THE FIRST CLASS MATHEMATICS 1 일등급 수학 · **기하**

[해설편]

Ⅰ 이차곡선

Ⅱ 평면벡터

Ⅲ 공간도형과 공간좌표

빠른 정답 찾기

Ⅰ 이차곡선

01 이차곡선

01 24	02 ②	03 ⑤	04 ⑤
05 63	06 ③	07 ③	08 6
09 ①	10 28	11 18	12 30
13 ③	14 ⑤	15 ⑤	16 ③
17 ⑤	18 ②	19 ④	20 16
21 16	22 512	23 ③	24 ③
25 2	26 ②	27 304	28 10
29 20	30 180	31 ①	32 ③
33 ⑤	34 5	35 45	36 22
37 36	38 5	39 147	40 2
41 116	42 ④	43 29	44 8
45 36	46 ①	47 11	48 ②
49 ③	50 12	51 1	52 ④
53 ④	54 ③		

02 이차곡선과 직선

01 ③	02 ④	03 ①	04 ①
05 ②	06 ⑤	07 ⑤	08 ②
09 3	10 8	11 ②	12 ⑤
13 15	14 ⑤	15 20	16 ③
17 ③	18 ④	19 ③	20 ④
21 1	22 3	23 75	24 10
25 ⑤	26 ③	27 ④	28 29
29 5	30 ③	31 8	32 29
33 10	34 10	35 35	36 ①
37 ③	38 ①	39 116	40 20
41 25	42 50	43 8	

Ⅱ 평면벡터

03 벡터의 연산과 위치벡터

01 ③	02 ③	03 ③	04 30
05 ⑤	06 ⑤	07 ④	08 1
09 ④	10 ③	11 ④	12 ①
13 8	14 ①	15 ④	16 ③
17 125	18 ②	19 ②	20 ③
21 ②	22 6	23 ④	24 ②
25 ②	26 ③	27 ③	28 ①
29 5	30 4	31 6	32 ④
33 14	34 ④	35 ②	36 ③
37 45	38 ⑤	39 ②	40 ②
41 ①	42 3	43 3	44 15
45 ②	46 ③	47 7	48 2
49 1	50 8	51 15	52 ⑤
53 ③	54 19	55 ②	56 ②
57 ④	58 21	59 5	60 1

Ⅲ 공간도형과 공간좌표

04 평면벡터의 성분과 내적

01 ②	02 50	03 ③	04 ⑤
05 ④	06 6	07 6	08 ①
09 ⑤	10 ⑤	11 ⑤	12 ①
13 ⑤	14 44	15 ④	16 ②
17 ⑤	18 ③	19 24	20 ③
21 ②	22 ①	23 3	24 ④
25 ③	26 ②	27 ②	28 ②
29 ④	30 ④	31 ②	32 ④
33 ⑤	34 ⑤	35 ②	36 ④
37 ③	38 ①	39 1	40 ④
41 1	42 ①	43 ②	44 ②
45 ②	46 ②	47 ②	48 5
49 ⑤	50 6	51 23	52 27
53 2	54 120	55 7	56 40
57 128	58 7	59 ①	60 6
61 ②	62 ②	63 ⑤	

05 공간도형과 공간좌표

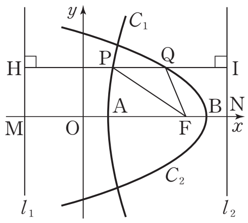
01 ③	02 ④	03 ②	04 ④
05 4	06 5	07 ④	08 ②
09 ①	10 ④	11 ⑤	12 ③
13 ④	14 ④	15 ①	16 ④
17 15	18 ②	19 ④	20 ③
21 ②	22 7	23 5	24 ①
25 ③	26 ①	27 ④	28 ⑤
29 ③	30 7	31 ④	32 ④
33 2	34 17	35 ②	36 ④
37 ④	38 ⑤	39 ④	40 2
41 13	42 5	43 ④	44 ⑤
45 ④	46 ③	47 ③	48 ③
49 5	50 ③	51 ①	52 ②
53 97	54 ④	55 8	56 4
57 3	58 15	59 45	60 ⑤
61 ③	62 12	63 ②	64 ①
65 13	66 ④	67 ③	

Ⅰ 이차곡선

01 이차곡선

문제편 9P

01 답 24



포물선 C_1의 준선을 l_1, 포물선 C_2의 준선을 l_2라 하고, 점 P에서 준선 l_1에 내린 수선의 발을 H, 점 Q에서 준선 l_2에 내린 수선의 발을 I라 하면

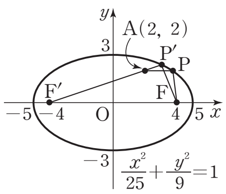
$\overline{PF}=\overline{PH}$, $\overline{QF}=\overline{QI}$이므로 삼각형 FQP의 둘레의 길이는 선분 HI의 길이와 같다.

이때, x축이 두 준선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{AM}=\overline{AF}$, $\overline{BN}=\overline{BF}$이므로 삼각형 FQP의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{HI}=\overline{MN}&=(\overline{AM}+\overline{AF})+(\overline{BF}+\overline{BN})\\&=2(\overline{AF}+\overline{BF})\\&=2\times12=24\end{aligned}$$

02 답 ②



타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 장축의 길이는

$2\times5=10$이고 양수 c에 대하여 이 타원의 초점의 좌표를 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$이라 하면 $c=\sqrt{25-9}=4$이므로 초점의 좌표는 $F'(-4,\ 0)$, $F(4,\ 0)$이다.

한편, 타원 위의 임의의 점을 P, 초점 F′과 점 A를 지나는 직선이 타원과 만나는 점을 P′이라 하면

$\overline{F'A}+\overline{AP'}+\overline{P'F}\le\overline{F'A}+\overline{AP}+\overline{PF}$에서

$\overline{AP'}+\overline{P'F}\le\overline{AP}+\overline{PF}$이므로 $\overline{PF}+\overline{PA}$의 최솟값은

$\overline{AP'}+\overline{P'F}$의 값과 같다.

이때, $\overline{F'A}+\overline{AP'}+\overline{P'F}=\overline{F'P'}+\overline{P'F}=10$이고

$\overline{F'A}=\sqrt{\{2-(-4)\}^2+(2-0)^2}=2\sqrt{10}$이므로

$\overline{PF}+\overline{PA}$의 최솟값은

$\overline{AP'}+\overline{P'F}=10-\overline{F'A}=10-2\sqrt{10}$

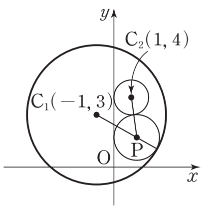
03 답 ⑤

한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서

$\overline{BF}=\sqrt{3}$, $\overline{EF}=1$이고 두 점 B, E는 쌍곡선의 초점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$\overline{BF}-\overline{EF}=\sqrt{3}-1$

04 답 ⑤



원 C_1에 내접하고 원 C_2에 외접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원 C_1의 중심 C_1에서 내접하는 원의 중심 P까지의 거리는 $4-r$이고, 원 C_2의 중심 C_2에서 외접하는 원의 중심 P까지의 거리는 $1+r$이다.

$\therefore\ \overline{C_1P}+\overline{C_2P}=(4-r)+(1+r)=5$

따라서 점 P는 두 점 C_1, C_2를 초점으로 하고 장축의 길이가 5인 타원이다.

이때, 두 점 C_1, C_2를 지나는 직선을 a축으로 하고 선분 C_1C_2의 수직이등분선을 b축으로 하는 새로운 좌표평면을 생각하면

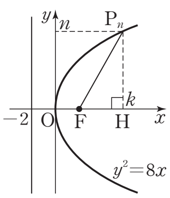
$\overline{C_1C_2}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}$이므로 점 P가 나타내는 도형은 두 초점이 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$이고 장축의 길이가

$\overline{C_1P}+\overline{C_2P}=5$인 타원이다.

즉, 이 타원의 방정식을 $\dfrac{a^2}{\frac{25}{4}}+\dfrac{b^2}{t^2}=1$이라 하면 타원의 성질에 의하여 $\frac{25}{4}-t^2=\frac{5}{4}$에서 $t^2=5$ $\quad\therefore\ t=\sqrt{5}$

따라서 구하는 타원의 단축의 길이는 $2t=2\sqrt{5}$이다.

05 답 63



포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P_n의 x좌표를 k라 하고 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{FP_n}=k+2$, $\overline{P_nH}=n$, $\overline{FH}=|k-2|$

이때, 직각삼각형 P_nFH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{FP_n}^2=\overline{P_nH}^2+\overline{FH}^2$, $(k+2)^2=n^2+|k-2|^2$

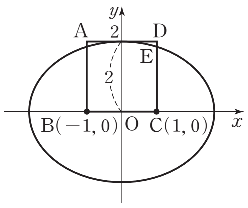
$k^2+4k+4=n^2+k^2-4k+4$ $\quad\therefore\ k=\frac{n^2}{8}$

즉, $\overline{FP_n}=k+2=\frac{n^2}{8}+2$이므로

$$\sum_{n=1}^{7}\overline{FP_n}=\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{n^2}{8}+2\right)=\frac{1}{8}\times\frac{7\times8\times15}{6}+7\times2=\frac{63}{2}$$

따라서 $a=\frac{63}{2}$이므로 $2a=63$

06 답 ③



선분 BC를 x축으로 하고 선분 BC의 수직이등분선을 y축으로 하면 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$이다.

이때, 두 점 B, C를 초점으로 하고 선분 AD에 접하는 타원의 장축의 길이와 단축의 길이를 각각 $2a$, $2b$라 하면 $2b=4$에서 $b=2$이고 타원의 초점의 좌표에 의하여 $1^2=a^2-b^2$에서 $a^2=1^2+b^2=1+4=5$이므로 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$이다.

한편, 점 E는 x좌표가 1인 타원 위의 제 1사분면의 점이므로 선분 EC의 길이는 점 E의 y좌표와 같다.

즉, 타원의 방정식에 $x=1$을 대입하면 $\frac{1}{5}+\frac{y^2}{4}=1$에서

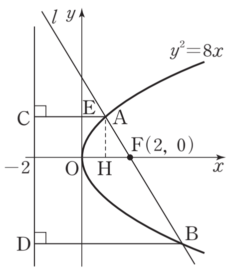
$\frac{y^2}{4}=\frac{4}{5}$, $y^2=\frac{16}{5}$ $\qquad \therefore y=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ $(\because y>0)$

$\therefore \overline{\mathrm{EC}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

07 답 ③

선분 PQ의 길이의 최솟값은 점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발까지의 거리이다. 한편, 점 P에서 준선 l까지의 거리는 점 P와 포물선의 초점 F까지의 거리와 같으므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 선분 AF의 길이이다. 이때, 포물선 $y^2=8x$의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{(1-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$

08 답 6



포물선 $y^2=8x$의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 준선은 $x=-2$이다.

이때, 점 A에서 y축, x축에 내린 수선의 발을 각각 E, H$(x,\ 0)$이라 하면

$x=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{CE}}=3-2=1$

따라서 점 A의 좌표는 $(1,\ 2\sqrt{2})$이고

점 A와 초점 F를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{0-2\sqrt{2}}{2-1}(x-2)=-2\sqrt{2}(x-2)$

이것을 포물선의 방정식 $y^2=8x$에 대입하면

$\{-2\sqrt{2}(x-2)\}^2=8x$에서 $x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

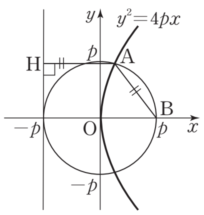
$\therefore x=4$ 또는 $x=1$

이때, 점 B의 x좌표는 1이 아니므로 점 B의 x좌표는 4이다.

$\therefore \overline{\mathrm{BD}}=2+4=6$

09 답 ①

점 A는 포물선 $y^2=4px$와 원 $x^2+y^2=p^2$의 제1사분면에서의 교점이므로 점 A의 x좌표를 구하기 위해 포물선의 방정식과 원의 방정식을 연립하면



$x^2+4px-p^2=0$

$\therefore x=-2p+\sqrt{5p^2}=(\sqrt{5}-2)p$

$(\because x>0,\ p>0)$

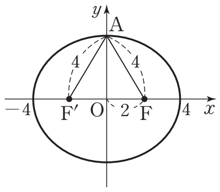
한편, 포물선 $y^2=4px$의 초점이 B$(p,\ 0)$이고 준선이 $x=-p$이므로 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AH}}=(\sqrt{5}-2)p-(-p)=(\sqrt{5}-1)p$

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=6$이므로 $(\sqrt{5}-1)p=6$

$\therefore p=\frac{6}{\sqrt{5}-1}=\frac{3}{2}(1+\sqrt{5})$

10 답 28



정삼각형 AF′F의 둘레의 길이가 12이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}=4$

즉, $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=8$이므로 타원의 정의에 의하여 타원의 장축의 길이는 8이다.

이때, 구하는 타원의 방정식이

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이므로 $2a=8$에서 $a=4$이고 두 초점 F, F′의 좌표가 각각 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이므로 $b^2=4^2-2^2=12$

$\therefore a^2+b^2=4^2+12=28$

11 답 18

양수 c에 대하여 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표를 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$이라 하면

$c^2=25-9=16$ $\qquad \therefore c=4$

따라서 이 타원의 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이다.

또한, 외심의 성질에 의하여 삼각형 PF′F는 $\angle \mathrm{F'PF}=90°$인 직각삼각형이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=l$, $\overline{\mathrm{PF'}}=m$이라 하면 직각삼각형 PF′F에서 피타고라스 정리에 의하여

$l^2+m^2=8^2$ ⋯ ㉠

타원의 성질에 의하여

$l+m=2\times5=10$ ⋯ ㉡

㉠에서 $l^2+m^2=(l+m)^2-2lm=64$이므로 ㉡을 대입하면

$10^2-2lm=64$에서 $2lm=36$ $\qquad \therefore lm=18$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=lm=18$

12 답 30

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 임의의 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여

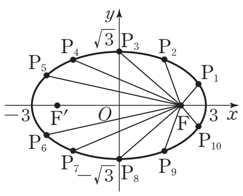
$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\times3=6$

이때, 양수 c에 대하여 타원의 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$이라 하면 $c^2=9-3=6$

$\therefore c=\sqrt{6}$

따라서 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(\sqrt{6},\ 0)$, $(-\sqrt{6},\ 0)$이고 x축 위의 두 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로

$3-\sqrt{6}\le\overline{\mathrm{PF}}\le3+\sqrt{6}$



즉, 선분 PF의 길이가 가질 수 있는 자연수의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 점 P의 개수는 그림과 같이 10이다.

이때, $\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{F}}+\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{F'}}=6$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$이므로

$\sum_{k=1}^{10}(\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{F}}+\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{F'}})=\sum_{k=1}^{10}6$에서 $\sum_{k=1}^{10}\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{F}}+\sum_{k=1}^{10}\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{F'}}=60$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{F'}}=60-2\times(1+2+3+4+5)=30$

13 답 ③

점 (a, b)는 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{10}-\frac{b^2}{6}=1$ ⋯ ㉠

이때, 양수 c에 대하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$의 두 초점의 좌표를

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$이라 하면 $c^2=10+6=16$ $\quad \therefore c=4$

따라서 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(4, 0)$, $(-4, 0)$이다.

이때, 사각형 F′QFP의 넓이는 합동인 두 삼각형 F′QF, FPF′의 넓이의 합과 같으므로

$\square F'QFP=2\times\triangle FPF'=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{FF'}\times|b|\right)=8|b|=24$

$\therefore |b|=3$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2=25$이므로 $|a|=5$

$\therefore |a|+|b|=5+3=8$

14 답 ⑤

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $y-b=-(x-a)$에서 $y=-x+a+b$

이 직선이 직선 $y=2$와 만나는 점 Q의 y좌표가 2이므로

$2=-x+a+b$에서 $x=a+b-2$ $\quad \therefore Q(a+b-2, 2)$

이때, $\overline{OP}=\overline{PQ}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{PQ}^2$이므로

$a^2+b^2=(b-2)^2+(2-b)^2$, $a^2-b^2+8b=8$

$a^2-(b-4)^2=-8$ $\quad \therefore \frac{a^2}{8}-\frac{(b-4)^2}{8}=-1$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 쌍곡선이다.

한편, 점 P가 나타내는 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{a^2}{8}-\frac{b^2}{8}=-1$을 b축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 구하는 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는 쌍곡선 $\frac{a^2}{8}-\frac{b^2}{8}=-1$의 두 초점 사이의 거리와 같다.

이때, 양수 c에 대하여 쌍곡선 $\frac{a^2}{8}-\frac{b^2}{8}=-1$의 두 초점의 좌표를

$(0, c)$, $(0, -c)$라 하면 $c^2=8+8=16$ $\quad \therefore c=4$

따라서 초점의 좌표는 $(0, 4)$, $(0, -4)$이므로 구하는 두 초점 사이의 거리는 $4-(-4)=8$

15 답 ⑤

쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$의 주축의 길이는 $2\times5=10$이고

양수 c에 대하여 초점의 좌표를 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$이라 하면

$c^2=25+11=36$ $\quad \therefore c=6$

따라서 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(6, 0)$, $(-6, 0)$이다.

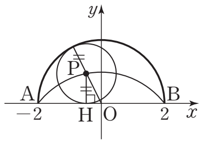
이때, $\overline{AF}=l$이라 하면 $\overline{AF'}=10+l$이고, $\overline{BF}=m$이라 하면

$\overline{BF'}=10+m$이므로 삼각형 AF′B의 둘레의 길이는

$(10+l)+l+(10+m)+m=20+2(l+m)$

한편, $\overline{AB}=\overline{FF'}$에서 $l+m=12$이므로 삼각형 AF′B의 둘레의 길이는 $20+2(l+m)=20+2\times12=44$

16 답 ③



선분 AB를 지름으로 하는 반원에 내접하는 원의 중심 P의 좌표를 (x, y) $(y>0)$라 하면 이 원의 반지름의 길이는 y이다.

이때, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OPH는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{OH}^2+\overline{PH}^2=\overline{OP}^2$에서 $x^2+y^2=(2-y)^2$

$\therefore x^2=4(1-y)$ (단, $-2\le x\le 2$)

17 답 ⑤

삼각형 PQA는 $\overline{PQ}=\overline{AQ}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AQ}+\overline{QO}=\overline{PQ}+\overline{QO}=4$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 점 $A(0, 2)$와 점 $O(0, 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 4인 타원이다. 이 타원은 초점의 좌표가 $(0, 1)$, $(0, -1)$이고 장축의 길이가 4인 타원을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 즉, 초점의 좌표가 $(0, 1)$, $(0, -1)$이고 장축의 길이가 4인 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$이라 하면 $2b=4$에서 $b=2$이고 $1^2=b^2-a^2=4-a^2$에서 $a^2=3$이므로

타원의 방정식은 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 방정식은 $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

18 답 ②

중심이 A인 원에 외접하고 점 B를 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{AP}=3+r$이고 $\overline{BP}=r$이므로 $\overline{AP}-\overline{BP}=(3+r)-r=3$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 초점이 $(-2, 0)$, $(2, 0)$이고 주축의 길이가 3인 쌍곡선이므로 이 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 $2a=3$에서 $a=\frac{3}{2}$이고 $2^2=a^2+b^2=\frac{9}{4}+b^2$에서 $b^2=\frac{7}{4}$

따라서 점 P가 나타내는 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\frac{7}{4}}=1$에서 $\frac{4x^2}{9}-\frac{4y^2}{7}=1$ $\left(단, x\ge\frac{3}{2}\right)$

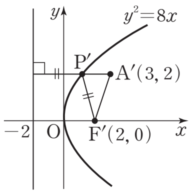
19 답 ④

$y^2-8x-2y+17=0$에서 $(y-1)^2=8(x-2)$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때, 점 $A(5, 3)$은 점 $A'(3, 2)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $y^2=8x$의 초점 $F'(2, 0)$과 이 포물선 위의 임의의 점 P′, 점 $A'(3, 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 A′P′F′의 둘레의 길이의 최솟값은 삼각형 APF의 둘레의 길이의 최솟값과 같다.

한편, 선분 $\mathrm{P'F'}$의 길이는 점 $\mathrm{P'}$에서 포물선 $y^2=8x$의 준선까지의 거리와 같으므로 $\overline{\mathrm{A'P'}}+\overline{\mathrm{P'F'}}$의 최솟값은 점 $\mathrm{A'}$에서 준선까지의 거리인 5이다.

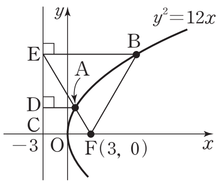


따라서 삼각형 $\mathrm{A'P'F'}$, 즉 삼각형 APF의 둘레의 길이의 최솟값은

$5+\overline{\mathrm{A'F'}}=5+\sqrt{(3-2)^2+(2-0)^2}=5+\sqrt{5}$

20 답 16

그림과 같이 포물선 $y^2=12x$의 준선 $x=-3$이 x축과 만나는 점을 C라 하고 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면 $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BE}}$이고



$\angle\mathrm{BEF}=\angle\mathrm{EFB}=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 BEF는 정삼각형이다.

이때, $\overline{\mathrm{FC}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{FE}}=2\overline{\mathrm{FC}}=12$

또, $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AD}}$이고 $\angle\mathrm{DAE}=\frac{\pi}{3}$이므로

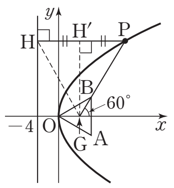
$\overline{\mathrm{AE}}=2\overline{\mathrm{AD}}=2\overline{\mathrm{AF}}$에서

$\overline{\mathrm{FE}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AE}}=3\overline{\mathrm{AF}}=12 \qquad \therefore \overline{\mathrm{AF}}=4$

$\therefore \overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=4+12=16$

21 답 16

정삼각형 OAB의 한 변의 길이가 $4\sqrt{3}$이므로 이 정삼각형의 높이는 6이다. 즉, $\overline{\mathrm{OG}}=4$이므로 초점이 G이고 꼭짓점이 원점인 포물선의 준선의 방정식은 $x=-4$이다.



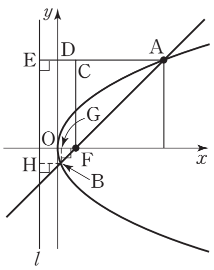
이때, 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 GP와 x축이 이루는 각의 크기가 60°이므로 $\angle\mathrm{HPG}=60^\circ$이고 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PG}}$이므로 삼각형 GPH는 정삼각형이다.

한편, 점 G에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{\mathrm{HH'}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{GP}}=\overline{\mathrm{PH}}=2\overline{\mathrm{HH'}}=2\times8=16$

22 답 512

그림과 같이 제1사분면의 정사각형의 한 꼭짓점을 C, 점 A에서 y축과 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 점 B에서 x축과 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하자.



$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AE}}-\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AF}}-\overline{\mathrm{AC}}$

$\quad=4\sqrt{2}-4=4(\sqrt{2}-1)$

이때, $\overline{\mathrm{GF}}=k$라 하면 직각삼각형 GBF에서 $\overline{\mathrm{BF}}=\sqrt{2}k$

또, $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{CE}}-\overline{\mathrm{GF}}=\overline{\mathrm{CE}}-k=4(\sqrt{2}-1)-k$이므로

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BF}}$에서

$4(\sqrt{2}-1)-k=\sqrt{2}k \qquad \therefore k=\frac{4(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1}=12-8\sqrt{2}$

즉, $\overline{\mathrm{BF}}=\sqrt{2}k=\sqrt{2}\times(12-8\sqrt{2})=12\sqrt{2}-16$이므로

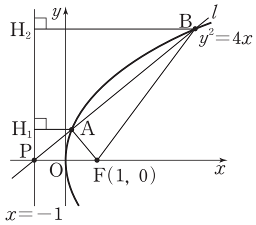
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{AF}}=(12\sqrt{2}-16)+4\sqrt{2}=16\sqrt{2}-16$

따라서 $a=16$, $b=-16$이므로

$a^2+b^2=16^2+(-16)^2=512$

23 답 ③

포물선 $y^2=4x$의 초점 F의 좌표는 $(1, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이다.



이때, 포물선 위의 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하고 $\overline{\mathrm{AF}}=k$라 하면

$\overline{\mathrm{BF}}=4\overline{\mathrm{AF}}$이므로

$\overline{\mathrm{AH_1}}=\overline{\mathrm{AF}}=k$, $\overline{\mathrm{BH_2}}=\overline{\mathrm{BF}}=4k$

또, $\overline{\mathrm{PH_1}}=m$이라 하면 $\overline{\mathrm{PH_2}}=4\overline{\mathrm{PH_1}}$이므로 $\overline{\mathrm{PH_2}}=4m$

즉, 두 점 A, B의 좌표가 각각 $(k-1, m)$, $(4k-1, 4m)$이고

이 두 점이 포물선 위의 점이므로

$m^2=4(k-1)$, $(4m)^2=4(4k-1)$

두 식을 연립하여 풀면 $k=\frac{5}{4}$, $m=1$

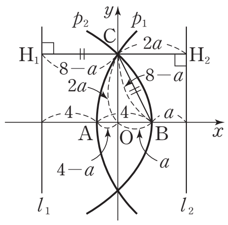
따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$이고 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$이므로

두 점 A, P를 지나는 직선 l의 기울기는

$$\frac{1-0}{\frac{1}{4}-(-1)}=\frac{4}{5}$$

24 답 ③

두 포물선 p_1, p_2의 준선을 각각 l_1, l_2라 하고, $\overline{\mathrm{OB}}=a$라 하면 포물선의 정의에 의하여 그림과 같이 각각의 길이가 결정된다.



직각삼각형 OBC에서 피타고라스 정리에 의하여

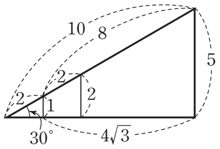
$\overline{\mathrm{OB}}^2+\overline{\mathrm{OC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$에서 $a^2+(2a)^2=(8-a)^2$

$a^2+4a-16=0 \qquad \therefore a=-2+2\sqrt{5}=2(\sqrt{5}-1)\ (\because a>0)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times2a=4a=8(\sqrt{5}-1)$

25 답 2

그림과 같이 타원의 장축을 지나고 평면 α에 수직인 평면으로 자른 단면에서 생각하면 구하는 타원의 장축의 길이는 8이고, 단축의 길이는 원기둥의 밑면의 지름의 길이와 같으므로 $4\sqrt{3}$이다.



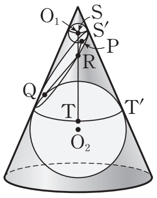
즉, 구하는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$이라 하고 양수 c에 대하여 이 타원의 초점의 좌표를 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$이라 하면

$c=\sqrt{16-12}=2$이므로 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이다.

따라서 평면 α와 최소 거리에 있는 타원 위의 점에서 평면 α와 가까운 초점까지의 거리는 $-2-(-4)=2$이므로 평면 α와 가까운 초점으로부터 평면 α까지의 거리는 $2\sin 30^\circ+1=2$이다.

26 답 ②

두 구 O_1, O_2와 단면인 타원의 접점을 각각 P, Q라 하고 타원 위의 임의의 점을 R라 하자.

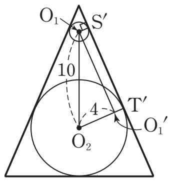


점 R에서 구 O_1까지 접선의 길이는 모두 같으므로 $\overline{RS}=\overline{RP}$

또, 점 R에서 구 O_2까지 접선의 길이도 모두 같으므로 $\overline{RQ}=\overline{RT}$

$\therefore\ \overline{RP}+\overline{RQ}=\overline{RS}+\overline{RT}=\overline{ST}=\overline{S'T'}$

단면은 두 점 P, Q를 초점으로 하고 장축의 길이가 $2a=\overline{S'T'}$인 타원이다.

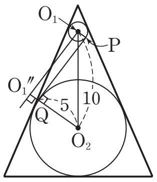


구 O_1의 중심에서 구 O_2의 반지름에 내린 수선의 발을 O_1'이라 하면 $\overline{O_2O_1'}=4$이므로

$\overline{S'T'}=\overline{O_1O_1'}=\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$

$\therefore\ a=\sqrt{21}$

구 O_1의 중심에서 구 O_2의 반지름의 연장선에 내린 수선의 발을 O_1''이라 하면 $\overline{O_2O_1''}=6$



두 초점 사이의 거리인 선분 PQ의 길이는 선분 O_1O_1''의 길이와 같으므로

$\overline{PQ}=\overline{O_1O_1''}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

타원의 단축의 길이를 $2b$라 하면 $b=\sqrt{21-4^2}=\sqrt{5}$

따라서 타원의 단축의 길이는 $2b=2\sqrt{5}$

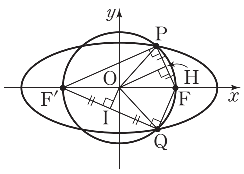
27 답 304

$\triangle OHF\equiv\triangle OHP$ (SAS 합동), $\triangle OIF'\equiv\triangle OIQ$ (SAS 합동)

이므로 $\overline{OP}=\overline{OF}=6$, $\overline{OQ}=\overline{OF'}=6$

즉, 네 점 F, F′, P, Q는 모두 원 $x^2+y^2=36$ 위의 점이다.

$\therefore\ \angle FQF'=\angle FPF'=90^\circ$ ⋯ ㉠



$\overline{OI}\perp\overline{F'Q}$이고

$\overline{FF'}=2\overline{OF'}$이므로

$\overline{FQ}=2\overline{OI}$

마찬가지로 $\overline{PF'}=2\overline{OH}$ ⋯ ㉡

또, 원과 타원은 모두 x축, y축에 대하여 대칭이므로 두 점 P와 Q는 x축에 대하여 대칭이거나 y축에 대하여 대칭 또는 원점에 대하여 대칭이다.

그런데 $\overline{OH}\neq\overline{OI}$이므로 두 점 P와 Q는 x축에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ \overline{PF}=\overline{QF}$ ⋯ ㉢

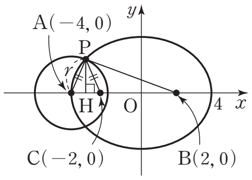
이때, $\overline{QF}=\alpha$, $\overline{QF'}=\beta$라 하면 ㉠에서 $\alpha^2+\beta^2=144$

㉡, ㉢에서 $\alpha\beta=4\overline{OI}\times\overline{OH}=80$이므로

$l^2=(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=144+2\times 80=304$

28 답 10

양수 c에 대하여 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$의 초점의 좌표를 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$이라 하면 $c=\sqrt{16-12}=2$이므로 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이다.



따라서 점 $B(2,\ 0)$은 타원의 한 초점이고 다른 한 초점 $(-2,\ 0)$을 C라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{PB}+\overline{PC}=8$이고, $\overline{PA}+\overline{PB}=8$이므로 $\overline{PA}=\overline{PC}$

즉, 삼각형 PAC는 이등변삼각형이므로 점 P의 x좌표는 -3이고

점 P의 y좌표는 $\dfrac{(-3)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$에서 $y=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

이때, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 구하는 반지름의 길이 r는 직각삼각형 PAH에서 피타고라스 정리에 의하여

$r=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{\sqrt{21}}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{21}{4}}=\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore\ 4r=4\times\dfrac{5}{2}=10$

29 답 20

타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{a}=1$의 장축의 길이는 $2\times 6=12$이므로

$\overline{FP}+\overline{F'P}=12$ $\quad\therefore\ \overline{F'P}=12-\overline{FP}=12-8=4$

직각삼각형 PHF에서 $\overline{PH}=\sqrt{8^2-(2\sqrt{15})^2}=2$

$\therefore\ \overline{HF'}=4-2=2$

또, 직각삼각형 HF′F에서 $\overline{FF'}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{15})^2}=8$

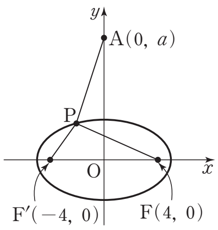
따라서 두 초점 F, F′의 좌표가 각각 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이므로

$4^2=36-a$에서 $a=20$

30 답 180

타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\times 6=12$



따라서 $\overline{PF}=12-\overline{PF'}$이므로

$\overline{AP}-\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{PF'}-12$

$\geq\overline{AF'}-12$

(단, 등호는 점 P가 선분 AF′ 위에 있을 때 성립)

이때, $\overline{AP}-\overline{PF}$의 최솟값이 2이므로 $\overline{AF'}-12=2$

$\therefore \overline{AF'}=14$ ⋯ ㉠

한편, 양수 c에 대하여 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 초점 F, F′의 좌표를

각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$이라 하면 $c^2=36-20=16$ $\quad\therefore c=4$

따라서 두 초점 F, F′의 좌표가 각각 $(4, 0)$, $(-4, 0)$이므로 ㉠에서

$\overline{AF'}=\sqrt{(-4-0)^2+(0-a)^2}=\sqrt{16+a^2}=14$

$\therefore a^2=196-16=180$

31 답 ①

양수 c에 대하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 초점 F, F′의 좌표를

각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$이라 하면 $c^2=4+12=16$ $\quad\therefore c=4$

즉, 쌍곡선의 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(4, 0)$, $(-4, 0)$이다.

한편, 초점 F′과 점 A를 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 제1사분면 위의 점을 P′이라 하면

$\overline{PF'}+\overline{PA}\geq\overline{P'F'}+\overline{P'A}=\overline{F'A}$ ⋯ ㉠

$\overline{PF'}-\overline{PF}=4$에서 $\overline{PF'}=4+\overline{PF}$ ⋯ ㉡

$\overline{P'F'}-\overline{P'F}=4$에서 $\overline{P'F'}=4+\overline{P'F}$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$4+\overline{PF}+\overline{PA}\geq 4+\overline{P'F}+\overline{P'A}$

$\therefore \overline{PF}+\overline{PA}\geq\overline{P'F}+\overline{P'A}$

즉, $\overline{PF}+\overline{PA}$의 최솟값은 초점 F′과 점 A를 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 제1사분면 위의 점에서 결정된다.

따라서 $\overline{PF}+\overline{PA}=\overline{PF'}-4+\overline{PA}\geq\overline{F'A}-4$이고

$\overline{F'A}=\sqrt{\{6-(-4)\}^2+(5-0)^2}=5\sqrt{5}$이므로

$\overline{PF}+\overline{PA}$의 최솟값은 $5\sqrt{5}-4$이다.

32 답 ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$의 점근선의 방정식은

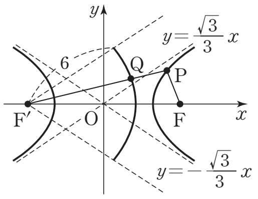
$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이고 양수 c에 대하여

쌍곡선의 초점 F, F′의 좌표를 각각

$(c, 0)$, $(-c, 0)$이라 하면

$c^2=9+3=12$

$\therefore c=2\sqrt{3}$



따라서 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(2\sqrt{3}, 0)$, $(-2\sqrt{3}, 0)$이다.

한편, $\overline{FP}=\overline{PQ}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{F'P}-\overline{FP}=6$에서 $\overline{F'P}-\overline{PQ}=6$ $\quad\therefore \overline{F'Q}=6$

$a\to\infty$일 때, 점 Q는 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2\sqrt{3})$ 위의 점에 가까워진다. 즉, $(p+2\sqrt{3})^2+q^2=6^2$이고 $q=\frac{\sqrt{3}}{3}p+2$이므로 이 두 식을 연립하여 풀면 $p=\sqrt{3}$, $q=3$

$\therefore \lim_{a\to\infty}(p+q)=3+\sqrt{3}$

33 답 ⑤

양수 c에 대하여 쌍곡선 $\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{40}=1$의 초점 F, F′의 좌표를

각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$이라 하면

$c^2=\frac{9}{4}+40=\frac{169}{4}$ $\quad\therefore c=\frac{13}{2}$

즉, 초점 F, F′의 좌표는 각각 $\left(\frac{13}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{13}{2}, 0\right)$이다.

한편, 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF}-\overline{PF'}=3$이므로

$\overline{PF}=\overline{PF'}+3=13$

또, 쌍곡선의 $x>0$에서의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$이므로

원 C의 반지름의 길이는 $\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=5$이다.

즉, $\overline{FQ}=5$이므로 직각삼각형 PFQ에서 피타고라스 정리에

의하여 $\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PF}^2-\overline{FQ}^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

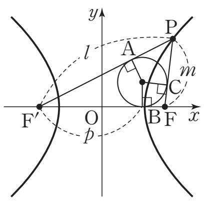
34 답 5

양수 c에 대하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$의 초점 F, F′의 좌표를 각각

$(c, 0)$, $(-c, 0)$이라 하면 $c^2=25+16=41$ $\quad\therefore c=\sqrt{41}$

즉, 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(\sqrt{41}, 0)$, $(-\sqrt{41}, 0)$이다.

그림과 같이 삼각형 FPF′과 삼각형 FPF′의 내접원의 세 접점을 각각 A, B, C라 하고 $\overline{BF'}=p$, $\overline{PF'}=l$, $\overline{PF}=m$이라 하면



$\overline{AF'}=p$, $\overline{AP}=l-p$, $\overline{CP}=l-p$

$\overline{CF}=m-(l-p)=m-l+p$

$\overline{BF}=m-l+p$

이때, 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=l-m=10$이고

$\overline{FF'}=2\sqrt{41}$이므로

$\overline{BF}+\overline{BF'}=(m-l+p)+p=2p-(l-m)=2p-10=2\sqrt{41}$

$\therefore p=5+\sqrt{41}$

즉, $\overline{OB}=p-\overline{OF'}=(5+\sqrt{41})-\sqrt{41}=5$

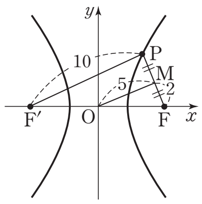
따라서 점 B의 x좌표는 5이고, 내접원의 중심의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같으므로 5이다.

35 답 45

쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$이라 하면

점근선의 방정식이 $y=2x$, $y=-2x$이므로 $\frac{b}{a}=2$



$\therefore b=2a$

한편, 쌍곡선의 또 다른 초점을 F′이라 하면 삼각형 PF′F에서

점 O는 변 F′F의 중점이고 점 M은 변 PF의 중점이므로

$\overline{PF'}=2\overline{OM}=10$, $\overline{PF}=2\overline{MF}=4$

따라서 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=10-4=6$

즉, $2a=6$에서 $a=3$이고 $b=2a=6$이므로 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$이다.

따라서 선분 OF의 길이는 $l=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$이므로

$l^2=(3\sqrt{5})^2=45$

36 답 22

양수 c에 대하여 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$의 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$이라 하면

$c^2=9+16=25 \qquad \therefore c=5$

즉, 쌍곡선의 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이다.

이때, $\overline{\mathrm{PF'}}=l$, $\overline{\mathrm{PF}}=m$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$l-m=6$ ⋯ ㉠

또, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이가 24이므로

$l+m+10=24$에서 $l+m=14$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $l=10$, $m=4$

따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{AF}}=5:2$이므로 점 A는 선분 F′F를 $5:2$로 내분하는 점이다.

즉, $\dfrac{q}{p}=\dfrac{5\times5+2\times(-5)}{5+2}=\dfrac{15}{7}$이므로

$p+q=7+15=22$

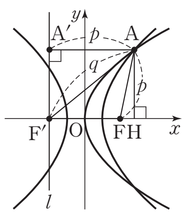
37 답 36

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 두 꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{a},\ 0)$, $(-\sqrt{a},\ 0)$이므로 타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{b}=1$의 두 초점의 좌표도 $(\sqrt{a},\ 0)$, $(-\sqrt{a},\ 0)$이다.

즉, $(\sqrt{a})^2=36-b$에서 $a+b=36$

38 답 5

주어진 포물선의 준선을 l이라 하면 준선 l은 쌍곡선의 초점 F′을 지난다. 이때, 쌍곡선과 포물선의 교점 A에서 준선 l에 내린 수선의 발을 A′, x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\mathrm{FA}}=p$, $\overline{\mathrm{F'A}}=q$라 하면 쌍곡선과 포물선의 정의에 의하여 $q-p=2$이고 $\overline{\mathrm{AA'}}=p$이다.



$\therefore \overline{\mathrm{HF}}=|p-4|$, $q=p+2$ ⋯ ㉠

한편, 직각삼각형 AA′F′에서

$\overline{\mathrm{A'F'}}^2=\overline{\mathrm{AF'}}^2-\overline{\mathrm{AA'}}^2=q^2-p^2$ ⋯ ㉡

또, 직각삼각형 AFH에서

$\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{AF}}^2-\overline{\mathrm{FH}}^2=p^2-|p-4|^2$ ⋯ ㉢

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{A'F'}}$에서 $\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{A'F'}}^2$이므로 ㉡, ㉢에 의하여

$p^2-|p-4|^2=q^2-p^2$

㉠을 대입하면

$p^2-|p-4|^2=(p+2)^2-p^2$에서

$8p-16=4p+4 \qquad \therefore p=5$

$\therefore \overline{\mathrm{FA}}=5$

[다른 풀이]

쌍곡선의 초점 F, F′이 x축 위에 있고 중심이 원점이므로 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 주축의 길이가 2이므로 $2a=2$에서 $a=1$

또, 초점의 좌표가 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이므로

$2^2=a^2+b^2$에서 $4=1+b^2 \qquad \therefore b^2=3$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$이다.

한편, 포물선의 초점이 $(2,\ 0)$이고 꼭짓점이 원점이므로 포물선의 방정식은 $y^2=4\times2\times x=8x$이다.

쌍곡선과 포물선의 교점의 좌표를 구하기 위해 연립하면

$x^2-\dfrac{8x}{3}=1$에서 $3x^2-8x-3=0$

$(x-3)(3x+1)=0 \qquad \therefore x=3$

즉, 점 A의 x좌표는 3이므로 y좌표는 $y^2=8\times3=24$에서 $y=\pm2\sqrt{6}$이다.

따라서 점 A의 좌표는 $(3,\ 2\sqrt{6})$ 또는 $(3,\ -2\sqrt{6})$이므로 선분 FA의 길이는

$\overline{\mathrm{FA}}=\sqrt{(3-2)^2+(\pm2\sqrt{6}-0)^2}=5$

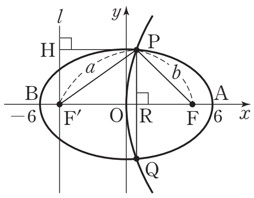
39 답 147

$\overline{\mathrm{PF'}}=a$, $\overline{\mathrm{PF}}=b$라 하면 타원의 정의에 의하여

$a+b=12$에서 $b=12-a$ ⋯ ㉠

선분 PQ와 x축의 교점을 R라 하면 $\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{3}$

한편, 포물선의 준선을 l, 점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 준선 l은 타원의 초점 F′을 지나고 포물선의 정의에 의하여



$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=b$

직각삼각형 PF′H에서 $\overline{\mathrm{PF'}}^2=\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{F'H}}^2$

$a^2=b^2+(2\sqrt{3})^2$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2=(12-a)^2+12 \qquad \therefore a=\dfrac{13}{2},\ b=\dfrac{11}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=b\times a=\dfrac{11}{2}\times\dfrac{13}{2}=\dfrac{143}{4}$

따라서 $p=4$, $q=143$이므로 $p+q=4+143=147$

40 답 2

양수 c에 대하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$이라 하면

$c^2=4+1=5 \quad \therefore c=\sqrt{5}$

즉, 쌍곡선의 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$이다.

한편, 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{1}{2}x$이므로 점근선과 직선 $x=2$의 제1사분면에서의 교점 P의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.

이때, 중심이 원점이고 점 P를 지나는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로 이 원과 x축의 교점 A, B는 쌍곡선의 초점이다.

즉, $\overline{\mathrm{AQ}}=l$, $\overline{\mathrm{BQ}}=m$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$|l-m|=4$ ⋯ ㉠

또, 삼각형 QAB는 $\angle\mathrm{AQB}=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

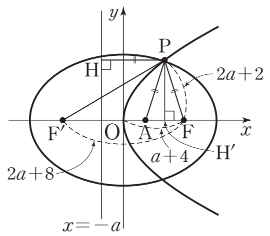
$l^2+m^2=(2\sqrt{5})^2=20$ ⋯ ㉡

㉠의 양변을 제곱하면 $l^2-2lm+m^2=16$이고 ㉡을 대입하면

$20-2lm=16,\ 2lm=4 \quad \therefore lm=2$

$\therefore \overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{BQ}}=2$

41 답 116



포물선의 초점이 $\mathrm{A}(a,\ 0)$이므로 포물선의 준선은 $x=-a$이다.

이때, 포물선과 타원의 제1사분면 위의 교점 P에서 포물선의 준선과 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 $\overline{\mathrm{AF}}=4$에서 $\overline{\mathrm{AH'}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{OH'}}=a+2$이다.

즉, $\overline{\mathrm{PH}}=a+(a+2)=2a+2$이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PH}}=2a+2$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PA}}=2a+2$

또, $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF'}}=a+4$이므로 $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}=2a+8$이다.

이때, $\triangle\mathrm{PAF}\backsim\triangle\mathrm{F'FP}$(AA 닮음)이므로

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{F'F}}=\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{FP}}$에서

$(2a+2):(2a+8)=4:(2a+2)$

$(2a+2)^2=4(2a+8),\ a^2+2a+1=2a+8,\ a^2=7$

$\therefore a=\sqrt{7}\ (\because a>0)$

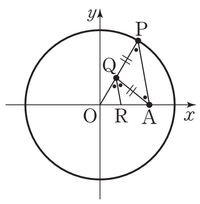
한편, 타원의 장축의 길이는

$\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{FP}}=(2a+8)+(2a+2)$

$\qquad\qquad=10+4a=10+4\sqrt{7}$

따라서 $p=10$, $q=4$이므로 $p^2+q^2=116$

42 답 ④



$\angle\mathrm{OQA}$의 이등분선이 x축과 만나는 점을 R라 하면 $\overline{\mathrm{QR}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{PA}}$이므로

$\angle\mathrm{RQA}=\angle\mathrm{QAP}$ (엇각)

$\angle\mathrm{OQR}=\angle\mathrm{QPA}$ (동위각)

즉, 삼각형 PQA는 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QA}}$

$\therefore \overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=8$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 장축의 길이가 8이고 두 점 O, A를 초점으로 하는 타원 위의 점이다.

이때, 두 점 $(-3,\ 0)$, $(3,\ 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{a^2}=1$이라 하면 $3^2=16-a^2$에서 $a^2=7$이므로 이 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$이고 이 타원을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 점 Q가 나타내는 도형의 방정식이므로 구하는 도형의 방정식은 $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

[다른 풀이]

점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=8$에서

$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}=8$

이 식을 정리하면 $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

43 답 29

$5x^2-4y^2=20$에서 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$이므로

쌍곡선의 점근선은 $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x,\ y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$

$\therefore \sqrt{5}x+2y=0,\ \sqrt{5}x-2y=0$

이때, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 두 점근선 $\sqrt{5}x+2y=0$, $\sqrt{5}x-2y=0$까지의 거리는 각각 $\frac{|\sqrt{5}a+2b|}{3}$, $\frac{|\sqrt{5}a-2b|}{3}$ ⋯⋯ ⓐ

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 두 점근선까지의 거리의 곱은

$\frac{|\sqrt{5}a+2b|}{3}\times\frac{|\sqrt{5}a-2b|}{3}=\frac{|5a^2-4b^2|}{9}$ ⋯ ㉠

이때, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 쌍곡선 위의 점이므로 $5a^2-4b^2=20$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{|5a^2-4b^2|}{9}=\frac{20}{9}$

따라서 $p=9$, $q=20$이므로 $p+q=9+20=29$ ⋯⋯ ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 점 P와 두 점근선 사이의 거리를 각각 구한다. [40%]

ⓑ 점 P와 두 점근선 사이의 거리의 곱을 구하고 $p+q$의 값을 계산한다. [60%]

일등급 UP

＊쌍곡선 위의 점과 이 쌍곡선의 점근선 사이의 거리

쌍곡선 위의 임의의 한 점에서 이 쌍곡선의 두 점근선까지의 거리의 곱은 항상 일정하다.

즉, 이 문제에서는 쌍곡선의 한 꼭짓점 $(2,\ 0)$에서 두 점근선까지의 거리를 각각 구해서 해결할 수도 있다.

44 답 8

양수 c에 대하여 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$의 초점 F, F′의 좌표를 각각

$(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$이라 하면 $c^2=16-4=12$ $\quad\therefore c=2\sqrt{3}$

즉, 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(2\sqrt{3},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2\sqrt{3},\ 0)$이다. ---------- ⓐ

이때, $\overline{\mathrm{PF}}=p$, $\overline{\mathrm{PF}'}=q$라 하면 점 P가 타원 위의 점이므로

$p+q=8$ $\quad\therefore p=8-q$ ⋯ ㉠

또, 두 초점 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{FF}'}=4\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 FPF′에서

$\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF}'}^2=\overline{\mathrm{FF}'}^2$ $\quad\therefore p^2+q^2=(4\sqrt{3})^2=48$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(8-q)^2+q^2=48$

$q^2-8q+8=0$ $\quad\therefore q=4\pm2\sqrt{2}$

한편, $p<q$이므로 $p=4-2\sqrt{2}$, $q=4+2\sqrt{2}$

즉, $\overline{\mathrm{PF}}=4-2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{PF}'}=4+2\sqrt{2}$ ---------- ⓑ

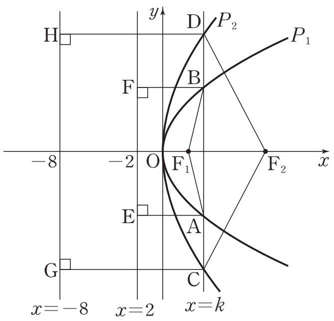
$\therefore \triangle\mathrm{QF'F}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QF}}\times\overline{\mathrm{PF}'}=\frac{1}{2}\times8\times(4+2\sqrt{2})=16+8\sqrt{2}$

따라서 $a=16$, $b=8$이므로 $a-b=8$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 타원의 초점 F, F′의 좌표를 각각 구한다.	[30%]
ⓑ 두 선분 PF, PF′의 길이를 구한다.	[50%]
ⓒ 삼각형 QF′F의 넓이를 구하고 $a-b$의 값을 계산한다.	[20%]

45 답 36



포물선 P_1의 방정식은 $y^2=8x$이고 준선은 $x=-2$이다.

또, 포물선 P_2의 방정식은 $y^2=32x$이고 준선은 $x=-8$이다. -- ⓐ

이때, 포물선 P_1과 직선 $x=k$의 두 교점 A, B에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, 포물선 P_2와 직선 $x=k$의 두 교점 C, D에서 준선 $x=-8$에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하자.

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BF}}=k+2$이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF_1}}=\overline{\mathrm{BF_1}}=k+2$이고 두 점 A, B의 y좌표는 각각 $-2\sqrt{2k}$, $2\sqrt{2k}$이므로 $l_1=2(k+2)+4\sqrt{2k}$

또, $\overline{\mathrm{CG}}=\overline{\mathrm{DH}}=k+8$이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{CF_2}}=\overline{\mathrm{DF_2}}=k+8$이고 두 점 C, D의 y좌표는 각각 $-4\sqrt{2k}$, $4\sqrt{2k}$이므로 $l_2=2(k+8)+8\sqrt{2k}$ ---------- ⓑ

즉, $l_2-l_1=24$에서

$\{2(k+8)+8\sqrt{2k}\}-\{2(k+2)+4\sqrt{2k}\}=24$

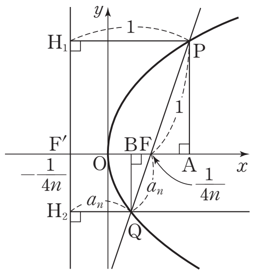
$12+4\sqrt{2k}=24$, $\sqrt{2k}=3$, $2k=9$ $\quad\therefore k=\frac{9}{2}$

$\therefore 8k=8\times\frac{9}{2}=36$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 두 포물선 P_1, P_2의 준선의 방정식을 각각 구한다.	[20%]
ⓑ 포물선의 정의를 이용하여 l_1, l_2의 값을 k를 이용하여 나타낸다.	[50%]
ⓒ $l_2-l_1=24$를 이용하여 k의 값을 구하고 $8k$의 값을 계산한다.	[30%]

46 답 ①



$y^2=\frac{x}{n}=4\times\frac{1}{4n}\times x$에서 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{1}{4n},\ 0\right)$이고 준선은 $x=-\frac{1}{4n}$이다.

두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$, x축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하고 준선과 x축의 교점을 F′이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PH_1}}=\overline{\mathrm{PF}}=1$, $\overline{\mathrm{QH_2}}=\overline{\mathrm{QF}}=a_n$이므로

$\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{F'A}}-\overline{\mathrm{F'F}}=1-2\times\frac{1}{4n}=1-\frac{1}{2n}$

$\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{F'F}}-\overline{\mathrm{F'B}}=2\times\frac{1}{4n}-a_n=\frac{1}{2n}-a_n$

이때, $\triangle\mathrm{PAF}\backsim\triangle\mathrm{QBF}$(AA 닮음)이므로

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{FA}}:\overline{\mathrm{FB}}$에서 $1:a_n=\left(1-\frac{1}{2n}\right):\left(\frac{1}{2n}-a_n\right)$

$a_n\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}-a_n$, $a_n\left(2-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}$

$a_n\times\frac{4n-1}{2n}=\frac{1}{2n}$ $\quad\therefore \frac{1}{a_n}=4n-1$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\times\frac{10\times11}{2}-1\times10=210$

47 답 11

타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{33}=1$에서 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=2\times7=14$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=14-\overline{\mathrm{F'P}}$ ⋯ ㉠

즉, $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$의 값이 최대가 되려면 선분 F′P의 길이는 최소가 되어야 한다.

이때, 양수 c에 대하여 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{33}=1$의 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$이라 하면

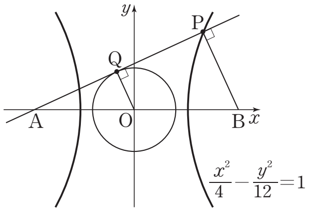
$c^2=49-33=16$ $\quad\therefore c=4$

따라서 초점 F′의 좌표는 $(-4,\ 0)$이고 원 $x^2+(y-3)^2=4$ 위의 점 P와 점 F′ 사이의 거리가 최소일 때 점 P는 점 F′과 원의 중심 $(0,\ 3)$을 지나는 직선이 원과 만나는 두 점 중 점 F′에 가까운 점에 위치하여야 한다.

즉, 원의 중심을 O′이라 하면 $\overline{\mathrm{F'O'}}=\sqrt{4^2+3^2}=5$이고 원의 반지름의 길이가 2이므로 선분 F′P의 길이의 최솟값은 $5-2=3$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값은 ㉠에 의하여 $14-3=11$이다.

48 답 ②



양수 c에 대하여 쌍곡선

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점을

$(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$이라 하면

$c^2=4+12=16 \qquad \therefore c=4$

따라서 두 점 A, B는 쌍곡선의 초점이다.

한편, 원점을 중심으로 하는 원이 직선 AP와 접하는 점을 Q라 하면 두 삼각형 ABP, AOQ는 서로 닮음이고 $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{AO}}=4$이므로 두 삼각형의 닮음비는 2 : 1이다.

즉, $\overline{\mathrm{OQ}}=r$라 하면 $\overline{\mathrm{BP}}=2r$이고 두 점 A, B가 쌍곡선의 초점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}=4$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}=4+\overline{\mathrm{BP}}=4+2r$

직각삼각형 ABP에서 피타고라스 정리에 의하여

$(4+2r)^2+(2r)^2=8^2$에서

$r^2+2r-6=0 \qquad \therefore r=\sqrt{7}-1\ (\because r>0)$

따라서 원점을 중심으로 하고 직선 AP에 접하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{7}-1$이다.

49 답 ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=8$ ⋯ ㉠

한편, 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 FQ의 길이의 최댓값이 14이고 직선 FP가 원 C와 만나는 두 점 중 점 F에서 더 멀리 떨어진 점이 Q가 될 때, 선분 FQ의 길이가 최대가 되므로

$\overline{\mathrm{FQ}}\le\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=14$ ⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면 $2\overline{\mathrm{PF'}}=6 \qquad \therefore \overline{\mathrm{PF'}}=3$

따라서 원 C의 반지름의 길이는 3이므로 원 C의 넓이는 $\pi\times3^2=9\pi$이다.

50 답 12

점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$이고 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선의 방정식을 양수 k에 대하여

$\frac{x^2}{(3k)^2}-\frac{y^2}{(4k)^2}=1$이라 하면 $c^2=(3k)^2+(4k)^2=25k^2$

$\therefore c=5k$

따라서 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(5k,\ 0)$, $(-5k,\ 0)$이다.

한편, 조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{PF'}}>\overline{\mathrm{PF}}$이고 점 P가 쌍곡선 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=6k \qquad \therefore \overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}-6k=30-6k$

즉, $16\le\overline{\mathrm{PF}}\le20$에서 $16\le30-6k\le20 \qquad \therefore \frac{5}{3}\le k\le\frac{7}{3}$ ⋯ ㉠

또, x좌표가 양수인 쌍곡선의 꼭짓점 A의 좌표는 $(3k,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=5k-3k=2k$

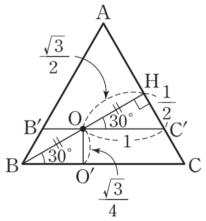
그런데 조건 (나)에서 선분 AF의 길이 $2k$가 자연수이고 ㉠에서

$\frac{10}{3}\le2k\le\frac{14}{3}$이므로

$2k=4 \qquad \therefore k=2$

따라서 조건을 만족시키는 쌍곡선의 주축의 길이는 $6k=6\times2=12$

51 답 1



[그림 1]

장축의 길이가 최소인 것은 모선에 수직인 평면으로 잘랐을 때 생기는 타원이므로 그때의 장축의 길이는 $\sqrt{3}$이다. [그림 1]에서 타원의 장축을 선분 BH, 타원의 중심을 O라 하자.

타원의 단축은 타원의 중심 O를 지나며 밑면에 평행한 원의 지름에 수직인 선분이다.

$\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

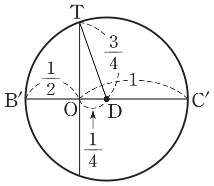
점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 O′이라 하면 $\angle\mathrm{OBO'}=30^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{OO'}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

즉, 이 원은 꼭짓점 A로부터 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$만큼 떨어진 거리에 있으므로

$\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{B'C'}}=2:\overline{\mathrm{B'C'}}=\sqrt{3}:\frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad \therefore \overline{\mathrm{B'C'}}=\frac{3}{2}$

즉, 이 원의 지름의 길이는 $\frac{3}{2}$이다.

또한, $\angle\mathrm{HOC'}=30^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{OC'}}=1$



[그림 2]

따라서 선분 B′C′의 중점을 D라 하면 타원의 단축은 [그림 2]에서 선분 B′C′을 지름으로 하는 원에서 점 O를 지나고 반지름에 수직인 직선 OT이다.

$\overline{\mathrm{OB'}}=\frac{1}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{OD}}=\frac{1}{4}$

단축의 길이를 $2b$라 하면

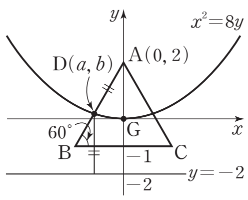
$b=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 타원의 두 초점 사이의 거리는

$2c=2\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$\quad=2\times\frac{1}{2}=1$

52 답 ④



꼭짓점 G의 좌표를 $(0,\ 0)$으로 하고 y축 위에 두 점 A, G가 오도록 놓으면 초점 A의 좌표는 $(0,\ 2)$

따라서 포물선의 방정식은

$x^2=8y$ ⋯ ㉠

이때, 점 D의 좌표를 (a, b)라 하면 선분 AD의 길이는 점 D에서 준선 $y=-2$까지의 거리와 같으므로 $\overline{\mathrm{AD}}=b+2$

또한, 직선 AB의 기울기는 $\tan 60°=\sqrt{3}$이므로 직선 AB의 방정식은 $y=\sqrt{3}x+2$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2=8(\sqrt{3}x+2)$

$x^2-8\sqrt{3}x-16=0 \qquad \therefore x=4\sqrt{3}\pm 8$

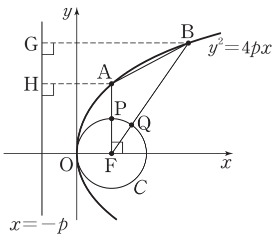
점 D의 x좌표는 음수이므로 $x=4\sqrt{3}-8$

$b=\frac{1}{8}\times(4\sqrt{3}-8)^2=2(\sqrt{3}-2)^2=14-8\sqrt{3}$

따라서 선분 AD의 길이는

$\overline{\mathrm{AD}}=b+2=14-8\sqrt{3}+2=16-8\sqrt{3}$

53 답 ④



포물선 $y^2=4px$의 초점 F의 좌표는 $(p, 0)$이므로 $\overline{\mathrm{OF}}=p$

즉, $\overline{\mathrm{FP}}=p$이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=2p$

이때, 두 점 A, B에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 H, G라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AH}}=2p$이므로 $\angle\mathrm{AFO}=90°$

또, $\overline{\mathrm{FQ}}=p$이므로 $\overline{\mathrm{BF}}=4p$이고 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BG}}$이므로 삼각형 AFB의 밑변을 선분 AF라 하면 높이는

$\overline{\mathrm{BG}}-\overline{\mathrm{AH}}=4p-2p=2p$

한편, 삼각형 AFB의 넓이가 32이므로

$\frac{1}{2}\times 2p\times 2p=32$에서 $2p^2=32$, $p^2=16$

$\therefore p=4$ ($\because p>0$)

54 답 ③

삼각형 TRQ는 $\overline{\mathrm{TR}}=\overline{\mathrm{TQ}}$인 이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{\mathrm{TP}}-\overline{\mathrm{TQ}}=r+\overline{\mathrm{TR}}-\overline{\mathrm{TQ}}=r=2$로 일정하므로 점 T는 두 점 $\mathrm{P}(0, 0)$, $\mathrm{Q}(6, 0)$을 초점으로 하고 주축의 길이가 2인 쌍곡선을 나타낸다. 이때, 초점이 $(-3, 0)$, $(3, 0)$이고 주축의 길이가 2인 쌍곡선의 방정식을 $x^2-\frac{y^2}{a^2}=1$이라 하면 $3^2=1+a^2$에서 $a^2=8$이므로 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$이다.

한편, 점 T가 나타내는 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 구하는 도형의 방정식은

$(x-3)^2-\frac{y^2}{8}=1$이다.

01 답 ③

$y=kx+2$를 $x^2+4y^2-2x-8y+1=0$에 대입하여 정리하면

$(4k^2+1)x^2+2(4k-1)x+1=0$ ⋯ ㉠

이때, $4k^2+1>0$이고 직선과 타원이 만나지 않아야 하므로 x에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가지지 않아야 한다.

즉, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}<0$에서

$(4k-1)^2-(4k^2+1)<0$

$12k^2-8k<0$

$4k(3k-2)<0$

$\therefore 0<k<\frac{2}{3}$

02 답 ④

포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+\frac{2}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x+4$

이때, 이 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표가 각각 $(-8, 0)$, $(0, 4)$이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times4=16$

03 답 ①

포물선 $y^2=4x$의 초점 F의 좌표는 $(1, 0)$이다.

즉, 기울기가 3인 직선 l이 점 $\mathrm{F}(1, 0)$을 지나므로 직선 l의 방정식은 $y=3(x-1)$이다.

한편, 직선 l이 포물선과 만나는 두 점 A, B의 y좌표를 각각 y_1, y_2라 하면 $\mathrm{A}\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2\left(x+\frac{y_1^2}{4}\right)$이므로 $m_1=\frac{2}{y_1}$

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 B에서의 접선의 방정식은

$y_2y=2\left(x+\frac{y_2^2}{4}\right)$이므로 $m_2=\frac{2}{y_2}$

$\therefore m_1m_2=\frac{4}{y_1y_2}$

이때, y_1, y_2는 직선의 방정식 $y=3(x-1)$과 포물선의 방정식 $y^2=4x$를 연립하여 얻은 이차방정식 $y^2-\frac{4}{3}y-4=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $y_1y_2=-4$

$\therefore m_1m_2=\frac{4}{y_1y_2}=-1$

* 포물선의 접선의 성질 **일등급 UP**

(1) 포물선의 초점을 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점에서 각각 그은 포물선의 두 접선은 서로 수직이고 항상 포물선의 준선 위에서 만난다.
(2) 역으로, 준선 위의 점에서 포물선에 그은 두 접선은 서로 수직이고 두 접선의 접점을 이은 직선은 항상 포물선의 초점을 지난다.

04 답 ①

쌍곡선 $(x-2)^2-\frac{(y-1)^2}{3}=1$ 위의 점 $(4,\ 4)$에서의 접선의 방정식은 $(4-2)(x-2)-\frac{(4-1)(y-1)}{3}=1$에서 $y=2x-4$

따라서 접선이 y축과 만나는 점의 y좌표는 -4이다.

[다른 풀이]

쌍곡선 $(x-2)^2-\frac{(y-1)^2}{3}=1$과 점 $(4,\ 4)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 각각 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$과 점 $(2,\ 3)$이 된다.

이때, 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$2x-\frac{3y}{3}=1$에서 $y=2x-1$

이 접선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 구하는 접선의 방정식이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=2(x-2)-1$에서 $y=2x-4$이므로 접선이 y축과 만나는 점의 y좌표는 -4이다.

05 답 ②

선분 PQ의 길이의 최솟값은 직선 $y=2x$와 평행하고 쌍곡선에 접하는 직선과 직선 $y=2x$ 사이의 거리와 같다.

이때, 기울기가 2이고 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$에 접하는 직선의 방정식은 $y=2x\pm\sqrt{3\times2^2-2}$에서 $y=2x\pm\sqrt{10}$

따라서 직선 $y=2x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $y=2x\pm\sqrt{10}$, 즉 $2x-y\pm\sqrt{10}=0$ 사이의 거리는 $\frac{|\pm\sqrt{10}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$

이므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

06 답 ⑤

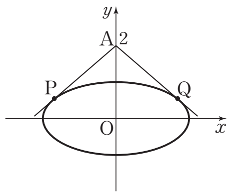
타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 밖의 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$에서 타원에 그은 두 접선의 접점을 지나는 극선의 방정식은 $\frac{0\times x}{4}+2y=1$에서 $y=\frac{1}{2}$

이때, 두 접점 P, Q는 직선 $y=\frac{1}{2}$과 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 교점이므로 연립하면 $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}=1,\ x^2=3$ $\quad\therefore x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

따라서 두 접점 P, Q의 좌표는 $\left(\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

[다른 풀이]



점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$에서 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$에 그은 두 접선의 접점 P, Q의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ $(x_1<0<x_2)$라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{4}+y_1y=1$

이때, 이 접선이 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$를 지나므로 접선의 방정식에 대입하면

$2y_1=1$에서 $y_1=\frac{1}{2}$

또한, 점 P는 타원 위의 점이므로 $\frac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1$에서

$\frac{{x_1}^2}{4}+\frac{1}{4}=1,\ {x_1}^2=3$ $\quad\therefore x_1=-\sqrt{3}\ (\because x_1<0)$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(-\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right)$이고 두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right)$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

07 답 ⑤

ㄱ. 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선 l의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$이므로 접선 l과 x축의 교점 Q의 좌표는 $(-x_1,\ 0)$이다. 즉, 선분 PQ의 중점의 x좌표는 0이므로 중점은 y축 위의 점이다. 따라서 R는 선분 PQ의 중점이다. (참)

ㄴ. 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}$이고, $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{QF}}=x_1+p$이므로 $\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PF}}$이다.
즉, 삼각형 FPQ는 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{FPQ}=\angle\mathrm{FQP}$
한편, $\overline{\mathrm{PH}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{FQ}}$이므로 $\angle\mathrm{HPQ}=\angle\mathrm{FQP}$ (엇각)
$\therefore \angle\mathrm{FPQ}=\angle\mathrm{HPQ}$
따라서 접선 l은 $\angle\mathrm{FPH}$를 이등분한다. (참)

ㄷ. 삼각형 FPH는 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$인 이등변삼각형이고 접선 l은 $\angle\mathrm{FPH}$를 이등분하므로 접선 l은 선분 HF의 수직이등분선이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

08 답 ②

점 $\mathrm{A}(-2,\ 2)$에서 포물선 $y^2=4x$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx+\frac{1}{m}$이다.

이때, 이 접선이 $\mathrm{A}(-2,\ 2)$를 지나므로

$2=-2m+\frac{1}{m}$에서 $2m^2+2m-1=0$ ⋯ ㉠

즉, 점 A에서 포물선에 그은 접선의 기울기는 m에 대한 이차방정식 ㉠의 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 접선의 기울기의 곱은 $-\frac{1}{2}$이다.

09 답 3

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점 F_1, F_2의 좌표는 각각 $(-1, 0)$, $(1, 0)$

(i) 점 P가 x축 위의 점일 때 $\alpha\beta=(2-1)(2+1)=3$

(ii) 점 P가 x축 위의 점이 아닐 때

타원 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 m이라 하면 타원의 접선 l의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{4m^2+3}$이다.

이때, 두 초점 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$에서 접선 l까지의 거리는

각각 $\alpha=\frac{|-m\pm\sqrt{4m^2+3}|}{\sqrt{m^2+1}}$, $\beta=\frac{|m\pm\sqrt{4m^2+3}|}{\sqrt{m^2+1}}$이므로

$$\alpha\beta=\frac{|-m\pm\sqrt{4m^2+3}|}{\sqrt{m^2+1}}\times\frac{|m\pm\sqrt{4m^2+3}|}{\sqrt{m^2+1}}$$
$$=\frac{|(4m^2+3)-m^2|}{m^2+1}=\frac{|3(m^2+1)|}{m^2+1}=3$$

(i), (ii)에 의하여 $\alpha\beta=3$

10 답 8

구하는 최솟값과 최댓값은 직선 $y=x+5$와 평행하고 타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$에 접하는 두 직선과 직선 $y=x+5$ 사이의 거리이다.

이때, 기울기가 1인 타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$의 접선의 방정식은

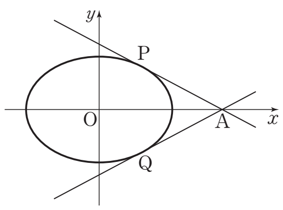
$y=x\pm\sqrt{5+4}=x\pm3$

따라서 타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점에서 직선 $y=x+5$에 이르는 거리의 최솟값 m은 접선 $y=x+3$ 위의 점 $(0, 3)$에서 직선 $y=x+5$까지의 거리와 같으므로 $m=\frac{|0-3+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

또, 타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점에서 직선 $y=x+5$에 이르는 거리의 최댓값 M은 접선 $y=x-3$ 위의 점 $(0, -3)$에서 직선 $y=x+5$까지의 거리와 같으므로 $M=\frac{|0+3+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$

$\therefore mM=\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=8$

11 답 ②



타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 위에 있지 않은 점 $A(4, 0)$에서 타원에 그은 두 접선의 접점을 지나는 극선 PQ의 방정식은 $\frac{4x}{4}+\frac{0\times y}{3}=1$

$\therefore x=1$

이때, 두 접점 P, Q는 직선 $x=1$과 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 교점이므로 연립하여 풀면 $\frac{1}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, $y^2=\frac{9}{4}$ $\quad\therefore y=\frac{3}{2}$ 또는 $y=-\frac{3}{2}$

따라서 두 접점 P, Q의 좌표는 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$이다.

$\therefore \triangle APQ=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\times(4-1)=\frac{9}{2}$

[다른 풀이]

점 $A(4, 0)$에서 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$에 그은 두 접선의 접점 P, Q의 좌표를 각각 (x_1, y_1), $(x_2, y_2)(y_1<0<y_2)$라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{3}=1$

이때, 이 접선이 점 $A(4, 0)$을 지나므로 접선의 방정식에 대입하면 $\frac{4x_1}{4}=1$에서 $x_1=1$

또한, 점 P는 타원 위의 점이므로 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$에서

$\frac{1}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$, $y_1^2=\frac{9}{4}$ $\quad\therefore y_1=-\frac{3}{2}$ $(\because y_1<0)$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$이고 두 점 P, Q는 x축에 대하여 대칭이므로 점 Q의 좌표는 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$이다.

(이하 동일)

12 답 ⑤

점 $P(a, b)$가 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점이므로 $a^2-b^2=1$ ⋯ ㉠

쌍곡선 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선의 방정식은 $ax-by=1$ ⋯ ㉡

쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=x$, $y=-x$이므로 두 직선 $y=x$와 ㉡의 교점의 x좌표는 $ax-bx=1$에서 $(a-b)x=1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{a-b}$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{1}{a-b}, \frac{1}{a-b}\right)$이다.

또, 두 직선 $y=-x$와 ㉡의 교점의 x좌표는 $ax+bx=1$에서 $(a+b)x=1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{a+b}$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{1}{a+b}, -\frac{1}{a+b}\right)$이다.

ㄱ. 선분 AB의 중점의 x좌표는

$$\frac{\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}}{2}=\frac{a}{a^2-b^2}=a\ (\because ㉠)$$이고

선분 AB의 중점의 y좌표는

$$\frac{\frac{1}{a-b}+\left(-\frac{1}{a+b}\right)}{2}=\frac{b}{a^2-b^2}=b\ (\because ㉠)$$이다.

따라서 점 $P(a, b)$는 선분 AB의 중점이다. (참)

ㄴ. $A\left(\frac{1}{a-b}, \frac{1}{a-b}\right)$, $B\left(\frac{1}{a+b}, -\frac{1}{a+b}\right)$이므로

$\overline{OA}=\frac{\sqrt{2}}{a-b}$, $\overline{OB}=\frac{\sqrt{2}}{a+b}$

$\therefore \overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{\sqrt{2}}{a-b}\times\frac{\sqrt{2}}{a+b}=\frac{2}{a^2-b^2}=2\ (\because ㉠)$

따라서 $\overline{OA}\times\overline{OB}$의 값은 2로 일정하다. (참)

ㄷ. 쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 두 점근선 $y=x$, $y=-x$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\theta$

한편, ㄴ에서 $\overline{OA}\times\overline{OB}$의 값이 일정하므로 삼각형 OAB의 넓이는 점 P의 위치에 관계없이 항상 일정하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. 두 점근선 $y=x$, $y=-x$가 이루는 각의 크기는 90°이고

ㄴ에서 $\overline{OA}\times\overline{OB}=2$이므로

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times2=1$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는 점 P의 위치에 관계없이 항상 1로 일정하다. (참)

13 답 15

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=9$ ⋯ ㉠

또, 점 $P(4,\ k)$는 쌍곡선 위의 점이므로 $\frac{4^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=1$ ⋯ ㉡

이때, 점 A는 선분 PB를 $3:1$로 내분하는 점이고, x축 위의 점이므로 점 A의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

한편, 쌍곡선 위의 점 $P(4,\ k)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$ ⋯ ㉢

이 접선이 점 $A(1,\ 0)$을 지나므로 $\frac{4}{a^2}-0=1$에서 $a^2=4$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b^2=5$

㉡에 $a^2=4$, $b^2=5$를 대입하면 $\frac{4^2}{4}-\frac{k^2}{5}=1$ $\quad\therefore k^2=15$

[다른 풀이]

쌍곡선 위의 점 P에서의 접선이 x축, y축과 각각 만나는 점의 좌표는 ㉢에 의하여 $A\left(\frac{a^2}{4},\ 0\right)$, $B\left(0,\ -\frac{b^2}{k}\right)$

이때, 선분 PB를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는 $\left(1,\ -\frac{3b^2}{4k}+\frac{k}{4}\right)$

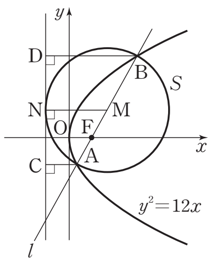
이고 이 점이 A이므로 $\frac{a^2}{4}=1$, $-\frac{3b^2}{4k}+\frac{k}{4}=0$

즉, $a^2=4$이고 ㉠에 의하여 $b^2=5$

이것을 $-\frac{3b^2}{4k}+\frac{k}{4}=0$에 대입하면 $-\frac{15}{4k}+\frac{k}{4}=0$

$-15+k^2=0$ $\quad\therefore k^2=15$

14 답 ⑤



지름 AB의 중점을 M이라 하고, 세 점 A, B, M에서 포물선 $y^2=12x$의 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D, N이라 하자.

ㄱ. $\overline{FA}=a$, $\overline{FB}=b$라 하면 원 S의 반지름의 길이는 $\frac{a+b}{2}$

또, 사다리꼴 ABDC에서 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AC}=a$, $\overline{BD}=b$이므로 $\overline{MN}=\frac{a+b}{2}$

이때, $\overline{MN}\perp l$이므로 원 S는 준선 l에 접한다. (참)

ㄴ. 포물선 위의 점 A에서의 접선은 ∠FAC를 이등분하고 포물선 위의 점 B에서의 접선은 ∠FBD를 이등분한다.

이때, $\overline{AC}\,/\!/\,\overline{BD}$에서 $\angle FAC+\angle FBD=180^\circ$이므로

두 점 A, B에서의 두 접선이 이루는 각의 크기는 90°이다.

따라서 원주각의 성질에 의하여 두 접선의 교점은 선분 AB를 지름으로 하는 원 S 위의 점이다. (참)

ㄷ. 원 S의 넓이가 64π이므로 $\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=64\pi$에서

$a+b=16$ ⋯ ㉠

한편, 포물선 $y^2=12x$의 초점의 좌표는 $F(3,\ 0)$이고 포물선의 성질에서 $\frac{1}{\overline{FA}}+\frac{1}{\overline{FB}}=\frac{1}{\overline{OF}}$이므로

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$에서 $\frac{a+b}{ab}=\frac{16}{ab}=\frac{1}{3}$

$\therefore ab=48$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 a, b는 t에 대한 이차방정식 $t^2-16t+48=0$의 두 근이므로 $a=4$, $b=12$

이때, 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{HB}=\overline{BD}-\overline{DH}=12-4=8$

직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

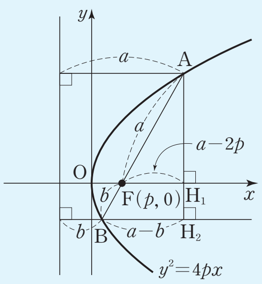
$\overline{HA}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{HB}^2}=\sqrt{16^2-8^2}=8\sqrt{3}$

따라서 직선 AB의 기울기는 $\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}}=\frac{8\sqrt{3}}{8}=\sqrt{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

일등급 UP

* $\frac{1}{\overline{OF}}=\frac{1}{\overline{FA}}+\frac{1}{\overline{FB}}$의 증명



그림과 같은 포물선 $y^2=4px\,(p\neq0)$에서 이 포물선의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 A, B라 하고 점 A에서 x축과 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.

이때, $\overline{FA}=a$, $\overline{FB}=b$라 하면

$\overline{OF}=p$이므로

$\overline{FH_1}=a-2p$, $\overline{BH_2}=a-b$이다.

한편, $\triangle AFH_1 \backsim \triangle ABH_2$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AF}:\overline{AB}=\overline{FH_1}:\overline{BH_2}$에서

$a:(a+b)=(a-2p):(a-b)$, $(a+b)(a-2p)=a(a-b)$

$a^2-2ap+ab-2bp=a^2-ab$, $2p(a+b)=2ab$

$\therefore p=\frac{ab}{a+b}$

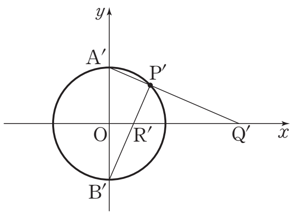
역수를 취하면

$\frac{1}{p}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

$\therefore \frac{1}{\overline{OF}}=\frac{1}{\overline{FA}}+\frac{1}{\overline{FB}}$

15 답 20

[그림 1]과 같이 단위원 $x^2+y^2=1$ 위의 제1사분면의 점 P'과 이 원이 y축과 만나는 두 점 A', B'에 대하여 두 직선 $\mathrm{P}'\mathrm{A}'$, $\mathrm{P}'\mathrm{B}'$이 x축과 만나는 점을 각각 Q', R'이라 하면 두 삼각형



[그림 1]

$\mathrm{OQ'A'}$, $\mathrm{OB'R'}$은 서로 닮음이므로 $\overline{\mathrm{OA'}}:\overline{\mathrm{OQ'}}=\overline{\mathrm{OR'}}:\overline{\mathrm{OB'}}$에서

$\overline{\mathrm{OQ'}}\times\overline{\mathrm{OR'}}=\overline{\mathrm{OA'}}\times\overline{\mathrm{OB'}}$

$\therefore \overline{\mathrm{OQ'}}\times\overline{\mathrm{OR'}}=1$ ⋯ ㉠

이때, [그림 2]와 같이 이 단위원을 x축의 방향으로 a배 확대하고 y축의 방향으로 b배 확대하면

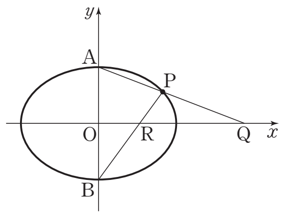
$\overline{\mathrm{OA}}=b\times\overline{\mathrm{OA'}}$, $\overline{\mathrm{OB}}=b\times\overline{\mathrm{OB'}}$,

$\overline{\mathrm{OQ}}=a\times\overline{\mathrm{OQ'}}$, $\overline{\mathrm{OR}}=a\times\overline{\mathrm{OR'}}$

㉠에 위의 관계식을 대입하면

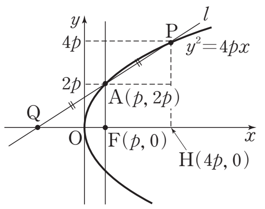
$\overline{\mathrm{OQ'}}\times\overline{\mathrm{OR'}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{a}\times\dfrac{\overline{\mathrm{OR}}}{a}=1$

$\therefore \overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR}}=a^2=20$



[그림 2]

16 답 ③



포물선 $y^2=4px$의 초점 F의 좌표가 $(p,\ 0)$이므로 점 A의 좌표는 $(p,\ 2p)$이다.

이때, 점 P에서 x축에 내린 수선을 발을 H라 하면 두 삼각형 AQF와 PQH는 닮은 삼각형이고 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=2\overline{\mathrm{AF}}=4p$

즉, 점 P의 y좌표가 $4p$이므로 $\mathrm{P}(4p,\ 4p)$

따라서 직선 l의 기울기는 $\dfrac{4p-2p}{4p-p}=\dfrac{2}{3}$이다.

17 답 ③

두 점 A, B의 y좌표를 각각 a, b라 하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{a^2}{4p},\ a\right)$, $\left(\dfrac{b^2}{4p},\ b\right)$이므로 직선 OA의 기울기는 $\dfrac{4p}{a}$, 직선 OB의 기울기는 $\dfrac{4p}{b}$이다.

따라서 두 직선 OA, OB의 기울기의 곱은 $\dfrac{16p^2}{ab}$

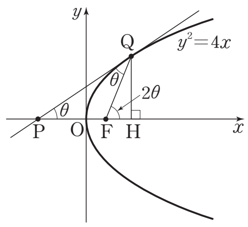
한편, a, b는 $y^2=4px$와 $y=m(x-4p)$를 연립한 이차방정식 $y^2-\dfrac{4p}{m}y-16p^2=0$의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$ab=-16p^2$ $\qquad\therefore 16p^2=-ab$

따라서 두 직선 OA, OB의 기울기의 곱은 $\dfrac{16p^2}{ab}=\dfrac{-ab}{ab}=-1$

18 답 ④

포물선 $y^2=4x$ ⋯ ㉠의 초점을 F, 점 $\mathrm{P}(k,\ 0)$에서 포물선에 그은 접선의 접점을 Q, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 성질에 의하여 삼각형 FQP는 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FQ}}$인 이등변삼각형이고 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이므로 $\angle\mathrm{QPF}=\angle\mathrm{PQF}=\theta$



즉, $\angle\mathrm{QFH}=2\theta$이므로 직선 QF의 기울기는 $\tan 2\theta=\dfrac{4}{3}$이다.

따라서 직선 QF는 초점 $\mathrm{F}(1,\ 0)$을 지나고 기울기가 $\dfrac{4}{3}$이므로

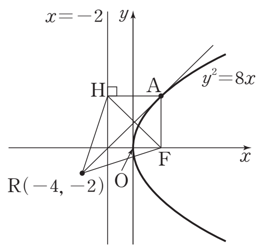
직선 QF의 방정식은 $y=\dfrac{4}{3}(x-1)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 접점 Q의 좌표를 구하면 $(4,\ 4)$이므로 포물선 위의 점 Q에서의 접선의 방정식은 $4y=2(x+4)$

이때, 이 접선이 점 $\mathrm{P}(k,\ 0)$을 지나므로 $0=2(k+4)$

$\therefore k=-4$

19 답 ③



포물선 $y^2=8x$의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

이때, 포물선의 정의에 의하여 삼각형 FAH에서 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}$이고, 점 A에서의 접선은 $\angle\mathrm{FAH}$를 이등분하므로 점 A에서의 접선은 선분 FH의 수직이등분선이다.

따라서 접선 위의 점 $\mathrm{R}(-4,\ -2)$에 대하여

$\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{RF}}=\sqrt{\{2-(-4)\}^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{10}$

[다른 풀이]

점 $\mathrm{R}(-4,\ -2)$에서 포물선 $y^2=8x$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{2}{m}$

이 직선이 점 $\mathrm{R}(-4,\ -2)$를 지나므로 $-2=-4m+\dfrac{2}{m}$에서

$2m^2-m-1=0$, $(m-1)(2m+1)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=-\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x+2$ 또는 $y=-\dfrac{1}{2}x-4$이다.

이 접선의 방정식과 $y^2=8x$를 연립하면 접점 A의 좌표는 $(2,\ 4)$ 또는 $(8,\ -8)$이므로 점 H의 좌표는 $(-2,\ 4)$ 또는 $(-2,\ -8)$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{RH}}=\sqrt{\{-4-(-2)\}^2+(-2-4)^2}$

$\qquad=\sqrt{\{-4-(-2)\}^2+\{-2-(-8)\}^2}=2\sqrt{10}$

20 답 ④

포물선 $y^2=12x$의 초점 F의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

이때, 두 삼각형 OAF, OFB의 넓이의 비가 $1:3$이므로

$\overline{FA}:\overline{FB}=1:3$

즉, 양수 k에 대하여 $\overline{FA}=k$, $\overline{FB}=3k$라 하면 포물선의 성질에 의하여 $\dfrac{1}{\overline{FA}}+\dfrac{1}{\overline{FB}}=\dfrac{1}{\overline{FO}}$에서

$\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{3k}=\dfrac{1}{3}\qquad \therefore k=4$

한편, 점 A의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a>0,\ b<0)$라 하면 점 A는 포물선 위의 점이므로 $b^2=12a$ … ㉠

또, $\overline{FA}=4$에서 $(a-3)^2+b^2=4^2$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=1,\ b=-2\sqrt{3}$ $(\because a>0,\ b<0)$

$\therefore \triangle OAF=\dfrac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

[다른 풀이]

두 삼각형 OAF, OFB의 넓이의 비가 $1:3$이므로 양수 t에 대하여 두 점 A, B의 y좌표를 각각 $-t$, $3t$라 하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{t^2}{12},\ -t\right)$, $\left(\dfrac{3}{4}t^2,\ 3t\right)$이다.

이때, 점 F는 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이므로 점 F의 좌표는 $\left(\dfrac{1\times\frac{3}{4}t^2+3\times\frac{t^2}{12}}{1+3},\ \dfrac{1\times 3t+3\times(-t)}{1+3}\right)$에서 $\left(\dfrac{t^2}{4},\ 0\right)$

그런데 포물선 $y^2=12x$의 초점 F의 좌표는 $(3,\ 0)$이므로

$\dfrac{t^2}{4}=3,\ t^2=12\qquad \therefore t=2\sqrt{3}$ $(\because t>0)$

$\therefore \triangle OAF=\dfrac{1}{2}\times\overline{OF}\times t=\dfrac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

21 답 1

포물선 $y^2=4px$에 접하는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx+\underbrace{\boxed{\dfrac{p}{m}}}_{(가)}$ … ㉠

초점을 지나고 접선 ㉠에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{m}(x-p)$ … ㉡

이때, 초점 $F(p,\ 0)$에서 접선 ㉠에 내린 수선의 발은 두 직선 ㉠, ㉡의 교점이므로 두 식을 연립하면

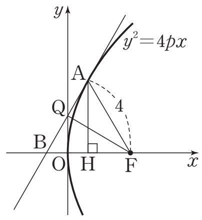
$x=\underbrace{\boxed{0}}_{(나)},\ y=\underbrace{\boxed{\dfrac{p}{m}}}_{(다)}$

즉, 교점의 x좌표가 0이므로 포물선의 초점에서 포물선의 임의의 접선에 내린 수선의 발은 항상 y축 위에 있다.

따라서 $f(m)=\dfrac{p}{m}$, $g(m)=\dfrac{p}{m}$, $a=0$이므로

$\dfrac{f(m)}{g(m)}+a=1+0=1$

22 답 3



포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $A(a,\ b)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때, 점 A에서의 접선의 방정식은 $by=2p(x+a)$이므로 점 B의 좌표는 $(-a,\ 0)$이고, $\overline{FA}=\overline{FB}=4$

한편, 점 Q는 선분 AB의 중점이므로

$\triangle ABF=2\triangle AQF=4\sqrt{3}$

또, $\triangle ABF=\dfrac{1}{2}\times\overline{FB}\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times 4\times b=2b$이므로

$2b=4\sqrt{3}$

$\therefore b=2\sqrt{3}\Rightarrow \overline{AH}=2\sqrt{3}$

삼각형 AHF에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{HF}=\sqrt{\overline{AF}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{16-12}=2$

따라서 점 H의 x좌표는 $p-2$이므로 $a=p-2$이다.

즉, 점 A의 좌표는 $(p-2,\ 2\sqrt{3})$이고 점 A는 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

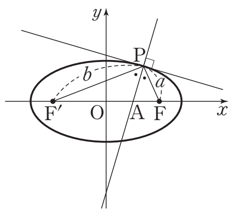
$12=4p(p-2)$

$p^2-2p-3=0$

$(p+1)(p-3)=0$

$\therefore p=3$ $(\because p>0)$

23 답 75



타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 두 초점의 좌표는 $F(4,\ 0)$, $F'(-4,\ 0)$이므로

점 $A(2,\ 0)$에 대하여 $\overline{AF}:\overline{AF'}=2:6=1:3$

한편, 타원의 한 초점에서 나간 빛은 타원에 부딪힌 후 다른 초점으로 반사되므로 $\angle FPA=\angle F'PA$

즉, 직선 PA는 $\angle FPF'$의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{PF}:\overline{PF'}=\overline{AF}:\overline{AF'}=1:3$에서 $a:b=1:3$

$\therefore b=3a$ … ㉠

또, 타원의 정의에 의하여 $a+b=10$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{5}{2},\ b=\dfrac{15}{2}$

$\therefore 4ab=4\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{15}{2}=75$

24 답 10

점 $P(a, b)$에서 타원 $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$에 그은 두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라 하면 기울기가 m_1인 접선의 방정식은

$y=m_1x\pm\sqrt{4^2m_1^{\ 2}+3^2}$

이 접선이 점 $P(a, b)$를 지나므로 $b=m_1a\pm\sqrt{4^2m_1^{\ 2}+3^2}$ ⋯ ㉠

기울기가 m_2인 접선의 방정식은 $y=m_2x\pm\sqrt{4^2m_2^{\ 2}+3^2}$

이 접선이 점 $P(a, b)$를 지나므로 $b=m_2a\pm\sqrt{4^2m_2^{\ 2}+3^2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 m_1, m_2는 m에 대한 방정식 $b=ma\pm\sqrt{4^2m^2+3^2}$의 두 실근이다. 즉, $b-ma=\pm\sqrt{4^2m^2+3^2}$에서 $(b-ma)^2=16m^2+9$

$(a^2-16)m^2-2abm+(b^2-9)=0$

이때, $m_1m_2=-1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{b^2-9}{a^2-16}=-1$에서 $a^2-16=-b^2+9$ $\therefore a^2+b^2=25$

즉, 점 $P(a, b)$가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는 10π이므로 $k=10$

25 답 ⑤

ㄱ. $P(x_1, y_1)$이라 하면 점 P는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1$ ⋯ ㉠

또, 점 P에서의 접선 l의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ ⋯ ㉡

즉, 접선 l이 x축, y축과 만나는 점의 좌표가 각각

$\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$, $\left(0, \frac{b^2}{y_1}\right)$이므로 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인

삼각형의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{a^2b^2}{2x_1y_1}$

한편, ㉠에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1\geq 2\sqrt{\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}\times\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}}=\frac{2x_1y_1}{ab}$ ⋯ ㉢

에서 $\frac{ab}{2x_1y_1}\geq 1$

$S=\frac{a^2b^2}{2x_1y_1}=ab\times\frac{ab}{2x_1y_1}\geq ab$이므로 삼각형의 넓이의 최솟값은 ab이다. (참)

ㄴ. 삼각형의 넓이가 최소일 때는 ㉢에서

$\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}=\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}=\frac{1}{2}$, 즉 $x_1=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_1=\frac{b}{\sqrt{2}}$일 때이므로

㉡에 대입하면 접선 l의 방정식은 $\frac{x}{\sqrt{2}a}+\frac{y}{\sqrt{2}b}=1$

즉, 접선 l의 기울기는 $-\frac{b}{a}$이다.

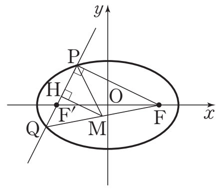
한편, 선분 AB의 기울기도 $-\frac{b}{a}$이므로 접선 l은 선분 AB와 평행하다. (참)

ㄷ. 넓이가 최소일 때 점 P의 좌표는 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$이므로 점 P는 직선 $y=\frac{b}{a}x$ 위의 점이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

26 답 ③

$\overline{QM}=\overline{FM}=\overline{PM}=10$이므로 점 P는 점 M을 중심으로 하고 선분 QF를 지름으로 하는 원 위의 점이다. $\therefore \angle FPQ=90^\circ$



선분 PQ의 중점을 H라 하면 $\angle MHQ=90^\circ$이고

$\overline{HQ}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=6$, $\overline{MQ}=10$이므로 $\overline{MH}=8$

한편, 두 삼각형 FPQ와 MHQ는 닮은 삼각형이므로

$\overline{PF}=2\overline{MH}=16$이고

$\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{QF}+\overline{QF'}=\frac{1}{2}(\overline{PQ}+\overline{QF}+\overline{PF})$

$=\frac{1}{2}(12+20+16)=24$

$\therefore \overline{PF'}=24-\overline{PF}=8$

이때, $\angle PF'F=\theta$라 하면 삼각형 $PF'F$는 직각삼각형이므로

$\tan\theta=\frac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}=\frac{16}{8}=2$

따라서 직선 PQ의 기울기는 2이다.

27 답 ④

쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\angle F'PF$의 이등분선은 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선이므로 점 P는 점 $A(1, 0)$에서 쌍곡선에 그은 접선의 접점이다.

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 $P(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{4}-\frac{by}{5}=1$이고 점 $A(1, 0)$을 지나므로

$\frac{a}{4}-0=1$ $\therefore a=4$

[다른 풀이]

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(3, 0)$, $(-3, 0)$이다. 이때, $\overline{PF'}=a$, $\overline{PF}=b$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$a-b=4$ ⋯ ㉠

또, 직선 PA는 $\angle F'PF$의 이등분선이므로 삼각형 $PF'F$에서

$\overline{PF'}:\overline{PF}=\overline{F'A}:\overline{AF}=4:2=2:1$

$a:b=2:1$ $\therefore a=2b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=4$

따라서 $\overline{PF'}=8$, $\overline{PF}=4$이므로 점 P의 좌표를 (α, β)라 하면

$\overline{PF'}^2=(\alpha+3)^2+\beta^2=64$ ⋯ ㉢

$\overline{PF}^2=(\alpha-3)^2+\beta^2=16$ ⋯ ㉣

㉢−㉣을 하면 $12\alpha=48$ $\therefore \alpha=4$

따라서 점 P의 x좌표는 4이다.

28 답 29

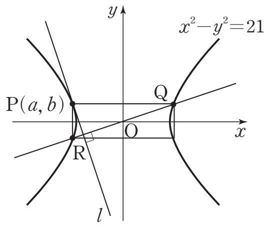
점 P(a, b)는 쌍곡선 $x^2-y^2=21$ … ㉠ 위의 점이므로

$a^2-b^2=21$ … ㉡

점 P(a, b)에서의 접선 l의 방정식은 $ax-by=21$이므로 원점을 지나면서 직선 l과 수직인 직선의 방정식은 $bx+ay=0$ … ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=a$ 또는 $x=-a$ ($\because$ ㉡)

따라서 두 점 Q, R의 좌표는 각각 $(-a, b)$, $(a, -b)$이므로 삼각형 PRQ은 직각삼각형이다.



이때, 삼각형 PRQ의 넓이가 20이므로

$\frac{1}{2}\times(-2a)\times 2b=20$에서 $ab=-10$ … ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a^2=25$, $b^2=4$ $\quad\therefore a^2+b^2=29$

29 답 5

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(2a, a)$, $(2b, -b)$라 하면

삼각형 OPQ의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ a & -b \end{vmatrix}=\frac{1}{2}|4ab|=2$에서 $ab=\pm1$

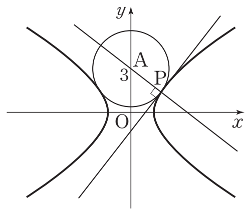
한편, 선분 PQ의 중점을 M(x, y)라 하면

$a+b=x$, $\frac{a-b}{2}=y$이므로 $x^2-4y^2=4ab=\pm4$

$\therefore \frac{x^2}{4}-y^2=\pm1$

따라서 $m=4$, $n=1$이므로 $m+n=5$

30 답 ③



선분 AP의 길이는 점 A$(0, 3)$을 중심으로 하고

쌍곡선 $x^2-2y^2=4$ … ㉠와 접하는 원의 반지름의 길이와 같다.

$\overline{\text{AP}}=r$라 하면 원의 방정식은 $x^2+(y-3)^2=r^2$ … ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $(y-3)^2+2y^2=r^2-4$

$\therefore 3y^2-6y+13-r^2=0$ … ㉢

이때, 원과 쌍곡선이 점 P에서 접하므로 y에 대한 이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 한다. 즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3(13-r^2)=0$에서 $r^2=10$ $\quad\therefore r=\sqrt{10}$

$\therefore \overline{\text{AP}}=\sqrt{10}$

31 답 8

타원 $2x^2+ay^2=1$과 쌍곡선 $4x^2-8y^2=1$의 교점을 P(x_1, y_1)이라 하면 $2{x_1}^2+a{y_1}^2=1$ … ㉠, $4{x_1}^2-8{y_1}^2=1$ … ㉡

한편, 점 P(x_1, y_1)에서의 두 곡선의 접선의 방정식은

$2x_1x+ay_1y=1$, $4x_1x-8y_1y=1$

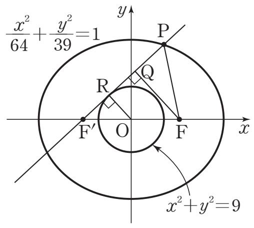
이 두 접선이 서로 수직이므로 기울기의 곱이 -1이다.

즉, $\frac{-2x_1}{ay_1}\times\frac{4x_1}{8y_1}=-1$에서 ${x_1}^2=a{y_1}^2$ … ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 대입하여 계수를 비교하면

$3a=4a-8$ $\quad\therefore a=8$

32 답 29



타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$의 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(5, 0)$, $(-5, 0)$이고 타원의 정의에 의하여 $\overline{\text{PF}}+\overline{\text{PF}'}=16$이다.

한편, 초점 F′을 지나고 원 $x^2+y^2=9$에 접하면서 기울기가 양수인 직선과 원의 접점을 R, 점 F에서 직선 PF′에 내린 수선의 발을 Q라 하면 두 삼각형 RF′O와 QF′F는 닮은 삼각형이므로

$\overline{\text{FQ}}=2\overline{\text{OR}}=6$, $\overline{\text{F}'\text{Q}}=2\overline{\text{F}'\text{R}}=8$

이때, $\overline{\text{PF}}=k$라 하면 $\overline{\text{PF}'}=16-\overline{\text{PF}}=16-k$에서

$\overline{\text{PQ}}=\overline{\text{PF}'}-\overline{\text{QF}'}=(16-k)-8=8-k$

직각삼각형 PQF에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\text{PF}}^2=\overline{\text{PQ}}^2+\overline{\text{FQ}}^2$에서 $k^2=(8-k)^2+6^2$, $-16k+100=0$

$\therefore k=\frac{25}{4} \Rightarrow \overline{\text{PF}}=\frac{25}{4}$

따라서 $m=4$, $n=25$이므로 $m+n=29$

33 답 10

점 Q$(-4, 0)$에서 포물선 $y^2=9x$에 그은 접선의 접점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 $b^2=9a$ … ㉠

또, 포물선 $y^2=9x$ 위의 점 P(a, b)에서의 접선의 방정식은

$by=\frac{9}{2}(x+a)$이다. ---------- ⓐ

이때, 이 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-a, 0)$이고 이 점이 점 Q이므로 $a=4$이고 ㉠에 의하여 $b=6$이다.

따라서 점 P의 좌표는 $(4, 6)$이므로 ---------- ⓑ

$\overline{\text{PQ}}=\sqrt{\{4-(-4)\}^2+(6-0)^2}=10$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 점 P의 좌표를 (a, b)로 놓고 접선의 방정식을 구한다.	[40%]
ⓑ 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.	[40%]
ⓒ 선분 PQ의 길이를 구한다.	[20%]

[다른 풀이]

점 Q$(-4,\ 0)$에서 포물선 $y^2=9x$에 그은 두 접선의 접점을 지나는 극선의 방정식은 $0\times y=\frac{9}{2}\{x+(-4)\}$에서 $x=4$

따라서 접점은 포물선과 극선의 교점이므로 점 P의 좌표는 $(4,\ 6)$이다.

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{\{4-(-4)\}^2+(6-0)^2}=10$

34 답 10

점 $P(a,\ b)$에서 포물선 $y^2=8x$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx+\frac{2}{m}$

이 접선이 점 $P(a,\ b)$를 지나므로 $b=ma+\frac{2}{m}$에서

$am^2-bm+2=0 \cdots$ ㉠ ---------- ⓐ

이때, m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근을 m_1, m_2라 하면 m_1, m_2는 점 P에서 포물선에 그은 두 접선의 기울기이고 조건에서 두 접선의 기울기의 곱이 -2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1\times m_2=\frac{2}{a}=-2 \qquad \therefore a=-1$

한편, 점 P는 직선 $y=x+4$ 위의 점이므로

$b=a+4=-1+4=3$ ---------- ⓑ

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+3^2=10$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 점 P에서 포물선에 그은 접선의 기울기를 m이라 하고 관계식을 찾는다. [40%]

ⓑ 점 P의 좌표를 구한다. [40%]

ⓒ a^2+b^2의 값을 구한다. [20%]

35 답 35

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$의 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$

이때, 선분 F′M은 선분 PF의 수직이등분선이므로

$\overline{PF'}=\overline{FF'}=6$ ---------- ⓐ

또한, 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=8$이므로

$\overline{PF}=8-\overline{PF'}=2 \qquad \therefore \overline{MF}=\frac{1}{2}\overline{PF}=1$ ---------- ⓑ

이때, 직각삼각형 F′FM에서 $\overline{F'M}=\sqrt{6^2-1^2}=\sqrt{35}$이므로 직선 F′M의 기울기 k는 $k=\tan(\angle FF'M)=\frac{\overline{MF}}{\overline{MF'}}=\frac{1}{\sqrt{35}}$

$\therefore \frac{1}{k^2}=35$ ---------- ⓒ

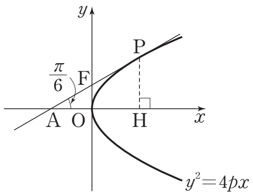
| 채점기준 |

ⓐ 수직이등분선의 성질을 이용하여 $\overline{PF'}=\overline{FF'}$임을 찾는다. [40%]

ⓑ 선분 MF의 길이를 구한다. [40%]

ⓒ 직선 F′M의 기울기를 구하고 $\frac{1}{k^2}$의 값을 계산한다. [20%]

36 답 ①



포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점의 좌표가 $(-x_1,\ 0)$이므로 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(k,\ 0)$이다.

이때, $\angle PAH=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{FO}=\frac{k}{\sqrt{3}}$, $\overline{PH}=\frac{2k}{\sqrt{3}}$, $\overline{AF}=\overline{FP}=\frac{2k}{\sqrt{3}}$

또, 점 A에서 포물선에 그은 두 접선은 x축에 대하여 대칭이므로

$\overline{F'O}=\frac{k}{\sqrt{3}}$

따라서 두 점 P, F′의 좌표는 각각 $\left(k,\ \frac{2k}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(0,\ -\frac{k}{\sqrt{3}}\right)$이므로

$\overline{PF'}=\sqrt{k^2+\left(\frac{3k}{\sqrt{3}}\right)^2}=2k$

즉, 타원의 장축의 길이는

$\overline{PF}+\overline{PF'}=\frac{2k}{\sqrt{3}}+2k=4\sqrt{3}+12 \qquad \therefore k=6 \cdots$ ㉠

따라서 점 P의 좌표는 $(6,\ 4\sqrt{3})$이고, 점 P가 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로 $(4\sqrt{3})^2=4p\times 6$

$\therefore p=2 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $k+p=6+2=8$

37 답 ③

$4x^2-y^2=4$에서 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$이므로 이 쌍곡선 위의 점 $P(\sqrt{2},\ 2)$에서의 접선 l의 방정식은

$\sqrt{2}x-\frac{1}{2}y=1$에서 $y=2\sqrt{2}x-2 \cdots$ ㉠

또, 점근선 m, n의 방정식은 각각 $y=2x$, $y=-2x$이다.

$y=2x$를 ㉠에 대입하면 $2x=2\sqrt{2}x-2$에서

$x=\sqrt{2}+1$이므로 점 Q의 좌표는 $(\sqrt{2}+1,\ 2\sqrt{2}+2)$

또, $y=-2x$를 ㉠에 대입하면 $-2x=2\sqrt{2}x-2$에서

$x=\sqrt{2}-1$이므로 점 R의 좌표는 $(\sqrt{2}-1,\ -2\sqrt{2}+2)$

따라서 $\overline{QR}=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$, $\overline{PQ}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$

이므로 $\overline{QR}=k\overline{PQ}$에서 $6=3k \qquad \therefore k=2$

[다른 풀이]

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1 \cdots$ ㉡이고 점 $(x_1,\ y_1)$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 $\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2}=1 \cdots$ ㉢

한편, 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$이므로

(i) 점근선 $y=\frac{b}{a}x$와 접선 ㉡의 교점의 x좌표를 구하면

$$x=\frac{a}{\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}}$$

(ii) 점근선 $y=-\frac{b}{a}x$와 접선 ㉡의 교점의 x좌표를 구하면

$$x=\frac{a}{\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}}$$

즉, 접선과 두 점근선의 두 교점의 중점의 x좌표는

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}}+\frac{a}{\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2x_1}{\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}}\right)=x_1\ (\because ㉢)$$

이므로 두 교점의 중점은 점 (x_1, y_1)이다.

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선이 두 점근선과 두 점 Q, R에서 각각 만날 때, 선분 QR의 중점은 점 P이므로 $\overline{QR}=2\overline{PQ}$에서 $k=2$이다.

일등급 UP

* 쌍곡선의 접선의 성질

(1) 쌍곡선의 접선과 두 점근선의 두 교점의 중점은 접점이다.
(2) 쌍곡선의 접선과 두 점근선으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는 일정하다.
(3) 쌍곡선의 접선은 접점과 두 초점을 각각 이은 두 선분이 이루는 각을 이등분한다.

38 답 ①

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선은 $y=\pm\frac{b}{a}x$이므로 쌍곡선의 한 점근선을 $y=\frac{b}{a}x$라 하면 이 점근선에 평행한 직선의 기울기는 $\frac{b}{a}$이다.

기울기가 $\frac{b}{a}$이고 타원 $\frac{x^2}{8a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 직선의 방정식은

$y=\frac{b}{a}x\pm\sqrt{8a^2\times\left(\frac{b}{a}\right)^2+b^2}$ 에서

$y=\frac{b}{a}x\pm3|b|$

$\therefore bx-ay+3a|b|=0$ 또는 $bx-ay-3a|b|=0$

이때, 원점과 두 직선 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|3a|b||}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$에서

$|3ab|=\sqrt{a^2+b^2}$

양변을 제곱하면

$9a^2b^2=a^2+b^2$

양변을 a^2b^2으로 나누면

$9=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}$

$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=9$

39 답 116

원 C의 중심을 A, 원 C와 직선 PF의 접점을 R라 하자.

이때, $\overline{PF'}=p$, $\overline{PQ}=\overline{PR}=q$, $\overline{RF}=r$라 하면 $\overline{F'Q}=5\sqrt{2}$에서

$p+q=5\sqrt{2}$ ⋯ ㉠

또, 쌍곡선의 주축의 길이가 $2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF}-\overline{PF'}=q+r-p=4\sqrt{2}$ ⋯ ㉡

한편, 점 A는 y축 위의 점이므로 $\overline{AF}=\overline{AF'}$이고,

$\overline{AQ}=\overline{AR}$, $\angle AQF'=\angle ARF=90°$이므로

두 삼각형 AQF′과 ARF는 서로 합동이다.

따라서 $\overline{RF}=\overline{QF'}$이므로 $r=5\sqrt{2}$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$p-q=\sqrt{2}$ ⋯ ㉣

㉠, ㉣을 연립하여 풀면

$p=3\sqrt{2}$, $q=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{FP}^2+\overline{F'P}^2=(q+r)^2+p^2$

$=(7\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=116$

40 답 20

포물선 $y^2=16x$의 준선은 $x=-4$이므로 점 A의 좌표를 $(a^2, 4a)$ $(a>0)$라 하면 점 B의 좌표는 $(-4, 4a)$이다.

즉, 직선 OB의 방정식은 $y=-ax$이고 포물선의 방정식 $y^2=16x$과 연립하면 $y^2=-\frac{16}{a}y$에서 $y=-\frac{16}{a}$ 또는 $y=0$

즉, 직선 OB와 포물선 $y^2=16x$의 교점 P의 좌표는 $\left(\frac{16}{a^2}, -\frac{16}{a}\right)$이다.

이때, 직선 AP의 기울기는 $\frac{4a+\frac{16}{a}}{a^2-\frac{16}{a^2}}=\frac{4a}{a^2-4}$이므로

직선 AP의 방정식은 $y-4a=\frac{4a}{a^2-4}(x-a^2)$에서

$y=\frac{4a}{a^2-4}(x-4)$

따라서 직선 AP의 x절편이 4이므로 점 Q의 좌표는 $(4, 0)$이고 삼각형 OPQ의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times4\times\frac{16}{a}=8$에서 $a=4$

따라서 선분 AB의 길이는

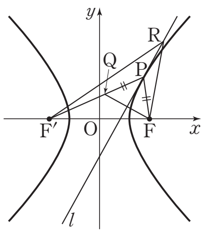
$a^2-(-4)=16+4=20$

일등급 UP

* 포물선의 성질

포물선 위의 한 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 B와 포물선의 꼭짓점을 이은 직선이 포물선과 만나는 점을 P라 하면 직선 AP는 항상 포물선의 초점을 지난다.
즉, 위의 문제에서 점 Q는 포물선의 초점이다.

41 답 25



점 P는 쌍곡선 $x^2-y^2=k$, 즉 $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{k}=1$ $(k>0)$ 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{k}$

한편, 직선 l이 선분 FQ의 수직이등분선이므로 직선 l 위의 임의의 점 R에 대하여 $\overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{QR}}$이다.

삼각형 F′QR에서 $\overline{\mathrm{F'R}}\le\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QR}}$이므로

$\overline{\mathrm{F'R}}-\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{F'R}}-\overline{\mathrm{FR}}\le\overline{\mathrm{F'Q}}$

따라서 $\overline{\mathrm{F'R}}-\overline{\mathrm{FR}}$의 최댓값은 $\overline{\mathrm{F'Q}}$이고

$\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{k}$이므로

$2\sqrt{k}=10$, $\sqrt{k}=5$

$\therefore k=25$

일등급 UP

*** 타원 밖의 점에서 타원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 이 점이 나타내는 도형의 방정식**

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 밖의 점 $\mathrm{P}(X, Y)$에서 타원에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

이 접선이 점 P를 지나므로 $Y=mX\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$에서

$Y-mX=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

$Y^2-2XYm+X^2m^2=a^2m^2+b^2$

$\therefore (X^2-a^2)m^2-2XYm+Y^2-b^2=0$

이때, 위의 m에 대한 이차방정식의 두 근을 m_1, m_2라 하면 m_1, m_2는 점 P에서 타원에 그은 두 접선의 기울기이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $m_1m_2=\frac{Y^2-b^2}{X^2-a^2}$

한편, 두 접선이 서로 수직이므로 $m_1m_2=-1$에서

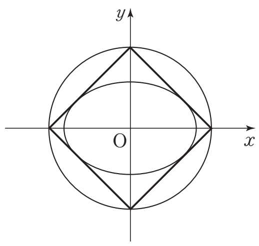
$\frac{Y^2-b^2}{X^2-a^2}=-1$, $Y^2-b^2=-X^2+a^2$

$\therefore X^2+Y^2=a^2+b^2$

따라서 타원 밖의 점 P에서 타원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2+b^2}$인 원이다.

42 답 50

직사각형의 각 변이 타원에 접하므로 직사각형의 각 꼭짓점에서 타원에 그은 두 접선은 서로 수직이다.



따라서 직사각형의 꼭짓점은 모두 원 $x^2+y^2=4^2+3^2$, 즉 $x^2+y^2=25$ 위의 점이다.

이때, 원 $x^2+y^2=25$에 내접하는 직사각형 중 넓이가 최대인 것은 정사각형일 때이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times10\times10=50$

43 답 8

$y^2=6(x+2)$에서 $y^2-6x-12=0$

$(x-4)^2=2(y+8)$에서 $x^2-8x-2y=0$

이때, 실수 k에 대하여 곡선

$(y^2-6x-12)+k(x^2-8x-2y)=0$ ⋯ ㉠

은 k의 값에 관계없이 항상 두 곡선 $y^2-6x-12=0$, $x^2-8x-2y=0$의 교점을 지난다.

도형의 방정식 ㉠이 원의 방정식이 되려면 x^2의 계수와 y^2의 계수가 같아야 하므로 $k=1$이어야 한다.

즉, $(y^2-6x-12)+(x^2-8x-2y)=0$에서

$(x-7)^2+(y-1)^2=62$

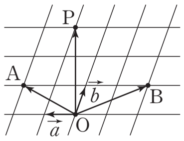
따라서 두 포물선의 네 교점을 모두 지나는 원의 중심의 좌표는 $(7, 1)$이므로 $a=7$, $b=1$

$\therefore a+b=7+1=8$

1st 03 벡터의 연산과 위치벡터

문제편 33P

01 답 ③



그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 잡으면

$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=-2\vec{a}+\vec{b}$,

$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+3\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$에서

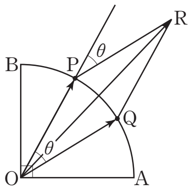
$\vec{a}+3\vec{b}=m(2\vec{a}+\vec{b})+n(-2\vec{a}+\vec{b})=(2m-2n)\vec{a}+(m+n)\vec{b}$

즉, $2m-2n=1$, $m+n=3$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$m=\frac{7}{4}$, $n=\frac{5}{4}$

$\therefore\ 16mn=16\times\frac{7}{4}\times\frac{5}{4}=35$

02 답 ③



그림과 같이 $\angle POQ=\theta$라 하면 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

이때, $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$라 하면 삼각형 POR에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{OR}=\sqrt{\overline{OP}^2+\overline{PR}^2-2\overline{OP}\times\overline{PR}\times\cos(\pi-\theta)}$에서

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos(\pi-\theta)}$

$=\sqrt{2+2\cos\theta}$

한편, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le\cos\theta\le1$이므로

$\sqrt{2}\le\sqrt{2+2\cos\theta}\le2$

따라서 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

03 답 ③

$\vec{p}+\vec{r}=(2\vec{a}-\vec{b})+(3\vec{a}+k\vec{b})=5\vec{a}+(k-1)\vec{b}$

$\vec{q}-\vec{r}=(\vec{a}+2\vec{b})-(3\vec{a}+k\vec{b})=-2\vec{a}+(2-k)\vec{b}$

이때, 두 벡터 $\vec{p}+\vec{r}$, $\vec{q}-\vec{r}$가 서로 평행하므로 0이 아닌 실수 m에 대하여 $\vec{q}-\vec{r}=m(\vec{p}+\vec{r})$라 하면

$-2\vec{a}+(2-k)\vec{b}=5m\vec{a}+m(k-1)\vec{b}$

한편, 0이 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$5m=-2$, $2-k=m(k-1)$

$\therefore\ m=-\frac{2}{5}$, $k=\frac{8}{3}$

04 답 30

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$이므로 $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$에서

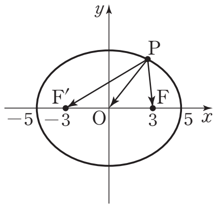
$2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$, $3\overrightarrow{PA}=-3\overrightarrow{PC}$

$\therefore\ \overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PC}$

즉, 점 P는 변 AC의 중점이므로

$\triangle PAB=\triangle PBC=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}\times60=30$

05 답 ⑤



타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점 F, F'의 중점은 원점 O이므로

$\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}=2\times\frac{\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}}{2}=2\overrightarrow{PO}$

즉, $|\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}|=2|\overrightarrow{PO}|$의 값이 최대일 때는 타원 위의 점 P에서 원점 O까지의 거리가 최대일 때이다.

따라서 $2|\overrightarrow{PO}|$의 최댓값은 타원의 장축의 길이와 같으므로 구하는 최댓값은 $2\times5=10$

06 답 ⑤

정삼각형의 외심과 무게중심은 일치하므로 정삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 P(4, 2)이다.

이때, $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$에서 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\overrightarrow{OP}$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=3|\overrightarrow{OP}|=3\sqrt{4^2+2^2}=6\sqrt{5}$

07 답 ④

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}=(3-2t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

즉, $1-k=3-2t$, $k=t$에서 두 식을 연립하여 풀면 $t=2$

08 답 1

$x+y=1$이므로

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\frac{x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}}{x+y}$ (단, $x\ge0$, $y\ge0$)

즉, 점 P는 선분 AB를 $y:x$로 내분하는 점이므로 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $\overline{AB}=1$

09 답 ④

$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{y}$라 하면 $\vec{a}=\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$, $\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{x}+\vec{y}$

두 식을 연립하면

$\vec{x}=\frac{3}{5}(2\vec{a}-\vec{b})$, $\vec{y}=-\frac{2}{5}(\vec{a}-3\vec{b})$

$\therefore\ \overrightarrow{AC}=\vec{x}+\vec{y}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

10 답 ③

ㄱ. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}$이므로

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$

$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}$이므로

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$

$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ (참)

ㄷ. 【반례】 임의의 사각형 ABCD에서 두 변 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하고, 선분 MN의 중점을 O라 하면

$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$에서 $\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}=\vec{0}$

즉, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$이지만 사각형 ABCD는 평행사변형이라고 할 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11 답 ④

$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{AC}$이므로 두 벡터 $m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$와 $n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$가 평행하려면 $m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=k(n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC})$인 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

$m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=kn\overrightarrow{AB}+km\overrightarrow{AC}$에서 $\dfrac{n}{m}=\dfrac{m}{n}=k$

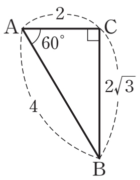
$\therefore m^2-n^2=0$

12 답 ①

구하는 벡터를 $\vec{e}$라 하면 $|\vec{e}|=1$이고

$\vec{e}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$에서 $\vec{e}=k\overrightarrow{BC}=k(\vec{b}-\vec{a})$ (단, $k>0$)

한편, 삼각형 ABC는 $\angle C$가 90°인 직각삼각형이므로 $|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{3}$



따라서 $|\vec{e}|=|k\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{3}k=1$에서

$k=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore \vec{e}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\vec{b}-\vec{a})$

13 답 8

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(x\vec{a}+y\vec{b})-(7\vec{a}-3\vec{b})=(x-7)\vec{a}+(y+3)\vec{b}$

이때, $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{PQ}$이므로 0이 아닌 실수 k에 대하여

$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{AB}$

즉, $(x-7)\vec{a}+(y+3)\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})$에서

$k=-x+7$, $k=y+3$이므로

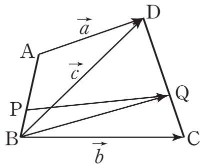
$-x+7=y+3$ $\quad\therefore y=-x+4$

$\therefore x^2+y^2=x^2+(-x+4)^2=2(x-2)^2+8\geq 8$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 8이다.

14 답 ①

$\overrightarrow{BD}=\vec{c}$라 하면 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{c}$이므로



$\overrightarrow{PB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}-\vec{c})$

한편, $\overrightarrow{BQ}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$이므로

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}-\vec{c})+\dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

15 답 ④

선분 AB의 중점을 C라 하면 $\overrightarrow{PC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$에서

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PC}$

즉, $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=2|\overrightarrow{PC}|=4$이므로 $|\overrightarrow{PC}|=2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 도형의 길이는 $2\pi\times 2=4\pi$

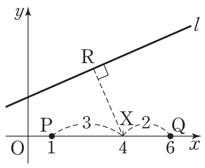
16 답 ③

$|3\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{PQ}+2\overrightarrow{RQ}|=|2\overrightarrow{RP}+(\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{PQ})+2\overrightarrow{RQ}|$

$=|2\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{RQ}+2\overrightarrow{RQ}|=|2\overrightarrow{RP}+3\overrightarrow{RQ}|$

$=5\left|\dfrac{2\overrightarrow{RP}+3\overrightarrow{RQ}}{5}\right|$

이때, $\overrightarrow{RX}=\dfrac{2\overrightarrow{RP}+3\overrightarrow{RQ}}{5}$라 하면



점 X는 선분 PQ를 $3:2$로 내분하는 점이므로 점 X의 좌표는 $(4, 0)$이다.

한편, $5\left|\dfrac{2\overrightarrow{RP}+3\overrightarrow{RQ}}{5}\right|=5|\overrightarrow{RX}|$에서

$|\overrightarrow{RX}|$의 값이 최소가 되도록 하는 점 R의 위치는 점 $X(4, 0)$에서 직선 l 사이의 거리가 최소가 될 때, 즉 점 X에서 직선 l에 내린 수선의 발 C의 위치에 있을 때이다.

17 답 125

점 G가 무게중심이므로 $\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$ ⋯ ㉠

이때, $\overline{BQ}:\overline{QC}=x:(1-x)$, $\overline{PG}:\overline{GQ}=t:(1-t)$라 하면

$\overrightarrow{BG}=(1-t)\overrightarrow{BP}+t\overrightarrow{BQ}=\dfrac{5}{6}(1-t)\overrightarrow{BA}+tx\overrightarrow{BC}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{5}{6}(1-t)=\dfrac{1}{3}$, $tx=\dfrac{1}{3}$

$\therefore t=\dfrac{3}{5}$, $x=\dfrac{5}{9}$

따라서 $\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}=\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{5}{4}$이므로 $k=\dfrac{5}{4}$

$\therefore 100k=100\times\dfrac{5}{4}=125$

18 답 ②

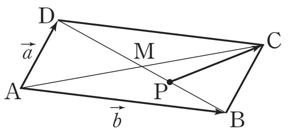
점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$에서 $\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}=(-\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}=-\vec{a}-2\vec{b}$

따라서 $s=-1$, $t=-2$이므로 $s+t=-3$

19 답 ②



평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점을 M이라 하면

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}(\vec{a}-\vec{b})+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

$=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

따라서 $m=\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$이므로 $m^2+n^2=\frac{5}{9}$

20 답 ③

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(-2\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+2\vec{b})=-3\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(-5\vec{a}+k\vec{b})-(\vec{a}+2\vec{b})=-6\vec{a}+(k-2)\vec{b}$

이때, 세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있어야 하므로

$\overrightarrow{PR}=t\overrightarrow{PQ}$에서 $-6\vec{a}+(k-2)\vec{b}=t(-3\vec{a}-\vec{b})$

$-6\vec{a}+(k-2)\vec{b}=-3t\vec{a}-t\vec{b}$

즉, $-6=-3t$, $k-2=-t$이므로 $t=2$, $k=0$

[다른 풀이]

세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있으면

$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}$에서

$-5\vec{a}+k\vec{b}=(1-t)(\vec{a}+2\vec{b})+t(-2\vec{a}+\vec{b})$

$=(1-3t)\vec{a}+(2-t)\vec{b}$

따라서 $1-3t=-5$, $2-t=k$이므로 $t=2$, $k=0$

21 답 ②

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (k는 실수)로 놓을 수 있다.

즉, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$이므로

$\overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}=(3-t)\overrightarrow{OA}+2t\overrightarrow{OB}$

즉, $1-k=3-t$, $k=2t$이므로

$t=-2$

22 답 6

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\vec{b}$이다.

이때, $\overrightarrow{DF}\,/\!/\,\overrightarrow{PE}$이므로 $\overrightarrow{PE}=k\overrightarrow{DF}$ (k는 실수) … ㉠

$\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\vec{b}-\overrightarrow{AP}$,

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{4}\vec{b}-\overrightarrow{AP}=k\left(\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{2k}{3}\vec{a}+\frac{3-k}{4}\vec{b}$ … ㉡

한편, 점 P는 직선 BC 위에 있으므로

$\overrightarrow{AP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ (t는 실수) … ㉢

㉡, ㉢에서 $t=k=\frac{3}{5}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

따라서 점 P는 선분 BC를 3 : 2로 내분하는 점이므로

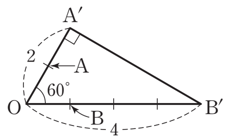
$\overline{BP}=\frac{3}{5}\overline{BC}=\frac{3}{5}\times 10=6$

23 답 ④

$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$

$$=\frac{\frac{m}{2}(2\overrightarrow{OA})+\frac{n}{4}(4\overrightarrow{OB})}{\frac{m}{2}+\frac{n}{4}}\quad(m\ge 0,\ n\ge 0)$$

$2\overrightarrow{OA}$, $4\overrightarrow{OB}$의 종점의 위치를 각각 A′, B′이라 하면 점 P는 선분 A′B′을 $\frac{n}{4}:\frac{m}{2}$으로 내분하는 점이므로 점 P가 나타내는 도형은 선분 A′B′이다.



이때, $\overline{OA'}:\overline{OB'}=1:2$이고, $\angle A'OB'=60^\circ$이므로 삼각형 A′OB′은 $\angle OA'B'=90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

24 답 ②

점 P가 세 점 A, B, C로 결정되는 평면 위에 존재하려면

$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ (m, n은 실수) … ㉠의 꼴로 나타낼 수 있어야 한다.

이때, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$이므로

㉠에 대입하면

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+n(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$에서

$\overrightarrow{OP}=(1-m-n)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$ … ㉡

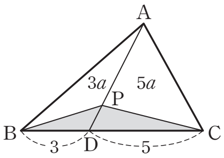
한편, 조건에 의하여 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}$ … ㉢이므로

㉡, ㉢에 의하여 $1-m-n=2$, $m=3$, $n=k$

이 식을 연립하여 풀면 $k=-4$

25 답 ②

선분 AP의 연장선과 선분 BC의 교점을 D라 하면



$\triangle PAB : \triangle PCA = 3 : 5$에서

$\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 5$

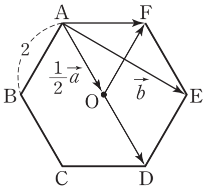
또, $\overline{PD} : \overline{AD} = \triangle PBC : \triangle ABC = 4 : 12 = 1 : 3$이므로

$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \times \frac{5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{8} = \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

따라서 $\alpha = \frac{5}{12}$, $\beta = \frac{1}{4}$이므로 $\alpha+\beta = \frac{2}{3}$

26 답 ③

선분 AD의 중점을 O라 하면



$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF}$이고

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a}$,

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{a}$이므로

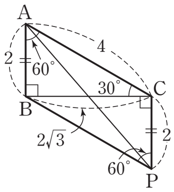
$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\vec{a} + (\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

27 답 ③

$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA}$에서 $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BA}$

이므로 사각형 ABPC는 평행사변형이다.

$\therefore\ \triangle PAB = \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$



28 답 ①

$\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{b} - \vec{a}$

29 답 5

$\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{y}$라 하면 $\overrightarrow{AN} = \vec{a} = \frac{\vec{x}+2\vec{y}}{3}$ ⋯ ㉠

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$에서 $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{x}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면 $\overrightarrow{AB} = \vec{x} = \frac{3\vec{a}-4\vec{b}}{5}$

따라서 $m = \frac{3}{5}$, $n = -\frac{4}{5}$이므로 $3m-4n=5$

30 답 4

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BO_2} + \overrightarrow{O_2Q}$이고 $\overrightarrow{BO_2} = \overrightarrow{O_1D}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} &= \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{BO_2} + \overrightarrow{O_2Q} \\ &= (\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1D}) + \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q}\end{aligned}$$

즉, $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}|$의 값이 최대일 때는 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$가 모두 $\overrightarrow{AD}$와 방향이 같을 때이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}| &= |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q}| \\ &\le |\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{O_1P}| + |\overrightarrow{O_2Q}| = 2+1+1=4\end{aligned}$$

따라서 $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}|$의 최댓값은 4이다.

31 답 6

주어진 쌍곡선의 주축의 길이가 $2 \times 2 = 4$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 4$ ⋯ ㉠

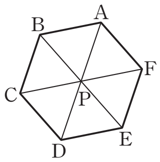
이때, $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OF'}$이므로 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{F'P}$이고

$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| = 10$이므로 $|\overrightarrow{F'P}| = 10$

따라서 ㉠에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PF'} - 4 = 10 - 4 = 6$

32 답 ④

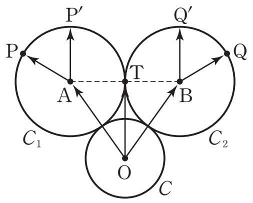
정육각형의 중심을 P라 하면



$$\begin{aligned}\overrightarrow{PE} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{PA} + 2(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}) + (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}) \\ &= 2\overrightarrow{PA} - 3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}\end{aligned}$$

따라서 점 E를 나타내는 복소수는 $2\alpha - 3\beta + 2\gamma$이다.

33 답 14



두 원 C_1, C_2의 접점을 T, 중심을 각각 A, B라 하자.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ}) \\ &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}) \\ &= 2\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ})\end{aligned}$$

이므로 그림과 같이 $\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{BQ}$가 $\overrightarrow{OT}$와 같은 방향으로 평행할 때, $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$의 값은 최대가 된다.

이때, $|\overrightarrow{OT}| = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$이므로

$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}| \le |2\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{BQ'}| = 8+3+3=14$

따라서 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$의 최댓값은 14이다.

34 답 ④

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 0이 아닌 실수 k에 대하여 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$라 하면 $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$에서

$\overrightarrow{OC} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} = (4-t^2)\overrightarrow{OA} + 2t\,\overrightarrow{OB}$

$\therefore\ 1-k = 4-t^2$, $k = 2t$

두 식을 변끼리 더하면

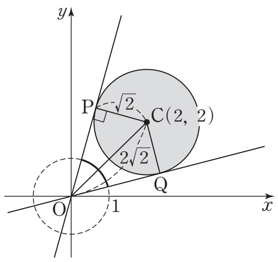
$1 = 4 - t^2 + 2t$에서 $t^2 - 2t - 3 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 t의 값의 합은 2이다.

35 답 ②

벡터 $\overrightarrow{OB}=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$는 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 방향이 같고 크기가 1인 벡터이다.

즉, 벡터 $\overrightarrow{OB}$의 종점 B는 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.



한편, 점 A는 원 C : $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 위의 점이므로 벡터 $\overrightarrow{OB}$의 종점 B가 나타내는 도형은 그림과 같이 원점 O에서 원 C에 그은 두 접선 사이의 호이다. 이때, 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하면 직각삼각형 COP에서 $\overline{CO}$: $\overline{CP}=2$: 1이므로 $\angle COP=\dfrac{\pi}{6}$

에서 $\angle POQ=\dfrac{\pi}{3}$이다.

따라서 종점 B가 나타내는 도형의 길이는 $\dfrac{\pi}{3}$이다.

36 답 ③

각 벡터를 시점을 A로 하는 벡터로 고치면

$2\overrightarrow{PA}-3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$-2\overrightarrow{AP}-3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+4(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

$3\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$ $\quad\therefore \overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}}{3-4}$

이때, 선분 BC를 4 : 3으로 외분하는 점을 Q라 하면

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$이므로 점 P는 ㉢에 속한다.

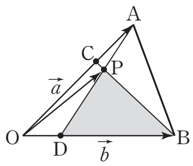
37 답 45

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{4}\vec{b}$

이때, 점 P가 선분 AD를

t : $(1-t)$로 내분한다고 하면



$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{1}{4}t\vec{b}$ ⋯ ㉠

또, 점 P가 선분 BC를 $(1-k)$: k로 내분한다고 하면

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{3}(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $1-t=\dfrac{2}{3}(1-k)$, $\dfrac{1}{4}t=k$이므로 $t=\dfrac{2}{5}$, $k=\dfrac{1}{10}$

따라서 $\overline{AP}$: $\overline{PD}=2$: 3이므로 $\triangle PDB=\dfrac{3}{5}\triangle ADB$

한편, $\triangle ADB=\dfrac{3}{4}\triangle AOB$이므로

$\triangle PDB=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\triangle AOB=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{4}\times100=45$

38 답 ⑤

ㄱ. $\overline{BP}=a$라 하면 $\overline{PC}=12-a$이므로

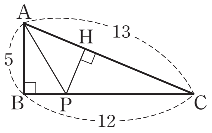
$\triangle ABP=\dfrac{5}{2}a$, $\triangle APC=\dfrac{5(12-a)}{2}$, $\triangle ABC=30$이고 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times\dfrac{5(12-a)}{2}=\dfrac{5}{2}a+30$ $\quad\therefore a=4$

즉, 점 P는 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점이다.

$\therefore \overrightarrow{AP}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$ (참)

ㄴ. 점 P에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ABC\backsim\triangle PHC$에서



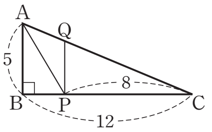
$\overline{AB}$: $\overline{AC}=\overline{PH}$: $\overline{PC}$

5 : 13$=\overline{PH}$: 8

$\therefore \overline{PH}=\dfrac{40}{13}$ (참)

ㄷ. $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=3\times\dfrac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}}{3}$에서

선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점을 Q라 하면 $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}}{3}$이므로



$\overrightarrow{AB}$ // $\overrightarrow{PQ}$이다.

이때, $\overline{BC}=12$, $\overline{PC}=8$, $\overline{AB}=5$이므로

$|\overrightarrow{PQ}|=5\times\dfrac{8}{12}=\dfrac{10}{3}$

$\therefore |2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}|=3|\overrightarrow{PQ}|=10$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

39 답 ②

$\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{BD}$: $\overline{DC}=c$: b이므로

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{\overset{(가)}{\boxed{b}}\times\overrightarrow{OB}+\overset{(나)}{\boxed{c}}\times\overrightarrow{OC}}{b+c}$ ⋯ ㉠

또, 두 선분 BI, CI가 각각 두 각 $\angle B$, $\angle C$를 이등분하므로

$\overline{AI}$: $\overline{ID}=c$: $\overline{BD}=b$: $\overline{DC}$

따라서 $\dfrac{\overline{AI}}{\overline{ID}}=\dfrac{c}{\overline{BD}}=\dfrac{b}{\overline{DC}}=k$ (k는 0이 아닌 실수)라 하면

$c=\overline{BD}\times k$, $b=\overline{DC}\times k$에서

$b+c=(\overline{BD}+\overline{DC})\times k$

$\therefore k=\dfrac{b+c}{\overline{BD}+\overline{DC}}=\dfrac{b+c}{\underset{(다)}{\boxed{a}}}=\dfrac{\overline{AI}}{\overline{ID}}$

즉, $\overline{AI}$: $\overline{ID}=(b+c)$: a이므로

$\overrightarrow{OI}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+(b+c)\overrightarrow{OD}}{a+(b+c)}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$ ($\because$ ㉠)

40 답 ②

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}$이므로 조건 (가)의 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}$

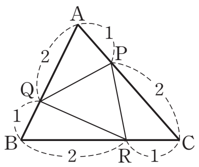
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=-2\overrightarrow{\mathrm{PA}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PC}}=1:2$

같은 방법으로 조건 (나), (다)에서 각각

$\overline{\mathrm{BQ}}:\overline{\mathrm{QA}}=1:2$, $\overline{\mathrm{CR}}:\overline{\mathrm{RB}}=1:2$

$\therefore \triangle\mathrm{AQP}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}$

$=\frac{2}{9}\triangle\mathrm{ABC}$



같은 방법으로

$\triangle\mathrm{BRQ}=\triangle\mathrm{CPR}=\frac{2}{9}\triangle\mathrm{ABC}$이므로

$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-3\times\frac{2}{9}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$

$\therefore \frac{\triangle\mathrm{PQR}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\frac{1}{3}$

41 답 ①

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}})$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 값이 최대일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$의 값이 최대이다.

한편, 무게중심 G는 중선 AD를 2 : 1로 내분하는 점이고

$\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{DO}}$이므로 점 G에서 가장 멀리 떨어진 점은 P_1이다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 값을 최대로 하는 점 P의 위치는 P_1이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$의 값을 최대로 하는 점 P의 위치도 P_1이다.

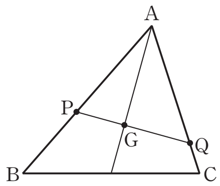
42 답 3

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AP}}}=\alpha$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}=\beta$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

이때, $\overline{\mathrm{GP}}:\overline{\mathrm{GQ}}=t:(1-t)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ ⋯ ㉠



또한, 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\frac{1}{3}\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{3}\beta\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $1-t=\frac{1}{3}\alpha$, $t=\frac{1}{3}\beta$ $\quad\therefore \alpha+\beta=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AP}}}+\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}=3$

43 답 3

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 성립하면 된다. 즉,

$3\vec{a}+m\vec{b}=(1-k)(2\vec{a}+\vec{b})+k(\vec{a}-\vec{b})$

$=(2-k)\vec{a}+(1-2k)\vec{b}$

에서 $2-k=3$, $1-2k=m$이므로

$k=-1$, $m=3$

44 답 15

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\vec{a}$이고

삼각형 OCB에서

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

삼각형 OAD에서

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{a}\right)=\frac{1}{8}(5\vec{a}+2\vec{b})$ ⋯ ㉠

한편, 점 F는 선분 AB 위의 점이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ ⋯ ㉡

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{n}{m}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$에 ㉠, ㉡을 대입하면

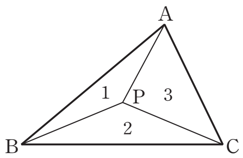
$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\frac{n}{8m}(5\vec{a}+2\vec{b})$

즉, $\frac{5n}{8m}=1-t$, $\frac{2n}{8m}=t$이므로 변끼리 더하면

$\frac{7n}{8m}=1$에서 $\frac{n}{m}=\frac{8}{7}$

$\therefore m+n=7+8=15$

45 답 ②



$\triangle\mathrm{ABP}:\triangle\mathrm{BCP}:\triangle\mathrm{CAP}=1:2:3$이므로

$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$이 성립한다.

즉, $-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$에서

$6\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

따라서 $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{6}$이므로

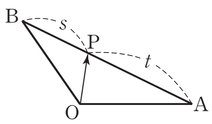
$m+n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

46 답 ③

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

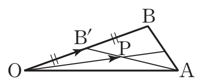
$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ $(0\le t\le 1)$

이므로 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이다. (참)



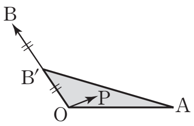
ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$



이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라 하면 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB′이고, 그 길이는 선분 AB의 길이보다 큰 경우도 있다. (거짓)

ㄷ. 양수 s, t가 $s+2t\le1$이면 점 P가 나타내는 영역은 삼각형 OAB′이므로 삼각형 OAB에 포함된다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

47 답 7

점 C가 선분 AB를 3 : 1로 내분하므로

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{3+1}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{4}$

또, 점 P는 선분 OC를 4 : 1로 내분하므로

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{OC}=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{4}$

$=\dfrac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{5}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

이때, 세 점 A, P, Q가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{OP}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OQ}$에서

$\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}=(1-k)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}$

즉, $1-k=\dfrac{1}{5}$, $kt=\dfrac{3}{5}$에서 $k=\dfrac{4}{5}$, $t=\dfrac{3}{4}$

따라서 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=7$

48 답 2

변 AD의 중점을 M이라 하면 $\overline{OM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=1$ ····· ⓐ

$\therefore\ |\overrightarrow{F'A}+\overrightarrow{FD}|=|(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OF'})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OF})|$

$=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}|\ (\because\ \overrightarrow{OF'}+\overrightarrow{OF}=\vec{0})$

$=2|\overrightarrow{OM}|=2$ ····· ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 선분 OM의 길이를 구한다.	[30%]
ⓑ $\lvert\overrightarrow{F'A}+\overrightarrow{FD}\rvert$의 값을 구한다.	[70%]

[다른 풀이]

도형의 대칭성에서 $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{BF'}$이므로

$|\overrightarrow{F'A}+\overrightarrow{FD}|=|\overrightarrow{F'A}+\overrightarrow{BF'}|=|\overrightarrow{BA}|=2$

49 답 1

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서 $-2\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$

$2\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\qquad\therefore\ \overrightarrow{CP}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}$

즉, 벡터 $\overrightarrow{CP}$는 선분 AB의 중점 M에 대하여 벡터 $\overrightarrow{PM}$과 같다. ····· ⓐ

따라서 $\overline{AM}=\overline{BM}$, $\overline{CP}=\overline{PM}$이므로

$\triangle PAB=\dfrac{1}{2}\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times2=1$ ····· ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ $\overrightarrow{CP}$와 같은 벡터를 구한다.	[60%]
ⓑ 삼각형 PAB의 넓이를 구한다.	[40%]

[다른 풀이]

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서 $\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA=2:1:1$

즉, 양수 k에 대하여 $\triangle PAB=2k$, $\triangle PBC=k$, $\triangle PCA=k$라 하면

$\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA=\triangle ABC$에서

$2k+k+k=2\qquad\therefore\ k=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\triangle PAB=2k=1$

50 답 8

$\overrightarrow{x_n}=\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)\vec{a}+\dfrac{1}{2^n}\vec{b}$에서 $\overrightarrow{x_n}-\vec{a}=\dfrac{1}{2^n}(\vec{b}-\vec{a})$

$\therefore\ \overrightarrow{AP_n}=\dfrac{1}{2^n}\overrightarrow{AB}$

즉, $|\overrightarrow{AP_n}|=\dfrac{1}{2^n}|\overrightarrow{AB}|$이므로 $f(n)=\dfrac{1}{2^n}|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{2}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ ····· ⓐ

$f(n)\le\dfrac{1}{100}$에서 $\dfrac{1}{2^{n-1}}\le\dfrac{1}{100}$, $2^{n-1}\ge100\qquad\therefore\ 2^n\ge200$

이때, $2^7=128$, $2^8=256$이므로 $f(n)\le\dfrac{1}{100}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이다. ····· ⓑ

| 채점기준 |

ⓐ 주어진 식에서 $f(n)$을 구한다.	[50%]
ⓑ 부등식 $f(n)\le\dfrac{1}{100}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.	[50%]

51 답 15

$\overrightarrow{OF}=-\overrightarrow{OF'}$이므로 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OF'}|=|\overrightarrow{F'P}|=1$

이때, 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=4$이므로

$\overline{PF}=4-\overline{PF'}=4-1=3\qquad\therefore\ k=3\Rightarrow5k=15$

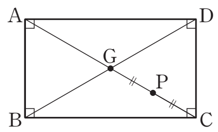
52 답 ⑤

ㄱ. $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$이므로

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$에서

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CP}$ (참)

ㄴ. 그림과 같이 직사각형 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 교점을 G라 하자. ㄱ에서 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}$이고 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PG}$이므로



$2\overrightarrow{PG}=-2\overrightarrow{PC}\qquad\therefore\ \overrightarrow{PG}=-\overrightarrow{PC}$

따라서 점 P는 선분 CG 위의 점이고 두 벡터 $\overrightarrow{PG}$, $\overrightarrow{PC}$는 크기가 같고 방향이 반대인 벡터이다. 즉, 점 P는 선분 CG의 중점이므로 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$이므로 점 P는 선분 AC를 3 : 1로 내분하는 점이다. 즉, $\overline{AP}:\overline{PC}=3:1$에서 $\overline{AP}:\overline{AC}=3:4$이므로

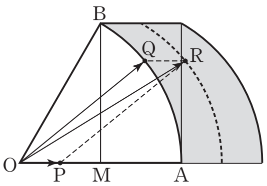
$\triangle ACD=\dfrac{4}{3}\triangle ADP=\dfrac{4}{3}\times3=4$

$\therefore\ \square ABCD=2\triangle ACD=2\times4=8$ (참)

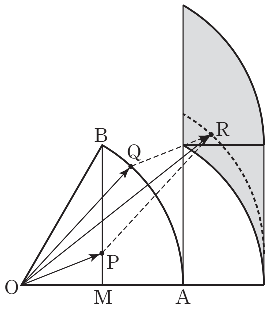
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

53 답 ③

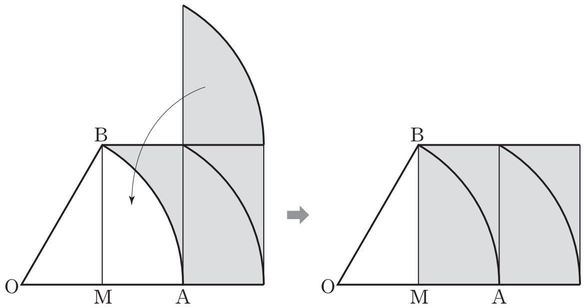
(ⅰ) 점 P가 선분 OM 위를 움직일 때,
점 R가 존재하는 영역은 그림의 색칠한 부분과 같다.



(ⅱ) 점 P가 선분 BM 위를 움직일 때,
점 R가 존재하는 영역은 그림의 색칠한 부분과 같다.



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 점 R가 나타내는 영역은 그림의 색칠한 부분과 같다.

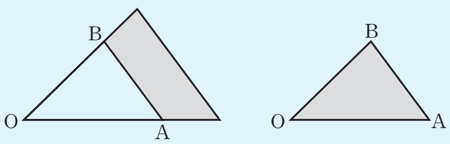


따라서 구하는 영역의 넓이는 가로의 길이가 2이고 세로의 길이가 $\sqrt{3}$인 직사각형의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.

일등급 UP

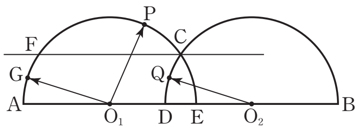
*** $\overrightarrow{OX}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ $(s>0, t>0)$을 만족시키는 점 X의 위치**

(1) $s+t>1$이면 삼각형 OAB의 선분 AB의 외부
(2) $s+t=1$이면 선분 AB 위
(3) $s+t<1$이면 삼각형 OAB의 내부



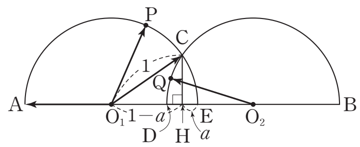
$s+t\geq1$ $s+t\leq1$

54 답 19



그림과 같이 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선이 호 AC와 만나는 점을 F라 하면 $\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1G}$를 만족시키는 점 G는 호 AF 위에 위치한다.
즉, $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$이므로 벡터 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$의 크기가 최소가 되려면 $\angle PO_1G$의 크기가 최대가 되어야 한다.
따라서 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$의 크기가 최소일 때는 점 P가 점 C에 위치하고 점 G가 점 A에 위치할 때이다.

$\therefore$ $|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}|=|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}|=\frac{1}{2}$



한편, 그림에서 $\overrightarrow{O_1A}=\overrightarrow{EO_1}$이므로

$|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}|=|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{EO_1}|=|\overrightarrow{EC}|=\overline{EC}=\frac{1}{2}$

이때, 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{HE}=a$라 하면 두 직각삼각형 CO_1H, CHE에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{O_1C}^2-\overline{O_1H}^2=\overline{CE}^2-\overline{HE}^2$

$1-(1-a)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2-a^2$, $2a-a^2=\frac{1}{4}-a^2$ $\therefore$ $a=\frac{1}{8}$

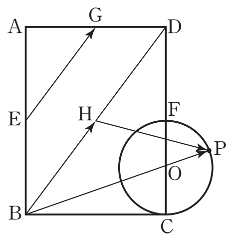
$\therefore$ $\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{HB}=(2-a)+(2-a)=4-2a$

$=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

따라서 $p=4$, $q=15$이므로 $p+q=19$

55 답 ②

두 점 E, G가 각각 두 선분 AB, AD의 중점이므로 $\overrightarrow{EG}\,/\!/\,\overrightarrow{BD}$이고 점 H가 선분 BD의 중점이므로 $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BH}$이다.
즉, $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BH}$에서 $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{BP}$이므로
$|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|=|\overrightarrow{BP}|$의 최댓값은 점 B와 선분 CF를 지름으로 하는 원 위의 점 P 사이의 거리인 선분 BP의 길이의 최댓값과 같다.
이때, 선분 BP의 길이가 최대가 될 때의 점 P의 위치는 선분 CF를 지름으로 하는 원의 중심을 O라 할 때, 직선 BO가 원과 만나는 두 점 중 더 먼 점이어야 한다.



$\therefore$ $|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|=|\overrightarrow{BP}|=\overline{BP}$

$\leq\overline{BO}+\overline{OP}=2\sqrt{10}+2$

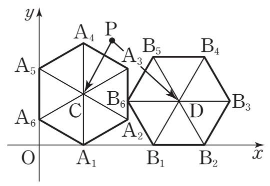
따라서 구하는 최댓값은 $2+2\sqrt{10}$이다.

56 답 ②

$\overline{A_1A_6}=2$, $\angle A_1A_6O=60^\circ$이므로

$\overline{OA_6}=2\cos 60^\circ=1$, $\overline{OA_1}=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$

따라서 정육각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(\sqrt{3},\ 2)$이고 정육각형 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$의 중심을 D라 하면 점 D의 좌표는 $(2+2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$이다.



이때, 선분 CD의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$\left(\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

한편, $\overrightarrow{PA_k}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA_k}$, $\overrightarrow{PB_k}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DB_k}$이고

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\overrightarrow{CA_k}=\sum_{k=1}^{6}\overrightarrow{DB_k}=\vec{0}$이므로

$$\sum_{k=1}^{6}(\overrightarrow{PA_k}+\overrightarrow{PB_k})=\sum_{k=1}^{6}(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA_k})+\sum_{k=1}^{6}(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DB_k})$$

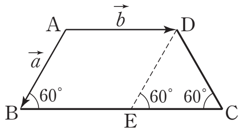
$$=6\overrightarrow{PC}+\sum_{k=1}^{6}\overrightarrow{CA_k}+6\overrightarrow{PD}+\sum_{k=1}^{6}\overrightarrow{DB_k}$$

$$=6\overrightarrow{PC}+6\overrightarrow{PD}=12\times\frac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{2}=12\overrightarrow{PM}$$

따라서 $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(\overrightarrow{PA_k}+\overrightarrow{PB_k})\right|=12|\overrightarrow{PM}|$의 값은 $|\overrightarrow{PM}|$의 값이 최소일 때, 즉 점 P가 점 $M\left(\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$에 위치할 때 최소가 된다.

따라서 $a=\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}$, $b=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$이므로 $a+b=2+2\sqrt{3}$

57 답 ④



벡터 $\overrightarrow{AB}$에 평행하고 점 D를 지나는 직선이 변 BC와 만나는 점을 E라 하면 $\angle DEC=\angle DCE=60^\circ$이므로 삼각형 DEC는 정삼각형이다.

즉, $\overrightarrow{EC}\ /\!/\ \vec{b}$, $|\overrightarrow{EC}|=|\vec{a}|$이므로 $\overrightarrow{EC}=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$

$\therefore\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}=\vec{a}+\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$

58 답 21

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{AG}\ /\!/\ \overrightarrow{AF}$이므로 $\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AF}$라 하면 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{k}{4}\vec{a}+\dfrac{k}{3}\vec{b}$

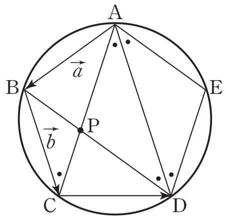
이때, 세 점 B, G, C는 한 직선 위의 점이므로

$\dfrac{k}{4}+\dfrac{k}{3}=1\qquad\therefore\ k=\dfrac{12}{7}$

$\therefore\ |\overrightarrow{AF}|=\dfrac{1}{k}|\overrightarrow{AG}|=\dfrac{7}{12}\times36=21$

59 답 5

그림과 같이 정오각형 ABCDE의 외접원을 그리면 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$에서 $\angle ACB=\angle CAD$이므로 엇각의 성질에 의하여 $\overrightarrow{AD}\ /\!/\ \overrightarrow{BC}$이다.



같은 방법으로

$\widehat{AE}=\widehat{DC}$에서 $\overrightarrow{AC}\ /\!/\ \overrightarrow{ED}$,

$\widehat{AB}=\widehat{DE}$에서 $\overrightarrow{AE}\ /\!/\ \overrightarrow{BD}$이므로 두 선분 AC와 BD의 교점을 P라 하면 사각형 APDE는 평행사변형이다.

$\therefore\ \overline{AP}=\overline{DE}=1$

한편, $\overline{PC}=x$라 하면 $\overline{AC}=\overline{AD}=1+x$이고

$\triangle PBC\backsim\triangle PDA$에서 $\overline{PC}:\overline{PA}=\overline{BC}:\overline{DA}$

$x:1=1:(1+x)$, $x(1+x)=1$

$x^2+x-1=0\qquad\therefore\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \overline{AD}=1+x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

이때, $\overrightarrow{AD}\ /\!/\ \overrightarrow{BC}$이므로 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{b}$

$\therefore\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=(-\vec{b})+(-\vec{a})+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{b}$

$\qquad=-\vec{a}+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\vec{b}$

따라서 $m=-1$, $n=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$이므로

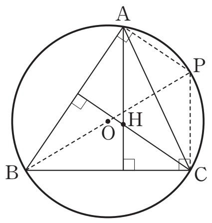
$(m-2n)^2=(-1+1-\sqrt{5})^2=5$

60 답 1

점 H가 삼각형 ABC의 수심이므로

$\overline{AH}\perp\overline{BC}$

또, 삼각형 ABC의 외심 O에 대하여 직선 OB가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 점 B가 아닌 점을 P라 하면 선분 BP는 외접원의 지름이므로 삼각형 BCP는 $\angle BCP=90^\circ$인 직각삼각형이다.



즉, $\overline{PC}\perp\overline{BC}$에서 $\overline{AH}\ /\!/\ \overline{PC}$

같은 방법으로 하면 $\overline{CH}\ /\!/\ \overline{PA}$이므로 사각형 AHCP는 평행사변형이다.

한편, $\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OB}$이고, $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{PC}$이므로

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})$

$\qquad=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$

$\therefore\ k=1$

04 평면벡터의 성분과 내적

문제편 45P

01 답 ②

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OP}$

$=(2,\ 1)+(3,\ 3)+(7,\ 5)-3(x,\ y)$

$=(12-3x,\ 9-3y)$

이때, $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=3$에서 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|^2=9$

$(12-3x)^2+(9-3y)^2=9$

$\therefore\ (x-4)^2+(y-3)^2=1$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(4,\ 3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이므로 점 P가 나타내는 도형의 넓이는 $\pi\times1^2=\pi$

02 답 50

$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$라 하면

$(2,\ 4)=\alpha(0,\ 3)+\beta(4,\ 2)=(4\beta,\ 3\alpha+2\beta)$에서

$4\beta=2,\ 3\alpha+2\beta=4$

두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=1,\ \beta=\frac{1}{2}$

따라서 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$이고 세 점 O, P, C가 한 직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OC}=k\left(\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=k\overrightarrow{OA}+\frac{k}{2}\overrightarrow{OB}$

이때, 세 점 A, P, B가 한 직선 위에 있으므로 $k+\frac{k}{2}=1$에서

$k=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

따라서 $m=\frac{2}{3},\ n=\frac{1}{3}$이므로

$90(m^2+n^2)=90\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\right)=50$

[다른 풀이]

직선 AB의 방정식은 $y=\frac{2-3}{4-0}x+3=-\frac{1}{4}x+3$

또, 직선 OC의 방정식은 $y=2x$

이때, 직선 AB와 직선 OC의 교점 P의 좌표를 구하기 위해 연립하면 $-\frac{1}{4}x+3=2x$에서 $\frac{9}{4}x=3\qquad\therefore\ x=\frac{4}{3},\ y=\frac{8}{3}$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)$이므로 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$에서

$\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)=m(0,\ 3)+n(4,\ 2)=(4n,\ 3m+2n)$

따라서 $4n=\frac{4}{3},\ 3m+2n=\frac{8}{3}$이고 이 두 식을 연립하여 풀면

$m=\frac{2}{3},\ n=\frac{1}{3}$이므로 $90(m^2+n^2)=50$

03 답 ③

두 벡터 $\vec{a}$와 $2\vec{a}-k\vec{b}$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot(2\vec{a}-k\vec{b})=0$에서 $2|\vec{a}|^2-k(\vec{a}\cdot\vec{b})=0\ \cdots$ ㉠

이때, $|\vec{a}|^2=1^2+2^2=5,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+2\times1=5$이므로

㉠에 대입하면 $2\times5-5k=0,\ 5k=10\qquad\therefore\ k=2$

[다른 풀이]

$2\vec{a}-k\vec{b}=2(1,\ 2)-k(3,\ 1)=(2-3k,\ 4-k)$이고

두 벡터 $\vec{a}$와 $2\vec{a}-k\vec{b}$가 서로 수직이므로 $\vec{a}\cdot(2\vec{a}-k\vec{b})=0$에서

$(1,\ 2)\cdot(2-3k,\ 4-k)=0,\ 1\times(2-3k)+2\times(4-k)=0$

$10-5k=0,\ 5k=10\qquad\therefore\ k=2$

04 답 ⑤

점 B를 원점으로 하고 선분 BE를 x축의 양의 방향으로 하는 좌표평면을 생각하면 세 점 A, C, E의 좌표는 각각 $(1,\ \sqrt{3}),\ (0,\ -2),\ (2,\ 0)$이므로

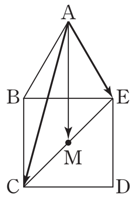
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=(0,\ -2)-(1,\ \sqrt{3})=(-1,\ -2-\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}=(2,\ 0)-(1,\ \sqrt{3})=(1,\ -\sqrt{3})$

$\therefore\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=(-1,\ -2-\sqrt{3})\cdot(1,\ -\sqrt{3})$

$=-1+(2\sqrt{3}+3)=2+2\sqrt{3}$

[다른 풀이]



선분 CE의 중점을 M이라 하면 $\overline{MC}=\overline{ME}=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME})$

$=|\overrightarrow{AM}|^2+(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME})\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{ME}\ \cdots$ ㉠

이때, $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{ME}$이므로

$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}=\vec{0},\ \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MC}\cdot(-\overrightarrow{MC})=-|\overrightarrow{MC}|^2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AM}|^2-|\overrightarrow{MC}|^2$

이때, $|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{2},\ |\overrightarrow{AM}|=\sqrt{3}+1$이므로

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2})^2=2+2\sqrt{3}$

05 답 ④

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\ \cdots$ ㉠

이때, 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°이고,

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\times3\times\frac{1}{2}=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4\times4-4\times3+9=13$

$\therefore\ |2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

06 답 6

직선 $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{2}$의 방향벡터는 $(3, 2)$이므로 구하는 직선은 법선벡터가 $(3, 2)$이고 점 $(3, -2)$를 지나는 직선이다.

즉, $3(x-3)+2(y+2)=0$에서

$3x+2y=5$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로 $ab=6$

07 답 6

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대응하는 좌표평면 위의 점을 각각 A, B라 하면

$A(x, y)$, $B(6, 0)$

이때, 점 $A(x, y)$는 직선 $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=-1$, 즉 $3x-4y+12=0$ 위의 점이고 $|\vec{a}-\vec{b}|$의 값은 두 점 A, B 사이의 거리이므로 $|\vec{a}-\vec{b}|$의 최솟값은 점 B와 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 $|\vec{a}-\vec{b}|$의 최솟값은

$\frac{|3\times6-4\times0+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{30}{5}=6$

08 답 ①

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overrightarrow{OP}=(x, y)$이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=0$에서

$(x, y)\cdot(x-4, y-2)=0$

$x(x-4)+y(y-2)=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=5$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 점 $(2, 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이므로 점 P가 나타내는 도형의 넓이는 $\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$

09 답 ⑤

두 점 P, Q의 좌표를 각각 (a, b), (c, d)라 하면 두 점 P′, Q′의 좌표는 각각 $(a+3, b+1)$, $(c+3, d+1)$이므로 $\overrightarrow{OP}=(a, b)$, $\overrightarrow{OQ}=(c, d)$, $\overrightarrow{OP'}=(a+3, b+1)$, $\overrightarrow{OQ'}=(c+3, d+1)$

ㄱ. $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}=(a, b)-(a+3, b+1)=(-3, -1)$이므로

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(a, b)-(c, d)=(a-c, b-d)$

$\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}=(a+3, b+1)-(c+3, d+1)$

$=(a-c, b-d)$

이므로 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}$

$\therefore |\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}|$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 사각형 PQQ′P′은 평행사변형이다.

이때, $\overrightarrow{PQ'}\cdot\overrightarrow{P'Q}=0$에서 $\overline{PQ'}\perp\overline{P'Q}$, 즉 사각형 PQQ′P′의 두 대각선이 서로 수직이므로 사각형 PQQ′P′은 마름모이다.

$\therefore |\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PP'}|=|\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OP}|=\sqrt{10}$ ($\because$ ㄱ) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 ⑤

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}\cos\theta+\overrightarrow{OB}\sin\theta$에서

$(x, y)=(2\cos\theta, \cos\theta)+(-\sin\theta, 2\sin\theta)$

$=(2\cos\theta-\sin\theta, \cos\theta+2\sin\theta)$

즉, $x=2\cos\theta-\sin\theta$, $y=\cos\theta+2\sin\theta$이므로

$x^2+y^2=5(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=5$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이므로 점 P가 나타내는 도형의 넓이는 5π이다.

11 답 ⑤

두 점 $A(\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 1)$의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})$

$=|\overrightarrow{PM}|^2+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ ⋯ ㉠

이고 $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$이므로

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot(-\overrightarrow{MA})=-|\overrightarrow{MA}|^2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PM}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2$

이때, $|\overrightarrow{MA}|=\frac{1}{2}\overline{AB}=1$로 일정하므로 $|\overrightarrow{PM}|$의 값이 최소일 때 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 값이 최소가 된다.

한편, 두 점 P, M을 이은 직선이 반원의 중심 O를 지날 때 선분 PM의 길이가 최소이고 이때 선분 PM의 길이는

$\overline{PM}=\overline{OP}-\overline{OM}=3-1=2$이므로

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PM}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2\geq2^2-1^2=3$

따라서 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최솟값은 3이다.

12 답 ①

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})$

$=|\overrightarrow{CD}|^2+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$ ⋯ ㉠

이때, $|\overrightarrow{CD}|=4$, $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}=0$, $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB}=0$이고,

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=3\times2\times\cos180°=-6$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=4^2+0+0-6=10$

13 답 ⑤

점 O에서 두 현 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면

$\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AB}=5$, $\overline{AQ}=\frac{1}{2}\overline{AC}=7$이므로

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\overline{AB}\times\overline{AP}=10\times5=50$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AC}\times\overline{AQ}=14\times7=98$

$\therefore \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=98-50=48$

14 답 44

선분 AB의 중점을 M, 원 C의 중심을 O라 하면 점 M의 좌표는 $(4,\ 3)$이고 $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2+(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ … ㉠

이고 $\overrightarrow{\mathrm{MA}}=-\overrightarrow{\mathrm{MB}}$이므로

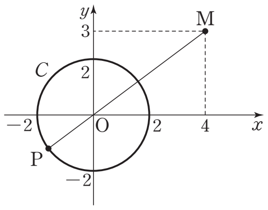
$\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\vec{0}$, $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{MA}})=-|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2$

이때, $|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|=\sqrt{5}$로 일정하므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$의 값이 최대일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 값이 최대가 된다.

한편, 점 M과 원 C의 중심 O를 지나는 직선이 원 C와 만나는 두 점 중 점 M에서 먼 점에 점 P가 위치할 때 선분 PM의 길이는 최댓값을 갖는다.



즉, 선분 PM의 길이의 최댓값은

(원 C의 반지름의 길이)$+\overline{\mathrm{OM}}=2+5=7$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2\le 7^2-(\sqrt{5})^2=44$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ 의 최댓값은 44이다.

[다른 풀이]

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$ … ㉡

이때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 4)\cdot(6,\ 2)=12+8=20$이고 점 P는 원 C 위의 점이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=2^2=4$이다.

이것을 ㉡에 대입하면

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=20-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+4$

$=24-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ … ㉢

즉, $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 값은 $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 값이 최소일 때 최댓값을 갖는다.

한편, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 4)+(6,\ 2)=(8,\ 6)$에서

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{8^2+6^2}=10$이고 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=2$이므로

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 평행하고 방향이 반대일 때 $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 값은 최솟값을 갖는다.

따라서 $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ge 10\times2\times\cos180^\circ=-20$이므로

㉢에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값은 $24-(-20)=44$이다.

15 답 ④

$3\vec{a}+4\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$의 양변을 $\vec{a}$와 내적하면

$\vec{a}\cdot(3\vec{a}+4\vec{b}+5\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{0}=0$에서

$3|\vec{a}|^2+4(\vec{a}\cdot\vec{b})+5(\vec{a}\cdot\vec{c})=0$

$3|\vec{a}|^2-4-5=0$

$3|\vec{a}|^2=9$, $|\vec{a}|^2=3$

$\therefore |\vec{a}|=\sqrt{3}$

16 답 ②

$|\overrightarrow{\mathrm{PF}}|=a$, $|\overrightarrow{\mathrm{PF'}}|=b$라 하면 점 P가 타원 $x^2+4y^2=4$,

즉 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 위의 점이므로

$a+b=4$ … ㉠

한편, 타원의 두 초점의 좌표 F, F′의 좌표가 $(\sqrt{3},\ 0)$, $(-\sqrt{3},\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{3}$

즉, $|\overrightarrow{\mathrm{FF'}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PF'}}-\overrightarrow{\mathrm{PF}}|^2=12$에서

$|\overrightarrow{\mathrm{PF}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PF'}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{PF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PF'}}=12$

$a^2+b^2-2ab\cos60^\circ=12$

$(a+b)^2-2ab-2ab\times\dfrac{1}{2}=12$

$4^2-3ab=12$ ($\because$ ㉠), $3ab=4$ $\quad\therefore ab=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{PF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PF'}}=ab\cos60^\circ=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$

17 답 ⑤

조건 (가)에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=36$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=36$ … ㉠

조건 (나)에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=16$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=16$ … ㉡

㉠+㉡을 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=26$ … ㉢

㉠−㉡을 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=5$

조건 (다)에서

$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=10$ … ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=18$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=8$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2\sqrt{2}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\dfrac{5}{3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{5}{12}$

18 답 ③

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(a-4,\ b-1)$은 직선 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}$의 방향벡터 $\vec{d}=(2,\ 3)$과 수직이므로

$(a-4,\ b-1)\cdot(2,\ 3)=0$에서

$2a+3b=11$ … ㉠

또, 선분 PQ의 중점 $\left(\dfrac{a+4}{2},\ \dfrac{b+1}{2}\right)$은 직선 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}$, 즉 $3(x+1)=2y$ 위의 점이므로

$3\times\left(\dfrac{a+4}{2}+1\right)=2\times\dfrac{b+1}{2}$에서

$3a-2b=-16$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=5$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+5^2=29$

19 답 24

$m+n=2$, 즉 $\frac{m}{2}+\frac{n}{2}=1$에서

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\vec{a}+n\vec{b}=\frac{m}{2}(2\vec{a})+\frac{n}{2}(2\vec{b})$이므로 점 P가 나타내는 도형은 $2\vec{a}=(6,\ 2)$, $2\vec{b}=(2,\ 8)$을 지나는 직선이다.

즉, $\frac{x-6}{2-6}=\frac{y-2}{8-2}$에서 $3x+2y=22$이므로 $\alpha=2$, $\beta=22$

$\therefore\ \alpha+\beta=24$

[다른 풀이]

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\vec{a}+n\vec{b}$에서

$(x,\ y)=m(3,\ 1)+n(1,\ 4)=(3m+n,\ m+4n)$

$\therefore\ x=3m+n,\ y=m+4n$

m, n에 대하여 정리하면 $m=\frac{1}{11}(4x-y)$, $n=\frac{1}{11}(3y-x)$

이것을 $m+n=2$에 대입하고 정리하면 $3x+2y=22$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=22$이므로 $\alpha+\beta=24$

20 답 ③

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{a}=(\vec{p}-\vec{b})\cdot\vec{b}$에서

$\vec{p}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2=\vec{p}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2$, $\vec{p}\cdot\vec{a}-\vec{p}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

$\vec{p}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$\vec{p}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ ($\because\ \vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$)

$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$\therefore\ (\vec{p}-\vec{c})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 C를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이다.

21 답 ②

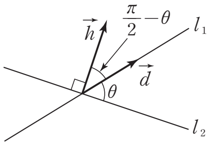
두 직선 $2x+y+4=0$, $x-3y+2=0$이 이루는 예각의 크기는 두 직선에 수직인 벡터가 이루는 예각의 크기와 같다.

두 직선에 수직인 벡터를 각각 $\vec{h_1}$, $\vec{h_2}$라 하면

$\vec{h_1}=(2,\ 1)$, $\vec{h_2}=(1,\ -3)$이므로

$$\cos\theta=\frac{|\vec{h_1}\cdot\vec{h_2}|}{|\vec{h_1}||\vec{h_2}|}=\frac{|(2,\ 1)\cdot(1,\ -3)|}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

22 답 ①

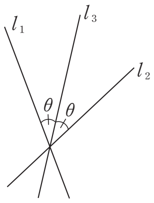


그림에서 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기가 θ이므로

두 벡터 $\vec{d}$, $\vec{h}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다.

$$\therefore\ \sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\vec{d}\cdot\vec{h}}{|\vec{d}||\vec{h}|}=\frac{(2,\ 1)\cdot(1,\ 3)}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

23 답 3



세 직선 l_1, l_2, l_3의 방향벡터를 각각 $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$, $\vec{d_3}$라 하면 $\vec{d_1}=(-5,\ 12)$, $\vec{d_2}=(a+1,\ a)$, $\vec{d_3}=(3,\ 11)$이다.

벡터 $\vec{d_3}$이 두 벡터 $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$가 이루는 각을 이등분하므로 두 벡터 $\vec{d_3}$, $\vec{d_1}$이 이루는 각의 크기와 두 벡터 $\vec{d_3}$, $\vec{d_2}$가 이루는 각의 크기는 같다. 그 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_3}}{|\vec{d_1}||\vec{d_3}|}=\frac{\vec{d_2}\cdot\vec{d_3}}{|\vec{d_2}||\vec{d_3}|}$에서

$$\frac{(-5,\ 12)\cdot(3,\ 11)}{\sqrt{(-5)^2+12^2}\sqrt{3^2+11^2}}=\frac{(a+1,\ a)\cdot(3,\ 11)}{\sqrt{(a+1)^2+a^2}\sqrt{3^2+11^2}}$$

$$9=\frac{14a+3}{\sqrt{2a^2+2a+1}}$$

제곱하여 정리하면

$17a^2-39a-36=0$

$(17a+12)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3$ ($\because\ a>0$)

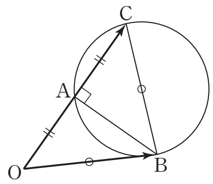
24 답 ④

조건 (가)의 $|\vec{x}|^2-(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{x}+2(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$에서

$(\vec{x}-2\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$

이때, 벡터 $2\vec{a}$의 종점을 C라 하면 점 P가 나타내는 도형은 두 점 B, C를 지름의 양 끝점으로 하는 원이다.

또, 조건 (나)의 $(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{a}=0$에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{a}$이다.



즉, 그림에서 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이고, 점 A는 선분 OC의 중점이므로 삼각형 OBC는 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BO}}$인 이등변삼각형이다.

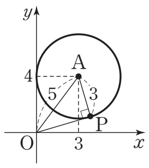
따라서 점 P가 나타내는 도형은 지름의 길이가 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BO}}=4$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는 $\pi\times2^2=4\pi$

25 답 ③

조건 (가)의 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3$에서 점 P는 중심이 A이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

또, 조건 (나)의 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$에서

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$이므로 직선 OP는 원의 접선이고 점 P는 접점이다.



이때, $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로 직각삼각형 OPA에서

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

26 답 ②

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=5$에서

$(x-\sqrt{3}, y-1) \cdot (x+\sqrt{3}, y+1)=5$

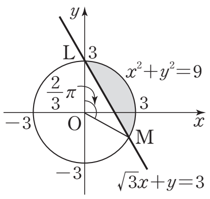
$\therefore x^2+y^2=9$ ⋯ ㉠

또한, 점 Q의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{OA}=-1$에서

$(x-\sqrt{3}, y-1) \cdot (\sqrt{3}, 1)=-1$

$\therefore \sqrt{3}x+y=3$ ⋯ ㉡

즉, 원 ㉠과 직선 ㉡으로 둘러싸인 부분 중 작은 쪽은 그림의 색칠한 부분과 같다.



이때, 원과 직선이 만나는 두 점을 각각 L, M이라 하면 직선에 수직인 벡터 $(\sqrt{3}, 1)$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$

이므로 $\angle LOM=\frac{2}{3}\pi$이다.

따라서 구하는 부분의 넓이는

(부채꼴 OLM의 넓이)$-$(삼각형 OLM의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times 3^2\times\sin\frac{2}{3}\pi=3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}$

27 답 ②

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=6$에서 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OP}|=6$

$\therefore \left|\overrightarrow{OP}-\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right|=2$

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\overrightarrow{OG}$이므로 $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OG}|=2$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 점 G$(2, 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이므로 벡터 $\overrightarrow{OP}$의 크기의 최솟값은 $\overline{OG}-2=\sqrt{5}-2$이다.

28 답 ②

선분 AB의 중점을 C라 하면 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})=\overrightarrow{PC}$이므로 $|\overrightarrow{PC}|$의 값이 최소일 때, $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 값도 최소이다.

점 C는 선분 AB의 중점이므로 좌표는 $(2, -1)$이다.

따라서 점 C에서 직선 $2x-y+1=0$에 내린 수선의 발이 점 P일 때 $|\overrightarrow{PC}|$의 값은 최소가 된다.

이때, 수선의 발 P는 직선 $2x-y+1=0$ 위의 점이므로

$2a-b+1=0$ ⋯ ㉠

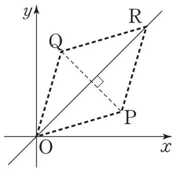
또, 직선 $2x-y+1=0$의 방향벡터 $(1, 2)$와 벡터 $\overrightarrow{CP}=(a-2, b+1)$은 서로 수직이므로

$(1, 2) \cdot (a-2, b+1)=0$ $\quad\therefore a+2b=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{2}{5}$, $b=\frac{1}{5}$

$\therefore 5(a+b)=5\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)=-1$

29 답 ④



점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 Q의 좌표는 (b, a)이므로 조건 (나)에 의하여

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(a+b, a+b)$

이때, $\overrightarrow{OR}=(x, y)$라 하면

$x=a+b$, $y=a+b$이므로

점 R는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

한편, 점 P(a, b)가 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{9}=1$

이때, $x=a+b$의 값이 가지는 범위를 구하면

코시-슈바르츠 부등식에 의하여

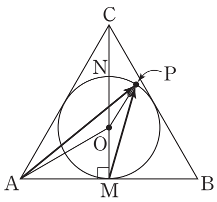
$(16+9)\left(\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{9}\right)\geq(a+b)^2$에서 $(a+b)^2\leq 25$

$-5\leq a+b\leq 5$ $\quad\therefore -5\leq x\leq 5$

따라서 점 R가 나타내는 도형은 $y=x$ $(-5\leq x\leq 5)$이므로 점 R가 나타내는 도형의 길이는

$\sqrt{\{5-(-5)\}^2+\{5-(-5)\}^2}=10\sqrt{2}$

30 답 ④



그림과 같이 내접원의 중심을 O, 중선 CM과 내접원의 M이 아닌 교점을 N이라 하자.

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}$,

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OP}$이므로

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{MP}$

$=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OP})$

$=\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{MO}+(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{MO}) \cdot \overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2$ ⋯ ㉠

이때, $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{MO}=1$, $|\overrightarrow{OP}|^2=1$이고,

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{AN}$이므로 ㉠에 대입하면

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{OP}+2$

따라서 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{MP}$의 값은 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{OP}$의 값이 최대일 때, 최대가 된다. 즉, 두 벡터 $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{OP}$가 평행하고 방향이 같을 때 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{OP}$의 값이 최대이므로

$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{OP}\leq|\overrightarrow{AN}||\overrightarrow{OP}|\cos 0^\circ=\sqrt{7}\times 1\times 1=\sqrt{7}$

따라서 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{MP}$의 최댓값은 $2+\sqrt{7}$이다.

31 답 ②

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a} \cdot \vec{b}+|\vec{a}|^2$에서

$6^2=4^2-2\vec{a} \cdot \vec{b}+5^2$

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2}=\frac{5}{2}$

한편, $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$이므로 $\overrightarrow{OQ}=m\vec{a}$ (m은 실수)라 하면

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=m\vec{a}-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)=\left(m-\frac{1}{3}\right)\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

이때, $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{a}$이므로 $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{a}=0$에서

$\left\{\left(m-\frac{1}{3}\right)\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right\}\cdot\vec{a}=0$

$25\left(m-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}=0 \qquad \therefore m-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

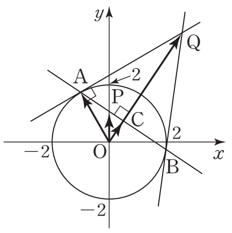
$\therefore \overrightarrow{PQ}=\left(m-\frac{1}{3}\right)\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{1}{15}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

32 답 ④

점 Q에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점이 A, B이므로 $\overline{AB}\perp\overline{OQ}$이다.

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OC}|\,|\overrightarrow{OQ}|$

$=|\overrightarrow{OA}|^2=4$



33 답 ⑤

선분 AB가 지름이므로

$\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|\cos(\angle BAC)$

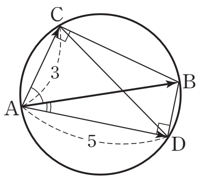
$=|\overrightarrow{AC}|^2=9$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AD}|\cos(\angle BAD)$

$=|\overrightarrow{AD}|^2=25$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=25-9=16$



34 답 ⑤

$|\vec{a}-\vec{b}|-|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2}$에서 $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|+\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+2\sqrt{2}|\vec{a}+\vec{b}|+2$

$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=-\sqrt{2}|\vec{a}+\vec{b}|$

이때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로 $2\cos\theta+1=-\sqrt{2}|\vec{a}+\vec{b}|$ ⋯ ㉠

양변을 제곱하면

$4\cos^2\theta+4\cos\theta+1=2|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2=4+4\cos\theta$

$4\cos^2\theta=3,\ \cos^2\theta=\frac{3}{4} \qquad \therefore \cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

그런데 ㉠에서 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}|\vec{a}+\vec{b}|+1}{2}<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$\therefore \theta=150^\circ$

35 답 ②

두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$이고, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$이면

$\cos\theta>0$이므로 $\angle AOB$가 예각이려면 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$이어야 한다.

즉, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(2,\ a)\cdot(a-b,\ -1)=a-2b>0$에서

$a>2b$ ⋯ ㉠

부등식 ㉠을 만족시키는 경우의 수를 b의 값에 따라 구하면 다음과 같다.

(i) $b=1$일 때, a의 값은 3, 4, 5, 6으로 4가지이다.

(ii) $b=2$일 때, a의 값은 5, 6으로 2가지이다.

(iii) $3\le b\le 6$일 때, 부등식 ㉠을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 부등식 ㉠을 만족시키는 경우의 수는 $4+2=6$이고 한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 경우의 수는 36이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$이다.

36 답 ④

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$에서

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2}=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2}=3$

따라서 벡터 $\overrightarrow{OD}$의 크기는

$|\overrightarrow{OD}|=\overrightarrow{OC}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}=(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})\cdot\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$

$=2|\overrightarrow{OA}|+3\times\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}=2\times3+3\times\frac{3}{3}=9$

37 답 ③

조건 (가)의 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$에서 $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$

$|\vec{c}|^2=|-\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$7^2=3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+5^2$ ($\because$ 조건 (나))

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{7^2-3^2-5^2}{2}=\frac{15}{2}$이므로

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\times5^2-\left(\frac{15}{2}\right)^2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

한편, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$에서 점 O는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\triangle ABC=3\triangle OAB=\frac{45\sqrt{3}}{4}$

38 답 ①

$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{y}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{z}$라 하면 $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=\vec{0}$ ⋯ ㉠

이고 $\vec{x}\cdot\vec{y}=-3$, $\vec{y}\cdot\vec{z}=-4$, $\vec{z}\cdot\vec{x}=-5$

이때, ㉠의 양변을 $\vec{x}$와 내적하면

$\vec{x}\cdot(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})=\vec{x}\cdot\vec{0}=0$에서

$|\vec{x}|^2+(\vec{x}\cdot\vec{y})+(\vec{x}\cdot\vec{z})=0,\ |\vec{x}|^2=8 \qquad \therefore |\vec{x}|=2\sqrt{2}$

같은 방법으로 하면 $|\vec{y}|=\sqrt{7}$, $|\vec{z}|=3$

따라서 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{7}$, $|\overrightarrow{CA}|=3$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{8\times9-5^2}=\frac{\sqrt{47}}{2}$

39 답 1

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=3$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{|2\vec{a}+x\vec{b}|-|3\vec{b}|}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(|2\vec{a}+x\vec{b}|-|3\vec{b}|)(|2\vec{a}+x\vec{b}|+|3\vec{b}|)}{x(|2\vec{a}+x\vec{b}|+|3\vec{b}|)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{|2\vec{a}+x\vec{b}|^2-|3\vec{b}|^2}{x(|2\vec{a}+x\vec{b}|+|3\vec{b}|)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4|\vec{a}|^2+4x(\vec{a}\cdot\vec{b})+x^2|\vec{b}|^2-9|\vec{b}|^2}{x(|2\vec{a}+x\vec{b}|+|3\vec{b}|)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x^2+12x}{x(|2\vec{a}+x\vec{b}|+|3\vec{b}|)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x+12}{|2\vec{a}+x\vec{b}|+|3\vec{b}|}=\frac{12}{6+6}=1$$

40 답 ④

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ, 선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,/\!/\,\vec{a}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\vec{a}$ (t는 실수)라 하자.

$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|t\vec{a}|=|\vec{b}||\cos\theta|$에서 $t=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cos\theta$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\frac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\right)\vec{a}$ ⋯ ㉠

한편, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$에서 $|\vec{b}|\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$이므로

㉠에 대입하면 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\frac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}\right)\vec{a}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}-\vec{b}$

41 답 1

직선 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{h}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{h}=0$에서

$(x-\cos2\theta,\ y-\sin2\theta)\cdot(\cos\theta,\ \sin\theta)=0$

$x\cos\theta-\cos\theta\cos2\theta+y\sin\theta-\sin\theta\sin2\theta=0$

$x\cos\theta+y\sin\theta-(\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta)=0$

$x\cos\theta+y\sin\theta-\cos(2\theta-\theta)=0$

$x\cos\theta+y\sin\theta-\cos\theta=0$

$\therefore (x-1)\cos\theta+y\sin\theta=0$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $(x-1)\cos\theta+y\sin\theta=0$이고 이 직선은 θ의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 0)$을 지난다.

즉, $a=1$, $b=0$이므로 $a+b=1$

42 답 ①

$\vec{x}=\vec{a}-3t\vec{b}=(x, y)$라 하면 $-3\vec{b}\,/\!/\,\vec{b}$이므로 점 $\mathrm{P}(\vec{x})$는 점 $\mathrm{A}(\vec{a})$를 지나고 방향벡터가 $\vec{b}=(1, -1)$인 직선 $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}$, 즉 $x+y+1=0$ 위의 점이다.

따라서 $|\vec{a}-3t\vec{b}|$의 최솟값은 원점과 직선 $x+y+1=0$ 사이의 거리이므로 구하는 최솟값은

$$\frac{|0+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

43 답 ②

ㄱ. $2\vec{d}\,/\!/\,\vec{d}$이므로 직선 l의 벡터방정식은 $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{d}$이다. (참)

ㄴ. $\vec{x}\cdot\vec{h}=\vec{a}\cdot\vec{h}$에서 $(\vec{x}-\vec{a})\cdot\vec{h}=0$이므로 벡터 $\vec{h}$는 직선 l과 수직인 벡터이다. 따라서 $\vec{d}\perp\vec{h}$이므로 $\vec{d}\cdot\vec{h}=0$이다. (참)

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\vec{d}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=k\vec{d}$ (k는 실수) ⋯ ㉠

삼각형 OAB가 정삼각형이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$이다.

즉, $|\vec{b}-\vec{a}|=|\vec{a}|$에서 $|k\vec{d}|=|k||\vec{d}|=|\vec{a}|$이므로

$k=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{d}|}$ 또는 $k=-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{d}|}$ ⋯ ㉡

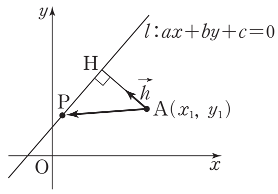
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$\vec{b}=\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{|\vec{d}|}\vec{d}$ 또는 $\vec{b}=\vec{a}-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{d}|}\vec{d}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

44 답 ②

그림과 같이 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하고, 직선 l 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(p, q)$라 하자.



직선 l과 수직인 벡터 중 하나가 (a, b)이므로 크기가 1인 벡터를 $\vec{h}$라 하면

$$\vec{h}=\left(\boxed{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\right)$$ (가)

이때, 선분 AH의 길이는 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\vec{h}$의 내적의 절댓값과 같으므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\boxed{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{h}|}$ (나)

이때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(p-x_1,\ q-y_1)$이므로

$d=\overline{\mathrm{AH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{h}|$

$$=\left|(p-x_1,\ q-y_1)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right|$$

$$=\frac{|(p-x_1,\ q-y_1)\cdot(a, b)|}{\boxed{\sqrt{a^2+b^2}}}$$ (다)

$$=\frac{|-ax_1-by_1+ap+bq|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ⋯ ㉠

이때, 점 $\mathrm{P}(p, q)$는 직선 l 위의 점이므로

$ap+bq+c=0$에서 $ap+bq=-c$이다. 따라서 ㉠에 의하여

$$d=\frac{|-ax_1-by_1-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

45 답 ②

두 직선 $x-2=\frac{1-y}{3}$, $\frac{x+4}{k}=\frac{y-3}{2}$의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면 $\vec{u}=(1,\ -3)$, $\vec{v}=(k,\ 2)$

이때, $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로 $\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서

$\frac{|1\times k+(-3)\times 2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}\sqrt{k^2+2^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$|k-6|=\sqrt{2k^2+8}$

$k^2+12k-28=0$

$(k-2)(k+14)=0$

$\therefore k=2$ ($\because$ k는 자연수)

46 답 ②

두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=(3,\ 1)$, $\vec{u_2}=(1,\ 2)$이므로 두 직선이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$\cos\theta=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|3\times 1+1\times 2|}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta=45^\circ$

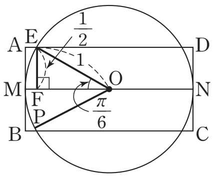
47 답 ②

$|\overrightarrow{OP}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{c}|^2+0=1$이므로

점 P가 나타내는 도형은 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $2\pi\times 1=2\pi$

48 답 5



그림과 같이 직사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점을 O라 하자.

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$

이므로

$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD})=4$에서

$2\overrightarrow{PO}\cdot 2\overrightarrow{PO}=4$, $4|\overrightarrow{PO}|^2=4$

$\therefore |\overrightarrow{PO}|^2=1$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 중에서 사각형 ABCD의 둘레 또는 그 내부에 있는 부분이다. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 직사각형 ABCD가 만나는 한 점을 E라 하고, 점 E에서 지름 MN에 내린 수선의 발을 F라 하면 직각삼각형 OEF에서 $\overline{OE}=\frac{1}{2}\overline{MN}=1$,

$\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}$이므로 $\angle EOF=\frac{\pi}{6}$이다.

즉, 호 EM의 길이는 $1\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$이고 구하는 도형의 길이는

호 EM의 길이의 4배이므로 $4\times\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p+q=5$

49 답 ⑤

$(\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{BP})\cdot(\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP})=0$에서

$|\overrightarrow{AP}|^2-4|\overrightarrow{BP}|^2=0$, $|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{BP}|$

$\therefore |\overrightarrow{AP}|:|\overrightarrow{BP}|=2:1$

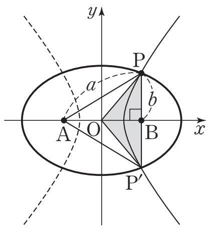
따라서 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 M과 외분하는 점 N을 지름의 양 끝점으로 하는 원이다.

$|\overrightarrow{AP}|$의 값이 최대일 때는 점 P가 외분점 N의 위치에 있을 때이고, 점 N의 좌표는

$\left(\frac{2\times(-1)-1\times 2}{2-1},\ \frac{2\times(-3)-1\times 3}{2-1}\right)$, 즉 $(-4,\ -9)$이므로

$|\overrightarrow{AP}|$의 최댓값은 $\sqrt{\{2-(-4)\}^2+\{3-(-9)\}^2}=6\sqrt{5}$이다.

50 답 6



두 점 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$을 A, B라 하면 조건 (가)에서 $\overline{PA}+\overline{PB}=8$이므로 점 P는 두 점 A, B를 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원 위의 점이다.

또한, 조건 (나)에서 $\overline{PA}-\overline{PB}=2$이므로 점 P는 두 점 A, B를 초점으로 하고 주축의 길이가 2인 쌍곡선 중 오른쪽 곡선 위의 점이므로 점 P는 그림과 같이 타원과 쌍곡선의 두 교점이다.

제 1 사분면의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=a$, $\overline{PB}=b$라 하면 타원과 쌍곡선의 정의에서 $a+b=8$, $a-b=2$

연립하여 풀면 $a=5$, $b=3$

이때, $\overline{AB}=4$이므로 삼각형 PAB는 $\angle ABP=90^\circ$인 직각삼각형이다. 즉, 삼각형 POB도 직각삼각형이므로 도형의 대칭성에 의해 구하는 삼각형 POP′의 넓이는

$2\triangle POB=2\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 3\right)=6$

51 답 23

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$에서 $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=0$이므로 점 C가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원,

즉 선분 AB의 중점 $M(3,\ 4)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}=\sqrt{2}$인 원이다. ---------- ⓐ

이때, $\overline{OM}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로 벡터 $\overrightarrow{OC}$의 크기의 최댓값은

$\overline{OM}+\sqrt{2}=5+\sqrt{2}$, 최솟값은 $\overline{OM}-\sqrt{2}=5-\sqrt{2}$이다. ---------- ⓑ

따라서 벡터 $\overrightarrow{OC}$의 크기의 최댓값과 최솟값의 곱은

$(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})=23$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 점 C가 나타내는 도형을 구한다.	[40%]
ⓑ 벡터 $\overrightarrow{OC}$의 크기의 최댓값과 최솟값을 각각 구한다.	[40%]
ⓒ 벡터 $\overrightarrow{OC}$의 크기의 최댓값과 최솟값의 곱을 구한다.	[20%]

52 답 27

원점 O는 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$는 서로 수직이다.

이때, 점 A$(\sqrt{3}, 5)$와 직선 $y=\sqrt{3}x$, 즉 $\sqrt{3}x-y=0$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-5|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=1$ ---------- ⓐ

이고 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+5^2}=2\sqrt{7}$이므로 직각삼각형 OBA에서

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{28-1}=3\sqrt{3}$ ---------- ⓑ

이때, $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 하면 직각삼각형 OBA에서

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\cos\theta=\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\dfrac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$

$=\overline{\mathrm{OB}}^2=(3\sqrt{3})^2=27$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 점 A와 직선 $y=\sqrt{3}x$ 사이의 거리를 구한다.	[30%]
ⓑ 선분 OB의 길이를 구한다.	[30%]
ⓒ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값을 구한다.	[40%]

53 답 2

세 점 A, C, B는 한 직선 위에 있으므로 $m+n=1$ ⋯ ㉠ ---------- ⓐ

한편, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$=m|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+n\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4m+n$

이고 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$는 서로 수직이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=2$ $\quad\therefore 4m+n=2$ ⋯ ㉡ ---------- ⓑ

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=\dfrac{1}{3}$, $n=\dfrac{2}{3}$이므로

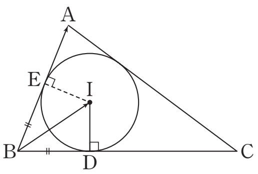
$9mn=2$ ---------- ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ m과 n 사이의 관계식 ㉠을 구한다.	[40%]
ⓑ m과 n 사이의 관계식 ㉡을 구한다.	[40%]
ⓒ m, n의 값을 각각 구하고 $9mn$의 값을 계산한다.	[20%]

54 답 120

그림과 같이 점 I에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하면



$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BD}}=8$이므로

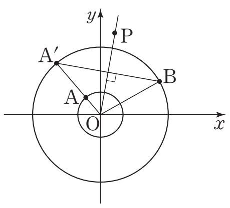
$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BI}}$

$=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BI}}|\cos(\angle\mathrm{EBI})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=15\times8=120$

55 답 7

조건 (가)의



$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$에서

$(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-3\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$

이때, $3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$인 점 A′을 잡으면

$\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$이므로 점 P는 선분 A′B의 중점을 지나고 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A'B}}$에 수직인 직선 위의 점이다.(또는 점 P는 $\angle\mathrm{AOB}$의 이등분선 위의 점이다.)

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OP}}=t(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ (단, t는 실수)

또, 조건 (나)의 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=20$에서

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=20$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=20$

$10+2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=20$

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=5$ ⋯ ㉠

한편, $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

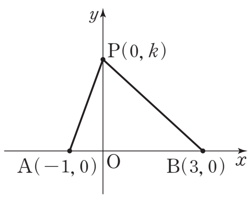
$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5$ ($\because$ ㉠)

이고 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 크기는 각각 1, 3으로 고정되어 있으므로 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 값은 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각의 크기가 최대일 때 최소이다. 즉, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 서로 평행하고 방향이 반대일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 값이 최소이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\geq1\times3\times(-1)+5=2$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 2이므로 $m=2$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 최솟값을 가질 때의 두 점 A, B를 그림과 같이 잡으면 점 P의 좌표는 $(0, k)$ 또는 $(0, -k)$이므로 조건 (나)의 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=20$에서



$(1+k^2)+(9+k^2)=20$

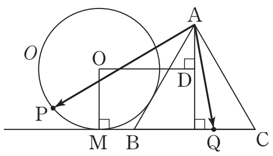
$2k^2=10$ $\quad\therefore k^2=5$

$\therefore m+k^2=2+5=7$

56 답 40

원 O의 중심을 O라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ ⋯ ㉠



(i) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 값의 범위

그림에서 $\overline{\mathrm{BM}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{\mathrm{OD}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}-1$이므로 점 A를 원점, 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선을 x축, 선분 BC의 수직이등분선을 y축으로 하는 좌표평면을 생각하면

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\left(-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, 1-\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1, -\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1, -\sqrt{3})$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

이때, $\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\leq\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\leq\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이므로

$2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\leq\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\leq4-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ⋯ ㉡

(ii) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값의 범위

두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AQ}|\cos\theta$

이때, $0\le\theta\le\pi$에서 $-1\le\cos\theta\le1$이고

$\sqrt{3}\le|\overrightarrow{AQ}|\le2$이므로 $-2\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}\le2$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값과 최솟값은 각각

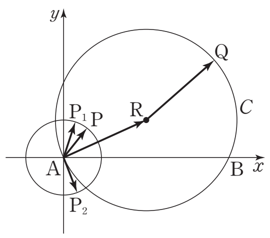
$\left(4-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+2=6-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\left(2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)-2=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$\left(6-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=6-2\sqrt{3}$

따라서 $a=6$, $b=-2$이므로 $a^2+b^2=36+4=40$

57 답 128



그림과 같이 좌표평면 위의 점 A를 A$(0, 0)$, 점 B를 B$(24, 0)$, 원 C의 중심을 R$(12, 5)$라 하자.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RQ})=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{RQ}$이고

$|\overrightarrow{AP}|=5$, $|\overrightarrow{AR}|=13$, $|\overrightarrow{RQ}|=13$이므로 $\cos\theta$의 값의 범위에 따라서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}$의 값이 최대인 경우를 구하면 다음과 같다.

(i) $\cos\theta=1$일 때,

점 P가 선분 AB 위에 있으므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}=|\overrightarrow{AP}|\times|\overrightarrow{AR}|\times\cos(\angle\mathrm{PAR})$

$=5\times13\times\frac{12}{13}=60$

(ii) $0<\cos\theta<1$일 때,

$\angle\mathrm{P_1AB}=\angle\mathrm{P_2AB}=\theta$인 제1사분면 위의 점을 $\mathrm{P_1}$, 제4사분면 위의 점을 $\mathrm{P_2}$라 하면 $\angle\mathrm{P_1AR}<\angle\mathrm{P_2AR}$이므로

$\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AR}>\overrightarrow{AP_2}\cdot\overrightarrow{AR}$

즉, 제1사분면 위의 점 P만 고려하면 된다.

이때, $\angle\mathrm{RAP}=\alpha$, $\angle\mathrm{RAB}=\beta$라 하면 $\cos\beta=\frac{12}{13}$이고,

$5\cos\theta$가 자연수이므로 $\cos\beta>\cos\theta$

따라서 $\beta<\theta$이고 $\cos\theta$의 값이 $\frac{4}{5}$일 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}$가 최댓값을 갖는다.

$\alpha=\theta-\beta$이므로

$\cos\alpha=\cos(\theta-\beta)=\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{63}{65}$

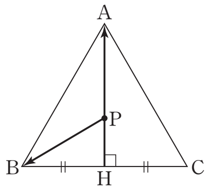
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}=|\overrightarrow{AP}|\times|\overrightarrow{AR}|\times\cos\alpha=5\times13\times\frac{63}{65}=63$

(i), (ii)에 의하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}$의 값이 최대가 되는 $\overrightarrow{AP}$에 대하여 $\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{RQ}$가 같은 방향일 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{RQ}$ 의 값이 최대이므로 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값은 $5\times13=65$이다.

즉, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{RQ}\le63+65=128$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값은 128이다.

58 답 7



$|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|=\overline{PA}\times\overline{PH}$이고

$\overline{PA}+\overline{PH}=\sqrt{3}$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\sqrt{3}=\overline{PA}+\overline{PH}\ge2\sqrt{\overline{PA}\times\overline{PH}}$에서

$\sqrt{\overline{PA}\times\overline{PH}}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore\ \overline{PA}\times\overline{PH}\le\frac{3}{4}$

따라서 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|=\overline{PA}\times\overline{PH}$의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이므로

$p=4$, $q=3$이다.

$\therefore\ p+q=7$

[다른 풀이]

점 H를 원점으로 하고 직선 BC를 x축, 직선 AH를 y축으로 하는 좌표평면을 생각하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(0, \sqrt{3})$, $(-1, 0)$이다.

이때, 점 P는 선분 AH 위의 점이므로 점 P의 좌표를

$(0, p)(0\le p\le\sqrt{3})$라 하면

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HP}=(0, \sqrt{3}-p)$, $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HP}=(-1, -p)$

이므로

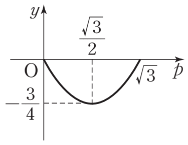
$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0\times(-1)+(\sqrt{3}-p)\times(-p)=p^2-\sqrt{3}p$

$=\left(p-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\ (0\le p\le\sqrt{3})$

이때, p에 대한 이차함수

$y=\left(p-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\ (0\le p\le\sqrt{3})$의

그래프는 그림과 같으므로



$|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$는 $p=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

$\therefore\ p+q=4+3=7$

59 답 ①

조건 (가)에 의하여 $|\overrightarrow{AH}|=2k$, $|\overrightarrow{HB}|=3k\ (k>0)$라 하면

$|\overrightarrow{AB}|=5k$

조건 (나)의 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=40$에서 $|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AH}|=40$

$5k\times2k=40$, $10k^2=40$, $k^2=4$ $\quad\therefore\ k=2(\because k>0)$

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}|=10$

조건 (다)에서 삼각형 ABC의 넓이는 30이므로

$\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{CH}|=\frac{1}{2}\times10\times|\overrightarrow{CH}|=30$ $\quad\therefore\ |\overrightarrow{CH}|=6$

한편, $\angle\mathrm{AHC}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}=|\overrightarrow{CH}|^2=36$

60 답 6

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$에서 $\vec{d}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

이 식을 조건 (나)의 $\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}$에 대입하면

$\vec{c}\cdot(-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})=(-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}$에서

$-\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{c}=-\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{a}$

$\therefore\ \vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}$

이때, 조건 (나)에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{c}$에서 $|\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2$ $\quad\therefore\ |\vec{a}|=|\vec{c}|$

같은 방법으로 $\vec{c}$를 소거하여 풀면 $|\vec{b}|=|\vec{d}|$

따라서 사각형 ABCD는 평행사변형이므로

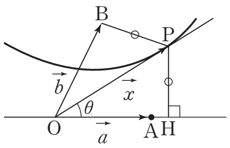
$\vec{c}=-\vec{a},\ \vec{d}=-\vec{b}$

한편, 이것을 조건 (나)에 대입하여 정리하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\vec{b}\cdot\vec{a}$에서

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 수직이다.

따라서 사각형 ABCD는 직사각형이고 조건 (가)에서 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$이므로 사각형 ABCD의 넓이는 $2\times3=6$이다.

61 답 ②



포물선 위에 점 P를 잡고

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{x}$라 하자.

점 P에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{PH}|$ … ㉠이고

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=\vec{x}-\vec{b}$ … ㉡, $\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}$ … ㉢이다.

이때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{x}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{OH}=(|\vec{x}|\cos\theta)\vec{a}=(|\vec{x}||\vec{a}|\cos\theta)\vec{a}$ $(\because\ |\vec{a}|=1)$

$\quad=(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}$

이므로 ㉢에 대입하면

$\overrightarrow{PH}=(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}-\vec{x}$ … ㉣

㉡, ㉣을 ㉠에 대입하면

$|\vec{x}-\vec{b}|=|(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}-\vec{x}|$ … ㉤

한편, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로 ㉤을 제곱하여 정리하면

$|\vec{x}|^2-2\vec{x}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=(\vec{x}\cdot\vec{a})^2|\vec{a}|^2-2(\vec{x}\cdot\vec{a})(\vec{a}\cdot\vec{x})+|\vec{x}|^2$

$\therefore\ (\underbrace{\vec{x}\cdot\vec{a}}_{(가)})^2-2\,\vec{x}\cdot\vec{b}+1=0$

62 답 ②

두 점 P, Q가 t초 동안 움직인 거리는 각각 t, $2t$이므로

이때의 중심각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면

$t=\theta_1$, $2t=2\theta_2$ $\quad\therefore\ \theta_1=\theta_2=t$

한편, t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각

$(\cos(\pi-t)+2,\ \sin(\pi-t))=(-\cos t+2,\ \sin t)$,

$(2\cos t-2,\ 2\sin t)$이므로 $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(\cos t,\ 3\sin t)$

$\therefore\ \overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OX})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OX})$

$\quad=(2-\cos t,\ -3\sin t)\cdot(-2-\cos t,\ -3\sin t)$

$\quad=\cos^2 t-4+9\sin^2 t$

$\quad=8\sin^2 t-3$

이때, $0\le\sin^2 t\le1$이므로 $-3\le8\sin^2 t-3\le5$

따라서 $\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}=8\sin^2 t-3$의 최댓값과 최솟값의 합은

$5+(-3)=2$

63 답 ⑤

ㄱ. 삼각형 ABC에서 선분 AN은 ∠CAB의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BN}:\overline{NC}=3:1$

$\therefore\ \overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AO}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\quad=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\therefore\ \overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

$\quad=\frac{1}{16}(9|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)$

$\quad=\frac{1}{16}(9\times1^2-3^2)=0$

따라서 $\overrightarrow{ON}\perp\overrightarrow{AN}$이므로 $\overrightarrow{ON}\perp\overrightarrow{AP}$ (참)

ㄷ. 삼각형 OPA는 이등변삼각형이고 $\overrightarrow{ON}\perp\overrightarrow{AP}$이므로

점 N은 선분 AP의 중점이다.

$\therefore\ \overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

한편, 점 M은 선분 BC의 중점이므로

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

이때, 삼각형 PAB의 무게중심을 G라 하면

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP})=\frac{1}{3}\left\{\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right)\right\}$

$\quad=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$

따라서 점 M은 삼각형 PAB의 무게중심이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

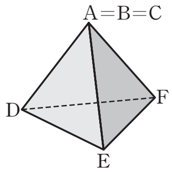
Ⅲ 공간도형과 공간좌표

05 공간도형과 공간좌표

문제편 60P

01 답 ③

주어진 전개도로 만들어지는 정사면체는 그림과 같다.



즉, 모서리 AD와 꼬인 위치에 있는 모리서는 EF이다.

02 답 ④

ㄱ. $\alpha /\!/ \beta$, $\beta /\!/ \gamma$이면 $\alpha /\!/ \gamma$이다. (참)

ㄴ. 두 직선 l과 m이 한 점에서 만나거나 꼬인 위치에 있는 경우에도 평면 α와 평행할 수 있다. (거짓)

ㄷ. $l /\!/ m$이고 $m \in \alpha$, $l \notin \alpha$이므로 직선 l은 평면 α와 만나지 않는다. 즉, $l /\!/ \alpha$ (참)

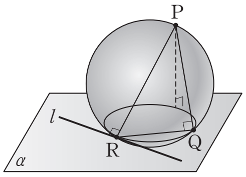
ㄹ. $l /\!/ \alpha$이므로 직선 l과 평면 α는 만나지 않는다. 따라서 직선 l은 평면 α 위의 직선 m과 만나지 않는다. 그런데 두 직선 l, m은 평면 β 위에 있으므로 $l /\!/ m$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

03 답 ②

ㄱ, ㄴ. 삼수선의 정리에 의하여 참이다.

ㄷ. 그림과 같이 선분 PR를 지름으로 하는 구와 평면 α의 교선인 원 위에 점 Q가 있을 경우 $\overline{\mathrm{PR}} \perp l$이고 $\overline{\mathrm{PQ}} \perp \overline{\mathrm{QR}}$이지만 항상 $\overline{\mathrm{PQ}} \perp \alpha$라고 할 수 없다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 답 ④

사각형 BFGC가 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{CF}} \perp \overline{\mathrm{BG}}$ ⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{GH}} \perp \overline{\mathrm{CG}}$, $\overline{\mathrm{GH}} \perp \overline{\mathrm{FG}}$이므로 $\overline{\mathrm{GH}} \perp$ $\underbrace{\text{(평면 BFGC)}}_{\text{(가)}}$

$\therefore \overline{\mathrm{CF}} \perp \overline{\mathrm{GH}}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\underbrace{\overline{\mathrm{CF}} \perp \text{(평면 ABGH)}}_{\text{(나)}}$ $\therefore \overline{\mathrm{CF}} \perp \overline{\mathrm{AG}}$ ⋯ ㉢

같은 방법으로 $\overline{\mathrm{CH}} \perp$ $\underbrace{\overline{\mathrm{AG}}}_{\text{(다)}}$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $\overline{\mathrm{AG}} \perp$(평면 CHF)

05 답 4

정삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AM}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{PA}} \perp \alpha$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PM}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$이다.

이때, 직각삼각형 PMA에서 $\overline{\mathrm{PA}}=2$, $\overline{\mathrm{AM}}=2\sqrt{3}$이므로 점 P와 직선 BC 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{PA}}^2}=\sqrt{12+4}=4$

06 답 5

평면 HFG와 평면 EFG는 같은 평면이다.

이때, 꼭짓점 F에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 P라 하면

$\triangle\mathrm{EFG}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FP}}\times\overline{\mathrm{EG}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EF}}\times\overline{\mathrm{FG}}$에서

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FP}}\times5\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times10\times5 \qquad \therefore \overline{\mathrm{FP}}=2\sqrt{5}$

또한, $\overline{\mathrm{BF}}\perp$(평면 EFG), $\overline{\mathrm{FP}}\perp\overline{\mathrm{EG}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{BP}}\perp\overline{\mathrm{EG}}$이고 $\theta=\angle\mathrm{BPF}$이다.

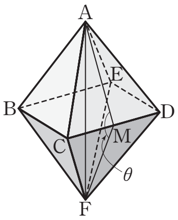
따라서 직각삼각형 BFP에서

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{BF}}^2}=\sqrt{20+25}=3\sqrt{5}$이므로

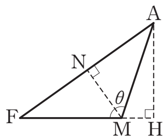
$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{FP}}}{\overline{\mathrm{BP}}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p+q=5$

07 답 ④



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]과 같이 모서리 CD의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{FM}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\angle\mathrm{AMF}$의 크기가 정팔면체 ABCDEF의 이웃하는 두 면이 이루는 각의 크기 θ이다.

이때, [그림 2]와 같이 삼각형 AFM의 변 AF의 중점을 N, 점 A에서 변 FM의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하고, 정팔면체의 한 변의 길이를 $2a$라 하면 $\overline{\mathrm{FM}}=\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3}a$, $\overline{\mathrm{AF}}=2\sqrt{2}a$, $\overline{\mathrm{MN}}=a$

이고 $\triangle\mathrm{AFM}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FM}}\times\overline{\mathrm{AH}}$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{MN}}}{\overline{\mathrm{FM}}}=\frac{2\sqrt{2}a\times a}{\sqrt{3}a}=\frac{2\sqrt{6}}{3}a$

또, 직각삼각형 AMH에서

$\overline{\mathrm{MH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{3a^2-\frac{8}{3}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$이므로

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{MH}}}{\overline{\mathrm{AM}}}=\frac{1}{3} \qquad \therefore \cos\theta=-\frac{1}{3}$

08 답 ②

평면 α 위의 한 변의 길이가 2인 정육각형의 넓이를 S라 하면

$S=6\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\right)=6\sqrt{3}$

이때, 평면 α 위의 정육각형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면 $S'=3\sqrt{3}$이고 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 θ이므로

$S'=S\cos\theta$에서 $3\sqrt{3}=6\sqrt{3}\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

09 답 ①

두 평면 ABC, DEF가 평행하므로 두 평면 ABC와 BEF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{3}$(7번 문항 참고)이다.

따라서 삼각형 ABC의 평면 BEF 위로의 정사영의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times\cos\theta=\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

10 답 ④

점 P$(2,\ a,\ b)$를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 $(-2,\ a,\ b)$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(a-a)^2+(b-b)^2}=4$

11 답 ⑤

사각형 ABCD가 직사각형이고 두 점 B, D가 원점에 대하여 대칭이므로 두 점 A, C도 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 $a=3$, $b=-1$, $c=2$이므로 $a-b+c=6$

일등급 UP

*** 좌표공간에서의 점의 대칭이동**

좌표공간의 임의의 점 P에 대하여

(1) 점 P의 x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 y좌표, z좌표의 부호를 바꾼다.
(2) 점 P의 y축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 x좌표, z좌표의 부호를 바꾼다.
(3) 점 P의 z축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 x좌표, y좌표의 부호를 바꾼다.
(4) 점 P의 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 x좌표, y좌표, z좌표의 부호를 바꾼다.
(5) 점 P의 xy평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는 z좌표의 부호를 바꾼다.
(6) 점 P의 yz평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는 x좌표의 부호를 바꾼다.
(7) 점 P의 zx평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는 y좌표의 부호를 바꾼다.

12 답 ③

두 점 A$(3,\ a,\ -2)$, B$(5,\ -2,\ b)$를 $2:1$로 내분하는 점이 x축 위에 있으므로 내분점의 y좌표와 z좌표가 0이어야 한다.

즉, $\frac{2\times(-2)+1\times a}{2+1}=\frac{a-4}{3}=0$에서 $a=4$

$\frac{2\times b+1\times(-2)}{2+1}=\frac{2b-2}{3}=0$에서 $b=1$

$\therefore\ a+b=5$

13 답 ④

세 점 A$(a,\ 0,\ 3)$, B$(3,\ b,\ -1)$, C$(-4,\ 1,\ c)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a+3-4}{3},\ \frac{0+b+1}{3},\ \frac{3-1+c}{3}\right)=(-1,\ 1,\ 0)$

이므로 $a=-2$, $b=2$, $c=-2$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=12$

14 답 ④

좌표공간에 중심이 $(a,\ b,\ c)$이고 원점을 지나는 구의 반지름의 길이를 r라 하면 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

이때, 이 구가 원점을 지나므로 $a^2+b^2+c^2=r^2$이다.

$\therefore\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2$

한편, 이 구와 xy평면의 교선의 방정식은 $z=0$을 대입하면

$(x-a)^2+(y-b)^2+c^2=a^2+b^2+c^2$에서

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$이고 이 원의 반지름의 길이가 3이므로

$a^2+b^2=3^2$ … ㉠

마찬가지로 구와 yz평면의 교선의 방정식은 $x=0$을 대입하면

$(y-b)^2+(z-c)^2=b^2+c^2$이고 이 원의 반지름의 길이가 4이므로

$b^2+c^2=4^2$ … ㉡

또, 구와 zx평면의 교선의 방정식은 $y=0$을 대입하면

$(x-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$이고 이 원의 반지름의 길이가 5이므로

$a^2+c^2=5^2$ … ㉢

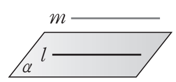
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a^2=9$, $b^2=0$, $c^2=16$

이때, $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$이므로 $a=3$, $b=0$, $c=4$

$\therefore\ a+b+c=7$

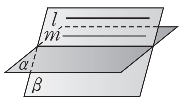
15 답 ①

ㄱ. 두 직선 l, m이 평행할 때, 직선 l을 포함하고 직선 m을 포함하지 않는 평면 α는 직선 m과 평행하다. (참)



ㄴ. 두 직선 l, m이 꼬인 위치에 있을 수 있다. (거짓)

ㄷ. 평면 α에 평행한 두 직선 l, m에 의하여 결정되는 평면 β는 평면 α와 교선을 가질 수 있다. (거짓)

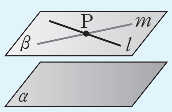


따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

일등급 UP

*** 두 직선에 의하여 결정되는 평면과 다른 평면이 평행하기 위한 조건**

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P를 지나고 평면 α에 평행한 두 직선 l, m에 의하여 결정되는 평면 β는 평면 α와 평행하다.



16 답 ④

정 n각기둥에서 밑면의 한 모서리와 꼬인 위치에 있는 모서리는

(i) n이 홀수, 즉 $n=2k-1$ (k는 자연수)일 때,

밑면의 한 모서리와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수는 옆면에 $(n-2)$개, 윗면에 $(n-1)$개이므로

$a_n=(n-2)+(n-1)=2n-3$에서 $a_{2k-1}=4k-5$

따라서 $k=3$일 때 $a_5=7$이고 $k=4$일 때 $a_7=11$

(ii) n이 짝수, 즉 $n=2k$ (k는 자연수)일 때,

밑면의 한 모서리와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수는 옆면에 $(n-2)$개, 윗면에 $(n-2)$개이므로

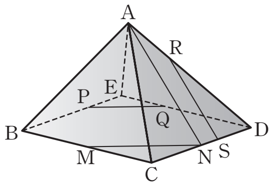
$a_n=(n-2)+(n-2)=2n-4$에서 $a_{2k}=4k-4$

따라서 $k=5$일 때 $a_{10}=16$, $k=6$일 때 $a_{12}=20$

$\therefore a_5+a_7+a_{10}+a_{12}=7+11+16+20=54$

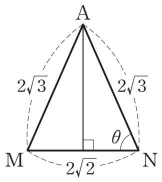
17 답 15

그림과 같이 두 모서리 BC, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면 $\overline{PQ} \,/\!/\, \overline{MN}$, $\overline{RS} \,/\!/\, \overline{AN}$이므로 두 선분 PQ, RS가 이루는 각의 크기 θ는 두 선분 MN, AN이 이루는 각의 크기와 같다.



$\therefore \theta=\angle \mathrm{ANM}$

한편, 이등변삼각형 AMN의 세 변의 길이가 그림과 같으므로



$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$\therefore 90\cos^2\theta=90\times\dfrac{1}{6}=15$

18 답 ②

두 삼각형 ABC, ACD가 각각 $\angle B$, $\angle C$가 60°인 직각삼각형이므로 $\overline{CD}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $\overline{AC}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, $\overline{BC}=\dfrac{8}{3}$

이때, $\overline{AD}\perp\overline{BD}$, $\overline{AD}\perp\overline{CD}$에서 $\overline{AD}\perp$(평면 BCD)이고 $\overline{AC}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CD}\perp\overline{BC}$이다.

즉, 삼각형 BCD는 $\angle C$가 90°인 직각삼각형이므로 사면체 ABCD의 부피를 V라 하면

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle \mathrm{BCD}\times\overline{AD}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BC}\right)\times\overline{AD}$$
$$=\frac{64\sqrt{3}}{27}$$

19 답 ④

$\overline{AD}\perp\alpha$, $\overline{DB}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$

즉, 삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\triangle \mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$ ⋯ ㉠

한편, 두 선분 AB, BD가 이루는 각의 크기가 60°이므로

$\overline{AB}=2\overline{BD}$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠에 의하여

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 2\overline{BD}\times\overline{BC}\ (\because ㉡)$$
$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{BC}\right)=2\times\triangle \mathrm{BCD}=2S$$

20 답 ③

$\overline{AE}\perp$(평면 EFGH)이고 $\overline{AI}\perp\overline{MH}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{EI}\perp\overline{MH}$

따라서 삼각형 EMH의 넓이에 의하여

$\triangle \mathrm{EMH}=\dfrac{1}{2}\times\overline{MH}\times\overline{EI}=\dfrac{1}{2}\times\overline{EH}\times\overline{GH}$에서

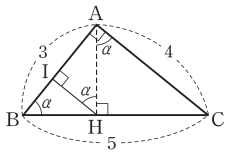
$\dfrac{1}{2}\times5\sqrt{5}\times\overline{EI}=\dfrac{1}{2}\times10\times10$

$\therefore \overline{EI}=4\sqrt{5}$

21 답 ②

점 H에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CI}\perp\overline{AB}$이고 두 선분 AB, AC가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta=\dfrac{\overline{AI}}{\overline{AC}}$이다.

한편, $\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{CAH}=\angle \mathrm{AHI}=\alpha$라 하면 두 직각삼각형 AIH, AHC에서 $\overline{AI}=\overline{AH}\sin\alpha=\overline{AC}\cos\alpha\sin\alpha$이므로



$\cos\theta=\dfrac{\overline{AI}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AC}\cos\alpha\sin\alpha}{\overline{AC}}=\cos\alpha\sin\alpha$이고 직각삼각형 ABC에서 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$이므로 $\cos\theta=\dfrac{12}{25}$

[다른 풀이]

직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발이 H이므로

$\triangle \mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$에서

$\dfrac{1}{2}\times3\times4=\dfrac{1}{2}\times5\times\overline{AH}$

$\therefore \overline{AH}=\dfrac{12}{5}$

또, $\overline{BH}=a$라 하면 $\overline{HC}=5-a$이므로 두 직각삼각형 ABH, AHC에서 피타고라스 정리에 의하여

$3^2-a^2=4^2-(5-a)^2$에서 $a=\dfrac{9}{5}$

$\therefore \overline{BH}=\dfrac{9}{5}$

한편, 접은 도형의 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AB}\perp\overline{HI}$이고 $\overline{AI}=b$라 하면 $\overline{IB}=3-b$이므로 두 직각삼각형 AIH, HIB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\left(\dfrac{12}{5}\right)^2-b^2=\left(\dfrac{9}{5}\right)^2-(3-b)^2$에서 $b=\dfrac{48}{25}$

$\therefore \overline{AI}=\dfrac{48}{25}$

따라서 두 선분 AB, AC가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 직각삼각형 AIC에서

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AI}}{\overline{AC}}=\dfrac{\frac{48}{25}}{4}=\dfrac{12}{25}$

22 답 7

두 평면 BFGC, AEHD가 서로 평행하므로 두 평면 BDE, BFGC가 이루는 각의 크기 θ는 두 평면 BDE, AEHD가 이루는 각의 크기와 같다.

이때, 두 평면 BDE, AEHD의 교선이 선분 DE이고

$\overline{AB}\perp$(평면 AEHD)이므로 꼭짓점 A에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 P라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{BP}\perp\overline{DE}$이다.

한편, $\triangle AED=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{AP}$에서

$\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\overline{AP}\qquad\therefore\ \overline{AP}=\sqrt{6}$

또, 직각삼각형 ABP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BP}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AP}^2}=\sqrt{9+6}=\sqrt{15}$이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$에서 $\cos^2\theta=\frac{2}{5}$

따라서 $p=5$, $q=2$이므로 $p+q=7$

23 답 5

두 평면 α, β가 이루는 각의 크기 θ는 두 선분 PB, QB가 이루는 각의 크기와 같고 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발이 Q이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{QB}}{\overline{PB}}$

이때, $\overline{AB}=a$라 하면 $\overline{PB}=a\tan60^\circ=\sqrt{3}a$이고

$\overline{BQ}=a\tan45^\circ=a$이므로 $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p+q=5$

24 답 ①

$\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{AD}=\sqrt{14}$, $\overline{BD}=\sqrt{6}$에서

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2$이므로 삼각형 ABD는 선분 AD를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

한편, 점 D의 평면 β 위로의 정사영인 점 C에 대하여 삼각형 ABC는 선분 AC를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로

$$\cos\theta=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABD}=\frac{\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

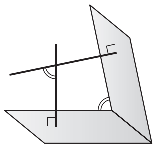
$\therefore\ 3\cos^2\theta=1$

[다른풀이]

$\overline{DC}\perp\beta$, $\overline{CB}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{DB}\perp\overline{AB}$이다. 즉, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기 θ는 두 선분 BD, BC가 이루는 각의 크기와 같다.

따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$이므로 $3\cos^2\theta=1$

25 답 ③

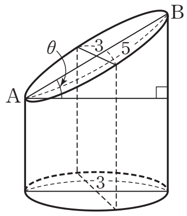


그림과 같이 두 평면이 이루는 각의 크기는 각각의 평면에 수직인 직선이 이루는 각의 크기와 같다.

이때, 정육면체 ABCD$-$EFGH에서 평면 AFG에 수직인 선분은 $\overline{BE}$, 평면 AGH에 수직인 선분은 $\overline{DE}$이고 삼각형 BED가 정삼각형이므로 두 선분 BE, DE가 이루는 예각의 크기는 60°이다. 즉, 두 평면 AFG, AGH가 이루는 각의 크기는 60°이고 삼각형 AFG의 넓이는 $2\sqrt{2}$이므로 삼각형 AFG의 평면 AGH 위로의 정사영의 넓이는

$2\sqrt{2}\times\cos60^\circ=\sqrt{2}$

26 답 ①



그림과 같이 지름의 길이가 3인 원기둥을 단면이 장축의 길이가 5, 단축의 길이가 3인 타원이 되도록 비스듬히 자르자.

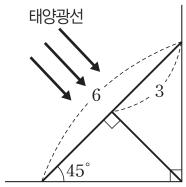
이때, 단면과 밑면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{3}{5}$

한편, 단면인 타원의 밑면으로의 정사영은 밑면인 원이므로 타원의 넓이를 S라 하면 $S\cos\theta=\left(\frac{3}{2}\right)^2\pi$에서

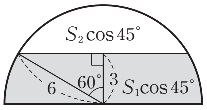
$S=\left(\frac{3}{2}\right)^2\pi\times\frac{1}{\cos\theta}=\frac{9}{4}\pi\times\frac{5}{3}=\frac{15}{4}\pi$

27 답 ④

반원판과 평면 β의 교점을 지나며 직선 l에 수직인 평면으로 자른 단면은 [그림 1]과 같다. 또, 반원판과 두 평면이 이루는 각의 크기가 모두 45°이므로 반원판 위의 영역을 구분하면 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$S_1\cos45^\circ=2\times\left(\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{6}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{3}\right)=6\pi+9\sqrt{3}$

$\therefore\ S_1=6\sqrt{2}\pi+9\sqrt{6}$

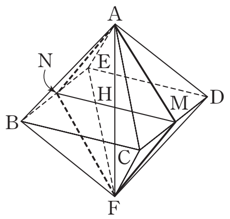
$S_2\cos45^\circ=\frac{1}{2}\times\pi\times6^2-S_1\cos45^\circ=12\pi-9\sqrt{3}$

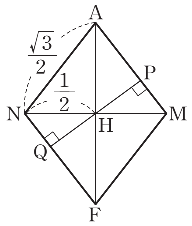
$\therefore\ S_2=12\sqrt{2}\pi-9\sqrt{6}$

따라서 $S_1-S_2=18\sqrt{6}-6\sqrt{2}\pi$이므로 $a=18$, $b=6$

$\therefore\ a+b=24$

28 답 ⑤





그림과 같이 선분 CD의 중점을 M, 선분 BE의 중점을 N이라 하고 두 선분 AF, MN의 교점을 H라 하면

$\overline{AM}=\overline{AN}=\overline{FM}=\overline{FN}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AF}=2\overline{AH}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$, $\overline{MN}=1$

따라서 사각형 ANFM은 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 두 대각선의 길이가 각각 $\sqrt{2}$, 1인 마름모이다.

이때, 마주 보는 평행한 두 면 ACD, BFE 사이의 거리는 평행한 두 선분 AM과 FN 사이의 거리인 선분 PQ의 길이와 같다.

마름모 ANFM의 넓이를 S라 하면

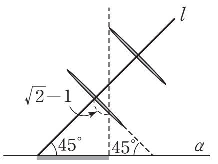
$S=\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{MN}=\overline{FN}\times\overline{PQ}$에서

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{PQ}$

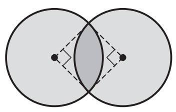
$\therefore \overline{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

29 답 ③

단면화하면 [그림 1]과 같다.



[그림 1]



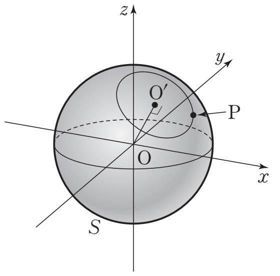
[그림 2]

위쪽의 원판을 태양광선의 방향으로 평행이동하여 겹치면 [그림 2]와 같고 이 평면도형이 평면 α와 이루는 각의 크기가 45°이므로 그림자의 넓이는

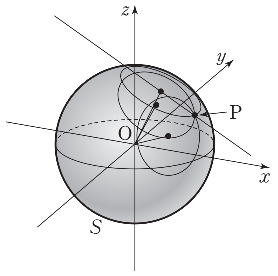
$2\times\left(\frac{3}{4}\times\pi\times1^2+\frac{1}{2}\times1\times1\right)\times\cos 45°=\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}$

30 답 7

[그림 1]과 같이 원점을 O, 원 C의 중심을 O′이라 하면 직선 OO′은 원 C를 포함하는 평면에 수직이다. 따라서 원 C를 포함하는 평면과 xy평면이 이루는 각의 크기는 직선 OO′와 z축이 이루는 각의 크기와 같다. 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이가 최대가 되려면 두 평면이 이루는 각의 크기가 최소일 때이다. [그림 2]와 같이 직선 PO′이 z축과 만나는 상황에서 각의 크기가 최소가 됨을 알 수 있다.

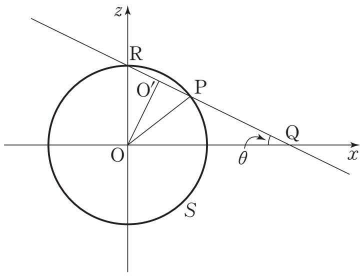


[그림 1]



[그림 2]

두 평면이 이루는 각의 크기가 최소가 되는 상황의 xz평면의 상황은 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

직선 PO′이 x축, z축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하고 $\angle PQO=\theta$라 하자.

$\overline{PO'}=1$, $\overline{OP}=2$이므로 삼각형 OPR는 정삼각형이고 $\theta=\frac{\pi}{6}$이다.

따라서 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은

$\pi\times1^2\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$이므로 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore k^2=\frac{3}{4}$

$\therefore p+q=4+3=7$

일등급 UP

＊정사영의 넓이의 최대, 최소

평면 α 위에 넓이 S가 일정한 도형의 평면 α와 이루는 각의 크기가 θ인 평면 β로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$S'=S\cos\theta\ (0°\le\theta\le90°)$이고 S가 일정하므로 S'의 값은 $\cos\theta$의 값에 의하여 결정된다.

이때, $0°\le\theta\le90°$에서 함수 $y=\cos\theta$는 감소하므로 S'의 값은 θ가 최소일 때 최대이고, θ가 최대일 때 최소이다.

31 답 ④

두 점 A, B의 좌표가 각각 $(4,\ -1,\ -1)$, $(1,\ 3,\ a)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(-1-3)^2+(-1-a)^2}=\sqrt{a^2+2a+26}$

이때, 두 점 A, B의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면 두 점 A′, B′의 좌표는 각각 $(4,\ -1,\ 0)$, $(1,\ 3,\ 0)$이므로

$\overline{A'B'}=\sqrt{(4-1)^2+(-1-3)^2+(0-0)^2}=5$

한편, $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos 45°$에서 $5=\sqrt{a^2+2a+26}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{a^2+2a+26}=5\sqrt{2}$, $a^2+2a+26=50$, $a^2+2a-24=0$

$(a+6)(a-4)=0$ $\quad\therefore a=4\ (\because a>0)$

[다른풀이]

직선 AB와 xy평면이 이루는 각의 크기가 $45°$이므로 선분 AB의 xy평면으로의 정사영의 길이와 z성분의 변화량의 비율이 $1:1$이다.

즉, $\sqrt{(4-1)^2+(-1-3)^2+(0-0)^2}=|-1-a|$에서

$|a+1|=5$, $a+1=\pm5$ $\quad\therefore a=4\ (\because a>0)$

32 답 ④

점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PO}}\perp(xy\text{평면})$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이다.

이때, 삼각형 OAB의 넓이에 의하여

$\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}$이므로 $\overline{\mathrm{OH}}\times4=2\times2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3}$

한편, 점 P와 직선 AB 사이의 거리는 선분 PH의 길이이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PO}}^2+\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

33 답 2

점 P는 두 점 B$(0, 3, 0)$, C$(0, 0, 9)$에 대하여 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로 P$(0, 1, 6)$

또, 점 Q는 두 점 A$(6, 0, 0)$, C$(0, 0, 9)$에 대하여 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로 Q$(4, 0, 3)$

한편, 두 점 P, Q의 xy평면 위로의 정사영 P$'$, Q$'$의 좌표는 각각 $(0, 1, 0)$, $(4, 0, 0)$이고 $\overline{\mathrm{OP'}}\perp\overline{\mathrm{OQ'}}$이므로

$\triangle\mathrm{OP'Q'}=\dfrac{1}{2}\times1\times4=2$

[다른풀이]

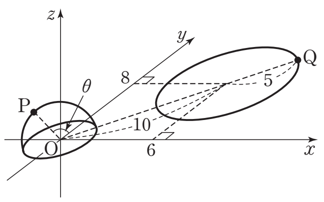
내분점의 정사영과 정사영의 내분점이 같으므로 세 점 A$(6, 0, 0)$, B$(0, 3, 0)$, C$(0, 0, 9)$의 xy평면 위로의 정사영 A$'(6, 0, 0)$, B$'(0, 3, 0)$, C$'(0, 0, 0)$에 대하여 선분 B$'$C$'$을 $2:1$로 내분하는 점 P$'$의 좌표는 $(0, 1, 0)$이고 선분 A$'$C$'$을 $1:2$로 내분하는 점 Q$'$의 좌표는 $(4, 0, 0)$이다.

(이하 동일)

34 답 17

구 $(x-6)^2+(y-8)^2+z^2=25$와 xy평면의 교선은 중심의 좌표가 $(6, 8, 0)$이고 반지름의 길이가 5인 xy평면 위의 원이고,

점 P의 z좌표가 $z\geq0$이라 해도 일관성을 잃지 않으므로 그림과 같이 나타낼 수 있다.



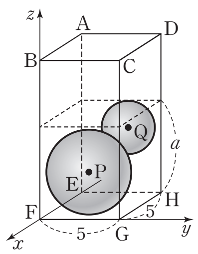
선분 OP의 길이가 2로 일정하므로 선분 PQ의 길이가 최대일 때 두 선분 OP, OQ가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\theta=\pi$이고 선분 OQ의 길이가 최대일 때이다. 따라서 선분 PQ의 길이의 최댓값은

$2+\sqrt{6^2+8^2}+5=17$

35 답 ②

점 F를 원점으로 하고 세 선분 EF, FG, FB를 각각 x축, y축, z축으로 하는 좌표축을 잡자.

또, 밑면으로부터 작은 공의 가장 높은 점까지의 높이를 a라 하자.



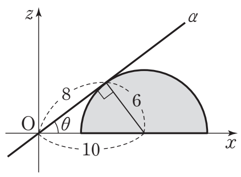
a가 최솟값을 가지려면 그림과 같이 두 공은 각각 두 벽면에 접해야 한다. 이때, 큰 공의 중심의 좌표는 P$(-2, 2, 2)$, 작은 공의 중심의 좌표는 Q$(-4, 4, a-1)$이고 두 공이 서로 외접하므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=3$에서

$\sqrt{(-4+2)^2+(4-2)^2+(a-3)^2}=3$, $(a-3)^2=1$

$\therefore a=4\ (\because a>2)$

36 답 ④

y축을 포함하는 평면은 y축에서 내려다보면 원점을 지나는 직선이 된다. 단면화를 시키면 그림과 같다.



따라서 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$이므로 $10\cos\theta=8$

37 답 ④

평면 PQR가 두 선분 AD, BC와 평행하므로

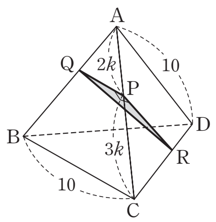
$\overline{\mathrm{BC}}/\!/\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{AD}}/\!/\overline{\mathrm{PR}}$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}\sim\triangle\mathrm{AQP}$, $\triangle\mathrm{ACD}\sim\triangle\mathrm{PCR}$

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}=10$이고,

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PC}}=2:3$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=4$, $\overline{\mathrm{PR}}=6$



한편, $\overline{\mathrm{AD}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\overline{\mathrm{PR}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$

따라서 삼각형 PQR는 $\angle\mathrm{P}=90°$이고

$\overline{\mathrm{PQ}}=4$, $\overline{\mathrm{PR}}=6$인 직각삼각형이므로

$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\times4\times6=12$

38 답 ⑤

ㄱ. 두 직선 l과 m이 한 평면을 결정하지 못하므로 꼬인 위치에 있다. (참)

ㄴ. $m /\!/ \overline{AC}$, $\overline{AC} \perp$(평면 BFHD)이므로

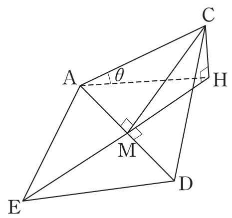
$m \perp$(평면 BFHD)

또한, 직선 l은 평면 BFHD에 포함되므로 $l \perp m$ (참)

ㄷ. 직선 l과 꼬인 위치에 있는 정육면체의 모서리의 개수의 최솟값은 직선 l이 두 점 B, F 중 한 꼭짓점과 두 점 D, H 중 한 꼭짓점을 지날 때 6개이고, 최댓값은 직선 l이 네 꼭짓점 B, D, F, H를 지나지 않을 때 10개이다. (참)

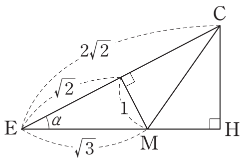
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

39 답 ④



점 C에서 평면 AED에 내린 수선의 발을 H, 점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HM} \perp \overline{AD}$

또, 점 E에서 선분 AD에 내린 수선의 발이 M이므로 E, M, H는 한 직선 위의 점이다.



한편, $\angle CEH = \alpha$라 하면

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\overline{CH}}{2\sqrt{2}}$에서

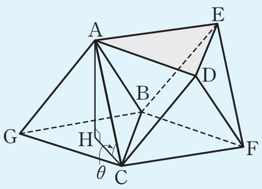
$\overline{CH} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

일등급 UP

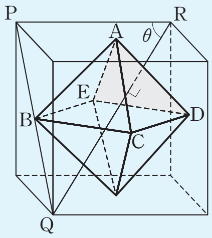
*정팔면체를 이용하여 $\sin\theta$의 값 구하기

(1) 모서리의 길이가 같은 정사각뿔은 정팔면체의 일부이고 정팔면체와 정사면체의 관계를 이용하면 그림과 같이 평면 AED와 평면 GCB가 평행하므로 점 A에서 평면 GCB에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\theta = \angle ACH$이다.



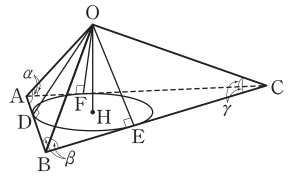
$\therefore \sin\theta = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(2) 모든 모서리의 길이가 a인 정육면체의 각 면의 중점을 연결한 정팔면체를 생각하면 그림과 같이 $\overline{AC} /\!/ \overline{PQ}$, (평면 AED)$\perp\overline{QR}$이므로 $\theta = \angle QRP$이다.



$\therefore \sin\theta = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

40 답 2



꼭짓점 O에서 세 모서리 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HD} \perp \overline{AB}$, $\overline{HE} \perp \overline{BC}$, $\overline{HF} \perp \overline{CA}$

한편, 점 H가 삼각형 ABC의 내심이므로

$\overline{HD} = \overline{HE} = \overline{HF}$이고 $\triangle OHD \equiv \triangle OHE \equiv \triangle OHF$ (SAS 합동)

따라서 $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$이므로 $\triangle OFA \equiv \triangle ODA$,

$\triangle ODB \equiv \triangle OEB$, $\triangle OEC \equiv \triangle OFC$이다.

이때, $\angle OAF = \angle OAD = \alpha$, $\angle OBD = \angle OBE = \beta$,

$\angle OCE = \angle OCF = \gamma$라 하면

$\alpha + \beta = 180° - 75° = 105°$

$\beta + \gamma = 180° - 105° = 75°$

$\gamma + \alpha = 180° - 90° = 90°$

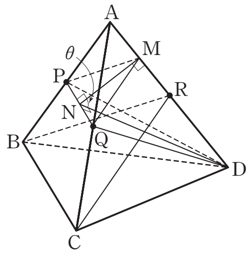
연립하여 풀면 $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 30°$

따라서 $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = k$라 하면

$a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}k$, $b = \sqrt{2}k$, $c = 2k$이므로

$\dfrac{3a^2 + 2b^2}{c^2} = \dfrac{4k^2 + 4k^2}{4k^2} = 2$

41 답 13



선분 AR의 중점을 M이라 하면 평면 PQM은 평면 BCR와 평행하고 (평면 BCR)$\perp\overline{AD}$이므로 (평면 PQM)$\perp\overline{AD}$이다.

한편, 두 평면 PQM과 PQD의 교선이 직선 PQ이므로 선분 PQ의 중점을 N이라 하면 $\angle DNM$이 두 평면 BCR와 PQD가 이루는 예각의 크기 θ이다.

이때, 직각삼각형 NQM에서 $\overline{QN} = 1$, $\overline{QM} = \sqrt{3}$이므로

$\overline{MN} = \sqrt{2}$이고, 직각삼각형 MND에서 $\overline{MN} = \sqrt{2}$, $\overline{MD} = 3$이므로

$\overline{DN} = \sqrt{11}$이다.

따라서 $\cos\theta = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{DN}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$이므로 $\cos^2\theta = \dfrac{2}{11}$

즉, $p = 11$, $q = 2$이므로 $p + q = 13$

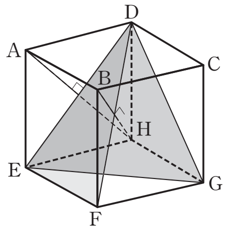
[다른 풀이]
두 선분 BR, DP의 교점을 S, 두 선분 CR, DQ의 교점을 T라 하면 두 평면 BCR와 PQD의 교선은 직선 ST이다. 이때, 선분 ST의 중점 U에 대하여 $\overline{ST}\perp\overline{RU}$, $\overline{ST}\perp\overline{DU}$이므로 두 평면 BCR와 PQD가 이루는 예각의 크기 $\theta=\angle DUR$이다.
한편, $\overline{BR}\perp\overline{AD}$, $\overline{CR}\perp\overline{AD}$에서 (평면 BCR)$\perp\overline{AD}$이므로
$\overline{RU}\perp\overline{DR}$
또한, $\overline{RU}=2\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\overline{DU}=\sqrt{11}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{11}}{3}$이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{RU}}{\overline{DU}}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{2\sqrt{11}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ $\qquad\therefore \cos^2\theta=\frac{2}{11}$

따라서 $p=11$, $q=2$이므로 $p+q=13$

42 답 5

(평면 DEF)$\perp\overline{AH}$, (평면 DEG)$\perp\overline{BH}$에서 두 평면 DEF, DEG가 이루는 각의 크기는 두 선분 AH, BH가 이루는 각의 크기와 같다.

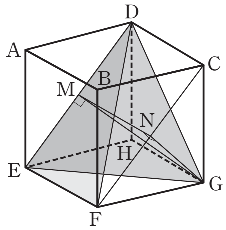


이때, 삼각형 HAB는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이므로 $\theta=\angle BHA$이고 정육면체 ABCD$-$EFGH의 한 모서리의 길이를 1이라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\qquad\therefore \cos^2\theta=\frac{2}{3}$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p+q=5$

[다른 풀이]
두 평면 DEF, DEG의 교선은 직선 DE이다. 선분 DE의 중점을 M, 선분 CF의 중점을 N이라 하면
$\overline{DE}\perp\overline{EF}$, $\overline{EF}\,/\!/\,\overline{MN}$, $\overline{DE}\perp\overline{GM}$이므로 $\theta=\angle GMN$이다.



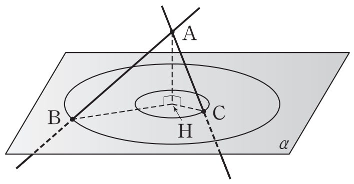
한편, 삼각형 GMN은 $\angle N=90^\circ$인 직각삼각형이고 정육면체 ABCD$-$EFGH의 한 모서리의 길이를 1이라 하면 $\overline{MN}=1$, $\overline{GN}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{GM}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{MN}}{\overline{GM}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\qquad\therefore \cos^2\theta=\frac{2}{3}$

(이하 동일)

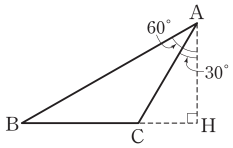
43 답 ④

ㄱ. 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=3$, $\overline{AB}=6$이므로 점 B는 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$인 원 위의 점이다.



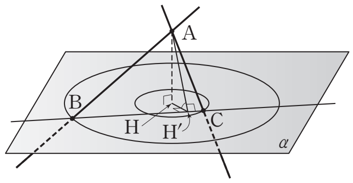
마찬가지로 $\overline{AH}=3$, $\overline{AC}=2\sqrt{3}$이므로 점 C는 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원 위의 점이다. 따라서 선분 BC의 길이의 최댓값은 세 점 B, H, C가 차례로 일직선이 될 때 $3\sqrt{3}+\sqrt{3}=4\sqrt{3}$이다. (참)

ㄴ. 예각 θ_1에 대하여 $\sin\theta_1$의 최솟값은 θ_1이 최소일 때이므로 세 점 B, C, H가 차례로 일직선이 될 때이다.



이때, 직각삼각형 ABH에서
$\overline{AB}=6$, $\overline{AH}=3$이므로 $\angle BAH=60^\circ$이고 직각삼각형 ACH에서 $\overline{AC}=2\sqrt{3}$, $\overline{AH}=3$이므로 $\angle CAH=30^\circ$이다.
따라서 θ_1의 최솟값은 30°이므로 $\sin\theta_1$의 최솟값은
$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$이다. (거짓)

ㄷ. 평면 ABC와 평면 α의 교선이 직선 BC이므로 점 H에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\theta_2=\angle AH'H$이다.

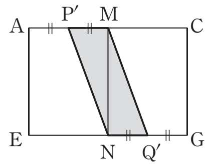


이때, $\cos\theta_2$의 최댓값은 선분 HH′의 길이가 최대가 될 때이다.
($\because$ $\tan\theta_2$가 최소일 때 θ_2가 최소)
한편, 두 점 H′, C가 일치할 때, 선분 HH′의 길이의 최댓값이 $\sqrt{3}$이고 $\cos\theta_2$의 최댓값은 $\frac{\overline{HH'}}{\overline{AH'}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

44 답 ⑤

사각형 PBQH는 $\overline{BH}=\sqrt{3}$, $\overline{PQ}=\sqrt{2}$인 마름모이므로 마름모 PBQH의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

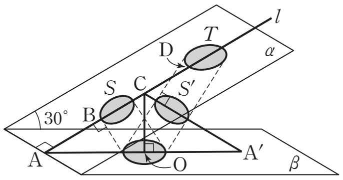


한편, 사각형 ABCD의 두 대각선 BD, AC의 교점을 M, 사각형 EFGH의 두 대각선 EG, FH의 교점을 N이라 하면 각각의 두 대각선은 서로 수직이므로 점 B의 평면 AEGC 위로의 정사영 B′은 점 M이다. 또한, 점 P는 선분 AD의 중점이므로 점 P의 정사영 P′은 선분 AM의 중점이 된다.
따라서 마름모 PBQH의 평면 AEGC 위로의 정사영은 그림에서 사각형 P′NQ′M이고 직사각형 AEGC의 넓이가 $\sqrt{2}$이므로
사각형 P′NQ′M의 넓이는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.

이때, $\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

45 답 ④

두 평면 α, β의 교선에 수직이고 원 S의 중심을 지나는 직선을 l, 원 S가 평면 β 위에 비춰진 그림자의 중심을 O라 하자.



그림과 같이 점 O를 지나고 두 평면의 교선에 평행하면서 평면 β와 수직인 평면에 대하여 원 S를 대칭시킨 원을 S'이라 하면 원 S'은 영역 T의 정사영이 된다. 평면 β에서 점 A를 점 O에 대하여 대칭이동시킨 점을 A′이라 하면 $\angle\mathrm{CAO}=30^\circ$이므로

$\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{A'CO}=60^\circ$

$\therefore\ \angle\mathrm{A'CD}=60^\circ$

즉, 평면 α와 원 S'이 이루는 이면각의 크기는 60°이다.

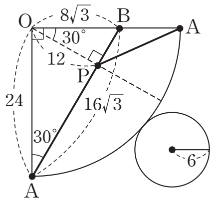
이때, 도형 S, S', T의 넓이를 각각 S, S', T라 하면

$S'=S=1$이므로 $T\cos 60^\circ=S'$

$\therefore\ T=2S'=2$

46 답 ③

[그림 1]과 같이 원뿔의 전개도에서 옆면은 중심각의 크기가 $360^\circ\times\dfrac{6}{24}=90^\circ$, 반지름의 길이가 24인 부채꼴이고 점 A에서 점 B까지 옆면을 한 바퀴 돌아 최단 거리로 움직이는 점 P가 꼭짓점 O에 가장 가깝게 되었을 때는 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발에 점 P가 있을 때이다. 이때의 선분 AP의 밑면으로의 정사영의 길이는 점 P의 밑면으로의 수선의 발 P′에 대하여 선분 AP′의 길이이다.



[그림 1]

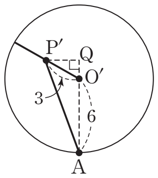
원뿔의 전개도에서 $\angle\mathrm{AOP}$가 부채꼴의 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{3}$이므로 두 점 O, P에서 밑면에 내린 수선의 발 O′, P′에 대하여 $\angle\mathrm{AO'P'}$의 크기는 $360^\circ\times\dfrac{1}{3}=120^\circ$이고, 전개도에서 $\overline{\mathrm{OP}}=12$이다. 점 P는 모선의 중점에 있으므로 $\overline{\mathrm{O'P'}}=3$이다.

[그림 2]와 같이 점 P′에서 선분 AO′의 연장선에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{O'Q}}=\dfrac{3}{2}$, $\overline{\mathrm{P'Q}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AP'}}^2=\left(6+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=63$

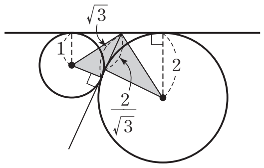
$\therefore\ \overline{\mathrm{AP'}}=3\sqrt{7}$



[그림 2]

47 답 ③

그림과 같이 두 평면과 두 구의 평면 γ 위로의 정사영을 생각하자.



정사영에서의 중심거리가 $\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{28}{3}}$이고, 공간에서 평면 γ와의 거리의 차가 1이므로 두 구의 중심 사이의 거리 d는

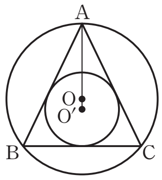
$d=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{\dfrac{28}{3}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{31}{3}}$

$\therefore\ 3d^2=31$

48 답 ③

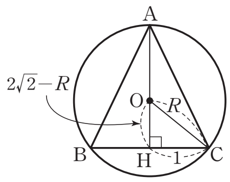
직원뿔에 외접하는 구의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라 하고, 내접하는 구의 중심을 O′, 반지름의 길이를 r라 하자.

직원뿔의 꼭짓점과 밑면인 원의 지름을 지나는 평면으로 잘랐을 때의 단면은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

이때, 두 중심 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{OO'}}=\overline{\mathrm{AO'}}-\overline{\mathrm{AO}}$

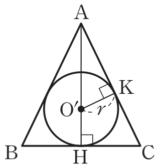


[그림 2]

[그림 2]에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}=R$, $\overline{\mathrm{OH}}=2\sqrt{2}-R$, $\overline{\mathrm{CH}}=1$이고

$\angle\mathrm{H}=90^\circ$이므로 $R^2=(2\sqrt{2}-R)^2+1^2$에서 $4\sqrt{2}R=9$

$\therefore\ R=\dfrac{9}{4\sqrt{2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{8}=\overline{\mathrm{OA}}$ ⋯ ㉠



[그림 3]

[그림 3]에서 $\angle\mathrm{K}=90^\circ$이므로

$\triangle\mathrm{AHC}\backsim\triangle\mathrm{AKO'}$ (AA 닮음)

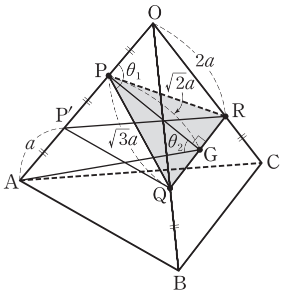
즉, $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AO'}}:\overline{\mathrm{O'K}}=\overline{\mathrm{AO'}}:\overline{\mathrm{O'H}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}=3$, $\overline{\mathrm{CH}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{AO'}}:\overline{\mathrm{O'H}}=3:1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AO'}}=\dfrac{3}{4}\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{OO'}}=\overline{\mathrm{AO'}}-\overline{\mathrm{AO}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{9\sqrt{2}}{8}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$

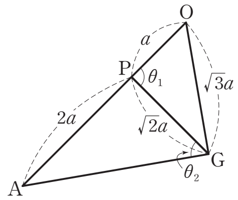
49 답 5

그림과 같이 정사면체 OABC의 한 모서리의 길이를 $3a$라 하고 선분 OA를 2 : 1로 내분하는 점을 P′이라 하면 두 삼각형 OP′Q, OP′R는 한 변의 길이가 $2a$인 정삼각형이고, 점 P는 선분 OP′의 중점이므로 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{PR}}$



$\therefore\ \theta_1=\dfrac{\pi}{2}$

또한, 두 선분 PQ, PR는 한 변의 길이가 $2a$인 정삼각형의 높이이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{3}a$, $\overline{\mathrm{PG}}=\sqrt{2}a$이므로 삼각형 OAG에 두 각 θ_1, θ_2를 나타내면 그림과 같다.

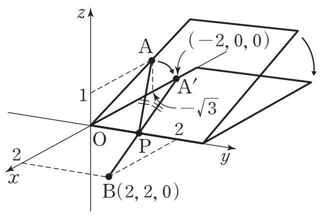


$k=\tan(\theta_1-\theta_2)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta_2\right)=\tan(\angle\mathrm{GAP})$

$=\dfrac{\sqrt{2}a}{2a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이므로 $10k^2=5$

50 답 ③



그림과 같이 점 A$(-\sqrt{3}, 0, 1)$을 xy평면 위로 회전시킨 점을 A′이라 하면 점 A′의 좌표는 $(-2, 0, 0)$이다.

이때, $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$

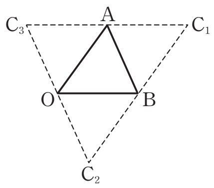
$\geq\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(-2-2)^2+(0-2)^2+(0-0)^2}$

$=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

51 답 ①

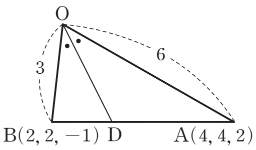
그림과 같이 가능한 평행사변형은 □OAC$_1$B, □OABC$_2$, □OC$_3$AB의 세 가지이다.



이때, 삼각형 $C_1C_2C_3$의 무게중심은 삼각형 OAB의 무게중심과 같으므로 삼각형 $C_1C_2C_3$의 무게중심의 좌표는 $(2, -1, 1)$이다.

52 답 ②

직선 l과 선분 AB의 교점을 D라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여



$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BD}}$

이때, $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3$

이므로 점 D는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다. 즉,

$(a, b, c)=\left(\dfrac{2\times2+1\times4}{2+1}, \dfrac{2\times2+1\times4}{2+1}, \dfrac{2\times(-1)+1\times2}{2+1}\right)$

$=\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{8}{3}, 0\right)$

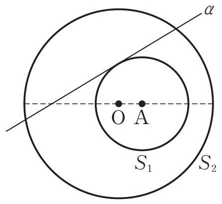
이므로 $a+b+c=\dfrac{16}{3}$

53 답 97

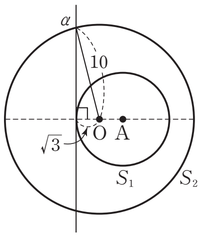
구 S_1 : $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$는 중심이 A$(1, 1, 1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 구이고

구 S_2 : $x^2+y^2+z^2=100$은 중심이 O$(0, 0, 0)$이고 반지름의 길이가 10인 구이다.

이때, $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}$이므로 S_1은 S_2의 내부에 있다.



따라서 S_1에 접하는 평면 α와 S_2가 만나서 생기는 도형은 원이고 이 원의 넓이가 최대가 되려면 점 O에서 평면 α 사이의 거리가 가장 짧아야 한다.



따라서 넓이의 최댓값은 $\pi\{10^2-(\sqrt{3})^2\}=97\pi$

$\therefore\ k=97$

54 답 ④

구 C_1 : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=10$과 xy평면의 교선은

$z=0$일 때, $(x-1)^2+(y-2)^2+1^2=10$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=3^2$ ⋯ ㉠

구 C_2 : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z+c)^2=r^2$의 xy평면 위로의 정사영은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ⋯ ㉡

xy평면에서 두 원 ㉠, ㉡이 서로 접하므로

(i) 외접하는 경우, 두 중심 사이의 거리가 반지름의 길이의 합과 같다.

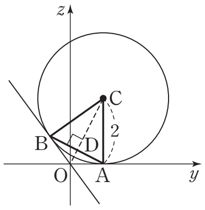
즉, $(a-1)^2+(b-2)^2=(r+3)^2$

(ii) 내접하는 경우, 두 중심 사이의 거리가 반지름의 길이의 차와 같다.

즉, $(a-1)^2+(b-2)^2=(r-3)^2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

55 답 8



x축에서 내려다보면 그림과 같다.

이때, 두 선분 OC, AB의 교점을 D라 하면 $\overline{OA}=1$, $\overline{AC}=2$에서 $\overline{OC}=\sqrt{5}$이고

$\overline{OA}\times\overline{AC}=\overline{OC}\times\overline{DA}$에서

$1\times 2=\sqrt{5}\times\overline{DA}$ $\quad\therefore \overline{DA}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

또, $\triangle OAC \backsim \triangle ADC$에서 $\overline{AC}^2=\overline{CD}\times\overline{CO}$

$2^2=\overline{CD}\times\sqrt{5}$ $\quad\therefore \overline{CD}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

따라서 $S=\dfrac{1}{2}\times(2\overline{DA})\times\overline{CD}=\dfrac{8}{5}$이므로 $5S=8$

56 답 4

선분 BD의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 ABD, CBD가 정삼각형이므로 $\overline{BD}\perp\overline{AM}$, $\overline{BD}\perp\overline{CM}$

따라서 $\overline{BD}\perp$(평면 AMC)이므로 $\overline{BD}\perp\overline{AC}$ ······ ⓐ

삼각형의 중선연결정리에 의하여 $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{AC}$, $\overline{SR}\,/\!/\,\overline{AC}$이므로 $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{SR}$

평행한 두 직선은 한 평면을 결정하므로 네 점 P, Q, R, S는 한 평면 위에 있다. ······ ⓑ

(평면 PQRS)$\,/\!/\,\overline{AC}$이므로 두 평면 PQRS와 BCD가 이루는 각의 크기는 평면 BCD와 선분 AC가 이루는 각의 크기와 같다.

$\overline{BD}\perp$(평면 AMC)이므로 평면 BCD와 선분 AC가 이루는 각의 크기는 두 선분 AC, CM이 이루는 각의 크기와 같다.

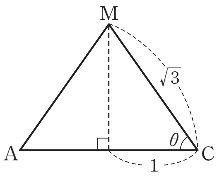
정사면체의 한 모서리의 길이를 2라 하면

이등변삼각형 MAC에서 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$

따라서 $p=3$, $q=1$이므로

$p+q=4$ ······ ⓒ



| 채점기준 |

ⓐ 두 모서리 AC, BD가 이루는 각의 크기를 구한다.	[30%]
ⓑ 네 점 P, Q, R, S가 한 평면 위에 있음을 보인다.	[30%]
ⓒ $\cos^2\theta$의 값을 구한다.	[40%]

57 답 3

점 A에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발의 좌표는

각각 $(a,\ 0,\ 0)$, $(0,\ b,\ 0)$, $(0,\ 0,\ c)$이다.

이때, $\overline{OA}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$이므로

$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\cos\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\cos\gamma=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\therefore p=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$ ······ ⓐ

또, 점 A에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는

각각 $(a,\ b,\ 0)$, $(0,\ b,\ c)$, $(a,\ 0,\ c)$이므로

$\cos\theta_1=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\cos\theta_2=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\cos\theta_3=\dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

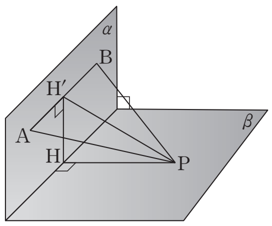
$\therefore q=\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=\dfrac{2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}=2$ ······ ⓑ

$\therefore p+q=3$ ······ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$의 값을 구한다.	[40%]
ⓑ $\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3$의 값을 구한다.	[40%]
ⓒ $p+q$의 값을 구한다.	[20%]

58 답 15



그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{HH'}\perp$(직선 AB)이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PH'}\perp$(직선 AB)

한편, 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고 직선 AB가 평면 β와 평행하므로 $\overline{HH'}=2$

또, 점 P와 평면 α 사이의 거리가 4이므로 $\overline{PH}=4$

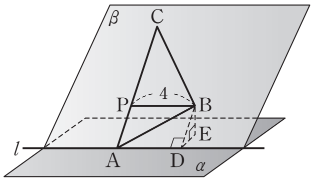
따라서 직각삼각형 H′HP에서

$\overline{PH'}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HH'}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH'}=\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=15$

59 답 45

점 P가 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이고, 점 C에서 평면 α에 이르는 거리가 3이므로 점 P에서 평면 α에 이르는 거리는 1이다. 즉, 직선 PB는 평면 α와 평행하다.



삼각형 ABC를 포함하는 평면을 β라 하고 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하면 점 P가 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로 삼각형 ABP의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{3}$인 3이고 $\overline{\mathrm{BP}}=4$이므로

점 B에서 직선 l까지의 거리가 삼각형 ABP의 높이인 $\frac{3}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{BE}}=1$이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기 θ에 대하여

$\sin\theta=\frac{2}{3}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이 S는

$S=9\cos\theta=9\times\frac{\sqrt{5}}{3}=3\sqrt{5}$

$\therefore S^2=45$

60 답 ⑤

ㄱ. 평면 α와 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 교선을 l이라 하면 점 A에서 평면 α에 이르는 거리는 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발까지의 거리와 같다. 즉, $d(\alpha)$가 최대가 되기 위해서는 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발이 교선 l 위에 놓일 때이다. 두 점 B, C도 마찬가지이므로 평면 α와 세 점 A, B, C를 지나는 평면은 수직이어야 한다. 따라서 평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면 β는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직이다. (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{AC}}\geq\overline{\mathrm{BC}}$일 때,

선분 BC의 중점을 M이라 하면 평면 α가 중점 M을 지날 때 $d(\alpha)$는 최대가 된다.

$\overline{\mathrm{AC}}\leq\overline{\mathrm{BC}}$일 때도 마찬가지이므로 평면 β는 선분 BC의 중점 또는 선분 AC의 중점을 지난다. (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(2-2)^2+(-1-3)^2+0^2}=4$,

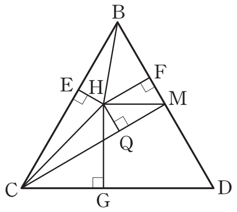
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2+0^2}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}\geq\overline{\mathrm{BC}}$이다.

따라서 ㄱ, ㄴ에 의하여 평면 β는 선분 BC의 중점을 지나고 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직인 평면이므로 $d(\beta)$의 값은 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

61 답 ③



점 H에서 세 선분 BC, BD, CD에 내린 수선의 발을 각각 E, F, G라 하면 주어진 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{HE}}=k$, $\overline{\mathrm{HF}}=2k$, $\overline{\mathrm{HG}}=3k$ (k는 양수)라 하면 정삼각형 BCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times12\times(k+2k+3k)=36k$이고, 한 변의 길이가 12인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times12^2=36\sqrt{3}$이므로 $36k=36\sqrt{3}$에서

$k=\sqrt{3}$

이때, 점 M은 선분 BD의 중점이므로 점 M과 선분 CD 사이의 거리는 $3\sqrt{3}$이고, $\overline{\mathrm{HG}}=3\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{HM}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{CD}}$이다.

따라서 $\triangle\mathrm{CHM}=\triangle\mathrm{DHM}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{HM}}\times\overline{\mathrm{HG}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DM}}\times\overline{\mathrm{HF}}$에서

$\overline{\mathrm{HM}}\times3\sqrt{3}=6\times2\sqrt{3}$ $\qquad\therefore \overline{\mathrm{HM}}=4$

한편, $\overline{\mathrm{AH}}\perp$(평면 BCD), $\overline{\mathrm{AQ}}\perp\overline{\mathrm{CM}}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HQ}}\perp\overline{\mathrm{CM}}$

이때, 사각형 HQMF는 직사각형이므로 $\overline{\mathrm{QM}}=\overline{\mathrm{HF}}=2\sqrt{3}$

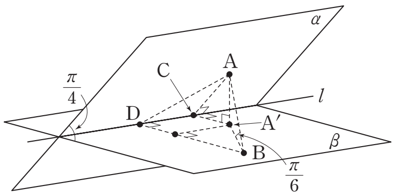
직각삼각형 HQM에서

$\overline{\mathrm{HQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{HM}}^2-\overline{\mathrm{QM}}^2}=\sqrt{16-12}=2$

따라서 직각삼각형 AQH에서

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HQ}}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

62 답 12



점 A에서 점 C를 지나고 직선 l에 수직이며 평면 β에 포함되는 직선에 내린 수선의 발을 A′이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발은 점 A′이다.

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로 $\angle\mathrm{ABA'}=\frac{\pi}{6}$이고 $\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AA'}}=1$이다.

또한, 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로 이면각의 정의에 의하여 $\angle ACA'=\frac{\pi}{4}$이다.

$\therefore \overline{CA'}=1,\ \overline{AC}=\sqrt{2}$

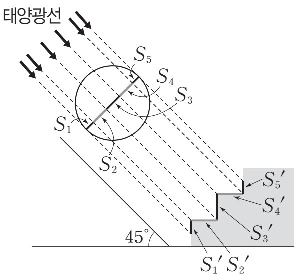
한편, $\overline{AD}=\sqrt{3}$이고 $\overline{AC}=\sqrt{2}$이므로 직각삼각형 ACD에서 $\overline{CD}=1$이다.

따라서 사면체 ABCD의 부피를 V라 하면

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle BCD\times\overline{AA'}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BD}\right)\times\overline{AA'}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times1\times(\sqrt{2}+1)\right\}\times1=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}$$

따라서 $a=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{6}$이므로 $36(a+b)=12$

63 답 ②



그림과 같이 태양광선에 수직이고 구의 중심을 지나는 평면에 의해 잘려진 단면으로 나뉜 영역의 넓이를 각각 $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5$라 하고 각 영역에 해당하는 그림자의 넓이를 각각 $S_1',\ S_2',\ S_3',\ S_4',\ S_5'$라 하면

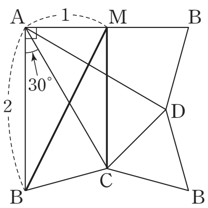
$\frac{S_1}{S_1'}=\frac{S_2}{S_2'}=\frac{S_3}{S_3'}=\frac{S_4}{S_4'}=\frac{S_5}{S_5'}=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

이때, $S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$,

$S'=S_1'+S_2'+S_3'+S_4'+S_5'$이므로

$$S'=\frac{S}{\cos 45°}=\frac{100\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=100\sqrt{2}\pi$$

64 답 ①

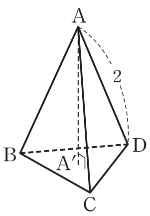


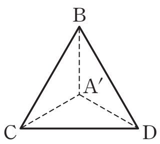
옆면이 모두 두 밑각의 크기가 75°인 이등변삼각형이므로 꼭지각의 크기는 30°이다. 따라서 그림의 전개도와 같이 점 B에서 점 M까지 가는 최단경로의 길이는 $\sqrt{5}$, 점 C에서 점 M까지 가는 최단경로의 길이는 $\sqrt{3}$이다.

또한, $\angle CAM=60°$이고 $\overline{AM}:\overline{AC}=1:2$이므로

$\overline{AM}\perp\overline{MC}$에서 $\overline{AB}\perp\overline{MC}$

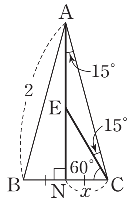
$\therefore \triangle BMC=\frac{1}{2}\times\overline{MC}\times\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$





한편, 옆면과 밑면이 이루는 각의 크기 θ는 그림과 같이 점 A에서 밑면에 내린 수선의 발 A′에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\triangle A'BC}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{3}\triangle BCD}{\triangle ABC}$$



이때, $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin 30°=1$이고

선분 BC의 길이는 그림에서 선분 BC의 중점을 N, $\overline{NC}=x$라 하면

$\overline{EN}=\sqrt{3}x,\ \overline{AE}=\overline{EC}=2x$이므로

$\overline{AN}=(\sqrt{3}+2)x$

$x^2+(\sqrt{3}+2)^2x^2=2^2$에서 $x^2=2-\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BC}^2=(2x)^2=4x^2=8-4\sqrt{3}$

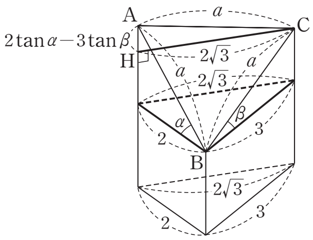
$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\overline{BC}^2\times\sin 60°=2\sqrt{3}-3$에서

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$

따라서 두 점 B, C에서 M까지 가는 최단경로 및 선분 BC로 둘러싸인 옆면의 일부분을 삼각형 BCD에 내린 정사영의 넓이는

$$\triangle BMC\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}-3}{3}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

65 답 13



그림과 같이 밑면의 세 변의 길이가 2, 3, $2\sqrt{3}$인 삼각기둥을 적당한 평면으로 잘라서 그 단면이 정삼각형이 되도록 하자.

또, 그림과 같이 각을 설정하면 $\alpha>\beta$이고

$a=\frac{2}{\cos\alpha}=\frac{3}{\cos\beta}$이므로

$\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{a}{2},\ \frac{1}{\cos\beta}=\frac{a}{3}$

$\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha=\frac{a^2}{4},\ \sec^2\beta=1+\tan^2\beta=\frac{a^2}{9}$

$\therefore \tan^2\alpha=\frac{a^2}{4}-1,\ \tan^2\beta=\frac{a^2}{9}-1\ \cdots$ ㉠

한편, 삼각형 ACH에서 $\overline{AH}=2\tan\alpha-3\tan\beta$이므로

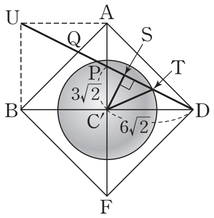
$a^2=(2\tan\alpha-3\tan\beta)^2+(2\sqrt{3})^2\ \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$3a^4-50a^2+143=0,\ (a^2-13)(3a^2-11)=0$

$\therefore a^2=13\ (\because a>2\sqrt{3})$

66 답 ④



$\overline{PR} \perp$(평면 ABFD), 선분 QD가 평면 ABFD 위에 있으므로 평면 ABFD로 정팔면체를 자른 단면과 평면 DPQR는 수직이다. 따라서 평면 ABFD에 수직인 시선으로 본 정팔면체는 그림과 같다.

직각삼각형 PCD의 꼭짓점 C′에서 대변에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{C'S} \times \overline{PD} = \overline{PC'} \times \overline{C'D}$에서 $\overline{C'S} \times 3\sqrt{10} = 3\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}$

$\therefore \overline{C'S} = \dfrac{6\sqrt{10}}{5}$

한 모서리의 길이가 12인 정팔면체에 내접하는 구의 반지름의 길이는

$\overline{C'T} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \times 12 = 2\sqrt{6}$이고

$\overline{ST}^2 = (2\sqrt{6})^2 - \left(\dfrac{6\sqrt{10}}{5}\right)^2 = 24 - \dfrac{72}{5} = \dfrac{48}{5}$

따라서 네 점 D, P, Q, R를 지나는 평면으로 정팔면체에 내접하는 구를 자를 때 생기는 단면은 반지름이 선분 ST인 원이므로 그 넓이는 $\dfrac{48}{5}\pi$이다.

67 답 ③

$x^2+y^2+2z^2+(x-2)^2+(y-2)^2$

$=(x^2+y^2+z^2)+\{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2\}$

이 식은 세 점 $P(x, y, z)$, $O(0, 0, 0)$, $Q(2, 2, 0)$에 대하여

$\overline{PO}^2+\overline{PQ}^2$을 나타낸다.

선분 OQ의 중점을 R라 하면 중선정리에 의하여

$\overline{PO}^2+\overline{PQ}^2=2(\overline{PR}^2+\overline{OR}^2)=2\overline{PR}^2+4$

여기서 선분 PR의 길이가 최대일 때와 최소일 때 주어진 식의 최댓값과 최솟값이 결정된다.

한편, 점 P는 구 $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=4$ 위의 점이고 $R(1, 1, 0)$이므로 선분 PR의 길이의 최댓값과 최솟값은 구의 중심 $S(1, 4, 4)$에 대하여 각각 $\overline{RS}+2=7$, $\overline{RS}-2=3$이다.

따라서 $M=2\times 7^2+4=102$, $m=2\times 3^2+4=22$이므로

$M+m=124$

Break Time 쉬어가는 페·이·지

움직이는 수학소프트웨어 지오지브라

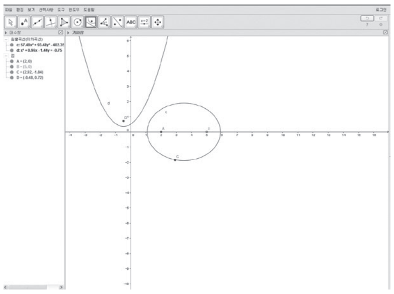
지오지브라란?

지오지브라(GeoGebra)는 기하, 대수, 미적분, 통계 및 이산수학을 쉽게 다룰 수 있는 무료 교육용 수학 소프트웨어이다. 지오지브라는 자바로 작성된 오픈소스 소프트웨어이고, 현재 코드의 많은 부분이 HTML5로 전환되어 있다.

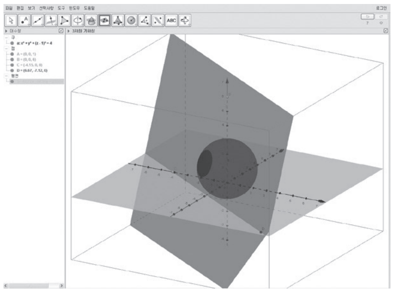
지오지브라는 2002년 오스트리아 잘츠부르크 대학의 마르쿠스 호헨바터 외 50여 명의 개발팀이 개발하였다. 그는 자신의 석사논문 주제로 DGS(Dynamic Geometry Software)와 CAS(Computer Algebra System)가 결합된 기능을 갖는 소프트웨어를 구현하였다. 2002년 그가 인터넷을 통하여 지오지브라를 공개하자, 오스트리아와 독일의 수학 교사들은 지오지브라를 수학지도에 활용하기시작하였다. 같은 해 지오지브라는 EASA(European Academic Software Award)를 수상하였고, 이후 지오지브라의 개발은 Austria Academy of Science의 지원 하에 마르쿠스 호현바터의 박사 논문 프로젝트로 진행되었다. 2006년 이후로 지오지브라의 개발은 미국의 플로리다 아틀랜틱 대학에서 계속되었고, 그 곳에서 마르쿠스 호현바터 박사는 미국 과학 재단(NSF: National Science Foundation)의 지원 하에 교사 연수 프로그램을 진행하였다. 현재는 오스트리아의 요하네스 케플러 대학에서 지오지브라의 개발과 커뮤니티를 지원하고 있다.

지오지브라의 활용

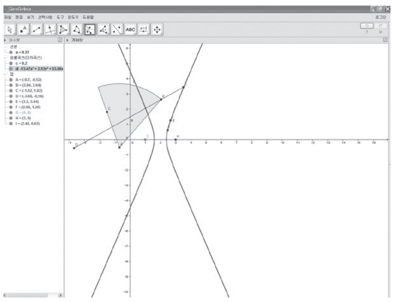
① 타원과 포물선 그리기



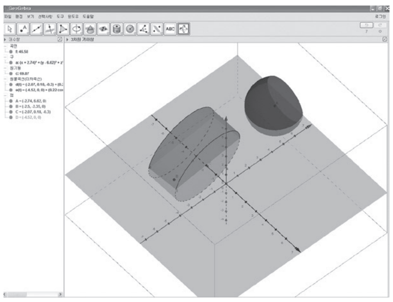
② 구와 평면의 교선



③ 선분과 부채꼴, 쌍곡선



④ 원기둥, 구



다운로드 : http://www.geogbra.org/cms/download