정답 및 해설

I. 수열의 극한

II. 미분법

III. 적분법

I. 수열의 극한

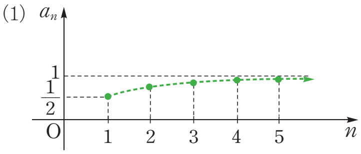
1. 수열의 극한

유형 ······································ pp.11~19

001 정답 (1) 수렴, 1 (2) 발산 (3) 발산 (4) 수렴, 0

각 수열의 일반항에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하여 일반항 a_n의 값의 변화를 그래프로 나타내면 다음 그림과 같다.

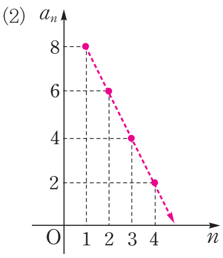
(1)



n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값은 1에 한없이 가까워진다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

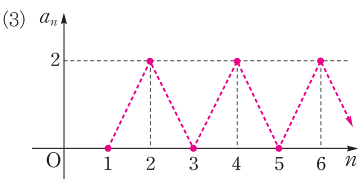
(2)



n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값은 음의 무한대로 발산한다.

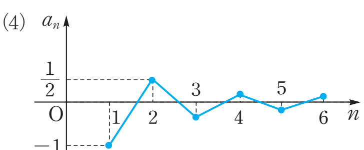
$$\therefore \lim_{n\to\infty}(-2n+10)=-\infty$$

(3)



n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값은 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다.
즉, 진동(발산)한다.

(4)



n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값은 0에 한없이 가까워진다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos n\pi=0$$

002 정답 (1) 6 (2) 1

(1) $(2n+1)a_n=b_n$이라 놓으면

$a_n=\dfrac{b_n}{2n+1}$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}(4n-3)a_n&=\lim_{n\to\infty}(4n-3)\times\frac{b_n}{2n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+1}\times b_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+1}\times\lim_{n\to\infty}b_n\\&=2\times3=6\end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(4n-3)a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+1}\times(2n+1)a_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+1}\times\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n\\&=2\times3=6\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{3a_n-5}{a_n-2}=b_n$이라 놓으면

$b_n(a_n-2)=3a_n-5,\ (b_n-3)a_n=2b_n-5$

$$\therefore a_n=\frac{2b_n-5}{b_n-3}$$

이때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-5}{b_n-3}\\&=\frac{2\times2-5}{2-3}=1\end{aligned}$$

003 정답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 0 (3) 양의 무한대로 발산

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+4}{2n^2+3n-4}&=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}\\&=\frac{3-0+0}{2+0-0}\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(2) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n^2+2n+3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\\&=\frac{0+0}{1+0+0}=0\end{aligned}$$

(3) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{2n^2+n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}\\&=\infty\end{aligned}$$

004 정답 (1) **0** (2) **1** (3) **2** (4) **0**

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}=0$$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$ ← 분모, 분자를 n으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

(3) 분모를 유리화하여 정리하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(n^2+n)-n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1}$$

$$=\frac{\sqrt{1+0}+1}{1}=2$$

(4) $\lim_{n\to\infty}\{\log(n+2)-\log n\}=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+2}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

$$=\log(1+0)=0$$

005 정답 (1) $\boldsymbol{a=0,\ b=2}$ (2) $\boldsymbol{a=10}$

(1) 극한값이 상수 b가 되려면 분모와 분자의 차수가 같아야 하므로 $a=0$

$$\therefore\ b=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=2$$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-n)(\sqrt{n^2+an}+n)}{\sqrt{n^2+an}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{n^2+an}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}=\frac{a}{2}=5$$

$\therefore\ a=10$

006 정답 (1) $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ (2) **0**

(1) 주어진 식의 각 변에 n을 곱하면

$$\frac{n}{3n+5}\le a_n\le\frac{n}{3n+1}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+5}=\frac{1}{3}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$$

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $-1\le\sin n\theta\le1$이므로

$$-\frac{1}{n}\le\frac{1}{n}\sin n\theta\le\frac{1}{n}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

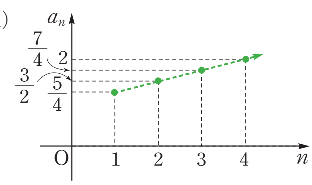
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta=0$$

확인문제 pp.11~19

001 정답 (1) **발산** (2) **수렴, 0** (3) **발산(진동)** (4) **수렴, 3**

각 수열의 일반항에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 일반항 a_n의 값의 변화를 그래프로 나타내면 다음 그림과 같다.

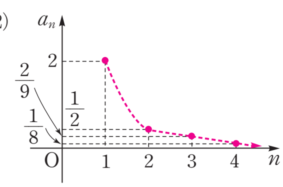
(1)



n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값은 양의 무한대로 발산한다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{4}+1\right)=\infty$$

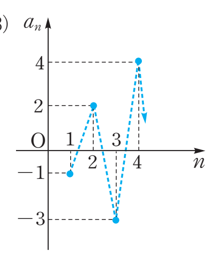
(2)



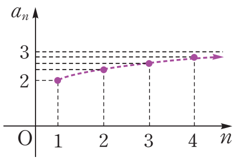
n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값은 0에 한없이 가까워진다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}=0$$

(3)



n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값은 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다. 즉, 진동(발산)한다.

(4) 

n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값은 3에 한없이 가까워진다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+1}=3$$

002 정답 수렴, 1

수열의 일반항 $a_n=\tan\frac{4n+1}{4}\pi$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 그 값을 구해보면

$$\tan\frac{4+1}{4}\pi=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\tan\frac{8+1}{4}\pi=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\tan\frac{12+1}{4}\pi=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\vdots$$

따라서 수열 $\left\{\tan\frac{4n+1}{4}\pi\right\}$는 수렴하고, 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\tan\frac{4n+1}{4}\pi=1$$

003 정답 8

$(3n+2)a_n=b_n$이라 놓으면

$a_n=\frac{b_n}{3n+2}$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=12$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}(2n+3)a_n&=\lim_{n\to\infty}(2n+3)\times\frac{b_n}{3n+2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+2}\times b_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+2}\times\lim_{n\to\infty}b_n\\&=\frac{2}{3}\times 12\\&=8\end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(2n+3)a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+2}\times(3n+2)a_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+2}\times\lim_{n\to\infty}(3n+2)a_n\\&=\frac{2}{3}\times 12\\&=8\end{aligned}$$

004 정답 4

$b_n=\frac{5a_n+1}{2a_n-1}$이라 놓으면

$$b_n(2a_n-1)=5a_n+1,\ (2b_n-5)a_n=b_n+1$$

$$\therefore a_n=\frac{b_n+1}{2b_n-5}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}b_n=3$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+1}{2b_n-5}\\&=\frac{3+1}{2\times3-5}=4\end{aligned}$$

005 정답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) 2

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n으로 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n-1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}\\&=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{2n^2+n+3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}\\&=\frac{0+0}{2+0+0}=0\end{aligned}$$

(3) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n+1}{2n^2+3n-2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}\\&=\frac{4-0+0}{2+0-0}=2\end{aligned}$$

006 정답 (1) 3 (2) 1

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^3으로 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+4n^2-1}{n^3-3n+5}&=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^3}}{1-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}}\\&=\frac{3+0-0}{1-0+0}\\&=3\end{aligned}$$

(2) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^3으로 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n^2+1)}{n^3-n^2+1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}\\&=\frac{(1-0)\times(1+0)}{1-0+0}\\&=1\end{aligned}$$

007 정답 (1) **0** (2) **1** (3) **4**

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=0$$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$ ← 분모, 분자를 n으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

(3) 분모를 유리화하여 정리하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}-2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+n}+2n}{(\sqrt{4n^2+n}-2n)(\sqrt{4n^2+n}+2n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+n}+2n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}{1}=\frac{\sqrt{4+0}+2}{1}=4$$

008 정답 (1) **0** (2) $\mathbf{\frac{1}{2}}$

(1) $\lim_{n\to\infty}\{\log(n^2+n+1)-\log(n^2-n+1)\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\log\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\log 1=0$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

009 정답 $\boldsymbol{a=0,\ b=6}$

분모, 분자를 n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}$$

이때 극한값이 존재하려면 $a=0$이어야 하고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{b+0}{3-0}=\frac{b}{3}=2$$

$\therefore\ b=6$

010 정답 **1**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+an}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+an}+n}{(\sqrt{n^2+an}-n)(\sqrt{n^2+an}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+an}+n}{an}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}{a}=\frac{2}{a}=2$$

$\therefore\ a=1$

011 정답 **3**

주어진 식의 각 변을 (n^2+1)로 나누면

$$\frac{3n^2+2n+1}{n^2+1}\le a_n\le\frac{3n^2+4n+5}{n^2+1}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+5}{n^2+1}=3$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=3$$

012 정답 (1) **0** (2) **0**

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $-1\le\cos n\theta\le1$이므로

$$-\frac{1}{2n}\le\frac{\cos n\theta}{2n}\le\frac{1}{2n}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{2n}=0$$

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $-1\le(-1)^n\le1$이므로

$$-\frac{1}{n}\le\frac{(-1)^n}{n}\le\frac{1}{n}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$$

연습문제 I .... pp.20~23

013 정답 ④

ㄱ. 수열 $\{2n-3\}$은 $-1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$이므로 양의 무한대로 발산한다.

ㄴ. 수열 $\left\{\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$은 $0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots$이므로 0에 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\{(-1)^{n+1}+(-1)^n\}$은 $0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots$이므로 0에 수렴한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

014 정답 ①

$b_n=\frac{1}{3}\{(a_n+b_n)-(a_n-2b_n)\}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\{(a_n+b_n)-(a_n-2b_n)\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\times\{7-(-2)\}=3$$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$라고 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=7$에서

$\alpha+\beta=7$ ⋯⋯ ㉠

$\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=-2$에서

$\alpha-2\beta=-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $3\beta=9$이므로

$\beta=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n=3$

015 정답 ②

$2a_n+b_n=c_n$이라 놓으면 $\lim_{n\to\infty} c_n=3$이고

$b_n=-2a_n+c_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2a_n+c_n}{a_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-2+\frac{c_n}{a_n}\right)$$
$$=-2$$

$\left(\because \lim_{n\to\infty} a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty} c_n=3\text{이므로 } \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0\right)$

016 정답 (1) 12 (2) 1

(1) $(n^2+3)a_n=b_n$이라 놓으면

$a_n=\frac{b_n}{n^2+3}$이고, $\lim_{n\to\infty} b_n=4$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(3n^2+2n)a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2}{n^2+3}\times b_n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}\times\lim_{n\to\infty} b_n$$
$$=3\times4=12$$

(2) $\frac{4a_n+3}{2a_n-1}=b_n$이라 놓으면

$a_n=\frac{b_n+3}{2b_n-4}$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n=7$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+3}{2b_n-4}=\frac{7+3}{2\times7-4}=1$$

017 정답 ④

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+1}=\frac{1}{3}$에서 $b_n=\frac{a_n}{2n+1}$으로 놓으면

$a_n=(2n+1)b_n$이고, $\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{3}$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n+a_n}{n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+(2n+1)b_n}{n-(2n+1)b_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(2+\frac{1}{n}\right)b_n}{1-\left(2+\frac{1}{n}\right)b_n}$$
$$=\frac{1+2\times\frac{1}{3}}{1-2\times\frac{1}{3}}=5$$

018 정답 (1) 2 (2) 0 (3) 1 (4) 6

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3-6n}{2-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-6}{\frac{2}{n}-3}$$
$$=\frac{0-6}{0-3}=2$$

(2) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{-n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{-1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$
$$=\frac{0+0}{-1+0+0}=0$$

(3) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^3으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n+1}{n^3-2n^2-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{2}{n}-\frac{3}{n^3}}$$
$$=\frac{1-0+0}{1-0-0}=1$$

(4) 분모, 분자를 n^3으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+1)(3n-1)}{(n+2)(n^2-3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n^2}\right)}$$
$$=\frac{(2+0)\times(3-0)}{(1+0)\times(1-0)}=6$$

019 정답 (1) 0 (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 2 (4) 2

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n})(\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-n})}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}$

$=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n-\sqrt{n^2-3n+4}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+\sqrt{n^2-3n+4})}{(n-\sqrt{n^2-3n+4})(n+\sqrt{n^2-3n+4})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3\sqrt{n^2-3n+4}}{3n-2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+3\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}}$

$=2$

(4) $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2-n+5}-\sqrt{n^2-n+1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{(n^2-n+5)-(n^2-n+1)\}}{\sqrt{n^2-n+5}+\sqrt{n^2-n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2-n+5}+\sqrt{n^2-n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$

$=\frac{4}{2}=2$

020 정답 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) **1** (3) **2**

(1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{2}=1$

(3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n}-2n)$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)+\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}+\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}$

$=\frac{1}{1+1}+\frac{3}{1+1}=2$

021 정답 $\frac{1}{2}$

$\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+n+1}<\sqrt{(n+1)^2}$에서 $n<\sqrt{n^2+n+1}<n+1$이므로 $\sqrt{n^2+n+1}$의 정수 부분은 n이다.

따라서 $\sqrt{n^2+n+1}$의 소수 부분은 $\sqrt{n^2+n+1}-n$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\frac{1}{2}$

022 정답 ④

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)n^2+bn+1}{3n-2}$이 2에 수렴하려면 분자와 분모의 차수가 같아야 하므로 $a-2=0$ $\therefore a=2$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{3n-2}=\frac{b}{3}=2$에서 $b=6$

$\therefore a+b=8$

023 정답 ④

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^3+2n^2-1}{bn^2+3n}$이 $\frac{1}{2}$에 수렴하려면 분자와 분모의 차수가 같아야 하므로 $a=0$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{bn^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n^2}}{b+\frac{3}{n}}=\frac{2}{b}=\frac{1}{2}$에서 $b=4$

$\therefore a+b=4$

024 정답 $a=6$, $b=1$

$b\le 0$이면 주어진 수열은 발산하므로 $b>0$이다.

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-bn)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-bn)(\sqrt{n^2+an}+bn)}{\sqrt{n^2+an}+bn}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+an-b^2n^2}{\sqrt{n^2+an}+bn}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b^2)n^2+an}{\sqrt{n^2+an}+bn}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b^2)n+a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+b}$

이때, $1-b^2\neq 0$이면 주어진 수열이 발산하므로

$b^2=1$에서 $b=1$ ($\because b>0$)

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}=\frac{a}{2}=3$

에서 $a=6$

025 정답 2

주어진 부등식의 각 변에 $\dfrac{n+1}{2n^2+1}$을 곱하면

$$\frac{(4n-1)(n+1)}{2n^2+1}<a_n<\frac{(4n+1)(n+1)}{2n^2+1}$$

이때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-1)(n+1)}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+1)(n+1)}{2n^2+1}=\frac{4}{2}=2$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2$$

026 정답 ③

$2n-1\le a_n\le 2n+1$에서 각 변을 n으로 나누면

$$2-\frac{1}{n}\le\frac{a_n}{n}\le 2+\frac{1}{n}$$

이때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$이므로

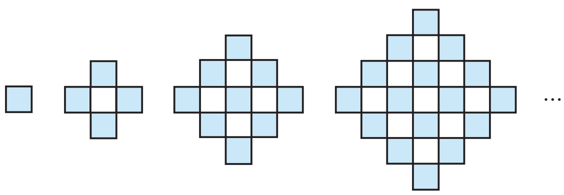
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3n-a_n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{a_n}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$

$$=\frac{3-2}{\sqrt{1+0}}=1$$

027 정답 2

다음 그림과 같이 도형 F_n에서 대각선 방향에 있는 정사각형에 색칠을 해보자.



F_1 F_2 F_3 F_4 …

이때, 정사각형의 개수 a_n은 $\square$의 개수와 $\square$의 개수의 합과 같으므로

$a_1=1^2$

$a_2=2^2+1^2$

$a_3=3^2+2^2$

⋮

$a_n=n^2+(n-1)^2$

한편, 모든 변의 길이의 총합 b_n은 $\square$의 둘레의 길이의 총합과 같다. $\square$의 개수는 n^2개이고, 한 개의 둘레의 길이는 4이므로

$b_n=4n^2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^2+(n-1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{2n^2-2n+1}=2$$

연습문제 Ⅱ

p.24

028 정답 ①

ㄱ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$ (α, β는 실수)라고 하면

$b_n=a_n-(a_n-b_n)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta \text{ (참)}$$

ㄴ. [반례] $a_n=\dfrac{1}{n^2}$, $b_n=n$이면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0$이지만

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$으로 발산한다.

ㄷ. [반례] $a_n=(-1)^n+2$, $b_n=4$이면

$0<a_n<b_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=4$(수렴)이지만 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

029 정답 ⑤

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=2$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_{n+1})=2$

한편, $a_{n+2}-a_n=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_n)=\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_{n+1})+\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$$

$$=2+2=4$$

030 정답 ⑤

$1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+n\times1$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\{n-(k-1)\}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(nk-k^2+k)$

$=n\times\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+n\times1}{n^3}$$

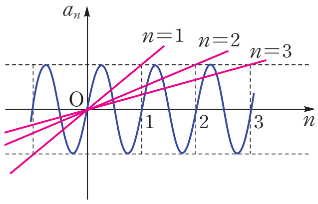
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}{n^3}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{6}}{1}$$

$$=\frac{1}{6}$$

031 정답 4

$f(x)=\sin 2\pi x$는 주기가 1인 주기함수이고 $|\sin 2\pi x|\le 1$이므로 $y>1$인 부분에서는 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 교점을 갖지 않는다.



위의 그림에서 $x>0$인 부분에서 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수를 b_n이라 하면

$b_1=1,\ b_2=3,\ b_3=5,\ \cdots,\ b_n=2n-1$

한편, $f(x)=\sin 2\pi x$와 $y=\frac{1}{n}x$ 모두 기함수이므로 그래프가 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 $x>0$인 부분에서의 교점의 개수와 $x<0$인 부분에서의 교점의 개수가 같으므로

$a_n=2b_n+1=2(2n-1)+1=4n-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n}=4$

032 정답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 서술형

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=n^2$ …… ㉠

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^2\ (n\ge 2)$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1\ (n\ge 2)$

한편, $a_1=1^2=1$이므로 위의 식은 $n=1$일 때도 성립한다.

$\therefore a_n=2n-1\ (n\ge 1)$ … ①

따라서 $a_{2n}=4n-1,\ a_{2n-1}=4n-3$이므로

$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=2n(n+1)-n$

$=2n^2+n$ … ②

$a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}(4k-3)=2n(n+1)-3n$

$=2n^2-n$ … ③

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ … ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	수열 $\{a_n\}$의 일반항 구하기	30%
②	$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$을 n에 관한 식으로 나타내기	20%
③	$a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}$을 n에 관한 식으로 나타내기	20%
④	극한값 구하기	30%

2. 등비수열의 극한

개념 보충

수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산을 공비 r의 값에 따라 알아보자.

(i) $r>1$일 때, $r=1+h\ (h>0)$라고 하면

$r^n=(1+h)^n>1+nh\ (n\ge 2)$

← 바른개념 수학I p. 245 유형 002번 참조

이때 $\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$

(ii) $r=1$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $r^n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}r^n=1$

(iii) $|r|<1$일 때,

① $r=0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $r^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}r^n=0$

② $r\ne 0$이면 $\frac{1}{|r|}>1$이므로 (i)에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|r^n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n=\infty$

따라서 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}r^n=0$

$a_n>0$일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$임이 알려져 있다.

(iv) $r\le -1$일 때,

① $r=-1$이면 수열 $\{r^n\}$은 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$이므로 진동한다.

② $r<-1$이면 $|r|>1$이므로 (i)에 의하여

$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=\infty$

이고, 수열 $\{r^n\}$은 각 항의 부호가 교대로 바뀌므로 진동한다.

유형 pp.28~31

001 정답 (1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) $-\frac{3}{2}$

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}=0+0=0$

(2) 분모, 분자를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

(3) 분모, 분자를 $(-3)^n$으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-(-3)^n}{2^n+(-3)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n-1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(4) 분모, 분자를 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times4^n+2^n}{2\times3^n-2^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times4^n+2^n}{2\times3^n-2\times4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{2}{4}\right)^n}{2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n-2}$$

$$=\frac{3+0}{0-2}=-\frac{3}{2}$$

002 정답 (1) $-\frac{1}{3}<x\le1$ (2) $1<x\le4$ (3) $-3<x\le1$ 또는 $x=2$

(1) 공비가 $\frac{3x-1}{2}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{3x-1}{2}\le1$이어야 한다.

$-2<3x-1\le2,\ -1<3x\le3$

$\therefore\ -\frac{1}{3}<x\le1$

(2) 공비가 $\log_2 x-1$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\log_2 x-1\le1$이어야 한다.

$0<\log_2 x\le2,\ \log_2 1<\log_2 x\le\log_2 2^2$

$\therefore\ 1<x\le4$

(3) 주어진 등비수열은 첫째항이 $x-2$, 공비가 $\frac{x+1}{2}$이다.

(i) 첫째항이 0이면 공비의 값에 관계없이 모든 항이 0이므로 수렴한다.

즉, $x-2=0$에서 $x=2$

(ii) 공비가 $\frac{x+1}{2}$이므로 수렴하려면 $-1<\frac{x+1}{2}\le1$이어야 한다.

즉, $-2<x+1\le2$에서 $-3<x\le1$

(i), (ii)에서 $-3<x\le1$ 또는 $x=2$

003 정답 (1) 1 (2) $2r$ (3) $\frac{3}{2}$

(1) $|r|>1$일 때, 즉 $r>1$ 또는 $r<-1$이면

$-1<\frac{1}{r}<1$이고 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+2r}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

(2) $|r|<1$일 때, 즉 $-1<r<1$이면

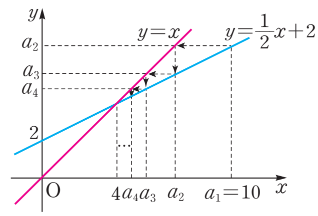
$\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+2r}{r^n+1}=\frac{0+2r}{0+1}=2r$$

(3) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}1^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+2r}{r^n+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

004 정답 4



$y=\frac{1}{2}x+2$에

$x=a_1\ (=10)$을 대입하면

$y=\frac{1}{2}a_1+2=a_2$이므로

y축 위에서 a_2의 위치를 찾는다. 또, 직선 $y=x$에 $y=a_2$를 대입하여 x축 위에서 a_2의 위치를 찾는다.

같은 방법으로 x축 위에서 $a_3,\ a_4,\ a_5,\ \cdots$의 위치를 차례로 찾아보면

$a_1>a_2>a_3>a_4>\cdots>a_n>\cdots>4$

를 만족하고, 4에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

즉, 수열 $\{a_n\}$은 두 직선 $y=\frac{1}{2}x+2,\ y=x$의 교점의 x좌표인 4에 수렴한다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=4$

확인문제 pp.28~31

033 정답 (1) 0 (2) -3 (3) 4 (4) 1

(1) 분모, 분자를 5^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+2}{4^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n+2\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}$$

$$=\frac{0+0}{0+1}=0$$

(2) 분모, 분자를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{2^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times3^n+2\times2^n}{2^n-3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}$$

$$=\frac{3+0}{0-1}=-3$$

(3) 분모, 분자를 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^{n+1}}{4^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4\times4^n}{4^n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+4}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{0+4}{1-0}=4$$

(4) 분모, 분자를 0.3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0.3^n+0.2^n}{0.3^n-0.2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{0.2}{0.3}\right)^n}{1-\left(\frac{0.2}{0.3}\right)^n}$$

$$=\frac{1+0}{1-0}=1$$

034 정답 (1) 2 (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$

(1) 분모, 분자를 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+1}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times4^n+1}{3^n+4^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\frac{2+0}{0+1}=2$$

(2) 분모, 분자를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^n-2^{n-1}}{3^{n+1}+5\times2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^n-\frac{1}{2}\times2^n}{3\times3^n+5\times2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$
$$=\frac{2-0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

(3) 분모, 분자를 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}}{2^{2n}+(-3)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\times4^n}{4^n+(-3)^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^n}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1+0}=\frac{1}{2}$$

035 정답 (1) $-2<x\le1$ (2) $0<x\le2$ 또는 $x=-1$

(1) 공비가 $\frac{2x+1}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{2x+1}{3}\le1$이어야 한다.

즉, $-3<2x+1\le3$에서 $-4<2x\le2$

$\therefore\ -2<x\le1$

(2) 주어진 등비수열은 첫째항이 $x+1$, 공비가 $x-1$이다.

(i) 첫째항이 0이면 공비의 값에 관계없이 모든 항이 0이므로 수렴한다. 즉, $x+1=0$에서 $x=-1$

(ii) 공비가 $x-1$이므로 수렴하려면 $-1<x-1\le1$이어야 한다. $\therefore\ 0<x\le2$

(i), (ii)에서 $0<x\le2$ 또는 $x=-1$

036 정답 5

공비가 $\log_5(x^2+1)$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면 $-1<\log_5(x^2+1)\le1$이어야 한다.

즉, $\log_5\frac{1}{5}<\log_5(x^2+1)\le\log_5 5$에서

$\frac{1}{5}<x^2+1\le5$ $\therefore\ -\frac{4}{5}<x^2\le4$

이때, $x^2\ge0$이므로 $0\le x^2\le4$에서 $-2\le x\le2$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

037 정답 $\begin{cases}-1 & (|r|>1)\\ 0 & (r=1)\\ 1 & (|r|<1)\end{cases}$

(i) $|r|>1$일 때, 즉 $r>1$ 또는 $r<-1$이면

$-1<\frac{1}{r}<1$이고 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}$$
$$=\frac{0-1}{0+1}$$
$$=-1$$

(ii) $|r|<1$일 때, 즉 $-1<r<1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}$$
$$=1$$

(iii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}$$
$$=0$$

따라서 $|r|>1$일 때 -1에 수렴, $|r|<1$일 때 1에 수렴, $r=1$일 때 0에 수렴한다.

038 정답 $-1<r<1$

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3r^n+2}{r^n+1}=\frac{0+2}{0+1}$$
$$=2$$

(ii) $|r|>1$일 때, 즉 $r>1$ 또는 $r<-1$이면

$-1<\frac{1}{r}<1$이고 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3r^n+2}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+2\times\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}$$
$$=\frac{3+0}{1+0}$$
$$=3$$

(iii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3r^n+2}{r^n+1}=\frac{3+2}{1+1}$$
$$=\frac{5}{2}$$

따라서 주어진 수열이 2에 수렴하는 r의 값의 범위는 $-1<r<1$이다.

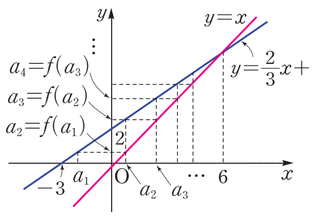
039 정답 6

$f(x)=\frac{2}{3}x+2$라 하면 $a_{n+1}=f(a_n)$이므로

다음 그림과 같이 두 직선 $y=\frac{2}{3}x+2$와 $y=x$를 이용하여

$a_2=f(a_1)$, $a_3=f(a_2)$, $a_4=f(a_3)$, $\cdots$

의 값을 조사할 수 있다.



n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 두 직선 $y=x$와 $y=\frac{2}{3}x+2$의 교점의 x좌표에 한없이 가까워진다.

두 직선 $y=x$와 $y=\frac{2}{3}x+2$의 교점의 x좌표를 구하면

$x=\frac{2}{3}x+2$에서 $\quad x=6$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=6$

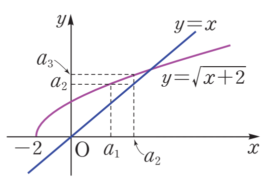
040 정답 2

$f(x)=\sqrt{x+2}$라 하면 $a_{n+1}=f(a_n)$이므로

다음 그림과 같이 두 함수 $y=\sqrt{x+2}$와 $y=x$의 그래프를 이용하여

$a_2=f(a_1)$, $a_3=f(a_2)$, $a_4=f(a_3)$, $\cdots$

의 값을 조사할 수 있다.



n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 두 그래프의 교점의 x좌표에 한없이 가까워진다.

$x=\sqrt{x+2}$에서 양변을 제곱하면

$x^2=x+2$, $x^2-x-2=0$, $(x-2)(x+1)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1$

이때, $x>0$이므로 $x=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=2$

연습문제 I pp.32~34

041 정답 (1) 발산 (2) 수렴, 0 (3) 수렴, 0

(1) 주어진 등비수열은 공비가 $\frac{4}{3}$이고 $\frac{4}{3}>1$이므로 발산한다.

(2) 주어진 등비수열은 공비가 $-\frac{1}{2}$이고 $-1<-\frac{1}{2}<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(-2)^n}=0$이다.

따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.

(3) 주어진 등비수열은 공비가 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$이고 $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^n=0$이다.

따라서 주어진 수열은 0에 수렴한다.

042 정답 (1) 0 (2) −5 (3) $-\frac{2}{3}$ (4) −2

(1) 분모, 분자를 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{3^{n+1}-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{3\times3^n-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{4}\right)^n}{3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}=\frac{0}{0-1}=0$$

(2) 분모, 분자를 5^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5^{n+1}}{5^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n-5}{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{0-5}{1+0}=-5$$

(3) 분모, 분자를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times2^n+4\times3^n}{2^n-2\times3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times2^n+4\times3^n}{2^n-6\times3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-6}=\frac{0+4}{0-6}=-\frac{2}{3}$$

(4) 분모, 분자를 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^{2n-1}}{4^{n-1}-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-\frac{1}{2}\times4^n}{\frac{1}{4}\times4^n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}=-2$$

043 정답 (1) 1 (2) 1

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^n+3\times4^n}{3\times2^{2n}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^n+3\times4^n}{3\times4^n+3^n}$$ ← 분모, 분자를 4^n으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+3}{3+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{0+3}{3+0}=1$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{6^n-3^n}{(2^n-1)(3^n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6^n-3^n}{6^n-2^n-3^n+1}$$ ← 분모, 분자를 6^n으로 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n}=\frac{1-0}{1-0-0+0}=1$$

044 정답 ④

분모, 분자를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 3^n-2}{3^{n-1}-2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}=3a\text{이므로}$$

$3a=6$에서 $\quad a=2$

045 정답 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n a_n+2^n}{a_n+2\times 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{a_n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+2}$$ ← 분모, 분자를 3^n으로 나눈다.

$$=\frac{2+0}{2\times 0+2}=1$$

046 정답 $\frac{3}{4}$

$1+4+4^2+\cdots+4^n=\dfrac{4^{n+1}-1}{4-1}=\dfrac{1}{3}(4^{n+1}-1)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{1+4+4^2+\cdots+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)}$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4-\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{3}{4}$$

047 정답 $\frac{5}{4}$

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^{n+1}-5)-(5^n-5)$$
$$=5^{n+1}-5^n=4\times 5^n\ (n\ge 2)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-5}{4\times 5^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{4}=\frac{5}{4}$$

048 정답 ③

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로 $-1<r\le 1$이다.

ㄱ. 등비수열 $\left\{\left(-\frac{r}{2}\right)^n\right\}$의 공비는 $-\frac{r}{2}$이고,

$-\frac{1}{2}\le-\frac{r}{2}<\frac{1}{2}$이므로 수렴한다.

ㄴ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{r-1}{2}\right)^n\right\}$의 공비는 $\frac{r-1}{2}$이고,

$-1<\frac{r-1}{2}\le 0$이므로 수렴한다.

ㄷ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{r}{2}-1\right)^n\right\}$의 공비는 $\frac{r}{2}-1$이고,

$-\frac{3}{2}<\frac{r}{2}-1\le-\frac{1}{2}$이므로 항상 수렴하는 것은 아니다.

따라서 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

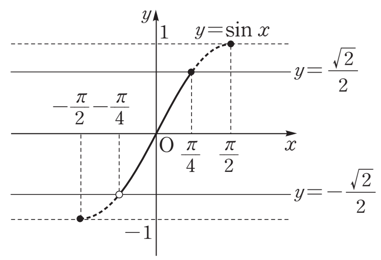
049 정답 $-\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{4}$

공비가 $\sqrt{2}\sin x$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\sqrt{2}\sin x\le 1$이어야 한다.

$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $y=\sin x$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 x의 값의 범위는

$$-\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{4}$$

050 정답 $-1\le x\le 2$

공비가 $\frac{x^2-x}{2}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-x}{2}\le 1$이어야 한다.

즉, $x^2-x+2>0$이고 $x^2-x-2\le 0$

(i) $x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2-x+2>0$이다.

(ii) $x^2-x-2\le 0$에서

$(x-2)(x+1)\ge 0 \qquad \therefore -1\le x\le 2$

(i), (ii)에 의하여 주어진 등비수열이 수렴하기 위한 x의 값의 범위는 $\quad -1\le x\le 2$

051 정답 $\begin{cases}0\ (0<r<1)\\1\ (r=1)\\2\ (r>1)\end{cases}$

(i) $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1+r^n}=\frac{0}{1+0}=0$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1+r^n}=\frac{2}{1+1}=1$$

(iii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{2}{0+1}=2$$

따라서 $0<r<1$일 때 0에 수렴하고, $r=1$일 때 1에 수렴하고, $r>1$일 때 2에 수렴한다.

052 정답 ③

ㄱ. $|r|>1$, 즉 $r^2>1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=\infty$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3r^{2n}}{2+r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\frac{2}{r^{2n}}+1}=\frac{3}{0+1}=3\ (\text{참})$$

ㄴ. $|r|<1$, 즉 $r^2<1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3r^{2n}}{2+r^{2n}}=\frac{0}{2+0}=0\ (\text{거짓})$$

ㄷ. $|r|=1$, 즉, $r^2=1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3r^{2n}}{2+r^{2n}}=\frac{3}{2+1}=1\ (\text{참})$$

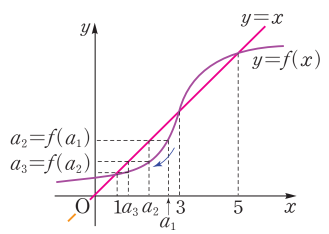
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

053 정답 ⑤

$$f(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2}{3^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{3-0}{1+0}=3$$

054 정답 (1) 1 (2) 5

(1)



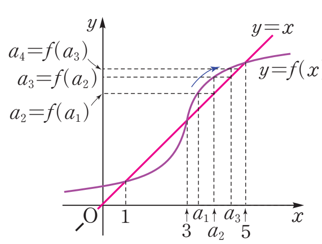
$1<a_1<3$일 때, $a_{n+1}=f(a_n)$이므로 위의 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 이용하여

$a_2=f(a_1)$, $a_3=f(a_2)$, $a_4=f(a_3)$, $\cdots$

의 값을 조사해 가면 n의 값이 한없이 커질 때 a_n의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 중 x좌표가 1인 값에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=1$

(2)



$3<a_1<5$일 때, (1)과 같은 방법으로 조사해 가면 n의 값이 한없이 커질 때 a_n의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 중 x좌표가 5인 값에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=5$

055 정답 ①

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$일 때, $0<\sin\theta<\cos\theta$이므로

$$0<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^n\theta-2\cos^n\theta}{\cos^n\theta+2\sin^n\theta}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n-2}{1+2\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n}$$

$$=\frac{0-2}{1+0}=-2$$

056 정답 2

공비가 $\frac{2^x-1}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{2^x-1}{3}\le 1$이어야 한다.

즉, $-3<2^x-1\le 3$에서

$-2<2^x\le 4$

이때 $2^x>0$이므로 $2^x\le 4$에서

$x\le 2$

따라서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 x의 최댓값은 2이다.

057 정답 $\begin{cases} a\ (a\ge b) \\ b\ (a<b) \end{cases}$

$a>b$, $a<b$, $a=b$인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $a>b$일 때

$0<\frac{b}{a}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$=\frac{a+0}{1+0}=a$$

(ii) $a<b$일 때

$0<\frac{a}{b}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}$$

$$=\frac{0+b}{0+1}=b$$

(iii) $a=b$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a^{n+1}}{2a^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} a=a$$

058 정답 ⑤

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+4}{x^n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2\times x^n+4}{x^n-2}$$
$$=\frac{x^2\times 0+4}{0-2}=-2$$
$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$$

(ii) $|x|>1$일 때, $0<\frac{1}{|x|}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+4}{x^n-2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\frac{4}{x^n}}{1-\frac{2}{x^n}}=\frac{x^2+0}{1-0}=x^2$$
$$\therefore f(2)=2^2=4$$

(i), (ii)에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)=(-2)+4=2$

059 정답 $\frac{\pi}{6}$ 서술형

$\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $0<\theta<\frac{\pi}{4}$일 때 $0<\tan\theta<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^n\theta+1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta\text{이므로}$$

$\cos^2\theta=\frac{3}{4}$에서 $\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

그런데 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$ … ①

(ii) $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 $\tan\theta=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta=1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\tan^n\theta+2}{1+\tan^2\theta}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$ … ②

(iii) $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때 $\tan\theta>1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta=\infty$ … ③

따라서 주어진 등식을 만족하는 θ의 값은 $\frac{\pi}{6}$이다. … ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$0<\theta<\frac{\pi}{4}$인 경우 $\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^n\theta+1}{1+\tan^2\theta}$의 값 구하기	30%
②	$\theta=\frac{\pi}{4}$인 경우 $\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^n\theta+1}{1+\tan^2\theta}$의 값 구하기	30%
③	$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$인 경우 $\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^n\theta+1}{1+\tan^2\theta}$의 값 구하기	30%
④	$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^n\theta+1}{1+\tan^2\theta}=\frac{3}{4}$을 만족하는 θ의 값 구하기	10%

3. 급수

유형 pp.40~51

001 정답 (1) **수렴, 1** (2) **발산** (3) **발산**

(1) 주어진 급수의 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}-\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$=\left(\frac{2}{1}-\cancel{\frac{3}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{3}{2}}-\cancel{\frac{4}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{4}{3}}-\cancel{\frac{5}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{n+1}{n}}-\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=2-\frac{n+2}{n+1}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=1$이므로

주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

(2) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 부분 합을 S_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\text{이므로}$$
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\cancel{\sqrt{2}}-1)+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(3) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$a_n=\log\frac{n}{n+1}=\log n-\log(n+1)\text{이므로}$$
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{\log k-\log(k+1)\}$$
$$=(\log 1-\cancel{\log 2})+(\cancel{\log 2}-\cancel{\log 3})+(\cancel{\log 3}-\cancel{\log 4})+\cdots+\{\cancel{\log n}-\log(n+1)\}$$
$$=\log 1-\log(n+1)$$
$$=-\log(n+1)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\{-\log(n+1)\}=-\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

002 정답 (1) **2** (2) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (3) **1**

(1) 주어진 급수의 제n항은

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$
$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이므로 부분합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

따라서 구하는 급수의 합은 2이다.

(2) 주어진 급수의 제 n항은

$$a_n=\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

이므로 부분합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 급수의 합은 $\frac{1}{2}$이다.

(3) 주어진 급수의 제 n항은

$$a_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

이므로 부분합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$$

따라서 구하는 급수의 합은 1이다.

003 정답 (1) 4 (2) 3

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (단, α, β는 실수)로 놓으면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)=10$, $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=9$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=10,\ 3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=9$$

즉, $\alpha-3\beta=10$, $3\alpha-2\beta=9$이므로 연립하여 풀면

$$\alpha=1,\ \beta=-3$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha-\beta$$
$$=1-(-3)=4$$

(2) $a_n+b_n=p_n$ …… ㉠, $a_n-2b_n=q_n$ …… ㉡

으로 놓으면

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n=4,\ \sum_{n=1}^{\infty}q_n=1$$

㉠×2+㉡을 하면 $a_n=\frac{1}{3}(2p_n+q_n)$

이때, 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$이 모두 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}(2p_n+q_n)=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}p_n+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}q_n$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3$$

004 정답 (1) $\frac{5}{7}$ (2) 4 (3) 풀이 참조

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-1)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-1)=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+1}{a_n+2}=\frac{2\lim_{n\to\infty}a_n+1}{\lim_{n\to\infty}a_n+2}=\frac{2\times\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}+2}=\frac{5}{7}$$

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+4n+1}{2a_n+n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3a_n}{n}+4+\frac{1}{n}}{\frac{2a_n}{n}+1+\frac{3}{n}}$$
$$=\frac{0+4+0}{0+1+0}=4$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{n^2}}=2\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

개념 보충

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ $(a\neq0)$은

① $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

② $|r|\geq1$일 때, 발산한다.

[증명]

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ $(a\neq0)$의 첫째항부터 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

(i) $r=1$일 때,

$$S_n=\overbrace{a+a+a+\cdots+a}^{n\text{개}}=na$$

이때, $a>0$이면 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}na=\infty$

$a<0$이면 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}na=-\infty$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$은 발산한다.

(ii) $r \neq 1$일 때,

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

① $-1 < r < 1$이면 $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
$$= \frac{a}{1-r}$$

이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$ 이다.

② $r > 1$이면 $\lim_{n \to \infty} r^n = \infty$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

③ $r \leq -1$이면 수열 $\{r^n\}$은 진동하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

005 정답 (1) **12** (2) $\mathbf{\frac{13}{6}}$ (3) $\mathbf{-\frac{1}{5}}$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
$$= 4 \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 12$$

(2) $\frac{2^n+3^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n$이고,

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$은 각각 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$
$$= \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} + \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{4^n}$

$$= \frac{-1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{-1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$ ← 공비가 $-\frac{1}{4}$인 등비급수

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}$$
$$= \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{5}$$

006 정답 (1) $\mathbf{-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}}$ (2) $\mathbf{0 < x < 2}$ (3) $\mathbf{-2 < x \leq 0}$

(1) 첫째항이 1이고 공비가 $-3x$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면 $-1 < -3x < 1$이어야 한다.

$\therefore -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

(2) 첫째항이 1이고 공비가 $x-1$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면 $-1 < x-1 < 1$이어야 한다.

$\therefore 0 < x < 2$

(3) 첫째항이 x이고 공비가 $x+1$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면 $x=0$ 또는 $-1 < x+1 < 1$이어야 한다.

(i) $x=0$

(ii) $-1 < x+1 < 1$에서 $-2 < x < 0$

(i), (ii)에서 $-2 < x \leq 0$

007 정답 **4**

전체를 축소하여 부분과 겹칠 수 있으므로

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{A_3B_3}} = \cdots$$

즉, 수열 $\{\overline{A_nB_n}\}$은 공비가 $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}$인 등비수열이다.

$\angle AOB = 30^\circ$이므로

$$\overline{A_1B_1} = \overline{OA_1} \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$\angle A_1B_1A_2 = 30^\circ$이므로

$$\overline{A_2B_1} = \overline{A_1B_1} \cos 30^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

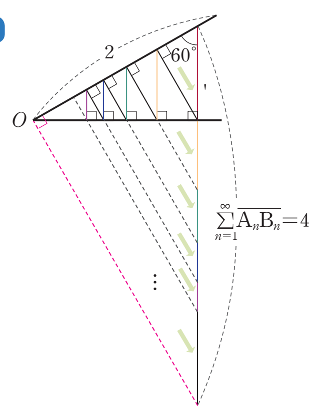
$\angle B_1A_2B_2 = 30^\circ$이므로

$$\overline{A_2B_2} = \overline{A_2B_1} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

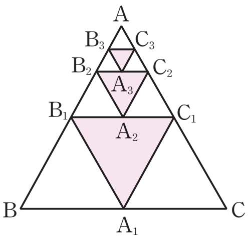
$\vdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_nB_n} = \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \overline{A_3B_3} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots$$
$$= \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$$

다른 풀이



008 정답 $3\sqrt{3}$



정삼각형 $A_1B_1C_1$의 한 변의 길이는 3이므로 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이는

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$\overline{AB}:\overline{AB_1}=1:\frac{1}{2}$이므로 정삼각형 $A_nB_nC_n$과 정삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는 $1:\frac{1}{2}$이고, 정삼각형의 넓이를 항으로 하는 수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}}=3\sqrt{3}$$

확인문제 pp.40~51

060 정답 (1) 수렴, $\frac{1}{2}$ (2) 수렴, $\frac{1}{2}$ (3) 발산

(1) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{2}$이다.

(2) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{2}$이다.

(3) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$a_n=\log\frac{2n-1}{2n+1}=\log(2n-1)-\log(2n+1)$$

이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{\log(2k-1)-\log(2k+1)\}$$
$$=(\log 1-\cancel{\log 3})+(\cancel{\log 3}-\cancel{\log 5})$$
$$+(\cancel{\log 5}-\cancel{\log 7})+\cdots$$
$$+\{\cancel{\log(2n-1)}-\log(2n+1)\}$$
$$=\log 1-\log(2n+1)=-\log(2n+1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\{-\log(2n+1)\}=-\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

061 정답 수렴, $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

주어진 급수의 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$
$$=\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\frac{1}{\sqrt{1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$
$$+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{6}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

062 정답 $\frac{1}{3}$

주어진 급수의 제n항은

$$a_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

이므로 부분합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{3n-2}}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 급수의 합은 $\frac{1}{3}$이다.

063 정답 $\frac{3}{4}$

주어진 급수의 제n항이

$$a_n=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

이므로 부분합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

064 정답 5

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (단, α, β는 실수)로 놓으면

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=7$, $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)=3$에서

$$2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=7,\ 3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3$$

즉, $2\alpha+\beta=7$, $3\alpha-\beta=3$이므로 연립하여 풀면

$$\alpha=2,\ \beta=3$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha+\beta=2+3=5$$

065 정답 1

$a_n+2b_n=p_n$ ⋯⋯ ㉠, $2a_n-b_n=q_n$ ⋯⋯ ㉡

으로 놓으면

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n=3,\ \sum_{n=1}^{\infty}q_n=1$$

㉠+㉡×2를 하면 $a_n=\frac{1}{5}(p_n+2q_n)$

이때, 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$이 모두 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}(p_n+2q_n)$$
$$=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}p_n+\frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}q_n=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$$

066 정답 (1) −1 (2) 3

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3)=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{3}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(4a_n+5)=4\lim_{n\to\infty}a_n+5=4\times\left(-\frac{3}{2}\right)+5=-1$$

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n-1}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n-1}{n+1}\right)=0$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(2a_n-1)=2\lim_{n\to\infty}a_n-1=2\times2-1=3$$

067 정답 풀이 참조

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2\neq0$이므로 주어진 급수는 발산

한다.

068 정답 (1) 6 (2) $\frac{10}{3}$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{4}}=6$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$

$$=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$

069 정답 $\frac{2}{5}$

$\sin\frac{n\pi}{2}$의 n에 1, 2, 3, 4, 5, 6, ⋯을 차례로 대입하면 1, 0, −1, 0, 1, 0, ⋯이 되므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$의 값을 알아보면

$n=1$일 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^1\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$

$n=2$일 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin\pi=0$

$n=3$일 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^3\sin\frac{3}{2}\pi=-\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$n=4$일 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^4\sin2\pi=0$

$n=5$일 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^5\sin\frac{5}{2}\pi=\left(\frac{1}{2}\right)^5$

⋮

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5-\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots$$ ← 공비가 $-\frac{1}{4}$인 등비급수
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2}{5}$$

070 정답 (1) $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ (2) $-2<x<2$

(1) 공비가 $2x$이므로 $-1<2x<1$

$$\therefore\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

(2) 첫째항이 x이고 공비가 $-\frac{x^2}{4}$이므로

(i) $x=0$이면 수렴한다.

(ii) $-1<-\frac{x^2}{4}<1$, 즉 $-4<x^2<4$에서

$$-2<x<2$$

(i), (ii)에서

$$-2<x<2$$

071 정답 $x<-2$ 또는 $x\geq 0$, $S=\begin{cases} x+1 & (x<-2 \text{ 또는 } x>0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

주어진 급수는 첫째항이 x이고 공비가 $\frac{1}{1+x}$인 등비급수이므로 수렴하려면 $x=0$ 또는 $-1<\frac{1}{1+x}<1$이어야 한다.

(i) $x=0$일 때,

주어진 급수의 합은 $S=0$이다.

(ii) $-1<\frac{1}{1+x}<1$일 때,

① $1+x>0$, 즉 $x>-1$이면

$-1<\frac{1}{1+x}<1$에서

$$-x-1<1<x+1$$

$$\therefore\ x>0$$

이때, $x>-1$이므로 $x>0$

② $1+x<0$, 즉 $x<-1$이면

$-1<\frac{1}{1+x}<1$에서

$$-x-1>1>x+1$$

$$\therefore\ x<-2$$

주어진 등비급수는 수렴하고 그 합은

$$S=\frac{x}{1-\frac{1}{1+x}}=x+1$$

(i), (ii)에서 주어진 급수가 수렴하도록 하는 x의 값의 범위는

$$x<-2 \text{ 또는 } x\geq 0$$

이고 그 합은 $S=\begin{cases} x+1 & (x<-2 \text{ 또는 } x>0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$이다.

072 정답 $\frac{9}{5}$

점 P_n의 좌표를 (x_n, y_n)이라 하면

$$x_1=1=x_2,\ x_3=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2=x_4,$$

$$x_5=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4=x_6$$

$$x_7=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^6=x_8$$

$$\vdots$$

$$\therefore\ \alpha=\lim_{n\to\infty}x_n=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}$$

073 정답 12π

원 S_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$$r_1=3,\ r_2=\frac{1}{2}r_1=3\times\frac{1}{2}$$

$$r_2=\frac{1}{2}r_2=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

이므로 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 3이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ r_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이때, 원 S_n의 넓이는

$$\pi r_n^{\ 2}=\pi\left\{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2=9\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

따라서 구하는 원의 넓이의 합은 첫째항이 9π이고, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수의 합이므로

$$\frac{9\pi}{1-\frac{1}{4}}=12\pi$$

연습문제 I .... pp.52~58

074 정답 (1) 수렴, 1 (2) 발산 (3) 수렴, $\frac{3}{4}$

(1) 주어진 급수의 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}-\frac{k-1}{k}\right)$$

$$=\left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}-\frac{0}{1}\right)+\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}-\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\right)+\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}-\cancel{\frac{n-1}{n}}\right)$$

$$=\frac{n}{n+1}-0=\frac{n}{n+1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

(2) 주어진 급수의 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=(\sqrt{3}-\cancel{\sqrt{2}})+(\sqrt{4}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{n+2}-\cancel{\sqrt{n+1}})$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(3) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{3}{4}$이다.

075 정답 수렴, $\frac{5}{12}$

주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(n+2)^2-1}=\frac{1}{n^2+4n+3}$$
$$=\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{5}{12}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{5}{12}$이다.

076 정답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) 1

(1) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\times2}-\cancel{\frac{1}{2\times3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2\times3}}-\cancel{\frac{1}{3\times4}}\right)+\cdots+\left\{\cancel{\frac{1}{n(n+1)}}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\frac{1}{4}$$

(2) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$
$$=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

따라서 구하는 급수의 합은 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$

077 정답 1

이차방정식 $x^2+x-(n^2+n)=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=-1,\ \alpha_n\beta_n=-(n^2+n)$$
$$\therefore \frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

구하는 급수의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\beta_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

따라서 구하는 급수의 합은 1이다.

078 정답 ②

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2}{2n^2+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-4n+1}{2n^2+1} = \frac{4}{2} = 2$$

079 정답 -2

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2-2\alpha = 8$$
에서 $\alpha=-3$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2\times 2+\alpha = \beta$$
에서 $4+(-3)=1=\beta$
$$\therefore\ \alpha+\beta = (-3)+1 = -2$$

080 정답 4

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)$가 수렴하므로
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)=0$$
따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$이므로
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+a_n}{3n-a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{a_n}{n}}{3-\frac{a_n}{n}} = \frac{2+2}{3-2} = 4$$

081 정답 -1

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{5^n}=0$이다.
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-5^n+3^n}{5^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{5^n}-1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}$$
$$= \frac{0-1+0}{1+0} = -1$$

082 정답 9

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)$이 각각 수렴하므로
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0,\ \lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=0$$
따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}b_n=6$이므로
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}a_n + \lim_{n\to\infty}b_n = 3+6 = 9$$

083 정답 1

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=2$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n+2a_n}{S_n-a_n} = \frac{2+0}{2-0} = 1$$

084 정답 1

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2+1}{n^2+n}$이 수렴하므로
$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = a = 0$$
이때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2+1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 부분합 S_n은
$$S_n = \left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{n+1}$$
따라서 구하는 급수의 합은
$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1 = b$$
$$\therefore\ a^2+b^2 = 0+1 = 1$$

085 정답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) 4

(1) $\frac{1+2^n}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$이고,

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$이 수렴하므로
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{5}{2}$$

(2) $\frac{1-(-2)^n}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$이고,

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$이 수렴하므로
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-2)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} - \frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

(3) $3\times 2^{-n}+2\times 3^{-n} = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$이고,

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$이 수렴하므로
$$\sum_{n=1}^{\infty}(3\times 2^{-n}+2\times 3^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$= 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= 3\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + 2\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 4$$

086 정답 2

$\sum_{n=1}^{\infty} r^{3n}=\frac{r^3}{1-r^3}=\frac{8}{19}$에서 $19r^3=8-8r^3$

즉, $r^3=\frac{8}{27}$이므로 $\quad r=\frac{2}{3}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} r^n=\frac{r}{1-r}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$$

087 정답 ③

$$S=(1-r)+r(1-r^2)+r^2(1-r^3)+r^3(1-r^4)+\cdots$$
$$=(1+r+r^2+r^3+\cdots)-(r+r^3+r^5+r^7+\cdots)$$
$$=\frac{1}{1-r}-\frac{r}{1-r^2}$$
$$=\frac{1+r-r}{1-r^2}=\frac{1}{1-r^2}$$

$r=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

088 정답 64

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$a_1+a_3+a_5=a+ar^2+ar^4$$
$$=a(1+r^2+r^4)=42 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$a_2+a_4+a_6=ar+ar^3+ar^5$$
$$=ar(1+r^2+r^4)=21 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면 $r=\frac{1}{2}$이므로 ㉠에 대입하면

$$a\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)=42$$

$\therefore a=32$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{32}{1-\frac{1}{2}}=64$$

089 정답 $\frac{5}{8}$

수열 $\{a_n\}$은

1, 2, 1, 2, 1, 2, $\cdots$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\cdots\right)+\left(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3^2}}+\frac{\frac{2}{3^2}}{1-\frac{1}{3^2}}=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$$

090 정답 $\frac{8}{7}$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$-1<r<1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a}{1-r}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2=a^2+a^2r^2+a^2r^4+\cdots$에서

$0<r^2<1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1+r}\times\frac{a}{1-r}=2\times\frac{a}{1+r}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{a}{1+r}=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠÷㉡을 하면 $\frac{1+r}{1-r}=3$이므로 $\quad r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^3=a^3+a^3r^3+a^3r^6+\cdots$$
$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{8}{7}$$

091 정답 ①

$3^{n+1}-3^n=3^n(3-1)=2\times 3^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}-3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\times 3^n}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

092 정답 ①

세 급수가 모두 수렴하므로 $\quad -1<r<1$

이때, $S_1=\frac{1}{1-r}$, $S_2=\frac{1}{1-r^2}$, $S_3=\frac{1}{1-r^3}$이고

$S_1S_2=S_3$이므로

$$\frac{1}{1-r}\times\frac{1}{1-r^2}=\frac{1}{1-r^3}$$

즉, $\frac{1}{1-r}\times\frac{1}{1-r^2}=\frac{1}{(1-r)(1+r+r^2)}$

$$1+r+r^2=1-r^2$$

$r(2r+1)=0 \quad \therefore r=-\frac{1}{2}$ ($\because r\neq 0$)

093 정답 3

주어진 등비급수의 공비가 $\frac{2x-1}{7}$이므로 $-1<\frac{2x-1}{7}<1$

$-6<2x<8 \quad \therefore -3<x<4$

따라서 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$으로 그 합은 3이다.

094 정답 ⑤

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$ …… ㉠

ㄱ. 공비가 r^2이고, ㉠에 의하여 $0\le r^2<1$이므로 등비급수

$\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$은 수렴한다.

ㄴ. 공비가 $\frac{1-r}{2}$이고, ㉠에 의하여 $0<\frac{1-r}{2}<1$이므로

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-r}{2}\right)^n$은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$에서

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$의 공비 $-r$는 $-1<-r<1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}r^n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 모두 수렴한다.

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}$은 수렴한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

095 정답 6

첫째항이 $x-1$이고 공비가 $\log_2 x-1$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

(i) 첫째항이 0일 때, $x-1=0$에서 $x=1$

(ii) $-1<(\text{공비})<1$일 때, 즉 $-1<\log_2 x-1<1$에서

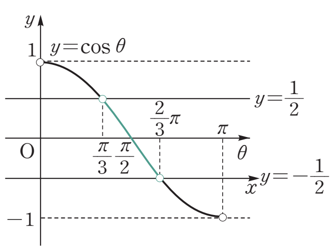
$0<\log_2 x<2 \qquad \therefore 1<x<4$

따라서 정수 x는 1, 2, 3이므로 모든 정수 x의 합은

$1+2+3=6$

096 정답 π

주어진 등비급수는 첫째항이 $2\cos\theta$이고, 공비가 $2\cos\theta$이므로 수렴하려면



$-1<2\cos\theta<1$

$\therefore -\frac{1}{2}<\cos\theta<\frac{1}{2}$

…… ㉠

위의 그래프에서 부등식 ㉠을 만족하는 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi \qquad \therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi=\pi$

097 정답 ①

$-1<r<1$이므로

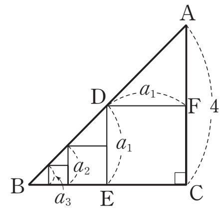
$\sum_{n=1}^{\infty}r^n=\frac{r}{1-r}=\frac{1-(1-r)}{1-r}=\frac{1}{1-r}-1$

그런데 $-1<-r<1$이므로 $0<1-r<2$에서

$\frac{1}{1-r}>\frac{1}{2} \qquad \therefore \frac{1}{1-r}-1>-\frac{1}{2}$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$의 합이 될 수 없는 것은 $-\frac{1}{2}$이다.

098 정답 4



$\triangle ADF \backsim \triangle ABC$이므로

$\overline{DF}:\overline{BC}=\overline{AF}:\overline{AC}$

즉, $a_1:4=(4-a_1):4$

$a_1=4-a_1 \qquad \therefore a_1=2$

이때, 전체($\triangle ABC$)를 축소하여 부분($\triangle DBE$)과 겹치게 할 수 있으므로

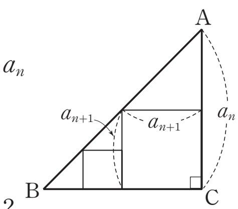
$\left(\frac{2}{4}=\right)\frac{a_1}{\overline{AC}}=\frac{a_2}{a_1}=\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$

개념 보충

a_n과 a_{n+1} 사이에는 마찬가지로 다음의 관계식이 성립한다.



$a_{n+1}:a_n=(a_n-a_{n+1}):a_n$

$a_{n+1}=a_n-a_{n+1}$

$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

따라서 주어진 수열은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

099 정답 $\left(\frac{25}{41}, \frac{20}{41}\right)$

점 P가 점 (x, y)에 한없이 가까워진다고 하면

$$x=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$$
$$=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^4-\left(\frac{4}{5}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{16}{25}\right)}$$
$$=\frac{25}{41}$$

$$y=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$$
$$=\frac{4}{5}-\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{5}\right)^5-\left(\frac{4}{5}\right)^7+\cdots$$
$$=\frac{\frac{4}{5}}{1-\left(-\frac{16}{25}\right)}$$
$$=\frac{20}{41}$$

따라서 점 P는 $\left(\frac{25}{41}, \frac{20}{41}\right)$에 한없이 가까워진다.

100 정답 ⑤

$\overline{A_1A_2}=2$이므로 $\quad l_1=\pi$

선분 A_nA_{n+1}을 $1:2$로 내분하는 점이 A_{n+2}이므로

$$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}=\frac{2}{3}\overline{A_nA_{n+1}}$$

반원의 호의 길이는 반지름의 길이에 비례하므로

$$l_{n+1}=\frac{2}{3}l_n$$

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $l_1=\pi$이고 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$l_n=\pi\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{\pi}{1-\frac{2}{3}}=3\pi$$

101 정답 3

$\triangle A_nB_nC_n$과 $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비가 $1:\frac{1}{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{4}$이다.

$\triangle A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라 하면 $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 넓이는 $\triangle A_nB_nC_n$의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$$S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$$

또, $S_1=\frac{1}{4}\times 9=\frac{9}{4}$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{9}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{1}{4}}=3$$

102 정답 36

매 회에 제거되는 정사각형의 넓이와 개수를 조사해보면 다음과 같다.

	정사각형의 넓이	정사각형의 개수	제거되는 넓이
1회	1	1	1
2회	$\frac{1}{9}$	4	$\frac{4}{9}$
3회	$\frac{1}{9^2}$	4^2	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$
⋮	⋮	⋮	⋮

이때, 제거되는 정사각형의 넓이를 D라고 하면

$$D=1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots=\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}$$

따라서 남은 부분의 넓이 S는

$$S=9-D=9-\frac{9}{5}=\frac{36}{5}$$

$$\therefore 5S=36$$

연습문제 Ⅱ

p.59

103 정답 (1) 발산 (2) -1

(1) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=\log\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\\&=\log(n^2-n+1)-\log(n^2+n+1)\\&=\log\{n(n-1)+1\}-\log\{n(n+1)+1\}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}[\log\{k(k-1)+1\}-\log\{k(k+1)+1\}]\\&=(\log 1-\cancel{\log 3})+(\cancel{\log 3}-\cancel{\log 7})\\&\quad+(\cancel{\log 7}-\cancel{\log 13})\\&\quad+\cdots+[\cancel{\log\{n(n-1)+1\}}-\log\{n(n+1)+1\}]\\&=\log 1-\log\{n(n+1)+1\}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}[\log 1-\log\{n(n+1)+1\}]=-\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=\log_2\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\\&=\log_2\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)\\&=\log_2\frac{n}{n+1}+\log_2\frac{n+2}{n+1}\\&=\log_2\frac{n}{n+1}-\log_2\frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\log_2\left(\frac{k}{k+1}\right)-\log_2\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\right\}\\&=\left(\log_2\frac{1}{2}-\cancel{\log_2\frac{2}{3}}\right)+\left(\cancel{\log_2\frac{2}{3}}-\cancel{\log_2\frac{3}{4}}\right)\\&\quad+\left(\cancel{\log_2\frac{3}{4}}-\cancel{\log_2\frac{4}{5}}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\cancel{\log_2\frac{n}{n+1}}-\log_2\frac{n+1}{n+2}\right)\\&=\log_2\frac{1}{2}-\log_2\frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\log_2\frac{1}{2}-\log_2\frac{n+1}{n+2}\right)\\&=\log_2\frac{1}{2}-\log_2 1\\&=-1\end{aligned}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 -1이다.

104 정답 (1) **수렴, 1** (2) **수렴, 1** (3) **수렴, -1** (4) **발산**

(1) 주어진 급수의 제n항$(n\geq 2)$까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

(2) 자연수 m에 대하여 $\lim_{m\to\infty}S_{2m}$, $\lim_{m\to\infty}S_{2m+1}$의 극한값을 각각 조사하자.

$$S_{2m}=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{m}}-\frac{1}{m+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{m+1}$$

$$S_{2m+1}=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{m}}-\cancel{\frac{1}{m+1}}\right)+\cancel{\frac{1}{m+1}}=1$$

이때, $\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=1$이므로 주어진 급수는 1에 수렴한다.

(3) 주어진 급수의 제n항$(n\geq 2)$까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\left(\frac{0}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{2}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{2}{3}}-\cancel{\frac{3}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{n-1}{n}}-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=-\frac{n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n+1}\right)=-1$$

따라서 주어진 급수는 -1에 수렴한다.

(4) 자연수 m에 대하여 $\lim_{m\to\infty}S_{2m}$, $\lim_{m\to\infty}S_{2m+1}$의 극한값을 각각 조사하자.

$$S_{2m}=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{2}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{2}{3}}-\cancel{\frac{3}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{m-1}{m}}-\frac{m}{m+1}\right)=1-\frac{m}{m+1}$$

$$S_{2m+1}=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{2}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{2}{3}}-\cancel{\frac{3}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{m-1}{m}}-\cancel{\frac{m}{m+1}}\right)+\cancel{\frac{m}{m+1}}$$

$$=1$$

이때, $\lim_{m\to\infty}S_{2m}=0$, $\lim_{m\to\infty}S_{2m+1}=1$이고

$\lim_{m\to\infty}S_{2m}\neq\lim_{m\to\infty}S_{2m+1}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n+1}\right)=-1$, $\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$이다.

따라서 주어진 급수는 발산한다.

개념 보충

항의 부호가 교대로 바뀌는 급수를 교대급수라 한다.
급수가 α에 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$ (상수)이므로 자연수 m에 대하여

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\alpha \text{ (상수)}$$

가 성립한다.
또, $\lim_{m\to\infty}S_{2m}$, $\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}$ 각각은 수렴하지만 그 값이 다르면, 즉

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m}\neq\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}$$

이면 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 진동(발산)한다.
따라서 교대급수의 경우 $\lim_{m\to\infty}S_{2m}$, $\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}$의 극한값을 각각 조사하여 비교한다.

105 정답 ④

주어진 급수의 일반항을 a_n이라 하면

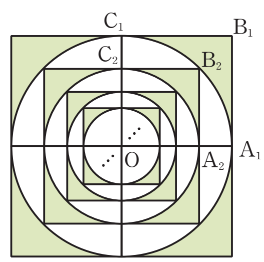
$$a_n=\frac{3^n-5^{-n}}{5^n-3^{-n}}=\frac{\frac{15^n-1}{5^n}}{\frac{15^n-1}{3^n}}=\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-5^{-n}}{5^n-3^{-n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{3}{2}$$

106 정답 ②

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 S라고 하면, 구하고자 하는 넓이는 $\frac{1}{4}S$이다.



색칠한 부분의 넓이를 맨 바깥쪽부터 차례로 S_1, S_2, $\cdots$라고 하면

$$S_1=(2\sqrt{2})^2-\pi(\sqrt{2})^2$$
$$=2(4-\pi)$$

$\overline{OA_1}=\overline{OB_2}=\sqrt{2}$에서 $\overline{OA_2}=1$이므로

$$S_2=2^2-\pi\times1^2=4-\pi$$

이때, 수열 $\{S_n\}$은 $S_1=2(4-\pi)$이고

공비가 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{S_3}{S_2}=\cdots=\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

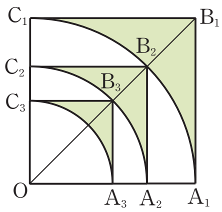
$$\therefore\ S=\frac{2(4-\pi)}{1-\frac{1}{2}}=4(4-\pi)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{4}S=4-\pi$$

다른 풀이

오른쪽 그림에서 정사각형 $OA_nB_nC_n$의 넓이에서 사분원 OA_nC_n의 넓이를 뺀 값을 a_n이라고 하면



$$a_1=(\sqrt{2})^2-\frac{1}{4}\times(\sqrt{2})^2\pi$$

$$=2-\frac{\pi}{2}$$

$\overline{OB_1}=2\sqrt{2}$, $\overline{OB_2}=\sqrt{2}$이므로 정사각형 $OA_2B_2C_2$의 한 변의 길이는 1이다. 즉, 색칠한 도형은 모두 닮음이고 닮음비는

$\sqrt{2}:1=1:\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

따라서 넓이의 비는 $1:\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1:\frac{1}{2}$이므로

구하는 합은

$$\frac{2-\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}}=4-\pi$$

107 정답 **모든 실수, $S=\begin{cases} x^2+1 & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$** 서술형

주어진 급수는 첫째항이 x^2이고 공비가 $\frac{1}{1+x^2}$인 등비급수이므로 수렴하려면 $x^2=0$ 또는 $-1<\frac{1}{1+x^2}<1$이어야 한다. … ①

(i) $x^2=0$, 즉 $x=0$일 때,

주어진 급수의 합은 $S=0$ … ②

(ii) $-1<\frac{1}{1+x^2}<1$일 때,

모든 실수 x에 대하여 $1+x^2\geq 1$, 즉 $0<\frac{1}{1+x^2}\leq 1$이므로

$\frac{1}{1+x^2}\neq 1$, 즉 $x\neq 0$일 때 수렴하고 그 합은

$$S=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=x^2+1 \quad \cdots ③$$

(i), (ii)에서 주어진 급수는 모든 실수 x에 대하여 수렴하고,

$$S=\begin{cases} x^2+1 & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases} \quad \cdots ④$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	등비급수가 수렴할 조건 알기	30%
②	(첫째항)=0일 때, 등비급수의 합 구하기	20%
③	$-1<$(공비)<1일 때, 등비급수의 합 구하기	30%
④	급수가 수렴하도록 하는 x의 값의 범위와 합 S를 나타내기	20%

Ⅱ 미분법

4. 지수함수와 로그함수의 극한과 미분

유형 ………………………… pp.65~74

001 정답 (1) **0** (2) **1** (3) **−1**

(1) $\lim_{x\to 0}3^x=1$, $\lim_{x\to 0}2^x=1$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}=\frac{1-1}{1+1}$$

$$=0$$

(2) $0<a<1$일 때 $\lim_{x\to\infty}a^x=0$이므로

분모, 분자를 각각 3^x으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}$$

$$=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(3) $a>1$일 때 $\lim_{x\to-\infty}a^x=0$이므로

분모, 분자를 각각 2^x으로 나누면

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}$$

$$=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

002 정답 (1) **2** (2) **1** (3) **2**

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{3x+15}{x+1}=9$이므로

$$\lim_{x\to 1}\log_3\frac{3x+15}{x+1}=\log_3 9$$

$$=2$$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+15}{x+1}=3$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{3x+15}{x+1}=\log_3 3$$

$$=1$$

(3) $\log_2(4x+1)-\log_2 x=\log_2\frac{4x+1}{x}$이고,

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x}=4$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)-\log_2 x\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x+1}{x}$$

$$=\log_2 4=2$$

개념 보충

* e를 이용한 지수함수와 로그함수의 극한

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

[증명] $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$임을 이용하여 증명해보자.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$

$=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$=\ln\left\{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=\ln e=1$

(2) $e^x-1=t$로 놓으면 $e^x=1+t$이므로

$x=\ln(1+t)$이고, $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$$

$$=\frac{1}{\ln\left\{\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}}=\frac{1}{\ln e}=1$$

(3) 로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$$\log_a(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln a}$$

이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x\ln a}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{\ln a}$$

$$=1\times\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}$$

(4) $a^x-1=t$로 놓으면 $x=\log_a(1+t)$이고

$x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(1+t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a$$

003 정답 (1) e^3 (2) e^2 (3) $\frac{1}{e^2}$

(1) $3x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이고, $\frac{1}{x}=\frac{3}{t}$이므로

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^3=e^3$$

(2) $\frac{2}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow0$이고, $x=\frac{2}{t}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2=e^2$$

(3) $-2x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이고,

$\frac{1}{x}=-\frac{2}{t}$이므로

$$\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{2}{t}}=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-2}$$

$$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

004 정답 (1) 3 (2) 20

(1) 로그의 성질에 의하여 $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$이고, $\ln e=1$이므로

$$\ln e^2-2\ln\sqrt{e}+e^{\ln 2}=\ln e^2-\ln(\sqrt{e})^2+2^{\ln e}$$

$$=2-1+2=3$$

(2) $k=\ln 2-\ln 3+\ln 4+\ln 6=\ln\frac{2\times4\times6}{3}=\ln 16$이므로

$$f(k)=e^{\ln 16}+4=16^{\ln e}+4=16+4=20$$

005 정답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) 1

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3}{2}$

$=1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{4}{3}$

$=1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\lim_{x\to0}\frac{3x}{e^{3x}-1}\times\frac{2}{3}$

$=1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x^2+3x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3x}{x^2+3x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{x+3}$

$=1\times\frac{3}{3}=1$

006 정답 $a=1$, $b=3$

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\ln(a+6x)=\ln a=0$이므로 $a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{bx}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{6x}\times\frac{6}{b}=1\times\frac{6}{b}=\frac{6}{b}$$

$\frac{6}{b}=2$에서 $b=3$ $\quad\therefore a=1,\ b=3$

007 정답 (1) $y'=(x+2)e^x$ (2) $y'=2^{x+1}(1+x\ln 2)$

(3) $y'=4e^x(e^x-1)^3$ (4) $y'=\ln x+1$

(5) $y'=\dfrac{2\ln x}{x}$

(6) $y'=(2x+1)\log_3 x+\dfrac{x+1}{\ln 3}$

(7) $y'=e^{x-1}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

함수의 곱의 미분법과 지수함수와 로그함수의 도함수를 이용한다.

(1) $y'=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'$

$=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

(2) $y=x\times 2^{x+1}=2x\times 2^x$이므로

$y'=(2x)'\,2^x+2x(2^x)'$

$=2\times 2^x+2x\times 2^x\ln 2=2^{x+1}(1+x\ln 2)$

(3) $y'=4(e^x-1)^3(e^x-1)'$

$=4(e^x-1)^3e^x=4e^x(e^x-1)^3$

(4) $y'=(x)'\ln x+x(\ln x)'$

$=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

(5) $y'=2\ln x\times(\ln x)'=(2\ln x)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln x}{x}$

(6) $y'=(x^2+x)'\log_3 x+(x^2+x)(\log_3 x)'$

$=(2x+1)\log_3 x+(x^2+x)\times\dfrac{1}{x\ln 3}$

$=(2x+1)\log_3 x+\dfrac{x+1}{\ln 3}$

(7) $y=e^{x-1}\ln x=\dfrac{1}{e}\times e^x\ln x$이므로

$y'=\dfrac{1}{e}\times(e^x)'\ln x+\dfrac{1}{e}\times e^x(\ln x)'$

$=\dfrac{1}{e}\times e^x\ln x+\dfrac{1}{e}\times e^x\times\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{1}{e}\times e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)=e^{x-1}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

확인문제 ······ pp.65~74

108 정답 (1) 1 (2) -1

(1) $0<a<1$일 때 $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=0$이므로

분모, 분자를 각각 4^x으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x-3^x}{4^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^x}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(2) $a>1$일 때 $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$이므로

분모, 분자를 각각 3^x으로 나누면

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x-3^x}{4^x+3^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{4}{3}\right)^x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

109 정답 (1) 1 (2) 0

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{-x}}{2^{-x}+3^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x}{3^x+2^x}$ ← 분모, 분자에 각각 6^x을 곱한다.

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=\dfrac{1}{1+0}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x}{2^x-2^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{2x}}{2^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4^x}{4^x-1}$

$=\dfrac{0}{0-1}=0$

110 정답 (1) 2 (2) 1 (3) -1

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+1}{x-1}=9$이므로

$\lim\limits_{x\to2}\log_3\dfrac{x^3+1}{x-1}=\log_3 9=2$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+2}{3x+1}=3$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\log_3\dfrac{9x+2}{3x+1}=\log_3 3=1$

(3) $\log_2(x+1)-\log_2(2x+1)=\log_2\dfrac{x+1}{2x+1}$이고,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\{\log_2(x+1)-\log_2(2x+1)\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\dfrac{x+1}{2x+1}=\log_2\dfrac{1}{2}=-1$

111 정답 $\dfrac{1}{2}$

$\log_3\sqrt{6x-2}-\log_3\sqrt{2x+1}=\log_3\dfrac{\sqrt{6x-2}}{\sqrt{2x+1}}$

$=\log_3\sqrt{\dfrac{6x-2}{2x+1}}$

$=\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{6x-2}{2x+1}$

이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-2}{2x+1}=3$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}(\log_3\sqrt{6x-2}-\log_3\sqrt{2x+1})$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{6x-2}{2x+1}=\dfrac{1}{2}\log_3 3=\dfrac{1}{2}$

112 정답 (1) e (2) e^5 (3) e^5

(1) $\dfrac{x}{5}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{5}\right)^{\frac{5}{x}}=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{5}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^5=e^5$

(3) $\dfrac{5}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right\}^5$

$=\lim\limits_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^5=e^5$

113 정답 (1) e^6 (2) e^2 (3) $\dfrac{1}{e^2}$

(1) $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\times6}$

$=\lim_{x\to0}\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^6$

$=e^6$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}\times2}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right\}^2=e^2$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-2}$

$=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$

114 정답 ⑤

$\ln e\sqrt{e}+\ln\dfrac{1}{\sqrt{e}}+e^{2\ln3}=\ln e\sqrt{e}-\ln\sqrt{e}+e^{\ln9}$

$=\ln\dfrac{e\sqrt{e}}{\sqrt{e}}+9^{\ln e}$

$=\ln e+9=1+9=10$

115 정답 e

$f(x)=\ln x$의 역함수는 $y=e^x$이므로 $g(x)=e^x$

$\therefore f(1)+g(1)=\ln1+e^1=0+e=e$

116 정답 (1) 2 (2) $\dfrac{3}{\ln2}$ (3) 1

(1) $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+4x)}{2x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+4x)}{4x}\times2$

$=1\times2=2$

(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{\log_2(1+3x)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{\ln(1+3x)}{\ln2}}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x\ln2}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}\times\dfrac{3}{\ln2}$

$=1\times\dfrac{3}{\ln2}=\dfrac{3}{\ln2}$

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\times\dfrac{x}{x^2+x}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\times\dfrac{1}{x+1}$

$=1\times1=1$

117 정답 (1) 2 (2) $3\ln2$ (3) 1

(1) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times2=1\times2=2$

(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{2^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{2^{3x}-1}{3x}\times3=\ln2\times3=3\ln2$

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times\dfrac{2x}{\ln(1+2x)}=1\times1=1$

118 정답 6

$\lim_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-1}{ax}\times\dfrac{a}{2}=1\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$에서

$\dfrac{a}{2}=3\qquad\therefore a=6$

119 정답 $a=-1,\ b=2$

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(e^{2x}+a)=1+a=0$이므로 $\quad a=-1$

$a=-1$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times\dfrac{2x}{x^2+x}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times\dfrac{2}{x+1}$

$=1\times2=2$

이므로 $\quad b=2$

$\therefore a=-1,\ b=2$

120 정답 (1) $y'=(x^3+3x^2)e^x$

(2) $y'=x\times3^{x+1}(2+x\ln3)$

(3) $y'=x(2\ln x+1)$ (4) $y'=-\dfrac{1}{x}$

(5) $y'=\dfrac{2\log_2x}{x\ln2}$

함수의 곱의 미분법과 지수함수와 로그함수의 도함수를 이용한다.

(1) $y'=(x^3)'e^x+x^3(e^x)'$

$=3x^2e^x+x^3e^x=(x^3+3x^2)e^x$

(2) $y=x^2\times3^{x+1}=3x^2\times3^x$이므로

$y'=(3x^2)'3^x+3x^2(3^x)'$

$=6x\times3^x+3x^2\times3^x\ln3$

$=x\times3^{x+1}(2+x\ln3)$

(3) $y'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'$

$=2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1)$

(4) $y=\ln\dfrac{1}{x}=-\ln x$이므로 $\qquad y'=-\dfrac{1}{x}$

(5) $y'=(2\log_2x)\times(\log_2x)'$

$=2\log_2x\times\dfrac{1}{x\ln2}=\dfrac{2\log_2x}{x\ln2}$

121 정답 $4e$

$f'(x)=(x^2+1)'\times e^x+(x^2+1)\times(e^x)'$

$=2x\times e^x+(x^2+1)\times e^x$

$=(x^2+2x+1)e^x$

$=(x+1)^2e^x$

$\therefore f'(1)=(1+1)^2e=4e$

연습문제 I .... pp.75~77

122 정답 ④

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x=0$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+1}+3}{2^x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\times2^x+3}{2^x+1}=\frac{0+3}{0+1}=3$$

123 정답 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-3^{-(x+1)}}{3^x+3^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\times3^x-\frac{1}{3}\times3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{3}\times3^{-2x}}{1+3^{-2x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{9}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{9}\right)^x}=\frac{3-0}{1+0}=3$$

124 정답 ①

$$\lim_{x\to\infty}\{\log_2(2x+1)-\log_2(x-1)\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{2x+1}{x-1}$$
$$=\log_2 2=1$$

125 정답 (1) e^2 (2) e^3 (3) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

(1) $2x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^2$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2=e^2$$

(2) $\frac{3}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow0$므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^3$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^3=e^3$$

(3) $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

126 정답 1

$$\lim_{x\to\infty}x\{\ln(x+1)-\ln x\}=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+1}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$
$$=\ln e=1$$

127 정답 1

$\log_2 a+\log_2 b^2=\frac{2}{\ln 2}$에서 좌변을 e를 밑으로 하는 로그로 바꾸면

$$\log_2 a+\log_2 b^2=\frac{\ln a}{\ln 2}+\frac{\ln b^2}{\ln 2}=\frac{\ln a+\ln b^2}{\ln 2}=\frac{\ln ab^2}{\ln 2}$$

따라서 $\frac{\ln ab^2}{\ln 2}=\frac{2}{\ln 2}$, 즉 $\ln ab^2=2$이므로

$$\ln b\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln(b\sqrt{a})^2=\frac{1}{2}\ln ab^2=\frac{1}{2}\times2=1$$

128 정답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-2^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(3^x-1)-(2^x-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$$
$$=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

129 정답 (1) 3 (2) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_2(1+3x)}{\log_2(1+x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+3x)}{3x}\times\frac{x}{\log_2(1+x)}\times3$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\times\ln 2\times3=3$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-1}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}\times\frac{x}{2^x-1}=\frac{\ln 3}{\ln 2}$

130 정답 (1) 1 (2) 0

(1) $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

(2) $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-(1+t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{e^t-1}{t}-1\right)$$
$$=1-1=0$$

131 정답 ln 3

점 $P(t,\ 3^t-1)$에 대하여

$$\triangle OAP=f(t)=\frac{1}{2}\times1\times(3^t-1)=\frac{3^t-1}{2}$$
$$\triangle OBP=g(t)=\frac{1}{2}\times1\times t=\frac{t}{2}$$

이므로

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{3^t-1}{2}}{\frac{t}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{3^t-1}{t}=\ln 3$$

132 정답 ⑤

$x \longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 0이 아니므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x \to 0}(e^{ax}+b)=1+b=0$에서

$$b=-1$$

$b=-1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(x+1)}{e^{ax}-1}=\lim_{x \to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{ax}{e^{ax}-1}\times\frac{1}{a}$$

$$=1\times1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

$\frac{1}{a}=\frac{1}{\ln 2}$에서 $a=\ln 2$

$$\therefore\ a-b=\ln 2+1=\ln 2e$$

133 정답 $a=2,\ b=1$

$$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+ax)}{2x}=\lim_{x \to 0}\left\{\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times\frac{a}{2}\right\}=\frac{a}{2}=b$$

에서 $a=2b$ …… ㉠

$$\lim_{x \to 0}\frac{e^{2x}-1}{bx}=\lim_{x \to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{2}{b}\right)=\frac{2}{b}=a$$

에서 $ab=2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2b^2=2$

그런데 b는 양수이므로

$$b=1,\ a=2$$

134 정답 $\log e$

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{(2+h)-(2-h)}\times\frac{(2+h)-(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{(2+h)-(2-h)}\times 2$$

$$=2f'(2)$$

한편, $f(x)=\log x$에서 $f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}$이므로

$$2f'(2)=2\times\frac{1}{2\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}=\log e$$

135 정답 ⑤

$$f(x)=(3-\ln x)e^{x-3}=\frac{1}{e^3}(3-\ln x)e^x$$

이므로 곱의 미분법에 의하여

$$f'(x)=\frac{1}{e^3}\left(-\frac{1}{x}\right)e^x+\frac{1}{e^3}(3-\ln x)e^x$$

$$=\frac{1}{e^3}\left(3-\frac{1}{x}-\ln x\right)e^x$$

$$\therefore\ f'(1)=\frac{1}{e^3}(3-1-0)e=\frac{2}{e^2}$$

136 정답 ③

$$f'(x)=(x+a)'\ln x+(x+a)(\ln x)'$$

$$=\ln x+(x+a)\times\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ f'(e)=\ln e+(e+a)\times\frac{1}{e}=2+\frac{a}{e}$$

따라서 $2+\frac{a}{e}=3$에서 $\frac{a}{e}=1$이므로 $a=e$

137 정답 ③

$$f'(x)=(ax^2+2)'e^x+(ax^2+2)(e^x)'$$

$$=2axe^x+(ax^2+2)e^x$$

$$=(ax^2+2ax+2)e^x$$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$을 만족하려면

모든 실수 x에 대하여 $ax^2+2ax+2\geq0$이어야 한다. 즉,

(i) $a=0$이거나

(ii) $a>0$이고 $\frac{D}{4}=a^2-2a\leq0$이어야 한다.

$a(a-2)\leq0$에서 $0<a\leq2$

(i), (ii)에서 $0\leq a\leq2$

따라서 정수 a의 개수는 0, 1, 2의 3이다.

연습문제 Ⅱ p.78

138 정답 ②

$x-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이고 $x=1+t$이므로

$$\lim_{x \to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

139 정답 2

$$f(x)=\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{2x}{n}\right)^n=\lim_{n \to \infty}\left\{\left(1+\frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2x}}\right\}^{2x}=e^{2x}$$이므로

$$\lim_{x \to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x \to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x \to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2=2$$

140 정답 220

$$f(n)=\lim_{x \to 0}\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}-n}{x}$$

$$=\lim_{x \to 0}\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}+\cdots+\frac{e^{nx}-1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2+\cdots+\frac{e^{nx}-1}{nx}\times n\right)$$

$$=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10}f(n)=\sum_{n=1}^{10}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}(n^2+n)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right)=220$$

141 정답 $\sqrt{e}$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{n+1}}{n}\times\frac{\cancel{n+2}}{\cancel{n+1}}\times\frac{\cancel{n+3}}{\cancel{n+2}}\times\cdots\times\frac{2n+1}{\cancel{2n}}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

142 정답 1 서술형

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이어야 한다. … ①

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{x+3}{x^2+1}=3$$

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{e^{3x}-1}{ax}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{a}$$

$$=\frac{3}{a} \quad\cdots ②$$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)$에서 $3=\frac{3}{a}$

$\therefore a=1$ … ③

[채점 기준표]

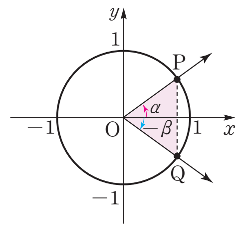
단계	채점 요소	배점
①	함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속일 조건 생각하기	30%
②	함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속일 조건 구하기	40%
③	a의 값 구하기	30%

5. 삼각함수의 극한과 미분

개념 보충

＊삼각함수의 덧셈정리의 증명

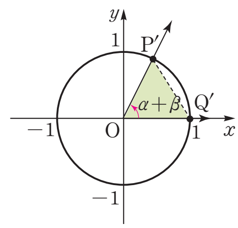
오른쪽 [그림 1]과 같이 좌표평면 위에서 각 α의 동경과 단위원의 교점을 P, 각 $-\beta$의 동경과 단위원의 교점을 Q라고 하면 두 점 P, Q의 좌표는 각각 P$(\cos\alpha, \sin\alpha)$, Q$(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$이다.



[그림 1]

이때, $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\sin(-\beta)=-\sin\beta$이므로 점 Q의 좌표는 $(\cos\beta, -\sin\beta)$이다.

한편, 오른쪽 [그림 2]와 같이 두 점 P, Q를 각각 원점을 중심으로 양의 방향으로 β만큼 회전한 점을 P′, Q′이라고 하면 두 점 P′, Q′의 좌표는 각각 P′$(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$, Q′$(1, 0)$이다.



[그림 2]

따라서 $\overline{PQ}^2$, $\overline{P'Q'}^2$은 각각

$$\overline{PQ}^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(-\sin\beta-\sin\alpha)^2$$

$$\overline{P'Q'}^2=\{1-\cos(\alpha+\beta)\}^2+\sin^2(\alpha+\beta)$$

이때, $\overline{PQ}^2=\overline{P'Q'}^2$이므로

$$(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta+\sin\alpha)^2$$

$$=\{1-\cos(\alpha+\beta)\}^2+\sin^2(\alpha+\beta)$$

$$2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$$

$$=2-2\cos(\alpha+\beta)$$

이 식을 정리하면

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad\cdots\cdots㉠$$

한편, $\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이므로 ㉠을 이용하면

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}$$

$$=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+(-\beta)\right\}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta)$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad\cdots\cdots㉡$$

또한, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 ㉠, ㉡을 이용하면

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

이때, 분모, 분자를 각각 $\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta\neq0)$로 나누면

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad\cdots\cdots㉢$$

한편, ㉠, ㉡, ㉢에서 β 대신 $-\beta$를 각각 대입하여 정리하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}&\cos(\alpha-\beta)\\&=\cos\{\alpha+(-\beta)\}\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

→ $\sin(-\beta)=-\sin\beta$
$\cos(-\beta)=\cos\beta$
$\tan(-\beta)=-\tan\beta$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\{\alpha+(-\beta)\}\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta)&=\tan\{\alpha+(-\beta)\}\\&=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

유형 pp.82~91

001 정답 (1) $\csc\theta=-\frac{5}{3}$, $\sec\theta=-\frac{5}{4}$, $\cot\theta=\frac{4}{3}$ (2) $-\frac{3}{4}$ (3) 2

(1) θ가 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$이다.

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$이므로

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5},$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=-\frac{5}{3},\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=-\frac{5}{4},$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{4}{3}$$

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9},\ \text{즉}\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$$

$$\therefore\ \csc\theta+\sec\theta=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{4}{9}}=-\frac{3}{4}$$

(3) $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로 $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로 $\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(\csc^2\theta+\sec^2\theta)-(\tan^2\theta+\cot^2\theta)\\&=(\csc^2\theta-\cot^2\theta)+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)=2\end{aligned}$$

002 정답 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{1}{7}$

α, β가 모두 제1사분면의 각이므로 $\cos\alpha>0$, $\cos\beta>0$이다.

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3) $$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{2},$$

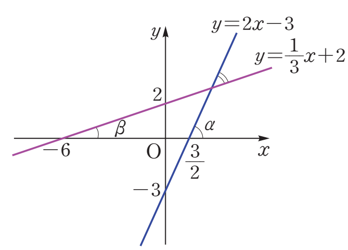
$$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}}=\frac{1}{3}\text{이므로}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{7}$$

003 정답 45°

두 직선 $y=2x-3$, $y=\frac{1}{3}x+2$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면

$$\tan\alpha=2,\ \tan\beta=\frac{1}{3}$$



두 직선이 이루는 예각의 크기는 $\alpha-\beta$이므로

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}}=1$$

$\therefore\ \alpha-\beta=45°$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기는 45°이다.

004 정답 (1) $\sin 2\theta=-\frac{4}{5}$, $\cos 2\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan 2\theta=\frac{4}{3}$

(2) $\frac{16}{13}$

(1) θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

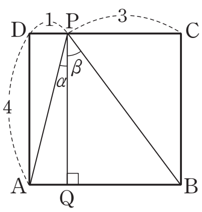
$$\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(i) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{4}{5}$

(ii) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=-\frac{3}{5}$

(iii) $\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$

(2) 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 변 AB에 내린 수선의 발을 Q, $\angle APQ=\alpha$, $\angle BPQ=\beta$라고 하면 $\overline{DP}=\overline{AQ}=1$, $\overline{CP}=\overline{BQ}=3$ 이므로



$$\tan\alpha=\frac{1}{4},\ \tan\beta=\frac{3}{4}$$

한편, $\theta=\angle APB=\alpha+\beta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=\frac{16}{13}$$

개념 보충

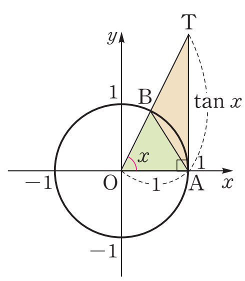
* 삼각함수의 극한 (2)

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$의 증명

(1) 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$의 값을 구해 보자.

(i) $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때,

오른쪽 그림과 같이 단위원 O에서 부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 x라 하고, 점 A에서 원 O에 그은 접선과 선분 OB의 연장선의 교점을 T라고 하면



△OAB, 부채꼴 OAB, △OAT의 넓이 사이에는

$$\triangle OAB<(\text{부채꼴 OAB의 넓이})<\triangle OAT$$

인 관계가 성립하고, $\overline{TA}=\tan x$이므로 다음 부등식을 얻는다.

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$

즉 $\sin x<x<\tan x$

이때, $\sin x>0$이므로 각 변을 $\sin x$로 나누고 역수를 취하면

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\ \text{즉 } \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

각 변에 극한을 취하면 $\lim_{x\to0+}\cos x=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=1$$

(ii) $-\frac{\pi}{2}<x<0$일 때,

$-x=t$로 놓으면 $0<t<\frac{\pi}{2}$이고, $x\longrightarrow 0-$일 때 $t\longrightarrow 0+$이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}$$

$$=1$$

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$이다.

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$의 증명

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}$$

$$=1\times\frac{1}{1}=1 \quad \leftarrow \lim_{x\to0}\cos x=1$$

005 정답 (1) 1 (2) 2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 2 (5) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (6) 2

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-\sin 4x}{\sin 2x}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 6x}{\sin 2x}-\frac{\sin 4x}{\sin 2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 6x}{6x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{6}{2}-\frac{\sin 4x}{4x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times2\right)$$

$$=1\times1\times3-1\times1\times2=1$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin 4x)}{2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin 4x)}{\sin 4x}\times\frac{\sin 4x}{4x}\times2$$

$$=1\times1\times2=2$$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}$$

$$=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(4) $x-\pi=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \pi$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2(\pi+t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(2\times\frac{\sin 2t}{2t}\right)=2\times1=2$$

(5) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)\cos x}{\cos x-\sin x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\cos x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(6) $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x}{\sin x}\times\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times2\right\}$$
$$=1\times1\times2=2$$

006 정답 (1) $a=12,\ b=0$ (2) $a=2,\ b=1$

(1) $x \longrightarrow 0$일 때, (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(ax+b)=b=0$이므로 주어진 식에 $b=0$을 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{ax}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{a}{3}\right)=\frac{a}{3}=4$$

$\therefore\ a=12$

(2) $x \longrightarrow 0$일 때, (분자) $\longrightarrow$ 0이고 (극한값)$\neq$0이므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

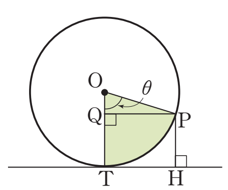
즉, $\lim_{x\to0}\ln(x+b)=\ln b=0$이므로

$b=1$

$b=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}\times a}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=a=2$$

007 정답 $\frac{1}{2}$



점 P에서 $\overline{\mathrm{OT}}$에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$$\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{TH}}=\sin\theta,\ S=\frac{1}{2}\times1^2\times\theta=\frac{1}{2}\theta$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S}{\overline{\mathrm{TH}}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\theta}{\sin\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}}=\frac{1}{2}$$

008 정답 (1) $y'=(2x+1)\cos x-(x^2+x)\sin x$

(2) $y'=e^x(\sin x+\cos x)$

(3) $y'=2\sin x\cos x$

(4) $y'=\frac{\sin x}{x\ln 2}+(\log_2 x)(\cos x)$

(1) $y'=(x^2+x)'\cos x+(x^2+x)(\cos x)'$

$=(2x+1)\cos x+(x^2+x)(-\sin x)$

$=(2x+1)\cos x-(x^2+x)\sin x$

(2) $y'=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'$

$=e^x\sin x+e^x\cos x$

$=e^x(\sin x+\cos x)$

(3) $y'=2\sin x(\sin x)'=2\sin x\cos x$

(4) $y'=(\log_2 x)'(\sin x)+(\log_2 x)(\sin x)'$

$=\frac{1}{x\ln 2}\times\sin x+(\log_2 x)(\cos x)$

$=\frac{\sin x}{x\ln 2}+(\log_2 x)(\cos x)$

확인문제 pp.82~91

143 정답 $2\sqrt{2}$

θ가 제1사분면의 각이므로 $\tan\theta>0$이다.

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1=3^2-1=8$

$\therefore\ \tan\theta=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

144 정답 6

$(\csc\theta+\sec\theta)^2-(\tan\theta+\cot\theta)^2$

$=(\csc^2\theta+2\csc\theta\sec\theta+\sec^2\theta)-(\tan^2\theta+2+\cot^2\theta)$

$=(\csc^2\theta-\cot^2\theta)+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)+2\csc\theta\sec\theta-2$

$=2\csc\theta\sec\theta$

$$=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$$

145 정답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$

(1) $\sin10^\circ\cos20^\circ+\cos10^\circ\sin20^\circ=\sin(10^\circ+20^\circ)$

$=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$

(2) $\cos70^\circ\cos40^\circ+\sin70^\circ\sin40^\circ=\cos(70^\circ-40^\circ)$

$=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $$\frac{\tan55^\circ+\tan65^\circ}{1-\tan55^\circ\tan65^\circ}=\tan(55^\circ+65^\circ)$$

$=\tan120^\circ=-\tan60^\circ$

$=-\sqrt{3}$

146 정답 (1) $\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$ (2) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$

α, β가 모두 제1사분면의 각이므로 $\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$이다.

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$$

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$$

147 정답 $\frac{1}{3}$

두 직선 $y=x-1$과 $y=\frac{1}{2}x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면

$$\tan\alpha=1,\ \tan\beta=\frac{1}{2}$$

이때, 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

148 정답 $\frac{1}{2}$ 또는 -2

두 직선 $y=3x+1$, $y=mx+6$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면

$$\tan\alpha=3,\ \tan\beta=m$$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 45°이므로

$$\alpha-\beta=45^\circ \text{ 또는 } \beta-\alpha=45^\circ$$

(i) $\alpha-\beta=45^\circ$일 때 $\tan(\alpha-\beta)=1$이므로

$$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=1,\ \text{즉 } \frac{3-m}{1+3m}=1$$

$$3-m=1+3m \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(ii) $\beta-\alpha=45^\circ$일 때 $\tan(\beta-\alpha)=1$이므로

$$\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=1,\ \text{즉 } \frac{m-3}{1+3m}=1$$

$$m-3=1+3m \qquad \therefore m=-2$$

(i), (ii)에서 $\quad m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=-2$

149 정답 (1) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ (2) $-\frac{1}{9}$ (3) $-4\sqrt{5}$

θ가 제1사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

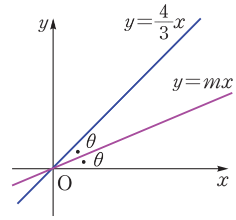
(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

(2) $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-1=-\frac{1}{9}$

(3) $\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{\frac{4\sqrt{5}}{9}}{-\frac{1}{9}}=-4\sqrt{5}$

150 정답 $\frac{1}{2}$

직선 $y=mx$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 직선 $y=\frac{4}{3}x$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 2θ이다.



$\tan\theta=m$, $\tan 2\theta=\frac{4}{3}$이므로

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2m}{1-m^2}=\frac{4}{3}$$

정리하면 $\quad 2m^2+3m-2=0,\ (2m-1)(m+2)=0$

이때, $m>0$이므로 $\quad m=\frac{1}{2}$

151 정답 (1) 1 (2) 2 (3) $\frac{1}{2}$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cos x}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\tan x}\times\cos x$

$$=1\times1\times1=1$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan 2x)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(\tan 2x)}{\tan 2x}\times\frac{\tan 2x}{2x}\times2\right\}$$

$$=1\times1\times2=2$$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

다른 풀이 분모, 분자에 $1+\cos x$를 곱하여 정리하면

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

152 정답 (1) -1 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{2}$

(1) $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$일 때 $t\longrightarrow0$이고 $x=\frac{\pi}{2}+t$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{t}=-1$$

(2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{1+\sin x}=-\frac{1}{2}$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{3}{2}\right)$$
$$=1\times1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

153 정답 $a=1$, $b=\frac{1}{3}$

$x\longrightarrow0$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이므로 (분자)$\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\ln(x+a)=\ln a=0$이므로

$a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{\tan bx}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{bx}{\tan bx}\times\frac{1}{b}$$
$$=\frac{1}{b}=3$$

$\therefore b=\frac{1}{3}$

154 정답 $a=\frac{\pi}{2}$, $b=-2$

$x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$일 때, (분자)$\longrightarrow0$이고 (극한값)$\neq0$이므로

(분모)$\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-a)=\frac{\pi}{2}-a=0$이므로 $a=\frac{\pi}{2}$

이때, $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x=\frac{\pi}{2}+t$이고 $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$일 때

$t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{b\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{b\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-b\sin t}{t}$$
$$=-b=2$$

$\therefore b=-2$

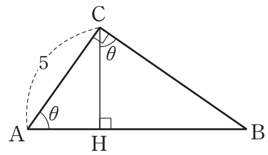
155 정답 2

$\triangle OBP=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$,

$\overparen{PB}=1\times\theta=\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overparen{PB}}{\triangle OBP}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta}{\frac{1}{2}\sin\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2}{\frac{\sin\theta}{\theta}}$$
$$=\frac{2}{1}=2$$

156 정답 5



$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=5\tan\theta$

$\angle BCH=\theta$이므로 $\triangle BCH$에서

$\overline{BH}=\overline{BC}\sin\theta=5\tan\theta\sin\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{5\tan\theta\sin\theta}{\theta^2}$$
$$=5\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$
$$=5\times1\times1=5$$

157 정답 (1) $y'=\cos x+2x$

(2) $y'=3^x\{(\ln 3-1)\sin x+(\ln 3+1)\cos x\}$

(3) $y'=-2\sin x\cos x$

(4) $y'=\left(1+\frac{1}{x}\right)\sin x+(x+\ln x)\cos x$

(1) $y'=\cos x+2x$

(2) $y'=(3^x)'(\sin x+\cos x)+3^x(\sin x+\cos x)'$

$=3^x\ln 3\,(\sin x+\cos x)+3^x(\cos x-\sin x)$

$=3^x\{(\ln 3-1)\sin x+(\ln 3+1)\cos x\}$

(3) $y'=2\cos x(\cos x)'=-2\sin x\cos x$

(4) $y'=(x+\ln x)'\sin x+(x+\ln x)(\sin x)'$

$=\left(1+\frac{1}{x}\right)\sin x+(x+\ln x)\cos x$

158 정답 $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(x)=2(x)'\sin x+2x(\sin x)'+3(\cos x)'$

$=2\sin x+2x\cos x-3\sin x$

$=2x\cos x-\sin x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\times\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

연습문제 I .... pp.92~97

159 정답 ⑤

$\cot\theta=2$이므로

$$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+2^2=5$$

160 정답 ②

$$\csc^2\theta+\sec^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\csc^2\theta\sec^2\theta$$

$\therefore \csc^2\theta\sec^2\theta=4$

161 정답 ⑤

$$\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\cos 3A}{\cos A}=\frac{\sin 3A\cos A-\cos 3A\sin A}{\sin A\cos A}=\frac{\sin(3A-A)}{\sin A\cos A}=\frac{\sin 2A}{\sin A\cos A}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A\cos A}=2$$

162 정답 ⑤

$$\cot 2x+\tan x=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x}{\sin 2x\cos x}=\frac{\cos(2x-x)}{\sin 2x\cos x}=\frac{1}{\sin 2x}=\csc 2x$$

163 정답 ②

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$$

α, β는 모두 예각이므로 $0^\circ<\alpha+\beta<180^\circ$

$\therefore \alpha+\beta=45^\circ$

164 정답 5

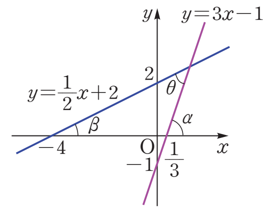
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{2},\ \tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}}=5$$

165 정답 1

두 직선 $y=3x-1$, $y=\frac{1}{2}x+2$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면



$$\tan\alpha=3,\ \tan\beta=\frac{1}{2}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\times\frac{1}{2}}=1$$

166 정답 45°

두 직선 $x+5y-1=0$, $2x-3y+6=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면

$$\tan\alpha=-\frac{1}{5},\ \tan\beta=\frac{2}{3}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\frac{-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{1+\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{2}{3}}\right|=1$$

$\therefore \theta=45^\circ$

167 정답 ④

두 직선 $3x-5y+1=0$, $ax-y-3=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$$\tan\alpha=\frac{3}{5},\ \tan\beta=a$$

$$\therefore \tan\frac{\pi}{4}=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

즉, $1=\left|\frac{\frac{3}{5}-a}{1+\frac{3}{5}a}\right|$이므로

$$1+\frac{3}{5}a=\frac{3}{5}-a \text{ 또는 } 1+\frac{3}{5}a=a-\frac{3}{5}$$

따라서 $\frac{8}{5}a=-\frac{2}{5}$ 또는 $\frac{2}{5}a=\frac{8}{5}$이므로

$a=4$ ($\because a>0$)

168 정답 ③

$$\log_2\sin 15^\circ+\log_2\cos 15^\circ=\log_2\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\log_2\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\log_2\frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$$

169 정답 ④

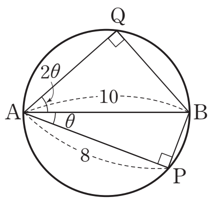
$\overline{PQ}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=1$이므로

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta=1$

따라서 $2-2\cos(\alpha-\beta)=1$이므로

$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$

170 정답 ⑤



$\angle PAB=\theta$라 하면 $\angle QAB=2\theta$

$\triangle ABP$에서 $\angle APB=90°$이므로

$\cos\theta=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$\therefore \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$

$\triangle AQB$에서 $\angle AQB=90°$이므로

$\overline{AQ}=\overline{AB}\cos 2\theta=10\times\frac{7}{25}=\frac{14}{5}$

171 정답 $\frac{1}{2}$

$\sin\alpha+\sin\beta=1$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=1$ ...... ㉠

$\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=2$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta)$

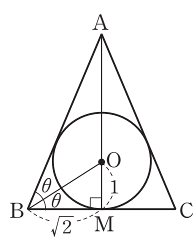
$+(\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)=3$

$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=3$

$2+2\cos(\alpha-\beta)=3$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$

172 정답 4



점 O가 $\triangle ABC$의 내심이므로 $\overline{BO}$는 $\angle B$의 이등분선이다.

$\angle OBM=\theta$라고 하면

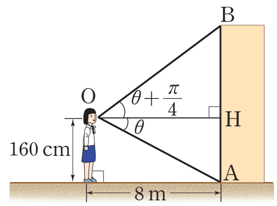
$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \overline{AM}=\sqrt{2}\tan 2\theta$

$=\sqrt{2}\times\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}=4$

173 정답 13.6 m



그림에서

$\overline{AH}=\overline{OH}\tan\theta=8\tan\theta$,

$\overline{BH}=\overline{OH}\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=8\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

이므로 건물의 높이는

$\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}$

$=8\tan\theta+8\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

이때, $\tan\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{OH}}=\frac{1.6}{8}=0.2$이므로

$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{0.2+1}{1-0.2\times1}=1.5$

$\therefore \overline{AB}=8\tan\theta+8\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$=8\times0.2+8\times1.5$

$=13.6\ (\text{m})$

174 정답 ②

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{x^2+2x}\times\frac{x^2+2x}{x^2+x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{x^2+2x}\times\frac{x+2}{x+1}$

$=1\times2=2$

175 정답 ④

$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin 2\theta+\sin 4\theta+\sin 6\theta}{\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta}$

$=\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{\sin 2\theta}{\theta}+\frac{\sin 4\theta}{\theta}+\frac{\sin 6\theta}{\theta}}{\frac{\sin\theta}{\theta}+\frac{\sin 3\theta}{\theta}+\frac{\sin 5\theta}{\theta}}$

$=\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times2+\frac{\sin 4\theta}{4\theta}\times4+\frac{\sin 6\theta}{6\theta}\times6}{\frac{\sin\theta}{\theta}+\frac{\sin 3\theta}{3\theta}\times3+\frac{\sin 5\theta}{5\theta}\times5}$

$=\frac{2+4+6}{1+3+5}=\frac{4}{3}$

176 정답 ③

$f(x)=x^2+x$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)}{\sin f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x+\sin x}{\sin(x^2+x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\times(\sin x+1)}{\sin(x^2+x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin x}{x}\times\frac{x^2+x}{\sin(x^2+x)}\times\frac{\sin x+1}{x+1}\right\}$$
$$=1\times1\times1$$
$$=1$$

177 정답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\tan 2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{2x}{\tan 2x}\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=1\times1\times1\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

178 정답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sin x=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ (참)

ㄴ. $x\neq0$인 모든 실수 x에 대하여 $|\sin x|\le1$이므로

$$\left|\frac{1}{x}\sin x\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|$$
$$-\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{1}{x}\sin x\le\left|\frac{1}{x}\right|$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{x}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(-\left|\frac{1}{x}\right|\right)=0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0 \text{ (참)}$$

ㄷ. $x\neq0$인 모든 실수 x에 대하여 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le1$이므로

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$$
$$-|x|\le x\sin\frac{1}{x}\le|x|$$

이때, $\lim_{x\to0}|x|=\lim_{x\to0}(-|x|)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0 \text{ (참)}$$

ㄹ. $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때, $t\longrightarrow0+$이고 $x=\frac{1}{t}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}=1 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

179 정답 (1) $a=2$, $b=1$ (2) $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$

(1) $x\longrightarrow0$일 때, (분자) $\longrightarrow0$이고 (극한값)$\neq0$이므로 (분모) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-1)=\sqrt{b}-1=0$이므로

$b=1$

$b=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{ax+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x\times(\sqrt{ax+1}+1)}{ax}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{3(\sqrt{ax+1}+1)}{a}$$
$$=1\times\frac{3(1+1)}{a}=3$$

$\therefore a=2$

(2) $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(ax^2+b)=b=0$이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{x\to0}\frac{ax^2}{\cos x-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{ax^2(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{ax^2(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{(-a)\times\frac{x^2}{\sin^2 x}\times(\cos x+1)\right\}$$
$$=(-a)\times1^2\times2=-2a=1$$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

180 정답 ①

$x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$이므로

$\frac{\pi}{2}a+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\lim_{t\to0}\frac{a\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+b}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{at+\frac{\pi}{2}a+b}{-\sin t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{at}{-\sin t}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{(-a)\times\frac{t}{\sin t}\right\}=-a=1$$

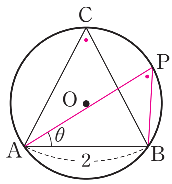
따라서 $a=-1$이므로 ㉠에 대입하면 $b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=-\frac{\pi}{2}$

181 정답 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\angle ACB=60^\circ$이고 한 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$\angle APB=60^\circ$



$\triangle ABP$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PB}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}$$

즉, $\overline{PB}=\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}\times\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\theta$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{l(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\theta}{\theta}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{4}{\sqrt{3}}\times1=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

182 정답 $\frac{1}{2}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AB}}{\sin 2\theta}$$

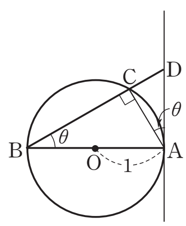
$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta}{\sin2\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

183 정답 2

$\overline{AC}=\overline{AB}\sin\theta=2\sin\theta$, $\angle CAD=\theta$

이므로

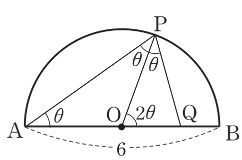
$$\overline{CD}=\overline{AC}\tan\theta=2\sin\theta\tan\theta$$



$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{CD}}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta\tan\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right)$$
$$=2\times1\times1=2$$

184 정답 1

$\angle APO=\angle OPQ=\theta$이고 삼각형의 두 내각의 크기의 합은 한 외각의 크기와 같으므로 $\angle POQ=2\theta$



$\triangle OPQ$에서 $\angle OQP=\pi-3\theta$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OQ}}{\sin\theta}=\frac{\overline{OP}}{\sin(\pi-3\theta)},\ \text{즉 } \frac{\overline{OQ}}{\sin\theta}=\frac{3}{\sin3\theta}$$

$$\therefore \overline{OQ}=\frac{3\sin\theta}{\sin3\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\overline{OQ}=\lim_{\theta\to0+}\frac{3\sin\theta}{\sin3\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin3\theta}\right)=1\times1=1$$

185 정답 0

$$f'(x)=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$$
$$=\cos x\cos x-\sin x\sin x$$
$$=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}=0$$

186 정답 $a=1$, $b=0$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$이다.

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(ax+b)=b,$$
$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\sin x=0=f(0)$$

에서 $b=0$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $f'(0)$이 존재해야 한다.

$$f'(x)=\begin{cases}a & (-1<x<0)\\ \cos x & (0<x<1)\end{cases}$$

이므로

$$\lim_{x\to0-}f'(x)=\lim_{x\to0-}a=a,\ \lim_{x\to0+}f'(x)=\lim_{x\to0+}\cos x=1$$

$\therefore a=1$

연습문제 Ⅱ

p.98

187 정답 (1) -1 (2) $-\frac{3}{2}$

(1) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-2\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{(\sin^2 x+\cos^2 x)-2\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{(\sin^2 x-\cos^2 x)\cos x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)\cos x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{(\sin x+\cos x)\cos x}$$
$$=\frac{-1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}}=-1$$

(2) $\cos 2x-\cos x=(2\cos^2 x-1)-\cos x$

$=(2\cos x+1)(\cos x-1)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2\cos x+1)(\cos x-1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\cos x-1}{x^2}\times(2\cos x+1)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}\times(2\cos x+1)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2}\times\frac{2\cos x+1}{\cos x+1}$$

$$=-1^2\times\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$$

188 정답 ④

$f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g'(x)=-\sin x$

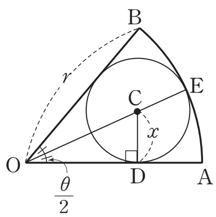
$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{\sin x-\sin a}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}}{\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}}$$

$$=\frac{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}}{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}}$$

$$=\frac{g'(a)}{f'(a)}$$

$$=\frac{-\sin a}{\cos a}=-\tan a$$

189 정답 ⑤



부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하고, 원 C와 $\overline{\mathrm{OA}}$의 접점을 D, 원 C와 호 AB의 접점을 E라고 하자.

$\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\dfrac{\theta}{2}$이므로

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{OC}}}$에서

$$\overline{\mathrm{OC}}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{x}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

따라서

$$r=\overline{\mathrm{OC}}+\overline{\mathrm{CE}}=\frac{x}{\sin\frac{\theta}{2}}+x=x\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

이므로

$$\widehat{\mathrm{AB}}=r\theta=x\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\times\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\widehat{\mathrm{AB}}}{x}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{x\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\theta}{x}$$

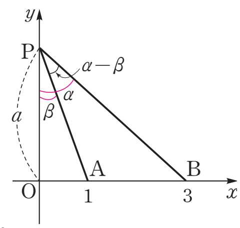
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\theta$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\theta+\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\theta+\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times 2\right)$$

$$=2$$

190 정답 2 서술형



P$(0,\ a)$로 놓으면 $a>0$이고 ⋯ ①

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{a^2+1}$

$\angle\mathrm{OPB}=\alpha$, $\angle\mathrm{OPA}=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\dfrac{3}{a}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{a}$

$\tan(\angle\mathrm{APB})=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{3}{a}-\frac{1}{a}}{1+\frac{3}{a^2}}=\frac{2}{a+\frac{3}{a}} \qquad \cdots ②$$

한편, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $a+\dfrac{3}{a}\geq 2\sqrt{3}$이므로

$$\tan(\angle\mathrm{APB})\leq\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

이때, 등호는 $a=\dfrac{3}{a}$, 즉 $a=\sqrt{3}$일 때 성립하므로 $a=\sqrt{3}$일 때 $\angle\mathrm{APB}$의 크기가 최대이다. ⋯ ③

따라서 $\angle\mathrm{APB}$의 크기가 최대일 때 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{a^2+1}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2$ ⋯ ④

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	점 P의 좌표를 설정하기	20 %
②	$\tan(\angle\mathrm{APB})$를 $\tan(\angle\mathrm{OPB})$, $\tan(\angle\mathrm{OPA})$로 나타내기	30 %
③	$\angle\mathrm{APB}$가 최대가 되는 점 P의 y좌표 구하기	30 %
④	$\overline{\mathrm{AP}}$의 길이 구하기	20 %

6. 여러 가지 미분법 (1)

개념 보충

함수의 몫의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)(g(x)\neq 0)$가 미분가능할 때,

(1) $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$이면 $y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(2) $y=\dfrac{1}{g(x)}$이면 $y'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

[증명] 먼저 (2)를 보이고, 이를 이용하여 (1)을 보이자.

(2) $$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+h)}-\dfrac{1}{g(x)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{-\frac{g(x+h)-g(x)}{hg(x+h)g(x)}\right\}$$
$$=-\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\times\frac{1}{g(x+h)g(x)}\right\}$$
$$=-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}$$
$$=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$ ← 미분가능한 함수 $g(x)$는 연속이므로 $\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}$이므로 함수의 곱의 미분법을 이용하면

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=f'(x)\times\frac{1}{g(x)}+f(x)\times\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$
$$=\frac{f'(x)}{g(x)}-f(x)\times\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$
$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

개념 보충

삼각함수의 도함수

(3) $y=\csc x$이면 $y'=-\csc x\cot x$

(4) $y=\cot x$이면 $y'=-\csc^2 x$

[증명]

(3) $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$이므로 함수의 몫의 미분법에 의하여

$$y'=-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$
$$=-\frac{1}{\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$=-\csc x\cot x$$

(4) $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$이므로 함수의 몫의 미분법에 의하여

$$y'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$

유형 pp.102~108

001 정답 (1) $y'=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ (2) $y'=\dfrac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}$

(3) $y'=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ (4) $y'=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(5) $y'=\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$ (6) $y'=-\dfrac{x^3+8}{x^5}$

(1) $y'=-\dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

(2) $$y'=\frac{(2x+1)'(x^2+2)-(2x+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{2(x^2+2)-(2x+1)\times 2x}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}$$

(3) $y=\dfrac{(x-2)(x+2)+1}{x-2}=x+2+\dfrac{1}{x-2}$이므로

$$y'=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

(4) $$y'=\frac{(e^x)'(e^x+1)-e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\times e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

(5) $$y'=\frac{(1+\sin x)'\cos x-(1+\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos x\cos x-(1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$$

다른 풀이 $y=\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sec x+\tan x$이므로

$y'=\sec x\tan x+\sec^2 x$

[참고] $\sec x\tan x+\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos x}\times\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$$=\frac{\sin x+1}{\cos^2 x}$$
이므로 결과는 서로 같다.

(6) $$y'=\left(\frac{x^3+2}{x^4}\right)'=(x^{-1}+2x^{-4})'$$
$$=-x^{-1-1}+2\times(-4)x^{-4-1}$$
$$=-x^{-2}-8x^{-5}=-\frac{x^3+8}{x^5}$$

002 정답 (1) $y'=2\sin x(1+\sec^2 x)$

(2) $y'=\cot x-x\csc^2 x$

(3) $y'=\sec^2 x-\csc^2 x$

(4) $y'=\dfrac{\sec^2 x(1+\sin x)-\sin x}{(1+\sin x)^2}$

(5) $y'=e^x(\sin x+\cos x)$

(6) $y'=\dfrac{\sec x(x\tan x\ln x+1)}{x}$

(1) $y'=2\{(\sin x)'\tan x+\sin x(\tan x)'\}$
$$=2(\cos x\tan x+\sin x\sec^2 x)$$
$$=2\sin x(1+\sec^2 x)$$

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}=x\cot x$이므로

$y'=(x)'\cot x+x(\cot x)'=\cot x+x\times(-\csc^2 x)$

$=\cot x-x\csc^2 x$

(3) $y'=(\sec x)'(\csc x)+(\sec x)(\csc x)'$

$=(\sec x\tan x)\times\csc x+\sec x\times(-\csc x\cot x)$

$=\sec^2 x-\csc^2 x$ $\leftarrow \tan x=\dfrac{\sec x}{\csc x},\ \cot x=\dfrac{\csc x}{\sec x}$

(4) $y'=\dfrac{(\tan x)'(1+\sin x)-\tan x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$

$=\dfrac{\sec^2 x(1+\sin x)-\tan x\cos x}{(1+\sin x)^2}$

$=\dfrac{\sec^2 x(1+\sin x)-\sin x}{(1+\sin x)^2}$

(5) $y'=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'$

$=e^x\sin x+e^x\cos x$

$=e^x(\sin x+\cos x)$

(6) $y'=(\sec x)'\ln x+\sec x(\ln x)'$

$=\sec x\tan x\ln x+\sec x\times\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{\sec x(x\tan x\ln x+1)}{x}$

개념 보충

로그함수의 도함수

(3) $y=\ln|f(x)|$이면 $\quad y'=\dfrac{f'(x)}{f'(x)}$

(4) $y=\log_a|f(x)|$이면 $\quad y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}\ (a>0,\ a\neq1)$

[증명]

(3) $y=\ln|f(x)|$이면 $\quad y'=\dfrac{1}{f(x)}\times\{f(x)\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

(4) $y=\log_a|f(x)|$이면

$y'=\dfrac{1}{f(x)\ln a}\times\{f(x)\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}\ (a>0,\ a\neq1)$

003

정답 (1) $\boldsymbol{y'=5(x^2+3x)^4(2x+3)}$

(2) $\boldsymbol{y'=-2\sin(2x+3)}$

(3) $\boldsymbol{y'=2(x-1)(5x-2)(2x+1)^2}$

(4) $\boldsymbol{y'=-\dfrac{12}{(3x-2)^5}}$

(5) $\boldsymbol{y'=-3(\cos x-\sin x)^2(\sin x+\cos x)}$

(6) $\boldsymbol{y'=2xe^{x^2+3}}$

(1) $y'=5(x^2+3x)^4\times(x^2+3x)'=5(x^2+3x)^4(2x+3)$

(2) $y'=-\sin(2x+3)\times(2x+3)'=-2\sin(2x+3)$

(3) $y'=2(x-1)(x-1)'\times(2x+1)^3$

$+(x-1)^2\times3(2x+1)^2(2x+1)'$

$=2(x-1)(2x+1)^3+6(x-1)^2(2x+1)^2$

$=2(x-1)(2x+1)^2\{(2x+1)+3(x-1)\}$

$=2(x-1)(5x-2)(2x+1)^2$

(4) $y=\dfrac{1}{(3x-2)^4}=(3x-2)^{-4}$이므로

$y'=-4(3x-2)^{-5}\times(3x-2)'=-12(3x-2)^{-5}$

$=-\dfrac{12}{(3x-2)^5}$

(5) $y'=3(\cos x-\sin x)^2\times(\cos x-\sin x)'$

$=3(\cos x-\sin x)^2(-\sin x-\cos x)$

$=-3(\cos x-\sin x)^2(\sin x+\cos x)$

(6) $y'=e^{x^2+3}\times(x^2+3)'=2xe^{x^2+3}$

004

정답 (1) $\boldsymbol{y'=\dfrac{2x}{x^2+1}}$ (2) $\boldsymbol{y'=\dfrac{1}{x\ln x}}$

(3) $\boldsymbol{y'=\dfrac{\cos x}{\sin x+1}}$ (4) $\boldsymbol{y'=\dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}}$

(5) $\boldsymbol{y'=\dfrac{3^x\ln 3}{2(3^x+1)}}$ (6) $\boldsymbol{y'=\dfrac{2}{(2x+3)\ln 2}}$

$(\ln|f(x)|)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$이므로

(1) $y'=\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\dfrac{2x}{x^2+1}$

(2) $y'=\dfrac{(\ln x)'}{\ln x}=\dfrac{1}{x\ln x}$

(3) $y'=\dfrac{(\sin x+1)'}{\sin x+1}=\dfrac{\cos x}{\sin x+1}$

(4) $y=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)$이므로

$y'=\dfrac{(e^x-1)'}{e^x-1}-\dfrac{(e^x+1)'}{e^x+1}=\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{e^x}{e^x+1}$

$=\dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$

(5) $y=\ln\sqrt{3^x+1}=\ln(3^x+1)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\ln(3^x+1)$이므로

$y'=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(3^x+1)'}{3^x+1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3^x\ln 3}{3^x+1}=\dfrac{3^x\ln 3}{2(3^x+1)}$

(6) $y=\log_2(2x+3)=\dfrac{\ln(2x+3)}{\ln 2}$이므로

$y'=\dfrac{1}{\ln 2}\times\{\ln(2x+3)\}'=\dfrac{1}{\ln 2}\times\dfrac{(2x+3)'}{2x+3}$

$=\dfrac{1}{\ln 2}\times\dfrac{2}{2x+3}=\dfrac{2}{(2x+3)\ln 2}$

005

정답 (1) $\boldsymbol{y'=x^x(\ln x+1)}$

(2) $\boldsymbol{y'=-\dfrac{2(x+2)}{(x+1)^2(x+3)^2}}$

(1) 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=\ln x^x=x\ln x$

양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{y'}{y}=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

$\therefore\ y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

(2) 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\ln\left|\frac{(x+2)^2}{(x+1)(x+3)}\right|$$

$$=2\ln|x+2|-\ln|x+1|-\ln|x+3|$$

양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$$

$$=\frac{-2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\therefore y'=y\times\frac{-2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+2)^2}{(x+1)(x+3)}\times\frac{-2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=-\frac{2(x+2)}{(x+1)^2(x+3)^2}$$

확인문제 pp.102~108

191 정답 (1) $y'=-\frac{2x+2}{(x^2+2x)^2}$ (2) $y'=\frac{2x^2+6x+2}{(2x+3)^2}$

(3) $y'=-\frac{3}{(x-1)^2}$ (4) $y'=1-\frac{2}{x^3}$

(1) $y'=-\frac{(x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2}=-\frac{2x+2}{(x^2+2x)^2}$

(2) $y'=\frac{(x^2-1)'(2x+3)-(x^2-1)(2x+3)'}{(2x+3)^2}$

$$=\frac{2x(2x+3)-(x^2-1)\times2}{(2x+3)^2}$$

$$=\frac{2x^2+6x+2}{(2x+3)^2}$$

(3) $y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$이므로

$$y'=-\frac{3(x-1)'}{(x-1)^2}=-\frac{3}{(x-1)^2}$$

(4) $y=\frac{x^4+x}{x^3}=x+x^{-2}$이므로

$$y'=1-2x^{-3}=1-\frac{2}{x^3}$$

192 정답 (1) $y'=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$ (2) $y'=-\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$

(1) $y'=\frac{(e^x-1)'x-(e^x-1)(x)'}{x^2}$

$$=\frac{e^x\times x-(e^x-1)}{x^2}$$

$$=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

(2) $y'=\frac{(\cos x)'(\sin x+\cos x)-\cos x(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}$

$$=\frac{-\sin x(\sin x+\cos x)-\cos x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$=-\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$$

193 정답 (1) $y'=\sec^2 x+\csc^2 x$

(2) $y'=\sec x(1+x\tan x)$

(3) $y'=\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(1) $y'=\sec^2 x-(-\csc^2 x)=\sec^2 x+\csc^2 x$

(2) $y'=(x)'\sec x+x(\sec x)'=\sec x+x\sec x\tan x$

$$=\sec x(1+x\tan x)$$

(3) $y'=\frac{(1-\cos x)'(1+\cos x)-(1-\cos x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$

$$=\frac{\sin x(1+\cos x)-(1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

194 정답 (1) $y'=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x$

(2) $y'=\frac{2\sin x}{(\cos x-1)^2}$

(1) $y'=(\sec x)'\tan x+\sec x(\tan x)'$

$$=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x$$

(2) 분모, 분자에 $\cos x$를 곱하면

$$y=\frac{1+\sec x}{1-\sec x}=\frac{\cos x+1}{\cos x-1}$$

$$\therefore y'=\frac{(\cos x+1)'(\cos x-1)-(\cos x+1)(\cos x-1)'}{(\cos x-1)^2}$$

$$=\frac{-\sin x(\cos x-1)-(\cos x+1)(-\sin x)}{(\cos x-1)^2}$$

$$=\frac{2\sin x}{(\cos x-1)^2}$$

195 정답 (1) $y'=10(2x^2-3x)^9(4x-3)$

(2) $y'=3\sec^2(3x+1)$

(3) $y'=3(x+2)^2(3x-2)(5x+2)$

(1) $y'=10(2x^2-3x)^9\times(2x^2-3x)'$

$$=10(2x^2-3x)^9(4x-3)$$

(2) $y'=\sec^2(3x+1)\times(3x+1)'=3\sec^2(3x+1)$

(3) $y'=3(x+2)^2(x+2)'\times(3x-2)^2$

$$+(x+2)^3\times2(3x-2)(3x-2)'$$

$$=3(x+2)^2(3x-2)^2+6(x+2)^3(3x-2)$$

$$=3(x+2)^2(3x-2)(5x+2)$$

196 정답 (1) $y'=-\frac{6x}{(x^2+1)^4}$ (2) $y'=2\sin x\cos x$

(3) $y'=e^x-e^{-x}$

(1) $y=\frac{1}{(x^2+1)^3}=(x^2+1)^{-3}$이므로

$$y'=-3(x^2+1)^{-4}\times(x^2+1)'=-6x(x^2+1)^{-4}$$

$$=-\frac{6x}{(x^2+1)^4}$$

(2) $y'=2\sin x\times(\sin x)'=2\sin x\cos x$

(3) $y'=e^x+e^{-x}\times(-x)'=e^x-e^{-x}$

197 정답 (1) $y'=\dfrac{3}{3x+2}$

(2) $y'=-\tan x$

(3) $y'=\dfrac{x}{x^2+1}$

(1) $y'=\dfrac{(3x+2)'}{3x+2}=\dfrac{3}{3x+2}$

(2) $y'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

(3) $y=\ln\sqrt{x^2+1}=\ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$이므로

$$y'=\frac{1}{2}\times\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}$$

198 정답 (1) $y'=\dfrac{2}{x^2-1}$

(2) $y'=\dfrac{\sin x+x\cos x}{x\sin x}$

(3) $y'=\dfrac{1}{\ln 3\sin x\cos x}$

(1) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=\ln(1-x)-\ln(1+x)$이므로

$$y'=\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}=\frac{2}{x^2-1}$$

(2) $y=\ln(x\sin x)=\ln x+\ln\sin x$이므로

$$y'=\frac{1}{x}+\frac{(\sin x)'}{\sin x}=\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$=\frac{\sin x+x\cos x}{x\sin x}$$

(3) $y=\log_3(\tan x)=\dfrac{\ln(\tan x)}{\ln 3}$

$$=\frac{1}{\ln 3}\times\ln\frac{\sin x}{\cos x}$$

$=\dfrac{1}{\ln 3}(\ln\sin x-\ln\cos x)$이므로

$$y'=\frac{1}{\ln 3}\left\{\frac{(\sin x)'}{\sin x}-\frac{(\cos x)'}{\cos x}\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{-\sin x}{\cos x}\right)$$
$$=\frac{1}{\ln 3\sin x\cos x}$$

199 정답 $y'=\dfrac{2x^{\ln x}\ln x}{x}$

양변에 자연로그를 취하면 $\ln y=\ln x^{\ln x}=(\ln x)^2$이므로

양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=2\ln x\times(\ln x)'$$
$$=2\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$$
$$\therefore\ y'=y\times\frac{2\ln x}{x}$$
$$=\frac{2x^{\ln x}\ln x}{x}$$

200 정답 $y'=-\dfrac{3(x+1)(x-3)}{(x-1)^4}$

양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\ln\left|\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)^3}\right|$$
$$=2\ln|x+1|+\ln|x-2|-3\ln|x-1|$$

양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x-1}$$
$$=-\frac{3(x-3)}{(x+1)(x-2)(x-1)}$$
$$\therefore\ y'=\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)^3}\times\left\{-\frac{3(x-3)}{(x+1)(x-2)(x-1)}\right\}$$
$$=-\frac{3(x+1)(x-3)}{(x-1)^4}$$

연습문제 I .... pp.109~111

201 정답 (1) $y'=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ (2) $y'=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

(3) $y'=-\dfrac{x^2+9}{x^4}$

(1) $y'=\dfrac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{1\times(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

(2) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)+2}{x-1}=x+1+\dfrac{2}{x-1}$이므로

$$y'=1-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

(3) $y=\dfrac{x^2+3}{x^3}=x^{-1}+3x^{-3}$이므로

$$y'=-x^{-2}+3\times(-3)x^{-4}=-x^{-2}-9x^{-4}$$
$$=-\frac{x^2+9}{x^4}$$

202 정답 (1) $y'=-\dfrac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$ (2) $y'=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$

(1) $y'=\dfrac{(1+\cos x)'(1-\cos x)-(1+\cos x)(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}$

$$=\frac{(-\sin x)(1-\cos x)-(1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)^2}$$
$$=-\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

(2) $y'=\dfrac{(e^x)'(x+1)-e^x(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

203 정답 (1) $y'=e^x(\cos x-\sin x)-\sin x$ (2) $y'=-\csc^2 x$

(1) $y=\dfrac{e^x+1}{\sec x}=(e^x+1)\cos x$이므로

$$\begin{aligned}y'&=(e^x+1)'\cos x+(e^x+1)(\cos x)'\\&=e^x\cos x+(e^x+1)\times(-\sin x)\\&=e^x(\cos x-\sin x)-\sin x\end{aligned}$$

(2) $y=\dfrac{\tan x}{\underbrace{\sec^2 x-1}_{\tan^2 x+1=\sec^2 x}}=\dfrac{\tan x}{\tan^2 x}=\dfrac{1}{\tan x}=\cot x$이므로

$$y'=(\cot x)'=-\csc^2 x$$

204 정답 (1) $y'=3(x^2+x+1)^2(2x+1)$ (2) $y'=-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}$ (3) $y'=\dfrac{\cos\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}}$

(1) $y'=3(x^2+x+1)^2(x^2+x+1)'$

$$=3(x^2+x+1)^2(2x+1)$$

(2) $y=\sqrt{1+\cos x}=(1+\cos x)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{2}(1+\cos x)^{-\frac{1}{2}}\times(1+\cos x)'\\&=\frac{1}{2\sqrt{1+\cos x}}\times(-\sin x)\\&=-\frac{\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}\end{aligned}$$

(3) $y'=(\cos\sqrt{x+2})\times(\sqrt{x+2})'$

$$\begin{aligned}&=(\cos\sqrt{x+2})\times\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\\&=\frac{\cos\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}}\end{aligned}$$

205 정답 (1) $y'=\dfrac{1}{x}$ (2) $y'=(2x-1)\times 2^{x^2-x+1}\ln 2$

(1) $y'=\dfrac{(4x)'}{4x}=\dfrac{4}{4x}=\dfrac{1}{x}$

(2) $y'=2^{x^2-x+1}\times\ln 2\times(x^2-x+1)'$

$$=(2x-1)\times 2^{x^2-x+1}\ln 2$$

206 정답 1

$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos(\tan x)\times(\tan x)'\\&=\cos(\tan x)\times\sec^2 x\\&=\frac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

$$\therefore\ f'(\pi)=\frac{\cos(\tan\pi)}{\cos^2\pi}=\frac{\cos 0}{(-1)^2}=1$$

207 정답 4

$y=\sin 2x\cos 2x=\dfrac{1}{2}\sin 4x$이므로

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin 2x\cos 2x)&=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)\\&=\frac{1}{2}\times 4\cos 4x\\&=2\cos 4x\end{aligned}$$

$$\therefore\ a=4$$

208 정답 ②

$f(x)=\sqrt[3]{8+\sin x}=(8+\sin x)^{\frac{1}{3}}$이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{3}(8+\sin x)^{\frac{1}{3}-1}\times(8+\sin x)'\\&=\frac{1}{3}(8+\sin x)^{-\frac{2}{3}}\times\cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f'(\pi)&=\frac{1}{3}(8+\sin\pi)^{-\frac{2}{3}}\times\cos\pi\\&=\frac{1}{3}\times 8^{-\frac{2}{3}}\times(-1)=-\frac{1}{12}\end{aligned}$$

209 정답 ⑤

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\sec x\times(\sec x)'=2\sec x\times\sec x\tan x\\&=2\sec^2 x\tan x=2(1+\tan^2 x)\tan x\\&=2\tan^3 x+2\tan x\end{aligned}$$

이므로 $a=2$, $b=2$

$$\therefore\ a+b=4$$

210 정답 ②

$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(e^{2x}-1)'(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2}\\&=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}\\&=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ f'(0)=\frac{4}{(1+1)^2}=1$$

211 정답 ③

$g(x)=\{xf(x)\}^2$에서

$$\begin{aligned}g'(x)&=2\{xf(x)\}\{xf(x)\}'\\&=2xf(x)\{f(x)+xf'(x)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ g'(1)&=2f(1)\{f(1)+f'(1)\}\\&=2\times 2\times\{2+(-1)\}=4\end{aligned}$$

212 정답 2

$f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$$f'(x)=2x\ln(2x-1)+x^2\times\frac{2}{2x-1}$$

$$=2x\ln(2x-1)+\frac{2x^2}{2x-1}$$

$$\therefore f'(1)=2$$

213 정답 $y'=\dfrac{x^{\sqrt{x}}(\ln x+2)}{2\sqrt{x}}$

양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y=\ln x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\ln x$$

양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=(\sqrt{x})'\ln x+\sqrt{x}\,(\ln x)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\ln x+\sqrt{x}\times\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore y'=y\times\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}=\frac{x^{\sqrt{x}}(\ln x+2)}{2\sqrt{x}}$$

214 정답 (1) $y'=\dfrac{2(x^2+2)}{(x-1)^2(x+2)^2}$

(2) $y'=\dfrac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

(1) 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\ln\left|\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\right|$$

$$=\ln|x+1|+\ln|x-2|-\ln|x-1|-\ln|x+2|$$

양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

$$=\frac{2(x^2+2)}{(x+1)(x-2)(x-1)(x+2)}$$

$$\therefore y'=y\times\frac{2(x^2+2)}{(x+1)(x-2)(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\times\frac{2(x^2+2)}{(x+1)(x-2)(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{2(x^2+2)}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

(2) 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\ln\left|\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right|=\ln|2x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|$$

양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{x(x^2+1)}$$

$$\therefore y'=y\times\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{x(x^2+1)}$$

$$=\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

연습문제 Ⅱ p.112

215 정답 ①

$\ln\{1+f(x)\}+xf(x)=\ln 2$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)}+f(x)+xf'(x)=0$ …… ㉡

㉠에 $x=0$을 대입하면

$\ln\{1+f(0)\}=\ln 2$, 즉 $1+f(0)=2$

$\therefore f(0)=1$

또, ㉡에 $x=0$을 대입하면

$$\frac{f'(0)}{1+f(0)}+f(0)+0\times f'(0)=0,\ \frac{f'(0)}{1+1}=-1$$

$\therefore f'(0)=-2$

216 정답 0

$$F'(x)=e^{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}\times[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]'$$

$$=e^{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}\times\{2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)\}$$

$$=e^{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}\times\{2f(x)g(x)-2g(x)f(x)\}=0$$

$\therefore F'(1)=0$

다른 풀이

$\therefore F'(1)=0$

217 정답 6

양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x-2)^3(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x+2}\right|$$

$$=3\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\ln|x+2|$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x-2}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x+2}$$

따라서

$$f'(x)=\left\{\frac{3}{x-2}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x+2}\right\}\times\frac{(x-2)^3\sqrt{x+1}}{x+2}$$

이므로

$$f'(0)=\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{8}{2}\right)=6$$

218 정답 0 서술형

$f(x)=\tan x$에서 $f'(x)=\sec^2 x$ … ①

$f'(\alpha)+f'(\beta)=\sec^2\alpha+\sec^2\beta$

$=(1+\tan^2\alpha)+(1+\tan^2\beta)$

$=2$

$\therefore \tan^2\alpha+\tan^2\beta=0$

이때, $\tan\alpha$, $\tan\beta$는 실수이고 $(\text{실수})^2\geq 0$이므로

$\tan\alpha=0$, $\tan\beta=0$이다. … ②

$\therefore f(\alpha)+f(\beta)=\tan\alpha+\tan\beta=0$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$f'(x)$ 구하기	30%
②	$f'(\alpha)+f'(\beta)=2$를 만족하는 $\tan\alpha$, $\tan\beta$의 값 구하기	50%
③	$f(\alpha)+f(\beta)$의 값 구하기	20%

7. 여러 가지 미분법 (2)

유형 pp.115~123

001 정답 (1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{3y}$ (단, $y\neq 0$)

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$ (단, $x\neq 0$)

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-3y}{3x-2y}$ (단, $3x\neq 2y$)

(4) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ (단, $x\neq 0$)

(5) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sin y+y\cos x}{x\cos y+\sin x}$

(단, $x\cos y+\sin x\neq 0$)

(6) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

(1) $2x^2+3y^2=6$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$4x+6y\dfrac{dy}{dx}=0$ $\quad\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{3y}$ (단, $y\neq 0$)

(2) $xy=4$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$(x)'y+x(y)'=0$, $y+x\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$ (단, $x\neq 0$)

(3) $x^2-3xy+y^2=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x-3y-3x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-3y}{3x-2y}$ (단, $3x\neq 2y$)

(4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ (단, $x\neq 0$)

(5) $x\sin y+y\sin x=\dfrac{\pi}{4}$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$\{(x)'\sin y+x(\sin y)'\}+\{(y)'\sin x+y(\sin x)'\}=0$

$\sin y+x\cos y\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dy}{dx}\sin x+y\cos x=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sin y+y\cos x}{x\cos y+\sin x}$

(단, $x\cos y+\sin x\neq 0$)

(6) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$의 양변을 세제곱하면

$y^3=x^2+1$

이 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$3y^2\dfrac{dy}{dx}=2x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{3y^2}=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

002 정답 (1) ① $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3y^2+1}$

② $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sqrt{y^3+4y+5}}{3y^2+4}$

③ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ (단, $x\neq1$)

(2) $\dfrac{1}{3}$

(1) ① $x=y^3+y+1$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=3y^2+1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2+1}$$

② $x=\sqrt{y^3+4y+5}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{(y^3+4y+5)'}{2\sqrt{y^3+4y+5}}=\frac{3y^2+4}{2\sqrt{y^3+4y+5}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{y^3+4y+5}}{3y^2+4}$$

③ $y=\sqrt[3]{x-1}$에서 $y^3=x-1$이므로

$$x=y^3+1$$

이 식의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=3y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}\ (\text{단, } x\neq1)$$

(2) 함수 $f(x)=x^3+2$의 역함수가 $y=g(x)$이므로

$$f(g(x))=x$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=3$을 대입하면

$$f'(g(3))g'(3)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때, $g(3)=k$ (k는 실수)라 하면 $f(k)=3$이므로

$$k^3+2=3 \qquad \therefore k=1$$

한편, $f'(x)=3x^2$에서 $f'(1)=3$이므로 ㉡에 대입하면

$$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$$

003 정답 (1) $\dfrac{dy}{dx}=3t$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2(t^2+1)}{t}$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=-\cot t$

(1) $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$를 각각 구하면

$$\frac{dx}{dt}=2t-2,\ \frac{dy}{dt}=6t^2-6t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2-6t}{2t-2}=3t$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$를 각각 구하면

$$\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t^2},\ \frac{dy}{dt}=2t-\frac{2}{t^3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t^4-2}{t^3-t}=\frac{2(t^2+1)}{t}$$

(3) $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$를 각각 구하면

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t,\ \frac{dy}{dt}=\cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\cot t$$

004 정답 (1) -2 (2) $a=1$, $m=\dfrac{1}{5}$

(1) 주어진 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2x+\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x+2y)\frac{dy}{dx}=-2x-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y}{x+2y} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=1$, $y=0$을 대입하면 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{-2-0}{1+0}=-2$$

(2) 점 $(2, a)$가 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점이므로

$f^{-1}(2)=a$에서 $f(a)=2$

즉, $f(a)=a^3+2a-1=2$이므로

$$a^3+2a-3=0$$

$$(a-1)(a^2+a+3)=0$$

그런데 $a^2+a+3>0$이므로 $\quad a=1$

$$\therefore f^{-1}(2)=1$$

한편, 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(2, a)$에서의 접선의 기울기는 $m=(f^{-1})'(2)$이다.

함수 $f(x)=x^3+2x-1$의 역함수가 $y=f^{-1}(x)$이므로

$$f(f^{-1}(x))=x$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x)=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=2$를 대입하면 $f'(f^{-1}(2))(f^{-1})'(2)=1$에서

$$f'(1)(f^{-1})'(2)=1$$

$f'(x)=3x^2+2$에서 $f'(1)=5$이므로

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}=m$$

$$\therefore a=1,\ m=\frac{1}{5}$$

005 정답 (1) $y''=4(x+1)e^{2x}$

(2) $y''=\frac{x-2}{e^x}$ (3) $y''=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

(1) $y'=e^{2x}+2xe^{2x}$이므로

$y''=2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}=4(x+1)e^{2x}$

(2) $y'=\frac{1\times e^x-x\times e^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$이므로

$y''=\frac{(-1)e^x-(1-x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{x-2}{e^x}$

(3) $y'=\frac{\frac{1}{x}\times x-(\ln x)\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$이므로

$y''=\frac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln x)\times 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

확인문제 pp.115~123

219 정답 (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{2y}$ (단, $y\neq 0$)

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y^2}{2xy}$ (단, $xy\neq 0$)

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y-x}$ (단, $x\neq 2y$)

(1) $3x^2+2y^2=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$6x+4y\frac{dy}{dx}=0$ $\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{2y}$ (단, $y\neq 0$)

(2) $x^3-xy^2=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-y^2-x\times 2y\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y^2}{2xy}$ (단, $xy\neq 0$)

(3) $y^2-xy+1=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2y\frac{dy}{dx}-y-x\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y-x}$ (단, $x\neq 2y$)

220 정답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{\cos y}$ (단, $\cos y\neq 0$)

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{6x(2x^2+1)^2}{y}$ (단, $y\neq 0$)

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x\sin^2 y}{\cos^2 x\cos y}$ (단, $\cos x\cos y\neq 0$)

(1) $x^2-\sin y=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x-\cos y\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{\cos y}$ (단, $\cos y\neq 0$)

(2) $\sqrt[3]{y}=\sqrt{2x^2+1}$의 양변을 6제곱하면

$y^2=(2x^2+1)^3$

이 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2y\frac{dy}{dx}=3(2x^2+1)^2\times 4x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{6x(2x^2+1)^2}{y}$ (단, $y\neq 0$)

(3) $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin y}=3$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}-\frac{\cos y}{\sin^2 y}\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sin x\sin^2 y}{\cos^2 x\cos y}$ (단, $\cos x\cos y\neq 0$)

221 정답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5y^4}$ (단, $y\neq 0$)

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3(y+1)^2}$ (단, $y\neq -1$)

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$ $\left(단,\ x\neq -\frac{1}{3}\right)$

(1) $x=y^5+1$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=5y^4$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{5y^4}$ (단, $y\neq 0$)

(2) $x=(y+1)^3$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=3(y+1)^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3(y+1)^2}$ (단, $y\neq -1$)

(3) $y=\sqrt[3]{3x+1}$에서 $y^3=3x+1$이므로

$x=\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}$

이 식의 양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=y^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$ $\left(단,\ x\neq -\frac{1}{3}\right)$

222 정답 $\frac{1}{4}$

함수 $f(x)=x^3+x-2$의 역함수가 $y=g(x)$이므로

$f(g(x))=x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$ …… ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면

$f'(g(0))g'(0)=1$ …… ㉡

이때, $g(0)=k$ (k는 실수)라 하면 $f(k)=0$이므로

$k^3+k-2=0,\ (k-1)(k^2+k+2)=0$

$\therefore k=1$

한편, $f'(x)=3x^2+1$에서 $f'(1)=4$이므로 ㉡에 대입하면

$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$

223 정답 (1) $\frac{dy}{dx}=t^2-2t$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

(1) $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 각각 구하면

$\frac{dx}{dt}=3,\ \frac{dy}{dt}=3t^2-6t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-6t}{3}=t^2-2t$

(2) $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 각각 구하면

$$\frac{dx}{dt}=1-\cos t,\ \frac{dy}{dt}=\sin t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

224 정답 1

$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 각각 구하면

$$\frac{dx}{dt}=2t,\ \frac{dy}{dt}=3t^2-1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-1}{2t}$$

따라서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\frac{3-1}{2}=1$

225 정답 3

$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 각각 구하면

$$\frac{dx}{dt}=2t-4,\ \frac{dy}{dt}=3t^2-2at-1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3t^2-2at-1}{2t-4}$$

$t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값이 4이므로

$$\frac{3-2a-1}{-2}=2$$

$$\therefore a=3$$

226 정답 $\frac{1}{4}$

점 $(3,\ t)$가 곡선 $y=g(t)$ 위의 점이므로

$t=g(3)$에서 $\quad f(t)=3$

즉, $t^3+t+1=3$에서 $t^3+t-2=0$이므로

$$(t-1)(t^2+t+2)=0$$

$$\therefore t=1\ (\because t^2+t+2>0)$$

이때, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3,\ t)$에서의 접선의 기울기는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ 3)$에서의 접선의 기울기의 역수이다.

$f(x)=x^3+x+1$에서 $f'(x)=3x^2+1$이므로

$$f'(1)=4$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{4}$이다.

227 정답 (1) $y''=\frac{1}{x}$ (2) $y''=e^x(x^3+6x^2+6x)$ (3) $y''=-2e^x\sin x$

(1) $y'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$$\therefore y''=\frac{1}{x}$$

(2) $y'=(x^3)'e^x+x^3(e^x)'=3x^2e^x+x^3e^x=e^x(x^3+3x^2)$

$$\begin{aligned}\therefore y''&=(e^x)'(x^3+3x^2)+e^x(x^3+3x^2)'\\&=e^x(x^3+3x^2)+e^x(3x^2+6x)\\&=e^x(x^3+6x^2+6x)\end{aligned}$$

(3) $y'=(e^x)'\cos x+e^x(\cos x)'$

$$\begin{aligned}&=e^x\cos x+e^x(-\sin x)\\&=e^x(\cos x-\sin x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore y''&=(e^x)'(\cos x-\sin x)+e^x(\cos x-\sin x)'\\&=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)\\&=-2e^x\sin x\end{aligned}$$

228 정답 $a=1,\ b=0$

$f(x)=(ax+b)\sin x$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=(ax+b)'\sin x+(ax+b)(\sin x)'\\&=a\sin x+(ax+b)\cos x\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

즉, $f(x)=ax\sin x$이므로

$$f'(x)=a\sin x+ax\cos x,$$

$$f''(x)=a\cos x+a(\cos x-x\sin x)$$

위의 식을 조건 (가)에 대입하면

$$2a\cos x=2\cos x \Rightarrow 2a=2$$

$$\therefore a=1$$

연습문제 I .... pp.124~126

229 정답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{4y}$ (단, $y\neq0$) (3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2}$ (단, $y\neq0$)

(1) $3x-2y+1=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(3x)-\frac{d}{dx}(2y)+\frac{d}{dx}(1)=0$$

$$3-2\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}$$

(2) $x^2-4y^2=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(4y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x-8y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x}{4y}\ (단,\ y\neq0)$$

(3) $y^3=x^2$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(y^3)=\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}=2x \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2} \text{ (단, } y\neq 0\text{)}$$

230

정답 (1) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{1-y}{x-1}}$ **(단, $x\neq 1$)**

(2) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x-y^2}}$ **(단, $y^2\neq x$)**

(3) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x+2y}}$ **(단, $x\neq -2y$)**

(1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$에서 $xy=x+y$

이 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$y+x\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$$

$$(x-1)\frac{dy}{dx}=1-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1-y}{x-1} \text{ (단, } x\neq 1\text{)}$$

(2) $x^3+y^3=3xy$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=3y+3x\frac{dy}{dx}$$

$$3(y^2-x)\frac{dy}{dx}=3(y-x^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x-y^2} \text{ (단, } y^2\neq x\text{)}$$

(3) $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=1$에서 $x^2-y^2=xy$

이 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2x-2y\frac{dy}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}$$

$$(x+2y)\frac{dy}{dx}=2x-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x+2y} \text{ (단, } x\neq -2y\text{)}$$

231

정답 (1) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{\sin y}}$ **(단, $\sin y\neq 0$)**

(2) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=-e^{x-y}}$

(1) $\sin x+\cos y=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\cos x-\sin y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{\sin y} \text{ (단, } \sin y\neq 0\text{)}$$

(2) $e^x+e^y=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$e^x+e^y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{e^x}{e^y}=-e^{x-y}$$

232

정답 (1) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}}$

(2) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4(y-1)^3}}$ **(단, $y\neq 1$)**

(3) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{y+1}}{3y+2}}$

(1) $x=y^2-1$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}$$

(2) $x=(y-1)^4$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=4(y-1)^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{4(y-1)^3} \text{ (단, } y\neq 1\text{)}$$

(3) $x=y\sqrt{y+1}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{y+1}+y\times\frac{1}{2\sqrt{y+1}}=\frac{3y+2}{2\sqrt{y+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{y+1}}{3y+2}$$

233

정답 (1) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y-e^{-y}}}$ **(단, $y\neq 0$)**

(2) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=y+\frac{1}{2}}$

(3) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\cos^2 y}$

(1) $x=e^y+e^{-y}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=e^y+e^{-y}\times(-1)=e^y-e^{-y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y-e^{-y}} \text{ (단, } y\neq 0\text{)}$$

(2) $x=\ln(2y+1)$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{2y+1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2y+1}{2}=y+\frac{1}{2}$$

(3) $x=\tan y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\sec^2 y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2 y}=\cos^2 y$$

개념 보충

$1+\tan^2 y=\sec^2 y$에서 $x=\tan y$이므로

$$\sec^2 y=1+x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

234 정답 ①

$f(1)=3$이므로 $g(3)=1$

$f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수이므로

$$f(g(x))=x$$

이 식을 x에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=1$$

$x=3$을 대입하면 $f'(g(3))g'(3)=1$

$g(3)=1$, $f'(1)=2$이므로

$$f'(1)g'(3)=1, \qquad 2g'(3)=1$$

$$\therefore g'(3)=\frac{1}{2}$$

다른 풀이

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $y=g(x)$ 위의 점 $(3, 1)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선과 일치한다.

점 $(1, 3)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은

$$y-3=f'(1)(x-1)$$

$$\therefore y=2x+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$x=2y+1 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

$g'(3)$이 이 직선의 기울기이므로

$$g'(3)=\frac{1}{2}$$

235 정답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{2t+1}{2}$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}t$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2t\sqrt{t}}{\sqrt{t^2+1}}$

(1) $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=2t+1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+1}{2}$$

(2) $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$$

(3) $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{(t^2+1)'}{2\sqrt{t^2+1}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=\frac{2t\sqrt{t}}{\sqrt{t^2+1}}$$

236 정답 (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}\cot t$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}$ (단, $t\neq0$)

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2t(t+1)}$ (단, $t\neq-1$, $t\neq0$)

(1) $\frac{dx}{dt}=-3\sin t$, $\frac{dy}{dt}=2\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\cos t}{-3\sin t}=-\frac{2}{3}\cot t$$

(2) $\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}} \text{ (단, } t\neq0\text{)}$$

(3) $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t+1}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{t+1}}{2t}=\frac{1}{2t(t+1)} \text{ (단, } t\neq-1,\ t\neq0\text{)}$$

237 정답 -3

$x=f(t)$에서 $\frac{dx}{dt}=f'(t)$이고,

$y=g(t)$에서 $\frac{dy}{dt}=g'(t)$이다.

조건 (가)에서 $f(0)=g(0)=0$이므로

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)=2$$

$$\lim_{t\to0}\frac{g(t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0}=g'(0)=-6$$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$이므로 $t=0$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{g'(0)}{f'(0)}=\frac{-6}{2}=-3$$

238 정답 1

$\frac{dx}{dt}=\sec^2 t$, $\frac{dy}{dt}=2\sec t\tan t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{2\sec t\tan t}{\sec^2 t}$$

$$=\frac{2\tan t}{\sec t}$$

$$=2\sin t$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 $t=\frac{\pi}{6}$인 점에서 접선의 기울기는

$$2\sin\frac{\pi}{6}=1$$

07강

239 정답 ③

$\sqrt{x}+2\sqrt{y}=5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+2\times\frac{1}{2\sqrt{y}}\times\frac{dy}{dx}=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=1$, $y=4$를 대입하면 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{dy}{dx}=0$이므로

$$\frac{dy}{dx}=-1$$

따라서 이 곡선 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는 -1이다.

240 정답 (1) $y''=24(2x-1)$

(2) $y''=2e^x(\cos x-\sin x)$

(3) $y''=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$

(1) $y'=3(2x-1)^2\times(2x-1)'=6(2x-1)^2$이므로

$$y''=12(2x-1)\times 2=24(2x-1)$$

(2) $y'=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$ 이므로

$$y''=2e^x\cos x+2e^x\times(-\sin x)$$
$$=2e^x(\cos x-\sin x)$$

(3) $y'=\frac{e^x\times x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$이므로

$$y''=\frac{\{e^x(x-1)\}'x^2-e^x(x-1)(x^2)'}{x^4}$$
$$=\frac{\{e^x(x-1)+e^x\}\times x^2-e^x(x-1)\times 2x}{x^4}$$
$$=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$$

241 정답 $a=0$, $b=1$

$f'(x)=ae^{bx}+(ax+1)e^{bx}\times b=(abx+a+b)e^{bx}$이므로

$$f''(x)=abe^{bx}+(abx+a+b)e^{bx}\times b$$
$$=(ab^2x+2ab+b^2)e^{bx}$$

이때, $f'(0)=a+b=1$, $f''(0)=2ab+b^2=1$에서

$a=1-b$이므로 $2ab+b^2=1$에 대입하면

$$2b(1-b)+b^2=1,\ (b-1)^2=0$$
$$\therefore b=1$$

$b=1$을 $a=1-b$에 대입하면 $a=0$

242 정답 ②

$f'(x)=3\cos^2 2x\times(-2\sin 2x)=-6\cos^2 2x\sin 2x$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)-f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$f''(x)=24\cos 2x\sin^2 2x-12\cos^3 2x$이므로

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=12$$

243 정답 ①

함수 $y=\cos x$의 역함수는 $x=\cos y$이므로

양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=-\sin y \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}$$

그런데 $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$ ($\because\ 0<x<\pi$)이므로

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \therefore f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

244 정답 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{e^y\cos x-\sin^2 x}{e^{2y}}$

$e^y+\cos x=2$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$e^y\frac{dy}{dx}-\sin x=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{e^y}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\sin x)'\times e^y-\sin x\times(e^y)'}{(e^y)^2}$$

$$=\frac{\cos x\times e^y-\sin x\times e^y\times\frac{\sin x}{e^y}}{(e^y)^2} \leftarrow (e^y)'=e^y\times\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{e^y\cos x-\sin^2 x}{e^{2y}}$$

245 정답 ⑤

$\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2+2t$이므로

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3t+2}{2}\right) \leftarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+2t}{2t}=\frac{3t+2}{2}$$

$$=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3t+2}{2}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3}{2}}{2t}=\frac{3}{4t}$$

246 정답 $\frac{2}{5}$ .... 서술형

$\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=3t^2+2$이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+2}{2}$ ··· ①

한편, $y=t^3+2t-2$에서 $y=1$일 때

$$1=t^3+2t-2,\ t^3+2t-3=0$$
$$(t-1)(t^2+t+3)=0 \qquad \therefore t=1 \quad \cdots ②$$

$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{3t^2+2}$이고 $g'(1)$의 값은 $t=1$일 때 $\frac{dx}{dy}$의 값과 같으므로 $\quad g'(1)=\frac{2}{5}$ ··· ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 구하기	30 %
②	$y=1$일 때 t의 값 구하기	30 %
③	$g'(1)$의 값 구하기	40 %

8. 접선의 방정식, 극대 · 극소와 미분

유형 pp.132~142

001 정답 (1) $y=2x+1$ (2) $y=2x$

(1) $f(x)=e^{3x}-x$라고 하면 $f'(x)=3e^{3x}-1$

이때, 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=3-1=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=2(x-0)$

$\therefore y=2x+1$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=2$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2+1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+1}{2}$$

따라서 $t=1$에 대응하는 곡선 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{3+1}{2}=2$

이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-2=2(x-1)$

$\therefore y=2x$

002 정답 (1) $y=-x+2$ (2) $y=\frac{1}{5}x+1$

(1) $x^2-xy+y^2=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x-y-x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x-2y}$ (단, $x\neq 2y$)

이때, 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{2-1}{1-2}=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=-(x-1)$

$\therefore y=-x+2$

(2) 함수 $f(x)=x^3+2x-3$의 역함수가 $y=g(x)$이므로

$f(g(x))=x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$ …… ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면

$f'(g(0))g'(0)=1$ …… ㉡

이때, $g(0)=1$이고 $f'(x)=3x^2+2$에서 $f'(1)=5$이므로

㉡에서 $g'(0)=\dfrac{1}{f'(g(0))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는 $g'(0)=\dfrac{1}{5}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\dfrac{1}{5}(x-0)$ $\therefore y=\dfrac{1}{5}x+1$

다른 풀이

함수 $f(x)=x^3+2x-3$의 역함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선과 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$f'(x)=3x^2+2$이므로 $f'(1)=3+2=5$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=5(x-1)$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 방정식은

$x=5(y-1)$ $\therefore y=\dfrac{1}{5}x+1$

003 정답 (1) $y=-2x+\pi+1$ (2) $y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$

(1) $f(x)=\sin 2x+1$이라 하면 $f'(x)=2\cos 2x$

접점의 좌표를 $(a, \sin 2a+1)$이라고 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(a)=2\cos 2a=-2$ $\therefore a=\dfrac{\pi}{2}$ ($\because 0<a<\pi$)

따라서 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\therefore y=-2x+\pi+1$

(2) $f(x)=xe^{-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

이때, 접점의 좌표를 (t, te^{-t})이라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=e^{-t}(1-t)$

따라서 접선의 방정식은

$y-te^{-t}=e^{-t}(1-t)(x-t)$ …… ㉠

이 접선이 점 $(4, 0)$을 지나므로

$0-te^{-t}=e^{-t}(1-t)(4-t)$, $e^{-t}(t^2-4t+4)=0$

$\therefore t=2$

$t=2$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y-2e^{-2}=-e^{-2}(x-2)$

$\therefore y=-\dfrac{1}{e^2}x+\dfrac{4}{e^2}$

004 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=x^4-2x^3-12x^2+12x+24$라 하면

$f'(x)=4x^3-6x^2-24x+12$, $f''(x)=12x^2-12x-24$

$f''(x)=0$인 x의 값을 구하면

$12x^2-12x-24=0$, $12(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	아래로 볼록	3 (변곡점)	위로 볼록	0 (변곡점)	아래로 볼록

08강

표에서

$x<-1$일 때 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록,

$-1<x<2$일 때 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록,

$x>2$일 때 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록이다.

따라서 변곡점의 좌표는 $(-1,\ 3)$, $(2,\ 0)$이다.

(2) $f(x)=xe^{-x}$이라 하면

$f'(x)=(1-x)e^{-x}$, $f''(x)=(x-2)e^{-x}$

$f''(x)=0$인 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	위로 볼록	$2e^{-2}$ (변곡점)	아래로 볼록

표에서

$x<2$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록,

$x>2$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록이다.

따라서 변곡점의 좌표는 $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$이다.

005 정답 (1) $a=1$, $b=-2$ (2) -3

(1) $f(x)=e^x(ax+b)$라 하면

$f'(x)=e^x(ax+b+a)$,

$f''(x)=e^x(ax+b+2a)$

변곡점의 x좌표가 0이므로

$f''(0)=b+2a=0$ …… ㉠

또, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=e^0(a\times0+b)$ $\therefore b=-2$

$b=-2$를 ㉠에 대입하면 $a=1$

$\therefore a=1,\ b=-2$

(2) $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax+b$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}+2a$

$x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=1+2a+b=0$

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로

$f''\left(\frac{1}{2}\right)=-4+2a=0$

$\therefore a=2,\ b=-5$

따라서 $f(x)=\ln x+2x^2-5x$이므로 극솟값은

$f(1)=2-5=-3$

006 정답 (1) 극댓값 : $\frac{4}{e^2}$, 극솟값 : 0 (2) 극댓값 : 5

(1) $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f''(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}$이므로

$f''(0)=2>0$, $f''(2)=-2e^{-2}<0$

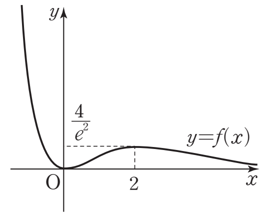
따라서 함수 $f(x)$는

$x=0$에서 극소이고 극솟값은

$f(0)=0$

$x=2$에서 극대이고 극댓값은

$f(2)=4e^{-2}=\frac{4}{e^2}$



(2) $f'(x)=4\cos x+2\sin 2x=4\cos x+4\sin x\cos x$

$=4\cos x(1+\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=-1$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$f''(x)=-4\sin x(1+\sin x)+4\cos^2 x$

$=-4\sin x-4\sin^2 x+4\cos^2 x$

이므로 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4-4+0=-8<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극대이고 극댓값은

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4-(-1)=5$

007 정답 (1) $a=-1$, 극댓값 : $e^{-\frac{\pi}{4}}$ (2) $a=4$, $b=3$

(1) $f'(x)=\sqrt{2}ae^{ax}\sin x+\sqrt{2}e^{ax}\cos x$

$=\sqrt{2}e^{ax}(a\sin x+\cos x)$

$f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극대이므로 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}a}(a+1)=0$

$\therefore a=-1$

따라서 극댓값은

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=e^{-\frac{\pi}{4}}$

[참고] $a=-1$일 때, $f'(x)=\sqrt{2}e^{-x}(-\sin x+\cos x)$

이므로

$f''(x)=-2\sqrt{2}e^{-x}\cos x$

따라서 $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2e^{-\frac{\pi}{4}}<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극대이다.

(2) $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}-x$이므로

$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-1$

$x=1$에서 극솟값 2를 가지므로 $f'(1)=0$, $f(1)=2$

$f'(1)=0$에서 $a-b-1=0$

$f(1)=2$에서 $b-1=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=3$

008 정답 (1) $-1\le m\le1$ (2) $a<-2$ 또는 $a>2$

(1) $f'(x)=\frac{-(x^2-1)-2x(-x+m)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-2mx+1}{(x^2-1)^2}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 정의역의 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$ 또는 $f'(x)\le0$이면 된다.

정의역의 모든 실수 x에 대하여 $(x^2-1)^2>0$이므로

$x^2-2mx+1\geq 0$이면 된다.

이때, 이차방정식 $x^2-2mx+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=m^2-1\leq 0 \qquad \therefore -1\leq m\leq 1$$

(2) $f'(x)=2+a\cos x$이고, 함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$의 실근이 존재하고 그 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

즉, $f'(x)=2+a\cos x$의 최댓값은 양수, 최솟값은 음수이어야 한다.

$-1\leq \cos x\leq 1$에서 $-|a|\leq a\cos x\leq |a|$이므로

$$2-|a|\leq 2+a\cos x\leq 2+|a|$$

따라서 $f'(x)$의 최댓값은 $2+|a|$, 최솟값은 $2-|a|$이므로

$$2+|a|>0,\ 2-|a|<0$$

즉, $|a|>2$이므로

$$a<-2 \text{ 또는 } a>2$$

확인문제 .... pp.132~142

247 정답 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$f(x)=x(1+\ln x)$라 하면

$$f'(x)=1\times(1+\ln x)+x\times\frac{1}{x}=2+\ln x$$

$f'(1)=2$이므로 점 $(1, 1)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

248 정답 $y=-x+2$

$\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\sqrt{3}\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sqrt{3}\cos t}{-\sin t}=-\sqrt{3}\cot t$$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 곡선 위의 점 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$-\sqrt{3}\cot\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=-1$$

이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$$\therefore y=-x+2$$

249 정답 (1) $y=3x-2$ (2) $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

(1) $2x^2-xy-1=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$4x-y-x\frac{dy}{dx}=0\text{이므로} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{4x-y}{x}$$

이때, 점 P$(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{4-1}{1}=3$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=3(x-1)$

$$\therefore y=3x-2$$

(2) $x^3-2xy^2+1=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2-2y^2-2x\times 2y\frac{dy}{dx}=0\text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-2y^2}{4xy}$$

이때, 점 P$(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=\frac{1}{4}(x-1)$

$$\therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$$

250 정답 $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

함수 $f(x)=x^3+x-1$의 역함수가 $y=g(x)$이므로

$$f(g(x))=x$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$$f'(g(1))g'(1)=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때, $g(1)=1$이고 $f'(x)=3x^2+1$에서 $f'(1)=4$이므로

㉡에서 $g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $g'(1)=\frac{1}{4}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{4}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$$

251 정답 $y=2x-2$

$f(x)=\ln(2x-1)$이라 하면

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'}{2x-1}=\frac{2}{2x-1}$$

접점의 좌표를 $(a, \ln(2a-1))$이라고 하면 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(a)=\frac{2}{2a-1}=2$$

$$2a-1=1 \qquad \therefore a=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-0=2(x-1) \qquad \therefore y=2x-2$$

252 정답 $y=2x-2$

$f(x)=x-\frac{1}{x}$로 놓으면 $\quad f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$

이때, 접점의 좌표를 $\left(t,\ t-\frac{1}{t}\right)$이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=1+\frac{1}{t^2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-\left(t-\frac{1}{t}\right)=\left(1+\frac{1}{t^2}\right)(x-t) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 접선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$$-2-\left(t-\frac{1}{t}\right)=\left(1+\frac{1}{t^2}\right)(0-t),\ \frac{2}{t}=2$$

$\therefore t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=2(x-1) \qquad \therefore y=2x-2$

253 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=x^3-3x^2$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x,\ f''(x)=6x-6$

$f''(x)=0$인 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	위로 볼록	-2 (변곡점)	아래로 볼록

표에서

$x<1$일 때 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록,

$x>1$일 때 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록이다.

따라서 변곡점의 좌표는 $(1,\ -2)$이다.

(2) $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2},\ f''(x)=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(x)=0$인 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	아래로 볼록	$\frac{3}{4}$ (변곡점)	위로 볼록	$\frac{3}{4}$ (변곡점)	아래로 볼록

표에서

$x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록,

$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록이다.

따라서 변곡점의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$이다.

254 정답 $(0,\ 0)$

$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ f''(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$f''(x)=0$에서 $\quad e^x-e^{-x}=0,\ e^{2x}=1$

$\therefore x=0$

$x<0$일 때 $f''(x)<0$이고, $x>0$일 때 $f''(x)>0$이다.

즉, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.

255 정답 $a=4,\ b=3\ln 2$

$f(x)=\ln(a+x^2)$이라 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{a+x^2},$$

$$f''(x)=\frac{2(a+x^2)-4x^2}{(a+x^2)^2}=\frac{2(a-x^2)}{(a+x^2)^2}$$

변곡점의 x좌표가 2이므로 $f''(2)=0$에서

$a=4$

또, 곡선 $y=\ln(a+x^2)$이 점 $(2,\ b)$를 지나므로

$b=\ln(a+4)=\ln 8=3\ln 2$

$\therefore a=4,\ b=3\ln 2$

256 정답 8

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$이라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c,\ f''(x)=6ax+2b$

변곡점의 x좌표가 1이므로

$f''(1)=6a+2b=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식이 $y=x+2$이므로

$f(1)=a+b+c+1=3 \quad \cdots\cdots ㉡$

$f'(1)=3a+2b+c=1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-3,\ c=4$

$\therefore a-b+c=8$

257 정답 극솟값 : $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

$f(x)=x^2-\ln\sqrt{x}=x^2-\frac{1}{2}\ln x$이므로

$$f'(x)=2x-\frac{1}{2x}$$

$f'(x)=0$에서 $\frac{4x^2-1}{2x}=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}\ (\because x>0)$

한편, $f''(x)=2+\frac{1}{2x^2}$이므로 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이고 극솟값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

258 정답 2π

$f'(x)=1-2\cos x$이므로 $f'(x)=0$에서

$\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$f''(x)=2\sin x$에서 $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$, $f''\left(\frac{5}{3}\pi\right)<0$이므로

함수 $f(x)$는

$x=\frac{5}{3}\pi$에서 극대이고 극댓값은

$f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$,

$x=\frac{\pi}{3}$에서 극소이고 극솟값은

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

따라서 극댓값과 극솟값의 합은

$\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}=2\pi$

259 정답 $a=\frac{1}{e}$, 극솟값 : -1

$f(x)=x\ln ax$이므로

$f'(x)=\ln ax+1$

$x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f'(1)=0$에서

$\ln a+1=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{e}$

따라서 극솟값은

$f(1)=\ln a=\ln\frac{1}{e}=-1$

260 정답 $\sqrt{3}$

$f(x)=a\sin x+b\cos x$이므로

$f'(x)=a\cos x-b\sin x$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값 2를 가지므로

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b=0$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=2$ …… ㉡

㉠에서 $b=\sqrt{3}a$이므로 이 식을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}a=2$

$\therefore a=1$

$a=1$을 $b=\sqrt{3}a$에 대입하면

$b=\sqrt{3}$

$\therefore ab=\sqrt{3}$

261 정답 $a<0$ 또는 $a>2$

$f'(x)=2axe^{-x}-(ax^2+2)e^{-x}=-(ax^2-2ax+2)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $ax^2-2ax+2=0$

이때 $a=0$이면 $f'(x)=0$의 실근이 존재하지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

$a\neq0$일 때, 함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $ax^2-2ax+2=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2-2a>0$이어야 한다.

$a(a-2)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>2$

262 정답 2

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$ 또는 $f'(x)\leq0$이어야 한다.

$f'(x)=k-2\sin x$에서 $k-2\leq k-2\sin x\leq k+2$이므로

$f'(x)$의 최솟값은 $k-2$, 최댓값은 $k+2$이다.

(i) $f'(x)\geq0$이려면 $f'(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 하므로

$k-2\geq0 \qquad \therefore k\geq2$

(ii) $f'(x)\leq0$이려면 $f'(x)$의 최댓값이 0 이하이어야 하므로

$k+2\leq0 \qquad \therefore k\leq-2$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않도록 하는 k의 값의 범위는 $\quad k\leq-2$ 또는 $k\geq2$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

연습문제 I .... pp.143~147

263 정답 $y=-x+e$

$f(x)=x-x\ln x$라 하면

$f'(x)=-\ln x$

$f'(e)=-1$이므로 점 $(e, 0)$에서의 접선의 기울기는 -1이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-(x-e) \qquad \therefore y=-x+e$

264 정답 5

$f(x)=\sin x+ax+b$, $g(x)=2x+c$라고 하면

$f'(x)=\cos x+a$

$f(0)=2$, $g(0)=2$, $f'(0)=2$이므로

$b=2$, $c=2$, $1+a=2$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=2$이므로

$a+b+c=5$

265 정답 $y=\sqrt{2}x-1$

$\frac{dx}{d\theta}=\sec\theta\tan\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sec^2\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sec^2\theta}{\sec\theta\tan\theta}=\frac{\sec\theta}{\tan\theta}=\csc\theta$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$에 대응하는 점 $(\sqrt{2}, 1)$에서의 접선의 기울기는

$$\csc\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \qquad \therefore y=\sqrt{2}x-1$$

266 정답 $m=2$, $n=-1$

$f(x)=\frac{mx}{x-n}$라 하면

$f(x)=\frac{m(x-n)+mn}{x-n}=m+\frac{mn}{x-n}$이므로

$$f'(x)=-\frac{mn}{(x-n)^2}$$

$f(1)=1$이므로 $1=\frac{m}{1-n}$

$$\therefore m=1-n \quad \cdots\cdots ㉠$$

또, $f'(1)=\frac{1}{2}$이므로

$$-\frac{mn}{(1-n)^2}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $-\frac{(1-n)n}{(1-n)^2}=\frac{1}{2}$

$$-2n+2n^2=1-2n+n^2, \qquad n^2=1$$

$$\therefore n=1 \text{ 또는 } n=-1$$

$n=1$일 때 $m=0$이고, $n=-1$일 때 $m=2$이므로 구하는 m, n의 값은

$$m=2,\ n=-1\ (\because m\neq 0)$$

267 정답 45

$x^3+y^3-axy+b=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-ay-ax\frac{dy}{dx}=0$에서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-ay}{ax-3y^2}$$

이때, 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$$\frac{12-a}{2a-3}=3 \qquad \therefore a=3$$

한편, 점 $(2, 1)$이 곡선 및 접선 위의 점이므로

$8+1-6+b=0$, $1=6+c$에서

$$b=-3,\ c=-5$$

$$\therefore abc=3\times(-3)\times(-5)=45$$

268 정답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

함수 $f(x)=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수가 $y=g(x)$이므로

$$f(g(x))=x$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$$f'(g(1))g'(1)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$g(1)=\frac{\pi}{4}$이고 $f'(x)=\sec^2 x$에서 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec^2\frac{\pi}{4}=2$이므로

㉡에서 $g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기는 $g'(1)=\frac{1}{2}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

269 정답 $y=-x+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{dx}{d\theta}=3\cos^2\theta(-\sin\theta)=-3\cos^2\theta\sin\theta$,

$\frac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{-3\cos^2\theta\sin\theta}$$

$$=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

$-\tan\theta=-1$에서 $\theta=\frac{\pi}{4}$ $(\because 0\leq\theta\leq\pi)$

$\theta=\frac{\pi}{4}$에 대응하는 곡선 위의 점의 좌표는 $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right)$,

즉 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$이므로 구하는 접선은 점 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$를 지나고 기울기가 -1인 직선이다.

따라서 $y-\frac{\sqrt{2}}{4}=-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$이므로

$$y=-x+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

270 정답 (1) $y=x-1$ (2) $y=\frac{1}{2e}x$

(1) $f(x)=x\ln x$라 하면 $f'(x)=\ln x+1$

이때, 접점의 좌표를 $(t, t\ln t)$라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=\ln t+1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-t\ln t=(\ln t+1)(x-t) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 접선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$$-1-t\ln t=(\ln t+1)(0-t)$$

$$\therefore t=1$$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=x-1$$

(2) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

이때, 접점의 좌표를 $\left(t, \dfrac{\ln t}{t}\right)$라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln t}{t^2}(x-t) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 접선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$$0-\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln t}{t^2}(0-t),\ 2\ln t=1$$

$$\therefore t=\sqrt{e}$$

$t=\sqrt{e}$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{2e}(x-\sqrt{e})$$

$$\therefore y=\frac{1}{2e}x$$

271 정답 C, D

점 A, B, C, D의 x좌표를 각각 a, b, c, d라 하고,
각 점에서의 $f'(x)$와 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	a	b	c	d
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

따라서 집합 S의 원소는 C, D이다.

272 정답 $\frac{3}{2}$

$y=\dfrac{\ln x}{x}$이므로

$$y'=\frac{1-\ln x}{x^2},\ y''=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$y''=0$에서 $\ln x=\dfrac{3}{2}$이므로 $x=e^{\frac{3}{2}}$

$x<e^{\frac{3}{2}}$이면 $y''<0$, $x>e^{\frac{3}{2}}$이면 $y''>0$이므로

변곡점의 좌표는 $\left(e^{\frac{3}{2}}, \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$이다.

따라서 $a=e^{\frac{3}{2}}$, $b=\dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$이므로

$$ab=e^{\frac{3}{2}}\times\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$$

273 정답 (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\sqrt{5}\pi$

(1) $y'=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x$, $y''=-2\cos 2x$

$y''=0$에서 $\cos 2x=0$

$-\pi<2x<\pi$이므로 $2x=-\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $2x=\dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore x=-\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{4}$$

$x=-\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{\pi}{4}$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로

변곡점의 좌표는 $\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{2}\right)$이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$$\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

(2) $y'=2+\sin x$, $y''=\cos x$

$y''=0$에서 $\cos x=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

$x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{3}{2}\pi$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로

변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\dfrac{3}{2}\pi, 3\pi\right)$이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2+(3\pi-\pi)^2}=\sqrt{5}\pi$$

274 정답 ①

$f(x)=xe^{ax+2}$이라 하면

$$f'(x)=e^{ax+2}+axe^{ax+2}=(ax+1)e^{ax+2}$$

$$f''(x)=ae^{ax+2}+a(ax+1)e^{ax+2}=a(ax+2)e^{ax+2}$$

점 $(-1, b)$가 변곡점이므로 $f''(-1)=0$

즉, $(-a+2)ae^{-a+2}=0$에서 $-a+2=0$

$$\therefore a=2\ (\because a\neq 0)$$

따라서 $f(x)=xe^{2x+2}$이고, 변곡점의 좌표가 $(-1, b)$이므로

즉, $b=-e^{-2+2}=-e^0=-1$이므로

$$a+b=2-1=1$$

275 정답 $-\frac{3}{2}<a<\frac{3}{2}$

$f(x)=ax^2+3\sin x+x$라 하면

$$\therefore f'(x)=2ax+3\cos x+1,\ f''(x)=2a-3\sin x$$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$의 실근이 존재하고 그 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

즉, 함수 $f''(x)=2a-3\sin x$의 최댓값은 양수, 최솟값은 음수이어야 한다.

$-1\le\sin x\le 1$이므로 $f''(x)$의 최댓값은 $2a+3$, 최솟값은 $2a-3$이다.

따라서 $2a+3>0$, $2a-3<0$에서

$$a>-\frac{3}{2},\ a<\frac{3}{2} \qquad \therefore -\frac{3}{2}<a<\frac{3}{2}$$

276 정답 (1) 극댓값 : 2, 극솟값 : -2

(2) 극댓값 : $\frac{\pi}{2}-1$, 극솟값 : $-\frac{\pi}{2}+1$

(1) $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$이므로

$f'(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x$,

$f''(x)=-\sin x-\sqrt{3}\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

이때, $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2<0$, $f''\left(\frac{7}{6}\pi\right)=2>0$이므로 함수 $f(x)$는

$x=\frac{\pi}{6}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$

$x=\frac{7}{6}\pi$에서 극소이고 극솟값은 $f\left(\frac{7}{6}\pi\right)=-2$

(2) $f(x)=2x-\tan x$이므로

$f'(x)=2-\sec^2 x$,

$f''(x)=-2\sec^2 x\tan x$

$f'(x)=0$에서 $\sec^2 x=2$이므로

$\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=-\frac{\pi}{4}$

이때, $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4<0$, $f''\left(-\frac{\pi}{4}\right)=4>0$이므로 함수

$f(x)$는

$x=\frac{\pi}{4}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-1$

$x=-\frac{\pi}{4}$에서 극소이고 극솟값은 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}+1$

277 정답 극솟값 0

로그의 진수는 양수이므로 $x>0$, $2-x>0$에서

$0<x<2$

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}+(-1)\ln(2-x)+(2-x)\times\frac{-1}{2-x}$

$=\ln x-\ln(2-x)$

$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}$

$f'(x)=0$에서 $\ln\frac{x}{2-x}=0$이므로

$\frac{x}{2-x}=1$

$\therefore x=1$

이때, $f''(1)=2>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=0$이다.

278 정답 $a=\frac{4}{e^2}$, $b=0$

$f'(x)=(\ln x)^2+x\times 2\ln x\times\frac{1}{x}=\ln x(\ln x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=0$ 또는 $\ln x=-2$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{1}{e^2}$

$f''(x)=\frac{1}{x}\times(\ln x+2)+\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{2(\ln x+1)}{x}$이므로

$f''\left(\frac{1}{e^2}\right)=-2e^2<0$, $f''(1)=2>0$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=\frac{1}{e^2}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2}$

$x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=0$

$\therefore a=\frac{4}{e^2}$, $b=0$

279 정답 ④

$f(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)+k$ $(0<x<2\pi)$이므로

$f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$=-2e^{-x}\sin x$

$f'(x)=0$에서 $e^{-x}>0$이므로 $\sin x=0$ $(0<x<2\pi)$

$\therefore x=\pi$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극솟값을 가지므로 $f(\pi)=0$이어야 한다.

즉, $f(\pi)=-e^{-\pi}+k=0$이므로

$k=e^{-\pi}=\frac{1}{e^{\pi}}$

280 정답 7

$f'(x)=2ax+b-\frac{1}{x-1}$, $f''(x)=2a+\frac{1}{(x-1)^2}$

$x=2$에서 극대이므로

$f'(2)=4a+b-1=0$ …… ㉠

변곡점의 x좌표가 $\frac{3}{2}$이므로

$f''\left(\frac{3}{2}\right)=2a+4=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=9$ $\therefore a+b=7$

281 정답 5

$f'(x)=a+3\cos x$이고, 함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$의 실근이 존재하고 그 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

즉, $f'(x)=a+3\cos x$의 최댓값은 양수, 최솟값은 음수이어야 한다.

$-1\le\cos x\le 1$에서 $a-3\le a+3\cos x\le a+3$이므로

$f'(x)$의 최댓값은 $a+3$, 최솟값은 $a-3$이다.

따라서 $a+3>0$, $a-3<0$에서

$$-3<a<3$$

이므로 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

282 정답 ③

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f(x)=(x^2+x+a)e^{-x}$이므로

$$f'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x+a)e^{-x}$$
$$=(-x^2+x+1-a)e^{-x}$$

이때, $e^{-x}>0$이므로 모든 x에 대하여 $-x^2+x+1-a\le 0$이면 된다.

이차방정식 $-x^2+x+1-a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=1-4\times(-1)\times(1-a)\le 0,\ 1+4-4a\le 0$$

$$\therefore a\ge\frac{5}{4}$$

따라서 상수 a의 최솟값은 $\frac{5}{4}$이다.

연습문제 II

p.148

283 정답 ③

직선 $2x+y=k$가 주어진 곡선에 접하므로 기울기가 -2인 접선을 구하면 된다.

$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=2\cos 2\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\cos 2\theta}{-\sin\theta}$$

$\frac{2\cos 2\theta}{-\sin\theta}=-2$에서 $\cos 2\theta=\sin\theta$이므로

$$1-2\sin^2\theta=\sin\theta,\ 2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$$
$$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$$

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ $\qquad\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$

이때, $x=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 접점의 좌표가 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

이 점이 직선 $2x+y=k$ 위의 점이므로

$$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=k\qquad\therefore k=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

284 정답 3

$f(x)=xe^x$이라 하면

$$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

이때, 곡선 위의 점 (t, te^t)에서의 접선의 방정식은

$$y-te^t=(t+1)e^t(x-t)$$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(a, 0)$을 지난다고 하면

$$0-te^t=(t+1)e^t(a-t)$$
$$\therefore t^2-at-a=0\qquad\cdots\cdots ㉠$$

점 $\mathrm{P}(a, 0)$에서 곡선 $y=xe^x$에 접선을 그을 수 없으려면 ㉠을 만족하는 실수 t가 존재하지 않아야 한다.

즉, t에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면 $D<0$이어야 하므로

$$D=(-a)^2-4\times(-a)<0,\ a(a+4)<0$$
$$\therefore -4<a<0$$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1의 3개이다.

285 정답 $a=1$, $b=1$

$y=\frac{ax+b}{x^2+1}$에서 $y(x^2+1)=ax+b$

각 항을 x에 대하여 미분하면

$$y'(x^2+1)+2xy=a\qquad\cdots\cdots ㉠$$

㉠의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$y''(x^2+1)+2xy'+2y+2xy'=0$$
$$y''(x^2+1)+4xy'+2y=0\qquad\cdots\cdots ㉡$$

$x=1$, $y=1$일 때 $y''=0$이므로 ㉡에 대입하면

$$4y'+2=0\qquad\therefore y'=-\frac{1}{2}$$

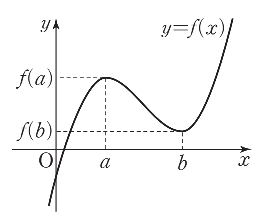
$x=1$, $y=1$, $y'=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$-\frac{1}{2}\times 2+2=a\qquad\therefore a=1$$

또, 주어진 곡선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=\frac{a+b}{1+1}$에서 $a+b=2$ $\qquad\therefore b=1$

286 정답 ③



$g(x)=e^{-x}f(x)$이므로

$$g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=e^{-x}\{f'(x)-f(x)\},$$
$$g''(x)=-e^{-x}\{f'(x)-f(x)\}+e^{-x}\{f''(x)-f'(x)\}$$
$$=e^{-x}\{f(x)-2f'(x)+f''(x)\}$$

ㄱ. 그림에서 $f(0)<0$, $f'(0)>0$, $f''(0)<0$이므로

$$g'(0)=f'(0)-f(0)>0$$
$$g''(0)=f(0)-2f'(0)+f''(0)<0$$
$$\therefore\ g'(0)-g''(0)>0 \text{ (참)}$$

ㄴ. 그림에서 $f(a)>0$, $f'(a)=0$, $f''(a)<0$이므로

$$g'(a)=e^{-a}\{f'(a)-f(a)\}$$
$$=-e^{-a}f(a)<0$$
$$\therefore\ f'(a)+g'(a)<0 \text{ (참)}$$

ㄷ. 그림에서 $f(b)>0$, $f'(b)=0$, $f''(b)>0$이므로

$$g'(b)=e^{-b}\{f'(b)-f(b)\}$$
$$=-e^{-b}f(b)<0$$
$$g''(b)=e^{-b}\{f(b)-2f'(b)+f''(b)\}$$
$$=e^{-b}\{f(b)+f''(b)\}>0$$
$$\therefore\ g'(b)g''(b)<0 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

287 정답 6 서술형

함수 $f(x)$의 정의역은 $x\ge0$, $a-x\ge0$에서

$$0\le x\le a$$

$$f'(x)=\frac{1}{b}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{a-x}}\right)=\frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{x}}{2b\sqrt{x}\sqrt{a-x}} \quad \cdots ①$$

$f(x)$가 $x=2$에서 극댓값 $\sqrt{2}$를 가지므로

$$f'(2)=0,\ f(2)=\sqrt{2} \quad \cdots ②$$

$f'(2)=0$에서 $\dfrac{\sqrt{a-2}-\sqrt{2}}{2b\sqrt{2}\sqrt{a-2}}=0$이므로

$$\sqrt{a-2}=\sqrt{2}$$
$$\therefore\ a=4$$

$f(2)=\sqrt{2}$에서 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{4-2}}{b}=\sqrt{2}$이므로

$$\frac{2\sqrt{2}}{b}=\sqrt{2} \qquad \therefore\ b=2 \quad \cdots ③$$

$$\therefore\ a+b=6 \quad \cdots ④$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	도함수 $f'(x)$ 구하기	30%
②	$f(x)$가 $x=2$에서 극댓값 2를 가질 조건 알기	40%
③	a, b의 값 구하기	20%
④	$a+b$의 값 구하기	10%

9. 함수의 그래프와 최대 · 최소

유형 pp.153~161

001 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$라 하면

① $x^2+1\ne0$이므로 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② $f(0)=0$이므로 점 $(0,\ 0)$을 지난다.

③ $f(-x)=-f(x)$이므로 주어진 함수의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

④ $f'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\times2x}{(x^2+1)^2}$

$$=-\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

⑤ $f''(x)=\dfrac{-4x(x^2+1)^2-2(1-x^2)\times2(x^2+1)\times2x}{(x^2+1)^4}$

$$=\frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

이므로 $f''(x)=0$에서

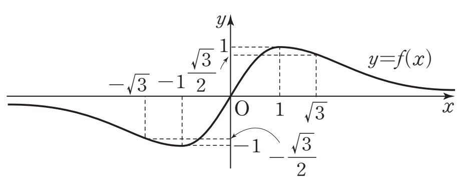
$$x=-\sqrt{3} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{3}$$

$x\ge0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 (변곡점)	↗	1 (극대)	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (변곡점)	↘

⑥ 한편, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



(2) $f(x)=(x-1)\sqrt{x}$라 하면

① 정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$이다.

② $f(0)=0$, $f(1)=0$이므로 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$을 지난다.

③ $f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{3}$

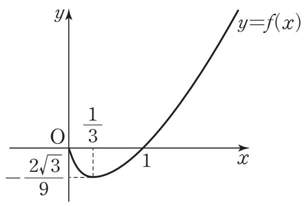
④ $f''(x)=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{x}-(3x-1)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}=\frac{3x+1}{4x\sqrt{x}}$

이므로 $x\geq0$일 때 $f''(x)>0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ (극소)	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



002 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=\sin x+\cos x$라 하면

① $f'(x)=\cos x-\sin x$이므로 $f'(x)=0$에서

$\cos x-\sin x=0$, $\tan x=1$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

② $f''(x)=-\sin x-\cos x$이므로 $f''(x)=0$에서

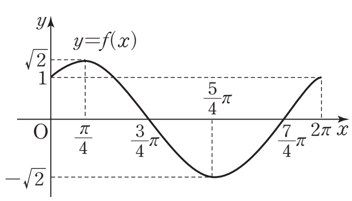
$-\sin x-\cos x=0$, $\tan x=-1$

$\therefore x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$ (극대)	↘	0 (변곡점)	↘	$-\sqrt{2}$ (극소)	↗	0 (변곡점)	↗	1

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



[참고] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 함수 $y=\sin x+\cos x$를 간단히 할 수 있다.

$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프와 같다.

(2) $f(x)=x+\sin x$라 하면

① $f'(x)=1+\cos x\geq0$이므로 $f(x)$는 항상 증가한다.

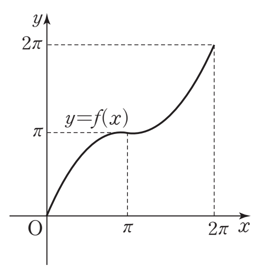
② $f''(x)=-\sin x$이므로 $f''(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↗	π (변곡점)	↗	2π

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



003 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=\frac{x}{e^x}=xe^{-x}$이라 하면

① 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② $f(0)=0$이므로 원점 $(0, 0)$을 지난다.

③ $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=-(x-1)e^{-x}$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=1$

④ $f''(x)=-e^{-x}+(x-1)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$이므로 $f''(x)=0$에서

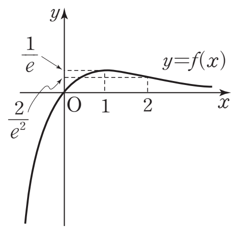
$x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$ (극대)	↘	$\frac{2}{e^2}$ (변곡점)	↘

한편, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



(2) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면

① 로그함수의 진수 조건에 의해 정의역은 $\{x|x>0\}$이다.

② $f(1)=0$이므로 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

③ $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$이므로 $f'(x)=0$에서

$\ln x=1 \quad \therefore x=e$

④ $f''(x)=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$이므로

$f''(x)=0$에서 $\quad 2\ln x-3=0$

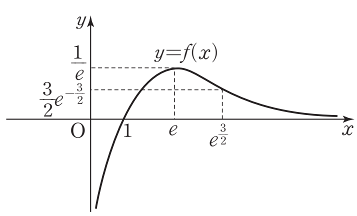
$\therefore x=e^{\frac{3}{2}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$ (극대)	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ (변곡점)	↘

⑤ 또, $\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$이므로 y축과 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



004 정답 (1) 최댓값 : 12, 최솟값 : 11
(2) 최댓값 : 2, 최솟값 : −2

(1) $f(x)=\frac{(x-2)(x+5)+4}{x-2}=x+5+\frac{4}{x-2}$이므로

$f'(x)=1-\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=4$

구간 $[3,\ 6]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	3	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	12	↘	11 (극소)	↗	12

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최솟값 11, $x=3$ 또는 $x=6$일 때 최댓값 12를 가진다.

(2) $f'(x)=\sqrt{x+3}+\frac{x}{2\sqrt{x+3}}=\frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	−3	$\cdots$	−2	$\cdots$	1
$f'(x)$		−	0	+	+
$f(x)$	0	↘	−2 (극소)	↗	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값 −2, $x=1$일 때 최댓값 2를 가진다.

005 정답 (1) 최댓값 : 1, 최솟값 : −3
(2) 최댓값 : 3, 최솟값 : −5

(1) $f(x)=\sin^3 x+3(1-\sin^2 x)-2$

$=\sin^3 x-3\sin^2 x+1$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x\le 2\pi$이므로 $-1\le t\le 1$이고

$f(x)=t^3-3t^2+1$

여기서 $g(t)=t^3-3t^2+1$이라 하면 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $g(t)=t^3-3t^2+1$의 최댓값과 최솟값과 같다.

$g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$이므로 $g'(t)=0$에서

$t=0\ (\because -1\le t\le 1)$

구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	−1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$	−3	↗	1 (극대)	↘	−1

함수 $g(t)$는 $t=0$일 때 최댓값 1, $t=-1$일 때 최솟값 -3을 가진다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.

(2) $f'(x)=4\cos x-2\sin 2x$

$=4\cos x-4\sin x\cos x$

$=4\cos x(1-\sin x)$이므로

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=1$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	3 (극대)	↘	-5 (극소)	↗	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값 3, $x=\frac{3}{2}\pi$일 때 최솟값 -5를 가진다.

006 정답 (1) 최댓값 : $e-1$, 최솟값 : 1

(2) 최댓값 : $\frac{2}{e^4}$, 최솟값 : -2

(1) $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

구간 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}+1$	↘	1 (극소)	↗	$e-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 최댓값 $e-1$, $x=1$일 때 최솟값 1을 가진다.

(2) $f'(x)=2xe^{-2x}-2(x^2-2)e^{-2x}$

$=-2(x^2-x-2)e^{-2x}$

$=-2(x+1)(x-2)e^{-2x}$

이므로 $f'(x)=0$에서

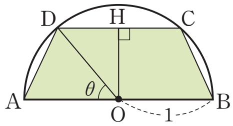
$x=-1$ 또는 $x=2$

구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	$\frac{2}{e^4}$ (극대)	↘	$\frac{7}{e^6}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $\frac{2}{e^4}$, $x=0$일 때 최솟값 -2를 가진다.

007 정답 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$



$\angle AOD=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, 등변사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

반원의 중심 O에서 변 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{DH}=\cos\theta$, $\overline{OH}=\sin\theta$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{OH}$

$=\frac{1}{2}(2+2\cos\theta)\times\sin\theta$

$=(1+\cos\theta)\sin\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

위의 식을 θ에 대하여 미분하면

$S'(\theta)=-\sin\theta\times\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta$

$=-\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta$

$=-(1-\cos^2\theta)+\cos\theta+\cos^2\theta$

$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$

$=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

이므로 $S'(\theta)=0$에서

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos\theta=-1$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (극대)	↘	

함수 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 극대이자 최대이므로 등변사다리꼴의 넓이 $S(\theta)$의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

008 정답 1

$P(t, e^{-t+1})$이라 할 때, 직사각형 OQPR의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=te^{-t+1}(t>0)$

$f'(t)=e^{-t+1}-te^{-t+1}=e^{-t+1}(1-t)$이므로

$f'(t)=0$에서 $t=1$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	1 (극대)	$\searrow$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극대이자 최대이므로 직사각형 OQPR의 넓이의 최댓값은 1이다.

확인문제 pp.153~161

288 정답 풀이 참조

$f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$이라 하면

① 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 1$인 실수$\}$이다.

② $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-x^2\times 1}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

③ $f''(x)=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\times 2(x-1)}{(x-1)^4}$

$=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

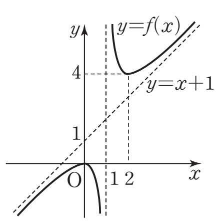
x	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	0 (극대)	↘		↘	4 (극소)	↗

④ $f(x)=\dfrac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$에서

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$이므로 직선 $y=x+1$이 점근선이다.

또, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=-\infty$이므로 직선 $x=1$도 점근선이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



289 정답 풀이 참조

$f(x)=2\sqrt{x}-x$라 하면

① 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 0\}$이다.

② $f(0)=0$, $f(4)=0$이므로 점 $(0,\ 0)$, $(4,\ 0)$을 지난다.

③ $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

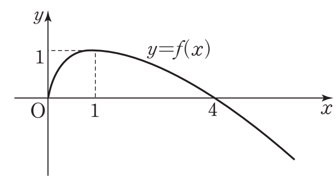
④ $f''(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}<0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

⑤ 또, $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=\infty$이므로 그래프는 원점에서 y축에 접한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



290 정답 풀이 참조

$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$라 하면

① $f'(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$이므로 $f'(x)=0$에서

$\tan x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore x=\dfrac{5}{6}\pi$

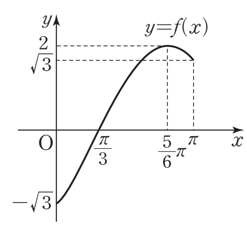
② $f''(x)=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$이므로 $f''(x)=0$에서

$\tan x=\sqrt{3}$ $\therefore x=\dfrac{\pi}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-\sqrt{3}$	↗	0 (변곡점)	↗	2 (극대)	↘	$\sqrt{3}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



291 정답 풀이 참조

$f(x)=2x-\tan x$라 하면

① $f(-x)=-f(x)$이므로 주어진 함수의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

② $f'(x)=2-\sec^2 x$이므로 $f'(x)=0$에서

$\sec^2=2$, 즉 $\cos x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore x=-\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{4}$

③ $f''(x)=-2\sec^2 x\tan x$이므로 $f''(x)=0$에서

$x=0$

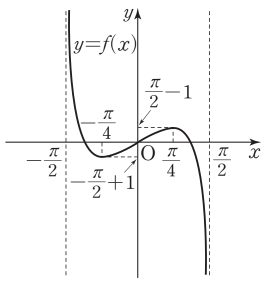
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	∞	↘	$-\frac{\pi}{2}+1$ (극소)	↗	0 (변곡점)	↗	$\frac{\pi}{2}-1$ (극대)	↘	$-\infty$

④ 또, $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)=-\infty$이므로 직선

$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$가 점근선이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래의 개형을 그리면 다음과 같다.



292 정답 풀이 참조

$f(x)=\ln(x^2+2)$라 하면

① 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② $f(-x)=f(x)$이므로 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

③ $f(0)=\ln 2$이므로 y축과의 교점은 $(0,\ \ln 2)$이다.

④ $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$

⑤ $f''(x)=-\dfrac{2(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$

$=-\dfrac{2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$

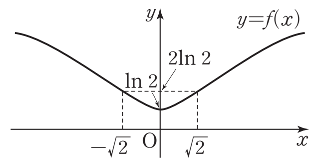
이므로 $f''(x)=0$에서

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$2\ln 2$ (변곡점)	↘	$\ln 2$ (극소)	↗	$2\ln 2$ (변곡점)	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



293 정답 풀이 참조

$f(x)=xe^x$이라 하면

① 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② $f(0)=0$이므로 원점 $(0,\ 0)$을 지난다.

③ $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$

④ $f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(x+2)e^x$이므로

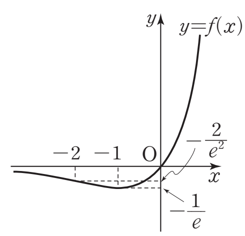
$f''(x)=0$에서 $x=-2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{e^2}$ (변곡점)	↘	$-\frac{1}{e}$ (극소)	↗

한편, $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



[참고] 유형 003에서 (1) $y=\dfrac{x}{e^x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면 ← x 대신 $-x$를, y 대신 $-y$를 대입

$-y=\dfrac{-x}{e^{-x}}$, 즉 $y=xe^x$

따라서 두 함수 $y=\dfrac{x}{e^x}$와 $y=xe^x$의 그래프는 서로 원점에 대하여 대칭이다.

294 정답 (1) **최댓값 : $\frac{7}{3}$, 최솟값 : 1,**

(2) **최댓값 : 3, 최솟값 : -1**

(1) $f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$

이때, $x\ge0$일 때 $\frac{1}{(x+1)^2}\le1$이므로 구간 $[0,\ 2]$에서

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}\ge0$$

즉, 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 1, $x=2$에서 최댓값 $\frac{7}{3}$을 가진다.

(2) $f'(x)=\frac{3(x^2-x+1)-3x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$$=-\frac{3(x+1)(x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{6}{7}$	↘	-1 (극소)	↗	3 (극대)	↘	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 -1, $x=1$일 때 최댓값 3을 가진다.

295 정답 **최댓값 : 1, 최솟값 : -1**

$f'(x)=\sqrt{2-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}=\frac{2(1-x)(1+x)}{\sqrt{2-x^2}}$

이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

구간 $[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1 (극소)	↗	1 (극대)	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 -1, $x=1$일 때 최댓값 1을 가진다.

296 정답 **최댓값 : 1, 최솟값 : $-\frac{5}{27}$**

$f(x)=\sin^2 x\cos x+\cos^2 x$

$=(1-\cos^2 x)\cos x+\cos^2 x$

$=-\cos^3 x+\cos^2 x+\cos x$

$\cos x=t$ 로 놓으면 $0\le x\le 2\pi$이므로 $-1\le t\le 1$이고

$$f(x)=-t^3+t^2+t$$

여기서 $g(t)=-t^3+t^2+t$ 라 하면 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $g(t)=-t^3+t^2+t$의 최댓값과 최솟값과 같다.

$g'(t)=-3t^2+2t+1=-(3t+1)(t-1)=0$에서

$$t=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } t=1$$

구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0
$g(t)$	1	↘	$-\frac{5}{27}$ (극소)	↗	1

함수 $g(t)$는 $t=-1$ 또는 $t=1$일 때 최댓값 1, $t=-\frac{1}{3}$일 때 최솟값 $-\frac{5}{27}$를 가진다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 $-\frac{5}{27}$이다.

297 정답 **최댓값 : $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 최솟값 : 0**

$f'(x)=-\sin^2 x+(1+\cos x)\cos x$

$=-(1-\cos^2 x)+\cos x+\cos^2 x$

$=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$$\cos x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x=-1$$

$$\therefore\ x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\pi$$

구간 $[0,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (극대)	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x=0$ 또는 $x=\pi$일 때 최솟값 0을 가진다.

298 정답 최댓값 : 1, 최솟값 : $1-e$

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-2=\ln x-1$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=e$

구간 $[1,\ e^2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	$1-e$ (극소)	↗	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^2$일 때 최댓값 1, $x=e$일 때 최솟값 $1-e$를 가진다.

299 정답 최댓값 : e, 최솟값 : 0

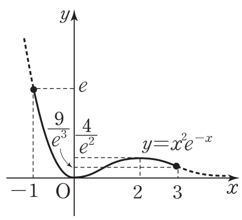
$f(x)=2xe^{-x}+x^2\times(-e^{-x})=-x(x-2)e^{-x}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

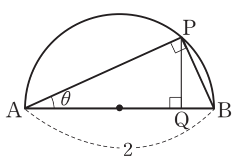
$-1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	↘	0 (극소)	↗	$\frac{4}{e^2}$ (극대)	↘	$\frac{9}{e^3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 e, $x=0$일 때 최솟값 0을 가진다.



300 정답 ②



$\angle PAQ=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{AB}\cos\theta=2\cos\theta$,

$\overline{PQ}=\overline{AP}\sin\theta=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$

$\therefore\ \overline{AP}+\overline{PQ}=2\cos\theta+\sin 2\theta$

$\overline{AP}+\overline{PQ}=f(\theta)$로 놓으면

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=-2\sin\theta+2\cos 2\theta\\&=-2\sin\theta+2(1-2\sin^2\theta)\\&=-4\sin^2\theta-2\sin\theta+2\\&=-2(2\sin^2\theta+\sin\theta-1)\\&=-2(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)\end{aligned}$$

$f'(\theta)=0$에서

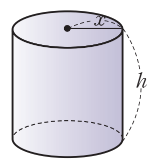
$\sin\theta=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

함수 $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (극대)	↘	

따라서 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 극대이자 최대이므로 구하는 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

301 정답 6π



부피가 2π인 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 h라고 하면 부피 V는

$V=\pi x^2h=2\pi$

$\therefore\ h=\frac{2}{x^2}$

원기둥의 겉넓이를 $f(x)$라고 하면

$f(x)=2\pi x^2+2\pi xh=2\pi\left(x^2+\frac{2}{x}\right)$

$f'(x)=2\pi\left(2x-\frac{2}{x^2}\right)=4\pi\times\frac{x^3-1}{x^2}$

이므로 $f'(x)=0$에서

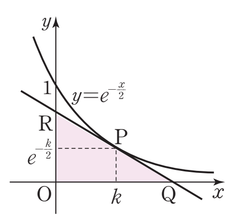
$x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	6π (극소)	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이자 최소이므로 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 1, 높이가 2일 때, 겉넓이의 최솟값은 6π이다.

302 정답 $\frac{4}{e}$



$y'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$이므로 점 $P\left(k,\ e^{-\frac{k}{2}}\right)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}e^{-\frac{k}{2}}$이다. 즉, 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-e^{-\frac{k}{2}}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{k}{2}}(x-k)$

접선의 방정식에 $y=0$, $x=0$을 각각 대입하여 두 점 Q, R의 좌표를 구하면

$$\mathrm{Q}(k+2,\ 0),\ \mathrm{R}\left(0,\ \frac{1}{2}e^{-\frac{k}{2}}(k+2)\right)$$

이때, △QOR의 넓이를 $S(k)$라 하면

$$S(k)=\frac{1}{2}\times(k+2)\times\frac{1}{2}e^{-\frac{k}{2}}(k+2)=\frac{1}{4}e^{-\frac{k}{2}}(k+2)^2$$

$$S'(k)=\frac{1}{4}e^{-\frac{k}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(k+2)^2+\frac{1}{4}e^{-\frac{k}{2}}\times 2(k+2)$$

$$=\frac{1}{8}e^{-\frac{k}{2}}(2+k)(2-k)$$

$S'(k)=0$에서

$$k=2\ (\because\ k>0)$$

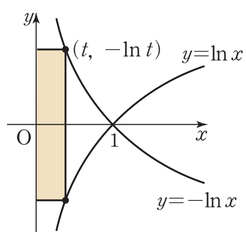
함수 $S(k)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	(0)	⋯	2	⋯
$S'(k)$		+	0	−
$S(k)$		↗	$\frac{4}{e}$ (극대)	↘

따라서 $k=2$일 때 $S(k)$는 극대이자 최대이므로 삼각형 QOR의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{e}$이다.

303 정답 $\frac{2}{e}$

곡선 $y=-\ln x$ 위의 제1사분면에 있는 꼭짓점의 좌표를 $(t,\ -\ln t)$ $(0<t<1)$이라 하면 직사각형의 가로의 길이는 t, 세로의 길이는 $-2\ln t$이므로



직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=-2t\ln t\ (0<t<1)$$

$$S'(t)=-2\ln t-2t\times\frac{1}{t}=-2(\ln t+1)$$

이므로 $S'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{e}$

함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	⋯	$\frac{1}{e}$	⋯	(1)
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	$\frac{2}{e}$ (극대)	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{1}{e}$일 때 극대이자 최대이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{2}{e}$이다.

연습문제 I .... pp.162~165

304 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+2)+4}{x-1}$

$=x+2+\dfrac{4}{x-1}$라 하면

① 정의역은 $\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$이다.

② $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

③ $f''(x)=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-3)\times2(x-1)}{(x-1)^4}$

$=\dfrac{8(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{8}{(x-1)^3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

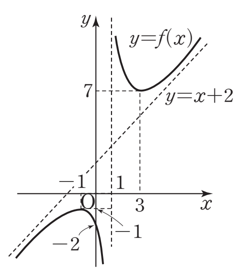
x	⋯	−1	⋯	(1)	⋯	3	⋯
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f''(x)$	−	−	−		+	+	+
$f(x)$	↗	−1 (극대)	↘		↘	7 (극소)	↗

④ $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$에서

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$이므로 직선 $y=x+2$가 점근선이다.

또, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-\infty$이므로 직선 $x=1$도 점근선이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



(2) $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ $(0\le x\le1)$이라 하면

① $f'(x)=1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$이므로

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{1-x^2}=x$, $1-x^2=x^2$

$x^2=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because\ 0\le x\le1)$

② $f''(x)=\dfrac{-\sqrt{1-x^2}+x\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$

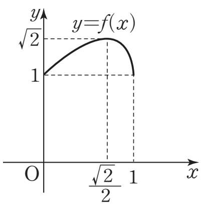
$=-\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$ (극대)	↘	1

또, $\lim_{x\to 1-} f'(x)=-\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 접한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



305 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=\sec x$라 하면

① $f'(x)=\sec x\tan x$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$

② $f''(x)=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x$

$=\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x)$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\sec x>0$이므로

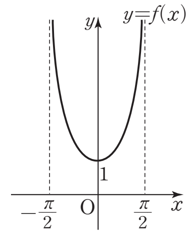
$f''(x)>0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	∞	↘	1 (극소)	↗	∞

③ 또, $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x)=\infty$이므로 직선 $x=\pm\frac{\pi}{2}$가 점근선이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



(2) $f(x)=\cot x$라 하면

① $f'(x)=-\csc^2 x$이고 $0<x<\pi$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 항상 감소한다.

② $f''(x)=-2\csc x\times(\csc x)'=2\csc^2 x\cot x$

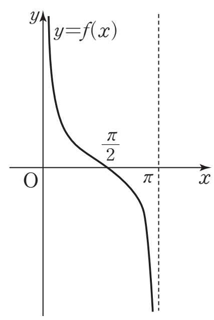
이므로 $f''(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	↘	0 (변곡점)	↘	$-\infty$

또, $\lim_{x\to 0+}\cot x=\infty$, $\lim_{x\to \pi-}\cot x=-\infty$이므로 y축과 직선 $x=\pi$가 점근선이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



306 정답 풀이 참조

$f(x)=e^{-x}\sin x$라 하면

① $f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$=e^{-x}(-\sin x+\cos x)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $\tan x=1$

$\therefore x=-\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$

② $f''(x)=-e^{-x}(-\sin x+\cos x)+e^{-x}(-\cos x-\sin x)$

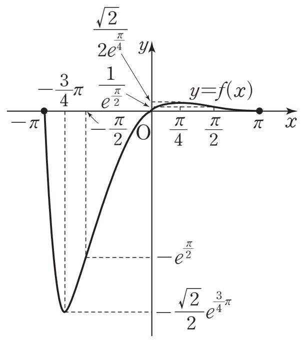
$=-2e^{-x}\cos x$

이므로 $f''(x)=0$에서 $x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$ (극소)	↗	$-e^{\frac{\pi}{2}}$ (변곡점)	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$ (극대)	↘	$\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$ (변곡점)	↘	0

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



307 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=2\sin x-\sin^2 x$라 하면

① $f'(x)=2\cos x-2\sin x\cos x$

$=2\cos x(1-\sin x)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi$$

② $f''(x)=-2\sin x-2\cos^2 x+2\sin^2 x$

$=4\sin^2 x-2\sin x-2$

$=2(2\sin x+1)(\sin x-1)$

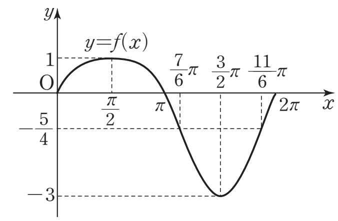
이므로 $f''(x)=0$에서

$$x=\frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x=\frac{11}{6}\pi \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2}$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1 (극대)	↘	$-\frac{5}{4}$ (변곡점)	↘	-3 (극소)	↗	$-\frac{5}{4}$ (변곡점)	↗	0

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



(2) $f(x)=x-2\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$라 하면

① $f'(x)=1-2\cos x$이므로 $f'(x)=0$에서

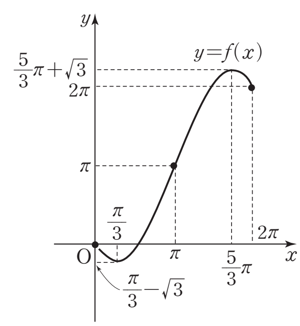
$$\cos x=\frac{1}{2} \qquad \therefore x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}\pi$$

② $f''(x)=2\sin x$이므로 $f''(x)=0$에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=2\pi$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	0	↘	$\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ (극소)	↗	π (변곡점)	↗	$\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$ (극대)	↘	2π



308 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=(\ln x)^2$이라 하면

① 로그함수의 진수 조건에 의하여 정의역은 $\{x|x>0\}$이다.

② $f(1)=0$이므로 점 $(1, 0)$을 지난다.

③ $f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

④ $f''(x)=\frac{2\left(\frac{1}{x}\times x-\ln x\right)}{x^2}$

$=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$

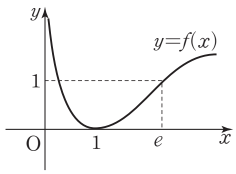
이므로 $f''(x)=0$에서 $x=e$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	∞	↘	0 (극대)	↗	1 (변곡점)	↗

한편, $\lim\limits_{x \to 0+} (\ln x)^2 = \infty$이므로 y축이 점근선이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



(2) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$이라 하면

① 정의역은 $\{x \mid x \neq 0,\ x$는 실수$\}$이다.

② $f'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2}$

$\quad = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

③ $f''(x) = \dfrac{\{e^x + (x-1)e^x\}x^2 - (x-1)e^x \times 2x}{x^4}$

$\quad = \dfrac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$

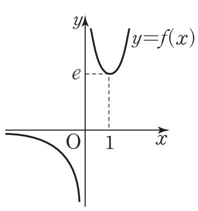
에서 $f''(x)=0$의 실근이 존재하지 않으므로 곡선 $y=f(x)$는 변곡점을 갖지 않는다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$(-\infty)$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘		↘	e (극소)	↗

④ 한편, $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{e^x}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{e^x}{x} = -\infty$이므로 y축이 점근선이고, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$이므로 x축도 점근선이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



309 정답 (1) **풀이 참조** (2) **풀이 참조**

(1) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$이라 하면

① 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② $f(-x) = f(x)$이므로 y축에 대하여 대칭이다.

③ $f(0)=1$이므로 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

④ $f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \times \left(-\dfrac{2x}{2}\right) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$

⑤ $f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}} \times \left(-\dfrac{2x}{2}\right) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$

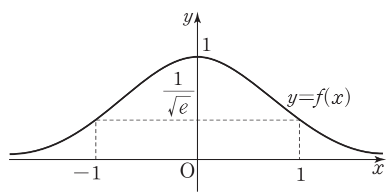
이므로 $f''(x)=0$에서 $x=-1,\ x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ (변곡점)	↗	1 (극대)	↘	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ (변곡점)	↘

한편, $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



(2) $f(x) = x^2 - \ln x$라 하면

① 로그함수의 진수 조건에 의하여 정의역은 $\{x \mid x > 0\}$이다.

② $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$이므로

$f'(x)=0$에서 $2x^2-1=0$

$\therefore x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ (\because x>0)$

③ $f''(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2} > 0$이므로 변곡점을 갖지 않는다.

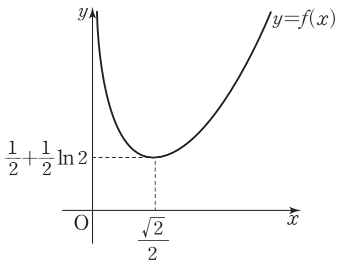
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	∞	↘	$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln 2$ (극소)	↗

④ 한편, $\lim\limits_{x \to 0+} (x^2 - \ln x) = \infty$이므로 y축이 점근선이다.

09강

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



310 정답 ③

$f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{2-2x}{2\sqrt{3+2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	2 (극대)	↘	0

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 2를 가지므로

$a=1,\ b=2$

$\therefore\ a+b=3$

311 정답 ④

$$\begin{aligned} f'(x)&=\cos x(1-\cos x)+\sin x\times\sin x\\ &=\cos x-\cos^2 x+(1-\cos^2 x)\\ &=-2\cos^2 x+\cos x+1\\ &=-(2\cos x+1)(\cos x-1)\end{aligned}$$

이므로 $f'(x)=0$에서

$\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (극대)	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 최댓값을 가지므로

$a=\frac{2}{3}\pi$

312 정답 3π

$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $\sin x=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	π (극대)	↘	-2π

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 최댓값 π, $x=2\pi$에서 최솟값 -2π를 가지므로

$M=\pi,\ m=-2\pi$

$\therefore\ M-m=3\pi$

313 정답 ④

$y=\frac{\ln x}{x}$에서

$$y'=\frac{(\ln x)'\times x-\ln x\times(x)'}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

이므로 $y'=0$에서 $\ln x=1$　　$\therefore\ x=e$

주어진 함수의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$ (극대)	↘

따라서 함수 $y=\frac{\ln x}{x}$는 $x=e$에서 극대이자 최대이므로

$a=e$

314 정답 ③

$$f'(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}=\frac{(x+1)(x-1)}{2x}$$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	∞	↘	(극소)	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이자 최소이고, $f(x)$의 최솟값이 0이므로

$f(1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln k=0,\ \ln k=\frac{1}{2}$

$\therefore\ k=\sqrt{e}$

315 정답 ①

$f(x)=x\ln\frac{1}{x}=-x\ln x$이므로

$$f'(x)=-\ln x-1$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{e}$

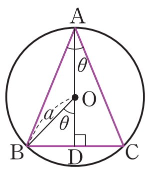
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	(0)	↗	$\frac{1}{e}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e}$일 때 최댓값 $\frac{1}{e}$을 가지므로

$$a=\frac{1}{e},\ M=\frac{1}{e}\qquad\therefore a\times M=\frac{1}{e^2}$$

316 정답 ③



꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면

$\angle\mathrm{BOC}=2\angle\mathrm{BAC}=2\theta$이므로

$$\angle\mathrm{BOD}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}=\theta$$

삼각형 OBD에서 $\overline{\mathrm{OD}}=a\cos\theta$, $\overline{\mathrm{BD}}=a\sin\theta$이므로

삼각형 ABC의 넓이 S는

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AD}}\\&=\frac{1}{2}\times2\overline{\mathrm{BD}}\times(\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{OD}})\\&=\frac{1}{2}\times2a\sin\theta\times(a+a\cos\theta)\\&=a^2\sin\theta(1+\cos\theta)\end{aligned}$$

양변을 θ에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}S'&=a^2\{\cos\theta(1+\cos\theta)-\sin^2\theta\}\\&=a^2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)\\&=a^2(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\end{aligned}$$

$S'=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\ (\because 0<\theta<\pi)$$

이때 S의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	(π)
S'		$+$	0	$-$	
S	(0)	↗	(극대)	↘	(0)

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 삼각형 ABC의 넓이 S는 극대이자 최대이다.

317 정답 $\sqrt{\frac{2}{e}}$

곡선 $y=e^{-x^2}$은 y축에 대하여 대칭이므로 직사각형도 y축에 대하여 대칭이다.

제1사분면에 있는 한 꼭짓점의 좌표를 $\mathrm{P}(x,\ e^{-x^2})$이라 하고, 직사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=2xe^{-x^2}\ (x>0)$$

$$S'(x)=2e^{-x^2}+2xe^{-x^2}\times(-2x)=2(1-2x^2)e^{-x^2}$$

$S'(x)=0$에서 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because x>0)$

함수 $S(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$S'(x)$		$+$	0	$-$
$S(x)$	(0)	↗	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	↘

따라서 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{\frac{2}{e}}$이다.

연습문제 Ⅱ p.166

318 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(2-x)$라 하면

① 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② $f'(x)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x}}(2-x)-\sqrt[3]{x^2}$

$$=\frac{4-5x}{3\sqrt[3]{x}}$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=\frac{4}{5}$

③ $f''(x)=\dfrac{-5\sqrt[3]{x}-(4-5x)\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{3\sqrt[3]{x^2}}$

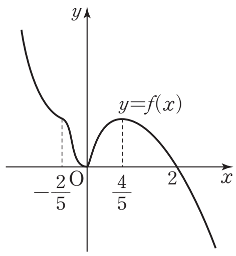
$$=-\frac{10x+4}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

이므로 $f''(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{5}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$		$-$	$-$	$-$
$f(x)$	⤷	$\frac{12}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	⤵	0	⤴	$\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}$	⤵

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



(2) $f(x)=x^x(x>0)$이라 하고 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=x\ln x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+1$$

$$f'(x)=x^x(\ln x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{e}$

$$f''(x)=(x^x)'(\ln x+1)+x^x\times\frac{1}{x}$$
$$=x^x(\ln x+1)^2+x^x\times\frac{1}{x}$$
$$=x^x\left\{(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right\}$$

$x>0$일 때 $x^x>0$, $(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}>0$이므로 항상 $f''(x)>0$이다.

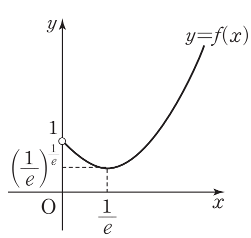
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	(1)	↘(아래로 볼록)	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ (극소)	↗(아래로 볼록)

한편, $\lim_{x\to0+}\ln f(x)=\lim_{x\to0+}x\ln x=\lim_{t\to\infty}\frac{-\ln t}{t}=0$ $\leftarrow x=\frac{1}{t}$

$\therefore \lim_{x\to0+}f(x)=1$

또, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



319 정답 $e^{-\frac{1}{e}}$

$f(x)=\left(\frac{x}{10}\right)^{\frac{x}{10}}$이라 하고 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\frac{x}{10}\ln\frac{x}{10}\ (x>0)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{10}\ln\frac{x}{10}+\frac{x}{10}\times\frac{10}{x}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10}\left(\ln\frac{x}{10}+1\right)$$

$$\therefore f'(x)=\frac{1}{10}f(x)\left(\ln\frac{x}{10}+1\right)$$

$f'(x)=0$에서 $\ln\frac{x}{10}=-1$

$$\therefore x=\frac{10}{e}$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{10}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	(극소)	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{10}{e}$일 때 극소이자 최소이고, 최솟값은

$$f\left(\frac{10}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}=e^{-\frac{1}{e}}$$

320 정답 ③

$$f'(x)=(2x-a)e^{-x}-(x^2-ax+a)e^{-x}$$
$$=-e^{-x}\{x^2-(a+2)x+2a\}$$
$$=-e^{-x}(x-a)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=2$

이때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	ae^{-a} (극소)	↗	$(4-a)e^{-2}$ (극대)	↘

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고 극솟값은

$$g(a)=ae^{-a}$$

이다. 이때, $g(a)=ae^{-a}$을 a에 대하여 미분하면

$$g'(a)=e^{-a}-ae^{-a}=e^{-a}(1-a)$$

$g'(a)=0$에서 $a=1$

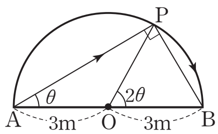
함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

a	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$	$+$	0	$-$
$g(a)$	↗	e^{-1} (극대)	↘

즉, $g(a)$는 $a=1$에서 극대이자 최대이므로 구하는 최댓값은

$$g(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

321 정답 $3\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}$ 서술형



$\angle PAB=\theta$, 이동하는 데 걸리는 시간을 $f(\theta)$라 하면

$\overline{AP}=6\cos\theta$, $\overset{\frown}{PB}=6\theta$ … ①

$\therefore f(\theta)=\frac{6\cos\theta}{1}+\frac{6\theta}{2}$

$=6\cos\theta+3\theta$(초) $\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ … ②

위의 식을 θ에 대하여 미분하면

$f'(\theta)=-6\sin\theta+3$

$f'(\theta)=0$에서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$

함수 $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		+	0	−	
$f(\theta)$	6	↗	극대	↘	

따라서 $f(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 극대이자 최대이고 최댓값은

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$\angle PAB=\theta$로 놓고 $\overline{AP}$, $\overset{\frown}{PB}$를 θ에 대한 식으로 나타내기	30%
②	이동하는 데 걸리는 시간을 θ에 대한 식으로 나타내기	30%
③	최댓값 구하기	40%

10. 미분법의 활용

유형 pp.169~178

001 정답 (1) **2** (2) **1** (3) **1**

(1) $f(x)=e^x-3x$라고 하면 $f'(x)=e^x-3$이므로

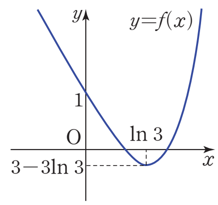
$f'(x)=0$에서 $x=\ln 3$

$f(\ln 3)=3-3\ln 3=3(1-\ln 3)<0$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	…	$\ln 3$	…
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$3-3\ln 3$ (극소)	↗



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

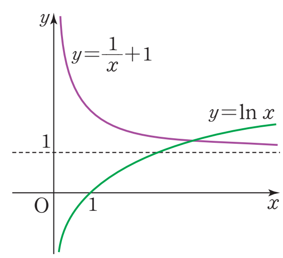
(2) $x\ln x-x=1$에서 $x\ln x=x+1$

이때, 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$이므로

$\ln x=1+\frac{1}{x}$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는

두 곡선 $y=1+\frac{1}{x}$과 $y=\ln x$의 교점의 개수와 같다.



위의 그림과 같이 두 곡선은 오직 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

(3) $f(x)=x-\cos x-1$ $(0\le x\le\pi)$로 놓으면

$f'(x)=1+\sin x$

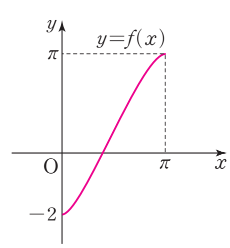
$0\le x\le\pi$에서 $f'(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 증가한다.

이때, $f(0)=-2<0$,

$f(\pi)=\pi>0$이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다.

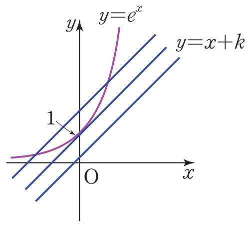


따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

002 정답 (1) $k>1$ (2) $0<k<\frac{1}{e}$

(1) $e^x-x-k=0$에서 $e^x=x+k$이므로 곡선 $y=e^x$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하면 된다.

그림과 같이 직선 $y=x+k$와 곡선 $y=e^x$이 접할 때의 k의 값을 경계로 두 곡선의 교점의 개수가 변한다.



이때, 접점의 좌표를 $(t,\ e^t)$이라 하면 $y'=e^x$이므로 접선의 기울기는 e^t이고, $y=x+k$는 기울기가 1인 직선이므로 $e^t=1$에서 $t=0$

즉, 접점의 좌표는 $(0,\ 1)$이고, 이 점이 $y=x+k$ 위의 점이므로 $k=1$

따라서 $k>1$일 때 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 방정식 $\ln x-kx=0$에서 $\ln x=kx$, 즉 $\frac{\ln x}{x}=k$이므로

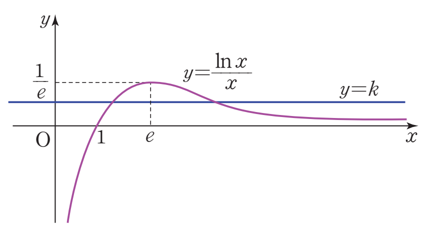
주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\frac{\ln x}{x}$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=e$

한편, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$ (극대)	↘



따라서 $0<k<\frac{1}{e}$일 때 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 가진다.

다른 풀이

방정식 $\ln x-kx=0$에서 $\ln x=kx$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\ln x$의 그래프와 직선 $y=kx$의 교점의 개수와 같다.

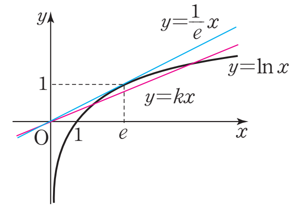
원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ \ln t)$라 하면 $y'=\frac{1}{x}$이므로 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$이다.

즉, 접선의 방정식은 $y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$이고

접선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$$0-\ln t=\frac{1}{t}(0-t) \qquad \therefore t=e$$

따라서 원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 방정식이 $y=\frac{1}{e}x$이므로 그림에서 $0<k<\frac{1}{e}$일 때 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 가진다.



003 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=\frac{x}{1+x}-x$라 하면

$$f'(x)=\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}-1=-\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$$

$x>0$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 감소한다.

이때, $f(0)=0$이므로 $x>0$일 때 $f(x)=\frac{x}{1+x}-x<0$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $\frac{x}{1+x}<x$가 성립한다.

(2) $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$이라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x$$
$$=\frac{x^2}{1+x}$$

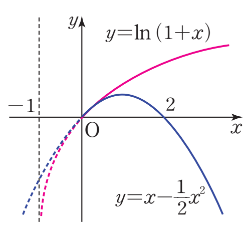
$x>0$이므로 $f'(x)=\frac{x^2}{1+x}>0$

즉, $x>0$일 때 $f(x)$는 증가하고, $f(0)=0$이므로

$$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2>0$$

따라서 $x>0$일 때 부등식 $\ln(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2$이 성립한다.

[참고]



004 정답 (1) $0<a\le e$ (2) -1

(1) $f(x)=x-\ln ax$라 하면

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	∞	$\searrow$	$1-\ln a$ (극소)	$\nearrow$

함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=1-\ln a$이므로

$1-\ln a\geq 0$에서

$\ln a\leq 1,\ a\leq e$

$\therefore\ 0<a\leq e$

(2) $f(x)=e^x+\sin x+a$라 하면

$f'(x)=e^x+\cos x$

$x>0$일 때, $e^x>1$이고 $-1\leq\cos x\leq 1$이므로 $f'(x)>0$이다.

즉, $x>0$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $x>0$에서 $f(x)\geq 0$ 이려면 $f(0)\geq 0$이어야 한다.

$f(0)=1+0+a=1+a\geq 0 \qquad \therefore\ a\geq -1$

따라서 실수 a의 최솟값은 -1이다.

005 정답 (1) 1 (2) 1

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{t^2+1}$에서

$f(t)=\dfrac{2t}{t^2+1}$라 하면 $f(t)=\dfrac{2}{t+\dfrac{1}{t}}$

이때, $t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t+\dfrac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\times\dfrac{1}{t}}=2$ (단, 등호는 $t=1$일 때 성립한다.)

$\therefore\ f(t)=\dfrac{2}{t+\dfrac{1}{t}}\leq\dfrac{2}{2}=1$

따라서 점 P의 속도 v의 최댓값은 1이다.

(2) $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{2(t^2+1)-2t\times 2t}{(t^2+1)^2}=-\dfrac{2t^2-2}{(t^2+1)^2}$

$=-\dfrac{2(t+1)(t-1)}{(t^2+1)^2}$

$a=0$에서 $\dfrac{2(t+1)(t-1)}{(t^2+1)^2}=0$

$\therefore\ t=1\ (\because\ t>0)$

따라서 가속도가 0일 때의 시각은 $t=1$이다.

006 정답 (1) 속도 : (1, 1), 속력 : $\sqrt{2}$

(2) 가속도 : (1, 0), 가속도의 크기 : 1

(1) $\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t,\ \dfrac{dy}{dt}=\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(1-\cos t,\ \sin t)$

따라서

$t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 속도는 $\left(1-\cos\dfrac{\pi}{2},\ \sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 1)$,

$t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 속력은 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\sin t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

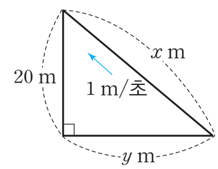
$\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(\sin t,\ \cos t)$

따라서

$t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 가속도는 $\left(\sin\dfrac{\pi}{2},\ \cos\dfrac{\pi}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 0)$,

$t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 가속도의 크기는 $\sqrt{1^2+0^2}=1$

007 정답 $-\dfrac{5}{3}$ m/초



오른쪽 그림에서 밧줄의 길이를 x m, 배와 부두 사이의 거리를 y m라 하면

$y^2+20^2=x^2$

양변을 t에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dt}=2x\dfrac{dx}{dt}$ ...... ㉠

$x=25$일 때

$y=\sqrt{25^2-20^2}=15,\ \dfrac{dx}{dt}=-1$

이므로 ㉠에 대입하면

$2\times 15\times\dfrac{dy}{dt}=2\times 25\times(-1)$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{2\times 25\times 1}{2\times 15}=-\dfrac{5}{3}$

따라서 구하는 속도는 $-\dfrac{5}{3}$ m/초이다.

확인문제 pp.169~178

322 정답 0

$f(x)=x-2\ln x$라 하면

$f'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$이므로

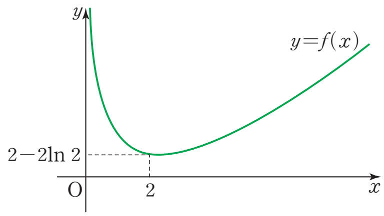
$f'(x)=0$에서 $x=2$

$f(2)=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$,

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	∞	$\searrow$	$2-2\ln 2$	$\nearrow$

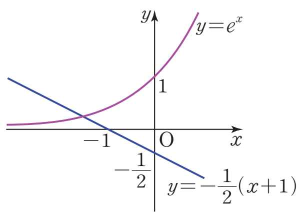


따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않으므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 0이다.

323 정답 1

$\dfrac{x+1}{e^x}=-2$에서 $e^x=-\dfrac{1}{2}(x+1)$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=e^x$과 직선 $y=-\dfrac{1}{2}(x+1)$의 교점의 개수와 같다.

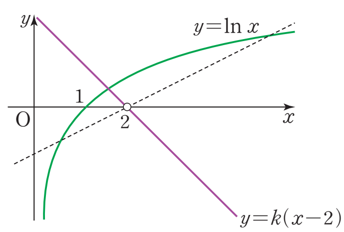


그림과 같이 두 곡선은 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

324 정답 $k\le 0$

$\dfrac{\ln x}{x-2}=k$에서 $\ln x=k(x-2)$

주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=\ln x$의 그래프와 직선 $y=k(x-2)$가 한 점에서만 만나야 한다.



직선 $y=k(x-2)$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 0)$을 지나므로 그림에서 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=k(x-2)$의 교점의 개수를 구해보면

$k>0$일 때 2개, $k=0$일 때 1개, $k<0$일 때 1개

따라서 $k\le 0$이면 곡선과 직선은 한 개의 교점을 가지므로 구하는 실수 k의 값의 범위는 $k\le 0$

325 정답 $0<k<\dfrac{e}{2}$

$ke^{2x}=x+1$에서 $\dfrac{x+1}{e^{2x}}=k$

$f(x)=\dfrac{x+1}{e^{2x}}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

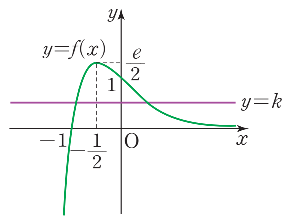
$f'(x)=\dfrac{e^{2x}-2e^{2x}(x+1)}{e^{4x}}=\dfrac{-2(2x+1)}{e^{2x}}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{e}{2},\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{e}{2}$	$\searrow$	(0)



따라서 $0<k<\dfrac{e}{2}$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 구하는 k의 값의 범위는

$0<k<\dfrac{e}{2}$

326 정답 풀이 참조

$f(x)=x-\ln(1+x)$라 하면

$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$

$x>0$일 때, $f'(x)=\dfrac{x}{1+x}>0$

즉, $x>0$일 때 $f(x)$는 증가하고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x-\ln(1+x)>0$

따라서 $x>0$일 때 부등식 $x>\ln(1+x)$가 성립한다.

327 정답 풀이 참조

$f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-1$이라 하면

$f'(x)=-\sin x+x$

$x>0$일 때 $f'(x)=-\sin x+x>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

본책 p. 171 개념체크 1 참조

이때, $f(0)=0$이므로 $x>0$일 때

$f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-1>0$

따라서 $x>0$일 때 부등식 $\cos x>1-\dfrac{1}{2}x^2$이 성립한다.

328 정답 $k \geq e^2$

$f(x)=x\ln x-3x+k$로 놓으면

$$f'(x)=\ln x+1-3=\ln x-2$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=e^2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

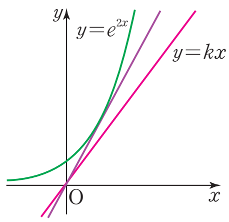
x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$k-e^2$ (극소)	$\nearrow$

$x>0$일 때 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(e^2)=k-e^2$이므로

$$k-e^2 \geq 0 \qquad \therefore k \geq e^2$$

329 정답 $2e$

모든 실수 x에 대하여 $e^{2x} \geq kx$가 성립하려면 곡선 $y=e^{2x}$이 직선 $y=kx$와 접하거나 곡선이 직선보다 위쪽에 있어야 한다.



$y=kx$는 원점을 지나는 직선이므로 원점에서 $y=e^{2x}$에 그은 접선의 기울기가 k의 최댓값이다.

원점에서 $y=e^{2x}$에 그은 접선의 접점을 (a, e^{2a})이라고 하면

$y'=2e^{2x}$에서 접선의 기울기는 $2e^{2a}$이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{2a}=2e^{2a}(x-a)$$

이 접선이 원점을 지나므로

$$-e^{2a}=-2ae^{2a} \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

이때, 접선의 기울기가 $2e$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $e^{2x} \geq kx$가 성립하기 위한 상수 k의 최댓값은 $2e$이다.

330 정답 속도 : -4π, 가속도 : $3\pi^2$

$x=4\sin \pi t+3\cos \pi t$에서

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=4\pi\cos \pi t-3\pi \sin \pi t,$$

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=-4\pi^2\sin \pi t-3\pi^2\cos \pi t$$

이므로 $t=3$일 때

$$v=4\pi\cos 3\pi-3\pi\sin 3\pi=-4\pi,$$

$$a=-4\pi^2\sin 3\pi-3\pi^2\cos 3\pi=3\pi^2$$

331 정답 10초

제동을 건 지 t초 후의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{20-2t}{2\sqrt{20t-t^2}}$$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$$20-2t=0 \qquad \therefore t=10$$

따라서 열차가 정지할 때까지 걸린 시간은 10초이다.

332 정답 속력 : $\sqrt{2+2e^4}$, 가속도의 크기 : $\sqrt{2}e^2$

$\dfrac{dx}{dt}=1-e^t$, $\dfrac{dy}{dt}=1+e^t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=(1-e^t, 1+e^t)$$

따라서 $t=2$에서의 속도는 $(1-e^2, 1+e^2)$이므로 $t=2$에서의 속력은

$$\sqrt{(1-e^2)^2+(1+e^2)^2}=\sqrt{2+2e^4}$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-e^t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=e^t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(-e^t, e^t)$$

따라서 $t=2$에서의 가속도는 $(-e^2, e^2)$이므로 $t=2$에서의 가속도의 크기는

$$\sqrt{(-e^2)^2+(e^2)^2}=\sqrt{2}e^2$$

333 정답 1

시각 t에서의 점 P의 속도는

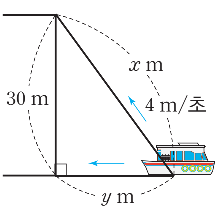
$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=(t, t-2)$$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{t^2+(t-2)^2}=\sqrt{2t^2-4t+4}=\sqrt{2(t-1)^2+2}$$

따라서 $t=1$일 때 점 P의 속력이 최소이다.

334 정답 5 m/초



방파제 위에서 배까지의 거리를 x m, 배에서 방파제 아래까지의 거리를 y m라 하면

$$x^2=y^2+30^2$$

이 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$2x\frac{dx}{dt}=2y\frac{dy}{dt} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=50$일 때

$$y=\sqrt{50^2-30^2}=40\ (\text{m}),\ \frac{dx}{dt}=-4$$

이므로 ㉠에 대입하면

$$2\times 40\times\frac{dy}{dt}=2\times 50\times(-4)$$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=-5$$

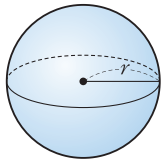
따라서 구하는 배의 속력은 5 m/초이다.

10강

335 정답 **겉넓이의 변화율 : 8π cm^2/초,**

부피의 변화율 : 20π cm^3/초

시각 t일 때 구의 반지름의 길이를 r cm 라 하고, 겉넓이를 S cm^2, 부피를 V cm^3 라 하면



$$S=4\pi r^2,\ V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

이때, $S=4\pi r^2$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=8\pi r\times\frac{dr}{dt}$$

여기서 $\frac{dr}{dt}=0.2$이므로 $r=5$일 때 겉넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt}=8\pi\times5\times0.2=8\pi$$

또, $V=\frac{4}{3}\pi r^3$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\times\frac{dr}{dt}$$

$r=5$일 때 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt}=4\pi\times5^2\times0.2=20\pi$$

따라서 구하는 겉넓이의 변화율은 8π cm^2/초, 부피의 변화율은 20π cm^3/초이다.

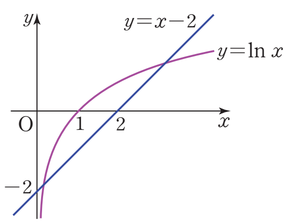
연습문제 I

pp.179~182

336 정답 **2**

$\ln x-x+2=0$에서 $\ln x=x-2$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=x-2$의 교점의 개수와 같다.



그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

337 정답 ①

$e^{x+1}-x=k$에서 $f(x)=e^{x+1}-x$라 하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구하면 된다.

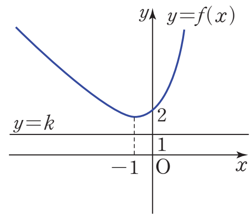
이때, $f'(x)=e^{x+1}-1$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

$$f(-1)=2,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗



따라서 $k<2$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나지 않으므로 주어진 방정식이 실근을 갖지 않도록 하는 정수 k의 최댓값은 1이다.

338 정답 ②

$x\ln x=x+k$에서

$$x\ln x-x=k$$

$f(x)=x\ln x-x$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 교점을 가져야 한다.

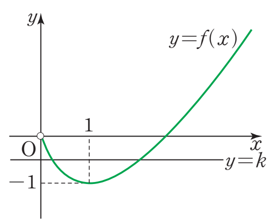
$f'(x)=\ln x$이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=1$$

$$f(1)=-1,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to0+}f(x)=0$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	↘	-1	↗	(∞)



따라서 $k\geq-1$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 교점을 가지므로 구하는 실수 k의 최솟값은 -1이다.

339 정답 ④

방정식 $\frac{1}{x^2}-2x-k=0$에서

$$\frac{1}{x^2}-2x=k$$

$f(x)=\frac{1}{x^2}-2x$로 놓으면 주어진 방정식의 실근은

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.

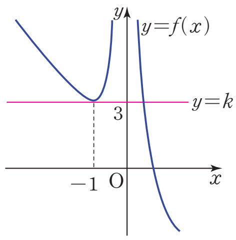
$f'(x)=-\frac{2}{x^3}-2=\frac{-2(x^3+1)}{x^3}$이므로

$f'(x)=0$에서

$$x=-1$$

또, $\lim_{x\to0+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to0-} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$		$\searrow$



따라서 $k=3$일 때 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 가진다.

340 정답 ②

$x+\sin 2x-k=0$에서 $x+\sin 2x=k$

$f(x)=x+\sin 2x$로 놓으면 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지기 위해서는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f'(x)=1+2\cos 2x$이므로 $f'(x)=0$에서

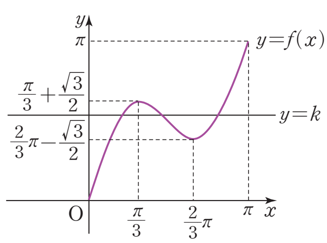
$$\cos 2x=-\frac{1}{2}$$

$0\le 2x\le 2\pi$이므로 $2x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $2x=\frac{4}{3}\pi$

$$\therefore x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}\pi$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	π



이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}<k<\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$이어야 하므로

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \beta=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \alpha+\beta=\pi$$

341 정답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x)=e^x-1-x$라 하면

$$f'(x)=e^x-1$$

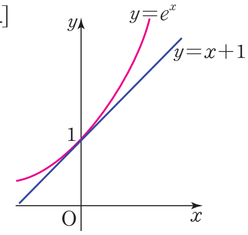
$x>0$일 때, $e^x>1$이므로 $f'(x)=e^x-1>0$

즉, $x>0$일 때 $f(x)$는 증가하고 $f(0)=0$이므로

$$f(x)=e^x-1-x>0$$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $e^x>1+x$가 성립한다.

[참고]



다른 풀이 [평균값 정리를 이용한 풀이]

$f(x)=e^x$이라 하면 $x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, x]$에서 연속이고, 열린구간 $(0, x)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)\ (0<c<x)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다. 즉,

$$\frac{e^x-1}{x-0}=e^c\ (0<c<x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $c>0$이므로 $e^c>1$

㉠에서 $\frac{e^x-1}{x}>1$이므로 $e^x-1>x$

$$\therefore e^x>1+x$$

(2) $f(x)=x-\ln x^e=x-e\ln x$라 하면

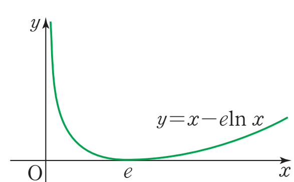
$$f'(x)=1-\frac{e}{x}=\frac{x-e}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

또, $\lim_{x\to0+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$



$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$$f(x)=x-\ln x^e\ge0$$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $x-\ln x^e\ge0$이 성립한다.

342 정답 풀이 참조

$f(x)=\sin x-x\cos x$라 하면

$$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x$$
$$=x\sin x\geq 0\ (\because\ 0\leq x\leq \pi)$$

이므로 $f(x)$는 $0\leq x\leq \pi$에서 증가함수이다.

이때, $f(0)=0$이므로 $0\leq x\leq \pi$에서 $f(x)\geq 0$이다.

따라서 $0\leq x\leq \pi$일 때, 부등식 $\sin x\geq x\cos x$가 성립한다.

343 정답 $a\geq 0$

$f(x)=x+a\ln x$에서

$$f'(x)=1+\frac{a}{x}=\frac{x+a}{x}$$

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$가 증가하기 위해서는 $f'(x)\geq 0$ 이어야 한다.

$x>0$이므로 $\frac{x+a}{x}\geq 0$에서

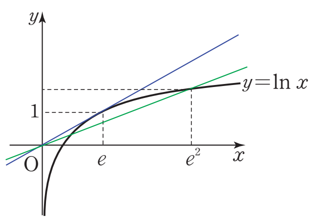
$$x+a\geq 0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

모든 양수 x에 대하여 ㉠이 성립해야 하므로

$$a\geq 0$$

344 정답 ①

원점과 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(x,\ \ln x)$를 이은 선분의 기울기가 $\frac{\ln x-0}{x-0}=\frac{\ln x}{x}$이다.



원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 접점의 좌표가 $(e,\ 1)$이므로 $e\leq x\leq e^2$에서 선분의 기울기 $\frac{\ln x}{x}$는 $x=e$일 때 최대이고, $x=e^2$일 때 최소이다.

즉, $\frac{\ln e^2}{e^2}\leq\frac{\ln x}{x}\leq\frac{\ln e}{e}$에서 $\frac{2}{e^2}\leq\frac{\ln x}{x}\leq\frac{1}{e}$이므로

$0<\alpha\leq\frac{2}{e^2},\ \beta\geq\frac{1}{e}$이어야 한다.

따라서 $\frac{1}{\alpha}\geq\frac{e^2}{2},\ \beta\geq\frac{1}{e}$에서 $\frac{\beta}{\alpha}\geq\frac{e^2}{2}\times\frac{1}{e}=\frac{e}{2}$이므로

$\frac{\beta}{\alpha}$의 최솟값은 $\frac{e}{2}$이다.

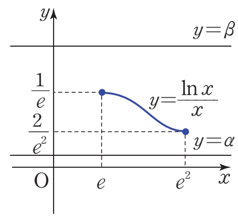
다른 풀이

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라고 하면 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=e$

$e\leq x\leq e^2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\frac{2}{e^2}$



즉, $0<\alpha\leq\frac{2}{e^2},\ \beta\geq\frac{1}{e}$이어야 하므로

$\frac{1}{\alpha}\geq\frac{e^2}{2},\ \beta\geq\frac{1}{e}$에서 $\frac{\beta}{\alpha}\geq\frac{e^2}{2}\times\frac{1}{e}=\frac{e}{2}$

따라서 $\frac{\beta}{\alpha}$의 최솟값은 $\frac{e}{2}$이다.

345 정답 ②

ㄱ. $t=0$일 때 $x=4$이므로 처음 출발할 때 점 P의 위치는 4이다. (참)

ㄴ. $v=\frac{dx}{dt}=3\cos t-4\sin t$

이때, 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\{3^2+(-4)^2\}(\cos^2 t+\sin^2 t)\geq(3\cos t-4\sin t)^2$$
$$(3\cos t-4\sin t)^2\leq 5^2$$
$$\therefore -5\leq 3\cos t-4\sin t\leq 5$$

따라서 속도 $v=3\cos t-4\sin t$의 최댓값은 5이다. (참)

ㄷ. 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 처음으로 방향을 바꾸는 시각을 t라 하면

$v=3\cos t-4\sin t=0$에서 $3\cos t=4\sin t$

$$\therefore \tan t=\frac{3}{4}\ (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

346 정답 5

$\frac{dx}{dt}=4t,\ \frac{dy}{dt}=3t^2$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(4t,\ 3t^2)$$

따라서 $t=1$에서의 속도는 $(4,\ 3)$이므로 $t=1$에서의 속력은

$$\sqrt{4^2+3^2}=5$$

347 정답 ④

시각 t에서의 점 P의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(t+1,\ \frac{4}{t+1}\right)$$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(t+1)^2+\left(\frac{4}{t+1}\right)^2}$$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(t+1)^2+\left(\frac{4}{t+1}\right)^2\ge2\sqrt{(t+1)^2\times\left(\frac{4}{t+1}\right)^2}=8$$

(단, 등호는 $t=1$일 때 성립)

이므로 $\sqrt{(t+1)^2+\left(\frac{4}{t+1}\right)^2}\ge\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

따라서 점 P의 속력의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

348 $\sqrt{2}$

$\frac{dx}{dt}=1-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\sqrt{2}\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(1-\sin t,\ \sqrt{2}\cos t)$$

점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-\sin t)^2+(\sqrt{2}\cos t)^2}&=\sqrt{3-2\sin t-\sin^2 t}\\&=\sqrt{-(\sin t+1)^2+4}\end{aligned}$$

이므로 $\sin t=-1$일 때 속력이 최대이다.

한편, $\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\sqrt{2}\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(-\cos t,\ -\sqrt{2}\sin t)$$

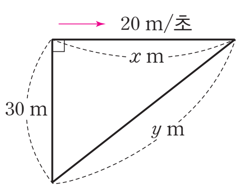
따라서 시각 t에서의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\cos^2 t+2\sin^2 t}=\sqrt{1+\sin^2 t}$$

이므로 $\sin t=-1$일 때의 가속도의 크기는

$$\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

349 정답 16 m/초



자동차가 관찰자의 정면을 통과한 순간부터 이동한 거리를 x m, 관찰자와 자동차 사이의 거리를 y m라 하면

$$x^2+30^2=y^2$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$2x\frac{dx}{dt}=2y\frac{dy}{dt} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{dx}{dt}=20$이고 $t=2$일 때

$$x=40,\ y=\sqrt{40^2+30^2}=50$$

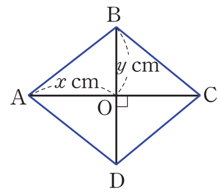
이므로 ㉠에 대입하면

$$2\times40\times20=2\times50\times\frac{dy}{dt}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dt}=\frac{2\times40\times20}{2\times50}=16$$

따라서 구하는 속도는 16 m/초이다.

350 정답 $\frac{8}{3}$ cm/초



두 대각선 AC, BD의 교점을 O라 하고, $\overline{AO}=\overline{OC}=x$ cm, $\overline{BO}=\overline{OD}=y$ cm라 하면

$$x^2+y^2=50^2$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AC}$의 변화율이 2이므로 $\frac{dx}{dt}=1$

또, $\overline{AC}$의 길이가 80 cm일 때

$$\overline{AO}=x=40\ (\text{cm}),\ \overline{OB}=y=30\ (\text{cm})$$

이 값을 ㉠에 대입하면

$$2\times40\times1+2\times30\times\frac{dy}{dt}=0 \qquad \therefore\ \frac{dy}{dt}=-\frac{4}{3}$$

이때, $\overline{BD}$의 변화율은 y의 변화율의 2배이므로

$$-\frac{4}{3}\times2=-\frac{8}{3}$$

따라서 대각선 BD가 줄어드는 속력은 $\frac{8}{3}$ cm/초이다.

연습문제 Ⅱ p.183

351 정답 2

$\frac{g'(x)}{f'(x)}+\frac{f'(x)}{g'(x)}=2$에서

$$\frac{\{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2}{f'(x)g'(x)}=2$$

$$\{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2=2f'(x)g'(x)$$

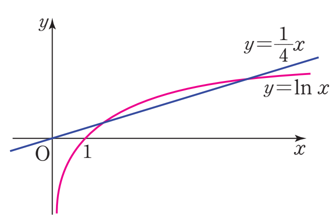
$$\{f'(x)-g'(x)\}^2=0$$

$$\therefore\ f'(x)-g'(x)=0$$

$f(x)-g(x)=2x\ln x-\frac{1}{4}x^2-2x+1$이므로

$$f'(x)-g'(x)=2\ln x-\frac{1}{2}x$$

$f'(x)-g'(x)=0$에서 $\ln x=\frac{1}{4}x$이므로 다음 그림에서 구하는 실근의 개수는 2이다.



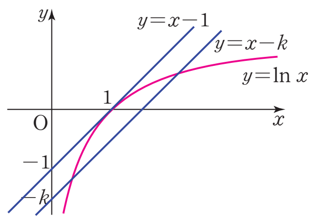
352 정답 $k \geq 1$

두 곡선 $y=e^{x-k}$과 $y=\ln x+k$가 만나면 방정식

$e^{x-k}=\ln x+k$가 실근을 가진다.

이때, 함수 $y=e^{x-k}$의 역함수가 함수 $y=\ln x+k$이므로 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 곡선 $y=e^{x-k}$과 $y=\ln x+k$의 교점은 곡선 $y=\ln x+k$와 직선 $y=x$의 교점과 일치하므로 곡선 $y=\ln x+k$와 직선 $y=x$가 교점을 가지는 실수 k의 값의 범위를 구하면 된다.



$\ln x+k=x$에서

$\ln x=x-k$이고 곡선

$y=\ln x$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식이

$y=x-1$이므로

$-k \leq -1$ 즉, $k \geq 1$이면

곡선 $y=\ln x$와 $y=x-k$는 교점을 가진다.

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지는 실수 k의 값의 범위는 $k \geq 1$이다.

353 정답 $\frac{5}{4}$

$y=\cos^2 t-\cos 2t=1-\cos^2 t$이므로

$$\frac{dx}{dt}=\cos t,\ \frac{dy}{dt}=2\sin t\cos t$$

점 P의 시각 t에서의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(\cos t,\ 2\sin t\cos t)$$

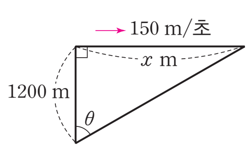
이므로 시각 t에서의 속력은

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}&=\sqrt{\cos^2 t+4\sin^2 t\cos^2 t}\\&=\sqrt{\cos^2 t+4(1-\cos^2 t)\cos^2 t}\\&=\sqrt{-4\cos^4 t+5\cos^2 t}\\&=\sqrt{-4\left(\cos^2 t-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{25}{16}}\\&\leq\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

따라서 속력의 최댓값은 $\frac{5}{4}$이다.

354 정답 $\frac{2}{25}$ (라디안/초)

비행기가 관찰자 바로 위에서부터 t초 동안 간 거리를 x m라 하면



$$\tan\theta=\frac{x}{1200}$$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{1200}\times\frac{dx}{dt} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $\frac{dx}{dt}=150$이고 $t=6$일 때 $x=150\times 6=900(\mathrm{m})$이므로

$$\tan\theta=\frac{900}{1200}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$$

㉠에 대입하면

$$\frac{25}{16}\times\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{1200}\times 150$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt}=\frac{2}{25}$$

따라서 구하는 각의 크기 θ의 변화율은 $\frac{2}{25}$ (라디안/초)이다.

355 정답 $99^{100}>100^{99}$ 서술형

$f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln x^{\frac{1}{x}}=\frac{\ln x}{x}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\times x^{\frac{1}{x}} \quad \cdots ①$$

즉, $x>e$일 때 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 $f(x)$는 감소한다. … ②

따라서 $f(99)>f(100)$이므로 $99^{\frac{1}{99}}>100^{\frac{1}{100}}$에서

$$\left(99^{\frac{1}{99}}\right)^{9900}>\left(100^{\frac{1}{100}}\right)^{9900}$$

$$\therefore 99^{100}>100^{99} \quad \cdots ③$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	로그미분법을 이용하여 $f'(x)$ 구하기	40 %
②	함수 $f(x)$의 증가, 감소 조사하기	30 %
③	99^{100}과 100^{99}의 대소 관계 조사하기	30 %

III 적분법

11. 여러 가지 함수의 부정적분

유형 .... pp.189~199

001 정답 (1) $2x+\frac{8}{x}+C$

(2) $\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+\ln|x|+C$

(1) $\int\frac{2x^2-8}{x^2}dx=\int(2-8x^{-2})dx$

$=2x-8\times\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=2x+\frac{8}{x}+C$

(2) $\int\frac{(x+1)^3}{x}dx=\int\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x}dx$

$=\int\left(x^2+3x+3+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{2+1}x^{2+1}+3\times\frac{1}{1+1}x^{1+1}+3x$
$+\ln|x|+C$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+\ln|x|+C$

002 정답 (1) $x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

(2) $-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{x}+C$

(1) $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx=\int\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx$

$=\int\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\int\left(1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$=x-2\times\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+\ln|x|+C$

$=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

(2) $\int\frac{\sqrt[3]{x}+2}{x^2}dx=\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)dx$

$=\int\left(x^{-\frac{5}{3}}+2x^{-2}\right)dx$

$=\frac{1}{-\frac{5}{3}+1}x^{-\frac{5}{3}+1}+2\times\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{x}+C$

003 정답 (1) $\ln|2x+5|+C$

(2) $-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$

(3) $\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}\ln|2x+1|+C$

(1) $\int\frac{2}{2x+5}dx=\int\frac{(2x+5)'}{2x+5}dx$

$=\ln|2x+5|+C$

(2) $\int\frac{1}{1-2x}dx=\int\left\{-\frac{1}{2}\times\frac{(1-2x)'}{1-2x}\right\}dx$

$=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$

(3) $\int\frac{2x^3+x^2+3}{2x+1}dx=\int\left(x^2+\frac{3}{2x+1}\right)dx$

$=\int\left\{x^2+\frac{3}{2}\times\frac{(2x+1)'}{2x+1}\right\}dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}\ln|2x+1|+C$

004 정답 (1) $-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 4x+C$

(2) $x+\sin x+C$

(3) $-\frac{1}{8}\cos 4x+C$

(4) $\frac{1}{3}\tan 3x-x+C$

(1) $\int(\sin 2x+3\cos 4x)dx$

$=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 4x+C$

(2) $\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx$

$=\int(1+\cos x)dx$

$=x+\sin x+C$

(3) $\int\sin 2x\cos 2x\,dx=\int\frac{1}{2}\sin 4x\,dx$

$=-\frac{1}{8}\cos 4x+C$

(4) $\int\tan^2 3x\,dx=\int(\sec^2 3x-1)dx$

$=\frac{1}{3}\tan 3x-x+C$

005 정답 (1) $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

(2) $-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+C$

(1) $\int\frac{8^x-1}{2^x-1}dx=\int\frac{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}{2^x-1}dx$

$=\int(4^x+2^x+1)dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

(2) $\int\frac{e^x-1}{e^{3x}}dx=\int(e^{-2x}-e^{-3x})dx$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+C$

11강

006 정답 (1) $e^x+3\sin x$ (2) $e^x+3\sin x+C$

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)dx=f(x)=e^x+3\sin x$

(2) $\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=e^x+3\sin x+C$

007 정답 (1) $\dfrac{4}{3}$ (2) $\dfrac{3}{2\ln 2}$

(1) $f'(x)=2\cos 3x$의 양변을 적분하면

$$f(x)=\int 2\cos 3x\,dx=\frac{2}{3}\sin 3x+C$$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$이므로 $\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{3}{2}\pi+C=0$에서

$$-\frac{2}{3}+C=0 \qquad \therefore C=\frac{2}{3}$$

따라서 $f(x)=\dfrac{2}{3}\sin 3x+\dfrac{2}{3}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

(2) $f'(x)=2^x+2^{-x}$의 양변을 적분하면

$$f(x)=\int(2^x+2^{-x})dx=\int\left\{2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}dx$$

$$=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}+C$$

$f(0)=0$이므로 $\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 2}+C=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{2x}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$이므로

$$f(1)=\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{2\ln 2}=\frac{3}{2\ln 2}$$

008 정답 ③

$f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로 $F'(x)=f(x)$이다.

$F(x)=xf(x)+\sin x-x\cos x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)+\cos x-\cos x+x\sin x$$

$F'(x)=f(x)$이므로

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+\cos x-\cos x+x\sin x$$

$$xf'(x)=-x\sin x$$

$$\therefore f'(x)=-\sin x\ (\because\ x>0)$$

위의 식의 양변을 적분하면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-\sin x)dx$$

$$=\cos x+C$$

$f(2\pi)=2$이므로 $\cos 2\pi+C=2$

$$1+C=2 \qquad \therefore C=1$$

따라서 $f(x)=\cos x+1$이므로

$$f(\pi)=\cos\pi+1=(-1)+1=0$$

356 정답 (1) $\ln|x|-\dfrac{5}{x}+C$

(2) $2x^3-\dfrac{1}{2}x^2+2\ln|x|+C$

(1) $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+5x^{-2}\right)dx$$

$$=\ln|x|+5\times\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$$

$$=\ln|x|-\frac{5}{x}+C$$

(2) $\displaystyle\int\left(6x^2-x+\frac{2}{x}\right)dx$

$$=6\times\frac{1}{2+1}x^{2+1}-\frac{1}{1+1}x^{1+1}+2\ln|x|+C$$

$$=2x^3-\frac{1}{2}x^2+2\ln|x|+C$$

357 정답 (1) $\dfrac{1}{2}x^2+4\ln|x|+\dfrac{5}{x}+C$

(2) $x^3+2\ln|x|+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+C$

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3+4x-5}{x^2}=\int\left(x+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)dx$

$$=\int\left(x+\frac{4}{x}-5x^{-2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{1+1}x^2+4\ln|x|$$

$$-5\times\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$$

$$=\frac{1}{2}x^2+4\ln|x|+\frac{5}{x}+C$$

(2) $\displaystyle\int\frac{3x^5+2x^2-x+6}{x^3}dx$

$$=\int\left(3x^2+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)dx$$

$$=\int\left(3x^2+\frac{2}{x}-x^{-2}+6x^{-3}\right)dx$$

$$=3\times\frac{1}{2+1}x^{2+1}+2\ln|x|-\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}$$

$$+6\times\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C$$

$$=x^3+2\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+C$$

358 정답 (1) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

(2) $\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$

(1) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

(2) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}dx$

$=\int\left(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$

$=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$

359 정답 (1) $2x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$

(2) $2\sqrt{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+C$

(3) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-6\sqrt[3]{x}+C$

(1) $\int\frac{3x+4}{\sqrt{x}}dx=\int\left(3x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=3\times\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\times2\sqrt{x}+C$

$=2x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$

(2) $\int\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{6}}\right)dx$

$=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+C$

$=2\sqrt{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+C$

(2) $\int\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx$

$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-2\times3x^{\frac{1}{3}}+C$

$=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-6\sqrt[3]{x}+C$

360 정답 (1) $2\ln|5x+2|+C$

(2) $-\ln|1-x|+C$

(3) $\frac{8}{3}\ln|3x-1|+C$

(1) $\int\frac{10}{5x+2}dx=\int\left\{2\times\frac{(5x+2)'}{5x+2}\right\}dx$

$=2\ln|5x+2|+C$

(2) $\int\frac{1}{1-x}dx=\int\left\{(-1)\times\frac{(1-x)'}{1-x}\right\}dx$

$=-\ln|1-x|+C$

(3) $\int\frac{8}{3x-1}dx=\int\left\{\frac{8}{3}\times\frac{(3x-1)'}{3x-1}\right\}dx$

$=\frac{8}{3}\ln|3x-1|+C$

361 정답 (1) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\ln|3x-2|+C$

(2) $3x^2+2x-\frac{2}{3}\ln|3x-1|+C$

(1) $\int\frac{3x^2-2x-1}{3x-2}dx=\int\frac{x(3x-2)-1}{3x-2}dx$

$=\int\left(x-\frac{1}{3x-2}\right)dx$

$=\int\left\{x-\frac{1}{3}\times\frac{(3x-2)'}{3x-2}\right\}dx$

$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\ln|3x-2|+C$

(2) $\int\frac{18x^2-4}{3x-1}dx=\int\frac{(6x+2)(3x-1)-2}{3x-1}dx$

$=\int\left(6x+2-\frac{2}{3x-1}\right)dx$

$=\int\left\{6x+2-\frac{2}{3}\times\frac{(3x-1)'}{3x-1}\right\}dx$

$=3x^2+2x-\frac{2}{3}\ln|3x-1|+C$

362 정답 (1) $-\cos x+\cot x+C$ (2) $x-\sin x+C$

(1) $\int\frac{\sin^3x-1}{\sin^2x}dx=\int(\sin x-\csc^2x)dx$

$=-\cos x+\cot x+C$

(2) $\int\frac{\sin^2x}{1+\cos x}dx=\int\frac{1-\cos^2x}{1+\cos x}dx$

$=\int\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x}dx$

$=\int(1-\cos x)dx$

$=x-\sin x+C$

363 정답 (1) $\tan x+x+C$ (2) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(1) $\int\frac{1+\cos^2x}{\cos^2x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+1\right)dx$

$=\int(\sec^2x+1)dx$

$=\tan x+x+C$

(2) $\int\sin^2x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

364 정답 (1) $-e^{-x}-x+C$ (2) $\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

(1) $\int\frac{e^{-2x}-1}{e^{-x}+1}dx=\int\frac{(e^{-x}+1)(e^{-x}-1)}{e^{-x}+1}dx$

$=\int(e^{-x}-1)dx$

$=-e^{-x}-x+C$

(2) $\int\frac{8^x+1}{2^x+1}dx=\int\frac{(2^x+1)(4^x-2^x+1)}{2^x+1}dx$

$=\int(4^x-2^x+1)dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

365 정답 (1) $e^x+3ex-2\ln|x|+C$

(2) $\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-2x+C$

(1) $\int \frac{xe^x+3ex-2}{x}dx=\int\left(e^x+3e-\frac{2}{x}\right)dx$

$=e^x+3ex-2\ln|x|+C$

(2) $\int (e^x-e^{-x})^2\,dx=\int(e^{2x}-2+e^{-2x})dx$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-2x+C$

366 정답 (1) $f(x)=2\ln 3\times 3^{x^2+1}x$ (2) $f(x)=8e^{4x}$

(1) 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(3^{x^2+1}+C)'=3^{x^2+1}\cdot\ln 3\cdot 2x$

$=2\ln 3\times 3^{x^2+1}x$

(2) 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(2e^{4x}+C)'=8e^{4x}$

367 정답 (1) $f(x)=-2\sin x\cos x$

(2) $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

(1) 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(\cos^2 x+C)'=2\cos x\times(\cos x)'$

$=2\cos x\times(-\sin x)$

$=-2\sin x\cos x$

(2) 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(\cos x\sin x+C)'$

$=(\cos x)'\times\sin x+\cos x\times(\sin x)'$

$=-\sin x\times\sin x+\cos x\times\cos x$

$=\cos^2 x-\sin^2 x$

368 정답 ⑤

$f'(x)=e^{3x}-e^{-x}$의 양변을 적분하면

$f(x)=\int(e^{3x}-e^{-x})dx=\frac{1}{3}e^{3x}+e^{-x}+C$

$f(0)=1$이므로 $\frac{1}{3}e^0+e^0+C=1$에서

$\frac{1}{3}+1+C=1 \qquad \therefore C=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+e^{-x}-\frac{1}{3}$이므로

$f(\ln 3)=\frac{1}{3}e^{3\ln 3}+e^{-\ln 3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times 27+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=9$

369 정답 ②

$f'(x)=\tan^2 x=\sec^2 x-1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(\sec^2 x-1)dx$

$=\tan x-x+C$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left(1-\frac{\pi}{4}+C\right)-\left(-1+\frac{\pi}{4}+C\right)$

$=2-\frac{\pi}{2}$

370 정답 ③

$\int f(x)dx=e^x\cos x+e^{-x}\sin x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)+(-e^{-x})\sin x$

$+e^{-x}\cos x$

$=e^x(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x+\cos x)$

$\therefore f(0)=1+1=2$

371 정답 ③

$f(x)-2\int e^x f(x)dx=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-2e^x f(x)=0$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)-2f(0)=0$

$\therefore f'(0)=2$ ($\because f(0)=1$)

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)-2\{e^x f(x)+e^x f'(x)\}=0$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f''(0)-2\{f(0)+f'(0)\}=0$

$\therefore f''(0)=2\{f(0)+f'(0)\}$

$=2(1+2)=6$

연습문제 I .... pp.200~203

372 정답 (1) $2\sqrt{x}-6\ln|x|+C$

(2) $\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x+C$

(3) $3\sqrt[3]{x}+10\sqrt{x}+C$

(4) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{3x\sqrt{x}}+C$

(5) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$

(6) $\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}-\frac{1}{3}\sqrt{(2x)^3}+C$

(7) $x^2-x+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

(8) $x^3-5\ln|x-1|+C$

(1) $\int\frac{\sqrt{x}-6}{x}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{6}{x}\right)dx$

$=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}-\frac{6}{x}\right)dx$

$=2\sqrt{x}-6\ln|x|+C$

(2) $\int(\sqrt{x}+1)^2\,dx=\int(x+2\sqrt{x}+1)dx$

$=\int(x+2x^{\frac{1}{2}}+1)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+2\times\frac{2}{3}\times x^{\frac{3}{2}}+x+C$

$=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x+C$

(3) $\int\frac{\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}}{x}dx=\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+\frac{5\sqrt{x}}{x}\right)dx$

$=\int\left(x^{-\frac{2}{3}}+5x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=3\sqrt[3]{x}+10\sqrt{x}+C$

(4) $\int\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}{x^3}dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}-3}-x^{\frac{1}{2}-3}\right)dx$

$=\int\left(x^{-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{5}{2}}\right)dx$

$=-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C$

$=-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{3x\sqrt{x}}+C$

(5) $\int\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}dx$

$=\int\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})}dx$

$=\int(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})dx$

$=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$

(6) $\int\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}dx$

$=\int\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})}dx$

$=\int(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})dx$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\sqrt{(2x+1)^3}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\sqrt{(2x)^3}+C$

$=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}-\frac{1}{3}\sqrt{(2x)^3}+C$

(7) $\int\frac{4x^2}{2x+1}dx=\int\frac{(2x+1)(2x-1)+1}{2x+1}dx$

$=\int\left(2x-1+\frac{1}{2x+1}\right)dx$

$=x^2-x+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

(8) $\int\frac{-3x^3+3x^2+5}{1-x}dx=\int\frac{3x^3-3x^2-5}{x-1}dx$

$=\int\frac{3x^2(x-1)-5}{x-1}dx$

$=\int\left(3x^2-\frac{5}{x-1}\right)dx$

$=x^3-5\ln|x-1|+C$

373 정답 (1) $2\sin\frac{1}{2}x+\cos\sqrt{2}x+C$

(2) $\sin x-5\cos x+C$

(3) $-\cot x-\ln|x|+C$

(4) $-2\cot 2x+C$

(5) $\tan x-\cot x+C$

(6) $\ln|x|-\tan x+C$

(1) $\int\left(\cos\frac{1}{2}x-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\right)dx$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}x-\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times(-\cos\sqrt{2}x)+C$

$=2\sin\frac{1}{2}x+\cos\sqrt{2}x+C$

(2) $\int(\cot x+5)\sin x\,dx=\int(\cos x+5\sin x)dx$

$=\sin x-5\cos x+C$

(3) $\int\frac{x-\sin^2 x}{x\sin^2 x}dx=\int\left(\csc^2 x-\frac{1}{x}\right)dx$

$=-\cot x-\ln|x|+C$

(4) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{4}{\sin^2 2x}dx$

$=\int 4\csc^2 2x\,dx$

$=4\times\frac{1}{2}\times(-\cot 2x)+C$

$=-2\cot 2x+C$

(5) $\int(\tan x+\cot x)^2\,dx$

$=\int(\tan^2 x+2+\cot^2 x)dx$

$=\int\{(\sec^2 x-1)+2+(\csc^2 x-1)\}dx$

$=\int(\sec^2 x+\csc^2 x)dx$

$=\tan x-\cot x+C$

(6) $\int\frac{\cos^2 x-x}{x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\sec^2 x\right)dx$

$=\ln|x|-\tan x+C$

374 정답 (1) $-e^{1-x}+\frac{2^{2-2x}}{\ln 2}+C$

(2) $e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+C$

(3) $-\frac{10^{1-3x}}{3\ln 10}+C$

(4) $\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+C$

(1) $\int(e^{1-x}-2^{3-2x})dx$

$=-e^{1-x}-\left(-\frac{1}{2\ln 2}\right)2^{3-2x}+C$

$=-e^{1-x}+\frac{2^{2-2x}}{\ln 2}+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-4^x}{e^x+2^x}dx=\int \frac{(e^x+2^x)(e^x-2^x)}{e^x+2^x}dx$

$\displaystyle=\int (e^x-2^x)dx$

$\displaystyle=e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+C$

(3) $\displaystyle\int 10^{1-3x}\,dx=-\frac{10^{1-3x}}{3\ln 10}+C$

(4) $\displaystyle\int \frac{8^x-2^x}{2^x+1}dx=\int \frac{2^x(2^x+1)(2^x-1)}{2^x+1}dx$

$\displaystyle=\int 2^x(2^x-1)dx$

$\displaystyle=\int (4^x-2^x)dx$

$\displaystyle=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+C$

375 정답 ②

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x\cos x-e^x\sin x-1$

$\therefore f(\pi)=e^\pi\cos\pi-e^\pi\sin\pi-1=-e^\pi-1$

376 정답 2

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}=2f'(1)$

이고, $f(x)=\displaystyle\int (x+\ln x)^2\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+\ln x)^2$

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=2\times1=2$

377 정답 $\frac{1}{2}$

$\displaystyle\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$이므로 $f(x)=e^x+k$

$f(x+1)=f(3x)$에서 $e^{x+1}+k=e^{3x}+k$이므로

$e^{x+1}=e^{3x}$, $x+1=3x$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$

378 정답 ③

$\displaystyle f(x)=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)dx$

$\displaystyle=\int\left(\frac{2}{x}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$

$=2\ln|x|-2x^{-\frac{1}{2}}+C$

$\displaystyle=2\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

379 정답 9

$f'(x)=\dfrac{9-x}{\sqrt{x}+3}$이므로

$\displaystyle f(x)=\int\frac{9-x}{\sqrt{x}+3}dx=\int\frac{(9-x)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}dx$

$\displaystyle=\int\frac{(9-x)(\sqrt{x}-3)}{x-9}dx=\int(3-\sqrt{x})dx$

$\displaystyle=\int(3-x^{\frac{1}{2}})dx=3x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=3x-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$이므로

$f(9)=27-\dfrac{2}{3}\times9\times3=9$

380 정답 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $\sqrt{1+x}$이므로

$f'(x)=\sqrt{1+x}$

$\displaystyle\therefore f(x)=\int\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(3, 5)$를 지나므로 $f(3)=5$

즉, $\dfrac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}}+C=5$에서 $C=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore f(x)=\dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{3}$

따라서 $f(0)=\dfrac{1}{3}$이므로 곡선이 y축과 만나는 점의 좌표는 $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$이다.

381 정답 ②

$f'(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}=x-\sqrt{x}$

$g'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1}=1-\sqrt{x}$

이므로

$\displaystyle f(x)=\int f'(x)dx=\int(x-\sqrt{x})dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C_1$

$\displaystyle g(x)=\int g'(x)dx=\int(1-\sqrt{x})dx$

$=x-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C_2$

$f(1)=g(1)$이므로

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+C_1=1-\dfrac{2}{3}+C_2$

따라서 $C_1=C_2+\dfrac{1}{2}$이므로

$f(3)-g(3)=\left(\dfrac{9}{2}-2\sqrt{3}+C_1\right)-(3-2\sqrt{3}+C_2)$

$=\dfrac{3}{2}+C_1-C_2=\dfrac{3}{2}+C_2+\dfrac{1}{2}-C_2=2$

다른 풀이

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{(x\sqrt{x}-\sqrt{x})-(1-x)}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=x-1$$

이므로

$$h(x)=\int h'(x)dx$$
$$=\int (x-1)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-x+C$$

$h(1)=f(1)-g(1)=0$이므로

$$\frac{1}{2}-1+C=0$$
$$\therefore C=\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$이므로

$$f(3)-g(3)=\frac{9}{2}-3+\frac{1}{2}=2$$

382 정답 ③

$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}+C_1 & (x<-1) \\ x^3+x+C_2 & (x>-1) \end{cases}$ (C_1, C_2는 적분상수)에서

$f(-2)=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}+C_1=\frac{1}{2}$에서 $\quad C_1=0$

$$\lim_{x\to -1-} f(x)=1,\ \lim_{x\to -1+} f(x)=-2+C_2$$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$1=-2+C_2$에서 $C_2=3$

$$\therefore f(0)=3$$

383 정답 ⑤

$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+C_1 & (x\le 1) \\ \ln x+C_2 & (x>1) \end{cases}$ (C_1, C_2는 적분상수)이고

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)$$

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} (e^{x-1}+C_1)=1+C_1$,

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} (\ln x+C_2)=C_2$이므로

$$1+C_1=C_2$$

$f(-1)=e+\frac{1}{e^2}$이므로 $\frac{1}{e^2}+C_1=e+\frac{1}{e^2}$에서

$$C_1=e,\ C_2=e+1$$
$$\therefore f(e)=\ln e+(e+1)=e+2$$

384 정답 12

$$\int (1+\cos x)^2 dx=\int (1+2\cos x+\cos^2 x)dx$$
$$=\int \left(1+2\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$=\int \left(\frac{3}{2}+2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=\frac{3}{2}x+2\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

따라서 $p=\frac{3}{2}$, $q=2$, $r=\frac{1}{4}$이므로

$$\frac{pq}{r}=\frac{\frac{3}{2}\times 2}{\frac{1}{4}}=12$$

385 정답 ⑤

$$f(x)=\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx=\int \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}dx$$
$$=\int (1+\sin x)dx=x-\cos x+C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$이므로 $\frac{\pi}{2}+C=\pi$에서

$$C=\frac{\pi}{2}$$

따라서 $f(x)=x-\cos x+\frac{\pi}{2}$이므로

$$f(\pi)=\pi+1+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi+1$$

386 정답 ②

$f'(x)=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}}$에서

$$\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin x}=\frac{2}{\sin x}$$

이므로 $f'(x)=\frac{1}{2}\sin x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{2}\sin x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\cos x+C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$이므로 $-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}+C=3$에서

$$C=3$$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}\cos x+3$이므로

$$f(\pi)=-\frac{1}{2}\cos\pi+3=\frac{7}{2}$$

387 정답 ①

$$f(x)=\int \frac{1}{1-x^2}\,dx=\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}(-\ln|1-x|+\ln|1+x|)+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서

$C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$이므로

$$f(2)=\frac{1}{2}\ln 3$$

연습문제 Ⅱ p.204

388 정답 ③

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x(x+1)}$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

따라서

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x+1|+C=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$$

이므로

$$f(3)-f(1)=\left(\ln\frac{3}{4}+C\right)-\left(\ln\frac{1}{2}+C\right)$$
$$=\ln\frac{3}{2}$$

389 정답 ④

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=e^x$의 양변을 적분하면

$$f(x)+g(x)=\int e^x\,dx=e^x+C_1\ (C_1\text{은 적분상수})$$

양변에 $x=0$을 대입하면

$1+0=1+C_1\qquad \therefore C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=e^x$ …… ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=e^{-x}$의 양변을 적분하면

$$f(x)-g(x)=-e^{-x}+C_2\ (C_2\text{는 적분상수})$$

양변에 $x=0$을 대입하면

$1-0=-1+C_2\qquad \therefore C_2=2$

$\therefore f(x)-g(x)=-e^{-x}+2$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})+1$

$$\therefore f(\ln 2)=\frac{1}{2}(2-2^{-1})+1=\frac{7}{4}$$

390 정답 ①

$x>0$에서 $f(x)=\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C_1$ (C_1은 적분상수)

$x<0$에서 $f(x)=\int 2\sin x\,dx=-2\cos x+C_2$

(C_2는 적분상수)이므로

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{2x}+C_1 & (x>0)\\ -2\cos x+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1$이므로 $-2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+C_2=1$

$-2\times\frac{1}{2}+C_2=1\qquad \therefore C_2=2$

이때, $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(-2\cos x+2)=-2+2=0$$
$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C_1\right)=\frac{1}{2}+C_1$$

에서 $\frac{1}{2}+C_1=0\qquad \therefore C_1=-\frac{1}{2}$

따라서 $x>0$일 때 $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}$이므로

$$f(1)=\frac{e^2-1}{2}$$

391 정답 16 .... 서술형

$f''(x)=\sin^2\frac{x}{2}$이므로

$$f'(x)=\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx=\int\frac{1-\cos x}{2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C_1\ (C_1\text{은 적분상수})$$

$f'(0)=0$이므로 $C_1=0$

즉, $f'(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x$이므로 … ①

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\cos x+C_2\ (C_2\text{는 적분상수})$$

$f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $\quad \frac{1}{2}+C_2=\frac{1}{2}\qquad \therefore C_2=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\cos x$이므로 … ②

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{16}$$

$\therefore k=16$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$f''(x)$를 적분하여 $f'(x)$ 구하기	40 %
②	$f'(x)$를 적분하여 $f(x)$ 구하기	40 %
③	상수 k의 값 구하기	20 %

12. 치환적분법과 부분적분법

유형 .... pp.209~216

001 정답 (1) $\dfrac{1}{9(1-3x)^3}+C$ (2) $\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{(6x+5)^2}+C$
(3) $\dfrac{1}{7}(x^2-3x+5)^7+C$

(1) $1-3x=t$로 놓으면

$$-3\,dx=dt,\ dx=-\frac{1}{3}\,dt$$

$$\therefore \int\frac{1}{(1-3x)^4}\,dx=\int\frac{1}{t^4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{3}\int t^{-4}\,dt=\frac{1}{9}\,t^{-3}+C$$
$$=\frac{1}{9(1-3x)^3}+C$$

(2) $6x+5=t$로 놓으면 $6\,dx=dt,\ dx=\dfrac{1}{6}\,dt$

$$\therefore \int\frac{1}{\sqrt[3]{6x+5}}\,dx=\int t^{-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{6}\,dt$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C$$
$$=\frac{1}{4}(6x+5)^{\frac{2}{3}}+C$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt[3]{(6x+5)^2}+C$$

(3) $x^2-3x+5=t$로 놓으면 $(2x-3)dx=dt$

$$\therefore \int(2x-3)(x^2-3x+5)^6\,dx=\int t^6\,dt$$
$$=\frac{1}{7}t^7+C$$
$$=\frac{1}{7}(x^2-3x+5)^7+C$$

002 정답 (1) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)+C$ (2) $\dfrac{1}{4}\sin^4 x+C$

(1) $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}=t$로 놓으면 $-\dfrac{1}{2}\,dx=dt$에서 $dx=-2\,dt$

$$\therefore \int\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)dx=\int\sin t\times(-2)dt$$
$$=-2\int\sin t\,dt=2\cos t+C$$
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)+C$$

(2) $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x\,dx=dt$

$$\therefore \int\sin^3 x\cos x\,dx=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$$

003 정답 (1) $e^{3x^2}+C$ (2) $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$

(1) $3x^2=t$로 놓으면 $6x\,dx=dt$

$$\therefore \int 6x\,e^{3x^2}\,dx=\int e^t\,dt=e^t+C=e^{3x^2}+C$$

(2) $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}\,dx=dt$

$$\therefore \int\frac{\ln x}{x}\,dx=\int\ln x\times\frac{1}{x}dx$$
$$=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

004 정답 (1) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+C$
(2) $-\ln|\cos x|+C$
(3) $\ln(e^{2x}+5)+C$

(1) $x^2-2x+2=t$로 놓으면 $(2x-2)dx=dt$이므로

$$(x-1)dx=\frac{1}{2}\,dt$$

$$\therefore \int\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx=\int\frac{1}{x^2-2x+2}\times(x-1)dx$$
$$=\int\frac{1}{t}\times\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{2}\ln|t|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+C$$
$$(\because\ x^2-2x+2>0)$$

(2) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$이므로 $\cos x=t$로 놓으면

$$-\sin x\,dx=dt,\ \text{즉}\ \sin x\,dx=-dt$$

$$\therefore \int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{1}{\cos x}\times\sin x\,dx$$
$$=\int\frac{1}{t}\times(-1)dt=-\int\frac{1}{t}\,dt$$
$$=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C$$

(3) $e^{2x}+5=t$로 놓으면 $2e^{2x}\,dx=dt$

$$\therefore \int\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+5}dx=\int\frac{1}{e^{2x}+5}\times 2e^{2x}\,dx$$
$$=\int\frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+C$$
$$=\ln|e^{2x}+5|+C=\ln(e^{2x}+5)+C$$
$$(\because\ e^{2x}+5>0)$$

005 정답 (1) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x}{x+2}\right|+C$
(2) $2\ln|x-1|-\ln|x|+C$

(1) $$\int\frac{1}{x(x+2)}dx=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{1}{x+2}dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\ln|x|-\ln|x+2|)+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$$

12강

(2) $\dfrac{x+1}{x(x-1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}$라 두고 양변에 분모의 최소공배수인 $x(x-1)$을 곱하면

$$x+1=a(x-1)+bx=(a+b)x-a$$

양변의 계수를 비교하면 $a+b=1$, $-a=1$이므로

$$a=-1,\ b=2$$

따라서 $\dfrac{x+1}{x(x-1)}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{x+1}{x(x-1)}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=2\ln|x-1|-\ln|x|+C$$

006 정답 (1) $x\sin x+\cos x+C$ (2) $x\ln x-x+C$

(1) $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$$f'(x)=1,\ g(x)=\sin x$$
$$\therefore \int x\cos x\,dx=x\sin x-\int 1\times\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x$$
$$\therefore \int\ln x\,dx=\int\ln x\times 1\,dx$$
$$=x\ln x-\int\frac{1}{x}\times x\,dx$$
$$=x\ln x-x+C$$

007 정답 (1) $(x^2-2x+2)e^x+C$

(2) $\dfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

(1) $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-\int(2x)e^x\,dx$$

$u(x)=2x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int 2xe^x\,dx=2xe^x-\int 2e^x\,dx=2xe^x-2e^x+C_1$$

(단, C_1은 적분상수)

$$\therefore \int x^2e^x\,dx=x^2e^x-(2xe^x-2e^x+C_1)$$
$$=(x^2-2x+2)e^x+C$$

(2) $f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$

$\int e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$ 이므로

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x-\int(-\sin x)e^x\,dx$$
$$=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx+C_1$$

(단, C_1은 적분상수)

$$\therefore \int e^x\sin x\,dx$$
$$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx-C_1$$

따라서 $I=\int e^x\sin x\,dx$로 놓으면

$$I=e^x\sin x-e^x\cos x-I-C_1$$
$$\therefore I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

확인문제 pp.209~216

392 정답 (1) $\dfrac{2}{9}(x^3-3x)\sqrt{x^3-3x}+C$

(2) $\dfrac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$

(1) $x^3-3x=t$로 놓으면 $(3x^2-3)dx=dt$

$$\therefore \int(x^2-1)\sqrt{x^3-3x}\,dx$$
$$=\int 3(x^2-1)\sqrt{x^3-3x}\times\frac{1}{3}\,dx$$
$$=\int\sqrt{t}\times\frac{1}{3}\,dt=\frac{2}{9}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{9}(x^3-3x)\sqrt{x^3-3x}+C$$

(2) $x^2+1=t$로 놓으면 $2x\,dx=dt$

$$\therefore \int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int 2x\sqrt{x^2+1}\times\frac{1}{2}\,dx=\int\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$$

393 정답 (1) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$

(2) $\dfrac{1}{10}\sqrt{(2x+1)^5}-\dfrac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3}+C$

(1) $\sqrt{x+1}=t$로 놓으면 $x+1=t^2$에서 $x=t^2-1$이므로

$dx=2t\,dt$

$$\therefore \int\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int\frac{t^2-1}{t}\times 2t\,dt$$
$$=\int(2t^2-2)dt$$
$$=\frac{2}{3}t^3-2t+C$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$$

(2) $\sqrt{2x+1}=t$로 놓으면 $2x+1=t^2$에서 $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$이므로

$2\,dx=2t\,dt$, 즉 $dx=t\,dt$

$$\therefore \int x\sqrt{2x+1}\,dx=\int \frac{1}{2}(t^2-1)t\times t\,dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{2}t^2\right)dt$$
$$=\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{6}t^3+C$$
$$=\frac{1}{10}\sqrt{(2x+1)^5}-\frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3}+C$$

394 정답 (1) $-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

(2) $\frac{1}{4}(1+\sin x)^4+C$

(3) $\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

(1) $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x\,dx=dt$

$$\therefore \int \cos^2 x\sin x\,dx=-\int \cos^2 x\times(-\sin x)dx$$
$$=-\int t^2\,dt=-\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

(2) $1+\sin x=t$로 놓으면 $\cos x\,dx=dt$

$$\therefore \int (1+\sin x)^3\cos x\,dx=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{4}(1+\sin x)^4+C$$

(3) $\tan x=t$로 놓으면 $\sec^2 x\,dx=dt$

$$\therefore \int \tan x\sec^2 x\,dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$$

395 정답 (1) $\sin(2x^2-3x)+C$

(2) $-\frac{1}{3}\cos x^3+C$

(3) $-\frac{1}{3}\cos^3 x+\cos^2 x+C$

(1) $2x^2-3x=t$로 놓으면 $(4x-3)dx=dt$

$$\therefore \int (4x-3)\cos(2x^2-3x)dx=\int \cos t\,dt$$
$$=\sin t+C$$
$$=\sin(2x^2-3x)+C$$

(2) $x^3=t$로 놓으면 $3x^2\,dx=dt$

$$\therefore \int x^2\sin x^3\,dx=\int \sin t\times\frac{1}{3}\,dt$$
$$=-\frac{1}{3}\cos t+C$$
$$=-\frac{1}{3}\cos x^3+C$$

(3) $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x\,dx=dt$이므로

$\sin x\,dx=-dt$

$$\therefore \int (\cos^2 x-2\cos x)\sin x\,dx$$
$$=\int (t^2-2t)(-dt)=\int(-t^2+2t)dt$$
$$=-\frac{1}{3}t^3+t^2+C$$
$$=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\cos^2 x+C$$

396 정답 (1) $2e^{\sqrt{x}}+C$ (2) $\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x-1}}+C$

(3) $\frac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1}+C$

(1) $\sqrt{x}=t$로 놓으면 $x=t^2$이므로

$dx=2t\,dt$

$$\therefore \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\int\frac{e^t}{t}\times 2t\,dt=\int 2e^t\,dt=2e^t+C$$
$$=2e^{\sqrt{x}}+C$$

(2) $\sqrt{3x-1}=t$로 놓으면 $3x-1=t^2$이므로

$3\,dx=2t\,dt$, $dx=\frac{2}{3}t\,dt$

$$\therefore \int\frac{e^{\sqrt{3x-1}}}{\sqrt{3x-1}}\,dx=\int\frac{e^t}{t}\times\frac{2}{3}t\,dt$$
$$=\int\frac{2}{3}e^t\,dt=\frac{2}{3}e^t+C$$
$$=\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x-1}}+C$$

(3) $e^x+1=t$로 놓으면 $e^x\,dx=dt$

$$\therefore \int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1}+C$$

397 정답 (1) $\frac{1}{4}(\ln x)^4+C$ (2) $-\cos(\ln x)+C$

(3) $\frac{1}{6}\{\ln(3x+1)\}^2+C$

(1) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}\,dx=dt$

$$\therefore \int\frac{(\ln x)^3}{x}\,dx=\int(\ln x)^3\times\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C$$

(2) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}\,dx=dt$

$$\therefore \int\frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx=\int\sin(\ln x)\times\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\int\sin t\,dt=-\cos t+C$$
$$=-\cos(\ln x)+C$$

12강

(3) $\ln(3x+1)=t$로 놓으면

$$\frac{3}{3x+1}dx=dt\text{에서 }\frac{1}{3x+1}dx=\frac{1}{3}dt$$

$$\therefore \int\frac{\ln(3x+1)}{3x+1}dx=\int\ln(3x+1)\times\frac{1}{3x+1}dx$$
$$=\int t\times\frac{1}{3}dt=\frac{1}{6}t^2+C$$
$$=\frac{1}{6}\{\ln(3x+1)\}^2+C$$

398

정답 (1) $\ln|\sin x|+C$
(2) $\ln(e^x+1)+C$
(3) $\ln|x^2+\cos x|+C$

(1) $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x\,dx=dt$

$$\therefore \int\cot x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$$
$$=\int\frac{1}{\sin x}\times\cos x\,dx$$
$$=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$$
$$=\ln|\sin x|+C$$

(2) $e^x+1=t$로 놓으면 $e^x\,dx=dt$

$$\therefore \int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{1}{e^x+1}\times e^x\,dx$$
$$=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$$
$$=\ln|e^x+1|+C$$
$$=\ln(e^x+1)+C\ (\because e^x+1>0)$$

(3) $x^2+\cos x=t$로 놓으면 $(2x-\sin x)dx=dt$

$$\therefore \int\frac{2x-\sin x}{x^2+\cos x}dx$$
$$=\int\frac{1}{x^2+\cos x}\times(2x-\sin x)dx$$
$$=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$$
$$=\ln|x^2+\cos x|+C$$

399

정답 $\frac{3}{4}$

$e^x-2=t$로 놓으면 $e^x\,dx=dt$이므로

$$f(x)=\int(e^x-2)^3\times e^x\,dx=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{4}(e^x-2)^4+C$$

$f(0)=1$이므로 $\frac{1}{4}(1-2)^4+C=1$에서

$$\frac{1}{4}+C=1\qquad\therefore C=\frac{3}{4}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(e^x-2)^4+\frac{3}{4}$이므로

$$f(\ln 2)=\frac{1}{4}(e^{\ln 2}-2)^4+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

400

정답 (1) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$
(2) $\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right|+C$

(1) $$\int\frac{1}{(x+1)(x-1)}dx=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

(2) $x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$이므로

$$\frac{2}{x^2+6x+8}=\frac{2}{(x+2)(x+4)}$$
$$=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}$$

$$\therefore \int\frac{2}{x^2+6x+8}dx=\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)dx$$
$$=\ln|x+2|-\ln|x+4|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right|+C$$

401

정답 (1) $\ln\left|\frac{x^3}{(x+1)^2}\right|+C$
(2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-3)^5}{(x-1)^3}\right|+C$

(1) $\frac{x+3}{x^2+x}=\frac{x+3}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$라 두고 양변에 분모의 최소공배수인 $x(x+1)$을 곱하면

$$x+3=a(x+1)+bx=(a+b)x+a$$

양변의 계수를 비교하면 $a+b=1$, $a=3$이므로 $b=-2$

$$\therefore \int\frac{x+3}{x(x+1)}dx=\int\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$=3\ln|x|-2\ln|x+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x^3}{(x+1)^2}\right|+C$$

(2) $\frac{x+2}{(x-1)(x-3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-3}$라 두고 양변에 분모의 최소공배수인 $(x-1)(x-3)$을 곱하면

$$x+2=a(x-3)+b(x-1)=(a+b)x-3a-b$$

양변의 계수를 비교하면

$$a+b=1,\ -3a-b=2$$

연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{5}{2}$

$$\therefore \int\frac{x+2}{(x-1)(x-3)}dx$$
$$=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{5}{2}\int\frac{1}{x-3}dx$$
$$=-\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-3)^5}{(x-1)^3}\right|+C$$

402 정답 (1) $(2-x)e^x+C$

(2) $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

(3) $-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$

(1) $f(x)=1-x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=-1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int(1-x)e^x\,dx=(1-x)e^x-\int(-1)\times e^x\,dx$$
$$=(1-x)e^x+e^x+C$$
$$=(2-x)e^x+C$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\therefore \int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

(3) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin 3x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x$

$$\therefore \int x\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\int\frac{1}{3}\cos 3x\,dx$$
$$=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$$

403 정답 (1) $(x+1)\ln(x+1)-x+C$

(2) $\frac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln x-2)+C$

(1) $f(x)=\ln(x+1)$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x+1}$, $g(x)=x$

$$\therefore \int\ln(x+1)dx$$
$$=\int\ln(x+1)\times 1\,dx$$
$$=x\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}\,dx$$
$$=x\ln(x+1)-\int\frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$
$$=x\ln(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C$$
$$=(x+1)\ln(x+1)-x+C$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\sqrt{x}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore \int\sqrt{x}\ln x\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x-\int\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln x-2)+C$$

404 정답 (1) $(x^2-2x-1)e^x+C$

(2) $2x\sin x+(2-x^2)\cos x+C$

(1) $f(x)=x^2-3$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int(x^2-3)e^x\,dx=e^x(x^2-3)-\int e^x\times 2x\,dx$$
$$=(x^2-3)e^x-2\int xe^x\,dx$$

$\int xe^x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C_1$$

(단, C_1은 적분상수)

$$\therefore \int(x^2-3)e^x\,dx=(x^2-3)e^x-2\int xe^x\,dx$$
$$=(x^2-3)e^x-2(xe^x-e^x)+C$$
$$=(x^2-2x-1)e^x+C$$

(2) $f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x-\int 2x\times(-\cos x)dx$$

$u(x)=2x$, $v'(x)=-\cos x$로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=-\sin x$이므로

$$\int 2x\times(-\cos x)dx$$
$$=2x\times(-\sin x)-\int 2\times(-\sin x)dx$$
$$=-2x\sin x+\int 2\sin x\,dx$$
$$=-2x\sin x-2\cos x+C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수)}$$

$$\therefore \int x^2\sin x\,dx$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$$
$$=2x\sin x+(2-x^2)\cos x+C$$

12강

405 정답 $f(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$

$h(x)=\cos x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$h'(x)=-\sin x$, $g(x)=e^x$이므로

$$f(x)=\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x-\int e^x\times(-\sin x)dx$$
$$=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\ \cdots\cdots\ ㉠$$

$\int e^x\sin x\,dx$에서 $u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$
$$=e^x\sin x-f(x)+C_1\ \cdots\cdots\ ㉡$$

(단, C_1은 적분상수)

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=e^x\cos x+e^x\sin x-f(x)+C_1$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$이고

$f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}$에서

$C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$

연습문제 I .... pp.217~219

406 정답 $\frac{1}{2}(x^2+3)^2+C$

$x^2+3=t$로 놓으면 $2x\,dx=dt$

$$\therefore \int 2x(x^2+3)\,dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+3)^2+C$$

407 정답 $-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$

$x^2+1=t$로 놓으면 $2x\,dx=dt$

$$\therefore \int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\times 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int t^{-2}\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}t^{-1}+C$$
$$=-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$$

408 정답 ①

$6x-x^3=t$로 놓으면 $(6-3x^2)dx=dt$

$$\therefore f(x)=\int\frac{x^2-2}{\sqrt{6x-x^3}}\,dx$$
$$=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{6x-x^3}}\times(6-3x^2)dx$$
$$=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=-\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=-\frac{1}{3}\times 2t^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{t}+C$$
$$=-\frac{2}{3}\sqrt{6x-x^3}+C$$

$f(2)=-\frac{4}{3}$이므로 $-\frac{2}{3}\times 2+C=-\frac{4}{3}$에서

$C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{6x-x^3}$이므로

$$f(-3)=-\frac{2}{3}\sqrt{6\times(-3)-(-3)^3}$$
$$=-\frac{2}{3}\sqrt{-18+27}$$
$$=-2$$

409 정답 ③

$2+\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x\,dx=dt$이므로

$$f(x)=\int(2+\cos x)^3\sin x\,dx$$
$$=-\int(2+\cos x)^3(-\sin x)dx$$
$$=-\int t^3\,dt=-\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=-\frac{1}{4}(2+\cos x)^4+C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 $-4+C=0$에서 $C=4$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}(2+\cos x)^4+4$이므로

$$f(\pi)=-\frac{1}{4}+4=\frac{15}{4}$$

410 정답 ⑤

$x^2+1=t$로 놓으면 $2x\,dx=dt$이므로

$$f(x)=\int xe^{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2+1}\times 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int e^t\,dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C$$

$f(0)=e$이므로 $\frac{1}{2}e+C=e$에서 $C=\frac{1}{2}e$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+\frac{1}{2}e$이므로

$$f(1)=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e=\frac{1}{2}e(e+1)$$

411 정답 ①

$\ln x = t$로 놓으면 $\frac{1}{x}\,dx = dt$이므로

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{(\ln x)^4}{3x}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{3}t^4\,dt = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}t^5 + C$$
$$= \frac{1}{15}(\ln x)^5 + C$$

$f(e) = 1$이므로 $\frac{1}{15}(\ln e)^5 + C = 1$에서 $C = \frac{14}{15}$

따라서 $f(x) = \frac{1}{15}(\ln x)^5 + \frac{14}{15}$이므로

$$f(e^2) = \frac{1}{15}(\ln e^2)^5 + \frac{14}{15} = \frac{46}{15}$$

412 정답 (가) : $\cos^2 x$, (나) : $\tan x$, (다) : $\sec x$

주어진 식의 분자, 분모에 $(1-\sin x)$를 곱하면

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx$$
$$= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin x}{\underbrace{\cos^2 x}_{\text{(가)}}}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int \sec^2 x\,dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \underbrace{\tan x}_{\text{(나)}} - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

한편, $-\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$에서 $\cos x = t$로 놓으면

$(-\sin x)dx = dt$

$$-\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + C$$
$$= -\frac{1}{\cos x} + C$$
$$= -\underbrace{\sec x}_{\text{(다)}} + C$$

413 정답 $\ln 5$

원점을 지나는 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $\frac{2x}{1+x^2}$이므로 $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$이다.

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
$$= \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = \ln|1+x^2| + C$$

이때 $1+x^2 > 0$이므로

$$f(x) = \ln(1+x^2) + C$$

곡선 $y = f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0) = 0$에서

$$\ln 1 + C = 0 \qquad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \ln(1+x^2)$이므로

$$f(2) = \ln(1+4) = \ln 5$$

414 정답 ⑤

$(2x^2 - 8x + 7)' = 4x - 8$이므로

$$f(x) = \int \frac{x-2}{2x^2-8x+7}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x-8}{2x^2-8x+7}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{(2x^2-8x+7)'}{2x^2-8x+7}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2-8x+7| + C$$

$f(1) = 0$이므로 $\frac{1}{4}\ln 1 + C = 0$에서 $\qquad C = 0$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4}\ln|2x^2-8x+7|$이므로

$$f(-1) = \frac{1}{4}\ln 17$$

415 정답 ①

$f'(x) = x\cos 3x$이므로

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int x\cos 3x\,dx$$

$u(x) = x$, $v'(x) = \cos 3x$로 놓으면

$u'(x) = 1$, $v(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$이므로

$$f(x) = \int x\cos 3x\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$$

$f(0) = \frac{1}{9}$이므로 $\frac{1}{9} + C = \frac{1}{9}$에서 $C = 0$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{6} \times 1 + \frac{1}{9} \times 0 = \frac{\pi}{18}$$

416 정답 ③

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (x+1)e^{3x}\,dx$이므로

$u(x) = x+1$, $v'(x) = e^{3x}$으로 놓으면

$u'(x) = 1$, $v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$

$$\therefore f(x) = \int (x+1)e^{3x}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}(x+1)e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$
$$= \frac{1}{3}xe^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x} + C$$

$f(0) = \frac{2}{9}$이므로 $\frac{2}{9} + C = \frac{2}{9} \qquad \therefore C = 0$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}xe^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x}$이므로

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}e + \frac{2}{9}e = \frac{1}{3}e$$

417 정답 $2(e+1)$

$F(x)=xf(x)-x^2e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-(2xe^x+x^2e^x)$$

$$xf'(x)=xe^x(2+x) \qquad \therefore f'(x)=e^x(x+2)$$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x+2)e^x dx$$

$u(x)=x+2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$f(x)=(x+2)e^x-\int e^x dx$$

$$=e^x(x+2)-e^x+C=(x+1)e^x+C$$

$f(0)=3$이므로 $1+C=3 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=(x+1)e^x+2$이므로

$$f(1)=e(1+1)+2=2(e+1)$$

418 정답 0

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{1}{x\ln x}$에서 $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}dx=dt$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{1}{\ln x}\times\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{t}dt$$

$$=\ln|t|+C=\ln|\ln x|+C$$

$f(e)=0$이므로 $\ln|\ln e|+C=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\ln|\ln x|$이므로 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\ln|-1|=0$

419 정답 ④

$f'(x)=e^{-x}\sin x$이므로

$g(x)=\sin x$, $h'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$$g'(x)=\cos x,\ h(x)=-e^{-x}$$

$$\therefore f(x)=\int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx \ \cdots\cdots ㉠$$

$\int e^{-x}\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^{-x}$로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx$$

$$=-e^{-x}\cos x-f(x)$$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-f(x)$$

$$=-e^{-x}(\sin x+\cos x)-f(x)$$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$$

$f(0)=0$이므로 $-\dfrac{1}{2}+C=0$에서 $C=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+\dfrac{1}{2}$이므로

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{1}{2}$$

420 정답 ②

$\int x^3f(x)dx=\int x^2\times xf(x)dx$이므로

$u(x)=x^2$, $v'(x)=xf(x)$로 놓으면

$u'(x)=2x$, $v(x)=\int xf(x)dx=g(x)$

$$\therefore \int x^3f(x)dx=x^2g(x)-\int 2xg(x)dx$$

$$=x^2g(x)-2\int xg(x)dx$$

$$=x^2g(x)-2h(x)+C$$

421 정답 ①

$$f(x)=\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx=\int\left(\frac{e^x}{e^x-1}+\frac{1}{e^x-1}\right)dx$$

$$=\int\frac{e^x}{e^x-1}dx+\int\frac{1}{e^x-1}dx \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\int\frac{e^x}{e^x-1}dx=\int\frac{(e^x-1)'}{e^x-1}dx=\ln|e^x-1|+C_1 \quad\cdots\cdots ㉡$$

(단, C_1은 적분상수)

$\int\dfrac{1}{e^x-1}dx$에서 $e^x-1=t$로 놓으면

$e^x dx=dt$, $e^x=t+1$

$$\therefore \int\frac{1}{e^x-1}dx=\int\frac{1}{t}\times\frac{1}{t+1}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln|t|-\ln|t+1|+C_2$$

$$=\ln|e^x-1|-\ln|e^x|+C_2 \quad\cdots\cdots ㉢$$

(단, C_1은 적분상수)

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx$$

$$=\ln|e^x-1|+\ln|e^x-1|-\ln|e^x|+C$$

$$=2\ln|e^x-1|-x+C$$

$f(\ln 2)=-\ln 2$이므로 $-\ln 2+C=-\ln 2$에서

$C=0$

$\therefore f(x)=2\ln|e^x-1|-x$

$f(x)+x=0$에서 $2\ln|e^x-1|-x+x=0$

따라서 $\ln|e^x-1|=0$이므로 $e^x-1=1$, $e^x=2 \qquad \therefore x=\ln 2$

422 정답 1

$f(x)=\dfrac{d}{dx}\{xf(x)+x^2e^{-x}\}=f(x)+xf'(x)+2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

이므로 $x\neq 0$일 때

$$f'(x)=-2e^{-x}+xe^{-x}=(x-2)e^{-x}$$

$f(x)=\int(x-2)e^{-x}dx$에서

$u(x)=x-2$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=-e^{-x}$이므로

$$f(x)=-(x-2)e^{-x}+\int e^{-x}\,dx$$
$$=-(x-2)e^{-x}-e^{-x}+C=(1-x)e^{-x}+C$$

$f(-1)=2e$이므로 $2e+C=2e$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=(1-x)e^{-x}\ (x\neq 0)$이고, $f(x)$가 실수 전체에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0}(1-x)e^{-x}=e^0=1$$

423 정답 -1 서술형

(ⅰ) $x>0$일 때

$\cos^3 x=\cos^2 x\cos x=(1-\sin^2 x)\cos x$이므로

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x\,dx=dt$

$$\therefore \int \cos^3 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$=\int(1-t^2)dt=t-\frac{1}{3}t^3+C_1$$
$$=-\frac{1}{3}\sin^3 x+\sin x+C_1$$

(단, C_1은 적분상수)

(ⅱ) $x<0$일 때

$$\int(-k\sin x)dx=k\cos x+C_2 \text{ (단, } C_2\text{는 적분상수)}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}\sin^3 x+\sin x+C_1 & (x>0)\\ k\cos x+C_2 & (x<0)\end{cases} \qquad \cdots ①$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로 $-\frac{1}{3}+1+C_1=1$에서 $C_1=\frac{1}{3}$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{3}$이므로 $C_2=\frac{4}{3}$ $\qquad \cdots ②$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}\sin^3 x+\sin x+\frac{1}{3} & (x>0)\\ k\cos x+\frac{4}{3} & (x<0)\end{cases}$$

따라서 $f(x)$가 연속함수가 되기 위해서는 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x),\ \frac{1}{3}=k+\frac{4}{3}$$

$\therefore k=-1$ $\qquad \cdots ③$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$f'(x)$를 적분하여 $f(x)$ 구하기	40%
②	적분상수의 값 구하기	40%
③	$f(x)$가 연속일 조건을 이용하여 실수 k의 값 구하기	20%

13. 여러 가지 함수의 정적분

유형 pp.224~233

001 정답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{1}{2}e^2-\frac{5}{2}$ (3) $-\frac{1}{3}$

(1) $\int_1^2 \frac{3}{x^2}\,dx=3\int_1^2 x^{-2}\,dx=3\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$

$$=3\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}$$

(2) $\int_1^e \frac{x^2-2}{x}\,dx=\int_1^e\left(x-\frac{2}{x}\right)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-2\ln|x|\right]_1^e$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^2-2\ln e\right)-\left(\frac{1}{2}-2\ln 1\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{5}{2}$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\,dx=\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{3}{2}\pi-\sin 0\right)$$
$$=\frac{1}{3}(-1-0)=-\frac{1}{3}$$

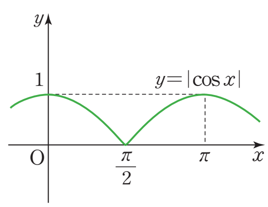
002 정답 $\ln 3$

$x^2+3=t$로 놓으면 $2x\,dx=dt$

$x=1$일 때 $t=4$, $x=3$일 때 $t=12$이므로

$$\int_1^3 \frac{2x}{x^2+3}\,dx=\int_1^3\frac{1}{x^2+3}\times 2x\,dx=\int_4^{12}\frac{1}{t}\,dt$$
$$=\Big[\ln t\Big]_4^{12}=\ln 12-\ln 4=\ln 3$$

003 정답 2



$\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ -\cos x & \left(\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\,dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0+\left(-\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=1+1=2$$

13강

004 정답 $\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}$

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore \int_1^{e^2} x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}\,dx$$
$$=e^4-\int_1^{e^2}\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=e^4-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^{e^2}$$
$$=e^4-\left(\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}$$

005 정답 3

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)$$

$f(x)=e^x+3x+2$이므로

$$f(0)=1+2=3$$

006 정답 $2\pi-2$

$$F(\pi)=\int_0^\pi t\cos t\,dt$$
$$=\Big[t\sin t\Big]_0^\pi-\int_0^\pi \sin t\,dt$$
$$=0-\Big[-\cos x\Big]_0^\pi$$
$$=\cos\pi-\cos 0=-2$$

$F'(x)=f(x)=x\cos x$이므로

$$F'(2\pi)=2\pi\cos 2\pi=2\pi$$
$$\therefore F(\pi)+F'(2\pi)=-2+2\pi=2\pi-2$$

007 정답 1

$\int_0^2 f(x)dx=k$ (k는 실수)로 놓으면 $f(x)=e^x+k$이므로

$$k=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(e^x+k)dx$$
$$=\Big[e^x+kx\Big]_0^2=e^2+2k-1$$

따라서 $k=1-e^2$이므로

$$f(x)=e^x+1-e^2$$
$$\therefore f(2)=e^2+1-e^2=1$$

008 정답 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{4}$

(1) $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$dx=\cos\theta\,d\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\times\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos2\theta+1)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin2\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

(2) $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$dx=\sec^2\theta\,d\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

009 정답 (1) 16 (2) $\frac{\pi}{2}+2$

(1) $\int_{-2}^2(x^3+3x^2+2x)dx$

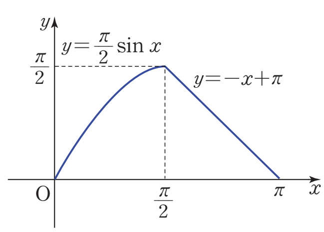
$$=\int_{-2}^2x^3\,dx+3\int_{-2}^2x^2\,dx+2\int_{-2}^2x\,dx$$
$$=6\int_0^2x^2\,dx=6\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=6\times\frac{8}{3}=16$$

(2) $y=\sin x$는 기함수이고, $y=\sin^2x$, $y=\cos x$는 우함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\sin^2x+\cos x)dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2x}{2}\,dx+2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left[x-\frac{1}{2}\sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\left(\sin\frac{\pi}{2}-0\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}+2$$

010 정답 $5\pi+\frac{5}{4}\pi^2$

$0\le x\le\pi$에서 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}(0+1)=\frac{\pi}{2}$$
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-x+\pi)dx=\Big[-\frac{1}{2}x^2+\pi x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=\Big(-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2\Big)-\Big(-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{2}\Big)=\frac{\pi^2}{8}$$

함수 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이므로

$$\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx=\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx=\cdots$$
$$\therefore \int_0^{10\pi} f(x)dx=10\int_0^{\pi} f(x)dx$$
$$=10\Big\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx\Big\}$$
$$=10\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{8}\Big)$$
$$=5\pi+\frac{5}{4}\pi^2$$

확인문제 pp.224~233

424 정답 (1) 6 (2) $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ (3) π

(1) $\int_1^{16}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^{16}x^{-\frac{1}{2}}dx=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{16}=8-2=6$

(2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\Big(\frac{1}{\sin^2 x}-\sin x\Big)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\csc^2 x-\sin x)dx$

$$=\Big[-\cot x+\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\Big(-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\Big)-\Big(-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

(3) $\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\Big)dx$

$$=\Big[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{2\pi}$$
$$=\Big(\pi-\frac{1}{4}\sin 4\pi\Big)-(0-0)$$
$$=\pi$$

425 정답 ④

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin x+\cos x)^2dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^0(\sin x-\cos x)^2dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin x+\cos x)^2dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin x-\cos x)^2dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\{(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2\}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\sin x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\sin 2x\,dx$$
$$=\Big[-\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\Big(-\cos\frac{\pi}{3}\Big)-(-\cos 0)$$
$$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

426 정답 (1) $\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$ (2) e^4-1 (3) $\frac{3}{2}$ (4) $\ln 2$

(1) $x^2+1=t$로 놓으면 $2x\,dx=dt$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{x^2+1}\times 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^5\sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_1^5$$
$$=\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$$

(2) $x^2=t$로 놓으면 $2x\,dx=dt$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^2 2x\,e^{x^2}dx=\int_0^2 e^{x^2}\times 2x\,dx=\int_0^4 e^t\,dt$$
$$=\Big[e^t\Big]_0^4=e^4-1$$

(3) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}dx=dt$

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\int_e^{e^2}\ln x\times\frac{1}{x}dx=\int_1^2 t\,dt$$
$$=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_1^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

(4) $1+\cos x=t$로 놓으면 $(-\sin x)dx=dt$

$x=0$일 때 $t=1+\cos 0=2$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때

$t=1+\cos\frac{\pi}{2}=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}\times(-\sin x)dx$$
$$=-\int_2^1\frac{1}{t}dt=\int_1^2\frac{1}{t}dt$$
$$=\Big[\ln t\Big]_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

427 정답 25

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^5 x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x(1+\tan^2 x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\sec^2 x\,dx$$

$\tan x=t$로 놓으면 $\sec^2 x\,dx=dt$

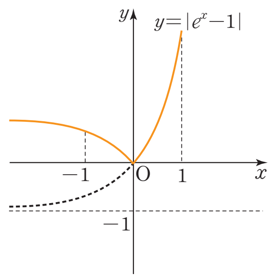
$x=0$일 때 $t=\tan 0=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로

$$\alpha=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\sec^2 x\,dx$$
$$=\int_0^1 t^3\,dt=\Big[\frac{1}{4}t^4\Big]_0^1=\frac{1}{4}$$

$\therefore 100\alpha=25$

428 정답 $e+\frac{1}{e}-2$

$e^x-1=0$에서 $x=0$이므로 $y=|e^x-1|$의 그래프는 다음과 같다.



$$\therefore \int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}\{-(e^x-1)\}dx+\int_{0}^{1}(e^x-1)dx$$
$$=-\int_{-1}^{0}(e^x-1)dx+\int_{0}^{1}(e^x-1)dx$$
$$=-\Big[e^x-x\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^x-x\Big]_{0}^{1}$$
$$=-(e^0-0)+\{e^{-1}-(-1)\}+(e^1-1)-(e^0-0)$$
$$=e+\frac{1}{e}-2$$

429 정답 $-\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}-2$

$\frac{1}{2}-\sin x=0$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x\le\pi$일 때 $\sin x\le\frac{1}{2}$,

$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$일 때 $\sin x\ge\frac{1}{2}$이므로

$$\int_{0}^{\pi}\left|\frac{1}{2}-\sin x\right|dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)dx+\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x+\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}-\left[\frac{1}{2}x+\cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}+\left[\frac{1}{2}x+\cos x\right]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}$$
$$=\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)-\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-1-\frac{5}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}-2$$

430 정답 (1) $1-\frac{2}{e}$ (2) π (3) $\frac{1}{2}(e^2+1)$

(1) $\int_{0}^{1}\frac{x}{e^x}dx=\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$에서

$f(x)=x,\ g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=-e^{-x}$

$$\therefore \int_{0}^{1}\frac{x}{e^x}dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}(-e^{-x})dx$$
$$=(-e^{-1}-0)-\Big[e^{-x}\Big]_{0}^{1}$$
$$=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}$$

(2) $f(x)=x,\ g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=-\cos x$

$$\therefore \int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx$$
$$=\pi+\Big[\sin x\Big]_{0}^{\pi}=\pi$$

(3) $\int_{1}^{e}x\ln x^2\,dx=\int_{1}^{e}2x\ln|x|\,dx=2\int_{1}^{e}x\ln x\,dx$

$f(x)=\ln x,\ g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\therefore 2\int_{1}^{e}x\ln x\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{1}^{e}-2\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2\,dx$$
$$=2\left(\frac{1}{2}e^2\ln e-\frac{1}{2}\ln 1\right)-2\int_{1}^{e}\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=e^2-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{e}=e^2-\frac{1}{2}(e^2-1)$$
$$=\frac{1}{2}(e^2+1)$$

431 정답 (1) $e-2$ (2) $1-\frac{2}{e}$ (3) $e^2-\frac{2}{e}+2$

(1) $f(x)=x^2,\ g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x,\ g(x)=e^x$이므로

$$\int_{0}^{1}x^2e^x\,dx=\Big[x^2e^x\Big]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}2x\,e^x\,dx$$
$$=e-2\int_{0}^{1}xe^x\,dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_{0}^{1}xe^x\,dx$에서 $u(x)=x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$이므로

$$\int_{0}^{1}xe^x\,dx=\Big[xe^x\Big]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^x\,dx$$
$$=e-\Big[e^x\Big]_{0}^{1}$$
$$=e-(e-1)=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_{0}^{1}x^2e^x\,dx=e-2$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=-\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\times\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=-\frac{\ln e}{e}+\int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$=-\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$
$$=-\frac{1}{e}+\left(-\frac{1}{e}+1\right)=1-\frac{2}{e}$$

(3) $0\le x\le 2$일 때 $|x|=x$이고, $-1\le x\le 0$일 때 $|x|=-x$이므로

$$\int_{-1}^2 |x|e^x\,dx=\int_{-1}^0(-xe^x)\,dx+\int_0^2 xe^x\,dx$$
$$=-\left[xe^x\right]_{-1}^0+\int_{-1}^0 e^x\,dx+\left[xe^x\right]_0^2-\int_0^2 e^x\,dx$$
$$=-(0+e^{-1})+(e^0-e^{-1})+(2e^2-0)-(e^2-e^0)$$
$$=e^2-\frac{2}{e}+2$$

432 정답 1

$f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$로 놓고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_0^x f(t)dt=\Big[F(t)\Big]_0^x=F(x)-F(0)$$
$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)=1$$

433 정답 50

$\{f(t)\}^2f'(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x\{f(t)\}^2f'(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^x$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)$$
$$=\{f(1)\}^2f'(1)$$
$$=5^2\times2=50$$

434 정답 (1) $f'(x)=2x-\cos 3x$

(2) $f'(x)=e^{x^2}+\ln x$

(3) $f'(x)=|e^{3x}-2x^2|$

(1) $f(x)=\displaystyle\int_1^x(2t-\cos 3t)dt$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2x-\cos 3x$

(2) $f(x)=\displaystyle\int_e^x(e^{t^2}+\ln t)dt$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=e^{x^2}+\ln x$

(3) $f(x)=\displaystyle\int_0^x|e^{3t}-2t^2|dt$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=|e^{3x}-2x^2|$

435 정답 ①

$f(x)=\displaystyle\int_1^x(t+\ln t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x+\ln x$

$$\therefore \lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x^2-e^2}=\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{(x+e)(x-e)}$$
$$=\lim_{x\to e}\frac{1}{x+e}\times\frac{f(x)-f(e)}{x-e}$$
$$=\frac{1}{2e}f'(e)=\frac{1}{2e}(e+\ln e)$$
$$=\frac{1}{2e}(e+1)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2e}$$

436 정답 ③

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=k$ (k는 실수)로 놓으면 $f(x)=\sin x+k$이므로

$$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+k)dt$$
$$=\Big[-\cos t+kt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}k-(-1)=\frac{\pi}{2}k+1$$

즉, $\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)k=1$이므로 $k=\dfrac{2}{2-\pi}$

따라서 $f(x)=\sin x+\dfrac{2}{2-\pi}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{2}{2-\pi}$$
$$=1+\frac{2}{2-\pi}=\frac{4-\pi}{2-\pi}$$

437 정답 $f(x)=\ln x+1$

$xf(x)-x=\displaystyle\int_1^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-1=f(x)$, $xf'(x)=1$

이때, $x>0$이므로 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\ln x+C$$

$xf(x)-x=\displaystyle\int_1^x f(t)dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1$이므로 $\ln 1+C=1$에서 $C=1$

$\therefore f(x)=\ln x+1$

438 정답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$ (2) $\frac{\pi}{2}+1$

(2) $x=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$dx=\sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta$

$x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+3}dx&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\times\sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{36}\pi\end{aligned}$$

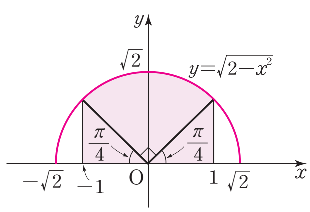
(2) $x=\sqrt{2}\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$dx=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

$x=-1$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{4}$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx\\&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2-2\sin^2\theta}\times\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\cos\theta\times\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2\theta\,d\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\\&=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)-\left\{-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\&=\frac{\pi}{2}+1\end{aligned}$$

다른 풀이



$\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx$는 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.

색칠한 부분의 넓이는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴과 두 삼각형의 넓이의 합과 같으므로 구하는 정적분의 값은

$$\frac{1}{2}\times2\times\frac{\pi}{2}+1=\frac{\pi}{2}+1$$

439 정답 $\frac{\pi}{6}$

$x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$dx=\cos\theta\,d\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}1\,d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

440 정답 2

$f(x)=2x^3\cos x$로 놓으면

$$\begin{aligned}f(-x)&=2(-x)^3\cos(-x)\\&=-2x^3\cos x=-f(x)\end{aligned}$$

이므로 $f(x)$는 기함수이다.

따라서 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2x^3\cos x\,dx=0$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+2x^3\cos x)dx&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\&=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=2(1-0)=2\end{aligned}$$

441 정답 ③

$f(x)=f(-x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다.

따라서 $\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=a$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x)dx&=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx\\&=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx=a+b\end{aligned}$$

442 정답 12

$f(x)=f(x+3)$이므로 함수 $f(x)$는 주기가 3인 주기함수이다. 즉,

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx=\int_4^7 f(x)dx=\int_7^{10} f(x)dx=4$$

이므로

$$\int_1^{10} f(x)dx=3\int_0^3 f(x)dx=3\times4=12$$

443 정답 10

$$f(x)=\cos x+|\cos x|=\begin{cases}2\cos x & (\cos x\ge0)\\ 0 & (\cos x\le0)\end{cases}$$

이므로 $f(x)$는 2π인 주기함수이다.

$2x=t$로 놓으면 $2dx=dt$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=5\pi$일 때 $t=10\pi$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{5\pi}f(2x)dx&=\frac{1}{2}\int_0^{5\pi}f(2x)\times2\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{10\pi}f(t)dt\\&=\frac{1}{2}\times5\int_0^{2\pi}f(t)dt\\&=\frac{5}{2}\times2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt\\&=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\,dt\\&=10\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=10\end{aligned}$$

연습문제 I .... pp.234~238

444 정답 ①

$\int_0^1 e^{x+4}\,dx=\left[e^{x+4}\right]_0^1=e^5-e^4$

445 정답 $e-\frac{1}{2}$

$$\int_0^1(e^x+x)dx=\left[e^x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\left(e+\frac{1}{2}\right)-(1+0)$$
$$=e-\frac{1}{2}$$

446 정답 ②

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-2\cos x)dx=\left[-\cos x-2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-2-(-1)=-1$$

447 정답 ②

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x+1}-\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}\,dx=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx$$
$$=\left[e^x-x\right]_0^{\ln 2}$$
$$=(e^{\ln 2}-\ln 2)-(e^0-0)$$
$$=1-\ln 2$$

448 정답 ⑤

$$\int_0^e\frac{5}{x+e}\,dx=\left[5\ln|x+e|\right]_0^e$$
$$=5\ln 2e-5\ln e$$
$$=5\ln 2$$

449 정답 ②

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x\,dx=dt$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\pi$일 때 $t=-1$이므로

$$\int_0^{\pi}(1+\cos^2 x)\sin x\,dx=-\int_1^{-1}(1+t^2)dt$$
$$=\int_{-1}^1(1+t^2)dt$$
$$=\left[t+\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^1$$
$$=1+\frac{1}{3}-\left(-1-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{8}{3}$$

450 정답 ③

$$\int_{-1}^1|2x|e^{2x}\,dx=\int_{-1}^0(-2xe^{2x})dx+\int_0^1 2xe^{2x}\,dx$$
$$=\int_0^1 2xe^{2x}\,dx-\int_{-1}^0 2xe^{2x}\,dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=2x$, $g'(x)=e^{2x}$로 놓으면

$f'(x)=2$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

$$\int_0^1 2xe^{2x}\,dx=\left[xe^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 e^{2x}\,dx$$
$$=(e^2-0)-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$
$$=e^2-\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^0 2xe^{2x}\,dx=\left[xe^{2x}\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0 e^{2x}\,dx$$
$$=(0+e^{-2})-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^0$$
$$=e^{-2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}$$

따라서 ㉠에 의하여

$$\int_{-1}^1|2x|e^{2x}\,dx=\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{2}e^{-2}$$
$$=\frac{1}{2}(2+e^2-3e^{-2})$$

451 정답 ③

$$\cos x-\cos 2x=\cos x-(2\cos^2 x-1)$$
$$=(1-\cos x)(2\cos x+1)$$

이므로 $0\le x\le\pi$에서 $\cos x-\cos 2x=0$을 만족하는 x의 값은

$\cos x=1$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

$0\le x\le\frac{2}{3}\pi$일 때 $\cos x-\cos 2x\ge 0$,

$\frac{2}{3}\pi\le x\le\pi$일 때 $\cos x-\cos 2x\le 0$이므로

$$\int_0^{\pi}|\cos x-\cos 2x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\cos x-\cos 2x)dx+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(\cos 2x-\cos x)dx$$
$$=\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

452 정답 23

$$f(x)=\begin{cases}2x^{\frac{3}{2}}+C_1\ (x>1)\\ x^2+C_2\ (x<1)\end{cases}\ (\text{단, } C_1,\ C_2\text{는 적분상수})$$

$f(4)=13$이므로 $16+C_1=13$에서 $C_1=-3$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1-}(x^2+C_2)=\lim_{x\to1+}(2x^{\frac{3}{2}}-3)$$

에서 $1+C_2=-1$, 즉 $C_2=-2$

$\therefore f(-5)=25-2=23$

453 정답 ⑤

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=x^2$으로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{3}x^3$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e x^2\ln x\,dx&=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{3}x^2\,dx\\&=\frac{e^3}{3}-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e\\&=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3+1}{9}\end{aligned}$$

454 정답 ③

$x^2=t$로 놓으면 $2x\,dx=dt$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=n$일 때 $t=n^2$이므로

$$\begin{aligned}f(n)&=\int_1^n(x^2e^{x^2}\times x)dx=\int_1^{n^2}\frac{1}{2}te^t\,dt\\&=\frac{1}{2}\left[te^t-e^t\right]_1^{n^2}=\frac{1}{2}(n^2e^{n^2}-e^{n^2})\\&=\frac{1}{2}e^{n^2}(n^2-1)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f(5)}{f(3)}=\frac{12\times e^{25}}{4\times e^9}=3e^{16}$$

455 정답 8

부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2f'(x)dx&=\left[x^2f(x)\right]_0^2-\int_0^2 2xf(x)dx\\&=4f(2)-2\int_0^2 xf(x)dx\end{aligned}$$

$\int_0^2 xf(x)=10$, $\int_0^2 x^2f'(x)dx=12$이므로

$12=4f(2)-2\times10\qquad\therefore f(2)=8$

456 정답 ③

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_2^{2+3h}f(x)dx&=\lim_{h\to0}\frac{F(2+3h)-F(2)}{h}\\&=3\lim_{h\to0}\frac{F(2+3h)-F(2)}{3h}\\&=3F'(2)=3f(2)=3\times3^2=27\end{aligned}$$

457 정답 $\frac{1}{3}e$

$f(x)=x^3e^x$이라 하고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\int_1^x t^3e^t\,dt=\left[F(t)\right]_1^x=F(x)-F(1)$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^x t^3e^t\,dt\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}\times\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\\&=\frac{1}{3}F'(1)\\&=\frac{1}{3}f(1)\\&=\frac{1}{3}e\end{aligned}$$

458 정답 $\frac{\pi}{2}$

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_0^{x^2}f(t)dt=F(x^2)-F(0)=x\sin\pi x\qquad\cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xF'(x^2)=\sin\pi x+\pi x\cos\pi x$

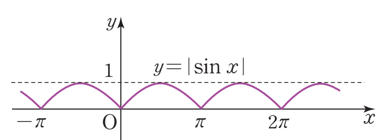
$\therefore 2xf(x^2)=\sin\pi x+\pi x\cos\pi x$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면 $4f(4)=2\pi$

$\therefore f(4)=\frac{\pi}{2}$

459 정답 20

함수 $f(x)=|\sin x|$의 그림은 다음과 같고, 주기가 π인 주기함수이다.



$\int_0^{10\pi}f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$에서 $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $dx=dt$

$x=0$일 때 $t=-\frac{\pi}{2}$, $x=10\pi$일 때 $t=\frac{19}{2}\pi$이므로

$$\int_0^{10\pi}f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{19}{2}\pi}f(t)dt$$

$\int_0^{\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[\cos x\right]_0^{\pi}=2$이고

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\int_0^{\pi}f(t)dt$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{19}{2}\pi}f(t)dt&=10\int_0^{\pi}f(t)dt\\&=10\times2\\&=20\end{aligned}$$

460 정답 ②

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = x\cos x + a\sin x + b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $b=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\left\{x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\right\}$$

$$=\frac{d}{dx}(x\cos x + a\sin x + b)$$

즉, $\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \cos x - x\sin x + a\cos x$

에서 $\int_0^x f(t)dt = \cos x - x\sin x + a\cos x$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=1+a$이므로

$a=-1$

따라서 $\int_0^x f(t)dt = -x\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

461 정답 0

$$f(x) - \int_0^x f(t)\cos t\, dt = 3\sin x + \cos 2x \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x) - f(x)\cos x = 3\cos x - 2\sin 2x \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)-1=3$

$\therefore f'(0)=4$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f''(x) - f'(x)\cos x + f(x)\sin x$$

$$= -3\sin x - 4\cos 2x \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f''(0)-4=-4$

$\therefore f''(0)=0$

462 정답 ②

$\int_1^2 f(t)dt = k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x) = 2\ln x - 2kx$

$$k = \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 (2\ln t - 2kt)dt$$

$$= \Big[2t\ln t - 2t - kt^2\Big]_1^2$$

$$= 4\ln 2 - 4 - 4k + 2 + k$$

에서 $4k = 4\ln 2 - 2$이므로 $k = \ln 2 - \frac{1}{2}$

따라서 $f(x) = 2\ln x - (2\ln 2 - 1)x$이므로

$f(4) = 2\ln 4 - 4(2\ln 2 - 1)$

$= 4\ln 2 - 8\ln 2 + 4$

$= 4 - 4\ln 2$

463 정답 4

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = a$ (a는 상수)로 놓으면 $f(x) = \sin x + \frac{a}{\pi}$이므로

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t + \frac{a}{\pi}\right)dt$$

$$= \left[-\cos t + \frac{a}{\pi}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} + \cos 0$$

$$= \frac{a}{2} + 1$$

에서 $a=2$이므로

$$f(x) = \sin x + \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi}\left(\sin x + \frac{2}{\pi}\right)dx$$

$$= \left[-\cos x + \frac{2}{\pi}x\right]_0^{\pi}$$

$$= -\cos\pi + 2 + \cos 0$$

$$= 4$$

연습문제 II

p.239

464 정답 ⑤

$f(x) = \pi e^x \int_a^x \cos(\pi t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \pi e^x \int_a^x \cos(\pi t)dt + \pi e^x\cos\pi x$$

$$= f(x) + \pi e^x\cos\pi x$$

$f(0) = \frac{1}{2}$이므로 위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$f'(0) = f(0) + \pi = \pi + \frac{1}{2}$$

465 정답 ③

ㄱ. $a_1 = \int_1^e \ln x\, dx$

$$= \Big[x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e x\times\frac{1}{x}dx$$

$$= e - \Big[x\Big]_1^e = e - (e-1) = 1 \text{ (참)}$$

ㄴ. $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

$$= \Big[x(\ln x)^n\Big]_1^e - \int_1^e x\times n(\ln x)^{n-1}\times\frac{1}{x}dx$$

$$= e - n\int_1^e (\ln x)^{n-1}dx$$

$$= e - na_{n-1}$$

$$\therefore na_{n-1} + a_n = e \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $n=3$을 대입하면

$3a_2 + a_3 = e$ (거짓)

ㄷ. $1\le x\le e$에서 $(\ln x)^n \ge 0$이므로

$$a_n=\int_1^e (\ln x)^n\,dx \ge 0$$

㉠에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$(n+1)a_n+a_{n+1}=e$

$$\therefore a_n=\frac{e}{n+1}-\frac{a_{n+1}}{n+1}\le\frac{e}{n+1}$$

따라서 $0\le a_n\le\frac{e}{n+1}$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+1}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

466 정답 ④

ㄱ. $f(0)=e^0-1+\int_0^0 f(t)dt=1-1+0=0$ (거짓)

ㄴ. $f'(x)=e^x+f(x)$이므로

$f'(0)=e^0+f(0)=1+0=1$ (참)

ㄷ. $f'(x)=e^x+f(x)$이므로

$f'(x)-f(x)=e^x>0$

$\therefore f'(x)>f(x)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

467 정답 6 서술형

$\sqrt{x}=t\ (t\ge 0)$로 놓으면 $x=t^2$에서 $dx=2t\,dt$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=4$일 때 $t=2$이므로 … ①

$$\int_0^4 f'(\sqrt{x})dx=2\int_0^2 tf'(t)dt$$
$$=2\left\{\Big[tf(t)\Big]_0^2-\int_0^2 f(t)dt\right\}$$
$$=4f(2)-2\int_0^2 f(t)dt$$
$$=-2\times(-3)=6 \quad \cdots ②$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$\sqrt{x}=t$로 놓고 dx와 적분 구간 구하기	40 %
②	부분적분법을 이용하여 주어진 정적분의 값 구하기	60 %

14. 넓이와 부피

유형 pp.245~252

001 정답 ln 2

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}$$

이때, $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $\Delta x=\frac{1-0}{n}$, $x_k=0+k\Delta x=\frac{k}{n}$라 하면

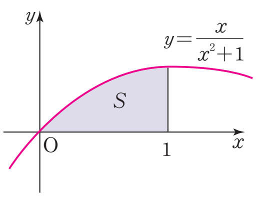
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$
$$=\Big[\ln|1+x|\Big]_0^1$$
$$=\ln 2$$

002 정답 (1) $\frac{1}{2}\ln 2$ (2) $3-e$

(1) $\frac{x}{x^2+1}=0$에서 $x=0$이므로

구간 $[0, 1]$에서 $\frac{x}{x^2+1}\ge 0$

따라서 구하는 넓이 S는



$$S=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2$$

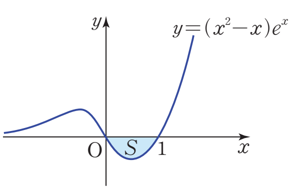
(2) $(x^2-x)e^x=0$에서 $e^x>0$이므로

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형은 그림의 색칠한 부분과 같다.



구간 $[0, 1]$에서 $(x^2-x)e^x\le 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=-\int_0^1(x^2-x)e^x\,dx$$

$f(x)=x^2-x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x-1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int(x^2-x)e^x dx=\left[(x^2-x)e^x\right]_0^1-\int_0^1(2x-1)e^x dx$$
$$=-\left[(2x-1)e^x-2e^x\right]_0^1$$
$$=-\{(e-2e)-(-1-2)\}=e-3$$
$$\therefore S=-(e-3)=3-e$$

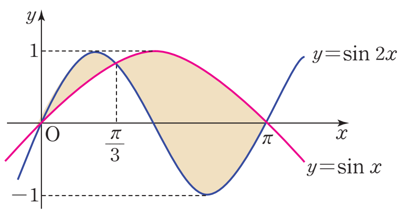
003 정답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $2-\frac{\pi}{2}$

(1) $\sin 2x=\sin x$에서 $2\sin x\cos x=\sin x$이므로

$$\sin x=0 \text{ 또는 } \cos x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\pi$$

구간 $[0, \pi]$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$로 둘러싸인 도형은 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

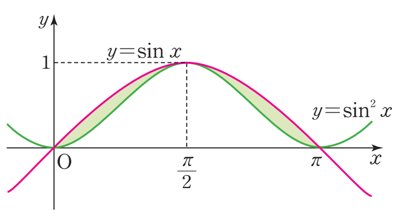
$$S=\int_0^{\pi}|\sin x-\sin 2x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$=\frac{5}{2}$$

(2) $\sin x=\sin^2 x$에서 $\sin x(1-\sin x)=0$이므로

$$\sin x=0 \text{ 또는 } \sin x=1$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\pi$$

$0\le x\le\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\sin^2 x$으로 둘러싸인 도형은 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{\pi}(\sin x-\sin^2 x)dx$$
$$=\int_0^{\pi}\left(\sin x-\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$=\left[-\cos x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$
$$=\left(1-\frac{\pi}{2}\right)-(-1)=2-\frac{\pi}{2}$$

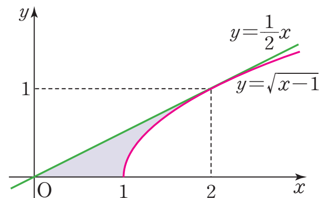
004 정답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}e^2-e$

(1) $y=\sqrt{x-1}$에서 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$이므로 곡선 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

즉, 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}(x-2)+1 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x$$

곡선 $y=\sqrt{x-1}$과 접선 $y=\frac{1}{2}x$ 및 x축으로 둘러싸인 도형은 그림의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

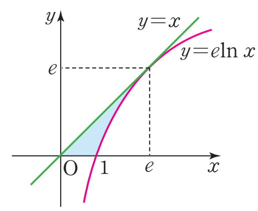


$$S=\frac{1}{2}\times2\times1-\int_1^2\sqrt{x-1}\,dx$$
$$=1-\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

(2) $y'=\frac{e}{x}$이므로 점 (e, e)에서의 접선의 방정식은

$$y=\frac{e}{e}(x-e)+e \qquad \therefore y=x$$

곡선 $y=e\ln x$와 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 도형은 그림의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면



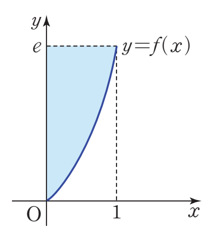
$$S=\frac{1}{2}\times e\times e$$
$$-\int_1^e e\ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2-e\left[x\ln x-x\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}e^2-e\{(e\ln e-e)-(\ln 1-1)\}$$
$$=\frac{1}{2}e^2-e$$

005 정답 ①

$f(0)=0$, $f(1)=e$이고, $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$$g(0)=0,\ g(e)=1$$

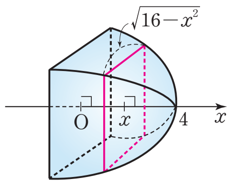
역함수의 성질에 의하여 정적분 $\int_0^e g(x)dx$의 값은 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같다.



$$\therefore \int_0^e g(x)dx=1\times e-\int_0^1 f(x)dx$$
$$=e-\int_0^1 xe^x dx$$
$$=e-\left[xe^x\right]_0^1+\left[e^x\right]_0^1$$
$$=e-e+e-1=e-1$$

14강

006 정답 $\frac{128}{3}$



그림에서 x좌표가 $x(0\le x\le 4)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{16-x^2}$인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=(\sqrt{16-x^2})^2=16-x^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^4 S(x)dx=\int_0^4(16-x^2)dx$$
$$=\left[16x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^4=\frac{128}{3}$$

007 정답 (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{4}(2e^2-e)$

(1) $\overline{OP}=x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$일 때

$$\overline{PQ}=\overline{QR}=2\sin x$$

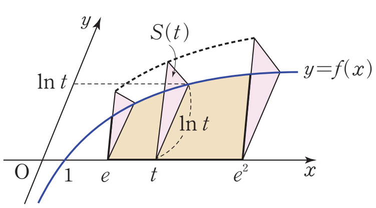
이므로 직각이등변삼각형 PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times(2\sin x)^2=2\sin^2 x$$

따라서 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)dx=\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

(2)



$x=t$일 때 단면인 정삼각형의 한 변의 길이가 $\ln t$이므로 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\ln t)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_e^{e^2}S(t)dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_e^{e^2}(\ln t)^2\,dt$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[t(\ln t)^2\right]_e^{e^2}-2\int_e^{e^2}\ln t\,dt\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{(4e^2-e)-2\left[t\ln t-t\right]_e^{e^2}\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}[(4e^2-e)-2\{(2e^2-e^2)-(e-e)\}]$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(2e^2-e)$$

468 정답 (1) $e-1$ (2) $\frac{2}{\pi}$

(1) $f(x)=e^x$, $\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=\frac{k}{n}$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{3}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 e^x\,dx$$
$$=\left[e^x\right]_0^1=e-1$$

(2) $f(x)=\sin\pi x$, $\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=\frac{k}{n}$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{\pi}(-1-1)=\frac{2}{\pi}$$

469 정답 (1) $\frac{7}{3}$ (2) $\ln\frac{27}{4}-1$ (3) e^2-e

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2+\left(\frac{n+2}{n}\right)^2+\left(\frac{n+3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^2\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

이때 $f(x)=x^2$, $\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=1+\frac{k}{n}$라 하면 적분 구간은 $[1, 2]$이므로 구하는 극한값은

$$\int_1^2 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{7}{3}$$

(2) $f(x)=\ln x$, $\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=2+\frac{k}{n}$라 하면 적분 구간은 $[2, 3]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)=\int_2^3\ln x\,dx$$
$$=\left[x\ln x-x\right]_2^3$$
$$=(3\ln 3-3)-(2\ln 2-2)$$
$$=\ln\frac{27}{4}-1$$

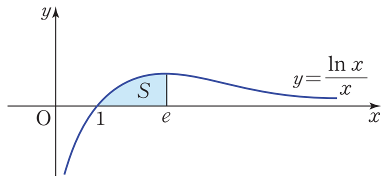
(3) $f(x)=e^x$, $\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=1+\frac{k}{n}$라 하면 적분 구간은 $[1, 2]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{1+\frac{k}{n}}=\int_1^2 e^x\,dx=\left[e^x\right]_1^2=e^2-e$$

470 정답 $\frac{1}{2}$

$\frac{\ln x}{x}=0$에서 $x=1$

구간 $[1, e]$에서 $\frac{\ln x}{x}\ge 0$이므로 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 x축 및 직선 $x=e$로 둘러싸인 도형은 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면 $S=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}dx=dt$이고,

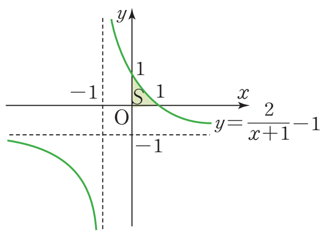
$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$S=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

471 정답 $2\ln 2-1$

$y=\frac{1-x}{x+1}=\frac{2}{x+1}-1$이고, $\frac{1-x}{x+1}=0$에서 $x=1$

구간 $[0, 1]$에서 $\frac{1-x}{x+1}\ge0$이므로 곡선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 영역은 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

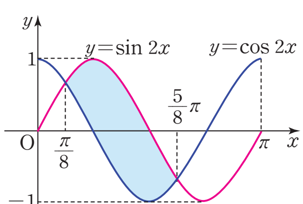
$$S=\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-1\right)dx=\Big[2\ln|x+1|-x\Big]_0^1=2\ln 2-1$$

472 정답 $\sqrt{2}$

$\sin 2x=\cos 2x$에서 $\tan 2x=1$이므로

$$2x=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } 2x=\frac{5}{4}\pi \qquad \therefore x=\frac{\pi}{8} \text{ 또는 } x=\frac{5}{8}\pi$$

구간 $[0, \pi]$에서 두 곡선 $y=\sin 2x$, $y=\cos 2x$로 둘러싸인 도형은 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

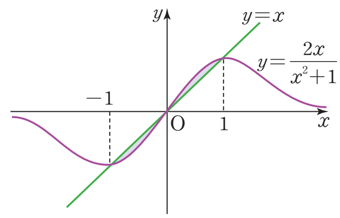
$$S=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5}{8}\pi}(\sin 2x-\cos 2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5}{8}\pi}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{5}{4}\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{5}{4}\pi\right)-\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\sqrt{2}$$

473 정답 $2\ln 2-1$

$\frac{2x}{x^2+1}=x$에서 $x^3-x=0$이므로 $x(x-1)(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

곡선 $y=\frac{2x}{x^2+1}$와 직선 $y=x$는 모두 원점에 대하여 대칭이므로 구간 $[-1, 0]$에서의 둘러싸인 도형의 넓이와 구간 $[0, 1]$에서의 둘러싸인 도형의 넓이는 같다.



따라서 구하는 넓이 S는

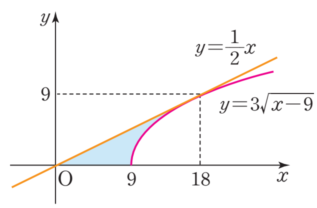
$$S=2\int_0^1\left(\frac{2x}{x^2+1}-x\right)dx$$
$$=2\left(\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx-\int_0^1 x\,dx\right)$$
$$=2\left\{\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx-\int_0^1 x\,dx\right\}$$
$$=2\left\{\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^1-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right\}=2\ln 2-1$$

474 정답 27

$y'=\frac{3}{2\sqrt{x-9}}$이므로 점 $(18, 9)$에서의 접선의 방정식은

$$y=\frac{3}{2\sqrt{18-9}}(x-18)+9 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x$$

따라서 곡선과 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형은 그림의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면



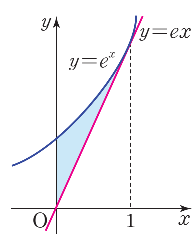
$$S=\frac{1}{2}\times18\times9-\int_9^{18}3\sqrt{x-9}\,dx$$
$$=81-\left[3\times\frac{2}{3}(x-9)\sqrt{x-9}\right]_9^{18}=81-54=27$$

475 정답 $\frac{e}{2}-1$

$y'=e^x$이므로 접점의 x좌표를 t라 하면 $e^t=e$에서

$t=1$

따라서 곡선 $y=e^x$과 접선 $y=ex$ 및 y축으로 둘러싸인 도형은 그림의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^1(e^x-ex)dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\left(e-\frac{e}{2}\right)-(1-0)=\frac{e}{2}-1$$

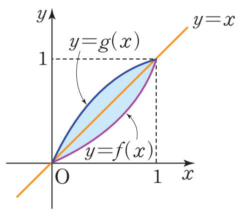
476 정답 ④

$f(x)=\tan\frac{\pi}{4}x$라 하면 $f(0)=0$이고 $f(1)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면

$g(0)=0,\ g(1)=1$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형은 그림의 색칠한 부분과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_0^1\left(x-\tan\frac{\pi}{4}x\right)dx$$
$$=2\int_0^1 x\,dx-2\int_0^1\tan\frac{\pi}{4}x\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1-2\int_0^1\frac{\sin\frac{\pi}{4}x}{\cos\frac{\pi}{4}x}dx$$
$$=1-2\left[-\frac{4}{\pi}\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}x\right|\right]_0^1=1-\frac{4}{\pi}\ln 2$$

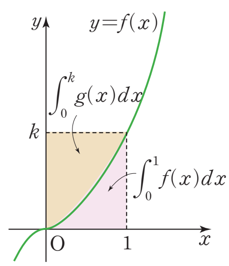
477 정답 ②

함수 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$에 대하여

$f(0)=\frac{e^0-e^0}{2}=0$,

$f(1)=k$이므로

정적분 $\int_0^1 f(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=1$



및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같고, 역함수의 정적분의 성질에 의하여 $\int_0^k g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=0$, $y=k$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 값은 색칠한 두 도형의 넓이의 합이므로

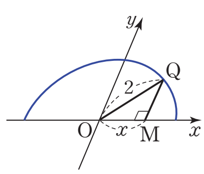
$$\int_0^1 f(x)dx+\int_0^k g(x)dx=1\times k=k$$

478 정답 $\frac{128}{3}$

x축과 $\overline{PQ}$의 교점을 M이라 하면

$\angle OMQ=90°$이므로 $\overline{QM}=\sqrt{4-x^2}$

$\therefore\ \overline{PQ}=2\overline{QM}=2\sqrt{4-x^2}$



입체도형의 단면은 정사각형 PQRS이므로 단면의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=(2\sqrt{4-x^2})^2=4(4-x^2)$

따라서 구하는 부피 V는

$$\int_{-2}^2 S(x)dx=2\int_0^2 S(x)dx=2\int_0^2 4(4-x^2)dx$$
$$=8\int_0^2(4-x^2)dx=8\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{128}{3}$$

479 정답 $\frac{\pi}{2}$

한 변의 길이가 $\sin t$인 정사각형의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\sin^2 t$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^\pi S(t)dt=\int_0^\pi \sin^2 t\,dt$$
$$=\int_0^\pi\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

480 정답 ①

x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 정삼각형의 한 변의 길이가 $\tan x$이므로 정삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\tan^2 x$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{3}}{4}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{3}}{4}(\sec^2 x-1)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

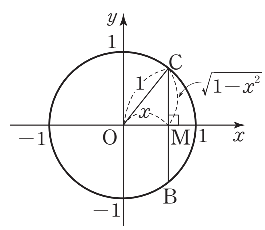
481 정답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{OM}=x$, $\overline{OC}=1$이므로

$\overline{CM}=\sqrt{1-x^2}$

즉, $\overline{CB}=2\sqrt{1-x^2}$ 이므로

정삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하면



$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{1-x^2})^2$$
$$=\sqrt{3}\,(1-x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^1\sqrt{3}(1-x^2)dx=\sqrt{3}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

연습문제 I .... pp.253~255

482 정답 $2(\sqrt{2}-1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\frac{n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

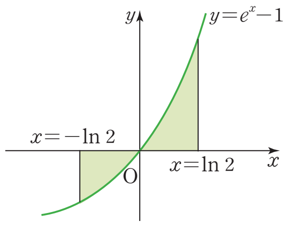
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\varDelta x=\dfrac{1}{n}$, $x_k=1+\dfrac{k}{n}$라 하면 적분 구간은 $[1, 2]$이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^2=2(\sqrt{2}-1)$$

483 정답 $\dfrac{1}{2}$

$e^x-1=0$에서 $x=0$



따라서 곡선 $y=e^x-1$과 x축 및 두 직선 $x=\ln 2$, $x=-\ln 2$로 둘러싸인 도형은 그림의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}|e^x-1|\,dx$$

$$=\int_{-\ln 2}^{0}(1-e^x)\,dx+\int_0^{\ln 2}(e^x-1)\,dx$$

$$=\Big[x-e^x\Big]_{-\ln 2}^{0}+\Big[e^x-x\Big]_0^{\ln 2}$$

$$=\left\{-1-\left(-\ln 2-\frac{1}{2}\right)\right\}+\{(2-\ln 2)-1\}=\frac{1}{2}$$

484 정답 ④

구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}|xe^x|\,dx=-\int_{-1}^{0}xe^x\,dx+\int_0^1 xe^x\,dx$$

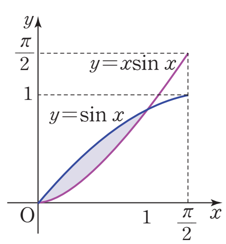
$$=\Big[e^x-xe^x\Big]_{-1}^{0}+\Big[xe^x-e^x\Big]_0^1$$

$$=1-\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right)-(-1)=2-\frac{2}{e}$$

485 정답 ②

$x\sin x=\sin x$에서 $(x-1)\sin x=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$



따라서 색칠한 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1(\sin x-x\sin x)\,dx=\int_0^1(1-x)\sin x\,dx$$

$f(x)=1-x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=-1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$S=\int_0^1(1-x)\sin x\,dx$$

$$=\Big[-(1-x)\cos x\Big]_0^1-\int_0^1\cos x\,dx$$

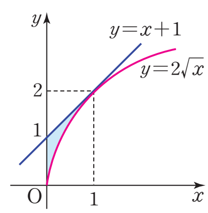
$$=\{0-(-1)\}-\Big[\sin x\Big]_0^1=1-\sin 1$$

486 정답 $\dfrac{1}{6}$

$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$이므로 곡선 $y=2\sqrt{x}$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{\sqrt{1}}\times(x-1)+2 \qquad \therefore y=x+1$$

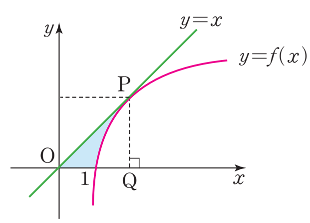
곡선 $y=2\sqrt{x}$와 이 곡선 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형은 그림의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^1\{(x+1)-2\sqrt{x}\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{2}+1-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$$

487 정답 50



$f(x)=k\ln x$라 하고 접점의 좌표를 $\mathrm{P}(p, p)$라 하면

$f(p)=k\ln p=p$ …… ㉠

$f'(x)=\dfrac{k}{x}$이므로 $f'(p)=\dfrac{k}{p}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=e$, $k=e$

즉, $f(x)=e\ln x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=(\text{삼각형 OPQ의 넓이})-\int_1^e f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\int_1^e e\ln x\,dx$$

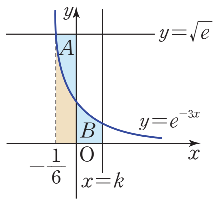
$$=\frac{1}{2}e^2-e\Big[x\ln x-x\Big]_1^e=\frac{1}{2}e^2-e(e\ln e-e+1)$$

$$=\frac{1}{2}e^2-e$$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$이므로 $100ab=50$

488 정답 ②

$e^{-3x}=\sqrt{e}$, 즉 $e^{-3x}=e^{\frac{1}{2}}$에서



$x=-\frac{1}{6}$이므로

$$A=\int_{-\frac{1}{6}}^{0}(\sqrt{e}-e^{-3x})dx$$
$$=\left[\sqrt{e}x+\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_{-\frac{1}{6}}^{0}$$
$$=\frac{1}{3}-\left(-\frac{\sqrt{e}}{6}+\frac{1}{3}\sqrt{e}\right)=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{e}}{6}$$
$$B=\int_{0}^{k}e^{-3x}\,dx=\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_{0}^{k}=-\frac{1}{3}e^{-3k}+\frac{1}{3}$$

$A=B$이므로 $\quad -\frac{\sqrt{e}}{6}=-\frac{1}{3}e^{-3k}$

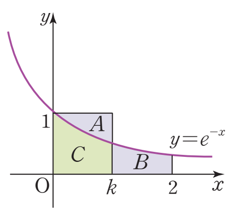
$$\therefore e^{3k}=\frac{2}{\sqrt{e}}$$

489 정답 ④

$A=k-\int_{0}^{k}e^{-x}\,dx$, $B=\int_{k}^{2}e^{-x}\,dx$이므로 $A=B$에서

$$k-\int_{0}^{k}e^{-x}\,dx=\int_{k}^{2}e^{-x}\,dx$$
$$\therefore k=\int_{0}^{k}e^{-x}\,dx+\int_{k}^{2}e^{-x}\,dx$$
$$=\int_{0}^{2}e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_{0}^{2}=-e^{-2}+1=1-\frac{1}{e^2}$$

다른 풀이



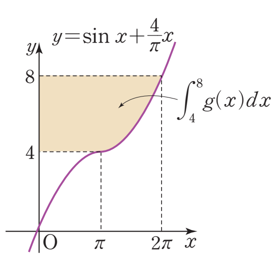
곡선 $y=e^{-x}$과 두 직선 $x=0$, $x=k$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 C라 하면

$$A+C=k\times 1=k$$
$$B+C=\int_{0}^{2}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_{0}^{2}=1-\frac{1}{e^2}$$

$A=B$에서 $A+C=B+C$이므로 $k=1-\frac{1}{e^2}$

490 정답 40

$f'(x)=\cos x+\frac{4}{\pi}>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.



$f(\pi)=4$, $f(2\pi)=8$이므로 역함수의 정적분의 성질에 의하여 $\int_{4}^{8}g(x)dx$의 값은 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.

$$\therefore \int_{4}^{8}g(x)dx=2\pi\times 8-\pi\times 4-\int_{\pi}^{2\pi}f(x)dx$$
$$=12\pi-\int_{\pi}^{2\pi}\left(\sin x+\frac{4}{\pi}x\right)dx$$
$$=12\pi-\left[-\cos x+\frac{2}{\pi}x^2\right]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=12\pi-(-1+8\pi)+(1+2\pi)$$
$$=2+6\pi$$

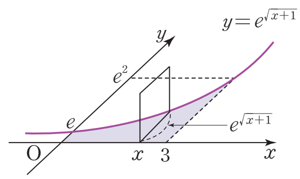
따라서 $m=2$, $n=6$이므로

$$m^2+n^2=4+36=40$$

491 정답 ④

정사각형의 밑면의 한 꼭짓점이 x축과 만나는 점의 좌표를 $(x,\ 0)$이라 하면 정사각형의 한 변의 길이는 $e^{\sqrt{x+1}}$이므로 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=(e^{\sqrt{x+1}})^2=e^{2\sqrt{x+1}}$$



따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_{0}^{3}e^{2\sqrt{x+1}}\,dx$$

$\sqrt{x+1}=t$로 놓으면 $x+1=t^2$, $dx=2t\,dt$이고,

$x=0$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=2$이므로

$$V=\int_{0}^{3}e^{2\sqrt{x+1}}\,dx=\int_{1}^{2}e^{2t}\times 2t\,dt$$
$$=\left[2t\times\frac{1}{2}e^{2t}\right]_{1}^{2}-\left[2\times\frac{1}{4}e^{2t}\right]_{1}^{2}$$
$$=(2e^4-e^2)-\left(\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^2\right)$$
$$=\frac{3}{2}e^4-\frac{1}{2}e^2$$

492 정답 ⑤

$\mathrm{P}(x,\ e^{-x})$, $\mathrm{Q}(x,\ -2e^{-x})$이라 하면

$$\overline{\mathrm{PQ}}=e^{-x}-(-2e^{-x})=3e^{-x}$$

이므로 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=(3e^{-x})^2=9e^{-2x}$$

따라서 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_{0}^{1}S(x)dx=\int_{0}^{1}9e^{-2x}\,dx$$
$$=\left[-\frac{9}{2}e^{-2x}\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{9}{2}(1-e^{-2})$$

493 정답 ③

H$(x,\ 0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}$를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{x}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_1^2 S(x)dx=\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{x}dx=\sqrt{3}\Big[\ln|x|\Big]_1^2=\sqrt{3}\ln 2$$

494 정답 $\dfrac{\pi}{4}$

좌표평면을 접어 두 반평면이 서로 수직이 되도록 하면 삼각형 PQH는 $\angle\mathrm{PHQ}=90^\circ$인 직각삼각형이 된다.

H$(x,\ 0)$이라 하면

$$\overline{\mathrm{PH}}=\sin x,\ \overline{\mathrm{QH}}=\left|-\frac{1}{2}x\right|=\frac{1}{2}x$$

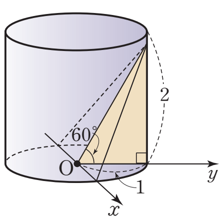
이므로 삼각형 PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

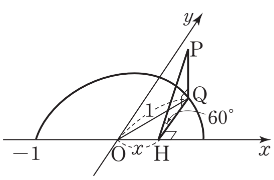
$$S(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}x\times\sin x=\frac{1}{4}x\sin x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^\pi\frac{1}{4}x\sin x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^\pi x\sin x\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi+\frac{1}{4}\int_0^\pi\cos x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\Big[\sin x\Big]_0^\pi=\frac{\pi}{4}$$

495 정답 ④





그림과 같이 원기둥의 밑면의 중심을 원점 O로 두고 단면인 직각삼각형에 수직인 방향으로 x축, 단면에 평행한 방향으로 y축을 놓으면 구하는 입체의 단면은 직각삼각형 PHQ이다. 직각삼각형의 밑변과 x축이 만나는 점의 좌표를 H$(x,\ 0)$이라 하면

$$\overline{\mathrm{HQ}}=\sqrt{1-x^2},\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$$

이므로 삼각형 PHQ의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{1-x^2}\times\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_{-1}^1\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)dx=2\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)dx$$
$$=\sqrt{3}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

연습문제 II p.256

496 정답 ③

$f(x)=1+\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x$, $\Delta x=\dfrac{\pi}{4n}$, $x_k=\dfrac{\pi k}{4n}$

라 하면 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

적분 구간은 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4n}\left\{1+\tan\left(\frac{\pi k}{4n}\right)+\tan^2\left(\frac{\pi k}{4n}\right)+\tan^3\left(\frac{\pi k}{4n}\right)\right\}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{(1+\tan x)+(1+\tan x)\tan^2 x\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan x)(1+\tan^2 x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan x)\sec^2 x\,dx$$

$\tan x=t$로 놓으면 $\sec^2 x\,dx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=\tan 0=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$이므로

$$(\text{주어진 식})=\int_0^1(1+t)dt$$
$$=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

497 정답 ①

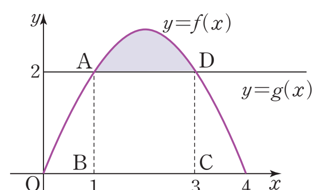
직선 $y=g(x)$가 점 A를 지나고 x축에 평행하므로

$$g(x)=2$$

$2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}x=2$에서 $\sin\dfrac{\pi}{4}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$$\frac{\pi}{4}x=\frac{\pi}{4}\ \text{또는}\ \frac{\pi}{4}x=\frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore\ x=1\ \text{또는}\ x=3$$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x\,dx-(\text{직사각형 ABCD의 넓이})$$
$$=\int_1^3 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x\,dx-4$$
$$=\left[-\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}x\right]_1^3-4$$
$$=\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-4$$
$$=\frac{16}{\pi}-4$$

498 정답 ⑤

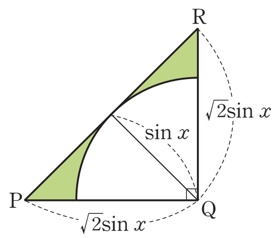
점 $P(x,\ 0)$이라 하면

$$\overline{PQ}=\overline{QR}=\sqrt{2}\sin x$$

이므로

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}\sin x)^2=\sin^2 x$$

직각이등변삼각형의 세 변의 길이의 비는 $1:1:\sqrt{2}$이므로 직각이등변삼각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{2}\sin x$이면 빗변에 접하는 사분원의 반지름의 길이는 $\sin x$가 된다.



따라서 사분원의 넓이는

$$\frac{\pi}{4}\times(\sin x)^2=\frac{\pi}{4}\sin^2 x$$

이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

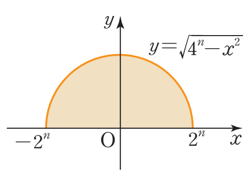
$$S(x)=\sin^2 x-\frac{\pi}{4}\sin^2 x=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2 x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$\begin{aligned}V&=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx\\&=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx\\&=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}\\&=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

499 정답 $\dfrac{2}{3\pi}$ 서술형

$y=\sqrt{4^n-x^2}$의 양변을 제곱하면 $y^2=4^n-x^2$에서 $x^2+y^2=4^n$이므로 곡선 $y=\sqrt{4^n-x^2}$은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2^n인 반원이다.



… ①

따라서 a_n은 반지름의 길이가 2^n인 반원의 넓이와 같으므로

$$a_n=\frac{\pi}{2}\times(2^n)^2=\frac{\pi}{2}\times 4^n \quad \cdots ②$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{2}{\pi}\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3\pi} \quad \cdots ③$$

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	곡선 $y=\sqrt{4^n-x^2}$의 모양 알기	30 %
②	a_n 구하기	40 %
③	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값 구하기	30 %

15. 속도와 거리

유형 pp.261~264

001 정답 (1) $\dfrac{2}{\pi}$ (2) $\dfrac{4}{\pi}$

(1) $t=1$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^1 \sin \pi t\,dt=\left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi t\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

(2) $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_0^2|v(t)|dt$이고, $v(t)=\sin \pi t$에서 $0\le t\le 1$일 때 $v(t)\ge 0$이고, $1\le t\le 2$일 때 $v(t)\le 0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2|v(t)|dt&=\int_0^1 v(t)\,dt+\int_1^2\{-v(t)\}dt\\&=\int_0^1\sin \pi t\,dt+\int_1^2(-\sin \pi t)\,dt\\&=\left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi t\right]_0^1+\left[\frac{1}{\pi}\cos \pi t\right]_1^2\\&=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\\&=\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

002 정답 (1) 12 (2) $2\pi^2$

(1) $\dfrac{dx}{dt}=-t+1,\ \dfrac{dy}{dt}=2\sqrt{t}$이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^4\sqrt{(-t+1)^2+(2\sqrt{t})^2}\,dt&=\int_0^4\sqrt{t^2+2t+1}\,dt\\&=\int_0^4\sqrt{(t+1)^2}\,dt\\&=\int_0^4(t+1)dt\\&\qquad(\because\ 0\le t\le 4\text{에서 } t+1\ge 0)\\&=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^4\\&=12\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=2\cos 2t-2(\cos 2t-2t\sin 2t)=4t\sin 2t$,

$\dfrac{dy}{dt}=-2\sin 2t+2(\sin 2t+2t\cos 2t)=4t\cos 2t$

이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_0^{\pi}\sqrt{(4t\sin 2t)^2+(4t\cos 2t)^2}\,dt\\&=\int_0^{\pi}\sqrt{16t^2(\sin^2 2t+\cos^2 2t)}\,dt\\&=\int_0^{\pi}4t\,dt\ (\because\ 0\le t\le\pi\text{에서 } 4t\ge 0)\\&=\left[2t^2\right]_0^{\pi}\\&=2\pi^2\end{aligned}$$

003 정답 (1) 2π (2) $\frac{3}{2}$

(1) $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}1\,dt=\Big[t\Big]_0^{2\pi}=2\pi$$

(2) $\frac{dx}{dt}=3\cos^2 t\times(-\sin t)=-3\cos^2 t\sin t$,

$\frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t+\cos^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}dt$$
$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt\left(\because\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\text{에서 }\sin t\cos t\ge 0\right)$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$$
$$=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}$$

004 정답 $\frac{14}{3}$

$f(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}=(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^4\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_1^4\sqrt{1+(x-1)}dx$$
$$=\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{14}{3}$$

확인문제 ······ pp.261~264

500 정답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{31}{3}$

(1) $t=1$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^1(2t-\sqrt{t})dt=\left[t^2-\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

(2) $1\le t\le 4$일 때 $2t-\sqrt{t}>0$이므로

$t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^4|v(t)|dt=\int_1^4(2t-\sqrt{t})\,dt=\left[t^2-\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^4$$
$$=\left(16-\frac{2}{3}\times 8\right)-\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{31}{3}$$

501 정답 $2e^2-2e$

$1\le t\le 2$일 때 $(t-2)e^t\le 0$,

$2\le t\le 3$일 때 $(t-2)e^t\ge 0$이므로

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^3|v(t)|dt=\int_1^3|(t-2)e^t|dt$$
$$=-\int_1^2(t-2)e^t\,dt+\int_2^3(t-2)e^t\,dt$$
$$=-\Big[(t-3)e^t\Big]_1^2+\Big[(t-3)e^t\Big]_2^3$$
$$=-(-e^2+2e)+(0+e^2)=2e^2-2e$$

502 정답 $e-\frac{1}{e}$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$이므로 구하는 거리는

$$\int_{\frac{1}{e}}^e\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^e\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)}dt$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^e\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1\right)}dt=\int_{\frac{1}{e}}^e\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)\right\}^2}\,dt$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^e\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)dt\left(\because\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)>0\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}+t\right]_{\frac{1}{e}}^e=\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{e}+e\right)-\left(-e+\frac{1}{e}\right)\right\}$$
$$=e-\frac{1}{e}$$

503 정답 $\sqrt{2}(e^\pi-1)$

$\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$, $\frac{dy}{dt}=e^t(\cos t+\sin t)$

이므로 구하는 거리는

$$\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{e^t(\cos t+\sin t)\}^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{2}e^t\,dt\ (\because\ \sqrt{2}e^t>0)$$
$$=\sqrt{2}(e^\pi-1)$$

504 정답 4

$\frac{dx}{dt}=t-1$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{t}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{(t-1)^2+(2\sqrt{t})^2}\,dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{(t-1)^2+4t}\,dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{(t+1)^2}\,dt$$
$$=\int_0^2(t+1)dt$$
$(\because\ 0\le t\le 2$이므로 $t+1>0)$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^2$$
$$=4$$

505 정답 8

$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin 2t$, $\dfrac{dy}{dt}=2+2\cos 2t$이므로

구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\pi}\sqrt{(-2\sin 2t)^2+(2+2\cos 2t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{4\sin^2 2t+4+8\cos 2t+4\cos^2 2t}\,dt$$
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{8+8\cos 2t}\,dt$$
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{16\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)}\,dt$$
$$=\int_0^{\pi}4\sqrt{\cos^2 t}\,dt=\int_0^{\pi}4|\cos t|\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-4\cos t)\,dt$$
$$=\Big[4\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-4\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=4+4$$
$$=8$$

506 정답 12

$f(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\times 2x$$
$$=x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$$

이므로 구하는 길이는

$$\int_0^3\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+x^2(x^2+2)}\,dx$$
$$=\int_0^3\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx$$
$$=\int_0^3(x^2+1)\,dx\ (\because\ x^2+1>0)$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^3$$
$$=9+3=12$$

507 정답 (1) $\dfrac{59}{24}$ (2) $\dfrac{1}{2}(e^2-e^{-2})$

(1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{4x}$이라 하면 $f'(x)=x^2-\dfrac{1}{4x^2}$이므로

구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^2\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^2\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx$$
$$\left(\because\ x^2+\frac{1}{4x^2}>0\right)$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4x}\right]_1^2=\frac{59}{24}$$

(2) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$이라 하면 $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로

구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^2\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^2\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$
$$\left(\because\ \frac{e^x+e^{-x}}{2}>0\right)$$
$$=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})$$

연습문제 I .... pp.265~266

508 정답 0

점 P는 속도 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향을 바꾼다.

$$v(t)=t-3\sqrt{t}+2=(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}-2)$$

이므로 $v(t)=0$에서

$$t=1\ 또는\ t=4$$

이 중 점 P가 원점을 출발한 후 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=4$이다.

따라서 점 P의 시각 $t=4$에서의 위치 x는

$$0+\int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^4(t-3\sqrt{t}+2)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2-2t^{\frac{3}{2}}+2t\right]_0^4$$
$$=8-16+8$$
$$=0$$

509 정답 (1) 3회 (2) 4

(1) $t=a$일 때 점 P의 위치 x는

$$x=0+\int_0^a\cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_0^a=\sin a$$

점 P가 원점을 지나는 순간의 점 P의 위치는 0이므로

$\sin a=0\ (0<a<4\pi)$에서

$$a=\pi\ 또는\ a=2\pi\ 또는\ a=3\pi$$

따라서 $0<t<4\pi$에서 점 P가 원점을 지나는 횟수는 3회이다.

(2) $t=0$에서 $t=2\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{2\pi}|\cos t|\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$$
$$=4\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=4$$

510 정답 ③

$$\int_0^2 (t-1)e^t\,dt=\Big[(t-1)e^t\Big]_0^2-\int_0^2 e^t\,dt=(e^2+1)-\Big[e^t\Big]_0^2$$
$$=e^2+1-e^2+1=2$$

511 정답 $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$

점 P의 좌표를 P(x, y)라 하면

$$\frac{dx}{dt}=2t^2,\ \frac{dy}{dt}=2t$$

이므로 $t=0$에서 $t=\sqrt{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{(2t^2)^2+(2t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\sqrt{2}}2t\sqrt{t^2+1}\,dt$$

이때 $t^2+1=s$로 놓으면 $2t\,dt=ds$이고

$t=0$일 때 $s=1$, $t=\sqrt{2}$일 때 $s=3$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^{\sqrt{2}}2t\sqrt{t^2+1}\,dt=\int_1^3\sqrt{s}\,ds=\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_1^3$$
$$=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$$

512 정답 ④

$\frac{dx}{dt}=6$, $\frac{dy}{dt}=t-\frac{9}{t}$이므로 점 P의 속도는 $\left(6,\ t-\frac{9}{t}\right)$이다.

점 P의 속력은

$$\sqrt{6^2+\left(t-\frac{9}{t}\right)^2}=\sqrt{\left(t+\frac{9}{t}\right)^2}=\left|t+\frac{9}{t}\right|=t+\frac{9}{t}$$

$t>0$이므로 산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의하여

$$t+\frac{9}{t}\ge 2\sqrt{t\times\frac{9}{t}}=6$$

등호는 $t=\frac{9}{t}$일 때 성립하므로 $t^2=9$, 즉 $t=3$일 때 점 P의 속력이 최소가 된다.

따라서 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^3\left|t+\frac{9}{t}\right|dt=\int_1^3\left(t+\frac{9}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+9\ln|t|\right]_1^3$$
$$=\left(\frac{9}{2}+9\ln 3\right)-\frac{1}{2}=4+9\ln 3$$

513 정답 ③

$$\frac{dx}{dt}=e^{-t}(\cos t-\sin t),\ \frac{dy}{dt}=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$$

이므로 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^a\sqrt{\{e^{-t}(\cos t-\sin t)\}^2+\{-e^{-t}(\cos t+\sin t)\}^2}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{e^{-2t}(\cos^2 t-2\cos t\sin t+\sin^2 t+\cos^2 t+2\cos t\sin t+\sin^2 t)}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{2e^{-2t}}\,dt=\int_0^a\sqrt{2}|e^{-t}|\,dt=\int_0^a\sqrt{2}e^{-t}\,dt$$
$$=\sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^a=\sqrt{2}(-e^{-a}+1)$$

$t=0$부터 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$\sqrt{2}(1-e^{-a})=\frac{\sqrt{2}}{2},\ e^{-a}=\frac{1}{2}\qquad\therefore a=\ln 2$$

514 정답 64

$$\frac{dx}{dt}=4(-\sin t+\cos t),\ \frac{dy}{dt}=-2\sin 2t$$

이므로 점 P가 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리는

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\{4(-\sin t+\cos t)\}^2+(-2\sin 2t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{16(1-\sin 2t)+4\sin^2 2t}\,dt$$
$$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{4(1-\sin 2t)+\sin^2 2t}\,dt$$
$$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{(2-\sin 2t)^2}\,dt=2\int_0^{2\pi}|2-\sin 2t|\,dt$$
$$=2\int_0^{2\pi}(2-\sin 2t)\,dt$$
$$=2\left[2t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{2\pi}$$
$$=2\times 4\pi=8\pi$$

따라서 $a=8$이므로 $a^2=64$

515 정답 ②

$$\frac{dx}{dt}=\cos t-\sqrt{3}\sin t,\ \frac{dy}{dt}=-\sin t-\sqrt{3}\cos t$$

이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\pi}\sqrt{(\cos t-\sqrt{3}\sin t)^2+(-\sin t-\sqrt{3}\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 t-2\sqrt{3}\cos t\sin t+3\sin^2 t+\sin^2 t+2\sqrt{3}\sin t\cos t+3\cos^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{4}\,dt=\int_0^{\pi}2\,dt=\Big[2t\Big]_0^{\pi}=2\pi$$

516 정답 ⑤

$y=\frac{1}{4}x^2-\ln\sqrt{x}=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$에서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_2^8\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_2^8\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}^2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_2^8\sqrt{4+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_2^8\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_2^8\left(x+\frac{1}{x}\right)dx\ \left(\because x+\frac{1}{x}>0\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2+\ln x\right]_2^8=\frac{1}{2}\{(32+\ln 8)-(2+\ln 2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(30+2\ln 2)$$
$$=15+\ln 2$$

517 정답 $\frac{15}{16}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx&=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\frac{1}{4}(e^{4x}+2+e^{-4x})}\,dx\\&=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2x}+e^{-2x})^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}(e^{2x}+e^{-2x})dx\\&\qquad(\because e^{2x}+e^{-2x}>0)\\&=\frac{1}{4}\Big[e^{2x}-e^{-2x}\Big]_0^{\ln 2}\\&=\frac{1}{4}\{(e^{2\ln 2}-e^{-2\ln 2})-(1-1)\}\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(4-\frac{1}{4}\right)-0\right\}\\&=\frac{15}{16}\end{aligned}$$

연습문제 Ⅱ p.267

518 정답 ②

$\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$는 $0\le x\le 1$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이이므로 구하는 최솟값은 원점 O와 점 $(1, \sqrt{3})$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

519 정답 ④

ㄱ. $\frac{dx}{dt}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$이므로

$t=1$일 때의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)^2+\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{e^2+e^{-2}}{2}}\ (\text{거짓})$$

ㄴ. $a=\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$ (참)

ㄷ. $\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}}\,dt$

산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의하여

$$\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\ge\sqrt{e^{2t}\times e^{-2t}}=1$$

$$\therefore \int_0^1\sqrt{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}}\,dt\ge\int_0^1 1\,dt=1\ (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

[참고] 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$f(x)\ge g(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$이다.

520 정답 3

$\frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t$, $\frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$이므로

구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_0^\pi\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt\\&=\int_0^\pi\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t}\,dt\\&=\int_0^\pi\sqrt{\frac{9}{4}(2\sin t\cos t)^2}\,dt\\&=\frac{3}{2}\int_0^\pi\sqrt{\sin^2 2t}\,dt\\&=\frac{3}{2}\int_0^\pi|\sin 2t|\,dt\\&=\frac{3}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\sin 2t\,dt\right)\\&=\frac{3}{2}\left\{\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi\right\}\\&=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}=3\end{aligned}$$

521 정답 $\frac{9}{2}$ 서술형

$\frac{dx}{dt}=-9\sin t+9\sin 9t$, $\frac{dy}{dt}=9\cos t-9\cos 9t$ … ①

이므로

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\\&=\sqrt{162-162(\sin t\sin 9t+\cos t\cos 9t)}\\&=\sqrt{162-162\cos(9t-t)}=\sqrt{162(1-\cos 8t)}\\&=\sqrt{324\times\frac{1-\cos 8t}{2}}=\sqrt{18^2\times\sin^2 4t}\\&=18|\sin 4t|\end{aligned}$$ … ②

따라서 점 P가 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{8}$까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{8}}18|\sin 4t|\,dt&=\int_0^{\frac{\pi}{8}}18\sin 4t\,dt\\&=\left[-\frac{9}{2}\cos 4t\right]_0^{\frac{\pi}{8}}\\&=-\frac{9}{2}(0-1)=\frac{9}{2}\end{aligned}$$ … ③

[채점 기준표]

단계	채점 요소	배점
①	$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ 구하기	20 %
②	$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ 구하기	40 %
③	$\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$의 값 구하기	40 %