)}{x}\times\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

$\therefore g'(2)=2\times\dfrac{f(2)}{2}\times\dfrac{2f'(2)-f(2)}{2^2}$

$\quad=2\times\dfrac{4}{2}\times\dfrac{2\times5-4}{4}=6$

12 답 ①

$f(x)=x^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln f(x)=(\ln x)^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2\ln x}{x}$

$\therefore f'(x)=f(x)\times\dfrac{2\ln x}{x}$

이때, $y=e^{f(x)}$에서 $y'=e^{f(x)}f'(x)$이므로 구하는 도함수는

$y'=e^{f(x)}\times f(x)\times\dfrac{2\ln x}{x}$

13 답 ⑤

$f(x)=x^{\sqrt{x}}$의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln f(x)=\sqrt{x}\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times\ln x+\sqrt{x}\times\dfrac{1}{x}$

$\therefore f'(x)=x^{\sqrt{x}}\times\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$

따라서 부등식 $f'(x)>0$의 해는

$\ln x+2>0(\because \sqrt{x}>0,\ x^{\sqrt{x}}>0)$에서

$\ln x>-2$, $\ln x>\ln e^{-2}$ $\quad\therefore x>\dfrac{1}{e^2}$

14 답 ②

$g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x-2)}{x+3}}$, $h(x)=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+3}}$라 하면

$f(x)=g(x)-h(x)$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=g'(x)-h'(x)$

(i) $g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x-2)}{x+3}}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln|g(x)|=\dfrac{1}{3}(\ln|x+1|+\ln|x-2|-\ln|x+3|)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$\therefore g'(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}\right)g(x)$

$\therefore g'(0)=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)g(0)=-\dfrac{1}{18}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

(ii) $h(x)=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+3}}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln|h(x)|=\dfrac{1}{3}(\ln|x-1|+\ln|x+2|-\ln|x+3|)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{h'(x)}{h(x)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$\therefore h'(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)h(x)$

$\therefore h'(0)=\dfrac{1}{3}\left(-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)h(0)=\dfrac{5}{18}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

$\therefore f'(0)=g'(0)-h'(0)=-\dfrac{1}{18}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}-\dfrac{5}{18}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

$=-\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}=-\dfrac{\sqrt[3]{18}}{9}$

15 답 ⑤

주어진 곡선 위의 점 $(3, 0)$은 $t=1$일 때이므로 점 $(3, 0)$에서의 접선의 기울기는 $t=1$일 때의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이다.

$\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=6t^2-1$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{6t^2-1}{2t}(t\neq0)$ ⋯ ㉠

따라서 구하는 접선의 기울기는 ㉠에 $t=1$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6\times1^2-1}{2}=\dfrac{5}{2}$

16 답 18

$x=2\sqrt{t}+\dfrac{3}{t}$에서 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{2\sqrt{t}}-\dfrac{3}{t^2}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\dfrac{3}{t^2}$

$y=2\sqrt{t}-\dfrac{5}{t}$에서 $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2}{2\sqrt{t}}+\dfrac{5}{t^2}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\dfrac{5}{t^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{5}{t^2}}{\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{3}{t^2}}=\dfrac{t^2+5\sqrt{t}}{t^2-3\sqrt{t}}$ ⋯ ㉠

따라서 주어진 함수의 $t=4$일 때의 미분계수는 ㉠에 $t=4$를 대입하면 $\dfrac{16+10}{16-6}=\dfrac{13}{5}$

즉, $p=5$, $q=13$이므로 $p+q=18$

17 답 ③

$\dfrac{dx}{dt}=t^2-4$, $\dfrac{dy}{dt}=2t^2+2t-12$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t^2+2t-12}{t^2-4}$이므로

$\displaystyle\lim_{t\to2}\dfrac{dy}{dx}=\lim_{t\to2}\dfrac{2t^2+2t-12}{t^2-4}=\lim_{t\to2}\dfrac{2(t-2)(t+3)}{(t-2)(t+2)}$

$\displaystyle=\lim_{t\to2}\dfrac{2(t+3)}{t+2}=\dfrac{2\times(2+3)}{2+2}=\dfrac{5}{2}$

18 답 ②

$e^y\ln x=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^y\dfrac{dy}{dx}\times\ln x+e^y\times\dfrac{1}{x}=0$, $e^y\dfrac{dy}{dx}\times\ln x=-\dfrac{e^y}{x}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x\ln x}$ ⋯ ㉠

따라서 곡선 $e^y\ln x=1$ 위의 점 $(e, 0)$에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $x=e$, $y=0$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{e\ln e}=-\dfrac{1}{e}$

19 답 ②

$y^3=\ln(10-x^2)+xy^2+4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3y^2\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x}{10-x^2}+y^2+x\times2y\dfrac{dy}{dx}$

$(3y^2-2xy)\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{10-x^2}+y^2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{(10-x^2)(3y^2-2xy)}+\dfrac{y^2}{3y^2-2xy}$ ⋯ ㉠

따라서 곡선 $y^3=\ln(10-x^2)+xy^2+4$ 위의 점 $(-3, 1)$에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $x=-3$, $y=1$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2\times(-3)}{\{10-(-3)^2\}\{3\times1^2-2\times(-3)\times1\}}+\dfrac{1^2}{3\times1^2-2\times(-3)\times1}$

$=\dfrac{7}{9}$

20 답 ③

$x^2+xy+y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+y+x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$(x+2y)\dfrac{dy}{dx}=-2x-y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x-y}{x+2y}$ ⋯ ㉠

따라서 곡선 $x^2+xy+y^2=1$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $x=1$, $y=0$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2\times1-0}{1+2\times0}=-2$

21 답 ②

$g(b+h)=k$라 하면 $f(k)=b+h$

$\therefore h=f(k)-b=f(k)-f(a)$

한편, $h\to0$일 때 $k\to a$이므로

$\displaystyle\lim_{h\to0}\dfrac{g(b+h)-g(b)}{h}=\lim_{k\to a}\dfrac{k-a}{f(k)-f(a)}$

$\displaystyle=\lim_{k\to a}\dfrac{1}{\frac{f(k)-f(a)}{k-a}}=\dfrac{1}{f'(a)}$

22 답 ①

$x=\ln(\sin y)$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\cos y}{\sin y}=\cot y=\frac{1}{\tan y}$$

또, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\tan y$

이때, $0<y<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan y>0$이므로

$$\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dy}=\tan y+\frac{1}{\tan y}\geq 2\sqrt{\tan y\times\frac{1}{\tan y}}=2$$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dx}{dy}$의 최솟값은 $\tan y=\dfrac{1}{\tan y}$에서 $\tan y=1$,

즉 $y=\frac{\pi}{4}$일 때, 2이다. $\quad\therefore m=2$

$$\therefore n=\ln\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\therefore mn=2\times\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)=-\ln 2$$

23 답 1

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(g(x))g'(x)=1$

$x=0$일 때 $f'(g(0))g'(0)=1$

$$\therefore g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}$$

한편, $f(0)=0$에서 $g(0)=0$이고

$$f'(x)=\sqrt{1+x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{1+x}}$$

에서 $f'(0)=1$이므로

$$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(0)}=1$$

24 답 ③

$y=\dfrac{2x}{x^2+1}$에서

$$y'=2\times\frac{(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$y''=2\times\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

따라서 방정식 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=y''=0$에서

$$\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=0,\ 4x(x^2-3)=0$$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

따라서 구하는 양수 x의 값은 $\sqrt{3}$이다.

25 답 ③

$$f^{(1)}(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$$

$$=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f^{(2)}(x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}e^x\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=(\sqrt{2})^2e^x\sin\left(x+\frac{2}{4}\pi\right)$$

같은 방법으로

$$f^{(3)}(x)=(\sqrt{2})^3e^x\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^ne^x\sin\left(x+\frac{n}{4}\pi\right)$$

$$\therefore f^{(50)}(0)=(\sqrt{2})^{50}e^0\sin\frac{50}{4}\pi=2^{25}\sin\frac{\pi}{2}=2^{25}$$

일등급 UP

$*\,f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^ne^x\sin\left(x+\frac{n}{4}\pi\right)$임을 수학적 귀납법으로 증명하자.

(i) $n=1$일 때, 위의 풀이에서

$$f^{(1)}(x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

(ii) $n=k$일 때, $f^{(k)}(x)=(\sqrt{2})^ke^x\sin\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)$라 가정하면

$$f^{(k+1)}(x)=(\sqrt{2})^ke^x\sin\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)+(\sqrt{2})^ke^x\cos\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)$$

$$=(\sqrt{2})^ke^x\left\{\sin\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)+\cos\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)\right\}$$

$$=(\sqrt{2})^{k+1}e^x\sin\left(x+\frac{k+1}{4}\pi\right)$$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^ne^x\sin\left(x+\frac{n}{4}\pi\right)$이다.

26 답 ②

조건 (나)에서 $x\to 1$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to 1}\{f'(f(x))-1\}=f'(f(1))-1=0$이므로

$f'(f(1))=1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$$

$$=f''(f(1))f'(1)=f''(3)\times 2=4$$

$\therefore f''(3)=2$

27 답 ②

$f(x)=\frac{2}{x-1}$에서 $f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$이므로

$f'(a)=f'(b)$에서

$-\frac{2}{(a-1)^2}=-\frac{2}{(b-1)^2}$, $(a-1)^2=(b-1)^2$

$\therefore a-1=\pm(b-1)$

(i) $a-1=b-1$에서 $a=b$

그런데 a, b는 서로 다른 실수이므로 모순이다.

(ii) $a-1=-(b-1)$에서 $a+b=2$

$\therefore a+b=2$

28 답 ①

$e^{-k\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x^k}}=\frac{1}{x^k}$이므로 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k\ln x}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^k}$

이때, $x>1$에서 $0<\frac{1}{x}<1$이므로 함수 $f(x)$는 첫째항이 $\frac{1}{x}$이고

공비가 $\frac{1}{x}$인 등비급수의 합이다.

따라서 $f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x-1}$이므로 $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$

$\therefore f'(2)=-1$

29 답 ④

$y=u^{-3}$에서 $\frac{dy}{du}=-3u^{-4}$ ←(가)

$u=1+\{f(x)\}^2$에서 $\frac{du}{dx}$ ←(나) $=2f(x)\times f'(x)$ ←(다)

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{-6f(x)}{[1+\{f(x)\}^2]^4}\times f'(x)$

30 답 6

$f(x)=3x^2+2x+1$에서 $f'(x)=6x+2$

$\therefore f(0)=1,\ f'(0)=2$

$p(x)=(h\circ g\circ f)(x)=h(g(f(x)))$에서

$p'(x)=h'(g(f(x)))g'(f(x))f'(x)$이므로

$p'(0)=h'(g(f(0)))g'(f(0))f'(0)=h'(g(1))g'(1)\times 2=12$

$\therefore h'(g(1))g'(1)=6$

31 답 3

$f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^{10}$에서

$f'(x)=10(x+\sqrt{1+x^2})^9(x+\sqrt{1+x^2})'$

$=10(x+\sqrt{1+x^2})^9\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=\frac{10}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})^{10}=\frac{10}{\sqrt{1+x^2}}\times f(x)$

$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{10}{\sqrt{1+x^2}}$

한편, $\frac{f'(a)}{f(a)}=5$에서 $\frac{10}{\sqrt{1+a^2}}=5$

$\sqrt{1+a^2}=2$, $1+a^2=4$, $a^2=3$

$\therefore k^2=3$

32 답 ②

$f(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$에서

$f'(x)=\frac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$

$=\frac{\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin^2 x}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}$

$=\frac{1}{1+2\sin x\cos x}$

$=\frac{1}{1+\sin 2x}$

이때, $-1\le\sin 2x\le 1$에서 $0\le 1+\sin 2x\le 2$이므로

$\frac{1}{1+\sin 2x}\ge\frac{1}{2}$

따라서 $f'(x)$의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

33 답 ④

$f(x)=\tan^2 x$라 하면 $f'(x)=2\tan x\sec^2 x$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-\tan^2\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-h}\times(-1)$

$=2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\times\left(2\tan\frac{\pi}{3}\sec^2\frac{\pi}{3}\right)$

$=16\sqrt{3}$

34 답 3

$\ln(2+f(x))-xf(x)=\ln 3$ ⋯ ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{2+f(x)}-f(x)-xf'(x)=0$ ⋯ ㉡

㉠에 $x=0$을 대입하면 $\ln(2+f(0))=\ln 3$

$2+f(0)=3$

$\therefore f(0)=1$

또, ㉡에 $x=0$을 대입하면

$\frac{f'(0)}{2+f(0)}-f(0)-0\times f'(0)=0$

$\frac{f'(0)}{3}-1=0$

$\therefore f'(0)=3$

35 답 ⑤

$f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\dfrac{1}{2}\{\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)\}$

이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sin x}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$$

36 답 ④

$f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x+2)^2(x-1)}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=3\ln|x+1|-2\ln|x+2|-\ln|x-1|$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-1}$$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2}\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

37 답 ①

톱니바퀴 A, B, C의 반지름의 길이를 각각 $5r$, $2r$, $3r$라 하면 각 톱니바퀴의 (회전수)×(원주의 길이)는 같아야 하므로

$10\pi rt=4\pi rx=6\pi ry$에서 $x=\dfrac{5}{2}t$, $y=\dfrac{5}{3}t$

즉, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{5}{3}$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{2}{3}$

38 답 ①

양쪽 릴의 필름의 부피의 합은 항상 일정하다.

필름의 폭을 d, 전체 부피를 V라 하면 $V=(\pi {r_1}^2+\pi {r_2}^2)d$

양변을 시각 t에 대하여 미분하면

$$2\pi r_1\frac{dr_1}{dt}+2\pi r_2\frac{dr_2}{dt}=0$$

$$\therefore \frac{dr_2}{dr_1}=\frac{\frac{dr_2}{dt}}{\frac{dr_1}{dt}}=-\frac{r_1}{r_2}$$

39 답 ①

$\varPhi$와 s를 매개변수 θ로 나타내면

$\varPhi=\theta+\dfrac{\pi}{2}$, $s=r\theta$에서 $\dfrac{d\varPhi}{d\theta}=1$, $\dfrac{ds}{d\theta}=r$이므로

$$\frac{ds}{d\varPhi}=\frac{\frac{ds}{d\theta}}{\frac{d\varPhi}{d\theta}}=\frac{r}{1}=r$$

40 답 ④

$x=2\cos^3\theta$에서

$$\frac{dx}{d\theta}=2\times3\cos^2\theta(-\sin\theta)=-6\cos^2\theta\sin\theta$$

$y=2\sin^3\theta$에서

$$\frac{dy}{d\theta}=2\times3\sin^2\theta\cos\theta=6\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{6\sin^2\theta\cos\theta}{-6\cos^2\theta\sin\theta}=-\tan\theta$$

따라서 주어진 그래프 중에서 함수 $f(\theta)=-\tan\theta$의 그래프의 개형을 나타내는 것은 ④이다.

41 답 ③

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=1$에서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$2\sin x\cos y=1$

$\therefore \sin x\cos y=\dfrac{1}{2}$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\cos x\cos y+\sin x(-\sin y)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\cos y}{\sin x\sin y}=\cot x\cot y$$

따라서 $f(y)=\cot y$이므로 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cot\dfrac{\pi}{4}=1$

42 답 ②

$y^3=\ln(2-x^2)+2xy+12$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3y^2\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2-x^2}+2y+2x\frac{dy}{dx}$$

이 식에 $x=-1$, $y=2$를 대입하여 정리하면

$$3\times2^2\frac{dy}{dx}=\frac{-2\times(-1)}{2-(-1)^2}+2\times2+2\times(-1)\times\frac{dy}{dx}$$

$$14\frac{dy}{dx}=6$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3}{7}$$

따라서 주어진 곡선 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{3}{7}$이다.

43 답 ②

$\dfrac{\pi}{2}x=y+\sin xy$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{\pi}{2}=\frac{dy}{dx}+\cos xy\times\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

위의 식에 $x=2$, $y=\pi$를 대입하면

$$\frac{\pi}{2}=\frac{dy}{dx}+\cos2\pi\times\left(\pi+2\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\pi}{6}$$

44 답 ③

$\frac{y}{x}-\frac{x}{y}=1$의 양변에 xy를 곱하여 정리하면

$y^2-xy-x^2=0$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-2x=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{2y-x}\ (x\neq 2y)$$

45 답 ③

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to1}\{g(x)-2\}=0$에서 $g(1)=2$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{g(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=3$$

한편, $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g(1)=2$에서 $f(2)=1$

$$\therefore f'(2)=\frac{1}{g'(f(2))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{3}$$

46 답 ③

$$g'(a)=\lim_{h\to0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(a+h)-g(a)}{(a+h)-a}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{g(a+h)-g(a)}{f(g(a+h))-f(g(a))}$$

$$=\frac{1}{\lim_{h\to0}\frac{f(g(a+h))-\boxed{f(g(a))}}{g(a+h)-g(a)}}$$ ←(가)

$$=\frac{1}{f'(\boxed{g(a)})}=\frac{1}{f'(c)}=\boxed{\frac{1}{b}}$$ ←(다)

(나)

47 답 ①

$f(\beta)=\alpha$이므로 $g(\alpha)=\beta$이고,

$x\to\beta$일 때, $f(x)\to f(\beta)=\alpha$이므로

$$f'(\beta)=\lim_{x\to\beta}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}=\lim_{y\to\alpha}\frac{y-\alpha}{g(y)-g(\alpha)}$$

$$=\lim_{y\to\alpha}\frac{1}{\frac{g(y)-g(\alpha)}{y-\alpha}}=\frac{1}{g'(\alpha)}$$

[다른 풀이]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 $f(g(x))=x$가 성립한다. 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$ ⋯ ㉠

이때, 구하는 것이 $f'(\beta)$이므로 ㉠에서 $g(x)=\beta$를 만족시키는 x의 값을 찾으면 된다.

$g(x)=f^{-1}(x)$이므로 $g(x)=f^{-1}(x)=\beta$

즉, $f(\beta)=x$를 만족시키는 $x=\alpha$이다.

따라서 ㉠에 의하여 $f'(\beta)=\frac{1}{g'(\alpha)}$

48 답 ④

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{2+x}{2-x}=\frac{1}{2}\{\ln(2+x)-\ln(2-x)\}$$

이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right)=\frac{2}{4-x^2}$$

한편, $g(0)=a$라 하면 $f(a)=0$이므로

$\ln\sqrt{\frac{2+a}{2-a}}=0$에서 $\sqrt{\frac{2+a}{2-a}}=1$

$\frac{2+a}{2-a}=1 \qquad \therefore a=0$

즉, $g(0)=0$이므로 $g'(0)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\frac{2}{4}}=2$

49 답 ③

ㄱ. $x=t+2=2$에서 $t=0$

$t=0$일 때, $y=t^3+2t+3=3$이므로 점 $(2, 3)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다. (참)

ㄴ. $x=t+2$, $y=t^3+2t+3$에서

$$\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{dy}{dt}=3t^2+2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+2}{1}=3t^2+2 \cdots ㉠$$

한편, $x=t+2=3$에서 $t=1$이므로 점 $(3, 6)$에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $t=1$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}=5$이다. (거짓)

ㄷ. $g(0)=t$라 하면 $f(t)=0$에서 $t^3+2t+3=0$

$(t+1)(t^2-t+3)=0$

$\therefore t=-1$

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(0)=\left[\frac{dx}{dy}\right]_{t=-1}=\frac{1}{3\times(-1)^2+2}=\frac{1}{5}\ \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다

50 답 ⑤

$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$

$y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$에서 $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})}{\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})}=\frac{x}{y}$$

$\frac{dy}{dx}$를 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{y-x\times\frac{dy}{dx}}{y^2} \cdots ㉠$$

한편, $t=\ln\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{5}{4}$, $y=-\frac{3}{4}$이고

이때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{5}{4}}{-\frac{3}{4}}=-\frac{5}{3}$이다.

이 값을 ㉠에 대입하면

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\times\left(-\frac{5}{3}\right)}{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{64}{27}$$

51 답 ③

$3x^2+2y^2=5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x+4y\frac{dy}{dx}=0$ … ㉠

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6+4\frac{dy}{dx}\times\frac{dy}{dx}+4y\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$

$\therefore 6+4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4y\frac{d^2y}{dx^2}=0$ … ㉡

㉠에 $x=1$, $y=1$을 대입하면 $6+4\frac{dy}{dx}=0$에서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}$

㉡에 $x=1$, $y=1$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}$을 대입하면

$6+4\left(-\frac{3}{2}\right)^2+4\times1\times\frac{d^2y}{dx^2}=0$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{15}{4}$

52 답 ②

$f(x)=(x+a)e^{bx}$에서

$f'(x)=e^{bx}+(x+a)e^{bx}\times b$

$f''(x)=e^{bx}\times b+e^{bx}\times b+(x+a)e^{bx}\times b^2$

이때, $f'(0)=3$, $f''(0)=8$에서

$e^0+ae^0\times b=ab+1=3\qquad\therefore ab=2$ … ㉠

$e^0\times b+e^0\times b+ae^0\times b^2=2b+ab^2=b(2+ab)=8$ … ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $4b=8\qquad\therefore b=2$

㉠에 의하여 $a=1$이므로 $a+b=3$

53 답 ②

$f^{(1)}(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$

$f^{(2)}(x)=-x^{-2}$

$f^{(3)}(x)=2x^{-3}$

$f^{(4)}(x)=-2\times3x^{-4}$

$f^{(5)}(x)=2\times3\times4x^{-5}$

⋮

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\times(n-1)!\times x^{-n}$

따라서 $a_n=(-1)^{n-1}\times(n-1)!$이므로 $a_{10}=-9!$

54 답 1

$(f\circ g^{-1})(x)=h(x)$라 하면 $f(x)=(h\circ g)(x)$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=h'(g(x))g'(x)$ ---- ⓐ

$x=0$을 대입하면 $f'(0)=h'(g(0))g'(0)$

한편, $g(0)=0$이고

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, $g'(x)=\frac{-\sin x+1}{\cos x+x}$

에서 $f'(0)=1$, $g'(0)=1$이므로 ---- ⓑ

$f'(0)=h'(g(0))g'(0)$에서 $1=h'(0)\times1$

$\therefore h'(0)=1$ ---- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $(f\circ g^{-1})(x)=h(x)$라 하고 $f(x)$의 도함수를 $g(x)$와 $h(x)$에 대한 식으로 나타낸다. [30%]

ⓑ $f'(0)$, $g'(0)$의 값을 각각 구한다. [40%]

ⓒ 함수 $(f\circ g^{-1})(x)$의 $x=0$에서의 미분계수를 구한다. [30%]

55 답 16

$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$에서 $h'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

$\therefore h'(1)=\frac{g'(1)f(1)-g(1)f'(1)}{\{f(1)\}^2}$ … ㉠ ---- ⓐ

$f(x)=x^3+3x+1$에서 $f'(x)=3x^2+3$이므로

$f(1)=5$, $f'(1)=6$ … ㉡ ---- ⓑ

이때, $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$에서 $a^3+3a+1=1$

$a^3+3a=0$, $a(a^2+3)=0\qquad\therefore a=0\,(\because a^2+3>0)$

$\therefore g(1)=0$ … ㉢

또, $f(g(x))=x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f'(g(1))g'(1)=1$

$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{3\times0^2+3}=\frac{1}{3}$ … ㉣ ---- ⓒ

㉠에 ㉡, ㉢, ㉣을 대입하면 $h'(1)=\frac{\frac{1}{3}\times5-0\times6}{5^2}=\frac{1}{15}$

따라서 $p=15$, $q=1$이므로 $p+q=16$ ---- ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ $h'(1)$의 값을 구하기 위해 필요한 것을 찾는다. [20%]

ⓑ $f(1)$, $f'(1)$의 값을 각각 구한다. [20%]

ⓒ $g(1)$, $g'(1)$의 값을 각각 구한다. [40%]

ⓓ $p+q$의 값을 구한다. [20%]

56 답 5

$x=3t-3\sin t$, $y=3-3\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=3-3\cos t$, $\frac{dy}{dt}=3\sin t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\sin t}{3-3\cos t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$ ---- ⓐ

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}=-1$에서 $\sin t=-1+\cos t$

$\sin t-\cos t=-1$, $\sqrt{2}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

$\therefore \sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

이때, $0<t<2\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{4}<t-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7}{4}\pi$이므로

조건을 만족시키는 t의 값은 $t-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$에서 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ ········ ⓑ

따라서 $p=2$, $q=3$이므로 $p+q=5$ ········ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ	$\dfrac{dy}{dx}$를 t에 대한 식으로 나타낸다.	[45%]
ⓑ	$\dfrac{dy}{dx}=-1$을 만족시키는 t의 값을 구한다.	[45%]
ⓒ	$p+q$의 값을 구한다.	[10%]

57 답 ①

점 (a, b)가 곡선 $e^x-e^y=y$ … ㉠ 위의 점이므로

$e^a-e^b=b$ … ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x-e^y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$ $\quad\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x}{e^y+1}$ … ㉢

이때, 곡선 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 1이므로

㉢에 $x=a$, $y=b$를 대입하면 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^a}{e^b+1}=1$에서

$e^a-e^b=1$ … ㉣

㉡을 ㉣에 대입하면 $b=1$

$b=1$을 ㉡에 대입하면

$e^a-e=1$에서 $e^a=e+1$ $\quad\therefore a=\ln(e+1)$

$\therefore a+b=\ln(e+1)+1$

58 답 10

$\displaystyle\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-\dfrac{\pi}{6}}{x-1}=k$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이므로

(분자) $\to0$이어야 한다. 즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}\left\{f(x)-\dfrac{\pi}{6}\right\}=f(1)-\dfrac{\pi}{6}=0$에서

$f(1)=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore k=\displaystyle\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-\dfrac{\pi}{6}}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

이때, $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$라 하면

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(1, h(1))$에서의 접선의 기울기는

$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=g'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}k$

또, $h(1)=g(f(1))=g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$이므로 점 $(1, h(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=h'(1)(x-1)+h(1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}k(x-1)+\dfrac{1}{2}$

이 접선이 원점을 지나므로 $0=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}k+\dfrac{1}{2}$에서

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}k=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore 30k^2=30\times\dfrac{1}{3}=10$

[다른 풀이]

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$라 하면 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

이때, 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(1, h(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=h'(1)(x-1)+h(1)$이고 이 접선이 원점을 지나므로

$0=-h'(1)+h(1)$에서 $h'(1)=h(1)$

$\therefore g'(f(1))f'(1)=g(f(1))$ … ㉠

한편, 위의 풀이에서 $f(1)=\dfrac{\pi}{6}$, $f'(1)=k$이고

$g(x)=\sin x$, $g'(x)=\cos x$이므로 ㉠에 의하여

$g'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)k=g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $k\cos\dfrac{\pi}{6}=\sin\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore k=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{\cos\dfrac{\pi}{6}}=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(이하 동일)

59 답 ④

$y=x^3+2x^2-15x+5$에서 $y'=3x^2+4x-15=(3x-5)(x+3)$

즉, 함수 $y=x^3+2x^2-15x+5$의 극댓값은 41이고 극솟값은 0보다 작으므로 직선 $y=t(0<t<41)$와 함수 $y=x^3+2x^2-15x+5$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만난다.

$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$에서

$h'(t)=\{f(t)-g(t)\}+t\times\{f'(t)-g'(t)\}$

$\therefore h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\times\{f'(5)-g'(5)\}$ … ㉠

$t=x^3+2x^2-15x+5$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$1=3x^2x'+4xx'-15x'$에서 $x'=\dfrac{1}{3x^2+4x-15}$이고 $f(t)$와 $g(t)$는 방정식 $t=x^3+2x^2-15x+5$의 가장 큰 근과 가장 작은 근이므로

$f'(t)=\dfrac{1}{3\{f(t)\}^2+4f(t)-15}$, $g'(t)=\dfrac{1}{3\{g(t)\}^2+4g(t)-15}$

$\therefore f'(5)=\dfrac{1}{3\{f(5)\}^2+4f(5)-15}$,

$g'(5)=\dfrac{1}{3\{g(5)\}^2+4g(5)-15}$ … ㉡

또한, $t=x^3+2x^2-15x+5$에서 $t=5$일 때의 세 근 중 두 근이 $f(5)$, $g(5)$이므로 $5=x^3+2x^2-15x+5$에서

$x^3+2x^2-15x=0$, $x(x^2+2x-15)=0$, $x(x-3)(x+5)=0$

$\therefore f(5)=3$, $g(5)=-5$

이것을 ㉡에 대입하면

$$f'(5)=\frac{1}{3\{f(5)\}^2+4f(5)-15}=\frac{1}{3\times3^2+4\times3-15}=\frac{1}{24},$$

$$g'(5)=\frac{1}{3\{g(5)\}^2+4g(5)-15}=\frac{1}{3\times(-5)^2+4\times(-5)-15}$$

$$=\frac{1}{40}$$

이므로 ㉠에 의하여

$$h'(5)=\{3-(-5)\}+5\times\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{40}\right)=8+\frac{1}{12}=\frac{97}{12}$$

60 답 ①

$g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$

$\tan^3 a=1$에서 $\tan a=1$ $\quad\therefore a=\frac{\pi}{4}\left(\because -\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore g(1)=\frac{\pi}{4}$

한편, $f(x)=\tan^3 x$에서 $f'(x)=3\tan^2 x\sec^2 x$이므로

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 기울기는

$$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{6}$$

61 답 ②

$x=e^t$에서 $\frac{dx}{dt}=e^t$

$y=(2t^2+nt+n)e^t$에서 $\frac{dy}{dt}=e^t\{2t^2+(n+4)t+2n\}$

$\frac{dy}{dx}=2t^2+(4+n)t+2n=(2t+n)(t+2)=0$ ⋯ ㉠

(i) $n=3$일 때 ㉠에서 $t=-2$ 또는 $t=-\frac{3}{2}$이므로

함수 $y=f(x)$는 $x=a_3=e^{-\frac{3}{2}}$에서 최솟값

$y=b_3=\left\{2\times\frac{9}{4}+3\times\left(-\frac{3}{2}\right)+3\right\}e^{-\frac{3}{2}}=3e^{-\frac{3}{2}}$을 갖는다.

(ii) $n=4$일 때 ㉠에서 $t=-2$이므로

함수 $y=f(x)$는 $x=a_4=e^{-2}$에서 최솟값

$y=b_4=\{2\times4+4\times(-2)+4\}e^{-2}=4e^{-2}$을 갖는다.

(iii) $n=5$일 때 ㉠에서 $t=-2$ 또는 $t=-\frac{5}{2}$이므로

함수 $y=f(x)$는 $x=a_5=e^{-2}$에서 최솟값

$y=b_5=\{2\times4+5\times(-2)+5\}e^{-2}=3e^{-2}$을 갖는다.

(iv) $n=6$일 때 ㉠에서 $t=-2$ 또는 $t=-3$이므로

함수 $y=f(x)$는 $x=a_6=e^{-2}$에서 최솟값

$y=b_6=\{2\times4+6\times(-2)+6\}e^{-2}=2e^{-2}$을 갖는다.

(i)~(iv)에 의하여

$$\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}=\frac{3e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}}+\frac{4e^{-2}}{e^{-2}}+\frac{3e^{-2}}{e^{-2}}+\frac{2e^{-2}}{e^{-2}}$$

$$=3+4+3+2=12$$

62 답 ①

조건 (나)에서 $x\to3$일 때, (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=0$에서 $f(3)=g(3)$

또한, $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로

$f(3)=g(3)=3$ ⋯ ㉠

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}\times\lim_{x\to3}\frac{1}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)-g(x)+g(3)}{x-3}\times\frac{1}{g(3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\right\}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\{f'(3)-g'(3)\}=\frac{8}{9}$$

이때, $g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(3)}$이므로

$\frac{1}{3}\left\{f'(3)-\frac{1}{f'(3)}\right\}=\frac{8}{9}$, $3\{f'(3)\}^2-8f'(3)-3=0$

$\{3f'(3)+1\}\{f'(3)-3\}=0$

$\therefore f'(3)=-\frac{1}{3}$ 또는 $f'(3)=3$

그런데 $f(x)$의 삼차항의 계수는 1이고 역함수가 존재해야 하므로 $f'(x)\ge0$이다.

$\therefore f'(3)=3$ ⋯ ㉡

이때, ㉠에 의하여 $f(x)-3=(x-3)(x^2+ax+b)$라 하고 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+ax+b+(x-3)(2x+a)$

$\quad=3x^2+(2a-6)x+b-3a$ ⋯ ㉢

㉡에 의하여 $f'(3)=9+3a+b=3$

$\therefore 3a+b=-6$ ⋯ ㉣

또한, 조건 (가)의 $g'(x)\le\frac{1}{3}$에서

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}\le\frac{1}{3}$이고 $\frac{dy}{dx}\ge0$이므로 $f'(x)\ge3$

즉, $f'(x)$의 최솟값은 3이다.

㉢에서 $f'(x)$가 최소가 되는 x의 값은 $\frac{3-a}{3}$이므로

$$f'\left(\frac{3-a}{3}\right)=3\left(\frac{3-a}{3}\right)^2+(2a-6)\left(\frac{3-a}{3}\right)+b-3a$$

$$=\frac{(3-a)^2}{3}-\frac{2}{3}(3-a)^2+b-3a$$

$$=-\frac{(3-a)^2}{3}+b-3a=3$$

$-\frac{(3-a)^2}{3}-3a-6-3a=3(\because ㉣)$

$a^2+12a+36=0$, $(a+6)^2=0$ $\quad\therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉣에 대입하면 $b=12$이므로

$f(x)-3=(x-3)(x^2+ax+b)=(x-3)(x^2-6x+12)$

$\therefore f(1)=-2\times7+3=-11$

63 답 ②

$2x-3=p(x)$라 하면

$f(2x-3)=f(p(x))=(f\circ p)(x)$

$\therefore h(x)=(f\circ p)^{-1}(x)=(p^{-1}\circ f^{-1})(x)$

$f^{-1}(x)=g(x)$이고, $p^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$이므로

$h(x)=\frac{1}{2}g(x)+\frac{3}{2}$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}h(x)=\frac{1}{2}\times\frac{d}{dx}g(x)$

64 답 ③

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=2$에서 $f(1)=3$, $f'(1)=2$

또, $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-1}{x-1}=4$에서 $g(1)=1$, $g'(1)=4$

이때, $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $h=\frac{1}{n}$이라 하면 $n\to\infty$일 때 $h\to0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{\frac{f\left(1-\frac{2}{n}\right)}{g\left(1-\frac{2}{n}\right)}-\frac{f(1)}{g(1)}\right\}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(1-2h)}{g(1-2h)}-\frac{f(1)}{g(1)}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(1-2h)}{g(1-2h)}-\frac{f(1)}{g(1)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1-2h)-F(1)}{h}$$

$$=-2\lim_{h\to0}\frac{F(1-2h)-F(1)}{-2h}$$

$$=-2F'(1)$$

$$=-2\times\frac{f'(1)g(1)-f(1)g'(1)}{\{g(1)\}^2}$$

$$=-2\times\frac{2\times1-3\times4}{1^2}$$

$$=-2\times(-10)=20$$

65 답 ③

모든 실수 x에 대하여

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=f'(x)g(x)$

이므로 $f(x)g'(x)=0$

$\therefore g'(x)=0\ (\because f(x)>0)$

ㄱ. $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)=0$ (참)

ㄴ. $\{f(x)+\sin g(x)\}'=f'(x)+\{\sin g(x)\}'$

$=f'(x)+\cos g(x)\times g'(x)$

$=f'(x)$ (참)

ㄷ. $\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\right\}'=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}=-\frac{g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

66 답 5

$f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})$라 하면

$f(0)=\ln(e^0+e^0+\cdots+e^0)=\ln n$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

이때, $f'(x)=\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$이므로

$f'(0)=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$

즉, $\frac{n+1}{2}=3$에서 $n=5$

67 답 ④

$f(2)=1$이고 $f'(2)=3$이다.

$f(2x^3)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(f(2x^3))=x$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $g(f(2))=g(1)=1$

이때, $g(1)=a$이므로 $a=1$

한편, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(2x^3))\times6x^2\times f'(2x^3)=1$ ⋯ ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(2))\times6\times f'(2)=1$, $g'(1)\times6\times3=1$

따라서 $g'(1)=\frac{1}{18}$이므로 $b=g'(1)=\frac{1}{18}$

$\therefore a+b=1+\frac{1}{18}=\frac{19}{18}$

68 답 ⑤

ㄱ. $F(x)G(x)=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)G(x)+F(x)G'(x)=0$

$F'(x)=-\frac{1}{G'(x)}$, $F(x)=\frac{1}{G(x)}$이므로

$-\frac{G(x)}{G'(x)}+\frac{G'(x)}{G(x)}=0$, $\{G(x)\}^2=\{G'(x)\}^2$

$\therefore G(x)=G'(x)$ 또는 $G(x)=-G'(x)$ (거짓)

ㄴ. $G(x)=G'(x)$ 또는 $G(x)=-G'(x)$이므로

(i) $G(x)=G'(x)$일 때, $G'(x)=G''(x)=G(x)$

(ii) $G(x)=-G'(x)$일 때, $G'(x)=-G''(x)=-G(x)$

$\therefore G''(x)=G(x)$

(i), (ii)에 의하여 $G''(x)=G(x)$ (참)

ㄷ. $F(x)$, $G(x)$는 서로 대칭이므로 ㄴ과 같은 방법으로 하면

$F''(x)=F(x)$

$\therefore F''(x)G''(x)=F(x)G(x)=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄱ. 【반례】 $F(x)=e^x$, $G(x)=e^{-x}$이면

$G'(x)=-e^{-x}=-G(x)$ (거짓)

01 답 ②

주어진 곡선의 방정식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\cos y-x\sin y\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}\cos x-y\sin x=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y\sin x-\cos y}{\cos x-x\sin y}$ ⋯ ㉠

따라서 주어진 곡선 위의 점 (π, π)에서의 접선의 기울기는 ㉠에

$x=\pi$, $y=\pi$를 대입하면 $\frac{dy}{dx}=-1$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\pi=-(x-\pi)$에서

$y=-x+2\pi$

02 답 ④

$x=3\cos\theta$, $y=2\sin\theta$에서

$\frac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\cos\theta}{-3\sin\theta}$ ⋯ ㉠

한편, $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때,

$x=3\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y=2\sin\frac{\pi}{4}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$이고,

접선의 기울기는 ㉠에 $\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos\frac{\pi}{4}}{-3\sin\frac{\pi}{4}}=-\frac{2}{3}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\sqrt{2}=-\frac{2}{3}\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$에서

$y=-\frac{2}{3}x+2\sqrt{2}$

03 답 ②

$f(x)=\ln(x+a)$, $g(x)=x^2+x+b$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x+a}$, $g'(x)=2x+1$

주어진 두 곡선이 $x=p$인 점에서 직선 $y=x+c$에 접한다고 하면

$f(p)=g(p)=p+c$에서

$\ln(p+a)=p^2+p+b=p+c$ ⋯ ㉠

$f'(p)=g'(p)=1$에서

$\frac{1}{p+a}=2p+1=1$ ⋯ ㉡

㉡에서 $p=0$, $a=1$

이를 ㉠에 대입하면 $b=0$, $c=0$

$\therefore a+b+c=1+0+0=1$

04 답 3

$x=a\sec\theta$, $y=b\tan\theta$에서

$\frac{dx}{d\theta}=a\sec\theta\tan\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=b\sec^2\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{b\sec^2\theta}{a\sec\theta\tan\theta}=\frac{b}{a\sin\theta}$ ⋯ ㉠

$\theta=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 ㉠에

$\theta=\frac{\pi}{3}$를 대입하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2b}{\sqrt{3}a}$

이때, 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{5\sqrt{3}}{2}$과 접선이 서로 수직이므로

접선의 기울기는 $\frac{4}{\sqrt{3}}$이다.

즉, $\frac{2b}{\sqrt{3}a}=\frac{4}{\sqrt{3}}$에서 $b=2a$ ⋯ ㉡

한편, $\theta=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 점은 $x=2a$, $y=\sqrt{3}b$이고,

이 점은 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 위의 점이므로

$\sqrt{3}b=-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2a+\frac{5\sqrt{3}}{2}$에서 $b=-\frac{1}{2}a+\frac{5}{2}$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

05 답 ⑤

$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{2}-0}=f'(\theta)$에서 $\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{2}{\pi}$

그런데 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$f(\theta)=\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}=\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}$

06 답 ①

$f(x)=e^{x+1}(x^2+3x+1)$에서

$f'(x)=e^{x+1}(x^2+3x+1)+e^{x+1}(2x+3)$

$=e^{x+1}(x^2+5x+4)$

함수 $f(x)$가 감소하는 구간에서 $f'(x)\le 0$이므로

$e^{x+1}(x^2+5x+4)\le 0$에서 $x^2+5x+4\le 0$ $(\because e^{x+1}>0)$

$(x+1)(x+4)\le 0$

$\therefore -4\le x\le -1$

따라서 $a=-4$, $b=-1$이므로

$a+b=-4+(-1)=-5$

07 답 ③

$f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$에서

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$($\because -\pi<x<\pi$)

따라서 $-\pi<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$(-\pi)$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{2}$에서 극솟값 $m=-e^{-\frac{\pi}{2}}$, $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값 $M=e^{\frac{\pi}{2}}$을 가지므로

$Mm=e^{\frac{\pi}{2}}\times(-e^{-\frac{\pi}{2}})=-1$

08 답 ⑤

주어진 곡선의 방정식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2e^x\frac{dy}{dx}+2ye^x+3y^2\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-2ye^x}{2e^x+3y^2}$ … ㉠

따라서 주어진 곡선 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는

㉠에 $x=0$, $y=1$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{5}$이므로

구하는 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{2}{5}(x-0)\qquad \therefore y=-\frac{2}{5}x+1$

따라서 접선의 x절편은 $0=-\frac{2}{5}x+1$에서 $x=\frac{5}{2}$이다.

09 답 ④

$f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 $f(g(x))=x$에서

$f'(g(x))g'(x)=1\qquad \therefore g'(2\sqrt{3})=\frac{1}{f'(g(2\sqrt{3}))}$ … ㉠

이때, $g(2\sqrt{3})=a$라 하면 $f(a)=2\sqrt{3}$에서

$4\cos 2a=2\sqrt{3}$, $\cos 2a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2a=\frac{\pi}{6}$ ($\because 0\le 2a\le\pi$)

$\therefore a=\frac{\pi}{12} \Rightarrow g(2\sqrt{3})=\frac{\pi}{12}$

한편, $f(x)=4\cos 2x$에서 $f'(x)=-8\sin 2x$이므로 ㉠에 의하여

$g'(2\sqrt{3})=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{1}{-8\times\sin\frac{\pi}{6}}=-\frac{1}{4}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2\sqrt{3}, g(2\sqrt{3}))$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{\pi}{12}=-\frac{1}{4}(x-2\sqrt{3})$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{\pi+6\sqrt{3}}{12}$

10 답 ③

$x=\cos^2\theta$, $y=\tan\theta$에서

$\frac{dx}{d\theta}=-2\cos\theta\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sec^2\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sec^2\theta}{-2\cos\theta\sin\theta}$ … ㉠

한편, $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 $x=\frac{1}{2}$, $y=1$이고, 접선의 기울기는

㉠에 $\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{(\sqrt{2})^2}{-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=-2$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-1=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\qquad \therefore y=-2x+2$

11 답 ④

점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=4x-2$이므로

$f(1)=2$, $f'(1)=4$이다.

이때, $g(x)=f(x^2)$에서 $g(1)=f(1)=2$이고,

양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f'(x^2)\times 2x$에서 $g'(1)=8$

따라서 구하는 접선은 점 $(1, 2)$를 지나고, 기울기가 8인 직선이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-2=8(x-1)\qquad \therefore y=8x-6$

12 답 ②

기울기가 2인 직선과 곡선 $y=\tan x$의 접점의 좌표를 $(\alpha, \tan\alpha)$라 하면 $y=\tan x$의 도함수는 $y'=\sec^2 x$이므로

$\sec^2\alpha=2$에서 $\frac{1}{\cos^2\alpha}=2$, $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad \therefore \alpha=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 접선의 방정식은

$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\qquad \therefore y=2x+1-\frac{\pi}{2}$ … ㉠

또, 기울기가 2인 직선과 곡선 $y=-x^2+a$의 접점의 좌표를 $(u, -u^2+a)$라 하면 $y=-x^2+a$의 도함수는 $y'=-2x$이므로

$-2u=2\qquad \therefore u=-1$

따라서 접선의 방정식은

$y-(-1+a)=2(x+1)\qquad \therefore y=2x+1+a$ … ㉡

두 접선의 방정식 ㉠, ㉡이 일치해야 하므로

$1-\frac{\pi}{2}=1+a\qquad \therefore a=-\frac{\pi}{2}$

13 답 ⑤

$y=2\ln(x-3)$에서 $y'=\frac{2}{x-3}$이고,

$y=-x^2+11x+a-24$에서 $y'=-2x+11$

이때, 두 곡선의 접점의 x좌표를 t라 하면 접점에서의 접선의 기울기가 같으므로 $\frac{2}{t-3}=-2t+11$에서

$2=(-2t+11)(t-3)$, $2t^2-17t+35=0$

$(2t-7)(t-5)=0 \qquad \therefore t=\frac{7}{2}$ 또는 $t=5$

한편, 두 곡선의 접점에서의 함숫값이 같으므로

$2\ln(t-3)=-t^2+11t+a-24 \cdots$ ㉠

(i) $t=\frac{7}{2}$을 ㉠에 대입하면

$2\ln\frac{1}{2}=a+\frac{9}{4} \qquad \therefore a=-2\ln 2-\frac{9}{4}$

(ii) $t=5$를 ㉠에 대입하면

$2\ln 2=a+6 \qquad \therefore a=2\ln 2-6$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$\left(-2\ln 2-\frac{9}{4}\right)+(2\ln 2-6)=-\frac{33}{4}$

14 답 ④

$f(x)=(ax^2+1)e^x$에서

$f'(x)=2axe^x+(ax^2+1)e^x=(ax^2+2ax+1)e^x$

$f(x)$는 미분가능한 함수이므로 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가함수가 되기 위한 조건은 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

즉, $f'(x)=(ax^2+2ax+1)e^x\ge 0$에서

$ax^2+2ax+1\ge 0 \; (\because e^x>0) \cdots$ ㉠

이때, 모든 실수 x에서 부등식 ㉠이 성립하려면 이차방정식 $ax^2+2ax+1=0$의 판별식을 D라 할 때

$a>0$, $\frac{D}{4}=a^2-a\le 0$ 또는 $a=0$이어야 하므로

$0<a\le 1$ 또는 $a=0 \qquad \therefore 0\le a\le 1$

15 답 ⑤

$f(x)=\frac{kx-x^2}{x^2+k}$에서

$f'(x)=\frac{(k-2x)(x^2+k)-(kx-x^2)\times 2x}{(x^2+k)^2}$

$=\frac{-kx^2-2kx+k^2}{(x^2+k)^2}$

한편, $f(x)$가 $x=1$에서 감소하므로 $f'(1)<0$에서

$\frac{k^2-3k}{(k+1)^2}<0$ (단, $k\ne -1$), $k^2-3k<0$, $k(k-3)<0$

$\therefore 0<k<3$

따라서 상수 k의 값이 될 수 없는 수는 ⑤ 3이다.

16 답 ②

$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$에서 $f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

이때, 함수 $f(x)$의 점근선은 $y=0$이므로 $-\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{2}$이고

$-1<x<1$일 때, $f'(x)>0$이므로 $f'(f(x))>0$이다. 즉, 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)=f'(f(x))f'(x)$는 $f'(x)$의 부호와 동일하다.

따라서 함수 $g(x)$가 증가하는 구간은 $-1<x<1$이므로

$\alpha=-1$, $\beta=1$

$\therefore \alpha\beta=-1$

17 답 ③

$f(x)=e^x+ke^{-x}\;(k>0)$에서

$f'(x)=e^x-ke^{-x}=\frac{e^{2x}-k}{e^x}=\frac{(e^x+\sqrt{k})(e^x-\sqrt{k})}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $e^x=\sqrt{k}\;(\because e^x>0) \qquad \therefore x=\frac{1}{2}\ln k$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}\ln k$에서 극값을 갖는다.

이때, $0<x<1$에서 극값이 존재하므로 $0<\frac{1}{2}\ln k<1$

$0<\ln k<2 \qquad \therefore 1<k<e^2$

18 답 ②

$f(x)=x-\sqrt{1-x^2}$에서 $1-x^2\ge 0$

$(x-1)(x+1)\le 0 \qquad \therefore -1\le x\le 1$

한편, $f(x)=x-\sqrt{1-x^2}$에서 $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0$

$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-1$, $-\sqrt{1-x^2}=x \cdots$ ㉠

$1-x^2=x^2$, $2x^2=1$, $x^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\;(\because$ ㉠$)$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 극솟값 $-\sqrt{2}$를 갖는다.

19 답 ⑤

$f(x)=2\ln(5-x)+\frac{1}{4}x^2$에서 $5-x>0 \qquad \therefore x<5$

$f'(x)=2\times\frac{-1}{5-x}+\frac{1}{2}x=\frac{2}{x-5}+\frac{1}{2}x=\frac{(x-1)(x-4)}{2(x-5)}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=4$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$	(5)
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↘	$4\ln 2+\frac{1}{4}$	↗	4	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $4\ln 2+\frac{1}{4}$을 갖고 $x=4$에서 극댓값 4를 갖는다.

20 답 ③

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$에서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ ⋯ ㉠

따라서 주어진 곡선 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 기울기는

㉠에 $x=x_1$, $y=y_1$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$이므로 구하는 접선의

방정식은 $y-y_1=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$에서 $\frac{x}{\sqrt{x_1}}+\frac{y}{\sqrt{y_1}}=\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}$

$\therefore \frac{x}{\sqrt{x_1}}+\frac{y}{\sqrt{y_1}}=1$ ($\because \sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}=1$)

따라서 접선의 x절편은 $\sqrt{x_1}$, y절편은 $\sqrt{y_1}$이므로

$\alpha+\beta=\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}=1$

21 답 ②

원점을 지나는 직선과 곡선 $y=\log_a x$의 접점 P의 좌표를 $(t, \log_a t)$

라 하면 접선의 방정식은 $y-\log_a t=\frac{1}{t\ln a}(x-t)$

이 직선이 원점 $(0, 0)$을 지나므로

$-\log_a t=-\frac{1}{\ln a}=-\log_a e \qquad \therefore t=e$

$\therefore \mathrm{P}(e, \log_a e)$

또, 원점을 지나는 직선과 곡선 $y=\ln x=\log_e x$의 접점 Q의 좌표

는 위의 방법에서 $a=e$일 때와 같으므로

$\mathrm{Q}(e, \log_e e)$, 즉 $\mathrm{Q}(e, 1)$

이때, $a>e$이고 두 점 P, Q의 x좌표가 같으므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=1-\log_a e$

22 답 ④

$y=\frac{1}{e}(x+1)e^{-x}$에서

$y'=\frac{1}{e}\times e^{-x}-\frac{1}{e}(x+1)e^{-x}=-\frac{1}{e}xe^{-x}$

이때, 점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y=\frac{1}{e}(x+1)e^{-x}$에 그은 접선의 접점

의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{e}(t+1)e^{-t}\right)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{e}(t+1)e^{-t}=-\frac{1}{e}te^{-t}(x-t)$

이 직선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로 위 식에 대입하면

$0-\frac{1}{e}(t+1)e^{-t}=-\frac{1}{e}te^{-t}(-2-t)$

$t+1=t(-2-t) \qquad \therefore t^2+3t+1=0$ ⋯ ㉠

t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근을 t_1, t_2라 하면 t_1, t_2는 접점의 x좌

표이므로 접선의 기울기는 각각 $-\frac{1}{e}t_1e^{-t_1}$과 $-\frac{1}{e}t_2e^{-t_2}$이다.

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$-\frac{1}{e}t_1e^{-t_1}\times\left(-\frac{1}{e}t_2e^{-t_2}\right)=\frac{1}{e^2}t_1t_2e^{-(t_1+t_2)}$ ⋯ ㉡

이때, ㉠에서 근과 계수의 관계에서 $t_1+t_2=-3$, $t_1t_2=1$이므로

㉡에 의하여 두 기울기의 곱은

$\frac{1}{e^2}t_1t_2e^{-(t_1+t_2)}=\frac{1}{e^2}\times1\times e^3=e$

23 답 ①

$x=4\cos\theta$, $y=2\sin 2\theta$에서 $\frac{dx}{d\theta}=-4\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=4\cos 2\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{4\cos 2\theta}{-4\sin\theta}=-\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$ ⋯ ㉠

한편, $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때, $x=4\cos\frac{\pi}{6}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

$y=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$이고, 접선의 기울기

는 ㉠에 $\theta=\frac{\pi}{6}$를 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-1$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{6}$에 대응하는 점을 지나고 이 점에서의 접선과 수직인

직선의 기울기는 1이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-\sqrt{3}=1\times(x-2\sqrt{3})$에서 $y=x-\sqrt{3}$이다.

24 답 ②

$x=t+1$, $y=-t^{-2}$에서 $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=\frac{2}{t^3}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2}{t^3}$$

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$에서 $x=0$의 접선의 기울기는

$g'(0)=f'(f(0))f'(0)$ ⋯ ㉠

$x=0$일 때, $t=-1$이므로

$f(0)=[y]_{t=-1}=-(-1)^{-2}=-1$

$f'(0)=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=-1}=\frac{2}{(-1)^3}=-2$

또, $x=-1$일 때, $y=-2$이므로

$g(0)=f(f(0))=f(-1)=[y]_{t=-2}=-(-2)^{-2}=-\frac{1}{4}$

$f'(-1)=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=-2}=\frac{2}{(-2)^3}=-\frac{1}{4}$

즉, ㉠에 의하여

$g'(0)=f'(-1)\times(-2)=-\frac{1}{4}\times(-2)=\frac{1}{2}$

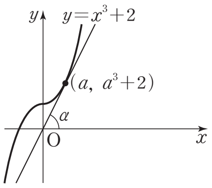
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 $x=0$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}(x-0)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

25 답 ④

원점에서 곡선 $y=x^3+2$에 그은 접선의 접점을 $(a,\ a^3+2)$라 하고 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 예각의 크기를 α라 하면 접선의 방정식은



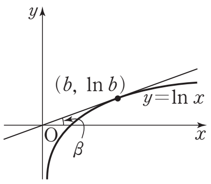
$y-(a^3+2)=3a^2(x-a)$이고 접선의 방정식이 원점을 지나므로

$0-(a^3+2)=3a^2(0-a)$, $a^3=1$

$\therefore a=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 3)$이므로 $\tan\alpha=3$

또, 원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 접점을 $(b,\ \ln b)$라 하고 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 예각의 크기를 β라 하면



접선의 방정식은 $y-\ln b=\frac{1}{b}(x-b)$이고

접선의 방정식이 원점을 지나므로

$0-\ln b=\frac{1}{b}(0-b)$, $\ln b=1$

$\therefore b=e$

따라서 접점의 좌표는 $(e,\ 1)$이므로 $\tan\beta=\frac{1}{e}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{3-\frac{1}{e}}{1+3\times\frac{1}{e}}=\frac{3e-1}{e+3}$$

26 답 ③

$i(2)=a$라 하면, $h(a)=g(f(a))=2$

이때, $g(0)=2$이므로 $f(a)=0$에서 $2a+1=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 $i(2)=-\frac{1}{2}$이므로 접점의 좌표는 $\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$이다.

한편, 곡선 $y=i(x)$ 위의 점 $\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$i'(2)=\frac{1}{h'(i(2))}=\frac{1}{h'\left(-\frac{1}{2}\right)}$

이때, $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이고, $g'(x)=3x^2+1$, $f'(x)=2$이므로

$h'\left(-\frac{1}{2}\right)=g'\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)f'\left(-\frac{1}{2}\right)=2g'(0)=2$

$\therefore i'(2)=\frac{1}{2}$

따라서 접선에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로

구하는 직선의 방정식은

$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x+\frac{7}{2}$

27 답 ①

점 $(0,\ n\ln 2)$에서 곡선 $y=\ln x+1$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ \ln t+1)$이라 하면 $y'=\frac{1}{x}$이므로 접선의 방정식은

$y-(\ln t+1)=\frac{1}{t}(x-t)$ ⋯ ㉠

이 접선이 점 $(0,\ n\ln 2)$를 지나므로

$n\ln 2-(\ln t+1)=\frac{1}{t}(0-t)$, $n\ln 2=\ln t$ $\quad\therefore t=2^n$

이때, 접선의 방정식이 점 $(a_n,\ 0)$을 지나므로 $t=2^n$과 $x=a_n$,

$y=0$을 ㉠에 대입하면 $0-(\ln 2^n+1)=\frac{1}{2^n}(a_n-2^n)$

$a_n=-2^n\ln 2^n=-n\times 2^n\ln 2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n}{a_n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n}{-n\times 2^n\ln 2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\ln 2}$

$$=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\ln 2}$$

28 답 ③

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}=-1$에서 $x\to 0$일 때, (분모) $\to 0$이므로

(분자) $\to 0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)-3\}=f(1)-3=0$

$\therefore f(1)=3$

이것을 주어진 극한식에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-1$

이때, $g(x)=e^{-x^2}f(x)$라 하면

$g'(x)=-2xe^{-x^2}f(x)+e^{-x^2}f'(x)$이므로

$g'(1)=-2\times 1\times e^{-1^2}f(1)+e^{-1^2}f'(1)=-7e^{-1}$

따라서 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{e}{7}$이므로 구하는 직선의 방정식은 $y-e^{-1^2}f(1)=\frac{e}{7}(x-1)$에서 $y=\frac{e}{7}x-\frac{e}{7}+\frac{3}{e}$

따라서 $m=\frac{e}{7}$, $n=-\frac{e}{7}+\frac{3}{e}$이므로

$m+n=\frac{e}{7}+\left(-\frac{e}{7}+\frac{3}{e}\right)=\frac{3}{e}$

29 답 ⑤

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$

이때, $f'(x)=-4\sin x\cos x$, $g'(x)=-2\sin x$이므로

$a-2\sin^2 t=2\cos t$ ⋯ ㉠, $-4\sin t\cos t=-2\sin t$ ⋯ ㉡

$0<t<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin t\neq 0$이므로 ㉡에서

$\cos t=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore t=\frac{\pi}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{5}{2}$

30 답 ②

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선에 수직인 직선이 점 A$(1,\ 0)$을 지날 때 선분 PA의 길이가 구하는 최단거리가 된다.
이때, 점 P의 좌표를 $(t,\ e^t)$이라 하면 $f'(x)=e^x$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=e^t$이고 점 P에서의 접선에 수직이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은 $y-e^t=-\dfrac{1}{e^t}(x-t)$이다.
이 직선이 점 A$(1,\ 0)$을 지나므로
$-e^t=-\dfrac{1}{e^t}(1-t)$에서 $e^{2t}=1-t$ $\therefore t=0$
따라서 점 P의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 구하는 최단거리는
$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

31 답 ②

$y=(x-1)e^x$에서 $y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$
점 $(k,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-1)e^x$에 그은 접선의 접점을 $(t,\ (t-1)e^t)$이라 하면 접선의 방정식은
$y-(t-1)e^t=te^t(x-t)$
이 직선이 점 $(k,\ 0)$을 지나므로 $0-(t-1)e^t=te^t(k-t)$
이때, $e^t>0$이므로 $-(t-1)=t(k-t)$에서
$t^2-(k+1)t+1=0$ ⋯ ㉠
그런데 두 개의 접선을 그으려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$D=(k+1)^2-4>0$에서 $(k+3)(k-1)>0$
$\therefore k<-3$ 또는 $k>1$

32 답 ④

삼각형 PAB의 밑변을 선분 AB라 하면 선분 AB와 점 P 사이의 거리가 삼각형 PAB의 높이이므로 삼각형 PAB의 넓이가 최소가 되려면 높이가 최소이어야 한다.
또한, 곡선 $y=e^x+e^{-x}$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 AB의 기울기와 같을 때, 점 P에서 직선 AB까지의 거리가 최소이다.
따라서 접점 P의 x좌표를 t라 하면 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{8}{3}$이므로
$y'=e^x-e^{-x}$에서 $e^t-e^{-t}=\dfrac{8}{3}$, $3e^{2t}-8e^t-3=0$
$(3e^t+1)(e^t-3)=0$, $e^t=3(\because e^t>0)$
$\therefore t=\ln 3$

33 답 ③

$f(x)=e^x$이라 하면
$x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $[\sin x,\ x]$에서 연속이고
구간 $(\sin x,\ x)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=f'(c)=\boxed{e^c}^{\,(가)}$ (단, $\sin x<c<x$)
를 만족시키는 c가 적어도 하나 존재한다.
이때, $x\to0+$이면 $\sin x\to0+$이므로 $c\to0+$
즉, $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{c\to0+}e^c=\boxed{1}^{\,(나)}$
$x<0$일 때, 구간 $[x,\ \sin x]$에서 같은 방법에 의하여
$\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=1$
따라서 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=1$이다.

34 답 6

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-1)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}\times3$
이때, 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}=f'(c)$를 만족시키는 상수 c가 $x-1<c<x+2$에서 적어도 하나 존재한다.
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}\times3=3\lim_{c\to\infty}f'(c)=3\times2=6$

35 답 ③

$3\left\{f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}=2\pi f'(c)$에서
$\dfrac{\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}}{\frac{2\pi}{3}}=f'(c)$ ⋯ ㉠

ㄱ. $\dfrac{\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|-\left|\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|}{\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{|1|-\left|-\frac{1}{2}\right|}{\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{3}{4\pi}$
이때, $0<c<\dfrac{\pi}{2}$에서 $f'(c)=\cos c$이므로
$\cos c=\dfrac{3}{4\pi}$을 만족시키는 상수 c가 존재한다.

ㄴ. $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $|\cos x|=\cos x$이므로 평균값 정리를 만족시키는 상수 c가 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $\dfrac{\left|\tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|-\left|\tan\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|}{\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{1-\tan\frac{\pi}{12}}{\frac{2\pi}{3}}=a$라 하자.
$\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{6}\right)$이므로
$\tan\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{\left\{\tan\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}^2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}}$
$=\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$
$=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$
$\therefore 1-\tan\dfrac{\pi}{12}=\sqrt{3}-1$

$$a=\frac{1-\tan\frac{\pi}{12}}{\frac{2\pi}{3}}=\frac{3}{2\pi}\times(\sqrt{3}-1)$$

$\frac{3}{2\pi}<0.5$이고 $0<\sqrt{3}-1<1$이므로 $0<a<\frac{1}{2}$이다.

한편, $f(x)=\left|\tan\frac{1}{2}x\right|=\begin{cases}\tan\frac{1}{2}x & \left(0\le x<\frac{\pi}{2}\right)\\ -\tan\frac{1}{2}x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<0\right)\end{cases}$에서

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+\cos x} & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)\\ -\frac{1}{1+\cos x} & \left(-\frac{\pi}{2}<x<0\right)\end{cases}$$

(i) $-\frac{\pi}{2}<x<0$에서 $1<1+\cos x<2$이고

$-1<-\frac{1}{1+\cos x}<-\frac{1}{2}$이므로 $f'(c)=a$를 만족시키는 c의 값은 이 구간에 존재하지 않는다.

(ii) $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $1<1+\cos x<2$이고

$\frac{1}{2}<\frac{1}{1+\cos x}<1$이므로 $\frac{1}{2}<f'(c)<1$

즉, $0<a<\frac{1}{2}<f'(c)<1$이므로 $f'(c)=a$를 만족시키는 c의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 상수 c는 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

36 답 ③

①, ② 함수 $y=e^x$이 증가함수이므로 $f(x)$가 증가하면 $g(x)$, $h(x)$도 증가한다. (참)

③【반례】$f(x)=x^2+1$이라 하면 $g(x)=e^x(x^2+1)$이므로

$g'(x)=e^x(x^2+1)+e^x\times 2x=(x+1)^2e^x\ge 0$

즉, $g(x)$는 모든 구간에서 증가하지만 $f(x)$는 $x<0$인 구간에서 감소한다. (거짓)

④ $h(x)=e^{f(x)}$에서 $f(x)=\ln h(x)$이고, $y=\ln x$는 증가함수이므로 $h(x)$가 증가하면 $f(x)$도 증가한다. (참)

⑤ ①, ④에 의하여 $h(x)$가 증가하면 $g(x)$도 증가한다. (참)

37 답 ④

$f(x)=x-3\ln x-\frac{k}{x}$에서 $f'(x)=1-\frac{3}{x}+\frac{k}{x^2}$

이때, 함수 $f(x)$가 열린구간 $(0, \infty)$에서 증가해야 하므로 $x>0$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다. 즉, $1-\frac{3}{x}+\frac{k}{x^2}\ge 0$에서 $x^2>0$이므로

양변에 x^2을 곱하면 $x^2-3x+k\ge 0$

이때, $g(x)=x^2-3x+k=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+k$라 하면 열린구간 $(0, \infty)$에서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{9}{4}+k$를 가진다.

즉, $-\frac{9}{4}+k\ge 0$이어야 하므로 $k\ge\frac{9}{4}$

따라서 k의 최솟값은 $\frac{9}{4}$이다.

38 답 ①

$x>0$일 때, 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)$ ⋯ ㉠인 c가 구간 $(0, x)$에 존재한다.

$f(0)=0$이므로 ㉠에서 $f(x)=$ $xf'(c)$ (가) (단, $0<c<x$) ⋯ ㉡

그런데 $f'(x)$는 증가함수이므로 $f'(c)<f'(x)$

즉, $f'(c)$는 $f'(x)$보다 작다 (나).

$\therefore g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-xf'(c)}{x^2}$ ($\because$ ㉡)

$=\frac{f'(x)-f'(c)}{x}>0$

따라서 $g(x)$는 $x>0$에서 증가함수이다.

39 답 ③

ㄱ. $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. 또, $f'(e)=0$이고 $x=e$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극솟값을 갖는다. 따라서 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다. (참)

ㄴ. 실수 전체의 집합에서 $g'(x)\le 0$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다. (거짓)

ㄷ. $f'(b)-g'(b)=0$이고 $x=b$의 좌우에서 $f'(x)-g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=b$에서 극댓값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

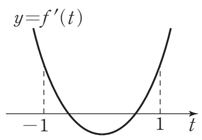
40 답 ②

$\cos x=t$라 하면 $0<x<\pi$에서 $-1<t<1$

이때, $f(t)=\cos^3 x+a\cos^2 x+a\cos x=t^3+at^2+at$라 하면

$f'(t)=3t^2+2at+a$

한편, 주어진 함수가 $0<x<\pi$에서 극댓값, 극솟값을 모두 가지려면 $-1<t<1$에서 함수 $y=f'(t)$의 그래프가 t축과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



(i) $f'(-1)=3-a>0$에서 $a<3$

(ii) $f'(1)=3a+3>0$에서 $a>-1$

(iii) 방정식 $3t^2+2at+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$에서 $a<0$ 또는 $a>3$

(iv) 함수 $y=f'(t)$의 그래프의 대칭축은 $t=-\frac{a}{3}$이므로

$-1<-\frac{a}{3}<1$ $\quad\therefore -3<a<3$

(i)~(iv)에 의하여 a의 값의 범위는 $-1<a<0$

41 답 ①

$y=x^x$의 양변에 밑이 e인 로그를 취하면 $\ln y=x\ln x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{y'}{y}=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$\therefore y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

이때, $y'=x^x(\ln x+1)=0$에서 $x=\frac{1}{e}$ $(\because x>0)$

따라서 함수 $y=x^x$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$	↗

따라서 함수 $y=x^x$은 $x=\frac{1}{e}$에서 극솟값 $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}=e^{-\frac{1}{e}}$을 가지므로

$a=\frac{1}{e},\ b=e^{-\frac{1}{e}}\qquad \therefore \frac{b}{a}=e^{1-\frac{1}{e}}$

42 답 ①

점 $(t,\ 2t^3)$에서 직선 $y=x+1$, 즉 $x-y+1=0$까지의 거리 $g(t)$는

$g(t)=\frac{|t-2t^3+1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}|2t^3-t-1|}{2}$

이때, $2t^3-t-1=(t-1)(2t^2+2t+1)$이고

$2t^2+2t+1>0$이므로

$g(t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}(2t^3-t-1)}{2} & (t\ge1)\\ \frac{\sqrt{2}(-2t^3+t+1)}{2} & (t<1)\end{cases}$에서

$g'(t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}(6t^2-1) & (t>1)\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(6t^2-1) & (t<1)\end{cases}$

(i) $t>1$일 때, $\frac{\sqrt{2}}{2}(6t^2-1)>0$

(ii) $t<1$일 때, $-\frac{\sqrt{2}}{2}(6t^2-1)=0$에서

$6t^2-1=0,\ t^2=\frac{1}{6}\qquad \therefore t=-\frac{\sqrt{6}}{6}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{6}}{6}$

또한, $\lim_{x\to1-}g(t)=\lim_{x\to1+}g(t)=g(1)$이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $g(t)$는 $t=-\frac{\sqrt{6}}{6}$과 $t=1$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\frac{\sqrt{6}}{6}\times1=-\frac{\sqrt{6}}{6}$

43 답 ④

함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이므로 극값을 갖기 위해서는 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

이때, $f(x)=x+k\sin x$에서 $f'(x)=1+k\cos x$이므로

$1-|k|\le f'(x)\le1+|k|$

즉, $(1-|k|)(1+|k|)<0$이어야 하므로 $|k|>1$

44 답 ①

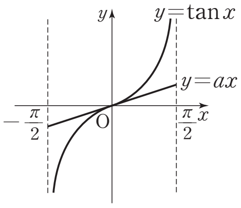
$f(x)=ax^2+2\ln(\cos x)$에서

$f'(x)=2ax-2\tan x$

$f'(x)=0$에서 $ax=\tan x$

이때, $g(x)=\tan x$라 하면

$g'(x)=\sec^2 x$이고 $g'(0)=1$이므로



곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=x$이다.

한편, 그림에서 $a>1$이면 $ax=\tan x$를 만족시키는 x의 값은 두 개 이상이므로 둘 이상의 극값이 존재하게 된다.

$\therefore 0<a\le1(\because a>0)$

45 답 11

$x=2t+1,\ y=t^3+2t-1$에서 $\frac{dx}{dt}=2,\ \frac{dy}{dt}=3t^2+2$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+2}{2}$이다.

따라서 역함수의 도함수는 $\frac{dx}{dy}=\frac{2}{3t^2+2}$ ⋯ ㉠ ⓐ

한편, $g(2)=3$에서 $f(3)=2$이다.

따라서 $y=2$이므로 $y=t^3+2t-1$에서 $2=t^3+2t-1$

$t^3+2t-3=0,\ (t-1)(t^2+t+3)=0\qquad \therefore t=1$

㉠에 $t=1$을 대입하면 $g'(2)=\frac{dx}{dy}=\frac{2}{3\times1^2+2}=\frac{2}{5}$ ⓑ

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=\frac{2}{5}(x-2)\qquad \therefore y=\frac{2}{5}x+\frac{11}{5}$

$\therefore \frac{2b}{a}=11$ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 역함수의 도함수 $\frac{dx}{dy}$를 구한다. [20%]

ⓑ $g'(2)$의 값을 구한다. [40%]

ⓒ 접선의 방정식을 구하고 $\frac{2b}{a}$의 값을 계산한다. [40%]

46 답 13

$f(x)=\frac{1}{\sin x}$에서 $f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$이고

$g(x)=a(1-\cos x)$에서 $g'(x)=a\sin x$이다.

이때, 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t),\ f'(t)=g'(t)$이다.

(i) $f(t)=g(t)$에서 $\dfrac{1}{\sin t}=a(1-\cos t)$ ⋯ ㉠

(ii) $f'(t)=g'(t)$에서 $-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}=a\sin t$

이때, $0<t<\pi$에서 $\sin t\neq 0$이므로 $-\dfrac{\cos t}{\sin^3 t}=a$ ⋯ ㉡ ---- ⓐ

㉡을 ㉠에 대입하면 $\dfrac{1}{\sin t}=-\dfrac{\cos t}{\sin^3 t}(1-\cos t)$에서

$\sin^2 t=-\cos t+\cos^2 t$

$1-\cos^2 t=-\cos t+\cos^2 t$

$2\cos^2 t-\cos t-1=0$

$(2\cos t+1)(\cos t-1)=0$

$\therefore \cos t=-\dfrac{1}{2}$ ($\because 0<x<\pi$) $\Rightarrow \sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ---------------- ⓑ

$\cos t=-\dfrac{1}{2}$, $\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$을 ㉡에 대입하면

$$a=-\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=4$이므로

$p+q=9+4=13$ -- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 접점의 x좌표를 t라 하고, $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$로부터 방정식을 세운다. [40%]

ⓑ $\cos t$, $\sin t$의 값을 각각 구한다. [40%]

ⓒ a의 값을 구하고 $p+q$의 값을 계산한다. [20%]

47 답 5

$g(t)=\overline{AP}^2=(t-5)^2+\left(\dfrac{1}{t}-5\right)^2$에서

$$g'(t)=2(t-5)+2\left(\dfrac{1}{t}-5\right)\times\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)$$

$$=2(t-5)-2\times\dfrac{1-5t}{t^3}$$

$$=2\times\dfrac{t^4-5t^3+5t-1}{t^3}$$

$$=\dfrac{2(t-1)(t+1)(t^2-5t+1)}{t^3}$$ ---------------- ⓐ

이때, $t^2-5t+1=0$ ⋯ ㉠의 서로 다른 두 실근을 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하고 $t>0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	⋯	α	⋯	1	⋯	β	⋯
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

---- ⓑ

즉, 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=\beta$에서 극솟값을 가지므로 이차방정식 ㉠의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=5$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 5이다. ---------------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 함수 $g(t)$의 도함수 $g'(t)$를 구한다. [40%]

ⓑ 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타낸다. [30%]

ⓒ 모든 상수 a의 값의 합을 구한다. [30%]

48 답 4

$f(x)=2x+\sin x$에서 $f'(x)=2+\cos x$

또, 점 $(4\pi, 2\pi)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로 $g(4\pi)=2\pi$

이때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계이므로

$f(g(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(g(x))g'(x)=1$

$x=4\pi$를 대입하면 $f'(g(4\pi))g'(4\pi)=1$에서

$f'(2\pi)g'(4\pi)=1$, $(2+\cos 2\pi)g'(4\pi)=1$, $3g'(4\pi)=1$

$\therefore g'(4\pi)=\dfrac{1}{3}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4\pi, 2\pi)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이므로 $p=3$, $q=1$

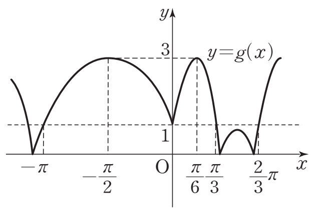
$\therefore p+q=4$

49 답 48

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|=\begin{cases}|2\sin 3x+1| \\ |2\sin(-x)+1|\end{cases}$$

$$=\begin{cases}|2\sin 3x+1| & (x\geq 0)\\ |-2\sin x+1| & (x<0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $g(x)=0$이 되는 x에서 꺾인점을 가지므로 미분가능하지 않다.

사차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 합성함수 $h(x)=f(g(x))$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점에서 미분가능하도록 만들어 주면 된다.

이때, 함수 $h(x)=f(g(x))$의 도함수는 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이다.

(i) 함수 $h(x)=f(g(x))$가 $x=0$에서 미분가능해야 하므로

$\lim_{x\to 0+} h'(x)=\lim_{x\to 0-} h'(x)$가 성립해야 한다.

이때, $\lim_{x\to 0+} g'(x)=\lim_{x\to 0+} 6\cos 3x=6$,

$\lim_{x\to 0-} g'(x)=\lim_{x\to 0-}(-2\cos x)=-2$이므로

$$\lim_{x\to 0+} h'(x)=\lim_{x\to 0+} f'(g(x))g'(x)$$
$$=\lim_{x\to 0+} f'(g(x))\times\lim_{x\to 0+} g'(x)$$
$$=f'(g(0))\times 6=6f'(1)$$

$$\lim_{x\to 0-} h'(x)=\lim_{x\to 0-} f'(g(x))g'(x)$$
$$=\lim_{x\to 0-} f'(g(x))\times\lim_{x\to 0-} g'(x)$$
$$=f'(g(0))\times(-2)=-2f'(1)$$

즉, $6f'(1)=-2f'(1)$에서 $f'(1)=0$ ⋯ ㉠

(ii) 함수 $h(x)=f(g(x))$가 $g(x)=0$을 만족하는 x에서 미분가능해야 하므로 $g(x)=0$을 만족하는 x의 값을 t라 하면

$\lim_{x\to t+} h'(x)=\lim_{x\to t-} h'(x)$가 성립해야 한다.

이때, 양수 k에 대하여 $\lim_{x\to t+} g'(x)=k$, $\lim_{x\to t-} g'(x)=-k$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to t+} h'(x)&=\lim_{x\to t+} f'(g(x))g'(x)\\&=\lim_{x\to t+} f'(g(x))\times\lim_{x\to t+} g'(x)\\&=f'(g(t))\times k=kf'(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to t-} h'(x)&=\lim_{x\to t-} f'(g(x))g'(x)\\&=\lim_{x\to t-} f'(g(x))\times\lim_{x\to t-} g'(x)\\&=f'(g(t))\times(-k)=-kf'(0)\end{aligned}$$

즉, $kf'(0)=-kf'(0)$에서 $f'(0)=0$ ⋯ ㉡

사차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 존재하고 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $g(x)=0$이 되는 x 이외의 점에서는 이계도함수가 존재하므로 $x=0$과 $g(x)=0$이 되는 x에서 이계도함수가 존재하도록 만들어 주어야 한다. 그런데 $g(x)=0$이 되는, 즉 $x=t$에서 $\lim_{x\to t+} h''(x)=\lim_{x\to t-} h''(x)$이므로 $x=0$에서만 따져주면 된다.

이때, $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$에서

$h''(x)=f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)$이다.

(iii) 함수 $h(x)=f(g(x))$가 $x=0$에서 이계도함수가 존재해야 하므로 $\lim_{x\to 0+} h''(x)=\lim_{x\to 0-} h''(x)$가 성립해야 한다.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0+}[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)]\\&=\lim_{x\to 0+} f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim_{x\to 0+} f'(g(x))g''(x)\\&=f''(g(0))\times 6^2+0=36f''(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0-}[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)]\\&=\lim_{x\to 0-} f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim_{x\to 0-} f'(g(x))g''(x)\\&=f''(g(0))\times(-2)^2+0=4f''(1)\end{aligned}$$

즉, $36f''(1)=4f''(1)$에서 $f''(1)=0$ ⋯ ㉢

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

이때, ㉠, ㉡에서 $f'(1)=0$, $f'(0)=0$이므로

$f'(1)=4+3a+2b+c=0$에서 $3a+2b+c=-4$ ⋯ ㉣

$f'(0)=c$에서 $c=0$ ⋯ ㉤

또, $f''(x)=12x^2+6ax+2b$이고 ㉢에서 $f''(1)=0$이므로

$f''(1)=12+6a+2b=0$에서 $3a+b=-6$ ⋯ ㉥

㉣, ㉤, ㉥을 연립하면 $a=-\frac{8}{3}$, $b=2$, $c=0$이므로

$f'(x)=4x^3-8x^2+4x$

$\therefore f'(3)=4\times 3^3-8\times 3^2+4\times 3=48$

50 답 ③

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=\ln\frac{2}{3}$에서 변곡점을 가지므로

$f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)=0$

$f(x)=ae^{3x}+be^x$에서

$f'(x)=3ae^{3x}+be^x$, $f''(x)=9ae^{3x}+be^x$이므로

$$\begin{aligned}f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)&=9ae^{3\times\ln\frac{2}{3}}+be^{\ln\frac{2}{3}}=9a\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+b\times\frac{2}{3}\\&=\frac{8}{3}a+\frac{2}{3}b=0\end{aligned}$$

$4a+b=0$ $\quad\therefore b=-4a$

$\therefore f(x)=ae^{3x}-4ae^x$ ⋯ ㉠

$a>0$이므로 조건 (나)에 의하여 $x\ge k$일 때, $f'(x)\ge 0$이다.

$f'(x)=3ae^{3x}+be^x=3ae^{3x}-4ae^x=ae^x(3e^{2x}-4)$

$f'(x)=0$에서 $3e^{2x}-4=0$ ($\because a>0$, $e^x>0$)이므로

$3e^{2x}=4$, $e^{2x}=\frac{4}{3}$, $2x=\ln\frac{4}{3}$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	$\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

이때, $f'(x)\ge 0$인 구간은 $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}, \infty\right)$이므로 실수 k의 최솟값 m은 $m=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$이다.

또한, 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned}f(2m)&=f\left(\ln\frac{4}{3}\right)=ae^{3\ln\frac{4}{3}}-4ae^{\ln\frac{4}{3}}\ (\because ㉠)\\&=a\times\left(\frac{4}{3}\right)^3-4a\times\frac{4}{3}=-\frac{80}{27}a=-\frac{80}{9}\end{aligned}$$

$\therefore a=3$

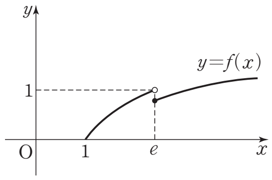
이것을 ㉠에 대입하면 $f(x)=3e^{3x}-12e^x$이므로

$f(0)=3e^0-12e^0=3-12=-9$

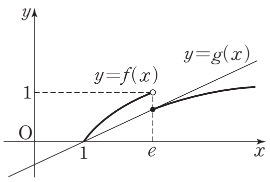
51 답 ④

$1\le x<e$이면 $1-e\le x-e<0$에서 주어진 부등식은 $g(x)-f(x)\le 0$이므로 $1\le x<e$일 때, $g(x)\le f(x)$이어야 하고 $x\ge e$이면 $x-e\ge 0$에서 주어진 부등식은 $g(x)-f(x)\ge 0$이므로 $x\ge e$일 때, $g(x)\ge f(x)$이어야 한다.

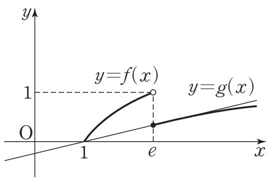
t가 양수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



즉, 조건을 만족시키는 직선 $y=g(x)$의 기울기가 최소가 되려면 [그림 1]과 같이 직선 $y=g(x)$가 점 $(1,\ 0)$을 지나면서 곡선 $f(x)=-t+\ln x\,(x\geq e)$와 점 $(e,\ 1-t)$에서만 만나거나 [그림 2]와 같이 점 $(1,\ 0)$을 지나면서 곡선 $f(x)=-t+\ln x\,(x\geq e)$에 접해야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

한편, 점 $(1,\ 0)$을 지나는 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)\,(x\geq e)$ 위의 점 $(e,\ 1-t)$에서 접할 때의 t의 값을 구해 보자.

$x\geq e$일 때, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$에서 $f'(e)=\dfrac{1}{e}$이므로 직선 $y=g(x)$의 방정식은 $g(x)=\dfrac{1}{e}(x-1)$

즉, $g(e)=\dfrac{e-1}{e}=1-\dfrac{1}{e}=1-t$에서 $t=\dfrac{1}{e}$이므로 [그림 1]의 경우는 $0<t<\dfrac{1}{e}$일 때이고, [그림 2]의 경우는 $t\geq\dfrac{1}{e}$일 때이다.

(i) 직선 $y=g(x)$가 [그림 1], 즉 $0<t<\dfrac{1}{e}$일 때

직선 $y=g(x)$는 두 점 $(1,\ 0)$과 $(e,\ 1-t)$를 지나므로

$h(t)=\dfrac{1-t}{e-1}\qquad\therefore h'(t)=-\dfrac{1}{e-1}$

(ii) 직선 $y=g(x)$가 [그림 2], 즉 $t\geq\dfrac{1}{e}$일 때

곡선 $f(x)=-t+\ln x\,(x\geq e)$와 직선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(k,\ -t+\ln k)$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로

$h(t)=f'(k)=\dfrac{1}{k}\ \cdots$ ㉠

한편, 직선 $y=g(x)$는 두 점 $(1,\ 0)$, $(k,\ -t+\ln k)$를 지나므로 $h(t)=\dfrac{-t+\ln k}{k-1}\ \cdots$ ㉡

㉠=㉡이므로 $\dfrac{1}{k}=\dfrac{-t+\ln k}{k-1}$에서 $t=\ln k-\dfrac{k-1}{k}$

$\therefore t=\ln k-1+\dfrac{1}{k}\ \cdots$ ㉢

이때, $t=p(k)$라 하면 ㉠에서 $h(t)=h(p(k))=\dfrac{1}{k}$이고 양변을 k에 대하여 미분하면 $h'(p(k))p'(k)=-\dfrac{1}{k^2}\ \cdots$ ㉣

또, ㉢에서 $p(k)=\ln k-1+\dfrac{1}{k}$이고 양변을 k에 대하여 미분하면 $p'(k)=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{k-1}{k^2}\ \cdots$ ㉤

㉤을 ㉣에 대입하면 $h'(p(k))\times\dfrac{k-1}{k^2}=-\dfrac{1}{k^2}$에서

$h'(p(k))=h'(t)=-\dfrac{1}{k-1}$

$1<\dfrac{1}{2e}<\dfrac{1}{e}$이므로 (i)에 의하여 $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right)=-\dfrac{1}{e-1}$

또, $h(a)=\dfrac{1}{e+2}<\dfrac{1}{e}$에서 $a>\dfrac{1}{e}$이고 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시키는 양수 a에 대하여 $\dfrac{1}{e+2}=\dfrac{1}{k}$에서 $k=e+2$이므로 (ii)에 의하여

$h'(a)=-\dfrac{1}{(e+2)-1}=-\dfrac{1}{e+1}$

$\therefore h'\left(\dfrac{1}{2e}\right)\times h'(a)=\left(-\dfrac{1}{e-1}\right)\times\left(-\dfrac{1}{e+1}\right)$

$=\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$

[다른 풀이]

$t\geq\dfrac{1}{e}$일 때의 $h'(t)$를 다른 방법으로 구해 보자.

㉠에서 $h(t)=f'(k)=\dfrac{1}{k}\qquad\therefore k=\dfrac{1}{h(t)}$

또, ㉡에서 $h(t)=\dfrac{-t+\ln k}{k-1}$이므로 $k=\dfrac{1}{h(t)}$을 대입하면

$h(t)=\dfrac{-t+\ln\dfrac{1}{h(t)}}{\dfrac{1}{h(t)}-1}$에서 $1-h(t)=-t-\ln h(t)$

$\therefore h(t)-\ln h(t)=t+1$

양변을 t에 대하여 미분하면

$h'(t)-\dfrac{h'(t)}{h(t)}=1$에서 $h'(t)\left\{1-\dfrac{1}{h(t)}\right\}=1$

$h'(t)\times\dfrac{h(t)-1}{h(t)}=1$

$\therefore h'(t)=\dfrac{h(t)}{h(t)-1}$

이때, $a>\dfrac{1}{e}$이므로

$h'(a)=\dfrac{h(a)}{h(a)-1}=\dfrac{\dfrac{1}{e+2}}{\dfrac{1}{e+2}-1}=-\dfrac{1}{e+1}$

(이하 동일)

52 답 216

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a}\,(x>a)$에서

$f(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{\alpha-a}=M,\ f(\beta)=\dfrac{g(\beta)}{\beta-a}=M$

$f'(x)=\dfrac{g'(x)(x-a)-g(x)}{(x-a)^2}$에서

$f'(\alpha)=0$이므로 $g'(\alpha)(\alpha-a)-g(\alpha)=0$

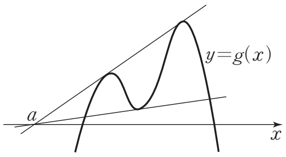
$\therefore g'(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{\alpha-a}$

$f'(\beta)=0$이므로 $g'(\beta)(\beta-a)-g(\beta)=0$

$\therefore g'(\beta)=\dfrac{g(\beta)}{\beta-a}$

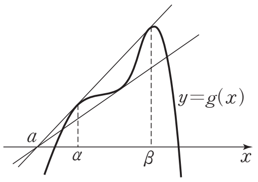
이때, $g'(\alpha)$는 $x=\alpha$에서 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기이고 $g'(\beta)$는 $x=\beta$에서 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기이다. 따라서 곡선 $y=g(x)$의 그래프는 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i)



함수 $y=g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같을 때, 함수 $y=g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개이다. 이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프도 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(ii)



함수 $y=g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같을 때, 함수 $y=g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 1개이다. 이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극대 또는 극소가 되는 x의 값이 3개이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 함수 $y=g(x)$는 극값을 1개 갖는다.

$g(x)-kx=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$이라 하면

$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+kx$이므로

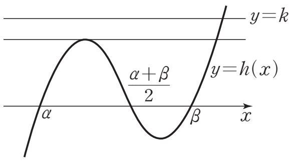
$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+k$

이때, $g'(x)=0$, 즉 $4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=k$의

서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2이어야 한다.

$h(x)=4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$라 하면

곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=k$는 한 점 또는 두 점에서 만나야 한다.



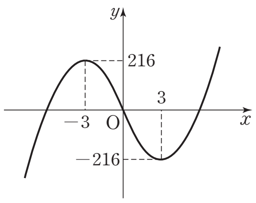
함수 $h(x)$의 극값은 $\beta=\alpha+6\sqrt{3}$이므로 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$이라 하고

함수 $y=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$의 극값을 구해도 된다.

이때, $y'=-12(x+3)(x-3)$이므로 $y'=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $y=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 k의 값의 범위는 $k\le-216$ 또는 $k\ge216$이다.

이때, $k>0$이므로 k의 최솟값은 216이고 M의 최솟값도 216이다.

53 답 ③

$f(x)=\sin^2 x$에서 $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$에서의 두 접선이 서로 수직이므로 기울기의 곱이 -1이다.

$\therefore \sin 2\alpha \sin 2\beta=-1 \cdots$ ㉠

그런데 $|\sin 2\alpha|\le1$, $|\sin 2\beta|\le1$이므로 ㉠을 만족하려면

$|\sin 2\alpha|=1$, $|\sin 2\beta|=1$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 즉 $0<2\alpha<\pi$에서 $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$, 즉 $\pi<2\beta<2\pi$에서 $2\beta=\dfrac{3}{2}\pi$ $\quad\therefore \beta=\dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore \sin\alpha\sin\beta=\sin\dfrac{\pi}{4}\times\sin\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

54 답 ③

$f(x)=cx^{\frac{3}{2}}$, $g(x)=\sqrt{x}$라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 P의 x좌표는 $cx^{\frac{3}{2}}=\sqrt{x}$에서 $c^2x^3=x$, $x(c^2x^2-1)=0$

$x(cx+1)(cx-1)=0 \qquad \therefore x=\dfrac{1}{c}$ $(\because c>0,\ x>0)$

점 P에서의 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 접선의 기울기를 각각 $\tan\alpha$, $\tan\beta$라 하면 $f'(x)=\dfrac{3}{2}cx^{\frac{1}{2}}$, $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이므로

$\tan\alpha=f'\left(\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{3}{2}c\sqrt{\dfrac{1}{c}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{c}$, $\tan\beta=g'\left(\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{1}{2}\sqrt{c}$

$$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\frac{4\sqrt{c}}{4+3c}=\frac{4}{\dfrac{4}{\sqrt{c}}+3\sqrt{c}}$$

$$\le\frac{4}{2\sqrt{\dfrac{4}{\sqrt{c}}\times3\sqrt{c}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{4}{\sqrt{c}}=3\sqrt{c}\text{일 때, 즉 } c=\dfrac{4}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\tan\theta$의 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

55 답 ③

이계도함수 $y=f''(x)$의 그래프에서 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 양수 a에 대하여 $-a$ 또는 a라 하고 함수 $f'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

또한, $f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$이므로 $f'(x)$의 증가와 감소를 나타낸 표를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗	↗	↗		↗	↗	↗		↘

ㄱ. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타낸 표에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. 주어진 조건만으로는 함수 $f(x)$가 원점에 대하여 대칭인지 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타낸 표에서 $x<0$일 때의 최솟값은 $f(-1)$이므로 $f(-1)>0$이면 방정식 $f(x)=0$는 $x>1$에서 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

56 답 ④

함수 $f(x)=e^{-x}(\cos x+\sin x)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(\cos x+\sin x)+e^{-x}(-\sin x+\cos x)$

$\quad=-2e^{-x}\sin x$

$f'(x)=0$에서 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ 또는 $x=3\pi$, $\cdots$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π	$\cdots$	4π	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$, $x=3\pi$, $\cdots$에서 극솟값을 가지므로

$a_n=(2n-1)\pi\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n\pi-\pi)}\{\cos(2n\pi-\pi)+\sin(2n\pi-\pi)\}$

$\quad=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n\pi-\pi)}\times(-1+0)=-e^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-2\pi})^n$

이때, $e^{2\pi}>e^0=1$에서 $0<e^{-2\pi}<1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)=-e^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-2\pi})^n=-e^{\pi}\times\frac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{\pi}}{1-e^{2\pi}}$

57 답 ⑤

ㄱ. 함수 $f(x)$가 다항함수이므로 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$인 c가 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다. 이때, $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$이므로 $f'(x)=\frac{4}{5}$인 x가 구간 $(0, 1)$에 존재한다. (참)

ㄴ. 다항함수 $f(x)$가 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 함수 $g(x)=(f\circ f)(x)$도 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 구간 $(0, 1)$에서 미분가능하다. 한편, 직선 $y=x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점을 (a, a), $(1, 1)\ (0<a<1)$이라 하면

$g(a)=(f\circ f)(a)=f(a)=a$

$g(1)=(f\circ f)(1)=f(1)=1$

이므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{g(1)-g(a)}{1-a}=1=g'(k)$인 k가 구간 $(a, 1)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 교점 (a, a), $(1, 1)\ (0<a<1)$은 곡선 $y=h(x)=f^{-1}(x)$ 위에 존재한다. 즉, $h(a)=a$, $h(1)=1$이므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{h(1)-h(a)}{1-a}=1=h'(k)$인 k가 구간 $(a, 1)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

58 답 ④

ㄱ. 【반례】$f(x)=\frac{1}{2}x^2$이면 $f(0)=0$, $f(2)=2$, $f''(x)>0$으로 모두 만족하지만 $f'(0)=0$이다.(거짓)

ㄴ. $f(x)$는 구간 $[0, 2]$에서 연속이고, 구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 $f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=1$인 c가 구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다. 그런데 $c<2$이고, $f''(x)>0$에서 $f'(x)$는 증가함수이므로 $f'(2)>f'(c)=1$ (참)

ㄷ. $g(x)=f(x)-x$라 하면

$g'(x)=f'(x)-1$, $g''(x)=f''(x)>0$

즉, $g'(x)$는 증가함수이고, ㄴ에서 $g'(c)=f'(c)-1=0$이다.

$0<x<c$에서 $g'(x)<0$이므로 $g(x)<g(0)=0$

$c<x<2$에서 $g'(x)>0$이므로 $g(x)<g(2)=0$

따라서 $0<x<2$에서 $g(x)<0$이므로 $f(x)<x$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

1st 06 도함수의 활용 (2)

문제편 73P

01 답 ③

$y=\sin^n x$에서 $y'=n\sin^{n-1}x\cos x$

$y''=n(n-1)\sin^{n-2}x\times\cos^2 x+n\sin^{n-1}x\times(-\sin x)$

$\quad=n\sin^{n-2}x(n\cos^2 x-1)$

$y''=0$에서 $n\sin^{n-2}x(n\cos^2 x-1)=0$

$\therefore \cos^2 x=\dfrac{1}{n}\left(\because 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)\cdots$ ㉠

즉, 변곡점의 좌표는 ㉠을 만족시키는 x의 값이고 한 개의 값만 존재하므로 ㉠을 만족시키는 x의 값을 α라 하면 $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{n}}$에서

$\sin\alpha=\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}$

따라서 변곡점의 y좌표 a_n은

$a_n=\sin^n\alpha=\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)^n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$\quad=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}=\dfrac{\sqrt{e}}{e}$

02 답 ⑤

ㄱ. $f(x)=\ln(2x^2+1)$에서 $f'(x)=\dfrac{4x}{2x^2+1}$이므로

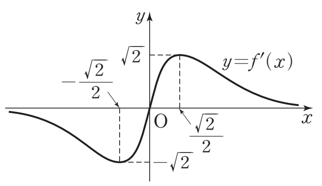
$f'(-x)=\dfrac{4\times(-x)}{2\times(-x)^2+1}=-\dfrac{4x}{2x^2+1}=-f(x)$ (참)

ㄴ. $f''(x)=\dfrac{4(2x^2+1)-4x\times4x}{(2x^2+1)^2}=\dfrac{4(1-2x^2)}{(2x^2+1)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로 함수 $f'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘

또한, $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$이므로 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 $|f'(x)|\le\sqrt{2}$이다. (참)

ㄷ. $f''(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이고 이 x의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \ln 2\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \ln 2\right)$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

03 답 2

$f(x)=2\log_2 x+\log_2(3-x)=\log_2 x^2(3-x)$

즉, 함수 $f(x)$의 밑이 $2>1$이므로 진수 $x^2(3-x)$가 최대일 때 함수 $f(x)$는 최댓값을 갖는다.

한편, 진수의 조건에 의하여 $x>0$, $3-x>0$에서 $0<x<3$

이때, $g(x)=x^2(3-x)\,(0<x<3)$라 하면

$g'(x)=6x-3x^2=-3x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=2$이므로 $0<x<3$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	극대	↘	

즉, 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(2)=4$이다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=\log_2 g(2)=\log_2 4=2$

04 답 ④

$\dfrac{1}{2}x^2-\ln x\ge a$에서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$라 하면

$f'(x)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1\,(\because x>0)$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 부등식 $\dfrac{1}{2}x^2-\ln x\ge a$가 성립하기 위한 상수 a의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}$이다.

05 답 5

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{1\times(x^2+1)-x\times2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-2x\times(x^2+1)^2-(1-x^2)\times2(x^2+1)\times2x}{(x^2+1)^4}$

$\quad=\dfrac{2x(x^2+1)\{-(x^2+1)-2(1-x^2)\}}{(x^2+1)^4}=\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$이고 $f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	극소	↗	변곡점	↗	극대	↘	변곡점	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{2}$을 갖고 $x=1$에서 극댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다. 또한, $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$에서 변곡점을 갖는다. 이때, 곡선 $y=f(x)$의 극점 또는 변곡점에서 그은 접선과 이 곡선은 접점에서만 만나므로 $g(t)=1$을 만족시키는 t의 값은 $-\sqrt{3}$, -1, 0, 1, $\sqrt{3}$으로 5개이다.

06 답 ②

$x=t^2-t$, $y=2t^3-t^2-3t$에서 $\frac{dx}{dt}=2t-1$, $\frac{dy}{dt}=6t^2-2t-3$

즉, 점 P의 속도가 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=(2t-1, 6t^2-2t-3)$이므로

$t=1$에서의 점 P의 속도는 $(1, 1)$이다.

따라서 점 P의 $t=1$에서의 속도의 크기, 즉 속력은 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이다.

07 답 ④

ㄱ. $f(x)=xe^x$에서 $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$
$f'(-1)=0$이고 $x<-1$일 때 $f'(x)<0$, $x>-1$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖는다. (참)

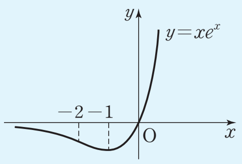
ㄴ. $f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$
$f''(-2)=0$이고 $x<-2$일 때 $f''(x)<0$, $x>-2$일 때 $f''(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 변곡점을 갖는다. (참)

ㄷ. $x<-2$일 때 $f''(x)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

일등급 UP

* 함수 $f(x)=xe^x$의 그래프의 개형



08 답 ②

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}ax^2+\sin x+\cos x$에서 $y'=\sqrt{2}ax+\cos x-\sin x$

$y''=\sqrt{2}a-\sin x-\cos x=\sqrt{2}a-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

그런데 주어진 곡선이 변곡점을 갖기 위해서는 $y''=0$인 x가 존재하고, 그 점의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌어야 하므로 y''의 최댓값은 양, 최솟값은 음이어야 한다. 즉,

$\sqrt{2}a+\sqrt{2}>0$, $\sqrt{2}a-\sqrt{2}<0$에서 $a>-1$, $a<1$

$\therefore -1<a<1$

09 답 ⑤

$f(x)=\frac{\sin x}{e^{2x}}$에서

$f'(x)=\frac{\cos x\times e^{2x}-2\sin x\times e^{2x}}{(e^{2x})^2}=\frac{\cos x-2\sin x}{e^{2x}}$

$f''(x)=\frac{(-\sin x-2\cos x)e^{2x}-2(\cos x-2\sin x)e^{2x}}{(e^{2x})^2}$

$=\frac{3\sin x-4\cos x}{e^{2x}}$

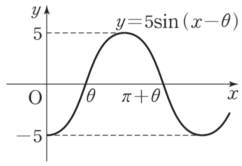
이때, $e^{2x}>0$이므로 $f''(x)>0$에서 $3\sin x-4\cos x>0$이어야 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하다.

$3\sin x-4\cos x=5\sin(x+\alpha)$이고 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$이므로 α는 제 4사분면의 각이다.

즉, $\alpha=-\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$5\sin(x+\alpha)=5\sin(x-\theta)$이므로

$5\sin(x-\theta)>0$의 범위는 그림에 의하여 $\theta<x<\pi+\theta$이다.



즉, $\theta<x<\pi+\theta$의 범위에서

$f''(x)>0$이고, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.

$\therefore \cos a+\sin b=\cos\theta+\sin(\pi+\theta)=\cos\theta-\sin\theta$

$=\cos(-\alpha)-\sin(-\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha=-\frac{1}{5}$

10 답 ⑤

$y=\frac{\ln x}{x}$에서 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $y''=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$

$y'=0$에서 $x=e$, $y''=0$에서 $x=e^{\frac{3}{2}}$

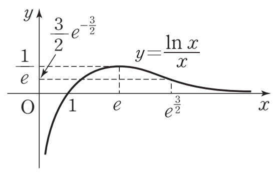
따라서 함수 $y=\frac{\ln x}{x}$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		↗	극대	↘	변곡점	↘

ㄱ. 주어진 함수는 $x=e$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. 극대점은 (e, e^{-1}), 변곡점은 $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$이고,

$\lim_{x\to\infty}y=0$, $\lim_{x\to 0+}y=-\infty$이므로 함수 $y=\frac{\ln x}{x}$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 점근선은 x축과 y축이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=\frac{\ln x}{x}$의 그래프에서 최댓값은 $x=e$일 때, $y=e^{-1}$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\le e^{-1}\}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 ⑤

$f(x)=\frac{e^x}{x}$의 정의역은 $\{x|x\neq0$인 모든 실수$\}$이고

$$f'(x)=\frac{e^x\times x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

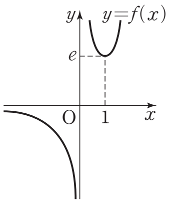
$$f''(x)=\frac{\{e^x(x-1)+e^x\}\times x^2-e^x(x-1)\times 2x}{x^4}$$

$$=\frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$이고 $x>0$에서 $f''(x)>0$, $x<0$에서 $f''(x)<0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘		↘	e	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 e를 가지고 $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$, $\lim_{x\to0+}\frac{e^x}{x}=\infty$, $\lim_{x\to0-}\frac{e^x}{x}=-\infty$이므로



함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 e를 가진다. (참)

ㄴ. 그래프의 점근선은 x축과 y축이다. (참)

ㄷ. $x>0$에서 아래로 볼록하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12 답 ④

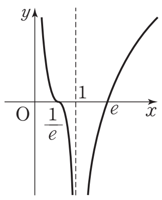
$f(x)=\ln|\ln x|$에서

$$f'(x)=\frac{1}{\ln x}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x}$$

$$f''(x)=-\frac{\ln x+x\times\frac{1}{x}}{(x\ln x)^2}=-\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}$$

즉, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표와 그래프는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	(1)	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$		$+$
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$		↘	0	↘		↗



ㄱ. $x=1$에서 증가와 감소가 바뀌기는 하지만 함숫값이 존재하지 않으므로 극솟값이 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 $x=0$과 $x=1$이다. (참)

ㄷ. $x=\frac{1}{e}$에서 변곡점을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 답 ④

$$f(x)=x\ln\frac{1}{x}+(1-x)\ln\frac{1}{1-x}$$

$$=-x\ln x-(1-x)\ln(1-x)$$

에서

$f'(x)=-(\ln x+1)-\{-\ln(1-x)-1\}=\ln(1-x)-\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln(1-x)=\ln x$, $1-x=x$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

즉, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극대이면서 최대이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\ln 2$

14 답 ⑤

$$y=\sin^3 x+\cos^3 x-4\sin x\cos x$$

$$=(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)-4\sin x\cos x$$

이때, $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$라 하면

$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$이고 $t=\sin x+\cos x$의 양변을 제곱하면

$t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$

$\therefore \sin x\cos x=\frac{1}{2}(t^2-1)\ (-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2})$

따라서 주어진 함수는

$$y=t^3-3\times\frac{1}{2}(t^2-1)\times t-4\times\frac{1}{2}(t^2-1)$$

$$=-\frac{1}{2}t^3-2t^2+\frac{3}{2}t+2$$

이고 $y'=-\frac{3}{2}t^2-4t+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(t+3)(3t-1)$

$y'=0$에서 $t=\frac{1}{3}$이므로 주어진 함수의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}-2$	↗	$\frac{61}{27}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}-2$

따라서 주어진 함수는 $t=-\sqrt{2}$일 때 최솟값 $-\frac{\sqrt{2}}{2}-2$를 갖는다.

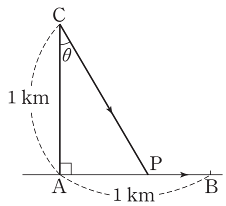
15 답 ③

섬을 C, 상륙 지점을 P라 하고

$\angle ACP=\theta$라 하면 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

$\overline{CP}=\frac{1}{\cos\theta}$, $\overline{AP}=\tan\theta$이므로

$\overline{BP}=1-\tan\theta$



점 C에서 점 B까지 가는 데 걸리는 시간을 y시간이라 하면

$$y=\frac{\frac{1}{\cos\theta}}{2}+\frac{1-\tan\theta}{4}=\frac{1}{2\cos\theta}+\frac{1-\tan\theta}{4}$$이고

$$y'=\frac{2\sin\theta}{4\cos^2\theta}-\frac{1}{4}\sec^2\theta=\frac{2\sin\theta-1}{4\cos^2\theta}$$

$y'=0$에서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \theta=\frac{\pi}{6}\left(\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right)$

따라서 함수 y의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

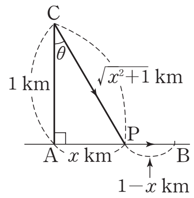
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	극소	↗	

즉, $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때, y는 극소이면서 최소이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,(\mathrm{km})$ $\quad\therefore k=\frac{\sqrt{3}}{3}$

[다른 풀이]

A 지점과 상륙 지점 P 사이의 거리를 x km라 하고 섬에서 B 지점까지 가는 데 걸리는 시간을 $f(x)$라 하면



$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}+\frac{1-x}{4}$$

$$f'(x)=\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{4}$$

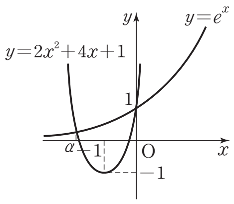
$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}\,(0\le x\le 1)$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 극소이면서 최소이므로 점 A에서 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ km 떨어진 지점에 상륙해야 한다. $\quad\therefore k=\frac{\sqrt{3}}{3}$

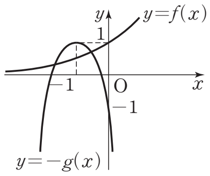
16 답 ②

①, ② 함수 $f(x)=e^x$과 $g(x)=2x^2+4x+1$의 그래프를 보면 $x=\alpha$, $x=0$에서 교점이 생기고, $x\to\infty$이면 $e^x>2x^2+4x+1$이므로 $x>0$인 어느 한 점에서 교점이 생기므로 두 곡선은 서로 다른 세 점에서 만난다.



③, ④ $x>0$인 구간에서 $f(x)=e^x$이 $g(x)=2x^2+4x+1$보다 빠르게 증가하므로 두 곡선의 교점이 존재하게 된다. 즉, $x>0$일 때, $f(x)>g(x)$와 $f(x)<g(x)$인 구간이 모두 존재한다.

⑤ 함수 $y=f(x)$, $y=-g(x)$의 그래프가 그림과 같으므로 $-g(x)>f(x)$인 구간이 존재한다.



17 답 ③

$x+ke^{-x}=0$ ⋯ ㉠의 양변에 e^x을 곱하면 $xe^x+k=0$

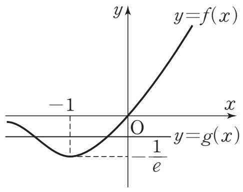
$\therefore xe^x=-k$

이때, $f(x)=xe^x$이라 하면 $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{e}$을 갖고, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다. 즉, 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $-\frac{1}{e}<-k<0$



$\therefore 0<k<\frac{1}{e}$

18 답 ②

$\sqrt{x}\ge a\ln x$에서 $\sqrt{x}-a\ln x\ge 0$

이때, $f(x)=\sqrt{x}-a\ln x$라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{a}{x}=\frac{\sqrt{x}-2a}{2x}$$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{x}=2a$ $\quad\therefore x=4a^2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$4a^2$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4a^2$에서 극소이면서 최소이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(4a^2)=\sqrt{4a^2}-a\ln 4a^2=2a-a\ln 4a^2$

따라서 모든 양수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$2a-a\ln 4a^2\ge 0$에서 $\ln 4a^2\le 2$, $0<4a^2\le e^2$

$0<2a\le e$ $\quad\therefore 0<a\le\frac{e}{2}$

따라서 조건을 만족시키도록 하는 양수 a의 최댓값은 $\frac{e}{2}$이다.

19 답 1

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-4$, $v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=\frac{2t-1}{t^2-t+3}$

이때, 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$v_Pv_Q=\frac{(2t-4)(2t-1)}{t^2-t+3}<0$에서

$(2t-4)(2t-1)<0$ ($\because t^2-t+3>0$)

$\therefore \frac{1}{2}<t<2$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=2$이므로 $ab=1$

20 답 1

두 점 사이의 거리는

$|x_Q-x_P|=|(3-\sin t)-\sin t|=|3-2\sin t|$이므로

$\sin t=-1$일 때 두 점 사이의 거리가 최대이다.

점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v_P, a_P라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=\cos t$, $a_P=\frac{dv_P}{dt}=-\sin t$이므로 두 점 사이의 거리가 최대인 순간에 점 P의 가속도의 크기는 1이다.

21 답 8

점 P의 속도와 가속도를 각각 v_P, a_P라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=\frac{\pi}{4}p\cos\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{4}q\sin\frac{\pi}{4}t$ ⋯ ㉠

$a_P=\frac{dv_P}{dt}=-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2p\sin\frac{\pi}{4}t-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2q\cos\frac{\pi}{4}t$ ⋯ ㉡

따라서 $t=4$일 때의 속도와 가속도를 구하기 위해 ㉠, ㉡에 각각 $t=4$를 대입하면

$v_P=-\frac{\pi}{4}p=-\pi$　　$\therefore p=4$

$a_P=\frac{\pi^2}{16}q=\frac{\pi^2}{4}$　　$\therefore q=4$

$\therefore p+q=4+4=8$

22 답 ③

t초 동안 점 P가 움직인 거리는 t이므로 점 P의 좌표는 $(t, 0)$

따라서 시각 t에서의 점 Q의 좌표는 (t, e^t)이다.

즉, $x=t$, $y=e^t$에서 $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=e^t$이므로 점 Q의 속도를 v라 하면 $v=(1, e^t)$

따라서 $t=1$일 때의 점 Q의 속도는 $v=(1, e)$이므로 이때의 속도의 크기, 즉 속력은 $\sqrt{1+e^2}$이다.

23 답 ①

$f(t)=k\cos wt$, $g(t)=k\sin wt$라 하면

$f'(t)=-kw\sin wt$, $g'(t)=kw\cos wt$이고

$f''(t)=-kw^2\cos wt$, $g''(t)=-kw^2\sin wt$이다.

따라서 점 P의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=(-kw\sin wt, kw\cos wt)$

$a=(-kw^2\cos wt, -kw^2\sin wt)$

따라서 속력과 가속도의 크기는 각각

$\sqrt{k^2w^2(\sin^2 wt+\cos^2 wt)}=kw$

$\sqrt{k^2w^4(\cos^2 wt+\sin^2 wt)}=kw^2$

24 답 ②

$x=t^3-4t^2-2at+2$, $y=t^3-t^2+(4a-27)t$에서

$\frac{dx}{dt}=3t^2-8t-2a$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-2t+4a-27$

한편, t초 후의 속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$이므로

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=0$에서 $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{dy}{dt}=0$

$\frac{dx}{dt}=3t^2-8t-2a=0$ ⋯ ㉠

$\frac{dy}{dt}=3t^2-2t+4a-27=0$ ⋯ ㉡

㉠$\times 2+$㉡을 하면

$9t^2-18t-27=0$, $9(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t\geq 0$)

㉠에서 $3\times 3^2-8\times 3-2a=0$　　$\therefore a=\frac{3}{2}$

25 답 ①

$y=\left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2=(-\ln ax)^2=(\ln ax)^2$에서

$y'=2\ln ax\times\frac{1}{x}$

$y''=\frac{2\times\frac{1}{x}\times x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2-2\ln ax}{x^2}$

$y''=0$에서 $\ln ax=1$　　$\therefore x=\frac{e}{a}$

이때, $x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 y''의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{a}, 1\right)$이다.

한편, 이 점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $1=\frac{e}{a}$

$\therefore a=e$

26 답 ⑤

$y=x^2\ln ax$에서 $y'=2x\ln ax+x$, $y''=2\ln ax+3$

$y''=0$에서 $ax=e^{-\frac{3}{2}}$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{a\sqrt{e^3}}$ ⋯ ㉠

이것을 $y=x^2\ln ax$에 대입하면

$y=\left(\dfrac{1}{a\sqrt{e^3}}\right)^2\times\ln\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}=-\dfrac{3}{2a^2e^3}$ ⋯ ㉡

㉠의 양변을 제곱하면 $x^2=\dfrac{1}{a^2e^3}$

이것을 ㉡에 대입하면 $y=-\dfrac{3}{2}x^2\ (x>0)$

27 답 ⑤

$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}$에서

$f'(x)=\dfrac{e^{2x}\cos x-2e^{2x}\sin x}{(e^{2x})^2}=\dfrac{\cos x-2\sin x}{e^{2x}}$

$f''(x)=\dfrac{(-\sin x-2\cos x)e^{2x}-2(\cos x-2\sin x)e^{2x}}{(e^{2x})^2}$

$=\dfrac{3\sin x-4\cos x}{e^{2x}}$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 변곡점을 가지므로

$f''(a)=0$에서 $3\sin a-4\cos a=0$ ($\because e^{2x}>0$)

$3\sin a=4\cos a$, $\dfrac{\sin a}{\cos a}=\tan a=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \cos a=\dfrac{3}{5}\left(\because 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

28 답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

따라서 $f(b)\geq f'(a)(b-a)+f(a)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 임의의 점에서의 접선보다 위쪽에 있음을 의미하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

일등급 UP

＊접선의 위치에 따른 그래프의 모양

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점에서의 접선보다

(1) 위쪽에 있다는 것은 그래프가 아래로 볼록함을 의미한다.

(2) 아래쪽에 있다는 것은 그래프가 위로 볼록함을 의미한다.

29 답 ③

$f(x)=5\ln(6-x)+\dfrac{1}{2}x^2$에서

$f'(x)=\dfrac{-5}{6-x}+x=\dfrac{-5+x(6-x)}{6-x}=\dfrac{-x^2+6x-5}{6-x}$

$f''(x)=\dfrac{-5}{(6-x)^2}+1=\dfrac{-5+(6-x)^2}{(6-x)^2}=\dfrac{x^2-12x+31}{(6-x)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$이고

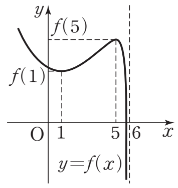
$f''(x)=0$에서 $x=6-\sqrt{5}$ ($\because x<6$)이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	1	⋯	$6-\sqrt{5}$	⋯	5	⋯	(6)
$f'(x)$	−	0	+	+	+	0	−	
$f''(x)$	+	+	+	0	−	−	−	
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	극대	↘	

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값, $x=5$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$는 $x=6-\sqrt{5}$일 때 1개의 변곡점만을 가진다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=a$의 실근의 개수가 3인 정수 a의 값이 존재하려면 $f(1)<a<f(5)$인 정수가 존재하면 된다.

이때, $\ln 5<\ln e^2$에서

$f(1)=\dfrac{1}{2}+5\ln 5<10.5$, $f(5)=12.5$이므로 정수 a가 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

30 답 ④

진수의 조건에 의하여 $f(x)>0$이고, 함수 $y=\ln f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$이다.

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\ln f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0+}\ln f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln f(x)=0$에서 $\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\right)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=e^0=1$

$\lim\limits_{x\to 0+}\ln f(x)=-\infty$에서 $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0+}f(x)\right)=-\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 $y=1$이고 $x\to 0+$일 때 $y\to 0+$인 그래프로 ④이다.

31 답 ⑤

$f(x)=x^ne^{-x}$에서

$f'(x)=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}=(nx^{n-1}-x^n)e^{-x}$

$f''(x)=\{n(n-1)x^{n-2}-nx^{n-1}\}e^{-x}-(nx^{n-1}-x^n)e^{-x}$

$=\{n(n-1)-2nx+x^2\}x^{n-2}e^{-x}$

ㄱ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$이므로 함수 $f(x)$는 x축을 점근선으로 갖는다. (참)

ㄴ. $n=4$일 때,

$f''(x)=(x^2-8x+12)x^2e^{-x}=(x-2)(x-6)x^2e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $e^{-x}>0$이므로 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=6$

그런데 $x=2$, $x=6$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 이 두 점에서 함수 $f(x)$는 변곡점을 갖지만 $x=0$의 좌우에서는 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 이 점에서 변곡점을 갖지 않는다. 따라서 $n=4$일 때, 함수 $f(x)$는 2개의 변곡점을 갖는다. (참)

ㄷ. $f'(n)=0$이고 $f''(n)=-n^{n-1}e^{-n}<0$이므로

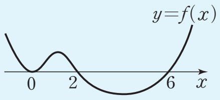
함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

일등급 UP

＊함수 $f(x)=x^4e^{-x}$의 변곡점의 개수

ㄴ에서 $f''(x)=(x-2)(x-6)x^2e^{-x}$이고 $e^{-x}>0$이므로 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 사차방정식 $(x-2)(x-6)x^2=0$의 실근과 같다. 이때, 함수 $y=(x-2)(x-6)x^2$의 그래프는 그림과 같으므로 $x=2$, $x=6$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지만 $x=0$의 좌우에서는 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다. 따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 2이다.

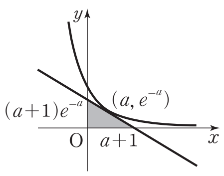


32 답 ③

점 $(a,\ e^{-a})$에서의 접선의 방정식은

$y-e^{-a}=-e^{-a}(x-a)$

이 직선의 x절편과 y절편은 각각 $a+1$, $(a+1)e^{-a}$이므로 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

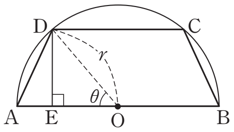


$S=\frac{1}{2}(a+1)(a+1)e^{-a}=\frac{1}{2}(a+1)^2e^{-a}$이므로

$S'=-\frac{1}{2}(a+1)(a-1)e^{-a}(a>0)$

따라서 $a=1$일 때 넓이 S는 최대가 된다.

33 답 ⑤



그림에서 $\overline{DC}=2\overline{OE}=2r\cos\theta$, $\overline{DE}=r\sin\theta$이므로

사다리꼴 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times(\overline{DC}+\overline{AB})\times\overline{DE}=\frac{1}{2}\times(2r\cos\theta+2r)\times r\sin\theta$

$=r^2(\cos\theta+1)\sin\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{dS}{d\theta}=r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos\theta)=r^2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$

$=r^2(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$

$\frac{dS}{d\theta}=0$에서 $2\cos\theta=1$ $\quad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

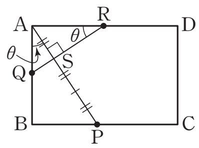
따라서 넓이 S의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$	↘	

따라서 최댓값은 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$

34 답 27

선분 AP의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 S, $\angle BAP=\theta$라 하면



$\overline{AP}=\frac{3}{\cos\theta}$, $\overline{AS}=\frac{1}{3}\overline{AP}=\frac{1}{\cos\theta}$

$\overline{AQ}=\frac{\overline{AS}}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

또한, 삼각형 AQR에서 $\overline{AS}\perp\overline{QR}$이므로 $\angle ARQ=\theta$

$\therefore\ \overline{QR}=\frac{\overline{AQ}}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta-\sin^3\theta}$

이때, $\sin\theta=t$라 하면 $\overline{QR}=\frac{1}{t-t^3}$이고, $3<\overline{AP}\le3\sqrt{3}$,

$0<\overline{BP}\le3\sqrt{2}$에서 $0<\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}=\sin\theta<\frac{\sqrt{6}}{3}$

이때, $f(t)=t-t^3\left(0<t<\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$이라 하면 $f'(t)=1-3t^2$

$f'(t)=0$에서 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\because\ 0<t<\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

따라서 $f(t)$는 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때, 최댓값 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$을 가지므로

$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때, 선분 QR의 길이는 최소이다.

즉, $k=\frac{1}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로 $4k^2=4\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=27$

35 답 4

$\ln x=t$라 하면 $x=e^t$에서 주어진 함수는

$y=(2t^2+4t+4)e^t(t\ge-2)$이고 양변을 t에 대하면 미분하면

$y'=(4t+4)e^t+(2t^2+4t+4)e^t=2(t+2)^2e^t$

즉, 모든 실수 t에 대하여 $y'\ge0$이므로 $y=(2t^2+4t+4)e^t$는

$t=-2$에서 최솟값을 갖는다.

따라서 $\ln a=-2$에서 $a=e^{-2}$이고,

$b=\{2\times(-2)^2+4\times(-2)+4\}e^{-2}=4e^{-2}$

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{4e^{-2}}{e^{-2}}=4$

36 답 ③

$y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(t,\ \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$ $\qquad\therefore\ y=\frac{1}{t}x-1+\ln t$

즉, 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(t(1-\ln t),\ 0)$, $(0,\ -1+\ln t)$이므로 삼각형 OAB의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\frac{1}{2}|t(1-\ln t)|\times|-1+\ln t|=\frac{1}{2}t(1-\ln t)^2$

$(\because\ 0<t<1)$

$f'(t)=\frac{1}{2}\left\{(1-\ln t)^2+t\times2(1-\ln t)\times\left(-\frac{1}{t}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\{(\ln t)^2-1\}=\frac{1}{2}(\ln t-1)(\ln t+1)$

$f'(t)=0$에서 $\ln t=-1(\because 0<t<1)$이므로 $t=\frac{1}{e}$

따라서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	극대	↘	

즉, 함수 $f(t)$는 $t=\frac{1}{e}$에서 극대이면서 최대이므로 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값은

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e}\left(1-\ln\frac{1}{e}\right)^2=\frac{2}{e}$$

37 답 ③

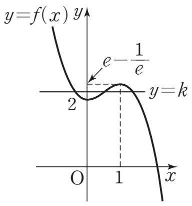
$e^x(2-x)=xe^{-x}+k$에서 $e^x(2-x)-xe^{-x}=k$

이때, $f(x)=e^x(2-x)-xe^{-x}$라 하면

$f'(x)=e^x(2-x)-e^x-e^{-x}+xe^{-x}=-(e^x-e^{-x})(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘



따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=e-\frac{1}{e}$

이고 극솟값은 $f(0)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

이때, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 구하는 k의 값의 범위는 $2<k<e-\frac{1}{e}$이다.

38 답 ③

곡선 $y=e^{ax}$, 즉 $\ln y=ax$와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 방정식 $\ln x=ax$의 실근의 개수와 같다.

따라서 주어진 곡선과 직선 $y=x$의 교점의 개수는

곡선 $y=\ln x$ ⋯ ㉠와 직선 $y=ax$ ⋯ ㉡의 교점의 개수와 같다.

이때, 곡선 ㉠ 위의 점 $(t, \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$이고, 이것이 원점을 지날 조건은

$0-\ln t=\frac{1}{t}(0-t)\qquad \therefore t=e$

즉, 원점을 지나는 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{e}x$이다.

따라서 곡선 ㉠과 직선 ㉡이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 a의 값의 범위는 $0<a<\frac{1}{e}$이므로 곡선 $y=e^{ax}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 a의 값의 범위는 $0<a<\frac{1}{e}$이다.

39 답 ④

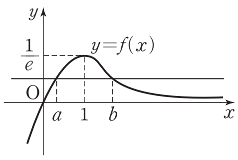
$f(x)=\frac{x}{e^x}$라 하면

$f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$이고

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



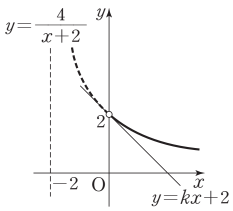
따라서 $f(a)=f(b)\,(a<b)$, 즉

$\frac{a}{e^a}=\frac{b}{e^b}$를 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

$0<a<1$이다.

40 답 ④

$x>0$에서 함수 $y=\frac{4}{x+2}$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 실수 k의 최댓값은

곡선 $y=\frac{4}{x+2}$ 위의 점 $(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기와 같다.

이때, $y'=-\frac{4}{(x+2)^2}$이므로 점 $(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 -1이다.

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 -1이다.

41 답 ②

$f(x)=\sin 2x+2\sin x$라 하면 함수 $f(x)$는 주기가 2π이므로 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 모든 실수 x에서의 함수 $f(x)$의 최댓값과 같다. 즉, 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하자.

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\cos 2x+2\cos x\\&=2(2\cos^2 x-1)+2\cos x\\&=2(2\cos^2 x+\cos x-1)\\&=2(2\cos x-1)(\cos x+1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

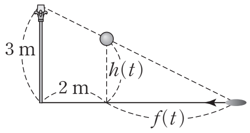
따라서 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 $f(x)$의 최댓값이 될 수 있는 값들은

$f(0)=0,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ f(\pi)=0,\ f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ f(2\pi)=0$

이므로 $f(x)\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 모든 실수 x에서 주어진 부등식을 만족시키는 a의 값의 범위는 $a\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로 a의 최솟값은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

42 답 ③



t초 후의 공의 높이를 $h(t)$라 하면 $h(t)=3-5t^2$

그림에서 $3 : h(t)=\{2+f(t)\} : f(t)$

$f(t)=\frac{2h(t)}{3-h(t)}=\frac{6-10t^2}{5t^2}=\frac{6}{5t^2}-2 \qquad \therefore f'(t)=-\frac{12}{5t^3}$

따라서 0.5초 후의 공의 그림자가 이동하는 속도는

$f'(0.5)=-\frac{96}{5}$(m/초)이므로 구하는 속력은

$\left|-\frac{96}{5}\right|=19.2$(m/초)이다.

43 답 96

시각 t에서의 점 P의 위치 x가 $x=\frac{2}{t^2+b}$ ··· ㉠이므로

시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도는 각각

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2\times 2t}{(t^2+b)^2}=-\frac{4t}{(t^2+b)^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{4(t^2+b)^2-4t\times 2(t^2+b)\times 2t}{(t^2+b)^4}$$

$$=-\frac{4(t^2+b)-16t^2}{(t^2+b)^3}=\frac{12t^2-4b}{(t^2+b)^3} \cdots ㉡$$

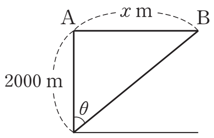
한편, $t=2$일 때 가속도는 ㉡에 $t=2$를 대입하면

$\frac{48-4b}{(4+b)^3}$이다. 즉, 이 값이 0이므로 $48-4b=0$에서 $b=12$

또한, $t=2$일 때 위치는 ㉠에 $t=2$를 대입하면

$$\frac{2}{4+b}=\frac{2}{4+12}=\frac{1}{8}=a \qquad \therefore \frac{b}{a}=\frac{12}{\frac{1}{8}}=96$$

44 답 ⑤



그림에서 $\tan\theta=\frac{x}{2000}$

양변을 t에 대하여 미분하면

$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2000}\frac{dx}{dt}$ ··· ㉠

비행기의 속도가 500 m/초이므로 $\frac{dx}{dt}=500$ ··· ㉡

한편, 2초 후에 비행기가 지나간 거리 x는

$x=2\times500=1000$(m)이고, 이때의 θ에 대하여

$\tan\theta=\frac{1000}{2000}=\frac{1}{2}$ ··· ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2000}\frac{dx}{dt}\times\frac{1}{\sec^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2000}\times500\times\frac{4}{5}\ (\because \sec^2\theta=\tan^2\theta+1)$$

$$=\frac{1}{5}\ \text{(라디안/초)}$$

45 답 1

$y=x^2-x$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dt}=(2x-1)\frac{dx}{dt}$$

이때, $x=2$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$이므로 점 R의 속도는

$$\frac{dy}{dt}=(2\times2-1)\times\frac{1}{3}=1$$

46 답 5

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 속도는 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$이고 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2}=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

이때, 기울기가 4이고 원점을 지나는 직선 $y=4x$와 곡선

$y=\sqrt{x}$의 원점이 아닌 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{16}}}=2$이고 $\frac{dx}{dt}=\sqrt{5}$이다.

따라서 직선 OP의 기울기가 4가 되는 순간 점 P의 속력은

$$\frac{dx}{dt}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{5}\times\sqrt{1+2^2}=5$$

47 답 4

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 A의 좌표는 $(x, 0)$이므로

$x=\ln 2$일 때 점 A의 속력은 $x=\ln 2$일 때 $\frac{dx}{dt}$의 값이다.

한편, 점 P의 속도는 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$이므로 속력은

$$2=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2}\ \left(\because \frac{dx}{dt}>0\right)$$

$$=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

이때, $\frac{dy}{dx}=e^x$이므로

$$2=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+e^{2x}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{2}{\sqrt{1+e^{2x}}} \cdots ㉠$$

따라서 구하는 속력은 ㉠에 $x=\ln 2$를 대입하면

$$k=\frac{2}{\sqrt{1+e^{2\ln 2}}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\therefore 5k^2=4$

48 답 ④

$x=4-\sin t$, $y=3t-\cos t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=-\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=3+\sin t$

이므로 속도는 $(-\cos t,\ 3+\sin t)$이고 속도의 크기, 즉 속력은

$$\sqrt{(-\cos t)^2+(3+\sin t)^2}=\sqrt{\cos^2 t+9+6\sin t+\sin^2 t}$$
$$=\sqrt{10+6\sin t}$$

이때, $-1\le\sin t\le 1$이므로 속력의 최댓값 M과 최솟값 m은 각각

$M=\sqrt{10+6\times 1}=4$, $m=\sqrt{10+6\times(-1)}=2$

$\therefore M+m=6$

49 답 ①

점 P가 매초 1의 속력으로 움직이므로 t초 후의 호 AP의 길이는 t이다. 즉, $\angle\mathrm{AOP}=t$에서 $\angle\mathrm{BOP}=\dfrac{\pi}{2}-t$이므로 점 P의 좌표는

$\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right),\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\right)=(\sin t,\ \cos t)$이다.

따라서 직선 OP의 방정식은 $y=\dfrac{\cos t}{\sin t}x$이고 직선 AB의 방정식은 $y=-x+1$이므로 이 두 직선의 교점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{\tan t}{1+\tan t},\ \dfrac{1}{1+\tan t}\right)$이고, 점 Q의 속도는

$\left(\dfrac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2},\ -\dfrac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}\right)$이다.

한편, 점 P의 x좌표가 $\dfrac{3}{5}$인 순간의 시각을 $t=\alpha$라 하면

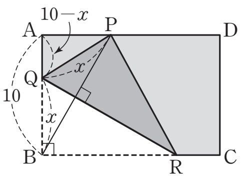
$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$, $\sec\alpha=\dfrac{5}{4}$이므로

점 P의 x좌표가 $\dfrac{3}{5}$인 순간의 점 Q의 속도는

$\left(\dfrac{\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^2},\ -\dfrac{\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^2}\right)=\left(\dfrac{25}{49},\ -\dfrac{25}{49}\right)$이다.

$\therefore b-a=-\dfrac{25}{49}-\dfrac{25}{49}=-\dfrac{50}{49}$

50 답 23



$\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{AQ}}=10-x$

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{x^2-(10-x)^2}$

$=\sqrt{20(x-5)}$

한편, $\angle\mathrm{QPR}=90°$

이므로 $\angle\mathrm{QPB}=\angle\mathrm{PRQ}$이고, 삼각형 PQB가

이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{QPB}=\angle\mathrm{QBP}$에서

$\angle\mathrm{ABP}=\angle\mathrm{PRQ}=\angle\mathrm{BRQ}$

$\therefore \triangle\mathrm{ABP}\backsim\triangle\mathrm{BRQ}$ (AA 닮음) ---------- ⓐ

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BR}}:\overline{\mathrm{BQ}}$이므로

$10:\sqrt{20(x-5)}=\overline{\mathrm{BR}}:x$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{BR}}=\dfrac{10x}{\sqrt{20(x-5)}}$

따라서 삼각형 PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면 $\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{PR}}$이므로

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}\times x\times\frac{10x}{\sqrt{20(x-5)}}$$
$$=\frac{5x^2}{\sqrt{20(x-5)}}$$ ---------- ⓑ

$$\frac{dS(x)}{dx}=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2x\sqrt{x-5}-x^2\times\frac{1}{2\sqrt{x-5}}}{x-5}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{4x(x-5)-x^2}{2(x-5)\sqrt{x-5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{3x^2-20x}{2(x-5)\sqrt{x-5}}$$

$\dfrac{dS(x)}{dx}=0$에서 $x=\dfrac{20}{3}$ $(5<x<10)$이고, $x=\dfrac{20}{3}$의 좌우에서

$\dfrac{dS(x)}{dx}$의 부호가 음수에서 양수로 바뀌므로 $S(x)$는

$x=\dfrac{20}{3}$에서 극소이면서 최소이다.

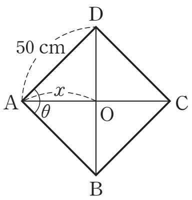
즉, 삼각형 PQR의 넓이 $S(x)$가 최소일 때 선분 PQ의 길이는 $\dfrac{20}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=20$이므로 $p+q=3+20=23$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $\overline{\mathrm{PQ}}=x$라 하고 $\triangle\mathrm{ABP}\backsim\triangle\mathrm{BRQ}$임을 보인다.	[30%]
ⓑ 삼각형 PQR의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.	[30%]
ⓒ 선분 PQ의 길이를 구한다.	[40%]

51 답 16



그림과 같이 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라 하고,

$\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{OC}}=x$, $\angle\mathrm{BAD}=\theta$라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{OD}}$이므로 $x=50\cos\dfrac{\theta}{2}$ ---------- ⓐ

양변을 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dt}=50\times\left(-\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}\dfrac{d\theta}{dt}$ ⋯ ㉠ ---------- ⓑ

이때, 선분 AC의 길이의 변화율이 2이므로 $\dfrac{dx}{dt}=1$

또, 선분 AC의 길이가 80 cm일 때, $\overline{\mathrm{AO}}=x=40$ cm,

$\overline{\mathrm{OD}}=30$ cm이므로 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$

이것들을 ㉠에 대입하면 $1=50\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{1}{2}\dfrac{d\theta}{dt}$

$\therefore \dfrac{d\theta}{dt}=-\dfrac{1}{15}$

따라서 점 A에서 점 C까지의 거리가 80 cm가 되는 순간에

$\angle\mathrm{BAD}$의 크기가 줄어드는 속력은 $\left|\dfrac{d\theta}{dt}\right|=\dfrac{1}{15}$이므로

$p=15$, $q=1$이다.

$\therefore p+q=15+1=16$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{OC}}=x$, $\angle\mathrm{BAD}=\theta$라 하고 x와 θ 사이의 관계식을 구한다.	[30%]
ⓑ 구한 관계식을 t에 대하여 미분한다.	[30%]
ⓒ 선분 AC의 길이가 80 cm가 되는 순간에 $\angle\mathrm{BAD}$의 크기가 줄어드는 속력을 구한다.	[40%]

52 답 96

$f(x)=\frac{2}{x^2+b}$$(b>0)$라 하면 점 $(2,\ a)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로 이 점은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다.

즉, $f(2)=a$에서 $a=\frac{2}{4+b}$ ⋯ ㉠

$f(x)=\frac{2}{x^2+b}$에서 $f'(x)=-\frac{2\times 2x}{(x^2+b)^2}=-\frac{4x}{(x^2+b)^2}$

$f''(x)=-\frac{4(x^2+b)^2-4x\times 2(x^2+b)\times 2x}{(x^2+b)^4}=\frac{12x^2-4b}{(x^2+b)^3}$

이때, 점 $(2,\ a)$가 변곡점이므로 $f''(2)=0$에서

$\frac{12\times 2^2-4b}{(2^2+b)^3}=0,\ \frac{48-4b}{(4+b)^3}=0,\ 4b=48$ $\quad\therefore b=12$

$b=12$를 ㉠에 대입하면 $a=\frac{2}{4+12}=\frac{1}{8}$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{12}{\frac{1}{8}}=96$

53 답 ①

ㄱ. 조건 (나)의 $f(x)+f(-x)=0$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭인 함수이다. 이때, 조건 (가)에서 $f(x)\neq 1$이므로 $f(x)\neq -1$이다. (참)

ㄴ. 조건 (다)에서

$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

$\quad=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}=1-\{f(x)\}^2$ ⋯ ㉠

한편, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 원점에 대하여 대칭인 함수 $y=f(x)$의 그래프는 반드시 원점을 지나야 하고 ㄱ에 의하여 $f(x)\neq 1,\ f(x)\neq -1$이므로 $f(x)$의 값의 범위는 $-1<f(x)<1$이다. 즉, ㉠에 의하여 $0<f'(x)=1-\{f(x)\}^2<1$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이다. (거짓)

ㄷ. ㉠에서 $f'(x)=1-\{f(x)\}^2$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면 $f''(x)=-2f(x)f'(x)$이고 $f''(x)=0$을 만족시키는 x는 $x=0$뿐이다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 변곡점을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

54 답 72

$g(x)=f(x)e^{-x}$에서 $g'(x)=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}$

$g''(x)=\{f''(x)-2f'(x)+f(x)\}e^{-x}$

$f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$라 하면

$f'(x)=2ax+b,\ f''(x)=2a$이므로

$g''(x)=\{ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c\}e^{-x}$ ⋯ ㉠

조건 (가)에서 방정식 $g''(x)=0$의 두 근이 $x=1,\ x=4$이므로

$g''(x)=a(x-1)(x-4)e^{-x}=(ax^2-5ax+4a)e^{-x}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 계수를 비교하면 $b-4a=-5a,\ 2a-2b+c=4a$

$\therefore b=-a,\ c=0$

따라서 $f(x)=ax^2-ax$이고

$g(x)=(ax^2-ax)e^{-x},\ g'(x)=(-ax^2+3ax-a)e^{-x}$

한편, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))$에서 그은 접선의 방정식 $y-g(t)=g'(t)(x-t)$가 점 $(0,\ k)$를 지나므로

$k-g(t)=g'(t)(0-t)$ $\qquad\therefore k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$

조건 (나)에 의하여 위 방정식이 $-1<k<0$에서 서로 다른 세 개의 실근을 가져야 한다. 즉, $h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$라 하면 곡선 $y=h(t)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

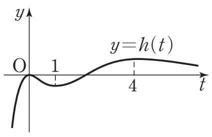
$h'(t)=a(3t^2-4t)e^{-t}+a(t^3-2t^2)(-e^{-t})$

$\quad=a(-t^3+5t^2-4t)e^{-t}=-at(t-1)(t-4)e^{-t}$

$h'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=4$

(i) $a>0$일 때, 함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	⋯	0	⋯	1	⋯	4	⋯
$h'(t)$	+	0	−	0	+	0	−
$h(t)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘



따라서 함수 $h(t)$는 $y=0$을 점근선을 가지므로 그래프의 개형은 그림과 같다.

즉, $-1<k<0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $h(1)=-1$이어야 한다.

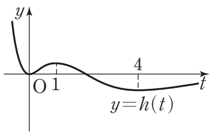
즉, $h(1)=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$

$\therefore g(-2)\times g(4)=f(-2)e^2\times f(4)e^{-4}$

$\qquad=6e\times e^2\times 12e\times e^{-4}=72$

(ii) $a<0$일 때, 함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	⋯	0	⋯	1	⋯	4	⋯
$h'(t)$	−	0	+	0	−	0	+
$h(t)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗



따라서 함수 $h(t)$는 $y=0$을 점근선을 가지므로 그래프의 개형은 그림과 같다.

즉, $-1<k<0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만날 수 없다.

(i), (ii)에 의하여 $g(-2)\times g(4)=72$

55 답 ④

$y=2e^{-x}$에서 $y'=-2e^{-x}$

즉, 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$에서의 접선의 기울기는 $-2e^{-t}$이므로 접선의 방정식을 구하면

$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$ $\qquad\therefore y=-2e^{-t}x+2te^{-t}+2e^{-t}$

$\therefore \mathrm{B}(0,\ 2te^{-t}+2e^{-t}),\ \mathrm{A}(0,\ 2e^{-t})$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=2te^{-t},\ \overline{\mathrm{AP}}=t$이므로 삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\triangle APB=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times t\times 2te^{-t}=t^2e^{-t}$

$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=(2-t)te^{-t}$

$S'(t)=0$에서 $(2-t)te^{-t}=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

즉, 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

따라서 함수 $S(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이므로 최대가 되도록 하는 t의 값은 $t=2$이다.

56 답 4

$x=1-\cos 4t$, $y=\frac{1}{4}\sin 4t$에서 $\frac{dx}{dt}=4\sin 4t$, $\frac{dy}{dt}=\cos 4t$

이므로 점 P의 속도는 $(4\sin 4t, \cos 4t)$이고 속력은

$\sqrt{(4\sin 4t)^2+(\cos 4t)^2}=\sqrt{15\sin^2 4t+1}$

이때, $-1\le\sin 4t\le 1$이므로 속력이 최대가 되려면

$\sin^2 4t=1$이어야 한다. 즉, $\cos^2 4t=0$

한편, $\frac{d^2x}{dt^2}=16\cos 4t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-4\sin 4t$이므로

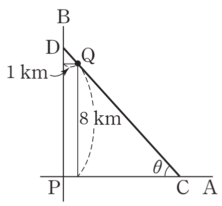
점 P의 가속도는 $(16\cos 4t, -4\sin 4t)$이고 가속도의 크기는

$\sqrt{(16\cos 4t)^2+(-4\sin 4t)^2}=\sqrt{256\cos^2 4t+16\sin^2 4t}$ $\cdots$ ㉠

이다. 따라서 점 P의 속력이 최대일 때, 점 P의 가속도의 크기는 ㉠에 $\sin^2 4t=1$, $\cos^2 4t=0$을 대입하면

$\sqrt{256\times 0+16\times 1}=4$

57 답 ⑤



새로운 도로와 기존 도로 PA, PB가 만나는 점을 각각 C, D라 하고 마을의 위치를 Q라 하자.

새 직선 도로 CD와 도로 PA가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때,

$\overline{CD}=\overline{QC}+\overline{QD}=\frac{8}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$

$f(\theta)=\frac{8}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$이라 하면

$f'(\theta)=-\frac{8\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{-(8\cos^3\theta-\sin^3\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$f'(\theta)=0$에서 $8\cos^3\theta-\sin^3\theta=0$

$\tan^3\theta=8$ $\qquad\therefore \tan\theta=2$

도함수 $f'(\theta)$의 부호를 조사하면 $\tan\theta=2$일 때 $f(\theta)$는 최소이다.

이때, $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로 새로운 직선 도로의 길이의

최솟값은 $f(\theta)=\frac{8}{\frac{2}{\sqrt{5}}}+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=5\sqrt{5}$

58 답 ⑤

$f'(x)=1+\cos x$, $f''(x)=-\sin x$

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)=\{1+\cos(x+\sin x)\}(1+\cos x)$

$g''(x)=f''(f(x))\{f'(x)\}^2+f'(f(x))f''(x)$

$\quad=-\sin(x+\sin x)\times(1+\cos x)^2$

$\qquad+\{1+\cos(x+\sin x)\}\times(-\sin x)$

ㄱ. $1+\cos x\ge 0$이고 $1+\cos(x+\sin x)\ge 0$이므로 실수 전체에서 $g'(x)=\{1+\cos(x+\sin x)\}(1+\cos x)\ge 0$이다.

따라서 함수 $g(x)$는 실수 전체에서 증가한다. (참)

ㄴ. $0<x<\pi$에서 $0<x+\sin x<\pi$이므로 $\sin(x+\sin x)>0$

따라서 $0<x<\pi$에서

$g''(x)=-\sin(x+\sin x)\times(1+\cos x)^2$

$\qquad-\sin x\times\{1+\cos(x+\sin x)\}\le 0$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 구간 $(0, \pi)$에서 위로 볼록하다. (참)

ㄷ. $g(x)=f(f(x))=f(x)+\sin f(x)$이므로

$g(n\pi)=f(n\pi)+\sin f(n\pi)=n\pi$

$g((n-1)\pi)=f((n-1)\pi)+\sin f((n-1)\pi)=(n-1)\pi$

따라서 $\frac{g(n\pi)-g((n-1)\pi)}{n\pi-(n-1)\pi}=\frac{\pi}{\pi}=1$이고 함수 $g(x)$는 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $g'(x)=1$인 x가 $(n-1)\pi<x<n\pi$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

59 답 ⑤

점 P는 원점을 출발하여 가속도 4로 운동하므로 속도는 $4t$, 위치는 $2t^2$이다. 점 P가 좌표 128에 도착하는 순간의 시각은 $2t^2=128$에서 $t=8$이고 이때의 속도는 32이다.

또한, 좌표 128 이후에 점 P는 속도가 매초 2씩 감소하므로 좌표 128에 도착하는 순간의 시간을 0으로, 좌표 128을 0으로 재설정하면 점 P의 속도 v_P와 위치 x_P는 각각 $v_P=-2t+32$, $x_P=-t^2+32t$이다.

점 Q는 좌표 30을 출발하여 가속도 4로 운동하므로 속도는 $4t$, 위치는 $2t^2+30$이다. 점 Q가 좌표 128에 도착하는 순간의 시각은 $2t^2+30=128$에서 $t=7$이고 이때의 속도는 28이다.

즉, 점 Q는 점 P보다 1초 먼저 점 A(128)에 도착한다. 이때의 점 Q의 속도 v_Q와 위치 x_Q를 점 P의 시각을 기준으로 하면

$v_Q=-2(t+1)+28$

$x_Q=-(t+1)^2+28(t+1)=-t^2+26t+27$

따라서 A(128)을 지나는 순간부터 두 점 P와 Q가 만나는 시각은 $x_P=x_Q$에서

$-t^2+32t=-t^2+26t+27$, $6t=27$ $\qquad\therefore t=4.5$

즉, 출발 후 두 점 P, Q가 만나는 시각은 $8+4.5=12.5$(초)이다.

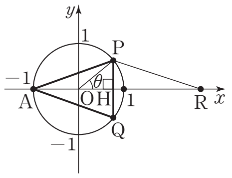
60 답 ③

$\angle\mathrm{POR}=\theta$라 하고 선분 PQ가 x축과 만나는 점을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\sin\theta$, $\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$

따라서 삼각형 PAQ의 넓이를

$f(\theta)$라 하면



$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times2\sin\theta\times(1+\cos\theta)$

$\quad=\sin\theta+\sin\theta\cos\theta$

위 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$f'(\theta)=\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$

$\quad=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$f'(\theta)=0$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$이고, $f'(\theta)$의 부호는 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀌므로 삼각형 PAQ의 넓이는 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$에서 극대이면서 최대이다.

한편, 점 P가 매초 1의 속력으로 움직이므로 $\dfrac{dl}{dt}=1$이고, $l=r\theta$이므로 $\dfrac{d\theta}{dt}=1$이다.

이때, $\overline{\mathrm{HR}}=\sqrt{(\sqrt{7})^2-\sin^2\theta}$이므로 점 R의 x좌표를 $g(\theta)$라 하면

$g(\theta)=\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{HR}}=\cos\theta+\sqrt{7-\sin^2\theta}$

위 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dg(\theta)}{dt}=-\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}+\dfrac{-2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{7-\sin^2\theta}}\dfrac{d\theta}{dt}$ ⋯ ㉠

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때 점 R의 속도는 ㉠에 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$를 대입하면

$$\frac{dg(\theta)}{dt}=-\sin\frac{\pi}{3}\times1+\frac{-2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{2\sqrt{7-\sin^2\frac{\pi}{3}}}\times1=-\frac{3\sqrt{3}}{5}$$

61 답 ①

3시에 물탱크에 있던 물의 양은 $3\pi\ \mathrm{m}^3$이었고 한 시간마다 $10\ \mathrm{m}^3$의 물을 넣고 있으므로 t시일 때, 물탱크에 남아 있는 물의 양을 V라 하면 사용된 물의 양 V_1은

$V_1=3\pi+10(t-3)-V$

t시일 때, 물이 사용되는 속도는 $\dfrac{dV_1}{dt}=10-\dfrac{dV}{dt}$ ⋯ ㉠

그래프에서 $t=10$일 때, 접선의 기울기가

$\dfrac{3-9}{12-10}=-3$이므로 $\dfrac{dh}{dt}=-3$ ⋯ ㉡

물탱크의 물의 양은 $V=\pi\times1^2\times h=\pi h$이므로

$\dfrac{dV}{dt}=\pi\times\dfrac{dh}{dt}$

즉, $t=10$일 때, $\dfrac{dV}{dt}=\pi\times(-3)=-3\pi$ ($\because$ ㉡) ⋯ ㉢

따라서 아침 10시에 물탱크에서 빠져나가는 물의 속력은 ㉠, ㉢에 의하여 $10+3\pi(\mathrm{m}^3/시)$이다.

Ⅲ 적분법

07 여러 가지 적분법

문제편 87P

01 답 풀이 참조

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3-2x^2+1}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)(x^2-3x+3)-2}{x+1}dx$

$\displaystyle\quad=\int\left(x^2-3x+3-\frac{2}{x+1}\right)dx$

$\displaystyle\quad=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-2\ln|x+1|+C$

(C는 적분상수)

(2) $\displaystyle\int(e^x+e^{-x})^2dx=\int(e^{2x}+e^{-2x}+2)dx$

$\displaystyle\quad=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x+C$ (C는 적분상수)

(3) $\displaystyle\int\frac{\sin^3x+1}{\sin^2x}dx=\int(\sin x+\csc^2x)dx$

$\quad=-\cos x-\cot x+C$ (C는 적분상수)

(4) $\displaystyle\int\tan^2x\,dx=\int(\sec^2x-1)dx=\tan x-x+C$

(C는 적분상수)

(5) $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x=1-2\sin^2x$에서

$\sin^2x=\dfrac{1-\cos2x}{2}$이므로

$\displaystyle\int\sin^2x\,dx=\int\frac{1-\cos2x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin2x+C$

(C는 적분상수)

02 답 풀이 참조

(1) $\displaystyle\int\sin^3x\,dx=\int\sin^2x\sin x\,dx$

$\displaystyle\quad=\int(1-\cos^2x)\sin x\,dx$

이때, $\cos x=t$라 하면 $-\sin x\,dx=dt$이므로

$\displaystyle\int(1-\cos^2x)\sin x\,dx=\int(t^2-1)dt=\frac{1}{3}t^3-t+C$

$\displaystyle\quad=\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x+C$

(C는 적분상수)

(2) $\displaystyle\int\cos^3x\,dx=\int\cos^2x\cos x\,dx$

$\displaystyle\quad=\int(1-\sin^2x)\cos x\,dx$

이때, $\sin x=t$라 하면 $\cos x\,dx=dt$이므로

$\displaystyle\int(1-\sin^2x)\cos x\,dx=\int(1-t^2)dt=t-\frac{1}{3}t^3+C$

$\displaystyle\quad=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+C$

(C는 적분상수)

(3) $\int \tan^3 x dx = \int \tan^2 x \tan x dx$

$= \int (\sec^2 x - 1) \tan x dx$

이때, $\sec x = t$라 하면 $\sec x \tan x dx = dt$에서

$\tan x dx = \frac{1}{\sec x} dt = \frac{1}{t} dt$이므로

$\int (\sec^2 x - 1) \tan x dx = \int (t^2 - 1) \frac{1}{t} dt$

$= \int \left(t - \frac{1}{t}\right) dt$

$= \frac{1}{2} t^2 - \ln |t| + C$

$= \frac{1}{2} \sec^2 x - \ln |\sec x| + C$

(C는 적분상수)

(4) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

이때, $\cos x = t$라 하면 $-\sin x dx = dt$

$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{t} dt = -\ln |t| + C$

$= -\ln |\cos x| + C$ (C는 적분상수)

(5) $(\sec x + \tan x)' = \sec x \tan x + \sec^2 x$이므로

$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

$= \ln |\sec x + \tan x| + C$ (C는 적분상수)

(6) $\int \sin x \cos 2x dx = \int \sin x (2\cos^2 x - 1) dx$

이때, $\cos x = t$라 하면 $-\sin x dx = dt$이므로

$\int \sin x (2\cos^2 x - 1) dx = \int (1 - 2t^2) dt = t - \frac{2}{3} t^3 + C$

$= \cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x + C$

(C는 적분상수)

[다른 풀이]

(3) $\int \tan^3 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x dx$

$= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x dx$

이때, $\cos x = t$라 하면 $-\sin x dx = dt$이므로

$\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x dx = \int \frac{t^2 - 1}{t^3} dt = \ln |t| + \frac{1}{2t^2} + C$

$= \ln |\cos x| + \frac{1}{2} \sec^2 x + C$

$= \frac{1}{2} \sec^2 x - \ln |\sec x| + C$

(C는 적분상수)

(5) $\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx$

$= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$

이때, $\sin x = t$라 하면 $\cos x dx = dt$이므로

$\int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{1 - t^2} dt = \int \frac{1}{(1+t)(1-t)} dt$

$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt$

$= \frac{1}{2} (\ln |1+t| - \ln |1-t|) + C$

$= \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$

$= \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$

$= \frac{1}{2} \ln (\sec x + \tan x)^2 + C$

$= \ln |\sec x + \tan x| + C$ (C는 적분상수)

03 답 풀이 참조

(1) $x^2 = t$라 하면 $2x dx = dt$이므로

$\int x e^{x^2} dx = \int \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$ (C는 적분상수)

(2) $e^x + 1 = t$라 하면 $e^x dx = dt$에서 $dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t-1} dt$이므로

$\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{t(t-1)} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt$

$= \ln |t-1| - \ln |t| + C$

$= x - \ln (e^x + 1) + C$ (C는 적분상수)

(3) $\ln x - 2 = t$라 하면 $\frac{1}{x} dx = dt$이므로

$\int \frac{\ln x - 2}{x} dx = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C$

$= \frac{1}{2} (\ln x - 2)^2 + C$ (C는 적분상수)

04 답 풀이 참조

(1) $\int \frac{1}{x^2 + 2x} dx = \int \frac{1}{x(x+2)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) dx$

$= \frac{1}{2} (\ln |x| - \ln |x+2|) + C$

$= \frac{1}{2} \ln \left|\frac{x}{x+2}\right| + C$ (C는 적분상수)

(2) $\int \frac{x+2}{x^2 + 4x - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2 + 4x - 1} dx$

$= \frac{1}{2} \ln |x^2 + 4x - 1| + C$ (C는 적분상수)

(3) $\int \frac{\tan x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x (1 + \cos x)} dx$

이때, $\cos x = t$라 하면 $-\sin x dx = dt$이므로

$\int \frac{\sin x}{\cos x (1 + \cos x)} dx = -\int \frac{1}{t(1+t)} dt$

$= \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}\right) dt$

$= \ln |t+1| - \ln |t| + C$

$= \ln \left|1 + \frac{1}{t}\right| + C$

$= \ln |1 + \sec x| + C$

(C는 적분상수)

05 답 (1) $\frac{\pi}{4a}$ (2) $\frac{\pi}{4}a^2$ (3) $\frac{\pi}{2}$

(1) $x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $dx=a\sec^2\theta d\theta$이고,

$x=a$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$, $x=0$일 때 $\theta=0$이므로

$$\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2(\tan^2\theta+1)}\times a\sec^2\theta d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}d\theta=\left[\frac{1}{a}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4a}$$

(2) $x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $dx=a\cos\theta d\theta$이고,

$x=a$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $x=0$일 때 $\theta=0$이므로

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\cos\theta d\theta$$
$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}a^2$$

(3) $x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $dx=a\cos\theta d\theta$이고,

$x=a$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $x=0$일 때 $\theta=0$이므로

$$\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}d\theta$$
$$=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{a\cos\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

06 답 풀이 참조

(1) $\int\ln x dx=\int\ln x\times 1dx=(\ln x)\times x-\int\frac{1}{x}\times x\,dx$

$$=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

(2) $\int(\ln x)^2dx=\int 1\times(\ln x)^2dx$

$$=x\times(\ln x)^2-\int x\times 2\ln x\times\frac{1}{x}dx$$
$$=x(\ln x)^2-2\int\ln x dx$$
$$=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x)+C$$
$$=x\{(\ln x)^2-2\ln x+2\}+C\ (C\text{는 적분상수})$$

(3) $\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx$

$$=e^x\sin x-\left(e^x\cos x+\int e^x\sin x dx\right)$$

에서 $2\int e^x\sin x dx=e^x(\sin x-\cos x)$

$\therefore \int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$ (C는 적분상수)

(4) $\int xe^{2x}dx=x\times\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C\ (C\text{는 적분상수})$$

(5) $\int x^2\sin x dx=x^2(-\cos x)-\int 2x(-\cos x)dx$

$$=-x^2\cos x+2\left(x\sin x-\int\sin x dx\right)$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$$
$$=(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

(6) $\int x^2\ln x dx=\frac{1}{3}x^3\times\ln x-\int\frac{1}{3}x^3\times\frac{1}{x}dx$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C\ (C\text{는 적분상수})$$

07 답 ④

$f(x)=\int f'(x)dx$에서

$\int 2^x\ln 2dx=2^x+C_1$ (C_1은 적분상수),

$\int\left(-\frac{1}{x\ln 2}\right)dx=-\log_2 x+C_2$ (C_2는 적분상수)이므로

$$f(x)=\begin{cases}2^x+C_1 & (x<2)\\ -\log_2 x+C_2 & (x\ge 2)\end{cases}$$

이때, $f(1)=1$이므로 $2^1+C_1=1$ $\therefore C_1=-1$ ⋯ ㉠

또한, $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$2^2+C_1=-\log_2 2+C_2$ $\therefore C_2=4$ ($\because$ ㉠)

한편, $y=2^x-1$은 증가함수, $y=-\log_2 x+4$는 감소함수이므로

$f(a)=-\log_2 a+4=1$ $\therefore a=8$

08 답 ④

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^0\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)dx=\left[-\cos x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1$$

09 답 ④

$\{x^2f(x)\}'=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로

$$x^2f(x)=\int\left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=e^x+\ln x+C\ (C\text{는 적분상수})\ (\because x>0)$$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=e+C=e$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{e^x+\ln x}{x^2}$이므로 $f(e)=\frac{e^e+1}{e^2}$

10 답 ①

$\cos x=t$라 하면 $-\sin x dx=dt$이므로

$$f(x)=\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=-\int \frac{1}{t^3}dt=\frac{1}{2t^2}+C$$

$$=\frac{1}{2\cos^2 x}+C \ (C\text{는 적분상수})$$

이때, $f(0)=\frac{1}{2}$이므로

$$f(0)=\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2} \qquad \therefore C=0$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2\cos^2 x}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\cos^2 \frac{\pi}{4}}=1$$

[다른 풀이]

$f(x)=\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=\int \sec^2 x\tan x dx$에서

$\sec x=t$라 하면 $\sec x\tan x dx=dt$이므로

$$f(x)=\int \sec^2 x\tan x dx=\int t dt=\frac{t^2}{2}+C$$

$$=\frac{1}{2\cos^2 x}+C \ (C\text{는 적분상수})$$

(이하 동일)

11 답 ③

$f(a)=\int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$에서 $\sqrt{\ln x}=t$라 하면 $\ln x=t^2$에서

$\frac{1}{x}dx=2tdt$이고 $x=1$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=\sqrt{\ln a}$이므로

$$f(a)=\int_0^{\sqrt{\ln a}}2t^2dt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{\ln a}}=\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore f(a^9)=\frac{2}{3}(\ln a^9)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\times 9^{\frac{3}{2}}(\ln a)^{\frac{3}{2}}=27f(a)$$

12 답 ⑤

$x^2-4x+3=t$라 하면 $(2x-4)dx=dt$에서

$(x-2)dx=\frac{1}{2}dt$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x-2)(x^2-4x+3)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int t^2dt=\frac{1}{6}t^3+C$$

$$=\frac{1}{6}(x^2-4x+3)^3+C \ (C\text{는 적분상수})$$

한편, $f'(x)=(x-2)(x^2-4x+3)^2=(x-2)\{(x-1)(x-3)\}^2$

이고 $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗		↗

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고, 극솟값 3을 가지므로

$f(2)=-\frac{1}{6}+C=\frac{1}{3}$에서 $C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{6}(x^2-4x+3)^3+\frac{1}{2}$이므로

$$f(0)=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5$$

13 답 ①

조건 (가)의 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}=\frac{3}{x(x+1)}$에서

$$3f'(x)=\frac{3}{x(x+1)} \qquad \therefore f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{x(x+1)}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln|x|-\ln|x+1|+C$$

(C는 적분상수)

이때, 조건 (나)에서 $f(2)=\ln 2-\ln 3+C=-\ln 3$이므로

$C=-\ln 2$

따라서 $f(x)=\ln|x|-\ln|x+1|-\ln 2$이므로

$f(1)=-2\ln 2=-\ln 4$

14 답 ②

함수 $y=\frac{2x^3}{x^4+1}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^{\sqrt{2}}\frac{2x^3}{x^4+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x^3}{x^4+1}dx+\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{2x^3}{x^4+1}dx$$

$$=0+\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{2x^3}{x^4+1}dx$$

한편, $(x^4+1)'=4x^3$이므로

$$\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{2x^3}{x^4+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x^4+1)\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$$

15 답 ②

$(x^2+1)'=2x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)+C$$

(C는 적분상수)

한편, $f'(x)=0$에서 $x=0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이므로

$f(0)=\ln 1+C=-1$에서 $C=-1$

따라서 방정식 $f(x)=\ln(x^2+1)-1=0$의 양의 실근 α에 대하여

$\ln(\alpha^2+1)=1$, $\alpha^2+1=e$, $\alpha^2=e-1$

$1<\alpha^2<2$ ($\because 2<e<3$) $\qquad \therefore 1<\alpha<\sqrt{2}$

16 답 ⑤

$\sqrt{x}=t$라 하면 $x=t^2$에서 $dx=2tdt$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2te^t dt$

$=2te^t-\int 2e^t dt=2te^t-2e^t+C$

$=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$ (C는 적분상수)

이때, $f(1)=0$에서 $C=0$이므로 $f(x)=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$

$\therefore f(4)=2(\sqrt{4}-1)e^{\sqrt{4}}=2e^2$

17 답 ②

$\tan\theta(x)$는 곡선 $y=e^x$ 위의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기이므로

$\tan\theta(x)=y'=e^x$

$\therefore \int_0^1 x^2\tan\theta(x)dx=\int_0^1 x^2e^x dx=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2xe^x$

$=e-2\left(\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)$

$=e-2\left(e-\Big[e^x\Big]_0^1\right)=e-2\{e-(e-1)\}$

$=e-2$

18 답 ④

$f(x)=\int f'(x)dx=\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}dx$

$=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$ (C는 적분상수)

한편, $f'(x)=0$에서 $x=1(\because x>0)$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로

$f(1)=-\frac{1}{4}+C=0$에서 $C=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}$이므로

$f(e)=\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$

19 답 ①

$f'(x)=\cos^2 x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\cos^2 x dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$ (C는 적분상수)

이때, $f(0)=-\frac{\pi}{8}$이므로 $C=-\frac{\pi}{8}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\pi}{8}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{1}{4}$

20 답 ②

$\lim_{x\to\ln 2}\frac{(f\circ f)(x)-(f\circ f)(\ln 2)}{x-\ln 2}$

$=\lim_{x\to\ln 2}\frac{f(f(x))-f(f(\ln 2))}{f(x)-f(\ln 2)}\times\frac{f(x)-f(\ln 2)}{x-\ln 2}$

$=f'(f(\ln 2))f'(\ln 2)$ ⋯ ㉠

이때, $(f\circ f)(x)=\int e^x(e^x-1)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(f(x))f'(x)=e^x(e^x-1)$이므로 구하는 극한값은 ㉠에 의하여

$f'(f(\ln 2))f(\ln 2)=e^{\ln 2}(e^{\ln 2}-1)=2$

21 답 ⑤

$f(x)=\sqrt{x}\ln x$, $g(x)=e^x$이라 하고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{e^2}^{e^{2+h}}\sqrt{x}\ln x dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{g(2)}^{g(2+h)}f(x)dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(g(2+h))-F(g(2))}{g(2+h)-g(2)}\times\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$

$=f(g(2))\times g'(2)=\sqrt{e^2}\ln e^2\times e^2=2e^3$

22 답 ⑤

함수 $f(x)=\int_{2x-1}^{2x+1}\frac{t}{2^t}dt$에서 $\frac{t}{2^t}=g(t)$라 하고 $g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$f(x)=G(2x+1)-G(2x-1)$이므로

$f'(x)=2g(2x+1)-2g(2x-1)=\frac{2x+1}{2^{2x}}-\frac{2x-1}{2^{2x-2}}$

이때, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지므로

$f'(a)=\frac{2a+1}{2^{2a}}-\frac{2a-1}{2^{2a-2}}=0$, $2a+1-2^2(2a-1)=0$

$-6a+5=0 \qquad \therefore a=\frac{5}{6}$

23 답 ③

$\sqrt[3]{x}+1=t$라 하면 $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx=dt$이므로

$F(x)=\int\frac{\sqrt[3]{x}+1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx=\int t dt=\frac{1}{2}t^2+C$

$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}+1)^2+C$ (C는 적분상수)

이때, $F(0)=\frac{3}{2}$에서 $\frac{1}{2}+C=\frac{3}{2} \qquad \therefore C=1$

따라서 $F(x)=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}+1)^2+1$이므로

$F(27)=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{27}+1)^2+1=9$

$\therefore \sqrt{F(27)}=3$

24 답 ①

$\int_0^2 tf(t)dt=a$라 하면 $f(x)=e^{x^2}+a$이므로

$a=\int_0^2 t(e^{t^2}+a)dt=\int_0^2 (te^{t^2}+at)dt=\int_0^2 te^{t^2}dt+\int_0^2 atdt$ ⋯ ㉠

$t^2=x$라 하면 $2tdt=dx$에서 $tdt=\frac{1}{2}dx$이고

$t=0$일 때 $x=0$, $t=2$일 때 $x=4$이므로

$\int_0^2 te^{t^2}dt=\int_0^4 \frac{1}{2}e^x dx=\left[\frac{1}{2}e^x\right]_0^4=\frac{e^4-1}{2}$

또, $\int_0^2 atdt=\left[\frac{a}{2}t^2\right]_0^2=2a$이므로 ㉠에 의하여

$a=\frac{e^4-1}{2}+2a \qquad \therefore a=\frac{1-e^4}{2}$

$\therefore \int_0^2 2xf(x)dx=2a=1-e^4$

25 답 ⑤

$f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 각각 $F(x)$, $G(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$

두 식 $f(x)=\frac{2G(x)+g(x)}{3}$, $g(x)=\frac{2F(x)+f(x)}{3}$를

변변 더하면

$f(x)+g(x)=\frac{2\{F(x)+G(x)\}+\{f(x)+g(x)\}}{3}$

$\therefore F(x)+G(x)=f(x)+g(x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+g(x)=\{f(x)+g(x)\}'$

이때, $f(x)+g(x)=h(x)$라 하면

$h(x)=h'(x)$에서 $\frac{h'(x)}{h(x)}=1$

양변을 부정적분하면

$\int \frac{h'(x)}{h(x)}dx=\int 1dx$, $\ln|h(x)|=x+C$

$\therefore h(x)=e^{x+C}$ (C는 적분상수)

한편, $f(0)+g(0)=2$에서 $h(0)=2$이므로 $C=\ln 2$

따라서 $h(x)=f(x)+g(x)=e^{x+\ln 2}$이므로

$f(1)+g(1)=2e$

26 답 ②

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos xdx=a$라 하면 $f(x)=\sin x+2a$이므로

$a=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+2a)\cos xdx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos xdx+2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$ ⋯ ㉠

$\sin x=t$라 하면 $\cos xdx=dt$이고 $x=0$일 때 $t=0$,

$x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos xdx=\int_0^1 tdt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

또, $2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx=2a\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2a$이므로 ㉠에 의하여

$a=\frac{1}{2}+2a \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\sin x-1$이므로 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

[다른 풀이]

㉠에 의하여

$a=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx+2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$

$=-\frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2a\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}+2a$

(이하 동일)

27 답 ②

$\lim_{h\to 0}\frac{(e^x-1)\{f(x+h)-f(x)\}}{h}=1$에서

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{e^x-1}$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{e^x-1}$

이때, $e^x-1=t$라 하면 $e^x dx=dt$에서 $dx=\frac{1}{t+1}dt$이므로

$f(x)=\int \frac{1}{e^x-1}dx=\int \frac{1}{t(t+1)}dt=\int \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\ln|t|-\ln|t+1|+C$

$=\ln|e^x-1|-x+C$ (C는 적분상수)

한편, $f(\ln 2)=0$이므로 $C=\ln 2$

따라서 $f(x)=\ln|e^x-1|-x+\ln 2$이므로

$f(\ln 4)=\ln|4-1|-\ln 4+\ln 2=\ln\frac{3}{2}$

28 답 ①

$\int_0^{\ln 3}\frac{1}{e^x+3e^{-x}}dx=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{e^{2x}+3}dx$

이때, $e^x=t$라 하면 $e^x dx=dt$이고, $x=0$일 때 $t=1$,

$x=\ln 3$일 때 $t=3$이므로

$\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{e^{2x}+3}dx=\int_1^3\frac{1}{t^2+3}dt$

이때, $t=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $dt=\sqrt{3}\sec^2\theta d\theta$이고,

$t=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $t=3$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$\int_1^3\frac{1}{t^2+3}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3\tan^2\theta+3}d\theta$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3(\tan^2\theta+1)}d\theta$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3\sec^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta$

$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$

29 답 ④

$f(x)=\int e^x\cos x\,dx$라 하면

$f(x)=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$

$\quad=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$

$2f(x)=e^x\cos x+e^x\sin x$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$ (C는 적분상수)

따라서 주어진 식은 $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C=\frac{1}{2}e^x$이고,

위 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $C=0$이므로

$\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)=\frac{1}{2}e^x$에서 $\cos x+\sin x=1$

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \qquad \therefore \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (0\le x\le\pi)$

이때, $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5}{4}\pi$에서

$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$이므로 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

따라서 이 방정식의 $x=0$이 아닌 다른 한 근은 $\frac{\pi}{2}$이다.

30 답 ②

$e^{f(x)}f'(x)=1$의 양변을 적분하면

$\int e^{f(x)}f'(x)dx=\int 1dx$에서 $e^{f(x)}=x+C_1$ (C_1은 적분상수)

이때, $f(1)=0$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$e^0=1+C_1 \qquad \therefore C_1=0$

$\therefore e^{f(x)}=x \Rightarrow f(x)=\ln x$

또한, $g'(x)=xf(x)=x\ln x$에서

$g(x)=\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}dx$

$\quad=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_2$

$\quad=\frac{1}{4}x^2(2\ln x-1)+C_2$ (C_2는 적분상수)

이때, $g(\sqrt{e})=0$이므로 $\frac{1}{4}e(2\ln\sqrt{e}-1)+C_2=0 \qquad \therefore C_2=0$

따라서 $g(x)=\frac{1}{4}x^2(2\ln x-1)$이므로

$g(1)=\frac{1}{4}(0-1)=-\frac{1}{4}$

31 답 ⑤

$\int_0^1 x^2\sqrt{e^x}dx=\int_0^1 x^2e^{\frac{1}{2}x}dx=\left[2x^2e^{\frac{1}{2}x}\right]_0^1-\int_0^1 4xe^{\frac{1}{2}x}dx$

$\quad=2e^{\frac{1}{2}}-4\left(\left[2xe^{\frac{1}{2}x}\right]_0^1-\int_0^1 2e^{\frac{1}{2}x}dx\right)$

$\quad=2e^{\frac{1}{2}}-8e^{\frac{1}{2}}+8\left[2e^{\frac{1}{2}x}\right]_0^1=-6e^{\frac{1}{2}}+8(2e^{\frac{1}{2}}-2)$

$\quad=10\sqrt{e}-16$

32 답 25

조건 (가)에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \qquad \therefore f(0)=1$ ⋯ ㉠ ---------- ⓐ

조건 (나)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$-f'(2-x)=f'(2+x)$

이 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-f'(2)=f'(2) \qquad \therefore f'(2)=0$ ⋯ ㉡ ---------- ⓑ

조건 (가)에 $y=h$를 대입하면

$f(x+h)=f(x)+f(h)+2xh-1$이므로

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2xh-1}{h}$

$\quad=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-1}{h}+2x\right\}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h}+2x\right\}$

$\quad=f'(0)+2x$

이 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=f'(0)+4$이므로 $f'(0)=-4$ ($\because$ ㉡)

$\therefore f'(x)=2x-4$ ---------- ⓒ

$f(x)=\int(2x-4)dx=x^2-4x+C$

㉠에서 $f(0)=1$이므로 $C=1 \qquad \therefore f(x)=x^2-4x+1$

따라서 $f(\sqrt{2})=3-4\sqrt{2}$이므로 $a=3$, $b=-4$

$\therefore a^2+b^2=25$ ---------- ⓓ

| 채점기준 |

ⓐ $f(0)$의 값을 구한다.	[20%]
ⓑ $f'(2)$의 값을 구한다.	[20%]
ⓒ 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구한다.	[30%]
ⓓ $f(\sqrt{2})$의 값을 구하고 a^2+b^2의 값을 계산한다.	[30%]

33 답 1

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{e^x+1}dx$

이때, $e^x+1=t$라 하면 $e^xdx=dt$ ---------- ⓐ

$x=-1$일 때 $t=1+\frac{1}{e}$, $x=1$일 때 $t=1+e$이므로 ---------- ⓑ

$\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_{1+\frac{1}{e}}^{1+e}\frac{1}{t}dt=\left[\ln t\right]_{1+\frac{1}{e}}^{1+e}$

$\quad=\ln(1+e)-\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)=\ln e=1$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $e^x+1=t$라 하고 적분변수를 치환한다.	[30%]
ⓑ x에 대한 구간을 t에 대한 구간으로 바꾼다.	[30%]
ⓒ $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^{-x}}dx$의 값을 구한다.	[40%]

[다른 풀이]

$(e^x+1)'=e^x$이므로

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\left[\ln(e^x+1)\right]_{-1}^{1}=1$

34 답 50

$f(x)+f(-x)=\cos^2 x$의 양변을 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 적분하면

$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+f(-x)\}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x dx$에서

$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}f(-x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x dx$ ⋯ ㉠

이때, $\int_{-\pi}^{\pi}f(-x)dx$에서 $-x=t$라 하면 $dx=-dt$이고,

$x=-\pi$일 때 $t=\pi$, $x=\pi$일 때 $t=-\pi$이므로

$\int_{-\pi}^{\pi}f(-x)dx=-\int_{\pi}^{-\pi}f(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ ⋯ ⓐ

이 식을 ㉠에 대입하면 $2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x dx$

$\therefore \int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x dx=\int_{0}^{\pi}\cos^2 x dx$

$=\int_{0}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

따라서 $k=\frac{1}{2}$이므로 $100k=50$ ⋯ ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ $\int_{-\pi}^{\pi}f(-x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$임을 보인다.	[50%]
ⓑ $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$의 값을 구하고 $100k$의 값을 계산한다.	[50%]

35 답 ①

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$ $\therefore f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$

$\therefore \pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=2\pi\int_0^1 xf'(x)dx$

$=2\pi\left\{\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx\right\}$

$=2\pi\left\{f(1)-\int_0^1 f(x)dx\right\}$

이때,

$\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x+1)dx=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^0 f'(x)dx$

$=\frac{2}{\pi}\{f(0)-f(-1)\}$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$f(0)=0$, $f(-1)=-f(1)=-1$

$\therefore \pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=2\pi\left\{f(1)-\int_0^1 f(x)dx\right\}$

$=2\pi\left\{1-\frac{2}{\pi}f(0)+\frac{2}{\pi}f(-1)\right\}$

$=2(\pi-2)$

36 답 ④

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt=\int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}dt=\int_0^x \frac{(1+e^t)'}{1+e^t}dt$

$=\left[\ln(1+e^t)\right]_0^x=\ln(1+e^x)-\ln 2=\ln\frac{1+e^x}{2}$

이고, $(f\circ f)(a)=f(f(a))=\ln\frac{1+e^{f(a)}}{2}=\ln 5$

이때, $y=\ln x$는 일대일함수이므로

$\frac{1+e^{f(a)}}{2}=5$, $f(a)=\ln 9$, $\ln\frac{1+e^a}{2}=\ln 9$, $\frac{1+e^a}{2}=9$

$\therefore a=\ln 17$

37 답 ⑤

ㄱ. $0<x<\sqrt{\pi}$에서 $e^{-x}>0$, $\sin(x^2)\ge 0$이므로

$f(\sqrt{\pi})=e^{-\pi}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt>0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고, 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$f'(a)=\frac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}-0}=\frac{f(\sqrt{\pi})}{\sqrt{\pi}}>0$(∵ ㄱ)을 만족시키는 a가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. $f'(x)=-e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt+e^{-x}\sin(x^2)$에서

$f'(\sqrt{\pi})=-e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt+e^{-\sqrt{\pi}}\sin\pi$

$=-e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt=-f(\sqrt{\pi})<0$

이때, ㄴ을 만족시키는 $a(0<a<\sqrt{\pi})$에 대하여 함수 $f'(x)$가 닫힌구간 $[a, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고 $f'(a)>0$, $f'(\sqrt{\pi})<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

38 답 ④

$h(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$라 하면 $h'(a)=f(a)-g(a)$이고 주어진 그래프에서

$0\le a<1$일 때, $f(a)>g(a)$이므로 $h'(a)>0$

$1<a<6$일 때, $f(a)<g(a)$이므로 $h'(a)<0$

$6<a\le 8$일 때, $f(a)>g(a)$이므로 $h'(a)>0$

또한, $h'(1)=h'(6)=0$이므로 연속함수 $h(a)$는 $a=1$에서 극대, $a=6$에서 극소이다.

따라서 함수 $h(a)$의 구간 $[0, 8]$에서의 최솟값은 $h(0)$과 $h(6)$ 중 작은 값이다.

$h(0)=\int_0^0 f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx=0+\frac{1}{2}\times 8\times 2=8$

$h(6)=\int_0^6 f(x)dx+\int_6^8 g(x)dx$

$=\int_0^6\left(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}\right)dx+\frac{1}{2}\times 2\times 1$

$=\left[\frac{5}{2}x-5\ln(x^2+4)\right]_0^6+1$

$=15-5\ln 40+5\ln 4+1=16-5\ln 10$

한편, $h(0)-h(6)=5\ln 10-8=\ln \frac{10^5}{e^8}$이고

$e<3$에서 $e^2<10$이므로 $e^8<10^4<10^5$이다.

즉, $h(0)-h(6)>0$에서 $h(0)>h(6)$이므로

$\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$의 최솟값은 $h(6)=16-5\ln 10$

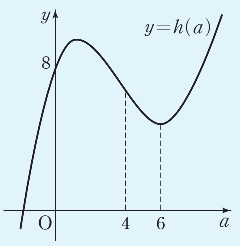
일등급 UP

* 함수 $y=h(a)$의 그래프의 개형

$$h'(a)=f(a)-g(a)=\begin{cases} \frac{5}{2}-\frac{10a}{a^2+4}-\frac{1}{2}a & (a\le 4) \\ \frac{5}{2}-\frac{10a}{a^2+4}+\frac{1}{2}a-4 & (a>4)\end{cases}$$ 에서

$$h(a)=\begin{cases} -\frac{1}{4}a^2+\frac{5}{2}a-5\ln(a^2+4)+8+5\ln 4 & (a\le 4) \\ \frac{1}{4}a^2-\frac{3}{2}a-5\ln(a^2+4)+16+5\ln 4 & (a>4)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=h(a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



39 답 ③

부분적분법에 의하여

$$g(x)=\frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2}f(t)dt=\frac{2}{e^4}\int_1^x 2te^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{\left[e^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}\right]_1^x-\int_1^x t^2dt\right\}$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\times\frac{f(x)}{x}-ef(1)-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x\right\}$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\times\frac{f(x)}{x}-ef(1)-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$g(2)=\frac{2}{e^4}\left\{e^4\times\frac{f(2)}{2}-\frac{10}{3}\right\}=f(2)-\frac{20}{3e^4}$$

$$\therefore f(2)-g(2)=\frac{20}{3e^4}$$

40 답 풀이 참조

(1) $\frac{3x^2+7x+1}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$ (a, b, c는 상수)

라 하면 $3x^2+7x+1=a(x+1)^2+bx(x+1)+cx$에서

$a+b=3$, $2a+b+c=7$, $a=1$ $\quad\therefore a=1$, $b=2$, $c=3$

$$\therefore \int\frac{3x^2+7x+1}{x(x+1)^2}dx$$

$$=\int\left\{\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}\right\}dx$$

$$=\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+C$$

$$=\ln|x(x+1)^2|-\frac{3}{x+1}+C \ (C\text{는 적분상수})$$

(2) $\sqrt[4]{x^3}=t$라 하면 $x=t^{\frac{4}{3}}$에서 $dx=\frac{4}{3}t^{\frac{1}{3}}dt$이므로

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}-1}dx=\int\frac{t^{\frac{2}{3}}}{t-1}\times\frac{4}{3}t^{\frac{1}{3}}dt$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{t}{t-1}dt$$

$$=\frac{4}{3}\int\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=\frac{4}{3}(t+\ln|t-1|)+C$$

$$=\frac{4}{3}(\sqrt[4]{x^3}+\ln|\sqrt[4]{x^3}-1|)+C \ (C\text{는 적분상수})$$

(3) $\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\int\left(\frac{2e^x}{e^x+1}-1\right)dx$

$$=2\ln(e^x+1)-x+C \ (C\text{는 적분상수})$$

(4) $\ln(\sin x)=t$라 하면 $\frac{\cos x}{\sin x}dx=dt$에서

$\frac{1}{\tan x}dx=dt$이므로

$$\int\frac{\ln(\sin x)}{\tan x}dx=\int tdt=\frac{1}{2}t^2+C$$

$$=\frac{1}{2}\{\ln(\sin x)\}^2+C \ (C\text{는 적분상수})$$

[다른 풀이]

(1) $\{x(x+1)^2\}'=3x^2+4x+1$이므로

$$\int\frac{3x^2+7x+1}{x(x+1)^2}dx=\int\frac{(3x^2+4x+1)+3x}{x(x+1)^2}dx$$

$$=\int\left\{\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)^2}+\frac{3}{(x+1)^2}\right\}dx$$

$$=\ln|x(x+1)^2|-\frac{3}{x+1}+C$$

(C는 적분상수)

(3) $e^x=t$라 하면 $e^xdx=dt$에서 $dx=\frac{1}{t}dt$이므로

$$\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\int\frac{t-1}{t+1}\times\frac{1}{t}dt$$

$$=\int\frac{t-1}{t(t+1)}dt$$

이때, $\frac{t-1}{t(t+1)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t+1}$ (a, b는 상수)라 하면

$t-1=a(t+1)+bt$ $\quad\therefore a=-1$, $b=2$

$$\therefore \int\frac{t-1}{t(t+1)}dt=\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{2}{t+1}\right)dt$$

$$=-\ln|t|+2\ln|t+1|+C$$

$$=-\ln e^x+2\ln(e^x+1)+C$$

$$=2\ln(e^x+1)-x+C \ (C\text{는 적분상수})$$

41 답 ③

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)-f(x)}{h}$$

에서 조건 (다)에 의하여

$f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)=\left(1+\frac{h}{x}\right)f(x)+xf\left(1+\frac{h}{x}\right)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)f(x)+xf\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h}{x}f(x)+xf\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$
$$=\frac{f(x)}{x}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

또한, 조건 (다)에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(1)$에서 $f(1)=0$이므로

$$\frac{f(x)}{x}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{f(x)}{x}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}$$
$$=\frac{f(x)}{x}+f'(1)$$

조건 (나)에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 $x=1$에서 직선 $y=x$에 접하므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

즉, $f'(1)=1$이므로 위 식에 대입하면

$f'(x)=\frac{f(x)}{x}+1$에서 $f(x)=xf'(x)-x$ ⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=f'(x)+xf''(x)-1 \qquad \therefore f''(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)=\int f''(x)dx=\int\frac{1}{x}dx$

$=\ln x+C$ (C는 적분상수) ($\because x>0$)

$f'(1)=1$이므로 $C=1$에서 $f'(x)=\ln x+1$

㉠에 대입하여 정리하면 $f(x)=x\ln x \qquad \therefore f(e)=e$

42 답 ④

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$ ⋯ ㉠

조건 (나)의 $f'(x)=2\{f(x)\}^2$에 $x=g(x)$를 대입하면

$f'(g(x))=2\{f(g(x))\}^2=2x^2$ ⋯ ㉡

이때, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(g(x))g'(x)=1$에서

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{2x^2}$ ($\because$ ㉡)

$\therefore g(x)=\int\frac{1}{2x^2}dx=-\frac{1}{2x}+C$ (C는 적분상수)

이때, 조건 (다)에서 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $C=1$

따라서 $g(x)=-\frac{1}{2x}+1$이므로 $g(-1)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

43 답 ①

$f(x)=a(2x-1)^2+b(2x-1)+c$라 하고 $2x-1=t$라 하면

$dx=\frac{1}{2}dt$이고, $x=\frac{1-\pi}{2}$일 때 $t=-\pi$, $x=\frac{1+\pi}{2}$일 때

$t=\pi$이므로

$$\int_{\frac{1-\pi}{2}}^{\frac{1+\pi}{2}}f(x)\sin(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(at^2+bt+c)\sin t\,dt$$
$$=b\int_0^{\pi}t\sin t\,dt$$
$$=b\Big[-t\cos t+\sin t\Big]_0^{\pi}=b\pi$$

이때, $f'(x)=4a(2x-1)+2b$에서 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore \int_{\frac{1-\pi}{2}}^{\frac{1+\pi}{2}}f(x)\sin(2x-1)dx=b\pi=\frac{\pi}{2}$

44 답 ④

$f(a)=0$이므로 $f(2x)=2f(x)f'(x)$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$f(2a)=2f(a)f'(a)=0$

$$\therefore \int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$$
$$=\int_a^{2a}\{f(x)\}^2\times x^{-2}dx$$
$$=\Big[\{f(x)\}^2\times(-x^{-1})\Big]_a^{2a}+\int_a^{2a}2f(x)f'(x)\times x^{-1}dx$$
$$=0+\int_a^{2a}\frac{2f(x)f'(x)}{x}dx=\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$$

이때, $2x=t$라 하면 $dx=\frac{1}{2}dt$이고 $x=a$일 때 $t=2a$,

$x=2a$일 때 $t=4a$이므로

$$\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx=\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx=\int_{2a}^{4a}\frac{f(t)}{t}dt=k$$

45 답 ②

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\int_x^{x^2}f(t)dt=\int_1^x f(t)dt$에서 $F(x^2)-F(x)=F(x)-F(1)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x^2)-f(x)=f(x)$에서 $xf(x^2)=f(x)$

이때, $x^2=t$라 하면 $t^{\frac{1}{2}}f(t)=f(t^{\frac{1}{2}})$

이 식이 임의의 양수 t에 대하여 성립하므로

$x^{\frac{1}{2}}f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})$

$x^{\frac{1}{4}}f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{4}})$

$x^{\frac{1}{8}}f(x^{\frac{1}{4}})=f(x^{\frac{1}{8}})$

⋮

$x^{\frac{1}{2^n}}f(x^{\frac{1}{2^{n-1}}})=f(x^{\frac{1}{2^n}})$

양변을 변변 곱하여 정리하면

$x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}f(x)=f(x^{\frac{1}{2^n}}) \qquad \therefore f(x)=\frac{f(x^{\frac{1}{2^n}})}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}}$

$f(x)$가 연속함수이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x^{\frac{1}{2^n}})}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}}=\frac{f(x^0)}{x^1}=\frac{f(1)}{x}$

$f(1)=1$이므로 $f(x)=\frac{1}{x}(x>0) \qquad \therefore f(0.1)=\frac{1}{0.1}=10$

01 답 ③

$\dfrac{k}{n}=x$라 하면

(주어진 식)$=6\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{f\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)\times\dfrac{1}{n}\right\}$

$=6\int_{0}^{1}f(1+2x)dx=6\int_{0}^{1}(4x^2+4x)dx=20$

[다른 풀이]

$1+\dfrac{2k}{n}=x$라 하면

(주어진 식)$=3\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{f\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)\times\dfrac{2}{n}\right\}$

$=3\int_{1}^{3}f(x)dx=3\int_{1}^{3}(x^2-1)dx=20$

02 답 ④

$e^3\le x\le e^5$일 때 $1\le\ln x-2\le3$이므로 $e^3\le x\le e^5$에서

$\dfrac{\ln x-2}{x}>0$이다.

따라서 구하는 넓이는 $\int_{e^3}^{e^5}\dfrac{\ln x-2}{x}dx$이다.

이때, $\ln x-2=t$라 하면 $\dfrac{1}{x}dx=dt$이고 $x=e^3$일 때 $t=1$, $x=e^5$

일 때 $t=3$이므로

$\int_{e^3}^{e^5}\dfrac{\ln x-2}{x}dx=\int_{1}^{3}tdt=\left[\dfrac{1}{2}t^2\right]_1^3=4$

03 답 ④

곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하면

$\dfrac{4}{x}=5-x$에서 $x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 곡선 $y=\dfrac{4}{x}$와 직선 $y=5-x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{1}^{4}\left|\dfrac{4}{x}-(5-x)\right|dx=\int_{1}^{4}\left(5-x-\dfrac{4}{x}\right)dx$

$=\left[5x-\dfrac{1}{2}x^2-4\ln x\right]_1^4$

$=\dfrac{15}{2}-8\ln 2$

즉, $a=\dfrac{15}{2}$, $b=8$이므로 $ab=\dfrac{15}{2}\times8=60$

04 답 ③

$\int_{0}^{1}axdx=\dfrac{1}{2}\int_{0}^{1}e^xdx$에서 $\left[\dfrac{1}{2}ax^2\right]_0^1=\dfrac{1}{2}\left[e^x\right]_0^1$

$\dfrac{1}{2}a=\dfrac{e-1}{2}$ $\therefore a=e-1$

05 답 ①

직선 $y=a$와 곡선 $y=\ln(x+1)$의 교점의 x좌표를 k라 하면 주어진 조건에 의하여

$\int_{0}^{k}\{a-\ln(x+1)\}dx=\int_{k}^{e-1}\{\ln(x+1)-a\}dx$에서

$\int_{0}^{k}\{a-\ln(x+1)\}dx-\int_{k}^{e-1}\{\ln(x+1)-a\}=0$

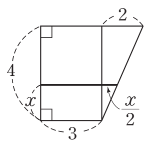
$\int_{0}^{e-1}\{a-\ln(x+1)\}dx$

$=\int_{0}^{e-1}adx-\int_{0}^{e-1}\ln(x+1)dx=0$ ⋯ ㉠

이때, $\int_{0}^{e-1}adx=a(e-1)$이고 $\int_{0}^{e-1}\ln(x+1)dx=1$이므로

㉠에 대입하면 $a(e-1)-1=0$ $\therefore a=\dfrac{1}{e-1}$

06 답 ④



그림과 같이 밑면에 수직인 단면에서 밑면으로부터의 높이를 x라 하면 밑면에 평행한 원의 반지름의 길이는 $3+\dfrac{x}{2}$이므로 이 원의 넓이를 $S(x)$라 하면 $S(x)=\pi\left(3+\dfrac{x}{2}\right)^2$

따라서 그릇의 부피는 $\pi\int_{0}^{4}S(x)dx=\pi\int_{0}^{4}\left(3+\dfrac{x}{2}\right)^2dx$

07 답 12

$f(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$이라 하면 구하는 길이는

$\int_{0}^{3}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\int_{0}^{3}\sqrt{1+\left\{\dfrac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\times2x\right\}^2}dx$

$=\int_{0}^{3}\sqrt{1+x^2(x^2+2)}dx$

$=\int_{0}^{3}\sqrt{(x^2+1)^2}dx$

$=\int_{0}^{3}(x^2+1)dx$

$=\left[\dfrac{1}{3}x^3+x\right]_0^3=12$

08 답 15

(i) $\dfrac{k}{n}=x$라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)=3\int_{0}^{2}f(1+2x)dx$

$\therefore a=3$

(ii) $\dfrac{2k}{n}=x$라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)=\dfrac{3}{2}\int_{0}^{4}f(1+x)dx$

$\therefore b=\dfrac{3}{2}$, $c=4$

(iii) $1+\dfrac{2k}{n}=x$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\frac{3}{2}\int_1^5 f(x)dx$$

$\therefore d=\dfrac{3}{2},\ e=5$

(i), (ii), (iii)에서

$a+b+c+d+e=3+\dfrac{3}{2}+4+\dfrac{3}{2}+5=15$

09 답 ①

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-2nkx+k^2x^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-2\times\frac{kx}{n}+\left(\frac{kx}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^x\sqrt{1-2t+t^2}dt=\int_0^x|1-t|dt$$
$$\therefore f(2)=\int_0^2|1-t|dt=\int_0^1(1-t)dt+\int_1^2(t-1)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}t^2-t\right]_1^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

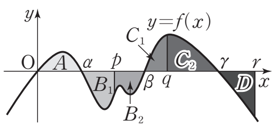
10 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8\times2^3}{n^4+2^4}+\frac{8\times4^3}{n^4+4^4}+\frac{8\times6^3}{n^4+6^4}+\cdots+\frac{8(2n)^3}{n^4+(2n)^4}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8\times(2k)^3}{n^4+(2k)^4}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4\times\left(\frac{2k}{n}\right)^3}{1+\left(\frac{2k}{n}\right)^4}\times\frac{2}{n}$$
$$=\int_0^2\frac{4x^3}{1+x^4}dx$$

이때, $(1+x^4)'=4x^3$이므로

$$\int_0^2\frac{4x^3}{1+x^4}dx=\Big[\ln(1+x^4)\Big]_0^2=\ln 17$$

11 답 ③

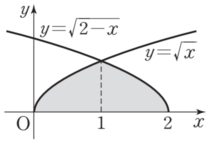


그림과 같이 $A=B_1$, $B_2=C_1$, $C_2=D$를 만족시키는 x좌표 p, q, r에 대하여

$$\int_0^p f(x)dx=A+(-B_1)=0$$
$$\int_0^q f(x)dx=\int_0^p f(x)dx+(-B_2)+C_1=0$$
$$\int_0^r f(x)dx=\int_0^q f(x)dx+C_2+(-D)=0$$

이므로 방정식 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=0$의 해는 0, p, q, r의 4개이다.

12 답 ②



두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x}$의 그래프는 그림과 같으므로 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x}$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}dx+\int_1^2\sqrt{2-x}dx$

이때, 두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x}$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}dx=\int_1^2\sqrt{2-x}dx$

$$\therefore \int_0^1\sqrt{x}dx+\int_1^2\sqrt{2-x}dx=2\int_0^1\sqrt{x}dx=2\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

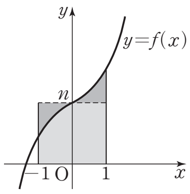
13 답 ②

$f(x)=2^x-2^{-x}+n$이라 하면 함수 $f(x)$는 증가함수이고

$n\ge2$일 때 $f(-1)=\dfrac{1}{2}-2+n=-\dfrac{3}{2}+n>0$이므로

$$S_n=\int_{-1}^1(2^x-2^{-x}+n)dx$$
$$=\left[\frac{2^x+2^{-x}}{\ln 2}+nx\right]_{-1}^1$$
$$=\left(\frac{2+2^{-1}}{\ln 2}+n\right)-\left(\frac{2^{-1}+2}{\ln 2}-n\right)=2n$$
$$\therefore \sum_{n=2}^{10}S_n=\sum_{n=2}^{10}2n=\sum_{n=1}^{10}2n-2=2\times\frac{10\times11}{2}-2=108$$

[다른 풀이]



함수 $f(x)=2^x-2^{-x}+n$의 그래프는 점 $(0,\ n)$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=2^x-2^{-x}+n$과 두 직선 $x=-1$, $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_n은 그림과 같이 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 n인 직사각형의 넓이와 같다.

$\therefore S_n=2n(n\ge2)$

(이하 동일)

14 답 ④

두 곡선 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$와 $y=x^3$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{2x}{x^2+1}=x^3$에서

$x^3(x^2+1)-2x=0,\ x\{x^2(x^2+1)-2\}=0$

$x(x^4+x^2-2)=0,\ x(x^2+2)(x^2-1)=0$

$x(x^2+2)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

이때, 두 함수 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $y=x^3$은 모두 원점에 대하여 대칭인 함수이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_0^1\left|\frac{2x}{x^2+1}-x^3\right|dx=2\left[\left|\ln(x^2+1)-\frac{1}{4}x^4\right|\right]_0^1$$
$$=2\left|\ln 2-\frac{1}{4}\right|=2\ln 2-\frac{1}{2}$$

15 답 ④

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

$\frac{1}{n}\sin x=\frac{1}{n+1}\sin x$에서 $\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$

따라서 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_n은

$$S_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin x-\frac{1}{n+1}\sin x\right)dx$$
$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

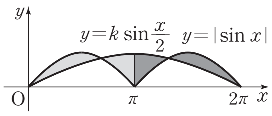
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

16 답 ④

$\int_0^{2\pi}\left(|\sin x|-k\sin\frac{x}{2}\right)dx=A-B+C$이므로

$\int_0^{2\pi}\left(|\sin x|-k\sin\frac{x}{2}\right)dx=0$

이때, 두 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 그림과 같이 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같다.



즉, $\int_0^{\pi}\left(|\sin x|-k\sin\frac{x}{2}\right)dx=0$에서

$\int_0^{\pi}\left(\sin x-k\sin\frac{x}{2}\right)dx=0$

$\left[-\cos x+2k\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}=0$

$1-(-1+2k)=0$

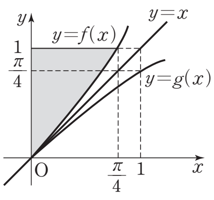
$\therefore k=1$

17 답 ④

$\tan(g(x))=x$에서

$\tan(g(f(x)))=f(x)$

$\therefore \tan x=f(x)$



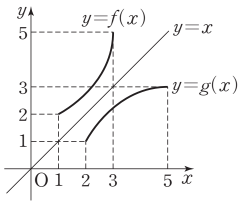
이때, $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$이므로

$$\int_0^1 g(x)dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$$
$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\Big[\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{4}+\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

18 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\left(2+\frac{3k}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\left(2+\frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}$$
$$=\frac{1}{3}\int_2^5 g(x)dx \cdots ㉠$$

한편, $f(1)=2$, $f(3)=5$이므로 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

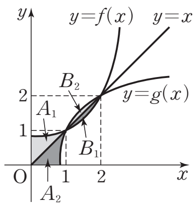


따라서 $\int_2^5 g(x)dx$의 값은 두 변의 길이가 각각 5, 3인 직사각형의 넓이에서 두 변의 길이가 각각 2, 1인 직사각형의 넓이와 $\int_1^3 f(x)dx$의 값을 뺀 것과 같다. 즉, $\int_2^5 g(x)dx=5\times3-\left\{2\times1+\int_1^3 f(x)dx\right\}=6$

이므로 ㉠에 의하여 구하는 값은 $\frac{1}{3}\int_2^5 g(x)dx=\frac{1}{3}\times6=2$

19 답 ④

그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 두 교점의 좌표는 $(1, 1)$, $(2, 2)$이다. 따라서 $f(1)=a+b=1$, $f(2)=4a+b=2$이므로



두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\ (x\ge0)$

한편, 직선 $y=x$는 두 넓이 A, B를 이등분하므로

$A_1=A_2$이고, $A_1+A_2=A$이므로

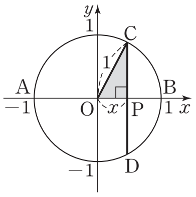
$$A=2A_1=2\int_0^1|f(x)-x|dx$$
$$=2\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}-x\right)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{9}x^3+\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=2\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\times\frac{5}{18}=\frac{5}{9}$$

마찬가지로 $B_1=B_2$이고 $B_1+B_2=B$이므로

$$B=2B_1=2\int_1^2|f(x)-x|dx$$
$$=2\int_1^2\left(x-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}\right)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}x\right]_1^2$$
$$=2\left\{\left(2-\frac{8}{9}-\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\right)\right\}$$
$$=2\times\frac{1}{18}=\frac{1}{9}$$

$\therefore A-B=\frac{5}{9}-\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$

20 답 ④



지름 AB의 중점을 원점, 직선 AB를 x축으로 잡고, 점 P의 좌표를 $(x,\ 0)$이라 하면 임의의 점 $(x,\ 0)$을 지나고 직선 AB에 수직인 현 CD의 길이는 $2\sqrt{1-x^2}$

이때, 현 CD를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{1-x^2})^2=\sqrt{3}(1-x^2)$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

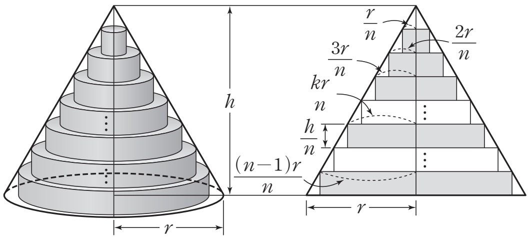
$V=\int_{-1}^{1}S(x)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{3}(1-x^2)dx$

$=2\sqrt{3}\int_{0}^{1}(1-x^2)dx$

$=2\sqrt{3}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

21 답 182



그림과 같이 원뿔의 높이를 n등분하면 위에서부터 k번째의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $r_k=\frac{kr}{n}$, 높이는 $\frac{h}{n}$이므로 이 원기둥의 부피 S_k는 $S_k=\pi\left(\frac{kr}{n}\right)^2\times\frac{h}{n}$이다.

$V_n=\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\times\frac{h}{n}+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\times\frac{h}{n}+\cdots+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\times\frac{h}{n}$

$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}$

$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ ← (가)

$\therefore \lim_{n\to\infty}V_n=\pi r^2\frac{h}{3}$ ← (나)

따라서 $f(n)=(n-1)n(2n-1)$, $g(h)=\frac{h}{3}$이므로

$f(5)+g(6)=180+2=182$

22 답 ⑤

$\int_0^3\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$는 곡선 $y=f(x)$의 구간 $[0,\ 3]$에서의 길이이므로 최소인 경우는 점 $(0,\ 0)$과 점 $(3,\ 4)$를 직선으로 연결할 때이다. 따라서 최솟값은 $\sqrt{3^2+4^2}=5$이다.

23 답 15

$x=\cos^3\theta,\ y=\sin^3\theta$에서 $\frac{dx}{d\theta}=-3\cos^2\theta\sin\theta$,

$\frac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta$이므로 곡선의 길이 l은

$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\cos^2\theta\sin\theta)^2+(3\sin^2\theta\cos\theta)^2}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{(\cos^4\theta\sin^2\theta)+(\cos^2\theta\sin^4\theta)}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos\theta\sin\theta\, d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\, d\theta$

$=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}$

$\therefore 10l=10\times\frac{3}{2}=15$

24 답 256

단면이 시각 $t=0$에서 $t=8$까지 움직인 거리 h는

$h=\int_0^8 t(8-t)dt=\left[4t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^8=\frac{256}{3}$

단면의 넓이와 단면이 움직인 거리의 곱이 흘러나온 물의 양 V가 되므로 $V=3\times\frac{256}{3}=256\ (\text{cm}^3)$ $\therefore k=256$

25 답 ②

$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(x+\frac{1-x}{n}k\right)=\int_x^1 f(t)dt$

$g'(x)=-f(x)=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 가진다.

$\therefore g(3)=\int_3^1 f(t)dt=\int_3^1(t^2-2t-3)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_3^1=\frac{16}{3}$

26 답 ①

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{kx-k}{n}\right)^3\frac{x-1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x-1}{n}k\right)^3\frac{x-1}{n}=\int_1^x t^3dt$

따라서 $f'(x)=x^3$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x^2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x^2-1}{x-1}\times f(1)-\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$

$=2f(1)-2f'(1)$

이때, $f(1)=\int_1^1 t^3dt=0$, $f'(1)=1^3=1$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}=2f(1)-2f'(1)=-2$

27 답 ②

분자와 분모를 n^5으로 나누어 정리하면

(주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}\times\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}}{\dfrac{(n+2)^4+(n+4)^4+(n+6)^4+\cdots+(3n)^4}{n^5}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\right\}\times\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}}{\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{\left(\int_0^1 x^2dx\right)\times\left(\int_0^1 xdx\right)}{\frac{1}{2}\int_1^3 x^4dx}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{242}{5}}=\frac{5}{726}$$

28 답 ⑤

$x=\frac{(3k-n)\pi}{2n}$라 하면 $\frac{3k}{2n}\pi=\frac{\pi}{2}+x$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(3k-n)\pi}{2n}\times\left(\sin\frac{3k}{2n}\pi\right)\frac{\pi}{n}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(3k-n)\pi}{2n}\times\left(\sin\frac{3k}{2n}\pi\right)\frac{3\pi}{2n}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\cos x dx$$

이때, $y=x\cos x$는 원점에 대하여 대칭인 함수이므로

$$\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\cos xdx=\frac{2}{3}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\cos xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx\right)$$

$$=\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\cos xdx=\frac{2}{3}\Big[x\sin x+\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}$$

따라서 $a=\frac{2}{3}$, $b=1$, $c=\frac{1}{2}$, $d=-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}$이므로

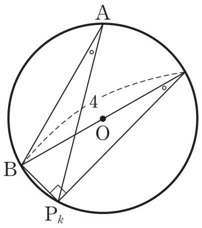
$$a+b+c+d=\frac{3}{2}-\frac{\pi}{3}$$

29 답 ③

삼각형 ABP_k (단, k는 $1\le k\le n-1$인 자연수)에서

$\angle\mathrm{BAP}_k=\frac{\pi}{3}\times\frac{k}{n}=\frac{k\pi}{3n}$이고

그림에서



$\sin(\angle\mathrm{BAP}_k)=\frac{\overline{\mathrm{BP}_k}}{2R}=\frac{\overline{\mathrm{BP}_k}}{4}$

따라서 $\overline{\mathrm{BP}_k}=4\sin\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{BP}_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{4\sin\left(\frac{k\pi}{3n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

$$=\frac{12}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{3n}\right)\times\frac{\pi}{3n}$$

$$=\frac{12}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin xdx=\frac{12}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{6}{\pi}$$

30 답 4

$\int_0^{2\pi}|x\sin x|dx=\int_0^{\pi}x\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin xdx$에서

$$\int x\sin xdx=-x\cos x+\int\cos xdx$$

$$=-x\cos x+\sin x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

이므로

$$\int_0^{\pi}x\sin xdx=\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_0^{\pi}=\pi$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}x\sin xdx=\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_{\pi}^{2\pi}=-3\pi$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}|x\sin x|dx=\int_0^{\pi}x\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}x\sin xdx$$

$$=\pi-(-3\pi)=4\pi$$

$\therefore k=4$

31 답 ①

$\int_0^{\sqrt{2}}xf(x^2)dx$에서 $x^2=t$라 하면 $xdx=\frac{1}{2}dt$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\sqrt{2}}xf(x^2)dx=\int_0^2 f(t)\times\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\sqrt{2}}f(t)dt+\int_{\sqrt{2}}^2 f(t)dt\right\}=\frac{1}{2}(a-b)$$

32 답 ③

곡선 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 위의 두 점 A, C의 좌표가 각각 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$이므로 정사각형 OABC의 넓이는 1이다.

이때, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$에서 $\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$이고 양변을 제곱하면

$y=1+x-2\sqrt{x}$이므로

$$S_1=\int_0^1(1+x-2\sqrt{x})dx=\Big[x+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x\sqrt{x}\Big]_0^1=\frac{1}{6}$$

$$S_2=1-S_1=\frac{5}{6}$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1}=5$$

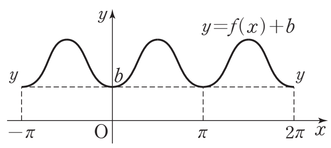
33 답 ①

함수 $f(x)=\sin^2 x$는 주기가 π인 주기함수이고

$$\int_0^{\pi}\sin^2 xdx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\Big[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

따라서 그림과 같이 곡선 $y=f(x)+b$와 x축, y축 및 직선 $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{\pi}{2}+b\pi$이다.



또한, 함수 $y=f(x)+b$도 주기가 π인 주기함수이므로 곡선 $y=f(x)+b$와 x축, y축 및 직선 $x=a\pi$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a\left(\frac{\pi}{2}+b\pi\right)$이다.

따라서 $a\left(\frac{\pi}{2}+b\pi\right)=5\pi$에서 $a(1+2b)=10$

이때, a, b는 자연수이므로 $a=b=2$　　$\therefore a+b=4$

34 답 ⑤

주어진 조건에서 $\int_0^a\left(\sin x-\cos\frac{x}{2}\right)dx=0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^a\left(\sin x-\cos\frac{x}{2}\right)dx&=\left[-\cos x-2\sin\frac{x}{2}\right]_0^a\\&=-\cos a-2\sin\frac{a}{2}+1\\&=-\left(1-2\sin^2\frac{a}{2}\right)-2\sin\frac{a}{2}+1\\&=2\sin^2\frac{a}{2}-2\sin\frac{a}{2}\\&=2\sin\frac{a}{2}\left(\sin\frac{a}{2}-1\right)=0\end{aligned}$$

$\therefore \sin\frac{a}{2}=0$ 또는 $\sin\frac{a}{2}=1$

이때, $0<a\le 2\pi$이므로 $a=\pi$ 또는 $a=2\pi$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $\pi+2\pi=3\pi$

35 답 2

$\sqrt{x}=t$라 하면 $x=t^2$에서 $dx=2tdt$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=4$일 때, $t=2$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^4 f'(\sqrt{x})dx&=\int_0^2 2tf'(t)dt\\&=\Big[2tf(t)\Big]_0^2-\int_0^2 2f(t)dt\\&=4f(2)-2\int_0^2 f(x)dx\end{aligned}$$

이때, $B-A=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx&=\int_0^{\sqrt{2}}f(x)dx+\int_{\sqrt{2}}^2 f(x)dx\\&=(\sqrt{2}\times\sqrt{2}-A)+B=2+(B-A)=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^4 f'(\sqrt{x})dx&=4f(2)-2\int_0^2 f(x)dx\\&=4\times2-2\times3=2\end{aligned}$$

36 답 ①

주어진 식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=4a\sqrt{a}-3a^2-a=0$

$3a-4\sqrt{a}+1=0$ ($\because$ a는 자연수)

$(3\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-1)=0$

$\therefore \sqrt{a}=\frac{1}{3}$ 또는 $\sqrt{a}=1$

이때, a는 자연수이므로 $a=1$

또한, 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6\sqrt{x}-6x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는

$6\sqrt{x}-6x=0$, $\sqrt{x}(1-\sqrt{x})=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $f(x)=6\sqrt{x}-6x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_0^1(6\sqrt{x}-6x)dx=\Big[4x\sqrt{x}-3x^2\Big]_0^1=1$

$\therefore a+S=2$

37 답 ②

(i) $(2x)^2>\pi^2$, 즉 $|x|>\frac{\pi}{2}$일 때, $f(x)=ax^2+b$

(ii) $(2x)^2=\pi^2$, 즉 $|x|=\frac{\pi}{2}$일 때, $f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a\pi^2+4b}{8}$

(iii) $(2x)^2<\pi^2$, 즉 $|x|<\frac{\pi}{2}$일 때, $f(x)=\cos x$

(i)~(iii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b & \left(|x|>\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{a\pi^2+4b}{8} & \left(|x|=\frac{\pi}{2}\right)\\ \cos x & \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

이때, 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대해서 미분가능하므로

$|x|=\frac{\pi}{2}$일 때 연속이다.

즉, $\lim_{|x|\to\frac{\pi}{2}+}f(x)=\lim_{|x|\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$에서

$\frac{a\pi^2+4b}{4}=0=\frac{a\pi^2+4b}{8}$

$\therefore a\pi^2+4b=0$ ⋯ ㉠

또한, 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\begin{cases}2ax & \left(|x|>\frac{\pi}{2}\right)\\ -\sin x & \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

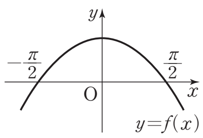
이고 함수 $f(x)$가 $|x|=\frac{\pi}{2}$일 때 미분가능하므로

$2a\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\mp1$ (복호동순)

$\therefore a=-\frac{1}{\pi}$

$a=-\frac{1}{\pi}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{\pi}{4}$

한편, 곡선 $y=f(x)$가 그림과 같으므로



$$\begin{aligned}S&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\&=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\end{aligned}$$

$\therefore abS=-\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{4}\times2=-\frac{1}{2}$

38 답 ①

함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 직선 $x=c$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $S_1+S_2=\int_0^c \sqrt{ax}\,dx=\left[\frac{2\sqrt{a}}{3}x\sqrt{x}\right]_0^c=\frac{2c\sqrt{ac}}{3}$

마찬가지로 함수 $y=\sqrt{bx}$의 그래프와 직선 $x=c$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $S_2=\frac{2c\sqrt{bc}}{3}$

따라서 $S_1=\frac{2c\sqrt{c}}{3}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$, $S_2=\frac{2c\sqrt{bc}}{3}$이므로

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{2c\sqrt{c}}{3}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\frac{2c\sqrt{bc}}{3}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}-1$$

[다른 풀이]

두 무리함수 $y=\sqrt{ax}$, $y=\sqrt{bx}$의 그래프와 직선 $x=k(0<k<c)$의 교점의 y좌표의 비율이 상수 $\frac{\sqrt{ak}}{\sqrt{bk}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$이므로 넓이의 비율도 같다. 즉, $\frac{S_1+S_2}{S_2}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$에서 $\frac{S_1}{S_2}=\sqrt{\frac{a}{b}}-1$

39 답 ③

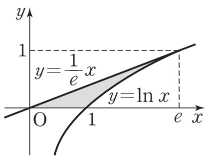
원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 접점을 $(t, \ln t)$라 하면 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{t}(x-t)+\ln t$

이 직선이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$0=\frac{1}{t}(0-t)+\ln t \qquad \therefore t=e$

따라서 접점의 좌표는 $(e, 1)$이고,

접선의 방정식은 $y=\frac{1}{e}x$이다.

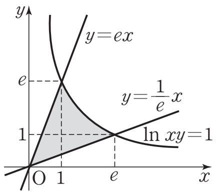


따라서 구하는 넓이는 직선 $y=\frac{1}{e}x$와 직선 $x=e$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이에서 곡선 $y=\ln x$와 직선 $x=e$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times e\times 1-\int_1^e \ln x\,dx=\frac{1}{2}e-\Big[x\ln x-x\Big]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}e-\{0-(-1)\}=\frac{e-2}{2}$$

40 답 ④

$\ln xy=1$에서 $y=\frac{e}{x}$이므로 그림과 같이 제 1사분면에서 곡선 $\ln xy=1$과 두 직선 $y=ex$, $y=\frac{1}{e}x$로 둘러싸인 부분의 넓이는



$\int_0^1 ex\,dx+\int_1^e \frac{e}{x}dx-\int_0^e \frac{1}{e}x\,dx$

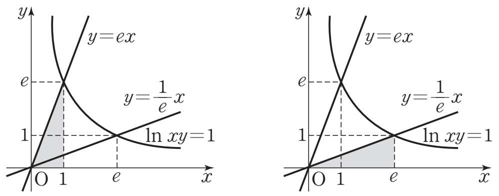
$=\left[\frac{1}{2}ex^2\right]_0^1+\Big[e\ln x\Big]_1^e-\left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^e=e$

한편, 곡선 $\ln xy=1$과 두 직선 $y=ex$, $y=\frac{1}{e}x$는 모두 원점에 대하여 대칭이므로 제 3사분면에서도 같은 크기의 도형이 존재한다.

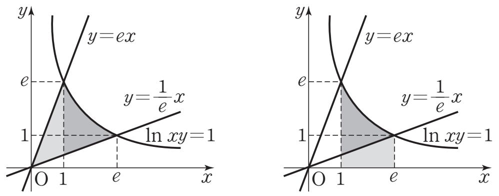
따라서 구하는 넓이는 $2e$이다.

[다른 풀이]

[그림 1]에서 색칠한 두 삼각형의 넓이가 같으므로 [그림 2]의 색칠한 부분의 넓이도 서로 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 곡선 $\ln xy=1$과 두 직선 $y=ex$, $y=\frac{1}{e}x$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $2\int_1^e \frac{e}{x}dx=2\Big[e\ln x\Big]_1^e=2e$

41 답 ③

구간 $[0, \pi]$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos\frac{x}{2}$의 교점의 x좌표는

$\sin x=\cos\frac{x}{2}$에서 $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$

$\cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}-1\right)=0$

$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos\frac{x}{2}=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ $(\because 0\le x\le\pi)$

즉, 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos\frac{x}{2}$의 교점의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\pi$이므로 두 부분 A, B의 넓이 S_1, S_2는

$S_1=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(\sin x-\cos\frac{x}{2}\right)dx=\left[-\cos x-2\sin\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{1}{2}$

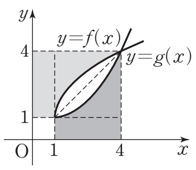
$S_2=\int_0^{\pi}\sin x\,dx-S_1=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}-\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{S_2}{S_1}=3$

42 답 ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표가 1, 4이므로

$f(1)=1$, $f(4)=4$



즉, 그림과 같이 함수 $y=f(x)$와 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 좌표는 $(1, 1)$, $(4, 4)$이고, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그림의 색칠한 두 부분의 넓이는 서로 같다.

이때, $1+\frac{3k}{n}=x$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(1+\frac{3k}{n}\right)+g\left(1+\frac{3k}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(1+\frac{3k}{n}\right)+g\left(1+\frac{3k}{n}\right)\right\}\frac{3}{n}$$

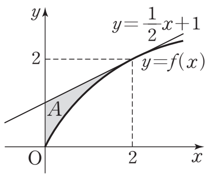
$$=\frac{1}{3}\int_1^4\{f(x)+g(x)\}dx=\frac{1}{3}(4^2-1^2)=5$$

43 답 ④

함수 $f(x)$는 역함수를 가지므로 일대일함수이고, 곡선 $y=f(x)$가 원점과 점 $(2,\ 2)$를 지나므로 증가함수이다. 따라서 $f'(x)\geq 0$이고, $0\leq x\leq 2$에서 $f'(x)f''(x)<0$이므로 $f'(x)>0$, $f''(x)<0$

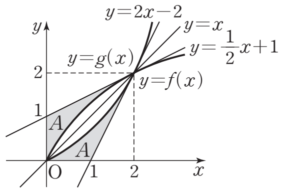
한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(2)(x-2)+2=\frac{1}{2}x+1$이므로



[그림 1]

접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분 A는 [그림 1]의 색칠한 부분과 같다. 이때, 곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=\frac{1}{2}x+1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 각각 역함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-2$가 되므로 [그림 2]와 같이 색칠한 두 부분의 넓이는 A로 서로 같다.

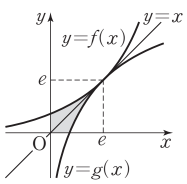


[그림 2]

$\therefore \int_0^2 g(x)dx=A+\frac{1}{2}\times 1\times 2=A+1$

44 답 ③

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=e$인 점에서 접하므로 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 점 $(e,\ e)$에서 직선 $y=x$를 공통접선으로 가진다.



따라서 $f(e)=e$, $f'(e)=1$이므로

$f(e)=e^{ae+b}=e$ ⋯ ㉠

$f'(e)=ae^{ae+b}=1$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $ae=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{e}$

$a=\frac{1}{e}$을 ㉠에 대입하면 $e^{1+b}=e$, $1+b=1$ $\quad\therefore b=0$

이때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이 S는

$$S=2\int_0^e\left(e^{\frac{x}{e}}-x\right)dx=2\left[e\times e^{\frac{x}{e}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^e$$

$$=2\left\{\left(e^2-\frac{1}{2}e^2\right)-e\right\}=e^2-2e$$

$$\therefore aS+b=\frac{1}{e}(e^2-2e)+0=e-2$$

45 답 ④

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$$

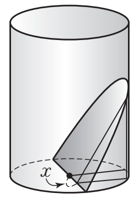
이때, $\sqrt{4-x^2}=t$라 하면 $4-x^2=t^2$에서 $-xdx=tdt$이고, $x=0$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=0$이므로

$$V=\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx=\int_2^0(-t^2)dt=\int_0^2 t^2dt$$

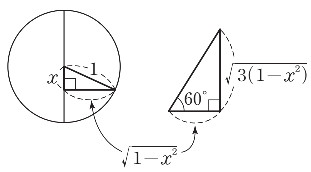
$$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

46 답 ②

[그림 1]과 같이 밑면의 중심에서 x만큼의 거리에 있는 점에서 밑면의 지름에 수직이고, 밑면과 수직인 평면으로 자른 단면은 한 각의 크기가 $60°$인 직각삼각형이다. 이때, [그림 2]와 같이 단면의 밑변의 길이는 $\sqrt{1-x^2}$이고 높이는 $\sqrt{3(1-x^2)}$이므로 단면의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)$이다.



[그림 1]



[그림 2]

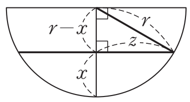
따라서 구하는 부피는

$$2\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)dx=\sqrt{3}\int_0^1(1-x^2)dx$$

$$=\sqrt{3}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

47 답 ①

그림과 같이 물의 깊이를 x라 하고, 물의 깊이가 x일 때의 수면의 반지름의 길이를 z라 하면



$z^2=r^2-(r-x)^2=2rx-x^2$

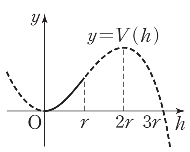
이때, 수면의 넓이는 $\pi z^2=\pi(2rx-x^2)$이므로

$$V(h)=\pi\int_0^h(2rx-x^2)dx$$

$$=\pi\left[rx^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\pi\left(rh^2-\frac{1}{3}h^3\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\pi h^2(h-3r)$$

따라서 $y=V(h)\,(0\leq h\leq r)$의 그래프는 그림과 같다.



48 답 ③

$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$에서 $y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$이므로 구하는 곡선의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2(e^x+e^{-x})dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^2=\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})$$

49 답 ④

$x=t-\sin t$에서 $\frac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\frac{d^2x}{dt^2}=\sin t$이고

$y=1-\cos t$에서 $\frac{dy}{dt}=\sin t$

이때, $0\le t\le 2\pi$에서 $\left|\frac{d^2x}{dt^2}\right|=|\sin t|$의 최댓값은 1이므로

$\sin t=1$에서 $t=\frac{\pi}{2}$, $\sin t=-1$에서 $t=\frac{3}{2}\pi$이다.

$\therefore t_1=\frac{\pi}{2}$, $t_2=\frac{3}{2}\pi$ ($\because t_1<t_2$)

따라서 시각 $t_1=\frac{\pi}{2}$에서 $t_2=\frac{3}{2}\pi$까지 점 P의 이동거리를 l이라 하면

$$l=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}2\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}2\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}2\sin\frac{t}{2}dt$$

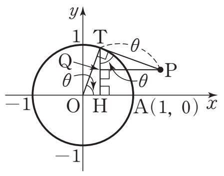
$$=2\Big[-2\cos\frac{t}{2}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}=4\sqrt{2}$$

50 답 16

$\angle AOT=\theta$라 하면 점 T의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$이고 호 TA의 길이와 선분 TP의 길이가 같으므로 $\overline{TP}=\theta$

즉, 직각삼각형 TQP에서 $\overline{PQ}=\overline{TP}\sin\theta=\theta\sin\theta$,

$\overline{TQ}=\overline{TP}\cos\theta=\theta\cos\theta$이므로



점 P의 x좌표는

$\overline{OH}+\overline{PQ}=\cos\theta+\theta\sin\theta$

점 P의 y좌표는

$\overline{TH}-\overline{TQ}=\sin\theta-\theta\cos\theta$

$\therefore P(x,\ y)=P(\cos\theta+\theta\sin\theta,\ \sin\theta-\theta\cos\theta)$

따라서 $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta=\theta\cos\theta$,

$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\cos\theta+\theta\sin\theta=\theta\sin\theta$이므로

점 T가 점 A를 출발하여 점 $(0,\ 1)$에 도착할 때까지, 즉 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$일 때 점 P가 움직인 거리를 l이라 하면

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\theta^2\cos^2\theta+\theta^2\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta d\theta=\Big[\frac{1}{2}\theta^2\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$$

따라서 $k=\frac{1}{8}$이므로 $128k=128\times\frac{1}{8}=16$

51 답 6

$\frac{dx}{dt}=-3\sin t+3\sin 3t$, $\frac{dy}{dt}=3\cos t-3\cos 3t$이므로

$t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리를 l이라 하면

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\sin t+3\sin 3t)^2+(3\cos t-3\cos 3t)^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{2-2\sin t\sin 3t-2\cos t\cos 3t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{2(1-\cos 2t)}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\sqrt{\frac{1-\cos 2t}{2}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\sqrt{\sin^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\sin t dt=\Big[-6\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=6$$

52 답 1

$f(m,\ n)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+mn}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\frac{k}{m}+n}$이므로 ---------- ⓐ

$$a_n=n\lim_{m\to\infty}f(m,\ n)=n\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+mn}$$

$$=n\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\frac{k}{m}+n}$$

$$=n\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=n\Big[\ln x\Big]_n^{n+1}$$

$=n\{\ln(n+1)-\ln n\}=n\left(\ln\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ --- ⓑ

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln e=1$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+mn}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\frac{k}{m}+mn}$로 나타낸다.	[30%]
ⓑ 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.	[50%]
ⓒ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구한다.	[20%]

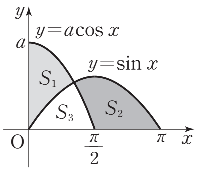
53 답 2

그림과 같이 두 함수

$y=\sin x(0\le x\le\pi)$,

$y=a\cos x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프와

x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를



S_3이라 하면 ········· ⓐ

$$S_1+S_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx=\left[a\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=a$$

$$S_2+S_3=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2 \text{ ········· ⓑ}$$

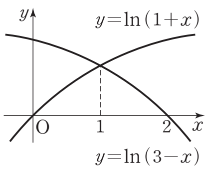
$S_1=S_2$이어야 하므로 $a=2$ ········· ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 함수의 그래프와 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3이라 한다.	[20%]
ⓑ S_1+S_3, S_2+S_3의 넓이를 각각 구한다.	[60%]
ⓒ 상수 a의 값을 구한다.	[20%]

54 답 6

두 곡선 $y=\ln(1+x)$, $y=\ln(3-x)$가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 구하는 입체도형은 $0\le x\le 1$일 때의 부피와 $1\le x\le 2$일 때의 부피가 서로 같다.



········· ⓐ

이때, $x=t(0<t<1)$를 포함하는 평면으로 입체도형을 자른 단면은 반원이고 이때의 지름의 길이가 $\ln(1+t)$이므로 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\ln(1+t)$이다. 따라서 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\pi\left\{\frac{1}{2}\ln(1+t)\right\}^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}\{\ln(1+t)\}^2 \text{ ········· ⓑ}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=2\int_0^1 S(t)dt=2\int_0^1\frac{\pi}{8}\{\ln(1+t)\}^2dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\{\ln(1+t)\}^2dt=\frac{\pi}{4}\int_1^2(\ln t)^2dt \cdots ㉠$$

이때, $\ln t=x$라 하면 $t=e^x$에서 $dt=e^xdx$이고, $t=1$일 때 $x=0$, $t=2$일 때 $x=\ln 2$이므로 ㉠에서

$$V=\frac{\pi}{4}\int_1^2(\ln t)^2dt=\frac{\pi}{4}\int_0^{\ln 2}x^2e^xdx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\left[x^2e^x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}2xe^xdx\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left\{\left[x^2e^x\right]_0^{\ln 2}-2\left(\left[xe^x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}e^xdx\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[(x^2-2x+2)e^x\right]_0^{\ln 2}=\frac{\pi}{4}\{2(\ln 2)^2-4\ln 2+4-2\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\{(\ln 2)^2-2\ln 2+1\}$$

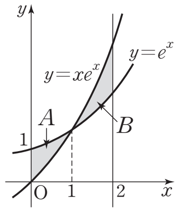
따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=1$이므로 $a^2+b^2+c^2=6$ ········· ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $0\le x\le 1$일 때와 $1\le x\le 2$일 때의 부피가 같음을 보인다.	[10%]
ⓑ 단면의 넓이를 구한다.	[30%]
ⓒ 입체도형의 부피를 구하고 $a^2+b^2+c^2$의 값을 계산한다.	[60%]

55 답 ③

두 부분 A, B의 넓이의 차 $b-a$는 구간 $[0, 2]$에서 함수 $y=xe^x-e^x$의 정적분의 값과 같다.



$$\therefore b-a=\int_0^2(xe^x-e^x)dx$$

$$=\int_0^2(x-1)e^xdx$$

$$=\left[(x-1)e^x\right]_0^2-\int_0^2e^xdx$$

$$=\left[(x-1)e^x\right]_0^2-\left[e^x\right]_0^2$$

$$=\{e^2-(-1)\}-(e^2-1)=2$$

56 답 100

구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$에서 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_n은

$$S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x\right|dx=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx$$

이때, 함수 $y=|\sin x|$는 주기가 π인 주기함수이므로 임의의 자연수 n에 대하여

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2$$

따라서 $S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2=\alpha$$

$\therefore 50\alpha=100$

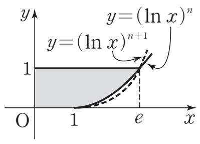
57 답 ⑤

ㄱ. $1\le x\le e$에서 $0\le\ln x\le 1$이므로

$(\ln x)^n-(\ln x)^{n+1}=(\ln x)^n(1-\ln x)\ge 0$

$\therefore (\ln x)^n\ge(\ln x)^{n+1}$ (참)

ㄴ. $1<x<e$에서



$(\ln x)^n>(\ln x)^{n+1}$이므로

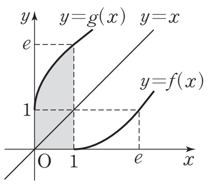
$$\int_1^e(\ln x)^ndx>\int_1^e(\ln x)^{n+1}dx$$

$$-\int_1^e(\ln x)^ndx<-\int_1^e(\ln x)^{n+1}dx$$

$$e-\int_1^e(\ln x)^ndx<e-\int_1^e(\ln x)^{n+1}dx$$

$\therefore S_n<S_{n+1}$ (참)

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 오른쪽 그림과 같으므로 $S_n=\int_0^1 g(x)dx$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

58 답 ⑤

ㄱ. $f(x)>0$이므로 $\int_{n}^{n+1} f(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=n$, $x=n+1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

또한, 선분 P_nQ_n과 두 직선 $x=n$, $x=n+1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $f(n)$이다.

$\therefore \int_{n}^{n+1} f(x)dx=f(n)-(A_n+B_n)$ (참)

ㄴ. $A_n=\frac{1}{2}\times 1\times\{f(n)-f(n+1)\}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} A_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} A_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{f(1)-f(n+1)\}$

$=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2e}$ (참)

ㄷ. ㄱ에서 $B_n=f(n)-A_n-\int_{n}^{n+1} f(x)dx$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} B_n=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)-\sum_{n=1}^{\infty} A_n-\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n+1} f(x)dx$

이때, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$

$\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n+1} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n+1} e^{-x}dx=\lim_{n\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_{1}^{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\Big\{-e^{-(n+1)}+\frac{1}{e}\Big\}=\frac{1}{e}$

이고 ㄴ에서 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n=\frac{1}{2e}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} B_n=\frac{1}{e-1}-\frac{1}{2e}-\frac{1}{e}$

$=\frac{2e-(e-1)-2(e-1)}{2e(e-1)}=\frac{3-e}{2e(e-1)}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

59 답 ①

점 $A(t, f(t))$에서 x축에 내린 수선의 발 B의 좌표는 $(t, 0)$이고

점 A에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$이다.

이때, 이 직선이 x축과 만나는 점 C의 좌표는

$(f'(t)f(t)+t, 0)$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}|f(t)\times f'(t)f(t)|=\frac{1}{2}|f'(t)\{f(t)\}^2|$

$=\frac{1}{2}f'(t)\{f(t)\}^2 (\because f'(x)>0)$ ⋯ ㉠

이때, 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)=\frac{1}{2}e^t(e^t-1)^2$

이므로 ㉠에 의하여

$f'(t)\{f(t)\}^2=e^t(e^t-1)^2$

양변을 t에 대하여 부정적분하면

$\frac{1}{3}\{f(t)\}^3=\frac{1}{3}(e^t-1)^3+C$($C$는 적분상수)이고 $f(0)=0$에서 $C=0$

즉, $\{f(t)\}^3=(e^t-1)^3$에서 $f(t)=e^t-1$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_{0}^{1}(e^x-1)dx=\Big[e^x-x\Big]_{0}^{1}=e-1-1=e-2$

60 답 64

$\frac{dx}{dt}=4(-\sin t+\cos t)$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin 2t$이므로

점 P가 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리를 l이라 하면

$l=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

$=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{\{4(-\sin t+\cos t)\}^2+(-2\sin 2t)^2}dt$

$=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{16(1-\sin 2t)+4\sin^2 2t}dt$

$=\int_{0}^{2\pi}2\sqrt{(\sin 2t-2)^2}dt$

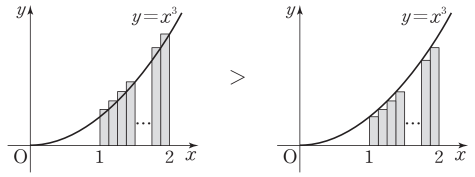
$=\int_{0}^{2\pi}2(2-\sin 2t)=\Big[4t+\cos 2t\Big]_{0}^{2\pi}$

$=8\pi+1-1=8\pi$

따라서 $a=8$이므로 $a^2=8^2=64$

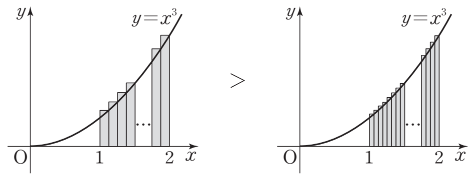
61 답 ③

ㄱ.



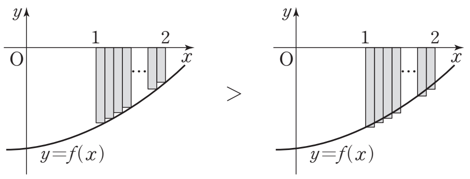
(참)

ㄴ.



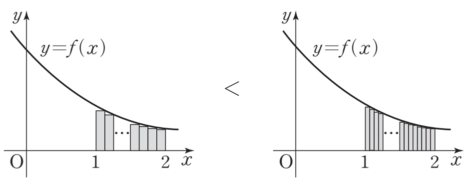
(참)

ㄷ. $f(x)>0$일 때는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 ㄱ과 같고 $f(x)<0$일 때는 다음 그림과 같다.



(참)

ㄹ. 【반례】$f(x)$가 감소함수이면 그림과 같다.

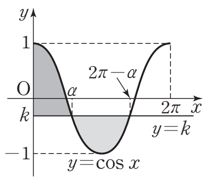


(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

62 답 ②

두 함수 $y=\cos x$, $y=k$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 α, $2\pi-\alpha(0<\alpha<\pi)$라 하면 곡선 $y=\cos x$와 y축 및 직선 $y=k$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합 $S(\alpha)$는



$$S(\alpha)=\int_0^{\alpha}(\cos x-k)dx+\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}(k-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x-kx\Big]_0^{\alpha}+\Big[kx-\sin x\Big]_{\alpha}^{2\pi-\alpha}$$
$$=\sin\alpha-k\alpha+k(2\pi-\alpha)-\sin(2\pi-\alpha)-k\alpha+\sin\alpha$$
$$=3\sin\alpha+k(2\pi-3\alpha)$$

이때, $k=\cos\alpha$이므로

$S(\alpha)=3\sin\alpha+(2\pi-3\alpha)\cos\alpha$에서

$S'(\alpha)=3\cos\alpha-3\cos\alpha-(2\pi-3\alpha)\sin\alpha$

$\quad=(3\alpha-2\pi)\sin\alpha$

$S'(\alpha)=0$에서 $\alpha=\frac{2}{3}\pi(\because 0<\alpha<\pi)$이므로 함수 $S(\alpha)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

α	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	(π)
$S'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$S(\alpha)$		↘	극소	↗	

즉, $S(\alpha)$는 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$일 때 극소이면서 최소이므로

$k=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

63 답 ②

두 곡선 $y=\sin 2x$, $y=k\cos x$의 교점의 x좌표를 α라 하면

$\sin 2\alpha=k\cos\alpha$에서

$2\sin\alpha\cos\alpha-k\cos\alpha=0$, $\cos\alpha(2\sin\alpha-k)=0$

$\therefore \sin\alpha=\frac{k}{2}\left(0<k<2,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)\ \cdots$ ㉠

한편, $\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-k\cos x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx$에서

$\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-k\sin x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\left(\frac{1}{2}-k\right)-\left(-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-k\sin\alpha\right)=\frac{1}{2}$

$k\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha-k=0\ \cdots$ ㉡

이때, ㉠에서 $\sin\alpha=\frac{k}{2}$이므로

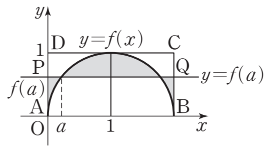
$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-\frac{k^2}{2}=\frac{2-k^2}{2}$

위 식을 ㉡에 대입하면

$\frac{k^2}{2}+\frac{2-k^2}{4}-k=0$, $k^2-4k+2=0$

$\therefore k=2-\sqrt{2}\ (\because 0<k<2)$

64 답 ④



그림과 같이 점 A를 원점으로 하여 $\overline{AB}$가 x축과 일치하도록 놓고, 반원의 방정식을 $y=f(x)$, 반원과 $\overline{PQ}$가 만나는 점의 x좌표 중 작은 값을 $a(0<a<1)$라 하면 직선 PQ의 방정식은 $y=f(a)$이다.

따라서 색칠된 세 부분의 넓이의 합 $S(a)$는

$$S(a)=2\left[\int_0^a\{f(a)-f(x)\}dx+\int_a^1\{f(x)-f(a)\}dx\right]$$
$$=2\left\{af(a)-\int_0^a f(x)dx+\int_a^1 f(x)dx-(1-a)f(a)\right\}$$
$$\therefore S'(a)=2\{f(a)+af'(a)-f(a)-f(a)+f(a)-(1-a)f'(a)\}$$
$$=2\{2af'(a)-f'(a)\}$$
$$=2(2a-1)f'(a)$$

이때, $0<a<1$에서 $f'(a)>0$이므로 $S'(a)=0$에서

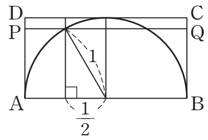
$2a-1=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

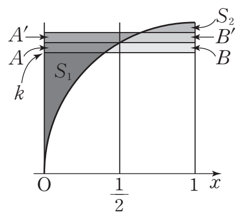
a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

즉, $S(a)$는 $a=\frac{1}{2}$일 때 극소이면서 최소이므로 오른쪽 그림에서



$\overline{PA}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

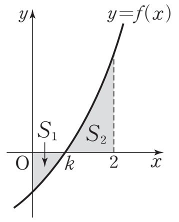
[다른 풀이]



그림과 같이 k의 값이 증가함에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프의 왼쪽에 S_1의 증가량 A, A'이, 오른쪽에 S_2의 감소량 B, B'이 나타난다.

직선 $y=k$가 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지날 때, $A<B$이고 $A'>B'$이므로 증가하는 넓이가 감소하는 넓이보다 크다. 즉, $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, S_1+S_2가 최소이다.

65 답 ④



닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 증가하는 연속함수 $y=f(x)$가 $0<\int_0^2 f(x)dx<\int_0^2 |f(x)|dx$를 만족시키므로 $0<k<2$인 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 $x=k$에서 만난다. 이때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$\int_0^2 f(x)dx=1$에서 $-S_1+S_2=1$ ⋯ ㉠

$\int_0^2 |f(x)|dx=3$에서 $S_1+S_2=3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$S_1=1,\ S_2=2$

한편, $\int_0^2 f(x)F(x)dx$에서 $t=F(x)$라 하면

$dt=F'(x)dx=|f(x)|dx=\begin{cases} -f(x)dx & (0\le x\le k) \\ f(x)dx & (k\le x\le 2) \end{cases}$이고

$x=0$일 때 $t=F(0)=0$, $x=k$일 때 $t=F(k)=S_1=1$,

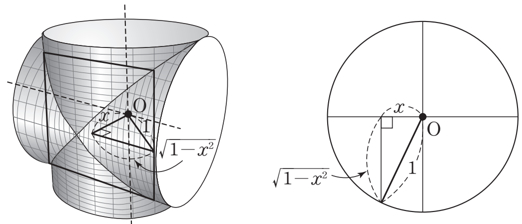
$x=2$일 때 $t=F(2)=S_1+S_2=3$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)F(x)dx&=\int_0^k f(x)F(x)dx+\int_k^2 f(x)F(x)dx\\&=\int_{F(0)}^{F(k)} t(-dt)+\int_{F(k)}^{F(2)} tdt\\&=-\int_0^1 tdt+\int_1^3 tdt\\&=-\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

$\therefore\ 4\int_0^2 f(x)F(x)dx=4\times\frac{7}{2}=14$

66 답 160

새로운 구멍에 의해서 손실되는 나무토막은 밑면의 반지름의 길이가 1이고 높이가 4인 원기둥에서 원래의 구멍과 겹쳐진 부분을 뺀 부분이다. 즉, $4\pi-V$의 V는 원래의 구멍과 겹쳐진 부분의 부피이다.



원래의 구멍과 겹쳐진 부분의 부피 V는 그림과 같다. 이때, 한 단면의 중심에서 x만큼의 거리이고 새로 생긴 구멍의 밑면에 수직으로 자른 단면은 항상 한 변의 길이가 $2\sqrt{1-x^2}$인 정사각형이므로

$V=2\int_0^1 4(1-x^2)dx=\frac{16}{3}$

$\therefore\ 30V=160$