수학 기본 실력 100% 충전

수력충전

개념 충전 » 수능 기초 연산서

기 하

[정답 및 해설]

자이스토리 · 수경출판사

I 이차곡선

문제편 pp. 10~47

[I –1 이차곡선]

01 1)~4) 해설 참조 **02** 1) 포물선 2) 초점, 준선, 축, 꼭짓점 **03** 2, $y^2=8x$ **04** -1, $y^2=-4x$

05 1) $y^2=2x$, 그래프 해설 참조
2) $y^2=-8x$, 그래프 해설 참조

06 1, $x^2=4y$ **07** $\frac{1}{3}$, $x^2=\frac{4}{3}y$

08 $-\frac{1}{8}$, $x^2=-\frac{1}{2}y$ **09** 1) $x^2=-4y$, 그래프 해설 참조
2) $x^2=y$, 그래프 해설 참조 3) $x^2=\frac{1}{4}y$, 그래프 해설 참조

10 1) $\mathrm{F}\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $x=-\frac{1}{4}$ 2) $\mathrm{F}(-4, 0)$, $x=4$ 3) $\mathrm{F}(3, 0)$, $x=-3$ 4) $\mathrm{F}\left(-\frac{1}{16}, 0\right)$, $x=\frac{1}{16}$ **11** 1) $\mathrm{F}\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $y=-\frac{1}{4}$ 2) $\mathrm{F}(0, 2)$, $y=-2$ 3) $\mathrm{F}(0, -1)$, $y=1$
4) $\mathrm{F}\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $y=\frac{1}{2}$ **12** $\frac{25}{4}$ **13** $\frac{94}{5}$ **14** $\frac{1}{2}$

15 3 **16** 6 **17** 3 **18** $\mathrm{A}(2, 4)$ **19** 36

20 1) $y^2=4px$ 2) $x^2=4py$ **21** 1) $y^2=2(x-1)$,
2) $y^2=-6(x-1)$ 3) $(x-1)^2=3y$

22 1) $(y+2)^2=7x$ 2) $(y+2)^2=-16x$ 3) $x^2=9(y+2)$

23 1) $(y+2)^2=x-3$ 2) $(y+2)^2=-3(x-3)$
3) $(x-3)^2=4(y+2)$ 4) $(x-3)^2=-12(y+2)$

24 1) 초점 : $(2, -2)$, 준선 : $x=0$ 2) 초점 : $\left(\frac{15}{4}, 0\right)$, 준선 : $y=\frac{17}{4}$ 3) 초점 : $(4, -3)$, 준선 : $y=-7$
4) 초점 : $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, 준선 : $y=\frac{3}{2}$

25 1) 꼭짓점 : $(-1, 3)$, 초점 : $(1, 3)$, 준선 : $x=-3$
2) 꼭짓점 : $(4, 2)$, 초점 : $(3, 2)$, 준선 : $x=5$
3) 꼭짓점 : $(-1, 1)$, 초점 : $\left(-\frac{3}{4}, 1\right)$, 준선 : $x=-\frac{5}{4}$
4) 꼭짓점 : $(-2, -1)$, 초점 : $(-2, 0)$, 준선 : $y=-2$
5) 꼭짓점 : $(-3, 2)$, 초점 : $(-3, 1)$, 준선 : $y=3$
6) 꼭짓점 : $(2, 3)$, 초점 : $(2, 5)$, 준선 : $y=1$

26 1) $(y-b)^2=4p(x-a)$ ① (a, b) ② $(p+a, b)$ ③ $x=-p+a$ 2) $(x-a)^2=4p(y-b)$ ① (a, b) ② $(a, p+b)$ ③ $y=-p+b$

27 1) 초점 : $(4, 0)$, $(-4, 0)$, 꼭짓점 : $(5, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$, 장축의 길이 : 10, 단축의 길이 : 6
2) 초점 : $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$, 꼭짓점 : $(3, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, 장축의 길이 : 6, 단축의 길이 : 2
3) 초점 : $(0, 3)$, $(0, -3)$, 꼭짓점 : $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 5)$, $(0, -5)$, 장축의 길이 : 10, 단축의 길이 : 8

28 1) 10 2) 8 **29** 타원, 초점, 장축, 단축, 중심

30 $2a$, $2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, a^2-c^2, a^2-c^2, $b^2=a^2-c^2$, b^2 **31** $2b$, $2b-\sqrt{x^2+(y+c)^2}$, $\sqrt{x^2+(y+c)^2}$, b^2-c^2, b^2-c^2, $a^2=b^2-c^2$, a^2

32 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 3) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$
4) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ **33** 1) 10, 4, $(\sqrt{21}, 0)$, $(-\sqrt{21}, 0)$
2) $2\sqrt{7}$, 4, $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ 3) 20, 12, $(0, 8)$, $(0, -8)$
4) 6, 2, $(0, 2\sqrt{2})$, $(0, -2\sqrt{2})$ 5) 6, $2\sqrt{5}$, $(0, 2)$, $(0, -2)$

34 $2\sqrt{2}$ **35** $5\sqrt{3}$ **36** 20 **37** 8

38 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

39 1) $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$ 2) $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$
3) $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+4)^2}{5}=1$ 4) $\frac{(x-3)^2}{6}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

40 1) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ 2) $(-6, 2)$, $(0, 2)$, $(-3, 0)$, $(-3, 4)$, 6, 4 3) $(\sqrt{5}-3, 2)$, $(-\sqrt{5}-3, 2)$

41 1) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ 2) $\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{7}=1$
3) $\frac{(x+1)^2}{2}+(y+1)^2=1$ 4) $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{3}=1$

42 1) $(\sqrt{5}+2, -2)$, $(-\sqrt{5}+2, -2)$, 6, 4 2) $(-2, 6)$, $(-2, 0)$, 10, 8 **43** $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$

44 1) 초점 : $(4, 0)$, $(-4, 0)$, 주축의 길이 : 4
2) 초점 : $(3, 0)$, $(-3, 0)$, 주축의 길이 : 2
3) 초점 : $(0, 2)$, $(0, -2)$, 주축의 길이 : 2

45 1) 2　2) 6　　**46** 쌍곡선, 초점, 꼭짓점, 주축, 중심

47 $2a$, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, c^2-a^2, c^2-a^2, c^2-a^2, b^2, 1　　**48** $2b$, $\sqrt{x^2+(y+c)^2}$, $\sqrt{x^2+(y+c)^2}$, c^2-b^2, b^2-c^2, c^2-b^2, a^2, -1　**49** 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$　2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

3) $\frac{x^2}{21}-\frac{y^2}{4}=-1$　4) $\frac{x^2}{15}-y^2=-1$

50 1) $(\sqrt{29}, 0)$, $(-\sqrt{29}, 0)$, 10　2) $(13, 0)$, $(-13, 0)$, 24

3) $(0, 2\sqrt{7})$, $(0, -2\sqrt{7})$, $4\sqrt{3}$　4) $(0, 4\sqrt{2})$, $(0, -4\sqrt{2})$, $4\sqrt{5}$　5) $(0, \sqrt{6})$, $(0, -\sqrt{6})$, 4

51 $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$　**52** $\sqrt{10}$　**53** $x^2-\frac{y^2}{4}=-1$

54 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$　**55** 1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$　**56** 1) $y=\pm\frac{2}{3}x$

2) $y=\pm\frac{3}{2}x$　3) $y=\pm x$　4) $y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

57 1) $x^2-\frac{y^2}{4}=1$　2) $2x^2-y^2=1$

3) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=-1$　**58** $\sqrt{3}$　**59** 42

60 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　**61** 7　**62** $y=\pm\frac{3}{4}x$

63 1) $y=\pm\frac{b}{a}x$　2) $y=\pm\frac{b}{a}x$

64 1) $\frac{(x-2)^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{5}=1$　2) $\frac{(x-3)^2}{12}-\frac{(y+1)^2}{2}=1$

3) $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{3}=-1$　4) $\frac{(x+2)^2}{6}-\frac{(y-2)^2}{2}=1$

65 1) $\frac{(x+3)^2}{5}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$

2) $(-\sqrt{5}-3, 2)$, $(\sqrt{5}-3, 2)$, $2\sqrt{5}$　3) $(-6, 2)$, $(0, 2)$

66 1) $\frac{(x+1)^2}{3}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$　2) $\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y+1)^2}{3}=1$

3) $\frac{x^2}{7}-\frac{(y-1)^2}{8}=1$　4) $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{8}=-1$

67 1) $(\pm\sqrt{7}+2, -1)$, $(4, -1)$, $(0, -1)$, 4

2) $(2, -1\pm\sqrt{5})$, $(2, 1)$, $(2, -3)$, 4

68 1) $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$

2) $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=-1$

[단원 총정리 문제]

01 ②　**02** 13　**03** 4 m　**04** ①　**05** ④

06 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$　**07** 6

08 $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$　**09** ②　**10** $k<1$

11 $20\sqrt{5}$　**12** 12

[Ⅰ-2 이차곡선과 직선]

69 1) 원　2) 포물선　3) 타원　4) 쌍곡선

70 1) 한 점에서 만난다.　2) 만나지 않는다.　3) 서로 다른 두 점에서 만난다.　**71** 1) 이차곡선　2) (i) $>$ (ii) $=$ (iii) $<$　**72** $mn-2p$, $p-mn$, $\frac{p}{m}$, $\frac{p}{m}$

73 1) $y=2x+\frac{1}{2}$　2) $y=3x+\frac{2}{3}$　3) $y=-4x+\frac{1}{16}$

4) $y=x-4$　**74** $y=mx+\frac{p}{m}$

75 a^2mn, $a^2m^2+b^2-n^2$, $a^2m^2+b^2$, $\sqrt{a^2m^2+b^2}$, $\sqrt{a^2m^2+b^2}$

76 1) $y=x\pm\sqrt{13}$　2) $y=3x\pm\sqrt{13}$　3) $y=-x\pm\sqrt{5}$

4) $y=-2x\pm2\sqrt{6}$　**77** $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

78 a^2mn, $a^2m^2-b^2-n^2$, $a^2m^2-b^2$, $\sqrt{a^2m^2-b^2}$, $\sqrt{a^2m^2-b^2}$

79 1) $y=x\pm\sqrt{2}$　2) $y=-2x\pm\sqrt{35}$　3) $y=-x\pm1$

80 1) $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$　2) $y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$

81 x_1, y_1, p, x_1, y_1, p, y_1, y_1, ${y_1}^2-4px_1$, $2p$, $2p$, $2p$

82 1) $y=\frac{1}{2}x+3$　2) $y=-x-2$　3) $y=\frac{1}{16}x+\frac{1}{2}$

83 $y_1y=2p(x+x_1)$　**84** y_1, x_1, x_1, y_1, $a^2m^2+b^2$, x_1, y_1, $a^2m^2+b^2$, $a^2m^2+b^2$, $2x_1y_1$, $\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{bx_1}{a}$, b^2x_1

85 1) $y=\frac{1}{2}x+2$　2) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-4$　3) $y=-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$

86 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

87 y_1, x_1, x_1, y_1, $a^2m^2-b^2$, x_1, y_1, $a^2m^2-b^2$, $a^2m^2-b^2$, $2x_1y_1$, $\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{bx_1}{a}$, b^2x_1

88 1) $y=-x+1$　2) $y=x+2$　3) $y=-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$

89 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm1$　**90** 1) $y=-x-1$, $y=\frac{1}{2}x+2$

2) $y=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$ 3) $y=-2x-2$, $y=x+4$ **91** (i) $y_1^{\ 2}=4px_1$ (ii) $y_1y=2p(x+x_1)$ (iii) $y_1y=2p(x+x_1)$

92 1) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$, $y=3$ 2) $y=\frac{\sqrt{6}}{2}x+2$, $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}x+2$ 3) $y=-\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$

93 (i) $\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1$ (ii) $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ (iii) $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

94 1) $y=3x-6$, $y=-3x+6$ 2) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3) $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-1$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-1$

95 (i) $\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}-\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}=\pm1$ (ii) $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm1$ (iii) $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm1$

96 1) $y=2x+\frac{3}{2}$ 2) $y=x+\frac{1}{2}$ 3) $y=-x+2$

97 1) $y=x\pm2\sqrt{6}$ 2) $\sqrt{10}$ 3) $y=x-3$

98 1) $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ 2) $y=\sqrt{3}x\pm1$ 3) $y=\frac{1}{2}x\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

99 1) $2\sqrt{2}$ 2) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **100** 1) -1 2) $\tan\theta$ 3) 접선

[단원 총정리 문제]

01 ⑤ **02** ② **03** ③ **04** ③

05 $-\sqrt{3}\le k\le\sqrt{3}$ **06** ④ **07** ④ **08** ③

09 ⑤ **10** ③ **11** $2\sqrt{7}$ **12** $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Ⅱ 평면벡터

문제편 pp. 51~91

[Ⅱ-1 벡터의 연산]

01 1) 시점 : A, 종점 : C 2) 시점 : F, 종점 : Q

02 1)~3) 해설 참조 **03** 1) 2 2) 1 3) $\sqrt{5}$

04 1) 방향 2) A, B, 시점, 종점 3) $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ 4) 단위 5) 영, $\vec{0}$ **05** 1) $\vec{d}$ 2) $\vec{c}$ **06** 1) $\sqrt{13}$ 2) $\overrightarrow{BC}$ 3) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$ **07** 1) $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$ 2) 23개 3) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DE}$ 4) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{FA}$

08 1) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ 2) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CO}$ **09** 1) $\overrightarrow{BD}$ 2) $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DF}$

10 1) 같다, $\vec{a}=\vec{b}$ 2) $-\vec{a}$ **11** 1)~5) 해설 참조

12 1) $\overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{AD}$ 3) $\overrightarrow{AB}$ 4) $\vec{0}$ 5) $\overrightarrow{AD}$

13 1) $4\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{3}$ **14** 1) ① 합 ② $\overrightarrow{AC}$ 2) ① 교환 ② 결합 **15** 1)~5) 해설 참조 **16** 1) $\overrightarrow{CB}$ 2) $\overrightarrow{CB}$ **17** 1) $\vec{b}-\vec{a}$ 2) $-\vec{a}-\vec{b}$ **18** 1) $\vec{0}$ 2) $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CD}$ 3) $\vec{0}$ **19** 차 **20** 1)~3) 해설 참조

21 1)~3) 해설 참조 **22** 1) $8\vec{a}-13\vec{b}$ 2) $\vec{a}+2\vec{b}$ 3) $-\vec{a}+\vec{c}$ **23** 1) $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}$ 2) $\vec{x}=7b$

24 1) $-\vec{a}-\vec{b}$ 2) $2\vec{a}+2\vec{b}$ 3) $\vec{a}+2\vec{b}$

25 1) 실수배 ① (i) 같 (ii) 반대, $|k||\vec{a}|$ (iii) $\vec{0}$ ② $\vec{0}$ 2) ① 결합 ② 분배 **26** 1) $\vec{b}$ 2) $\vec{c}$ 3) $\vec{b}$, $\vec{c}$

27 1) 평행하다 2) 평행하다 3) 평행하다 4) 평행하지 않다

28 1) -1 2) -2 3) 6 **29** 평행하다 **30** 1) -7 2) $\frac{7}{3}$ 3) 1 **31** 1) 점 C는 직선 AB 위의 점이다. 2) 점 D는 직선 AB 위의 점이 아니다. 3) 점 E는 직선 AB 위의 점이다. **32** 3 **33** 6 **34** 2

35 1) 평행, $\vec{a}/\!/\vec{b}$ 2) $\vec{b}=k\vec{a}$ (또는 $\vec{a}=k\vec{b}$) 3) 한 직선

[단원 총정리 문제]

01 ② **02** ③ **03** $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{FE}$ **04** ② **05** 4

06 ② **07** 평행사변형 **08** $2\vec{b}$ **09** 3

10 $\sqrt{3}$ **11** 3 **12** ③

[Ⅱ-2 평면벡터의 성분]

36 1) $\vec{c}-\vec{a}$ 2) $\vec{b}-\vec{c}$ 3) $\vec{b}-\vec{a}$ 4) $\vec{0}$ 5) $\vec{0}$

37 1) $-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ 2) $-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

38 1) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ 2) $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}$ 3) $\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AC}$ 4) $\overrightarrow{AA}$

39 1) 위치벡터 2) $\overrightarrow{OB}$, $\vec{b}$ **40** 1) $\vec{p}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ 2) $\vec{p}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ 3) $\vec{q}=4\vec{b}-3\vec{a}$ 4) $\vec{q}=4\vec{a}-3\vec{b}$ 5) $\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ **41** $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

42 $\vec{b}$, $\vec{c}$, 2, 1, $\vec{m}$, $\vec{a}$, 1, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$, 3, 3 **43** $\vec{0}$

44 1) $\vec{p}=\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$, $\vec{q}=\frac{5}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ 2) $\frac{1}{2}$

45 1) $\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$, $\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ 2) $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

46 1) $\vec{a}=(-3,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 3)$ 2) $\vec{a}=-3\vec{e_1}+2\vec{e_2}$, $\vec{b}=2\vec{e_1}+3\vec{e_2}$ 3) $\sqrt{13}$ 4) $\sqrt{13}$ **47** 1) $k=-1,\ l=4$ 2) $k=2,\ l=2$ **48** 1) a_1, a_2, 성분, 단위 2) b_1, b_2 3) $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ **49** 1) $(4,\ -3)$ 2) $(-16,\ -12)$ 3) $(-9,\ 0)$ 4) $(-3,\ 9)$

50 1) $k=3,\ l=2$ 2) $k=-9,\ l=-1$

51 1) $(-4,\ 3)$, 5 2) $(3,\ -2)$, $\sqrt{13}$

52 1) 5 2) 10 **53** 1) 5 2) 5

54 1) ① $(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$ ② $(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$ ③ $(ka_1\ ,\ ka_2)$ 2) ① $(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$ ② $\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

[단원 총정리 문제]

01 ② **02** ⑤ **03** ① **04** ①

05 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}}{5}$ **06** ① **07** $\dfrac{7}{5}$ **08** ②

09 ④ **10** ② **11** ① **12** 5

[Ⅱ-3 평면벡터의 내적]

55 1) 6 2) 4 3) $-\sqrt{6}$ **56** 1) 16 2) 8 **57** 1) -1 2) -5 3) 5 4) 0 5) 5 **58** 1) 3 2) 2

59 1) 내적, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ① $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$, ② $-|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$ 2) $a_1b_1+a_2b_2$

60 1) 45° 2) 120° 3) 90° 4) 180°

61 1) $\sqrt{3}$ 2) 120° **62** 1) -6 2) 9

63 1) -2 2) $\dfrac{2}{3}$ **64** 1) $\angle O=90^\circ$인 직각삼각형 2) $x=y=\sqrt{3}$ **65** 1) ① $|\vec{a}|\,|\vec{b}|$, $\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$ ② $|\vec{a}|\,|\vec{b}|$, $\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$ 2) ① 0 ② $\pm|\vec{a}|\,|\vec{b}|$

66 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}$, $\vec{b}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$

67 1)~2) 해설 참조

68 $\vec{a}$, $-\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{a}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, 4, 9, 3

69 5 **70** 1) 2 2) $\sqrt{14}$ 3) $\sqrt{29}$ **71** 1) 10 2) 8 **72** 1) 3 2) $\dfrac{1}{4}$ **73** $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형

74 90° **75** (1) 교환 (2) 분배 (3) $k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

[단원 총정리 문제]

01 ③ **02** ④ **03** ⑤ **04** -2 **05** ③

06 선분 AB를 지름으로 하는 원 **07** ⑤ **08** ②

09 120° **10** -1 **11** $2\sqrt{3}$ **12** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

[Ⅱ-4 직선의 방정식과 원의 방정식]

76 1) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{5}$ 2) $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-1}{-1}$ **77** 1) $(4,\ 3)$ 2) $(-5,\ 1)$ 3) $(-1,\ -7)$ **78** 1) $y=7$ 2) $x=-2$

79 1) $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-1}{3}$ 2) $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-9}{-6}$ 3) $x=5$

80 1) $\dfrac{x-5}{-5}=\dfrac{y+2}{5}$ 2) $x-4=\dfrac{y-4}{-7}$

81 1) $\vec{a}+t\vec{u}$ 2) x_1, u_1, y_1, u_2 3) x_1, x_2-x_1, y_1, y_2-y_1

82 1) $2x-y-4=0$ 2) $x+3y-7=0$ 3) $-2x+3y-10=0$

83 1) $(2,\ 6)$ 2) $(3,\ 7)$ 3) $(2,\ 8)$ 4) $(9,\ 0)$ 5) $(0,\ 7)$

84 1) $x=8$ 2) $y=8$

85 1) $5x-4y+18=0$ 2) $6x+y-28=0$

86 1) $2x-y-1=0$ 2) $b=2a$

87 1) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$ 2) $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

88 1) $\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$ 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ **89** 1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 3) $\dfrac{4}{5}$ **90** 1) 3 2) -1 **91** 1) -9 2) 1

92 1) $y=-\dfrac{1}{2}x$ 2) $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y-3}{-1}$

93 1) $\dfrac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}|\,|\vec{u_2}|}$ 2) ① $k\vec{u_2}$, $\dfrac{b_1}{b_2}$ ② $a_1a_2+b_1b_2=0$

94 $(x_1,\ y_1)$, x_1, y_1, $(\vec{p}-\vec{a})$, $(\vec{p}-\vec{a})$, $x-x_1$, $y-y_1$

95 $(x+2)^2+(y-3)^2=1$

96 1) 점 A를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원 2) 점 A를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 4인 원 3) 점 A를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$인 원

97 1) $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ 2) $x^2+(y+1)^2=8$ 3) $(x-1)^2+(y-1)^2=8$ 4) $(x-3)^2+y^2=5$

98 1) $(x+2)^2+(y-3)^2=2$ 2) 13π

99 $|\overrightarrow{AP}|=r$, $\vec{p}-\vec{a}$, $|\vec{p}-\vec{a}|$

[단원 총정리 문제]

01 ② 02 ① 03 ③ 04 ④ 05 ③
06 ⑤ 07 ④ 08 3 09 ③ 10 ④
11 ③ 12 ②

Ⅲ 공간도형과 공간좌표

문제편 pp. 96~127

[Ⅲ-1 공간도형]

01 1) ○ 2) × 3) ○ 4) ○ 5) × 6) ○
02 1) 10 2) 20 03 1) 한 직선 2) 한 점 3) 두 직선 4) 평행한 04 1) 모서리 AC, 모서리 AD, 모서리 AE, 모서리 BC, 모서리 BE 2) 모서리 ED 3) 모서리 CD, 모서리 ED 4) 모서리 AE, 모서리 AB
05 1) ○ 2) ○ 3) × 06 1) 한 점 2) 평행 3) 꼬인 위치
07 1) 면 ABCD, 면 ABFE 2) 면 AEHD, 면 BFGC 3) 면 CGHD, 면 EFGH 4) 면 AEHD, 면 CGHD 5) 모서리 AE, 모서리 EH, 모서리 HD, 모서리 DA 6) 모서리 AD, 모서리 BC, 모서리 FG, 모서리 EH
08 1) 직선 2) 한 점 3) 평행 09 1) 면 FLKE 2) 면 BHIC, 면 DJKE, 면 ABCDEF, 면 GHIJKL 3) 모서리 EK 4) 면 AGLF, 면 GHIJKL
10 1) 4 2) 6 3) 4 11 1) 모서리 DE, 모서리 EF, 모서리 DF 2) 면 DEF 3) 4 4) 4
12 ㄱ, ㄴ, ㄷ 13 1) ○ 2) ○ 3) × 4) ○ 5) ○ 14 1) 만난다 2) 평행
15 1) ○ 2) × 3) ○ 4) ×
16 1) × 2) × 3) ○ 4) ○ 5) ×
17 1) 면 AEHD, 면 CGHD 2) 면 ABCD, 면 EFGH 3) 60° 18 1) 90° 2) 45° 3) 90° 19 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
20 $\frac{1}{2}$ 21 $\frac{\sqrt{6}}{3}$
22 1) ① $l \parallel m$ ② $\alpha \parallel m$ ③ 평면 α 2) 이루는 각 3) $l \perp \alpha$, 수선, 수선의 발

[단원 총정리 문제]

01 ③ 02 ③ 03 ⑤ 04 면 ACD, 면 ADE, 면 BCDE 05 ㄱ, ㄷ 06 ③ 07 ⑤
08 모서리 DF 09 0 10 60° 11 18
12 ⑤

[Ⅲ-2 삼수선과 정사영]

23 1) $\overline{PH}$ 2) $\overline{OH}$ 3) $\overline{PO}$ 24 1) $\sqrt{29}$ 2) 4
25 1) $2\sqrt{2}$ 2) $\frac{2\sqrt{61}}{5}$ 26 $\overline{BC}$, $\overline{BC}$, BCD 27 $\sqrt{6}$
28 삼수선, (1) $\overline{PH}\perp l$ (2) $\overline{OH}\perp l$ (3) $\overline{PO}\perp\alpha$
29 $\perp$, $\perp$, 45°, 45° 30 45° 31 $\perp$, $\perp$, $2a$, $\sqrt{3}a$, 3, 3, $\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\overline{AM}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\frac{1}{3}$ 32 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 33 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
34 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 35 1) 이면각, 이면각의 변, 이변각의 면 2) 이면각의 크기 36 1) $\overline{FH}$ 2) $\triangle$EGF
37 1) $\overline{CD}$ 또는 $\overline{AB}$ 2) $\overline{CD}$ 또는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원
38 1) $\overline{EG}$ 2) $\triangle$EFG 3) $\overline{EG}$와 $\overline{HF}$의 교점
39 1) 정사영 2) 정사영
40 1) 6 2) $6\sqrt{2}$ 3) $\frac{2}{3}$ 41 $4\sqrt{2}$ 42 $\sqrt{6}$
43 $\overline{AB}\cos\theta$ 44 1) 40 2) 90 3) $10\sqrt{2}$ 4) 8π
45 1) 45° 2) 60° 3) 45° 4) 30° 46 60° 47 $2\sqrt{3}\pi$
48 $6\sqrt{3}\pi$ 49 $24\sqrt{3}\pi$ 50 10 cm 51 $S\cos\theta$

[단원 총정리 문제]

01 ㄱ, ㄴ, ㄹ 02 ③ 03 ② 04 ⑤
05 ③ 06 ① 07 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 08 $\sqrt{6}$ 09 ②
10 ④ 11 60° 12 4

[Ⅲ-3 공간좌표]

52 1) P(1, 5, 3) 2) P(1, 3, -2) 3) P(5, -1, 2) 4) P(2, -3, -1) 53 1)~2) 해설 참조 54 공간좌표, P(a, b, c), x좌표, y좌표, z좌표 55 1) (4, 0, 0) 2) (0, -2, 0) 3) (0, 0, -1) 56 1) (-1, 2, 0) 2) (0, 2, 3) 3) (-1, 0, 3)

57 1) $(a,\ 0,\ 0)$, $(0,\ b,\ 0)$, $(0,\ 0,\ c)$

2) $(a,\ b,\ 0)$, $(0,\ b,\ c)$, $(a\ 0,\ c)$ **58** 1) x축 : $(3,\ -4,\ 2)$, y축 : $(-3,\ 4,\ 2)$, z축 : $(-3,\ -4,\ -2)$

2) xy평면 : $(3,\ 4,\ 2)$, yz평면 : $(-3,\ 4,\ -2)$, zx평면 : $(3,\ -4,\ -2)$ **59** $(3,\ -4,\ -7)$ **60** $\mathrm{S}(2,\ 3,\ -4)$

61 2 **62** 1) $(a,\ -b,\ -c)$, $(-a,\ b,\ -c)$, $(-a,\ -b,\ c)$

2) $(a,\ b,\ -c)$, $(-a,\ b,\ c)$, $(a,\ -b,\ c)$

63 1) 3 2) 3 **64** -2, 4 **65** 6 **66** 2

67 1) $(-3,\ 0,\ 0)$ 2) $(0,\ 3,\ 0)$ **68** $(0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ -2,\ 0)$

69 1) $\sqrt{22}$ 2) $\sqrt{14}$ **70** $3\sqrt{5}$ **71** 1) $\sqrt{2}$ 2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 3) 2

72 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, $\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}$

73 1) $\mathrm{P}\left(2,\ -\frac{5}{3},\ 1\right)$ 2) $\mathrm{Q}(-14,\ 9,\ 9)$ 3) $\mathrm{M}\left(1,\ -1,\ \frac{3}{2}\right)$

74 1) $\left(3,\ \frac{7}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 2) $(4,\ 2,\ 1)$ **75** 1) $\mathrm{P}\left(\frac{17}{3},\ \frac{5}{3},\ 0\right)$

2) $\mathrm{P}'(6,\ 8,\ 3)$ **76** 1) $(-1,\ 6,\ 8)$ 2) $\sqrt{10}$

77 0 **78** $\left(\frac{4}{3},\ 2,\ \frac{8}{3}\right)$

79 1) ① $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$

② $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$

2) $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

3) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{2},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{2},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{2}\right)$

80 4, $(-1,\ 2,\ 4)$, $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$

81 1) $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=9$ 2) $x^2+y^2+z^2=14$

82 1) 중심의 좌표 : $(4,\ -2,\ 1)$, 반지름이 길이 : 2

2) 중심의 좌표 : $(0,\ -3,\ 4)$, 반지름이 길이 : 5

83 1) $(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=3$

2) $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=5$

84 4, $y+2$, $z+3$, 2, -2, -3, 2

85 1) 중심의 좌표 : $(1,\ -2,\ 3)$, 반지름이 길이 : 4

2) 중심의 좌표 : $(-4,\ 0,\ 1)$, 반지름이 길이 : 5

3) 중심의 좌표 : $(3,\ 0,\ 0)$, 반지름이 길이 : 3

86 1) $x^2+y^2+z^2-x-3y+4z=0$

2) $x^2+y^2+z^2-6y+8z=0$

87 1) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=16$

2) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$

88 10 **89** 2 **90** 3 **91** 8π **92** 35π

93 $4\sqrt{2}$ **94** -2 **95** 최댓값 : 4, 최솟값 : 2

96 16 **97** 8 **98** 14

99 1) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

2) $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$

[단원 총정리 문제]

01 ① **02** ③ **03** $-\frac{1}{4}$ **04** $2\sqrt{10}$ **05** 2

06 6 **07** 96 **08** 96π **09** ② **10** 8

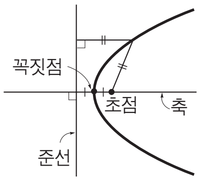
11 ④ **12** ③

Ⅰ 이차곡선

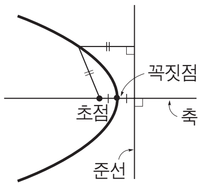
Ⅰ－1 이차곡선

pp. 10 ~ 31

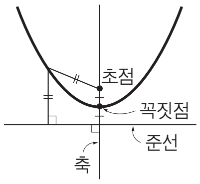
01 답 1)



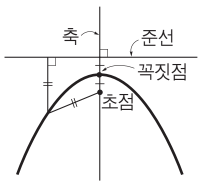
2)



3)



4)



02 답 1) 포물선 2) 초점, 준선, 축, 꼭짓점

03 답 $2,\ y^2=8x$

초점이 F$(2,\ 0)$이고 준선이 $x=-2$인 포물선의 방정식을 $y^2=4px$라 하면

$p=\boxed{2}$

구하는 포물선의 방정식은

$\boxed{y^2=8x}$

04 답 $-1,\ y^2=-4x$

초점이 F$(-1,\ 0)$이고 준선이 $x=1$인 포물선의 방정식을 $y^2=4px$라 하면

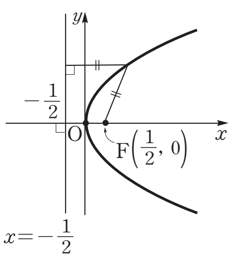
$p=\boxed{-1}$

구하는 포물선의 방정식은

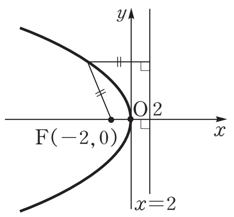
$\boxed{y^2=-4x}$

05 답 1) $y^2=2x$, 그래프 해설 참조
2) $y^2=-8x$, 그래프 해설 참조

1) $y^2=4\cdot\frac{1}{2}\cdot x=2x$
$\therefore\ y^2=2x$



2) $y^2=4\cdot(-2)\cdot x=-8x$
$\therefore\ y^2=-8x$



06 답 $1,\ x^2=4y$

초점이 F$(0,\ 1)$이고 준선이 $y=-1$인 포물선의 방정식을 $x^2=4py$라 하면 $p=\boxed{1}$

구하는 포물선의 방정식은

$\boxed{x^2=4y}$

07 답 $\frac{1}{3},\ x^2=\frac{4}{3}y$

초점이 F$\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$이고 준선이 $y=-\frac{1}{3}$인 포물선의 방정식을 $x^2=4py$라 하면 $p=\boxed{\frac{1}{3}}$

구하는 포물선의 방정식은

$\boxed{x^2=\frac{4}{3}y}$

08 답 $-\frac{1}{8},\ x^2=-\frac{1}{2}y$

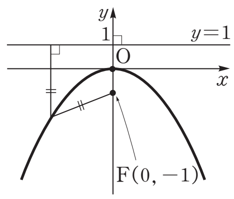
초점이 F$\left(0,\ -\frac{1}{8}\right)$이고 준선이 $y=\frac{1}{8}$인 포물선의 방정식을 $x^2=4py$라 하면 $p=\boxed{-\frac{1}{8}}$

구하는 포물선의 방정식은

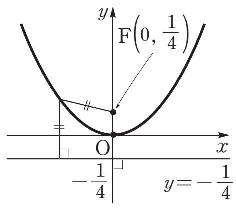
$\boxed{x^2=-\frac{1}{2}y}$

09 답 1) $x^2=-4y$, 그래프 해설 참조
2) $x^2=y$, 그래프 해설 참조
3) $x^2=\frac{1}{4}y$, 그래프 해설 참조

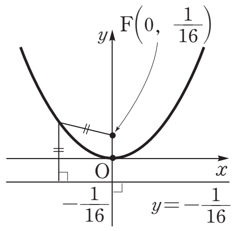
1) $x^2=4\cdot(-1)\cdot y=-4y$
$\therefore\ x^2=-4y$



2) $x^2=4\cdot\frac{1}{4}\cdot y=y$
$\therefore\ x^2=y$



3) $x^2=4\cdot\frac{1}{16}\cdot y=\frac{1}{4}y$ $\quad\therefore\ x^2=\frac{1}{4}y$



10 답 1) $\mathbf{F\left(\frac{1}{4}, 0\right), x=-\frac{1}{4}}$

2) $\mathbf{F(-4, 0), x=4}$

3) $\mathbf{F(3, 0), x=-3}$

4) $\mathbf{F\left(-\frac{1}{16}, 0\right), x=\frac{1}{16}}$

1) $y^2=x=4\cdot\frac{1}{4}\cdot x$이므로 초점의 좌표가 $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, 준선의 방정식이 $x=-\frac{1}{4}$이다.

2) $y^2=-16x=4\cdot(-4)\cdot x$이므로 초점의 좌표가 $F(-4, 0)$, 준선의 방정식이 $x=4$이다.

3) $y^2=12x=4\cdot3\cdot x$이므로 초점의 좌표가 $F(3, 0)$, 준선의 방정식이 $x=-3$이다.

4) $y^2=-\frac{1}{4}x=4\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)\cdot x$이므로 초점의 좌표가 $F\left(-\frac{1}{16}, 0\right)$, 준선의 방정식이 $x=\frac{1}{16}$이다.

11 답 1) $\mathbf{F\left(0, \frac{1}{4}\right), y=-\frac{1}{4}}$ 2) $\mathbf{F(0, 2), y=-2}$

3) $\mathbf{F(0, -1), y=1}$ 4) $\mathbf{F\left(0, -\frac{1}{2}\right), y=\frac{1}{2}}$

1) $x^2=y=4\cdot\frac{1}{4}\cdot y$이므로 초점의 좌표가 $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$, 준선의 방정식이 $y=-\frac{1}{4}$이다.

2) $x^2=8x=4\cdot2\cdot y$이므로 초점의 좌표가 $F(0, 2)$, 준선의 방정식이 $y=-2$이다.

3) $x^2=-4y=4\cdot(-1)\cdot y$이므로 초점의 좌표가 $F(0, -1)$, 준선의 방정식이 $y=1$이다.

4) $x^2=-2y=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot y$이므로 초점의 좌표가 $F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, 준선의 방정식이 $y=\frac{1}{2}$이다.

12 답 $\mathbf{\frac{25}{4}}$

포물선 $y^2=4x=4\cdot1\cdot x$의 준선의 방정식은

$x=\boxed{-1}$

두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 H, H′이라 하면

$\overline{AF}=\boxed{\overline{AH}}$, $\overline{BF}=\boxed{\overline{BH'}}$

이므로

$\overline{AF}=\overline{AC}+\boxed{1}=\boxed{5}$,

$\overline{BF}=\overline{BD}+\boxed{1}=\boxed{\frac{5}{4}}$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=5+\frac{5}{4}=\boxed{\frac{25}{4}}$

13 답 $\mathbf{\frac{94}{5}}$

포물선 $x^2=12y=4\cdot3\cdot y$의 준선의 방정식은 $y=-3$

두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면

$\overline{AF}=\overline{AH}$, $\overline{BF}=\overline{BH'}$

이므로

$\overline{AF}=\overline{AC}+3=8+3=11$,

$\overline{BF}=\overline{BD}+3=\frac{24}{5}+3=\frac{39}{5}$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=11+\frac{39}{5}=\frac{94}{5}$

14 답 $\mathbf{\frac{1}{2}}$

포물선 $y^2=8x=4\cdot2\cdot x$의 준선의 방정식은 $x=-2$

두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면

$\overline{AF}=\overline{AH}$, $\overline{BF}=\overline{BH'}$

이므로

$\overline{AF}=\overline{AC}+2=8+2=10$, $\overline{BF}=\overline{BD}+2$

$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}$이고, $\overline{AB}=\frac{25}{2}$이므로

$10+\overline{BD}+2=\frac{25}{2}$ $\quad\therefore\ \overline{BD}=\frac{1}{2}$

15 답 3

포물선 $y^2=4x=4\cdot1\cdot x$의 초점 F의 좌표는 $(1, 0)$이고, 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심이 초점 F와 일치하므로

$\frac{x_1+x_2+x_3}{\boxed{3}}=\boxed{1}$

$\therefore\ x_1+x_2+x_3=\boxed{3}$

16 답 6

포물선 $x^2=8y=4\cdot2\cdot y$의 초점 F의 좌표는 $(0, 2)$이고, 세 점 A, B, C의 y좌표를 각각 y_1, y_2, y_3이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심이 초점 F와 일치하므로

$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=2$ $\quad\therefore\ y_1+y_2+y_3=6$

17 답 3

포물선 $y^2=16x=4\cdot4\cdot x$의 초점 F의 좌표는 $(4, 0)$이다.

세 점 $A(1, -4)$, $B(4, 8)$, $C(x_1, x_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 초점 F와 일치하므로

$\frac{1+4+x_1}{3}=4$, $\frac{-4+8+x_2}{3}=0$

즉, $x_1=7$, $x_2=-4$이므로

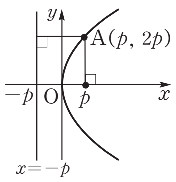
$x_1+x_2=7-4=3$

18 답 A(2, 4)

점 $A(p, 2p)$에서 포물선의 준선 $x=-p$까지의 거리가 4이므로

$2p=4$ $\quad\therefore p=2$

$\therefore$ A(2, 4)

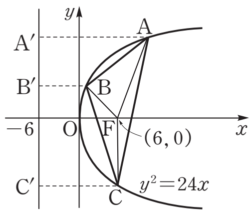


19 답 36

세 점 A, B, C에서 포물선

$y^2=24x=4\cdot6\cdot x$

의 준선 $x=-6$에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$\overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}$

$=\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}$

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 a, b, c라 하면

$\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}=(6+a)+(6+b)+(6+c)$

$=18+a+b+c$

그런데 포물선 $y^2=24x$의 초점 F의 좌표는 $(6, 0)$이고, 점 F는 $\triangle ABC$의 무게중심과 일치하므로

$\dfrac{a+b+c}{3}=6$ $\quad\therefore a+b+c=18$

$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}=18+(a+b+c)=18+18=36$

20 답 1) $y^2=4px$ 2) $x^2=4py$

21 답 1) $y^2=2(x-1)$ 2) $y^2=-6(x-1)$

3) $(x-1)^2=3y$

22 답 1) $(y+2)^2=7x$ 2) $(y+2)^2=-16x$

3) $x^2=9(y+2)$

23 답 1) $(y+2)^2=x-3$

2) $(y+2)^2=-3(x-3)$

3) $(x-3)^2=4(y+2)$

4) $(x-3)^2=-12(y+2)$

24 답 1) 초점 : $(2, -2)$, 준선 : $x=0$

2) 초점 : $\left(\dfrac{15}{4}, 0\right)$, 준선 : $x=\dfrac{17}{4}$

3) 초점 : $(4, -3)$, 준선 : $y=-7$

4) 초점 : $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$, 준선 : $y=\dfrac{3}{2}$

1) $(y+2)^2=4(x-1)$은 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 $\boxed{1}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{-2}$만큼 평행이동한 것이다.

	$y^2=4x \longrightarrow (y+2)^2=4(x-1)$
초점	$(1, 0) \xrightarrow{(1+\boxed{1},\, 0-\boxed{2})} (2, \boxed{-2})$
준선	$x=-1 \xrightarrow{x=-1+\boxed{1}} \boxed{x=0}$

2) $y^2=-x+4=-(x-4)$는 $y^2=-x$를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

	$y^2=-x \longrightarrow y^2=-(x-4)$
초점	$\left(-\dfrac{1}{4}, 0\right) \xrightarrow{\left(-\frac{1}{4}+4,\, 0\right)} \left(\dfrac{15}{4}, 0\right)$
준선	$x=\dfrac{1}{4} \xrightarrow{x=\frac{1}{4}+4} x=\dfrac{17}{4}$

3) $(x-4)^2=8(y+5)$는 $x^2=8y$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

	$y^2=8y \longrightarrow (x-4)^2=8(y+5)$
초점	$(0, 2) \xrightarrow{(0+4,\, 2-5)} (4, -3)$
준선	$y=-2 \xrightarrow{y=-2-5} y=-7$

4) $(x+1)^2=-2(y-1)$은 $x^2=-2y$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

	$x^2=-2y \longrightarrow (x+1)^2=-2(y-1)$
초점	$\left(0, -\dfrac{1}{2}\right) \xrightarrow{\left(0-1,\, -\frac{1}{2}+1\right)} \left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$
준선	$y=\dfrac{1}{2} \xrightarrow{y=\frac{1}{2}+1} y=\dfrac{3}{2}$

25 답 1) 꼭짓점 : $(-1, 3)$, 초점 : $(1, 3)$, 준선 : $x=-3$

2) 꼭짓점 : $(4, 2)$, 초점 : $(3, 2)$, 준선 : $x=5$

3) 꼭짓점 : $(-1, 1)$, 초점 : $\left(-\dfrac{3}{4}, 1\right)$, 준선 : $x=-\dfrac{5}{4}$

4) 꼭짓점 : $(-2, -1)$, 초점 : $(-2, 0)$, 준선 : $y=-2$

5) 꼭짓점 : $(-3, 2)$, 초점 : $(-3, 1)$, 준선 : $y=3$

6) 꼭짓점 : $(2, 3)$, 초점 : $(2, 5)$, 준선 : $y=1$

1) $y^2-6y-8x+1=0$

$y^2-6y=8x-1$

$y^2-6y+\boxed{9}=8x-1+\boxed{9}$

$\therefore (y-\boxed{3})^2=8(x+\boxed{1})$

즉, $(y-\boxed{3})^2=8(x+\boxed{1})$은 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 $\boxed{-1}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{3}$만큼 평행이동한 것이다.

	$y^2=8x \longrightarrow (y-\boxed{3})^2=8(x+\boxed{1})$
꼭짓점	$(0, 0) \xrightarrow{(0-\boxed{1},\, 0+\boxed{3})} (\boxed{-1}, 3)$
초점	$(2, 0) \xrightarrow{(2-\boxed{1},\, 0+\boxed{3})} (1, \boxed{3})$
준선	$x=-2 \xrightarrow{x=-2-\boxed{1}} x=\boxed{-3}$

2) $y^2-4y=-4x+12$

$y^2-4y+4=-4x+12+4$

$\therefore (y-2)^2=-4(x-4)$

즉, $(y-2)^2=-4(x-4)$는 $y^2=-4x$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

	$y^2=-4x \longrightarrow (y-2)^2=-4(x-4)$
꼭짓점	$(0, 0) \xrightarrow{(0+4,\ 0+2)} (4, 2)$
초점	$(-1, 0) \xrightarrow{(-1+4,\ 0+2)} (3, 2)$
준선	$x=1 \xrightarrow{x=1+4} x=5$

3) $y^2-2y=x \Rightarrow y^2-2y+1=x+1$

$\therefore (y-1)^2=x+1$

즉, $(y-1)^2=x+1$은 $y^2=x$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

	$y^2=x \longrightarrow (y-1)^2=x+1$
꼭짓점	$(0, 0) \xrightarrow{(0-1,\ 0+1)} (-1, 1)$
초점	$\left(\frac{1}{4}, 0\right) \xrightarrow{\left(\frac{1}{4}-1,\ 0+1\right)} \left(-\frac{3}{4}, 1\right)$
준선	$x=-\frac{1}{4} \xrightarrow{x=-\frac{1}{4}-1} x=-\frac{5}{4}$

4) $x^2+4x=4y \Rightarrow x^2+4x+4=4y+4$

$\therefore (x+2)^2=4(y+1)$

즉, $(x+2)^2=4(y+1)$은 $x^2=4y$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

	$x^2=4y \longrightarrow (x+2)^2=4(y+1)$
꼭짓점	$(0, 0) \xrightarrow{(0-2,\ 0-1)} (-2, -1)$
초점	$(0, 1) \xrightarrow{(0-2,\ 1-1)} (-2, 0)$
준선	$y=-1 \xrightarrow{y=-1-1} y=-2$

5) $x^2+6x=-4y-1 \Rightarrow x^2+6x+9=-4y-1+9$

$\therefore (x+3)^2=-4(y-2)$

즉, $(x+3)^2=-4(y-2)$는 $x^2=-4y$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

	$x^2=-4y \longrightarrow (x+3)^2=-4(y-2)$
꼭짓점	$(0, 0) \xrightarrow{(0-3,\ 0+2)} (-3, 2)$
초점	$(0, -1) \xrightarrow{(0-3,\ -1+2)} (-3, 1)$
준선	$y=1 \xrightarrow{y=1+2} y=3$

6) $x^2-4x-8y+28=0 \Rightarrow x^2-4x=8y-28$

$x^2-4x+4=8y-28+4$

$\therefore (x-2)^2=8(y-3)$

즉, $(x-2)^2=8(y-3)$은 $x^2=8y$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

	$x^2=8y \longrightarrow (x-2)^2=8(y-3)$
꼭짓점	$(0, 0) \xrightarrow{(0+2,\ 0+3)} (2, 3)$
초점	$(0, 2) \xrightarrow{(0+2,\ 2+3)} (2, 5)$
준선	$y=-2 \xrightarrow{y=-2+3} y=1$

26 답 1) $(y-b)^2=4p(x-a)$

① (a, b) ② $(p+a, b)$

③ $x=-p+a$

2) $(x-a)^2=4p(y-b)$

① (a, b) ② $(a, p+b)$

③ $y=-p+b$

27 답 1) 초점 : $(4, 0)$, $(-4, 0)$,

꼭짓점 : $(5, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$

장축의 길이 : 10, 단축의 길이 : 6

2) 초점 : $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$,

꼭짓점 : $(3, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$

장축의 길이 : 6, 단축의 길이 : 2

3) 초점 : $(0, 3)$, $(0, -3)$,

꼭짓점 : $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 5)$, $(0, -5)$

장축의 길이 : 10, 단축의 길이 : 8

28 답 1) 10 2) 8

29 답 타원, 초점, 장축, 단축, 중심

30 답 $2a$, $2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, a^2-c^2, a^2-c^2, $b^2=a^2-c^2$, b^2

타원 위의 임의의 한 점을 $P(x, y)$라 하면

$\overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $\overline{PF'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$\overline{PF}+\overline{PF'}=\boxed{2a}$이므로 $\overline{PF}=2a-\overline{PF'}$에서

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\boxed{2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}}$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$cx+a^2=a\times\boxed{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$(\boxed{a^2-c^2})x^2+a^2y^2=a^2(\boxed{a^2-c^2})$

$\boxed{b^2=a^2-c^2}$으로 놓으면

$\boxed{b^2}x^2+a^2y^2=a^2b^2$

양변을 a^2b^2으로 나누면

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

31 답 $2b$, $2b-\sqrt{x^2+(y+c)^2}$, $\sqrt{x^2+(y+c)^2}$, b^2-c^2, b^2-c^2, $a^2=b^2-c^2$, a^2

타원 위의 임의의 한 점을 $P(x, y)$라 하면

$\overline{PF}=\sqrt{x^2+(y-c)^2}$, $\overline{PF'}=\sqrt{x^2+(y+c)^2}$

$\overline{PF}+\overline{PF'}=\boxed{2b}$이므로

$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=\boxed{2b-\sqrt{x^2+(y+c)^2}}$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$cy+b^2=b\times\boxed{\sqrt{x^2+(y+c)^2}}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2x^2+(\boxed{b^2-c^2})y^2=b^2(\boxed{b^2-c^2})$

$\boxed{a^2=b^2-c^2}$)으로 놓으면

$b^2x^2+\boxed{a^2}y^2=a^2b^2$

양변을 a^2b^2으로 나누면 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

32 답 1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$　2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$　3) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$　4) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

1) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$이라 하면 $2a=\boxed{10}$ ⇨ $a=\boxed{5}$, $c^2=\boxed{16}$

또, $c^2=a^2-b^2$이므로

$\boxed{16}=\boxed{25}-b^2$　$\therefore b^2=\boxed{9}$

$\therefore \dfrac{x^2}{\boxed{25}}+\dfrac{y^2}{\boxed{9}}=1$

2) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$이라 하면 $2a=6$ ⇨ $a=3$, $c^2=4$

또, $c^2=a^2-b^2$이므로 $4=9-b^2$　$\therefore b^2=5$

$\therefore \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

3) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점의 좌표를 $(0, c)$, $(0, -c)$라 하면 $2b=4$ ⇨ $b=2$, $c^2=1$

또, $c^2=b^2-a^2$이므로 $1=4-a^2$　$\therefore a^2=3$

$\therefore \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

4) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점의 좌표를 $(0, c)$, $(0, -c)$라 하면 $2b=10$ ⇨ $b=5$, $c^2=16$

또, $c^2=b^2-a^2$이므로

$16=25-a^2$　$\therefore a^2=9$

$\therefore \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

33 답 1) 10, 4, $(\sqrt{21}, 0)$, $(-\sqrt{21}, 0)$
2) $2\sqrt{7}$, 4, $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$
3) 20, 12, $(0, 8)$, $(0, -8)$
4) 6, 2, $(0, 2\sqrt{2})$, $(0, -2\sqrt{2})$
5) 6, $2\sqrt{5}$, $(0, 2)$, $(0, -2)$

1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ⇨ $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$에서
(장축의 길이)$=2\times5=10$, (단축의 길이)$=2\times2=4$
두 초점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$이라 하면
$c^2=25-4=21$　$\therefore (\sqrt{21}, 0)$, $(-\sqrt{21}, 0)$

2) $4x^2+7y^2=28$ ⇨ $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ⇨ $\dfrac{x^2}{(\sqrt{7})^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$에서
(장축의 길이)$=2\times\sqrt{7}=2\sqrt{7}$, (단축의 길이)$=2\times2=4$
두 초점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$이라 하면
$c^2=7-4=3$　$\therefore (\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$

3) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{100}=1$ ⇨ $\dfrac{x^2}{6^2}+\dfrac{y^2}{10^2}=1$에서
(장축의 길이)$=2\times10=20$, (단축의 길이)$=2\times6=12$
두 초점의 좌표를 $(0, c)$, $(0, -c)$라 하면
$c^2=100-36=64$　$\therefore (0, 8)$, $(0, -8)$

4) $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ ⇨ $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$에서
(장축의 길이)$=2\times3=6$, (단축의 길이)$=2\times1=2$
두 초점의 좌표를 $(0, c)$, $(0, -c)$라 하면
$c^2=9-1=8$　$\therefore (0, 2\sqrt{2})$, $(0, -2\sqrt{2})$

5) $9x^2+5y^2=45$ ⇨ $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ⇨ $\dfrac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$에서
(장축의 길이)$=2\times3=6$, (단축의 길이)$=2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$
두 초점의 좌표를 $(0, c)$, $(0, -c)$라 하면
$c^2=9-5=4$　$\therefore (0, 2)$, $(0, -2)$

34 답 $2\sqrt{2}$

포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1, 0)$이므로
$a^2=1^2+1^2=2$　$\therefore a=\sqrt{2}$
따라서 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\,(a>1)$의 장축의 길이는 $2a=2\sqrt{2}$이다.

35 답 $5\sqrt{3}$

구하는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하고
$B(c, 0)$, $C(-c, 0)$(단, $a>c>0$)이라 하면
$\overline{BC}=2c=5$에서 $c=\dfrac{5}{2}$
$\overline{AB}+\overline{AC}=2a=10$에서 $a=5$
$b^2=a^2-c^2=25-\dfrac{25}{4}=\dfrac{75}{4}$
따라서 $b=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$이므로 구하는 타원의 단축의 길이는
$2b=5\sqrt{3}$이다.

36 답 20

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점 F_1, F_2로부터 타원 위의 한 점까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로 $2\times5=10$이다.

따라서 구하는 이동 거리는 $2\times10=20$이다.

37 답 8

타원의 장축의 길이는 $\overline{AB}$의 길이와 같으므로

$\overline{AB}^2=6^2+8^2=100$

$\therefore \overline{AB}=10$

또, 타원의 단축의 길이는 밑면의 지름의 길이와 같으므로 단축의 길이는 $2\times3=6$이다.

이때 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$이므로

한 초점을 $F(c, 0)(c>0)$이라 하면

$c^2=25-9=16 \Rightarrow c=4$

따라서 구하는 두 초점 사이의 거리는 $2c=8$이다.

38 답 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

39 답 1) $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$

2) $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

3) $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+4)^2}{5}=1$

4) $\frac{(x-3)^2}{6}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

4) 타원 $\frac{(x-5)^2}{6}+\frac{y^2}{16}=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하였으므로 x 대신 $x-(-2)=x+2$, y 대신 $y-3$을 대입하여 구하면

$\frac{\{(x+2)-5\}^2}{6}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

$\therefore \frac{(x-3)^2}{6}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

40 답 1) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

2) $(-6, 2)$, $(0, 2)$, $(-3, 0)$, $(-3, 4)$, 6, 4

3) $(\sqrt{5}-3, 2)$, $(-\sqrt{5}-3, 2)$

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$의 꼭짓점의 좌표는

$(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -2)$, $(0, 2)$

이고, x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 꼭짓점의 좌표는

$(-3-3, 0+2)$, $(3-3, 0+2)$,

$(0-3, -2+2)$, $(0-3, 2+2)$

즉, $(-6, 2)$, $(0, 2)$, $(-3, 0)$, $(-3, 4)$이다.

한편, 장축과 단축의 길이는 평행이동해도 변함없으므로 장축의 길이는 $2\times3=6$, 단축의 길이는 $2\times2=4$이다.

3) 원래 타원의 초점의 좌표 $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$을 평행이동하면 $(\sqrt{5}-3, 2)$, $(-\sqrt{5}-3, 2)$이다.

41 답 1) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

2) $\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{7}=1$

3) $\frac{(x+1)^2}{2}+(y+1)^2=1$

4) $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{3}=1$

1) $9x^2+4y^2+18x+8y-23=0$

$9x^2+18x+4y^2+8y-23=0$

$9(x^2+2x)+4(y^2+2y)-23=0$

$9(x^2+2x+1-1)+4(y^2+2y+1-1)-23=0$

$9(x^2+2x+1)-9+4(y^2+2y+1)-4-23=0$

$9(x+1)^2+4(y+1)^2=36$

$\therefore \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

2) $7x^2+3y^2-28x-18y+34=0$

$7x^2-28x+3y^2-18y+34=0$

$7(x^2-4x)+3(y^2-6y)+34=0$

$7(x^2-4x+4-4)+3(y^2-6y+9-9)+34=0$

$7(x^2-4x+4)-28+3(y^2-6y+9)-27+34=0$

$7(x-2)^2+3(y-3)^2=21$

$\therefore \frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{7}=1$

3) $x^2+2y^2+2x+4y+1=0$

$x^2+2x+2y^2+4y+1=0$

$(x^2+2x)+2(y^2+2y)+1=0$

$(x^2+2x+1-1)+2(y^2+2y+1-1)+1=0$

$(x^2+2x+1)-1+2(y^2+2y+1)-2+1=0$

$(x+1)^2+2(y+1)^2=2$

$\therefore \frac{(x+1)^2}{2}+(y+1)^2=1$

4) $3x^2+8y^2-12x-48y+60=0$

$3x^2-12x+8y^2-48y+60=0$

$3(x^2-4x)+8(y^2-6y)+60=0$

$3(x^2-4x+4-4)+8(y^2-6y+9-9)+60=0$

$3(x^2-4x+4)-12+8(y^2-6y+9)-72+60=0$

$3(x-2)^2+8(y-3)^2=24$

$\therefore \dfrac{(x-2)^2}{8}+\dfrac{(y-3)^2}{3}=1$

42 답 **1)** $(\sqrt{5}+2,\ -2)$, $(-\sqrt{5}+2,\ -2)$, 6, 4 **2)** $(-2,\ 6)$, $(-2,\ 0)$, 10, 8

1) $4x^2+9y^2-16x+36y+16=0$에서

$4(x^2-4x)+9(y^2+4y)=-16$

$4(x-2)^2+9(y+2)^2=-16+16+36=36$

$\therefore \dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

이는 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표도 $(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$에서 각각 $(\sqrt{5}+2,\ -2)$, $(-\sqrt{5}+2,\ -2)$로 평행이동된다.

한편, 장축과 단축의 길이는 평행이동해도 변함없으므로 장축의 길이는 $2\times3=6$, 단축의 길이는 $2\times2=4$이다.

2) $25x^2+16y^2+100x-96y-156=0$에서

$25(x^2+4x)+16(y^2-6y)=156$

$25(x+2)^2+16(y-3)^2=156+100+144=400$

$\therefore \dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$

이는 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표도 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$에서 각각 $(-2,\ 6)$, $(-2,\ 0)$으로 평행이동된다.

한편, 장축과 단축의 길이는 평행이동해도 변함없으므로 장축의 길이는 $2\times5=10$, 단축의 길이는 $2\times4=8$이다.

43 답 $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$

44 답

1) 초점 : $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$, 주축의 길이 : 4

2) 초점 : $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$, 주축의 길이 : 2

3) 초점 : $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$, 주축의 길이 : 2

45 답 **1)** 2 **2)** 6

1) 쌍곡선 위의 임의의 점에서 두 초점에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로 $1-(-1)=2$

2) 쌍곡선 위의 임의의 점에서 두 초점에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로 $3-(-3)=6$

46 답 쌍곡선, 초점, 꼭짓점, 주축, 중심

47 답 $2a$, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, c^2-a^2, c^2-a^2, c^2-a^2, b^2, 1

쌍곡선 위의 임의의 한 점을 $P(x,\ y)$라 하면

$\overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $\overline{PF'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=\boxed{2a}$이므로

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\boxed{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}\pm2a$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$cx+a^2=\pm a\times\boxed{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$(\boxed{c^2-a^2})x^2-a^2y^2=a^2(\boxed{c^2-a^2})$

$b^2=\boxed{c^2-a^2}$으로 놓으면

$\boxed{b^2}x^2-a^2y^2=a^2b^2$

$\therefore \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\boxed{1}$

48 답 $2b$, $\sqrt{x^2+(y+c)^2}$, $\sqrt{x^2+(y+c)^2}$, c^2-b^2, b^2-c^2, c^2-b^2, a^2, -1

쌍곡선 위의 임의의 한 점을 $P(x,\ y)$라 하면

$\overline{PF}=\sqrt{x^2+(y-c)^2}$, $\overline{PF'}=\sqrt{x^2+(y+c)^2}$

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=\boxed{2b}$이므로

$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=\boxed{\sqrt{x^2+(y+c)^2}}\pm2b$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$cy+b^2=\pm b\times\boxed{\sqrt{x^2+(y+c)^2}}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$b^2x^2+(\boxed{c^2-b^2})y^2=b^2(\boxed{b^2-c^2})$

$a^2=\boxed{c^2-b^2}$으로 놓으면

$b^2x^2-\boxed{a^2}y^2=-b^2a^2$

$\therefore \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\boxed{-1}$

49 답 **1)** $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{11}=1$ **2)** $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ **3)** $\dfrac{x^2}{21}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ **4)** $\dfrac{x^2}{15}-y^2=-1$

1) 두 초점의 좌표가 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$인 쌍곡선의 방정식

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 $2a=\boxed{10}$ $\quad\therefore a=\boxed{5}$

$c^2=\boxed{36}$이고, $c^2=a^2+b^2$이므로

$\boxed{36}=\boxed{25}+b^2$ $\quad\therefore b^2=\boxed{11}$

$\therefore \dfrac{x^2}{\boxed{25}}-\dfrac{y^2}{\boxed{11}}=1$

2) 두 초점의 좌표가 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$인 쌍곡선의 방정식

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서

$2a=4 \quad \therefore a=2$

$c^2=9$이고, $c^2=a^2+b^2$이므로

$9=4+b^2 \quad \therefore b^2=5$

$\therefore \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

3) 두 초점의 좌표가 F$(0, c)$, F$'(0, -c)$인 쌍곡선의 방정식

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$에서

$2b=4 \quad \therefore b=2$

$c^2=25$이고, $c^2=a^2+b^2$이므로

$25=a^2+4 \quad \therefore a^2=21$

$\therefore \frac{x^2}{21}-\frac{y^2}{4}=-1$

4) 두 초점의 좌표가 F$(0, c)$, F$'(0, -c)$인 쌍곡선의 방정식

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$에서

$2b=2 \quad \therefore b=1$

$c^2=16$이고, $c^2=a^2+b^2$이므로

$16=a^2+1 \quad \therefore a^2=15$

$\therefore \frac{x^2}{15}-y^2=-1$

50 답

1) $(\sqrt{29}, 0), (-\sqrt{29}, 0)$, 10
2) $(13, 0), (-13, 0)$, 24
3) $(0, 2\sqrt{7}), (0, -2\sqrt{7})$, $4\sqrt{3}$
4) $(0, 4\sqrt{2}), (0, -4\sqrt{2})$, $4\sqrt{5}$
5) $(0, \sqrt{6}), (0, -\sqrt{6})$, 4

1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$에서

주축의 길이 : $2a=2\times\sqrt{25}=10$

두 초점의 좌표를 $(c, 0), (-c, 0)$이라 하면

$c^2=a^2+b^2=25+4=29 \quad \therefore c=\pm\sqrt{29}$

초점의 좌표 : $(\sqrt{29}, 0), (-\sqrt{29}, 0)$

2) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$에서

주축의 길이는 $2a=2\times\sqrt{144}=24$

두 초점의 좌표를 $(c, 0), (-c, 0)$이라 하면

$c^2=a^2+b^2=144+25=169 \quad \therefore c=\pm 13$

초점의 좌표 : $(13, 0), (-13, 0)$

3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{12}=-1$에서

주축의 길이 : $2b=2\times\sqrt{12}=4\sqrt{3}$

두 초점의 좌표를 $(0, c), (0, -c)$라 하면

$c^2=a^2+b^2=16+12=28 \quad \therefore c=\pm 2\sqrt{7}$

초점의 좌표 : $(0, 2\sqrt{7}), (0, -2\sqrt{7})$

4) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{20}=-1$에서

주축의 길이 : $2b=2\times\sqrt{20}=4\sqrt{5}$

두 초점의 좌표를 $(0, c), (0, -c)$라 하면

$c^2=a^2+b^2=12+20=32 \quad \therefore c=\pm 4\sqrt{2}$

초점의 좌표 : $(0, 4\sqrt{2}), (0, -4\sqrt{2})$

5) $2x^2-y^2=-4$에서 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=-1$

주축의 길이 : $2b=2\times\sqrt{4}=4$

두 초점의 좌표를 $(0, c), (0, -c)$라 하면

$c^2=a^2+b^2=2+4=6 \quad \therefore c=\pm\sqrt{6}$

초점의 좌표 : $(0, \sqrt{6}), (0, -\sqrt{6})$

51 답 $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

두 점 A$(6, 0)$, B$(-2, 0)$에서의 거리의 차가 6인 점을

P(x, y)라 하면 $|\overline{AP}-\overline{BP}|=\boxed{6}$이므로

$\sqrt{(x-6)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\pm\boxed{6}$

$\sqrt{(x-6)^2+y^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}\pm\boxed{6}$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$4x+1=\pm\boxed{3}\times\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$7x^2-\boxed{28}x-\boxed{9}y^2-35=0$

따라서 구하는 도형의 방정식은 $\frac{(x-\boxed{2})^2}{\boxed{9}}-\frac{y^2}{\boxed{7}}=1$이다.

52 답 $\sqrt{10}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점의 좌표 $(\pm\sqrt{a^2+5}, 0)$은

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{a^2}=1$의 두 초점의 좌표 $(\pm\sqrt{25-a^2}, 0)$과 같으므로

$\sqrt{a^2+5}=\sqrt{25-a^2}$

양변을 제곱하면

$a^2+5=25-a^2$, $a^2=10 \quad \therefore a=\sqrt{10}$ $(\because a>0)$

53 답 $x^2-\frac{y^2}{4}=-1$

타원 $9x^2+4y^2=36 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=\boxed{1}$의 두 초점은

$(0, \pm\boxed{\sqrt{5}})$이다.

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-\boxed{1}$이라 두면 주축의 길이가

4이므로 $2b=\boxed{4} \quad \therefore b=\boxed{2}$

따라서 $5=a^2+\boxed{4}$에서 $a=\boxed{1}$이므로 구하는 쌍곡선의

방정식은 $x^2-\frac{y^2}{\boxed{4}}=-\boxed{1}$이다.

54 답 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하자.

$a^2+b^2=(\sqrt{5})^2=5$에서 $b^2=5-a^2$ … ㉠

이때, $b^2>0$이므로

$5-a^2>0$

$0<a^2<5$ … ㉡

이 쌍곡선이 점 $(3, 2)$를 지나므로

$\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$

$9b^2-4a^2=a^2b^2$

여기에 ㉠을 대입하면

$9(5-a^2)-4a^2=a^2(5-a^2)$

$45-9a^2-4a^2=5a^2-a^4$

$a^4-18a^2+45=0$

$(a^2-3)(a^2-15)=0$

$\therefore a^2=3$ ($\because$ ㉡)

이것을 ㉠에 대입하면

$b^2=5-3=2$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$이다.

55 답 1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

56 답 1) $y=\pm\frac{2}{3}x$ 2) $y=\pm\frac{3}{2}x$ 3) $y=\pm x$ 4) $y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

4) $4x^2-3y^2=-12$에서

$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=-1$ $\therefore\ y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

57 답 1) $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 2) $2x^2-y^2=1$ 3) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=-1$

1) 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 직선 $y=2x$, $y=-2x$가 점근선이므로

$\frac{b}{a}=\boxed{2}$ $\therefore\ b=\boxed{2}a$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\boxed{4}a^2}=1$이 점 $(\sqrt{2}, -2)$를 지나므로

$\frac{2}{a^2}-\frac{4}{\boxed{4}a^2}=1$, $\frac{2}{a^2}-\frac{1}{a^2}=1$, $\frac{1}{a^2}=1$

$\therefore\ a^2=\boxed{1}$ ⇨ $b^2=\boxed{4}$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\frac{y^2}{\boxed{4}}=1$이다.

2) 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 직선 $y=\sqrt{2}x$, $y=-\sqrt{2}x$가 점근선이므로

$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$

$\therefore\ b=\sqrt{2}a$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2a^2}=1$이 점 $(2, \sqrt{7})$을 지나므로

$\frac{4}{a^2}-\frac{7}{2a^2}=1$

$\frac{1}{2a^2}=1$

$\therefore\ a^2=\frac{1}{2}$ ⇨ $b^2=1$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $2x^2-y^2=1$이다.

3) 지나는 점 $(8, 9)$가 점근선 $y=\frac{3\sqrt{2}}{4}x$를 기준으로 위쪽에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$이라 놓을 수 있다.

직선 $y=\frac{3\sqrt{2}}{4}x$, $y=-\frac{3\sqrt{2}}{4}x$가 점근선이므로

$\frac{b}{a}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ b=\frac{3\sqrt{2}}{4}a$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\frac{9}{8}a^2}=-1$이 점 $(8, 9)$를 지나므로

$\frac{64}{a^2}-\frac{81}{\frac{9}{8}a^2}=-1$

$\frac{64}{a^2}-\frac{72}{a^2}=-1$

$-\frac{8}{a^2}=-1$

$\therefore\ a^2=8$ ⇨ $b^2=9$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=-1$이다.

58 답 $\sqrt{3}$

$x^2-a^2y^2=a^2$ $(a>0)$에서 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$이므로 점근선은 $y=\pm\frac{1}{a}x$이다.

한편, 한 점근선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $30°$이므로 이 점근선의 기울기는 $\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ a=\sqrt{3}$

59 답 42

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 점 $(5,\ 2)$를 지나므로

$\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$ ⋯ ㉠

한편, 두 점근선 $y=\pm\frac{b}{a}x$가 수직으로 만나고, 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이므로

$\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-1 \qquad \therefore a^2=b^2$

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{25}{a^2}-\frac{4}{a^2}=1$

$\frac{21}{a^2}=1 \qquad \therefore a^2=b^2=21$

$\therefore a^2+b^2=21+21=42$

60 답 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$에서 $\sqrt{25-9}=4$이므로 초점의 좌표는

$(4,\ 0),\ (-4,\ 0)$

구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면

$a^2+b^2=16$ ⋯ ㉠

쌍곡선의 한 점근선이 $y=\sqrt{3}x$이므로

$\frac{b}{a}=\sqrt{3} \qquad \therefore b=\sqrt{3}a$

이것을 ㉠에 대입하면

$a^2+3a^2=16,\ 4a^2=16 \qquad \therefore a^2=4$

㉠에 의해

$4+b^2=16 \qquad \therefore b^2=12$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$이다.

61 답 7

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $(5,\ 0),\ (-5,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=\boxed{25}$ ⋯ ㉠

또, 점근선의 방정식이 $y=\frac{4}{3}x,\ y=-\frac{4}{3}x$이므로

$\frac{b}{a}=\boxed{\frac{4}{3}} \qquad \therefore b=\boxed{\frac{4}{3}}a$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$a^2+\boxed{\frac{16}{9}}a^2=\boxed{25},\ \frac{25}{9}a^2=25,\ a^2=\boxed{9}$

$\therefore a=\boxed{3}\ (\because a>0)$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=\boxed{4}$

$\therefore a+b=3+4=\boxed{7}$

62 답 $y=\pm\frac{3}{4}x$

쌍곡선 $\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{3}{c}x$

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점의 좌표가 $(c,\ 0),\ (-c,\ 0)$이라 하므로

$c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

따라서 구하는 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{4}x$이다.

63 답 1) $y=\pm\frac{b}{a}x$ 2) $y=\pm\frac{b}{a}x$

64 답 1) $\frac{(x-2)^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{5}=1$

2) $\frac{(x-3)^2}{12}-\frac{(y+1)^2}{2}=1$

3) $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{3}=-1$

4) $\frac{(x+2)^2}{6}-\frac{(y-2)^2}{2}=1$

4) 쌍곡선 $\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하므로 x 대신 $x-(-4)=x+4$, y 대신 $y-2$를 대입하여 구하면

$\frac{\{(x+4)-2\}^2}{6}-\frac{(y-2)^2}{2}=1$

$\therefore \frac{(x+2)^2}{6}-\frac{(y-2)^2}{2}=1$

65 답 1) $\frac{(x+3)^2}{5}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$

2) $(-\sqrt{5}-3,\ 2),\ (\sqrt{5}-3,\ 2),\ 2\sqrt{5}$

3) $(-6,\ 2),\ (0,\ 2)$

2) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$의 꼭짓점의 좌표는

$(-\sqrt{5},\ 0),\ (\sqrt{5},\ 0)$이고, x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 꼭짓점의 좌표는

$(-\sqrt{5}-3,\ 0+2),\ (\sqrt{5}-3,\ 0+2)$,

즉, $(-\sqrt{5}-3,\ 2),\ (\sqrt{5}-3,\ 2)$이다.

한편, 주축의 길이는 평행이동해도 변함없으므로

$2a=2\sqrt{5}$이다.

3) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는 $(-3,\ 0),\ (3,\ 0)$이므로 평행이동한 초점의 좌표는

$(-3-3,\ 0+2),\ (3-3,\ 0+2)$, 즉 $(-6,\ 2),\ (0,\ 2)$이다.

66 답 1) $\dfrac{(x+1)^2}{3}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

2) $\dfrac{(x-2)^2}{5}-\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$

3) $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{(y-1)^2}{8}=1$

4) $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+1)^2}{8}=-1$

1) $4x^2-3y^2+8x+12y-20=0$

$4x^2+8x-3y^2+12y-20=0$

$4(x^2+2x)-3(y^2-4y)-20=0$

$4(x^2+2x+1-1)-3(y^2-4y+4-4)-20=0$

$4(x^2+2x+1)-4-3(y^2-4y+4)+12-20=0$

$4(x+1)^2-3(y-2)^2=12$

$\therefore \dfrac{(x+1)^2}{3}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

2) $3x^2-5y^2-12x-10y-8=0$

$3x^2-12x-5y^2-10y-8=0$

$3(x^2-4x)-5(y^2+2y)-8=0$

$3(x^2-4x+4-4)-5(y^2+2y+1-1)-8=0$

$3(x^2-4x+4)-12-5(y^2+2y+1)+5-8=0$

$3(x-2)^2-5(y+1)^2=15$

$\therefore \dfrac{(x-2)^2}{5}-\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$

3) $8x^2-7y^2+14y-63=0$

$8x^2-7(y^2-2y)-63=0$

$8x^2-7(y^2-2y+1-1)-63=0$

$8x^2-7(y^2-2y+1)+7-63=0$

$8x^2-7(y-1)^2=56$

$\therefore \dfrac{x^2}{7}-\dfrac{(y-1)^2}{8}=1$

4) $8x^2-9y^2-32x-18y+95=0$

$8x^2-32x-9y^2-18y+95=0$

$8(x^2-4x)-9(y^2+2y)+95=0$

$8(x^2-4x+4-4)-9(y^2+2y+1-1)+95=0$

$8(x^2-4x+4)-32-9(y^2+2y+1)+9+95=0$

$8(x-2)^2-9(y+1)^2=-72$

$\therefore \dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+1)^2}{8}=-1$

67 답 1) $(\pm\sqrt{7}+2,\ -1)$, $(4,\ -1)$, $(0,\ -1)$, 4

2) $(2,\ -1\pm\sqrt{5})$, $(2,\ 1)$, $(2,\ -3)$, 4

1) $3x^2-4y^2-12x-8y-4=0$

$3(x^2-4x)-4(y^2+2y)=4$

$3(x-2)^2-4(y+1)^2=4+12-4=12$

$\therefore \dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$

이는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

	$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$	$\longrightarrow$	$\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$
초점	$(\pm\sqrt{7},\ 0)$	$\xrightarrow{(\pm\sqrt{7}+2,\ 0-1)}$	$(\pm\sqrt{7}+2,\ -1)$
꼭짓점	$(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$	$\xrightarrow[(-2+2,\ 0-1)]{(2+2,\ 0-1)}$	$(4,\ -1)$, $(0,\ -1)$
주축의 길이	$2a=4$	$\xrightarrow{\text{변화 없음}}$	4

2) $4x^2-y^2-16x-2y+19=0$에서

$4(x^2-4x)-(y^2+2y)=-19$

$4(x-2)^2-(y+1)^2=-19+16-1=-4$

$\therefore (x-2)^2-\dfrac{(y+1)^2}{4}=-1$

이는 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=-1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

	$x^2-\dfrac{y^2}{4}=-1$	$\longrightarrow$	$(x-2)^2-\dfrac{(y+1)^2}{4}=-1$
초점	$(0,\ \pm\sqrt{5})$	$\xrightarrow{(0+2,\ \pm\sqrt{5}-1)}$	$(2,\ -1\pm\sqrt{5})$
꼭짓점	$(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$	$\xrightarrow[(0+2,\ -2-1)]{(0+2,\ 2-1)}$	$(2,\ 1)$, $(2,\ -3)$
주축의 길이	$2b=4$	$\xrightarrow{\text{변화 없음}}$	4

68 답 1) $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$

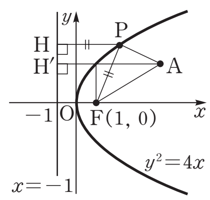
2) $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=-1$

단원 총정리 문제 정답 Ⅰ-1 이차곡선

pp. 32~33

01 답 ②

포물선 $y^2=4x=4\cdot1\cdot x$에서 초점은 $F(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.



포물선 위의 점 P에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{PH}$

점 A에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PF}$가 최소가 되기 위해서는 점 P가 $\overline{AH'}$과 주어진 포물선의 교점이어야 한다.

$\overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{PH}\ge\overline{AH'}=2-(-1)=3$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PF}$의 최솟값은 3이다.

I

02 답 13

포물선 $y^2=kx=4\times\frac{k}{4}x$의 초점의 좌표는 $\left(\frac{k}{4},\ 0\right)$,

준선의 방정식은 $x=-\frac{k}{4}$

이 포물선을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선은 $(y-n)^2=k(x-m)$이고, 이 포물선의 초점의 좌표는 $\left(\frac{k}{4}+m,\ n\right)$, 준선의 방정식은 $x=-\frac{k}{4}+m$

이때, 초점이 $\mathrm{F}(4,\ 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-2$이므로

$\frac{k}{4}+m=4,\ n=0,\ -\frac{k}{4}+m=-2$

이 식을 연립하면

$m=1,\ n=0,\ k=12$

$\therefore\ m+n+k=1+0+12=13$

03 답 4 m

안테나의 단면인 포물선의 식을 $y^2=4px$라 하면 점 $(1,\ 4)$는 이 포물선 위의 점이므로

$4^2=4\times p\times 1$

$\therefore\ p=4$

따라서 이 포물선의 초점에 위치한 수신기는 꼭짓점 A로부터 4 m 떨어져 있다.

04 답 ①

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에서 $\sqrt{9-5}=2$이므로

초점은 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-2,\ 0)$이다.

$\overline{\mathrm{FF'}}=2-(-2)=4$

타원의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\times 3=6$

따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{FF'}}+\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=4+6=10$

05 답 ④

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$의 두 초점 F, F′와 타원 위의 한 점 P에 대하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\times 4=8$

$\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{PF'}}$는 길이이므로 $\overline{\mathrm{PF}}>0$, $\overline{\mathrm{PF'}}>0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}\geq 2\sqrt{\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}}$

$8\geq 2\sqrt{\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}}$

$4\geq \sqrt{\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}}$

$16\geq \overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$의 최댓값은 16이다.

개념 정리

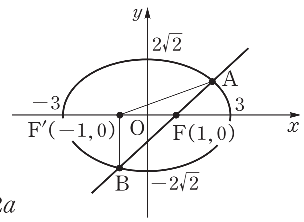
[산술평균과 기하평균의 관계]

$a>0$, $b>0$일 때,

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때)

06 답 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

두 점 F, F′은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점이고, 두 점 A, B는 이 타원 위의 점이므로



$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=2a$, $\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=2a$

이때, 삼각형 AF′B의 둘레의 길이가 12이므로

$4a=12$에서 $a=3$이므로

$b^2=a^2-1^2=8$

따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$이다.

07 답 6

타원 $2x^2-8x+3y^2+12y+14=0$을 정리하면

$2(x^2-4x)+3(y^2+4y)=-14$

$2(x^2-4x+4)+3(y^2+4y+4)=-14+8+12$

$2(x-2)^2+3(y+2)^2=6$

$\therefore\ \frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{2}=1$

이것은 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 $m=2,\ n=-2$

한편, $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow \frac{2x^2}{6}+\frac{3y^2}{6}=1$에서 $k=6$

$\therefore\ m+n+k=2-2+6=6$

08 답 $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

주어진 조건을 만족시키는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10$이므로

$\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}=10$

$\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}$

$=10-\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}$

양변을 제곱하면

$(x+2)^2+(y+1)^2$

$=100-20\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}+(x-4)^2+(y+1)^2$

$x^2+4x+4+y^2+2y+1$

$=100-20\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}+x^2-8x+16+y^2+2y+1$

$5\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}=-3x+28$

또, 양변을 제곱하면

$25\{(x-4)^2+(y+1)^2\}=9x^2-168x+784$

$25(x-4)^2+25(y+1)^2=9x^2-168x+784$

$25(x^2-8x+16)+25(y+1)^2=9x^2-168x+784$

$25x^2-200x+400+25(y+1)^2=9x^2-168x+784$

$16x^2-32x+25(y+1)^2=384$

$16(x^2-2x)+25(y+1)^2=384$

$16(x^2-2x+1-1)+25(y+1)^2=384$

$16(x^2-2x+1)-16+25(y+1)^2=384$

$16(x-1)^2+25(y+1)^2=400$

$\therefore \dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

09 답 ②

쌍곡선 $3x^2-4y^2+6x+16y-25=0$을 정리하면

$3x^2+6x-4y^2+16y-25=0$

$3(x^2+2x)-4(y^2-4y)-25=0$

$3(x^2+2x+1-1)-4(y^2-4y+4-4)=25$

$3(x^2+2x+1)-4(y^2-4y+4)=25+3-16$

$3(x+1)^2-4(y-2)^2=12$

$\therefore \dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{3}=1$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$을 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$의 주축의 길이는 $2\times2=4$이고 x축과 y축에 대하여 평행이동하여도 주축의 길이는 변함이 없으므로 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 4이다.

10 답 $k<1$

$3x^2+(k-1)y^2+6x=0$에서

$3(x^2+2x)+(k-1)y^2=0$

$3(x^2+2x+1-1)+(k-1)y^2=0$

$3(x^2+2x+1)-3+(k-1)y^2=0$

$3(x+1)^2+(k-1)y^2=3$

$\therefore (x+1)^2+\dfrac{y^2}{\dfrac{3}{k-1}}=1$

이 방정식이 나타내는 도형이 쌍곡선이기 위해서는

$\dfrac{3}{k-1}<0 \qquad \therefore k<1$

11 답 $20\sqrt{5}$

> 두 점 F$(3, 0)$, F$'(-3, 0)$을 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$과 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$의 교점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 할 때, $\overline{PF'}^2-\overline{PF}^2$의 값을 구하여라.
> a^2-b^2 꼴이니까 인수분해가 가능하지?
> 즉, $\overline{PF'}^2-\overline{PF}^2=(\overline{PF'}-\overline{PF})(\overline{PF'}+\overline{PF})$

1st 타원의 정의에 의해 $\overline{PF'}+\overline{PF}$의 값을 구하자.

타원의 정의에 의하여 → 두 초점에서 거리의 합이 $2a$인 타원

$\overline{PF'}+\overline{PF}=2\times5=10$

점 P는 제1사분면 위의 점이므로 → $\overline{PF'}>\overline{PF}$임을 알 수 있어.

2nd 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PF'}-\overline{PF}$의 값을 구하자.

쌍곡선의 정의에 의하여 → 두 초점에서 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선

$\overline{PF'}-\overline{PF}=2\sqrt{5}$

3rd $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$임을 이용하자.

$\therefore \overline{PF'}^2-\overline{PF}^2=(\overline{PF'}+\overline{PF})(\overline{PF'}-\overline{PF})=10\times2\sqrt{5}=20\sqrt{5}$

12 답 12

$9x^2-4y^2-36x+8y+68=0$에서

$9(x^2-4x)-4(y^2-2y)=-68$

$9(x^2-4x+4-4)-4(y^2-2y+1-1)=-68$

$9(x^2-4x+4)-4(y^2-2y+1)=-68+36-4$

$9(x-2)^2-4(y-1)^2=-36$

$\therefore \dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=-1$

이는 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=-1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 $m=2$, $n=1$

한편, $\dfrac{9x^2}{k}-\dfrac{4y^2}{k}=-1$은 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=-1$과 같으므로

$\dfrac{9}{k}=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{4}{k}=\dfrac{1}{9} \qquad \therefore k=36$

$\therefore \dfrac{k}{m+n}=\dfrac{36}{2+1}=\dfrac{36}{3}=12$

Ⅰ-2 이차곡선과 직선

pp. 34~45

69 답 1) 원 2) 포물선 3) 타원 4) 쌍곡선

1) $(x+1)^2+y^2-4=0$에서

$(x+1)^2+y^2=4$

따라서 주어진 방정식은 원을 나타낸다.

2) $4y^2-2x+8y+4=0$에서

$4y^2+8y+4=2x$

$4(y^2+2y+1)=2x$

$4(y+1)^2=2x \qquad \therefore (y+1)^2=\dfrac{1}{2}x$

따라서 주어진 방정식은 포물선을 나타낸다.

3) $2x^2+8x+y^2=0$에서

$2(x^2+4x)+y^2=0$

$2(x^2+4x+4-4)+y^2=0$

$2(x^2+4x+4)-8+y^2=0$

$2(x+2)^2+y^2=8$

$\therefore \dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}=1$

따라서 주어진 방정식은 타원을 나타낸다.

4) $3x^2-y^2+6x+4y-4=0$에서

$3x^2+6x-y^2+4y-4=0$

$3(x^2+2x)-(y^2-4y+4)=0$

$3(x^2+2x+1-1)-(y^2-4y+4)=0$

$3(x^2+2x+1)-3-(y^2-4y+4)=0$

$3(x+1)^2-(y-2)^2=3$

$\therefore (x+1)^2-\dfrac{(y-2)^2}{3}=1$

따라서 주어진 방정식은 쌍곡선을 나타낸다.

70

답 **1)** 한 점에서 만난다. **2)** 만나지 않는다.
3) 서로 다른 두 점에서 만난다.

1) $y=x+3$을 $y^2=12x$에 대입하면

$(x+3)^2=12x,\ x^2+6x+9=12x,$

$x^2-6x+9=0 \Rightarrow x^2-2\times3x+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=9-1\times9=9-9=0$

따라서 주어진 포물선과 직선은 한 점에서 만난다.

2) $y=-x+3$을 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$에 대입하면

$\dfrac{x^2}{3}+(-x+3)^2=1,\ x^2+3(-x+3)^2=3,$

$x^2+3(x^2-6x+9)=3$

$4x^2-18x+24=0$

$2x^2-9x+12=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-9)^2-4\times2\times12=81-96=-15<0$

따라서 주어진 타원과 직선은 만나지 않는다.

3) $y=x-2$를 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$에 대입하면

$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{(x-2)^2}{2}=1,\ 2x^2-3(x-2)^2=6,$

$2x^2-3(x^2-4x+4)=6$

$-x^2+12x-12=6$

$x^2-12x+18=0 \Rightarrow x^2+2\times(-6)x+18=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-6)^2-1\times18=36-18=18>0$

따라서 주어진 쌍곡선과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

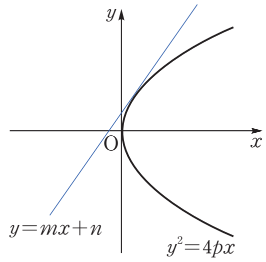
71

답 **1)** 이차곡선 **2)** (i) $>$ (ii) $=$ (iii) $<$

72

답 $\boldsymbol{mn-2p,\ p-mn,\ \dfrac{p}{m},\ \dfrac{p}{m}}$

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m $(m\neq0)$인 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하자.



$y^2=4px$에 $y=mx+n$을 대입하면

$(mx+n)^2=4px$

이 식을 정리하면

$m^2x^2+2(\boxed{mn-2p})x+n^2=0$

이 이차방정식의 판별식 $D=0$이므로

$\dfrac{D}{4}=4p(\boxed{p-mn})=0$

$\therefore n=\boxed{\dfrac{p}{m}}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=mx+\boxed{\dfrac{p}{m}}$

73

답 **1)** $\boldsymbol{y=2x+\dfrac{1}{2}}$ **2)** $\boldsymbol{y=3x+\dfrac{2}{3}}$
3) $\boldsymbol{y=-4x+\dfrac{1}{16}}$ **4)** $\boldsymbol{y=x-4}$

1) $y^2=4x=4\cdot1\cdot x$이므로 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2x+\dfrac{1}{2}$

2) $y^2=8x=4\cdot2\cdot x$이므로 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x+\dfrac{2}{3}$

3) $y^2=-x=4\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)\cdot x$의 접선의 방정식이 직선

$y=-4x+2$와 평행하므로 접선의 기울기는 -4이다.

구하는 접선의 방정식은

$y=-4x+\dfrac{-\frac{1}{4}}{-4}=-4x+\dfrac{1}{16}$

4) $y^2=-16x=4\cdot(-4)\cdot x$의 접선의 방정식이 직선 $x-y=5$

즉, $y=x-5$와 평행하므로 접선의 기울기는 1이다.

구하는 접선의 방정식은

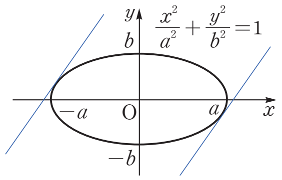
$y=x+\dfrac{-4}{1}=x-4$

74

답 $\boldsymbol{y=mx+\dfrac{p}{m}}$

75 답 $\boldsymbol{a^2mn,\ a^2m^2+b^2-n^2,\ a^2m^2+b^2,}$
$\boldsymbol{\sqrt{a^2m^2+b^2},\ \sqrt{a^2m^2+b^2}}$

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 $m(m\neq0)$인 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하자.



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 $y=mx+n$을 대입하면

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(mx+n)^2}{b^2}=1$

이 식을 정리하면

$(a^2m^2+b^2)x^2+2\boxed{a^2mn}x+a^2(n^2-b^2)=0$

이 이차방정식의 판별식 $D=0$이므로

$\dfrac{D}{4}=a^2b^2(\boxed{a^2m^2+b^2-n^2})=0$

$ab\neq0$이므로 $n^2=\boxed{a^2m^2+b^2}$

$\therefore n=\pm\boxed{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=mx\pm\boxed{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$

76 답 1) $\boldsymbol{y=x\pm\sqrt{13}}$ 2) $\boldsymbol{y=3x\pm\sqrt{13}}$
3) $\boldsymbol{y=-x\pm\sqrt{5}}$ 4) $\boldsymbol{y=-2x\pm2\sqrt{6}}$

1) $y=x\pm\sqrt{9\times1^2+4}=x\pm\sqrt{13}$

2) $4x^2+y^2=4$에서 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

구하는 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{1\times3^2+4}=3x\pm\sqrt{13}$

3) $3x^2+2y^2=6$에서 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$

구하는 접선의 방정식이 직선 $y=-x+7$과 평행하므로 기울기는 -1이다.

구하는 접선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{2\times(-1)^2+3}$

$=-x\pm\sqrt{5}$

4) 구하는 접선의 방정식이 직선 $y=-2x+3$과 평행하므로 기울기는 -2이다.

구하는 접선의 방정식은

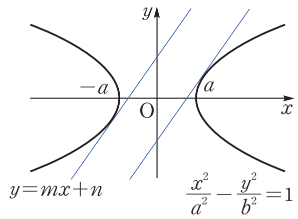
$y=-2x\pm\sqrt{5\times(-2)^2+4}$

$=-2x\pm\sqrt{24}=-2x\pm2\sqrt{6}$

77 답 $\boldsymbol{y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}$

78 답 $\boldsymbol{a^2mn,\ a^2m^2-b^2-n^2,\ a^2m^2-b^2,}$
$\boldsymbol{\sqrt{a^2m^2-b^2},\ \sqrt{a^2m^2-b^2}}$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 $m(m\neq0)$인 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하자.



$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 $y=mx+n$을 대입하면

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{(mx+n)^2}{b^2}=1$

이 식을 정리하면

$(a^2m^2-b^2)x^2+2\boxed{a^2mn}x+a^2(n^2+b^2)=0$

이 이차방정식의 판별식 $D=0$이므로

$\dfrac{D}{4}=-a^2b^2(\boxed{a^2m^2-b^2-n^2})=0$

$ab\neq0$이므로 $n^2=\boxed{a^2m^2-b^2}$

$\therefore n=\pm\boxed{\sqrt{a^2m^2-b^2}}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=mx\pm\boxed{\sqrt{a^2m^2-b^2}}$ (단, $a^2m^2-b^2>0$)

79 답 1) $\boldsymbol{y=x\pm\sqrt{2}}$ 2) $\boldsymbol{y=-2x\pm\sqrt{35}}$
3) $\boldsymbol{y=-x\pm1}$

1) $y=x\pm\sqrt{5\times1^2-3}$

$=x\pm\sqrt{2}$

2) $x^2-9y^2=9$에서 $\dfrac{x^2}{9}-y^2=1$

구하는 접선의 방정식의 기울기가 -2이므로

$y=-2x\pm\sqrt{9\times(-2)^2-1}$

$=-2x\pm\sqrt{35}$

3) $3x^2-2y^2=-6$에서 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=-1$

구하는 접선의 방정식이 직선 $y=-x-4$와 평행하므로 기울기는 -1이다.

구하는 접선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{3-(-1)^2\times2}$

$=-x\pm1$

80 답 1) $\boldsymbol{y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}}$
2) $\boldsymbol{y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}}$

81 답 x_1, y_1, p, x_1, y_1, p, y_1, y_1, $y_1{}^2-4px_1$, $2p$, $2p$, $2p$

포물선 $y^2=4px$ 위의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기를 $m(m\neq0)$이라 하자.

한 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 $m(m\neq0)$인 직선의 방정식은

$y-y_1=m(x-x_1)$

$\therefore\ y=m(x-\boxed{x_1})+\boxed{y_1}$ ⋯ ㉠

또, 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx+\dfrac{\boxed{p}}{m}$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡에서

$m(x-\boxed{x_1})+\boxed{y_1}=mx+\dfrac{\boxed{p}}{m}$

이것을 m에 관하여 정리하면

$x_1m^2-\boxed{y_1}m+p=0$

m에 관한 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 근을 구하면

$m=\dfrac{\boxed{y_1}\pm\sqrt{\boxed{y_1{}^2-4px_1}}}{2x_1}$

그런데 점 $(x_1,\ y_1)$이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로 $y_1{}^2=4px_1$

즉, $m=\dfrac{y_1}{2x_1}=\dfrac{\boxed{2p}}{y_1}$ $\left(\because\ y_1{}^2=4px \Rightarrow \dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{4p}{y_1}\right)$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$y_1y=\boxed{2p}(x-x_1)+y_1{}^2$

$y_1{}^2=4px_1$이므로 $y_1y=2p(x-x_1)+4px_1$

$y_1y=\boxed{2p}(x+x_1)$

82 답 1) $y=\dfrac{1}{2}x+3$ 2) $y=-x-2$ 3) $y=\dfrac{1}{16}x+\dfrac{1}{2}$

1) 포물선 $y^2=6x \Rightarrow y^2=4\times\dfrac{3}{2}\times x$ 위의 점 $(6,\ 6)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$6y=2\times\dfrac{3}{2}(x+6)$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{2}x+3$

2) 포물선 $y^2=8x \Rightarrow y^2=4\times2\times x$ 위의 점 $(2,\ -4)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$-4y=2\times2(x+2)$

$\therefore\ y=-x-2$

3) 포물선 $2y^2=x \Rightarrow y^2=\dfrac{1}{2}x=4\times\dfrac{1}{8}\times x$ 위의 점 $(8,\ 4)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$4y=2\times\dfrac{1}{8}(x+8)$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{16}x+\dfrac{1}{2}$

83 답 $y_1y=2p(x+x_1)$

84 답 y_1, x_1, x_1, y_1, $a^2m^2+b^2$, x_1, y_1, $a^2m^2+b^2$, $a^2m^2+b^2$, $2x_1y_1$, $\dfrac{b^2}{a^2}$, $\dfrac{bx_1}{a}$, b^2x_1

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 구하는 접선의 기울기를 $m(m\neq0)$이라 하면 한 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 $m(m\neq0)$인 직선의 방정식은

$y-\boxed{y_1}=m(x-\boxed{x_1})$

$\therefore\ y=m(x-\boxed{x_1})+\boxed{y_1}$ ⋯ ㉠

또, 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{\boxed{a^2m^2+b^2}}$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡에서

$m(x-\boxed{x_1})+\boxed{y_1}=mx\pm\sqrt{\boxed{a^2m^2+b^2}}$

$y_1-mx_1=\pm\sqrt{\boxed{a^2m^2+b^2}}$

양변을 제곱하여 m에 관하여 정리하면

$(a^2-x_1{}^2)m^2+\boxed{2x_1y_1}m+b^2-y_1{}^2=0$ ⋯ ㉢

그런데 점 $(x_1,\ y_1)$이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{x_1{}^2}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1$이 성립한다.

$a^2-x_1{}^2=\dfrac{a^2}{b^2}y_1{}^2$, $b^2-y_1{}^2=\boxed{\dfrac{b^2}{a^2}}x_1{}^2$

이것을 ㉢에 대입하여 정리하면

$\left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2m^2+2x_1y_1m+\left(\dfrac{bx_1}{a}\right)^2=0$

$\left(\dfrac{ay_1}{b}m+\boxed{\dfrac{bx_1}{a}}\right)^2=0$

$\therefore\ m=-\dfrac{\boxed{b^2x_1}}{a^2y_1}$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면 $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

85 답 1) $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 2) $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-4$ 3) $y=-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$

1) $\dfrac{-2\times x}{8}+\dfrac{1\times y}{2}=1$

$-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}y=1$ $\therefore\ y=\dfrac{1}{2}x+2$

2) $\dfrac{\sqrt{2}\times x}{8}+\dfrac{-3\times y}{12}=1$

$\dfrac{\sqrt{2}}{8}x-\dfrac{1}{4}y=1$ $\therefore\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-4$

3) $2\times1\times x+\sqrt{2}\times y=4$

$\sqrt{2}y=-2x+4$

$y=-\frac{2}{\sqrt{2}}x+\frac{4}{\sqrt{2}}$

$\therefore y=-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$

86 답 $\boldsymbol{\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1}$

87 답 $\boldsymbol{y_1,\ x_1,\ x_1,\ y_1,\ a^2m^2-b^2,\ x_1,\ y_1,\ a^2m^2-b^2,}$
$\boldsymbol{a^2m^2-b^2,\ 2x_1y_1,\ \frac{b^2}{a^2},\ \frac{bx_1}{a},\ b^2x_1}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 구하는 접선의 기울기를 $m(m\neq0)$이라 하면 한 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 $m(m\neq0)$인 직선의 방정식은 $y-\boxed{y_1}=m(x-\boxed{x_1})$

$\therefore y=m(x-\boxed{x_1})+\boxed{y_1}$ ⋯ ㉠

또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{\boxed{a^2m^2-b^2}}$ (단, $a^2m^2>b^2$) ⋯ ㉡

㉠과 ㉡에서

$m(x-\boxed{x_1})+\boxed{y_1}=mx\pm\sqrt{\boxed{a^2m^2-b^2}}$

$y_1-mx_1=\pm\sqrt{\boxed{a^2m^2-b^2}}$

양변을 제곱하여 m에 관하여 정리하면

$(x_1^2-a^2)m^2-\boxed{2x_1y_1}m+b^2+y_1^2=0$ ⋯ ㉢

그런데 점 $(x_1,\ y_1)$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$이 성립하고

$x_1^2-a^2=\frac{a^2}{b^2}y_1^2,\ b^2+y_1^2=\boxed{\frac{b^2}{a^2}}x_1^2$

이것을 ㉢에 대입하여 정리하면

$\left(\frac{ay_1}{b}\right)^2m^2-2x_1y_1m+\left(\frac{bx_1}{a}\right)^2=0$

$\left(\frac{ay_1}{b}m-\boxed{\frac{bx_1}{a}}\right)^2=0$

$\therefore m=\frac{\boxed{b^2x_1}}{a^2y_1}$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

88 답 1) $\boldsymbol{y=-x+1}$ 2) $\boldsymbol{y=x+2}$
3) $\boldsymbol{y=-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}$

1) $\frac{4\times x}{4}-\frac{-3\times y}{3}=1$

$x+y=1$

$\therefore y=-x+1$

2) $\frac{4\times x}{8}-\frac{6\times y}{12}=-1$

$\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=-1$

$\therefore y=x+2$

3) $5\times1\times x-2\times(-1)\times y=3$

$5x+2y=3$

$\therefore y=-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$

89 답 $\boldsymbol{\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm1}$

90 답 1) $\boldsymbol{y=-x-1,\ y=\frac{1}{2}x+2}$
2) $\boldsymbol{y=-\sqrt{2}x-\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}}$
3) $\boldsymbol{y=-2x-2,\ y=x+4}$

1) 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점을 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

$y_1^2=4x_1$ ⋯ ㉠이고, 접선의 방정식은

$y_1y=\boxed{2}(x+x_1)$ ⋯ ㉡

이때, 점 $(-2,\ 1)$이 접선 위의 점이므로

$y_1=\boxed{2}(x_1-2)$

이를 ㉠에 대입하면

$4(x_1-\boxed{2})^2=4x_1$

$x_1^2-5x_1+\boxed{4}=0$

$(x_1-1)(x_1+\boxed{4})=0$

$\therefore \begin{cases} x_1=1,\ y_1=\boxed{-2} \\ x_1=\boxed{4},\ y_1=4 \end{cases}$

(i) 접점이 $(1,\ \boxed{-2})$일 때 : ㉡에 대입하면

$\boxed{-2}y=2(x+1)$

$\therefore y=-x-\boxed{1}$

(ii) 접점이 $(\boxed{4},\ 4)$일 때 : ㉡에 대입하면

$\boxed{4}y=2(x+\boxed{4})$

$\therefore y=\boxed{\frac{1}{2}}x+\boxed{2}$

2) 포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$ 위의 한 점을 (x_1, y_1)이라 하면
$y_1^2=8x_1$ ⋯ ㉠이고, 접선의 방정식은
$yy_1=2\times2\times(x+x_1)=4(x+x_1)$ ⋯ ㉡
이때, 점 $(-1, 0)$이 이 접선 위의 점이므로
$0=4(-1+x_1)$ $\quad\therefore x_1=1$
이것을 ㉠에 대입하면 $y_1^2=8$
$\therefore \begin{cases} x_1=1, y_1=-2\sqrt{2} \\ x_1=1, y_1=2\sqrt{2} \end{cases}$
(i) 접점이 $(1, -2\sqrt{2})$일 때, ㉡에 대입하면
$-2\sqrt{2}y=4(x+1)$ $\quad\therefore y=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}$
(ii) 접점이 $(1, 2\sqrt{2})$일 때, ㉡에 대입하면
$2\sqrt{2}y=4(x+1)$ $\quad\therefore y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$

3) 포물선 $y^2=16x=4\times4\times x$ 위의 한 점을 (x_1, y_1)이라 하면
$y_1^2=16x_1$ ⋯ ㉠이고, 접선의 방정식은
$yy_1=2\times4\times(x+x_1)=8(x+x_1)$ ⋯ ㉡
이때, 점 $(-2, 2)$가 이 접선 위의 점이므로
$2y_1=8(-2+x_1)$
$y_1=4x_1-8$
이것을 ㉠에 대입하면
$(4x_1-8)^2=16x_1$
$16x_1^2-64x_1+64=16x_1$
$x_1^2-5x_1+4=0$
$(x_1-1)(x_1-4)=0$
$\therefore \begin{cases} x_1=1, y_1=-4 \\ x_1=4, y_1=8 \end{cases}$
(i) 접점이$(1, -4)$일 때, ㉡에 대입하면
$-4y=8(x+1)$ $\quad\therefore y=-2x-2$
(ii) 접점이 $(4, 8)$일 때, ㉡에 대입하면
$8y=8(x+4)$ $\quad\therefore y=x+4$

91

답 (i) $\boldsymbol{y_1^2=4px_1}$ (ii) $\boldsymbol{y_1y=2p(x+x_1)}$
(iii) $\boldsymbol{y_1y=2p(x+x_1)}$

92

답 1) $\boldsymbol{y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}, y=3}$
2) $\boldsymbol{y=\frac{\sqrt{6}}{2}x+2, y=-\frac{\sqrt{6}}{2}x+2}$
3) $\boldsymbol{y=-\sqrt{2}x-2\sqrt{2}, y=\sqrt{2}x+2\sqrt{2}}$

1) 타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 한 점을 (x_1, y_1)이라 하면
$\frac{x_1^2}{5}+\frac{y_1^2}{9}=1$ ⋯ ㉠이고, 접선의 방정식은
$\frac{x_1x}{5}+\frac{y_1y}{9}=1$ ⋯ ㉡
이때, 점 $(1, 3)$이 이 접선 위의 점이므로
$\frac{x_1}{5}+\frac{3y_1}{9}=1 \Rightarrow x_1=\boxed{-\frac{5}{3}(y_1-3)}$
이를 ㉠에 대입하면
$\frac{1}{5}\cdot\boxed{\frac{25}{9}(y_1-3)^2}+\frac{y_1^2}{9}=1$, $6(y_1^2-5y_1+6)=0$,
$y_1^2-\boxed{5}y_1+\boxed{6}=0$, $(y_1-2)(y_1-3)=0$
$\therefore \begin{cases} x_1=\boxed{\frac{5}{3}}, y_1=2 \\ x_1=\boxed{0}, y_1=\boxed{3} \end{cases}$
(i) 접점이 $\left(\boxed{\frac{5}{3}}, 2\right)$일 때 : ㉡에 대입하면
$\frac{x}{3}+\frac{2y}{9}=1$ $\quad\therefore y=\boxed{-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}}$
(ii) 접점이 $(\boxed{0}, \boxed{3})$일 때, ㉡에 대입하면 $y=\boxed{3}$

2) 타원 $x^2+2y^2=2$ 위의 한 점을 (x_1, y_1)이라 하면
$x_1^2+2y_1^2=2$ ⋯ ㉠이고, 접선의 방정식은
$x_1x+2y_1y=2$ ⋯ ㉡
이때, 점 $(0, 2)$가 이 접선 위의 점이므로
$4y_1=2 \Rightarrow y_1=\frac{1}{2}$
이것을 ㉠에 대입하면 $x_1^2+\frac{1}{2}=2 \Rightarrow x_1^2=\frac{3}{2}$
$\therefore x_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}, x_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$
$\therefore \begin{cases} x_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}, y_1=\frac{1}{2} \\ x_1=\frac{\sqrt{6}}{2}, y_1=\frac{1}{2} \end{cases}$
(i) 접점이 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right)$일 때, ㉡에 대입하면
$-\frac{\sqrt{6}}{2}x+y=2$ $\quad\therefore y=\frac{\sqrt{6}}{2}x+2$
(ii) 접점이 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right)$일 때, ㉡에 대입하면
$\frac{\sqrt{6}}{2}x+y=2$ $\quad\therefore y=-\frac{\sqrt{6}}{2}x+2$

3) 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 한 점을 (x_1, y_1)이라 하면
$\frac{x_1^2}{2}+\frac{y_1^2}{4}=1$ ⋯ ㉠이고, 접선의 방정식은
$\frac{x_1x}{2}+\frac{y_1y}{4}=1$ ⋯ ㉡
이때, 점 $(-2, 0)$이 이 접선 위의 점이므로
$-x_1=1 \Rightarrow x_1=-1$
이것을 ㉠에 대입하면
$\frac{1}{2}+\frac{y_1^2}{4}=1 \Rightarrow y_1^2=2$ $\quad\therefore y_1=-\sqrt{2}, y_1=\sqrt{2}$
$\therefore \begin{cases} x_1=-1, y_1=-\sqrt{2} \\ x_1=-1, y_1=\sqrt{2} \end{cases}$
(i) 접점이 $(-1, -\sqrt{2})$일 때, ㉡에 대입하면
$\frac{-x}{2}+\frac{-\sqrt{2}y}{4}=1$ $\quad\therefore y=-\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$
(ii) 접점이 $(-1, \sqrt{2})$일 때, ㉡에 대입하면
$\frac{-x}{2}+\frac{\sqrt{2}y}{4}=1$ $\quad\therefore y=\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$

93 답 (i) $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ (ii) $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

(iii) $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

94 답 1) $y=3x-6$, $y=-3x+6$

2) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-1$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-1$

1) 쌍곡선 $3x^2-y^2=18$ 위의 한 점을 (x_1, y_1)이라 하면

$\boxed{3}x_1^2-y_1^2=18$ ⋯ ㉠이고 접선의 방정식은

$\boxed{3x_1}x-y_1y=18$ ⋯ ㉡

이때, 점 $(2, 0)$이 이 접선 위의 점이므로

$\boxed{6}x_1=18$ $\quad\therefore x_1=\boxed{3}$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$27-y_1^2=18$, $y_1^2=9$ $\quad\therefore y_1=\pm3$

(i) 접점이 $(\boxed{3}, 3)$일 때 : ㉡에 대입하면

$\boxed{9}x-3y=18$

$\therefore y=\boxed{3}x-6$

(ii) 접점이 $(\boxed{3}, -3)$일 때 : ㉡에 대입하면

$\boxed{9}x+3y=18$

$\therefore y=\boxed{-3}x+6$

2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 위의 한 점을 (x_1, y_1)이라 하면

$\frac{x_1^2}{4}-y_1^2=1$ ⋯ ㉠이고, 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{4}-y_1y=1$ ⋯ ㉡

이때, 점 $(1, 0)$이 이 접선 위의 점이므로

$\frac{x_1}{4}=1 \Rightarrow x_1=4$

이를 ㉠에 대입하면

$4-y_1^2=1 \Rightarrow y_1^2=3$

$\therefore y_1=-\pm\sqrt{3}$

$\therefore \begin{cases} x_1=4,\ y_1=-\sqrt{3} \\ x_1=4,\ y_1=\sqrt{3} \end{cases}$

(i) 접점이 $(4, -\sqrt{3})$일 때, ㉡에 대입하면

$x+\sqrt{3}y=1$ $\quad\therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$

(ii) 접점이 $(4, \sqrt{3})$일 때, ㉡에 대입하면

$x-\sqrt{3}y=1$ $\quad\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) 쌍곡선 $x^2-2y^2=4$ 위의 한 점을 (x_1, y_1)이라 하면

$x_1^2-2y_1^2=4$ ⋯ ㉠이고, 접선의 방정식은

$x_1x-2y_1y=4$ ⋯ ㉡

이때, 점 $(0, -1)$이 이 접선 위의 점이므로

$2y_1=4 \Rightarrow y_1=2$

이를 ㉠에 대입하면

$x_1^2-8=4 \Rightarrow x_1^2=12$

$\therefore x_1=\pm2\sqrt{3}$

$\therefore \begin{cases} x_1=-2\sqrt{3},\ y_1=2 \\ x_1=2\sqrt{3},\ y_1=2 \end{cases}$

(i) 접점이 $(-2\sqrt{3}, 2)$일 때, ㉡에 대입하면

$-2\sqrt{3}x-2\times2\times y=4$ $\quad\therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-1$

(ii) 접점이 $(2\sqrt{3}, 2)$일 때, ㉡에 대입하면

$2\sqrt{3}x-2\times2\times y=4$ $\quad\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-1$

95 답 (i) $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=\pm1$ (ii) $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm1$

(iii) $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm1$

96 답 1) $y=2x+\frac{3}{2}$ 2) $y=x+\frac{1}{2}$ 3) $y=-x+2$

1) 수직인 두 직선의 기울기의 곱이 $\boxed{-1}$이고,

$x+2y+5=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$이므로

조건을 만족시키는 직선의 기울기는 $\boxed{2}$이다.

접선의 방정식을 $y=\boxed{2}x+k$라 두고

포물선 $y^2=12x$에 대입하면

$(\boxed{2}x+k)^2=12x$

$\therefore 4x^2+2(\boxed{2k-6})x+k^2=0$

이때, 이 이차방정식의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(\boxed{2k-6})^2-4k^2$

$=-24k+36=0$ $\quad\therefore k=\boxed{\frac{3}{2}}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=\boxed{2x+\frac{3}{2}}$이다.

2) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$인 직선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로 접선의 방정식을 $y=x+k$라 두고

포물선 $x^2=-2y$에 대입하면 $x^2+2x+2k=0$

이때, 이 이차방정식의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1^2-2k=0$ $\quad\therefore k=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x+\frac{1}{2}$이다.

3) 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=4(x+2)$ $\quad\therefore y=x+2$

이 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1이고,

$y^2=8x \Rightarrow y^2=4\cdot2x$의 초점의 좌표는 $(2, 0)$이므로 구하는 직선은 기울기가 -1이고 점 $(2, 0)$을 지난다.

$y-0=-1\cdot(x-2)$

$\therefore y=-x+2$

97 답 1) $y=x\pm2\sqrt{6}$ 2) $\sqrt{10}$ 3) $y=x-3$

1) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$인 직선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로 접선의 방정식을 $y=x+k$라 두고 타원 $x^2+2y^2=16$에 대입하면 $x^2+2(x+k)^2=16$

$\therefore 3x^2+4kx+2k^2-16=0$

이때, 이 이차방정식의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4k^2-3(2k^2-16)=-2k^2+48=0 \qquad \therefore k=\pm2\sqrt{6}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x\pm2\sqrt{6}$이다.

2) 기울기가 1인 직선의 방정식을 $y=x+k$라 하면 타원 $x^2+4y^2=4$에 접하므로 $y=x+k$를 타원 $x^2+4y^2=4$에 대입하면 $x^2+4(x+k)^2=4$

$5x^2+8kx+4k^2-4=0$

이때, 이 이차방정식의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=16k^2-5(4k^2-4)=0,\ 4k^2=20 \qquad \therefore k=\pm\sqrt{5}$

따라서 접선의 방정식은 $y=x\pm\sqrt{5}$이므로 두 직선 사이의 거리는 $y=x+\sqrt{5}$ 위의 한 점 $(0,\ \sqrt{5})$에서 직선 $x-y-\sqrt{5}=0$에 이르는 거리와 같다.

$\therefore$ (구하는 거리)$=\frac{|-\sqrt{5}-\sqrt{5}|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{10}$

3) 타원 $x^2+4y^2=20$ 위의 점 $(4,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구하면 $4x+4y=20 \qquad \therefore y=-x+5$

이 접선과 점 $(4,\ 1)$에서 수직으로 만나는 직선의 기울기는 1이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=1\cdot(x-4) \qquad \therefore y=x-3$

98 답 1) $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ 2) $y=\sqrt{3}x\pm1$ 3) $y=\frac{1}{2}x\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

1) 쌍곡선 $4x^2-y^2=3$ 위의 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $-4x-y=3 \Rightarrow y=-4x-3$이다. 이와 수직인 직선의 기울기의 곱이 -1이므로 구하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$이다.

따라서 기울기가 $\frac{1}{4}$이고 점 $(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{4}(x+1)+1$이다.

$\therefore\ y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

2) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선의 기울기는 $\tan 60°=\sqrt{3}$이므로 접선의 방정식을 $y=\sqrt{3}x+k$라 두자. 쌍곡선 $4x^2-y^2=-4$에 대입하면

$4x^2-(\sqrt{3}x+k)^2=-4,\ x^2-2\sqrt{3}kx-k^2+4=0$

이때, 이 이차방정식의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(\sqrt{3}k)^2-(-k^2+4)=0,\ 4k^2-4=0 \qquad \therefore k=\pm1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x\pm1$이다.

3) 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식을 $y=\frac{1}{2}x+k$라 하면 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=-1$ ⋯ ㉠에 접하므로 $y=\frac{1}{2}x+k$를 ㉠에 대입하면

$2x^2-\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2+2=0$

$7x^2-4kx-4k^2+8=0$

이때, 이 이차방정식의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4k^2-7(-4k^2+8)=0 \Rightarrow k^2=\frac{7}{4}$

$\therefore k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$이다.

99 답 1) $2\sqrt{2}$ 2) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

1) 포물선 $y^2=4x$ 위의 점과 직선 $x-y+5=0$의 최단거리는 이 직선과 기울기가 같은 포물선의 $\boxed{\text{접선}}$에 이르는 거리와 같다.

즉, 기울기가 1인 접선의 방정식을 $y=\boxed{x+k}$라 하고 포물선 $y^2=4x$에 대입하면

$(\boxed{x+k})^2=4x$

$\therefore x^2+2(\boxed{k-2})x+k^2=0$

이때, 이 이차방정식의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(\boxed{k-2})^2-k^2=-4k+4=0 \qquad k=\boxed{1}$

따라서 구하는 최단거리는 접선 $y=x+\boxed{1}$ 위의 점 $(0,\ \boxed{1})$에서 직선 $x-y+5=0$에 이르는 거리와 같으므로

$\frac{|0-\boxed{1}+5|}{\sqrt{1+1}}=\boxed{2\sqrt{2}}$이다.

2) 타원 $x^2+4y^2=4$ 위의 점과 직선 $x-y-2\sqrt{5}=0$ 사이의 거리의 최솟값은 이 직선과 기울기가 같은 타원의 접선에 이르는 거리와 같다.

즉, 기울기가 1인 접선의 방정식을 $y=x+k$라 하고 타원 $x^2+4y^2=4$에 대입하면

$x^2+4(x+k)^2=4$

$\therefore 5x^2+8kx+4k^2-4=0$

이때, 이 이차방정식의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=16k^2-5(4k^2-4)=-4k^2+20=0$

$\therefore k=\pm\sqrt{5}$

따라서 접선 $x-y-\sqrt{5}=0$ 위의 점 $(0,\ -\sqrt{5})$에서 직선 $x-y-2\sqrt{5}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|\sqrt{5}-2\sqrt{5}|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$이다.

100 답 1) -1 2) $\tan\theta$ 3) 접선

단원 총정리 문제 정답 Ⅰ-2 이차곡선과 직선

pp. 46~47

01 답 ⑤

① $A=B=1\neq0$이므로 주어진 이차곡선은 원이다.

② $A=0$, $B\neq0$ 또는 $A\neq0$, $B=0$이면 주어진 이차곡선은 포물선이다.

③ $AB=-\frac{1}{3}\times(-3)=1>0$이므로 주어진 이차곡선은 타원이다.

④ $AB=3\times(-6)=-18<0$이므로 주어진 이차곡선은 쌍곡선이다.

⑤ $AB=2\times3=6>0$이므로 주어진 이차곡선은 타원이다.

02 답 ②

$y^2=8x$에 $y=2x+k$를 대입하면

$(2x+k)^2=8x$

$4x^2+4kx+k^2=8x$

$4x^2+2(2k-4)x+k^2=0$

포물선이 직선과 한 점에서 만나므로 이 이차방정식은 중근을 가진다. 즉, 이차방정식의 판별식 $D=0$이다.

$\frac{D}{4}=(2k-4)^2-4\times k^2=4k^2-16k+16-4k^2$

$=-16k+16=0 \qquad \therefore k=1$

03 답 ③

포물선 $y^2=-2x=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times x$ 위의 점 $(-2,\ 2)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$2y=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)$

즉, 이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$이 x축과 만나는 점의 y좌표의 값은 0이므로

$0=-\frac{1}{2}x+1 \qquad \therefore x=2$

04 답 ③

점 $(t,\ -1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구하면

$y-(-1)=m(x-t)$

$\therefore x=\frac{y+1}{m}+t$

이것을 $y^2=8x$에 대입하면

$y^2=8\left(\frac{y+1}{m}+t\right)$

$my^2=8(y+1+mt)$

$my^2-8y-8-8mt=0$

y에 대한 이차방정식은 중근을 가지므로 판별식 $D=0$이다.

$\frac{D}{4}=(-4)^2-m(-8-8mt)$

$=8tm^2+8m+16=0$

m에 대한 이차방정식의 두 실근이 접선의 기울기이고, 두 접선이 서로 수직으로 만나므로 기울기의 곱은 -1이다.

즉, 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{16}{8t}=-1 \qquad \therefore t=-2$

05 답 $-\sqrt{3}\leq k\leq\sqrt{3}$

$y=x+k$를 $x^2+2y^2=2$에 대입하면

$x^2+2(x+k)^2=2$

$x^2+2(x^2+2kx+k^2)=2$

$3x^2+4kx+2k^2-2=0$

타원 $x^2+2y^2=2$와 직선 $y=x+k$가 만나므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근 또는 중근을 가지므로 판별식 $D\geq0$

$\frac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-2)$

$=4k^2-6k^2+6=-2k^2+6\geq0$

$k^2-3\leq0$

$(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})\leq0 \qquad \therefore -\sqrt{3}\leq k\leq\sqrt{3}$

06 답 ④

x축과 이루는 예각의 크기가 $60°$인 직선의 기울기는

$\tan 60°=\sqrt{3}$

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{4\times(\sqrt{3})^2+3}=\sqrt{3}x\pm\sqrt{15}$

07 답 ④

타원 $3x^2+2y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$3\times1\times x+2\times1\times y=5 \qquad \therefore 3x+2y=5$

이 직선이 x축, y축과 만나는 점은 각각 y값과 x값이 0이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{25}{12}$

08 답 ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{3}{4}x$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$

$\therefore b=\frac{3a}{4} \quad \cdots ㉠$

또, 이 쌍곡선의 초점이 $(-5,\ 0)$, $(5,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=25$

여기에 ㉠을 대입하면

$a^2+\dfrac{9a^2}{16}=25$

$\dfrac{25a^2}{16}=25$

$a^2=16 \qquad \therefore a=\pm4$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=\pm3$

따라서 $a=4$, $b=3$일 때, $a+b=4+3=7$로 최대가 된다.

09 답 ⑤

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{5}=1$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{9\times1^2-5}=x\pm2$

즉, 두 직선 $y=x+2$, $y=x-2$ 사이의 거리를 구하자.

이것은 $y=x+2$ 위의 점 $(0,\ 2)$와 직선

$y=x-2$ ⇨ $x-y-2=0$ 사이의 거리를 구하면

$\dfrac{|0-2-2|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

10 답 ③

쌍곡선 $x^2-y^2=2$에 그은 접선의 접점의 좌표가 $(\alpha,\ \beta)$이므로 접선의 방정식은

$\alpha x-\beta y=2$

이 접선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$\alpha-\beta=2$ ⋯ ㉠

또, 점 $(\alpha,\ \beta)$가 쌍곡선 $x^2-y^2=2$ 위의 점이므로

$\alpha^2-\beta^2=2$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=2$

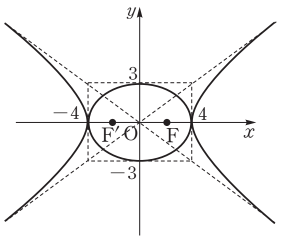
여기에 ㉠을 대입하면

$(\alpha+\beta)\times2=2 \qquad \therefore \alpha+\beta=1$

11 답 $2\sqrt{7}$

그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 점근선 위의 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형에 내접하는 타원의 두 초점을 F, F′이라 할 때, $\overline{\mathrm{FF'}}$의 길이를 구하여라.

직사각형에 내접하는 타원의 꼭짓점은 각 변의 중점과 일치해.

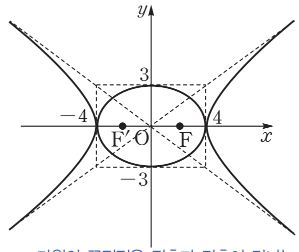


1st 타원의 꼭짓점의 좌표를 파악하자.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ ⇨ $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$의 점근선의 방정식을 구하면 $y=\pm\dfrac{3}{4}x$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$야.

이 점근선 위의 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형에 내접하는 타원의 꼭짓점의 좌표는 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$, $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$이다.



타원의 꼭짓점은 장축과 단축이 만나는 점으로 타원과 직사각형에 내접하는 점과 일치해.

즉, 네 점을 꼭짓점으로 하는 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

2nd 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$의 두 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$이야.

초점의 좌표를 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$이라 하면

$c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

따라서 타원의 두 초점은 $\mathrm{F}(\sqrt{7},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{7},\ 0)$이고 $\overline{\mathrm{FF'}}$의 길이는 $2\sqrt{7}$이다.

12 답 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 위의 점과 직선 $y=3x$ 사이의 거리의 최솟값은 이 직선과 기울기가 같은 쌍곡선의 접선에 이르는 거리와 같다.

즉, 기울기가 3인 접선의 방정식을 $y=3x+k$라 하고

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{16}=1$, 즉 $8x^2-y^2=16$에 대입하면

$8x^2-(3x+k)^2=16 \qquad \therefore x^2+6kx+k^2+16=0$

이때, 이 이차방정식의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=9k^2-(k^2+16)=8k^2-16=0 \qquad \therefore k=\pm\sqrt{2}$

따라서 접선 $y=3x+\sqrt{2}$ 위의 한 점 $(0,\ \sqrt{2})$에서

직선 $3x-y=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$\dfrac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{9+1}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

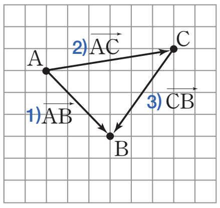
Ⅱ 평면벡터

Ⅱ－1 벡터의 연산

pp. 52 ~ 63

01 답 1) 시점 : A, 종점 : C　2) 시점 : F, 종점 : Q

02 답 1) 해설 참조　2) 해설 참조　3) 해설 참조



03 답 1) 2　2) 1　3) $\sqrt{5}$

1) 벡터의 크기는 선분의 길이와 같으므로
$\overrightarrow{AD}$의 크기는 $|\overrightarrow{AD}|=\overline{AD}=\overline{BC}=2$이다.

2) $|\overrightarrow{CD}|=\overline{CD}=\overline{AB}=1$

3) $|\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$

04 답 1) 방향　2) A, B, 시점, 종점
3) $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$　4) 단위　5) 영, $\vec{0}$

05 답 1) $\vec{d}$　2) $\vec{c}$

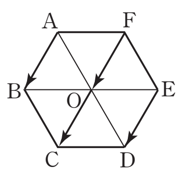
1) 크기와 방향이 각각 같은 벡터가 서로 같은 벡터이므로 $\vec{a}$와 같은 벡터는 $\vec{d}$이다.

2) 벡터 $\vec{a}$에 대하여 크기는 같고, 방향이 반대인 벡터가 $-\vec{a}$이므로 $-\vec{a}$와 같은 벡터는 $\vec{c}$이다.

06 답 1) $\sqrt{13}$,　2) $\overrightarrow{BC}$　3) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$

1) $|\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2}$
$=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

07 답 1) $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$　2) 23개
3) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DE}$　4) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{FA}$



1) $\overrightarrow{AB}$와 크기가 같고, 방향이 같은 벡터는 그림과 같이 $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$이다.

2) 크기가 같은 벡터는 방향은 관계없으므로
$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$,
$\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{FO}$,
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$,
$\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{AF}$
의 23개이다.

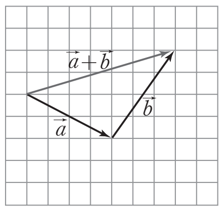
08 답 1) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$　2) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CO}$

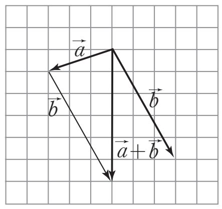
1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

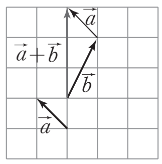
09 답 1) $\overrightarrow{BD}$　2) $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DF}$

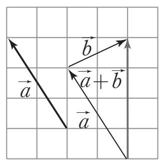
10 답 1) 같다, $\vec{a}=\vec{b}$　2) $-\vec{a}$

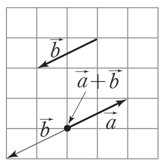
11 답 1) 해설 참조　2) 해설 참조　3) 해설 참조
4) 해설 참조　5) 해설 참조

1)


2)


3)


4)


5)


12 답 1) $\overrightarrow{AC}$　2) $\overrightarrow{AD}$　3) $\overrightarrow{AB}$　4) $\vec{0}$　5) $\overrightarrow{AD}$

2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$
$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

3) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$
$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{DB}$
$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$

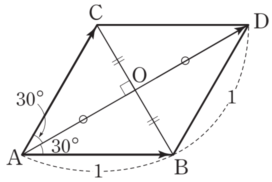
4) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

5) $\overrightarrow{CB}+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$
$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

13 답 1) $4\sqrt{2}$　2) $\sqrt{3}$

1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}=\boxed{\vec{b}}+\vec{b}=\boxed{2\vec{b}}$
정사각형 ABCD에서 대각선의 길이인 $\overline{AC}=\boxed{2\sqrt{2}}$이므로
$|\vec{b}|=\boxed{2\sqrt{2}}$
$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=2\boxed{|\vec{b}|}=\boxed{4\sqrt{2}}$

2) 오른쪽 그림과 같이 정삼각형 ABC의 두 변 AB, AC를 이웃한 두 변으로 하는 평행사변형 ABDC에서 두 대각선은 서로 수직이등분하므로 두 대각선의 교점을 O라 하면



$\overline{AO}=\overline{OD}$이고 $\overline{AO}$는 정삼각형 ABC의 높이이므로

$\overline{AO}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \overline{AD}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

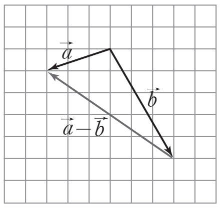
한편, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$이므로

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=\overline{AD}=\sqrt{3}$

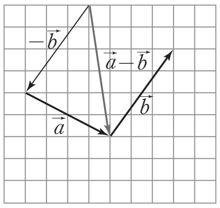
14 답 1) ① 합 ② $\overrightarrow{AC}$ 2) ① 교환 ② 결합

15 답 1) 해설 참조 2) 해설 참조 3) 해설 참조 4) 해설 참조 5) 해설 참조

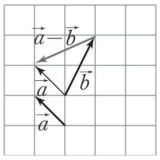
1)



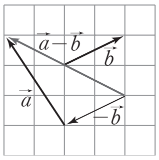
2)



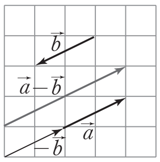
3)



4)



5)



16 답 1) $\overrightarrow{CB}$ 2) $\overrightarrow{CB}$

2) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}$

17 답 1) $\vec{b}-\vec{a}$ 2) $-\vec{a}-\vec{b}$

1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\vec{a}-\vec{b}$

18 답 1) $\vec{0}$ 2) $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CD}$ 3) $\vec{0}$

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

2) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BO}$이고

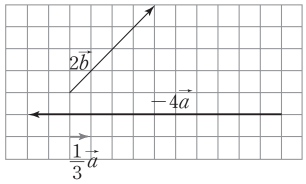
$\overrightarrow{BO}$와 같은 벡터는 $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CD}$이다.

3) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{ED}$

$=\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}$

19 답 차

20 답 1) 해설 참조 2) 해설 참조 3) 해설 참조



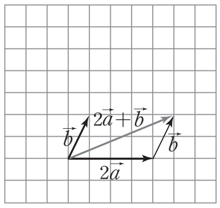
1) $\frac{1}{3}\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향은 같고, 크기가 $\frac{1}{3}$배인 벡터이다.

2) $2\vec{b}$는 $\vec{b}$와 방향은 같고, 크기가 2배인 벡터이다.

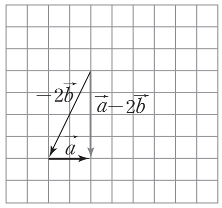
3) $-4\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향은 반대이고, 크기가 4배인 벡터이다.

21 답 1) 해설 참조 2) 해설 참조 3) 해설 참조

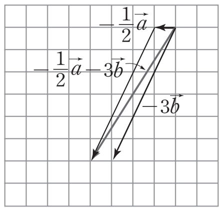
1)



2)



3)



22 답 1) $8\vec{a}-13\vec{b}$ 2) $\vec{a}+2\vec{b}$ 3) $-\vec{a}+\vec{c}$

1) $3(2\vec{a}-3\vec{b})+2(\vec{a}-2\vec{b})=6\vec{a}-9\vec{b}+2\vec{a}-4\vec{b}=8\vec{a}-13\vec{b}$

2) $\frac{1}{3}(5\vec{a}+4\vec{b})+\frac{2}{3}(-\vec{a}+\vec{b})=\frac{5}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

$=\vec{a}+2\vec{b}$

3) $2(\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c})+3(-\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

$=2\vec{a}-6\vec{b}+4\vec{c}-3\vec{a}+6\vec{b}-3\vec{c}$

$=-\vec{a}+\vec{c}$

23 답 1) $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}$ 2) $\vec{x}=7\vec{b}$

1) $2(\vec{x}-3\vec{a})+\vec{x}-3\vec{b}=\vec{0}$에서 $2\vec{x}-6\vec{a}+\vec{x}-3\vec{b}=\vec{0}$

$3\vec{x}=6\vec{a}+3\vec{b}=3(2\vec{a}+\vec{b})$ $\quad\therefore \vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}$

2) $2(\vec{a}-3\vec{b})-(3\vec{a}-\vec{x})=-\vec{a}+\vec{b}$에서

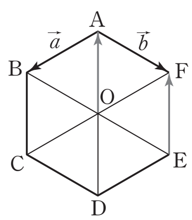
$2\vec{a}-6\vec{b}-3\vec{a}+\vec{x}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\vec{x}=-2\vec{a}+6\vec{b}+3\vec{a}-\vec{a}+\vec{b}=(-2+3-1)\vec{a}+(6+1)\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=7\vec{b}$

24 답 1) $-\vec{a}-\vec{b}$ 2) $2\vec{a}+2\vec{b}$ 3) $\vec{a}+2\vec{b}$

그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라고 하자.



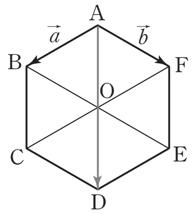
1) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AO}$

$=-(\overrightarrow{AB}+\boxed{\overrightarrow{AF}})$

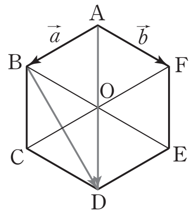
$=-\overrightarrow{AB}-\boxed{\overrightarrow{AF}}$

$=-\vec{a}-\boxed{\vec{b}}$

2) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$
$=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}=2\vec{a}+2\vec{b}$



3) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$
$=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AO}$
$=-\vec{a}+2(\vec{a}+\vec{b})$
$=\vec{a}+2\vec{b}$



25 답 1) 실수배 ① (i) 같 (ii) 반대, $|k||\vec{a}|$ (iii) $\vec{0}$ ② $\vec{0}$
2) ① 결합 ② 분배

26 답 1) $\vec{b}$ 2) $\vec{c}$ 3) $\vec{b}, \vec{c}$

27 답 1) 평행하다 2) 평행하다
3) 평행하다 4) 평행하지 않다

1) $\vec{p}=2\vec{a}-4\vec{b}=-8\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=-8\vec{t}$
따라서 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{t}$는 서로 평행하다.

2) $q=3\vec{a}+2\vec{b}=3\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)=3\vec{s}$
따라서 두 벡터 $\vec{q}$, $\vec{s}$는 서로 평행하다.

3) $\vec{r}=\vec{a}-2\vec{b}=4\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=-4\vec{t}$
따라서 두 벡터 $\vec{q}$, $\vec{s}$는 서로 평행하다.

4) $\vec{p}=2\vec{a}-4\vec{b}=2(\vec{a}-2\vec{b})\neq\vec{s}$
따라서 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{s}$는 서로 평행하지 않다.

28 답 1) -1 2) -2 3) 6

1) $(3\vec{a}+m\vec{b})\,/\!/\,(6\vec{a}-2\vec{b})$이므로 상수 k에 대하여
$6\vec{a}-2\vec{b}=k(3\vec{a}+m\vec{b})$ (k는 $k\neq0$인 실수)
$6\vec{a}-2\vec{b}=3k\vec{a}+mk\vec{b}$
즉, $6=3k$, $-2=mk$
$\therefore k=2,\ m=-1$

2) $\vec{p}\,/\!/\,\vec{q}$, 즉 $(k\vec{a}-4\vec{b})\,/\!/\,(\vec{a}+2\vec{b})$이므로
$k\vec{a}-4\vec{b}=t(\vec{a}+2\vec{b})$ (t는 $t\neq0$인 실수)
$=t\vec{a}+2t\vec{b}$
즉, $k=t$, $-4=2t$
$\therefore t=-2,\ k=-2$

3) $\vec{p}\,/\!/\,\vec{q}$, 즉 $(-\vec{a}-3\vec{b})\,/\!/\,(2\vec{a}+m\vec{b})$이므로
$-\vec{a}-3\vec{b}=k(2\vec{a}+m\vec{b})$ (t는 $t\neq0$인 실수)
$=2k\vec{a}+km\vec{b}$
즉, $-1=2k$, $-3=km$
$\therefore k=-\frac{1}{2},\ m=6$

29 답 평행하다

$\vec{p}+\vec{q}=(4\vec{a}-\vec{b})+(\vec{a}-4\vec{b})$
$=5\vec{a}-5\vec{b}=5(\vec{a}-\vec{b})$
$\vec{q}+\vec{r}=(\vec{a}-4\vec{b})+(-3\vec{a}+6\vec{b})$
$=-2\vec{a}+2\vec{b}=-2(\vec{a}-\vec{b})$
이므로
$-\frac{2}{5}(\vec{p}+\vec{q})=-\frac{2}{5}\times5(\vec{a}-\vec{b})$
$=-2(\vec{a}-\vec{b})$
$=\vec{q}+\vec{r}$
따라서 두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{q}+\vec{r}$는 서로 평행하다.

30 답 1) -7 2) $\frac{7}{3}$ 3) 1

1) $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$ (t는 $t\neq0$인 실수)에서
$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$
$4\vec{a}+k\vec{b}-(\vec{a}+2\vec{b})=t\{2\vec{a}-\vec{b}-(\vec{a}+2\vec{b})\}$
$3\vec{a}+(k-2)\vec{b}=t(\vec{a}-3\vec{b})$
$3=t$, $k-2=-3t$, $k-2=-9 \Rightarrow k=-7$

2) $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$ (t는 $t\neq0$인 실수)에서
$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$
$k\vec{a}+2\vec{b}-(2\vec{a}+\vec{b})=t\{\vec{a}-2\vec{b}-(2\vec{a}+\vec{b})\}$
$(k-2)\vec{a}+\vec{b}=t(-\vec{a}-3\vec{b})=-t\vec{a}-3t\vec{b}$
$k-2=-t$, $1=-3t$이므로
$t=-\frac{1}{3}$, $k-2=\frac{1}{3} \Rightarrow k=\frac{7}{3}$

3) $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$ (t는 $t\neq0$인 실수)에서
$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$
$4\vec{a}+5\vec{b}-(2\vec{a}+\vec{b})=t\{\vec{a}-k\vec{b}-(2\vec{a}+\vec{b})\}$
$2\vec{a}+4\vec{b}=-t\vec{a}-t(k+1)\vec{b}$
즉, $t=-2$, $4=-t(k+1)$이므로
$4=2(k+1)$
$\therefore k=1$

31 답 1) 점 C는 직선 AB 위의 점이다.
2) 점 D는 직선 AB 위의 점이 아니다.
3) 점 E는 직선 AB 위의 점이다.

1) 점 C가 직선 AB 위의 점이려면
$\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$ (t는 $t\neq0$인 실수)인 t가 존재하면 된다. 즉,
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$
$=(\boxed{3\vec{a}-2\vec{b}})-\vec{a}$
$=\boxed{2\vec{a}-2\vec{b}}$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boxed{\vec{b}-\vec{a}}$이므로
$\overrightarrow{AC}=\boxed{-2}\,\overrightarrow{AB}$
따라서 점 $\boxed{\text{C}}$는 직선 AB 위의 점이다.

2) 점 D가 직선 AB 위의 점이려면
$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}$ (t는 $t\neq0$인 실수)인 t가 존재하면 된다. 즉,
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}=\vec{a}-3\vec{b}$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$
그런데 $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 실수 t가 존재하지 않으므로 점 D는 직선 AB 위의 점이 아니다.

3) 점 E가 직선 AB 위의 점이려면
$\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AB}$ (t는 $t\neq0$인 실수)인 t가 존재하면 된다. 즉,
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=(4\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}=3\vec{a}-3\vec{b}$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$이므로
$\overrightarrow{AE}=-3\overrightarrow{AB}$
따라서 점 E는 직선 AB 위의 점이다.

32 답 3

$\overrightarrow{AC}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

이때, $|\overrightarrow{AB}|=2$이므로 $|\overrightarrow{AC}|=\frac{5}{2}|\overrightarrow{AB}|=\frac{5}{2}\times2=5$

$\therefore |\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AB}|=5-2=3$

33 답 6

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$ (k는 $k\neq0$인 실수)
$\overrightarrow{AC}=\boxed{\overrightarrow{OC}}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}=\boxed{\overrightarrow{OB}}-\overrightarrow{OA}$이므로
$(\boxed{3\vec{a}+m\vec{b}})-\vec{a}=k(\boxed{-3\vec{b}}-\vec{a})$
$2\vec{a}+m\vec{b}=\boxed{-k}\,\vec{a}-\boxed{3k}\,\vec{b}$
즉, $2=-k$, $m=3k$이므로 $k=\boxed{-2}$, $m=\boxed{6}$

34 답 2

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로
$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (k는 $k\neq0$인 실수)
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$이므로
$(t-3)\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$
$(t-4)\vec{a}+t\vec{b}=-k\vec{a}+k\vec{b}$
즉, $t-4=-k$, $t=k$이므로
$\therefore k=-2,\ t=2$

35 답 1) 평행, $\vec{a}/\!/\vec{b}$ 2) $\vec{b}=k\vec{a}$(또는 $\vec{a}=k\vec{b}$) 3) 한 직선

단원 총정리 문제 정답 Ⅱ-1 벡터의 연산

pp. 64~65

01 답 ②

$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$
$=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC})$
$=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$

02 답 ③

벡터 $\overrightarrow{EF}$와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터는
$\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{CI}$로 4개이다.

03 답 $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{FE}$

점 D가 $\overline{AB}$의 중점이므로 $\overline{AD}=\overline{DB}$
$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$
삼각형의 중점연결에 의하여
$\overline{FE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AD}$이고 $\overline{FE}/\!/\overline{AD}$이므로 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FE}$
따라서 $\overrightarrow{AD}$와 같은 벡터는 $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{FE}$이다.

04 답 ②

$4(\vec{x}-2\vec{b})+\vec{x}-\vec{a}-\vec{b}=4\vec{a}+\vec{b}$
$4\vec{x}-8\vec{b}+\vec{x}-\vec{a}-\vec{b}=4\vec{a}+\vec{b}$
$5\vec{x}-\vec{a}-9\vec{b}=4\vec{a}+\vec{b}$
$5\vec{x}=5\vec{a}+10\vec{b}$
$\therefore \vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$

05 답 4

$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{FE}$
$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}$
$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{AO}$
따라서 $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FO}$와 같은 벡터의 개수는 4이다.

06 답 ②

영벡터도 아니고 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터 $\vec{p}=m\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=9\vec{a}-2m\vec{b}$가 서로 평행하도록 하는 실수 m의 값은? 두 벡터가 서로 평행하므로 $\vec{p}=k\vec{q}$가 성립해.

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

1st 두 벡터가 서로 평행할 조건은 한 벡터가 다른 벡터의 실수배가 성립하지.

두 벡터 $\vec{p}=m\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=9\vec{a}-2m\vec{b}$가 서로 평행하므로
$\vec{p}=k\vec{q}$ (k는 $k\neq0$인 실수)인 실수 k가 존재한다.
$m\vec{a}-2\vec{b}=k(9\vec{a}-2m\vec{b})$
$=9k\vec{a}-2km\vec{b}$

2nd 두 벡터가 서로 같으므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 각각의 실수배끼리 같아야 해.

$m=9k$, $-2=-2km \Rightarrow 1=km$이므로
$1=k\cdot9k$, $k^2=\frac{1}{9}$ → $m=9k$를 $1=km$에 대입한 거야.
즉, $m^2=9$
$\therefore m=3(\because m>0)$

07 답 평행사변형

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$에서

$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PC}$

$\therefore\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overline{BA}=\overline{CD},\ \overline{BA}/\!/\overline{CD}$,

사각형 ABCD는 한 쌍의 대응하는 변의 길이가 같고, 평행하다.

따라서 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

08 답 $2\vec{b}$

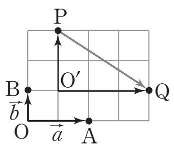
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\\&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\\&=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\\&=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-(-\overrightarrow{OA})\\&=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\\&=2\overrightarrow{OB}=2\vec{b}\end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}\\&=2\overrightarrow{OB}=2\vec{b}\end{aligned}$$

09 답 3

그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{O'P}$, $\overrightarrow{O'Q}$를 잡으면



$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{O'Q}-\overrightarrow{O'P}\\&=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\\&=\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{b}\end{aligned}$$

즉, $m=\frac{3}{2}$, $n=2$이므로 $mn=\frac{3}{2}\times 2=3$

10 답 $\sqrt{3}$

정삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2$, 점 P가 $\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PC}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AP}|$의 값을 구하여라.

정삼각형의 내각의 크기는 모두 60°야.

$\overrightarrow{PB}$는 $\overrightarrow{PC}$와 크기는 같고, 방향이 반대인 벡터야.

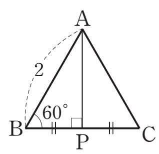
1st 점 P의 위치가 선분 BC의 어느 부분에 있는지 파악하자.

정삼각형 ABC에서 점 P가 $\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PC}$이므로 점 P는 선분 BC의 중점이다.

점 P에 대하여 $|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$이지만 방향이 반대이기 때문에 점 P가 선분 BC의 중점이야.

2nd $|\overrightarrow{AP}|=\overline{AP}$이고, 삼각형 ABP를 생각해보자.

그리고 $\angle APB=90°$, $\angle ABP=60°$이므로



$\sin(\angle ABP)=\sin 60°=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AP}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\overline{AP}}{2}$ $\quad\therefore\ |\overrightarrow{AP}|=\overline{AP}=\sqrt{3}$

11 답 3

$\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AB}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위의 점이다. 이때,

$|\overrightarrow{AC}|=4|\overrightarrow{AB}|=4$이므로

$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AB}|=4-1=3$

다른 풀이

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BC}|&=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|=|4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}|\\&=|3\overrightarrow{AB}|=3|\overrightarrow{AB}|=3\end{aligned}$$

12 답 ③

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하므로

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (k는 $k\neq 0$인 실수)

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$이므로

$(m\vec{a}-6\vec{b})-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$

$(m-1)\vec{a}-6\vec{b}=-k\vec{a}+k\vec{b}$

즉, $m-1=-k$, $-6=k$

$k=-6$이므로 $m=7$

Ⅱ-2 평면벡터의 성분 pp. 66~71

36 답 1) $\vec{c}-\vec{a}$ 2) $\vec{b}-\vec{c}$ 3) $\vec{b}-\vec{a}$ 4) $\vec{0}$ 5) $\vec{0}$

1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\vec{c}-\vec{a}$

2) $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{b}-\vec{c}$

3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

4) $\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

5) $\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

37 답 1) $-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ 2) $-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

1) $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\\&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OB}\\&=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\\&=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}-\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}&=-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OA}\\&=-2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\\&=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}\end{aligned}$$

38 답 1) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ 2) $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}$ 3) $\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AC}$ 4) $\overrightarrow{AA}$

39 답 1) 위치벡터 2) $\overrightarrow{OB}$, $\vec{b}$

40 답 1) $\vec{p}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ 2) $\vec{p}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ 3) $\vec{q}=4\vec{b}-3\vec{a}$ 4) $\vec{q}=4\vec{a}-3\vec{b}$ 5) $\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

1) $\vec{p}=\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ 2) $\vec{p}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{2+1}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

3) $\vec{q}=\frac{4\vec{b}-3\vec{a}}{4-3}=4\vec{b}-3\vec{a}$ 4) $\vec{q}=\frac{4\vec{a}-3\vec{b}}{4-3}=4\vec{a}-3\vec{b}$

41 답 $\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$

점 D는 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ … ㉠

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 점 G는 $\overline{\mathrm{AD}}$를 2 : 1로 내분하는 점이다.

즉, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$이므로 ㉠을 대입하면

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$

42 답 $\vec{b}$, $\vec{c}$, 2, 1, $\vec{m}$, $\vec{a}$, 1, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$, 3, 3

점 M의 위치벡터 $\vec{m}=\dfrac{\boxed{\vec{b}}+\boxed{\vec{c}}}{2}$

또, 무게중심 G는 중선 AM을 $\boxed{2}$: $\boxed{1}$로 내분하는 점이므로 점 G의 위치벡터 $\vec{g}$는

$$\vec{g}=\frac{2\boxed{\vec{m}}+\boxed{\vec{a}}}{2+\boxed{1}}=\frac{2\times\dfrac{\boxed{\vec{b}}+\boxed{\vec{c}}}{2}+\boxed{\vec{a}}}{\boxed{3}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{\boxed{3}}$$

43 답 $\vec{0}$

각각을 시점이 O인 위치벡터로 바꾸면

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}+\overrightarrow{\mathrm{BG}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

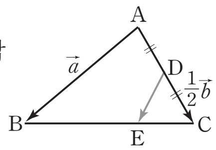
$=0\left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\right)$

44 답 1) $\vec{p}=\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$, $\vec{q}=\frac{5}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ 2) $\frac{1}{2}$

1) $\vec{p}=\dfrac{3\vec{b}+5\vec{a}}{3+5}=\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$, $\vec{q}=\dfrac{3\vec{b}-5\vec{a}}{3-5}=\frac{5}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$

2) 그림과 같이

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ 각각을 구하면



$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$

따라서 $m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{6}$이므로 $m+n=\frac{1}{2}$

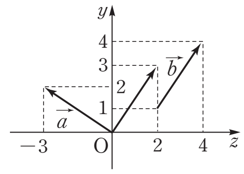
45 답 1) $\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$, $\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ 2) $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

46 답 1) $\vec{a}=(-3, 2)$, $\vec{b}=(2, 3)$
2) $\vec{a}=-3\vec{e_1}+2\vec{e_2}$, $\vec{b}=2\vec{e_1}+3\vec{e_2}$
3) $\sqrt{13}$ 4) $\sqrt{13}$

1) $\vec{a}$는 시점이 (0, 0), 종점이 (−3, 2)이므로

$\vec{a}=(-3, 2)$

$\vec{b}$는 시점이 원점이 되도록 x축으로 −2만큼, y축으로 −1만큼 평행이동시키면 그림과 같이 종점이 $(4-2, 4-1)=(2, 3)$이므로 $\vec{b}=(2, 3)$



2) $\vec{a}=(-3, 2)=-3\vec{e_1}+2\vec{e_2}$

$\vec{b}=(2, 3)=2\vec{e_1}+3\vec{e_2}$

3) $|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

4) $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

47 답 1) $k=-1$, $l=4$ 2) $k=2$, $l=2$

1) $\vec{a}=(-1, 3)$, $\vec{c}=(k, l-1)$이므로 $\vec{a}=\vec{c}$에 대하여

$k=-1$, $l-1=3$이므로 $k=-1$, $l=4$

2) $\vec{b}=(2, 1)$, $\vec{c}=(k, l-1)$이므로 $\vec{b}=\vec{c}$에 대하여

$k=2$, $l-1=1$이므로 $k=2$, $l=2$

48 답 1) a_1, a_2, 성분, 단위
2) b_1, b_2 3) $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

49 답 1) (4, −3) 2) (−16, −12)
3) (−9, 0) 4) (−3, 9)

1) $\vec{a}+2\vec{b}=(2, 3)+2(1, -3)$

$=(2, 3)+(2, -6)=(4, -3)$

2) $-4\vec{c}=-4(4, 3)=(-16, -12)$

3) $2\vec{a}-\vec{b}-3\vec{c}=2(2, 3)-(1, -3)-3(4, 3)$

$=(4, 6)-(1, -3)-(12, 9)$

$=(4-1-12, 6+3-9)$

$=(-9, 0)$

4) $2(\vec{a}-2\vec{b})-(2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}-4\vec{b}-2\vec{a}+\vec{b}$

$=-3\vec{b}=-3(1, -3)=(-3, 9)$

50 답 1) $k=3$, $l=2$ 2) $k=-9$, $l=-1$

1) $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 성분으로 나타내면

$(4, 3)=k(2, -1)+l(-1, 3)$

$=(2k, -k)+(-l, 3l)$

$=(2k-l, -k+3l)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$2k-l=4$, $-k+3l=3$

두 식을 연립하여 풀면 $k=3$, $l=2$

2) $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 성분으로 나타내면

$(-6,\ 7)=k(1,\ -1)+l(-3,\ 2)$

$=(k,\ -k)+(-3l,\ 2l)$

$=(k-3l,\ -k+2l)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$k-3l=-6,\ -k+2l=7$

두 식을 연립하여 풀면 $k=-9,\ l=-1$

51 답 1) $(-4,\ 3),\ 5$ 2) $(3,\ -2),\ \sqrt{13}$

1) 두 점 $A(1,\ 2)$, $B(-3,\ 5)$에 대하여

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(-3,\ 5)-(1,\ 2)=(-4,\ 3)$

$\therefore |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

2) 두 점 $A(-1,\ 4)$, $B(2,\ 2)$에 대하여

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(2,\ 2)-(-1,\ 4)=(3,\ -2)$

$\therefore |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

52 답 1) 5 2) 10

1) $\vec{a}=(-1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 1)$이므로

$2\vec{a}-\vec{b}=2(-1,\ 2)-(2,\ 1)$

$=(-2,\ 4)-(2,\ 1)=(-4,\ 3)$

$\therefore |2\vec{a}-b|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

2) $\vec{a}=(-1,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ -2)$이므로

$3(\vec{a}-\vec{b})+2\vec{b}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{b}=3\vec{a}-\vec{b}$

$=3(-1,\ 2)-(3,\ -2)$

$=(-3,\ 6)-(3,\ -2)=(-6,\ 8)$

$\therefore |3(\vec{a}-\vec{b})+2\vec{b}|=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$

53 답 1) 5 2) 5

1) $\vec{a}=(x+3,\ 3y+2)$, $\vec{b}=(1-y,\ x-4)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$라 하므로

$x+3=1-y,\ 3y+2=x-4$

위 두 식을 연립하여 풀면

$x=0,\ y=-2 \qquad \therefore \vec{a}=(3,\ -4)$

$\therefore |\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

2) $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(3,\ 2)$, $\vec{c}=(-4,\ 3)$에 대하여

$\vec{a}+k\vec{c}=(2,\ 3)+k(-4,\ 3)$

$=(2-4k,\ 3+3k)$

$\vec{b}-\vec{a}=(3,\ 2)-(2,\ 3)=(1,\ -1)$

이 두 벡터가 서로 평행하므로

$(2-4k,\ 3+3k)=t(1,\ -1)$(t는 $t\neq0$인 실수)

$2-4k=t,\ 3+3k=-t$

위 식을 연립하여 풀면

$\therefore k=5$

54 답 1) ① $(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

② $(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

③ $(ka_1,\ ka_2)$

2) ① $(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

② $\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

단원 총정리 문제 정답 Ⅱ-2 평면벡터의 성분

pp. 72~73

01 답 ②

$2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{CA}=2(\vec{b}-\vec{a})-5(\vec{a}-\vec{c})$

$=2\vec{b}-2\vec{a}-5\vec{a}+5\vec{c}$

$=-7\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c}$

02 답 ⑤

선분 AB를 2:1로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$를 구하면

$\vec{p}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{a}}{2+1}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}$

또, 선분 AB를 3:2로 외분하는 점 Q의 위치벡터 $\vec{q}$를 구하면

$\vec{q}=\dfrac{3\vec{b}-2\vec{a}}{3-2}=3\vec{b}-2\vec{a}$

$\therefore \vec{p}+\vec{q}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}+3\vec{b}-2\vec{a}$

$=\dfrac{-5\vec{a}+11\vec{b}}{3}$

즉, $m=-5,\ n=11$이므로

$m+n=-5+11=6$

03 답 ①

네 점 A, B, C, G의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{g}$라 하면

$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\therefore \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\vec{a}-\vec{g})+(\vec{b}-\vec{g})+(\vec{c}-\vec{g})$

$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{g}$

$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\times\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\vec{0}$

04 답 ①

네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$라 하자.

$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}$에서

$2(\vec{a}-\vec{p})+3(\vec{b}-\vec{p})=\vec{b}-\vec{a}$

$2\vec{a}-2\vec{p}+3\vec{b}-3\vec{p}=\vec{b}-\vec{a}$

$-5\vec{p}=-2\vec{b}-3\vec{a}$

$\therefore \vec{p}=\dfrac{2\vec{b}+3\vec{a}}{5}=\dfrac{2\vec{b}+3\vec{a}}{2+3}$

즉, 점 P는 변 AB를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

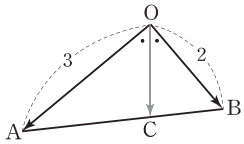
$m=2,\ n=3$이므로 $n-m=3-2=1$

05 답 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}}{5}$

점 C가 ∠O의 이등분선과 $\overline{AB}$가 만나는 점이므로

$\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{AC}:\overline{CB}=3:2$

즉, 점 C는 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점이다.



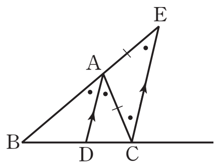
$\therefore \overrightarrow{OC}=\dfrac{3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}}{3+2}=\dfrac{3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}}{5}$

개념 정리

[삼각형의 각의 이등분선]

삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하면

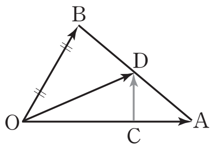
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



06 답 ①

점 C는 선분 OA를 3:1로 내분하는 점이므로 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{4}\vec{a}$

점 D는 선분 AB의 중점이므로



$\overrightarrow{OD}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$이므로

$\overrightarrow{CD}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\dfrac{3}{4}\vec{a}=-\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

즉, $m=-\dfrac{1}{4}$, $n=\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{n}{m}=\dfrac{1}{2}\div\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-2$

07 답 $\dfrac{7}{5}$

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$ ⋯ ㉠

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$에서

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$ ⋯ ㉡

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$에서

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에서

$\vec{a}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{AM}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AN}$, $\vec{b}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{AN}-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AM}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{AM}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AN}+\dfrac{6}{5}\overrightarrow{AN}-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AM}$

$=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AM}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AN}$

따라서 $p=\dfrac{4}{5}$, $q=\dfrac{3}{5}$이므로 $p+q=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{5}$

08 답 ②

$5(\vec{x}-\vec{a})=4\vec{x}-2\vec{a}-\vec{b}$에서

$5\vec{x}-5\vec{a}=4\vec{x}-2\vec{a}-\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=3\vec{a}-\vec{b}$

$\vec{a}=(-2,\ 1)$, $\vec{b}=(-3,\ -2)$

이므로

$\vec{x}=3\vec{a}-\vec{b}$

$=3(-2,\ 1)-(-3,\ -2)$

$=(-6,\ 3)-(-3,\ -2)$

$=(-3,\ 5)$

09 답 ④

$\vec{a}=(x,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ x)$이므로

$\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$

$=2(x,\ -1)-(1,\ x)$

$=(2x-1,\ -x-2)$

벡터 $\vec{c}$의 크기는

$\sqrt{(2x-1)^2+(-x-2)^2}$

$=\sqrt{4x^2-4x+1+x^2+4x+4}$

$=\sqrt{5x^2+5}$

실수 x에 대하여 $x^2\ge0$이므로 $x=0$일 때, 벡터 $\vec{c}$의 크기의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

10 답 ②

좌표평면 위의 네 점 $A(-1,\ 4)$, $B(x,\ y)$, $C(-3,\ 1)$, $D(1,\ -2)$에 대하여 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$를 만족시킬 때, 두 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 값은?

$\overrightarrow{AC}$와 $\overrightarrow{BD}$를 모두 시점이 원점 O인 식으로 바꾸어 생각하자.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st $\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OS}$와 같이 시점을 점 O로 통일하자.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$=(-3,\ 1)-(-1,\ 4)$

$=(-2,\ -3)$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}$

$=(1,\ -2)-(x,\ y)$

$=(1-x,\ -2-y)$

2nd 두 벡터가 서로 같은 조건을 이용하자.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$를 만족시키므로

$(-2,\ -3)=(1-x,\ -2-y)$

$(a_1,\ b_1)=(a_2,\ b_2) \Longleftrightarrow a_1=a_2,\ b_1=b_2$

$-2=1-x$, $-3=-2-y$

$\therefore x=3$, $y=1 \Rightarrow x-y=3-1=2$

11 답 ①

세 벡터 $\vec{a}=(3,\ 4)$, $\vec{b}=(-1,\ -3)$, $\vec{c}=(2,\ -1)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}+k\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$가 서로 평행할 때, 실수 k의 값은?
두 벡터가 서로 평행하면 한 벡터는 다른 벡터의 실수배로 표현할 수 있어.

① $\frac{11}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{6}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

1st 두 벡터 $\vec{a}+k\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$를 성분으로 표현해보자.
$\vec{a}+k\vec{b}=(3,\ 4)+k(-1,\ -3)=(3-k,\ 4-3k)$,
$\vec{a}+\vec{c}=(3,\ 4)+(2,\ -1)=(5,\ 3)$

2nd 두 벡터가 서로 같을 조건을 이용하자.
두 벡터 $\vec{a}+k\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$가 서로 평행하므로
$\vec{a}+k\vec{b}=t(\vec{a}+\vec{c})$ (t는 $t\neq0$인 실수)인 t가 존재한다.
$(3-k,\ 4-3k)=t(5,\ 3)=(5t,\ 3t)$
두 벡터가 서로 같을 조건에 의해
$3-k=5t,\ 4-3k=3t$
두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 서로 같을 조건은 $a_1=b_1$, $a_2=b_2$
두 식을 연립하여 풀면 $t=\frac{5}{12}$, $k=\frac{11}{12}$

12 답 5

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서
$(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})=\vec{0}$
$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$
$=\frac{1}{3}\{(2,\ 1)+(3,\ 4)+(1,\ 4)\}$
$=\frac{1}{3}(6,\ 9)=(2,\ 3)=(a,\ b)$
즉, $a=2$, $b=3$이므로 $a+b=5$

Ⅱ-3 평면벡터의 내적

pp. 74~79

55 답 1) 6 2) 4 3) $-\sqrt{6}$

1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\theta=60^\circ$이므로
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
$=3\times4\times\cos60^\circ=3\times4\times\frac{1}{2}=6$

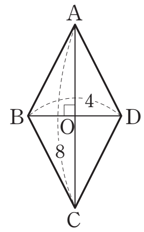
2) $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=4$, $\theta=45^\circ$이므로
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
$=\sqrt{2}\times4\times\cos45^\circ=\sqrt{2}\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$

3) $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{6}$, $\theta=135^\circ$이므로
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
$=-\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\cos(180^\circ-135^\circ)$
$=-\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\cos45^\circ$
$=-\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{6}$

56 답 1) 16 2) 8

1) 두 벡터 $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 직각삼각형 BCD에서 $|\overrightarrow{BC}|=\boxed{|\overrightarrow{BD}|}\cos\theta$
$\therefore\ \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BD}|\boxed{|\overrightarrow{BC}|}\cos\theta=\boxed{|\overrightarrow{BC}|}|\overrightarrow{BD}|\cos\theta$
$=\boxed{|\overrightarrow{BC}|}|\overrightarrow{BC}|=\boxed{|\overrightarrow{BC}|}^2=\boxed{16}$

2) 마름모 ABCD의 두 대각선의 교점을 O, 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 마름모는 두 대각선이 서로 다른 대각선을 수직이등분하므로
$|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$, $|\overrightarrow{BO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|=2$
$\therefore\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|\cos\theta$
$=|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BA}|\cos\theta$
$=|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BO}|$
$=4\times2=8$



57 답 1) -1 2) -5 3) 5 4) 0 5) 5

1) $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(2,\ -1)$이므로
$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+3\times(-1)=-1$

2) $\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ 4)$이므로
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times1+(-2)\times4=-5$

3) $\vec{a}=(2,\ -3)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$이므로
$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+(-3)\times(-1)=5$

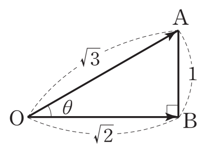
4) $\vec{a}=(-4,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 4)$이므로
$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-4)\times2+2\times4=0$

5) $\vec{a}=(2,\ -3)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$이므로
$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+(-3)\times(-1)=5$

58 답 1) 3 2) 2

1) 정육각형의 대각선의 교점을 O라 하면
삼각형 OAB는 한 변의 길이가 $\boxed{1}$인 정삼각형이다.
이때, $\overline{AC}$는 $\overline{BO}$의 수직이등분선으로 정삼각형 OAB의 높이를 h라 하면
$|\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=\boxed{2}h=\boxed{2}\times\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boxed{\sqrt{3}}$
또, $|\overrightarrow{AD}|=2$, $|\overrightarrow{CD}|=1$이고, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$가 이루는 각의 크기는 30°이다.
$\therefore\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos30^\circ=\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{3}$

2) 삼각형 OAB의 세 변의 길이가 각각 $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, 1이므로 삼각형 OAB는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이다.
이때, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이므로



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2$

59 답 1) 내적, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ① $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
② $-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$
2) $a_1b_1+a_2b_2$

60 답 1) 45° 2) 120° 3) 90° 4) 180°

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+3\times1=5>0$이므로

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1\times2+3\times1}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+1^2}}$

$=\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \theta=45^\circ$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3\sqrt{3}+\sqrt{3}=-2\sqrt{3}<0$이므로

$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}}$

$=\frac{1}{2}$

즉, $180^\circ-\theta=60^\circ$

$\therefore\ \theta=120^\circ$

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6+6=0$이므로

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-6+6}{\sqrt{3^2+3^2}\sqrt{(-2)^2+2^2}}=0$

$\therefore\ \theta=90^\circ$

4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-8<0$이므로

$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{-8+0}{\sqrt{4^2}\sqrt{(-2)^2}}=1$

즉, $180^\circ-\theta=0^\circ$

$\therefore\ \theta=180^\circ$

61 답 1) $\sqrt{3}$ 2) 120°

1) $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$이므로

$\cos30^\circ=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{1}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

$\sqrt{3(1+k^2)}=2k$

양변을 제곱하면

$3+3k^2=4k^2 \Rightarrow k^2=3$

$\therefore\ k=\sqrt{3}\ (\because k>0)$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{-3}{2\times3}=\frac{1}{2}$

즉, $180^\circ-\theta=60^\circ$

$\therefore\ \theta=120^\circ$

62 답 1) -6 2) 9

1) 두 벡터가 수직이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로

$2\times k+3\times4=0 \Rightarrow 2k+12=0$

$\therefore\ k=-6$

2) 두 벡터가 수직이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로

$3\times(-3)+k\times1=0 \Rightarrow -9+k=0$

$\therefore\ k=9$

63 답 1) -2 2) $\frac{2}{3}$

1) 두 벡터가 평행이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$이므로

$k\times2+(-2)\times2=\pm\sqrt{k^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+2^2}$

$k-2=\pm\sqrt{2}\sqrt{k^2+4}$

$(k-2)^2=2(k^2+4)$

양변을 제곱하면

$(k+2)^2=0 \qquad \therefore\ k=-2$

2) 두 벡터가 평행이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$이므로

$3\times2+1\times k=\pm\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{2^2+k^2}$

$6+k=\pm\sqrt{10}\sqrt{4+k^2}$

양변을 제곱하면

$(6+k)^2=10(4+k^2)$

$(3k-2)^2=0 \qquad \therefore\ k=\frac{2}{3}$

64 답 1) $\angle O=90^\circ$인 직각삼각형
2) $x=y=\sqrt{3}$

1) $\overrightarrow{OA}=\boxed{(4,\ 1)}$, $\overrightarrow{OB}=\boxed{(-2,\ 8)}$이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{4}\times(-2)+1\times\boxed{8}=\boxed{0}$

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 $\boxed{\text{수직}}$이므로 삼각형 OAB는

$\angle\boxed{O}=90^\circ$인 직각삼각형이다.

2) 먼저 $\vec{a}=(2x,\ -2)$, $\vec{b}=(x,\ 1)$이 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ$에서

$2x^2-2=\sqrt{4x^2+4}\sqrt{x^2+1}\cos60^\circ$

$2x^2-2=2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}\times\frac{1}{2}$

$2x^2-2=x^2+1 \Rightarrow x^2=3$

$\therefore\ x=\sqrt{3}\ (\because x>0)$

또, $\vec{b}=(x,\ 1)$, $\vec{c}=(-1,\ y)$가 수직이므로

$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$에서 $-x+y=0 \qquad \therefore\ x=y=\sqrt{3}$

65 답 1) ① $|\vec{a}||\vec{b}|$, $\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$
② $|\vec{a}||\vec{b}|$, $\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$
2) ① 0, ② $\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

66 답 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}$, $\vec{b}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=(\boxed{\vec{a}+\vec{b}})\cdot(\boxed{\vec{a}+\vec{b}})\\&=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\boxed{\vec{a}}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\boxed{\vec{b}}\\&=\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a}}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\boxed{\vec{b}\cdot\vec{b}}\\&=|\boxed{\vec{a}}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\boxed{\vec{b}}|^2\end{aligned}$$

67 답 1) 해설 참조 2) 해설 참조

1) $$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2&=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})&=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

68 답 $\vec{a}$, $-\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{a}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, 4, 9, 3

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2&=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=(\vec{a}-\vec{b})\cdot\boxed{\vec{a}}+(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\boxed{-\vec{b}})\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\boxed{\vec{b}\cdot\vec{a}}-\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=|\vec{a}|^2-2\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}}+|\vec{b}|^2\\&=4-\boxed{4}+9=\boxed{9}\end{aligned}$$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|=\boxed{3}$

69 답 5

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=9-4=5$

70 답 1) 2 2) $\sqrt{14}$ 3) $\sqrt{29}$

1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ 이므로

$(\sqrt{6})^2=1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2$

$2\vec{a}\cdot\vec{b}=4 \qquad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=2$

2) $$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=1^2+2\times2+3^2=14\end{aligned}$$

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{14}$

3) $$\begin{aligned}|\vec{a}-2\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2\\&=1^2-4\times2+4\times3^2=29\end{aligned}$$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{29}$

71 답 1) 10 2) 8

1) $$\begin{aligned}|3\vec{a}-2\vec{b}|^2&=(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})\\&=9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2\\&=9\times9-12\times\left(-\frac{1}{4}\right)+4\times4=100\end{aligned}$$

$\therefore |3\vec{a}-2\vec{b}|=10$

2) $$\begin{aligned}|3\vec{a}+\vec{b}|^2&=(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b})\\&=9|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=9\times4+6\times\frac{1}{2}+25=64\end{aligned}$$

$\therefore |3\vec{a}+\vec{b}|=8$

72 답 1) 3 2) $\frac{1}{4}$

1) $|3\vec{a}-\vec{b}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=19$

$9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=19$

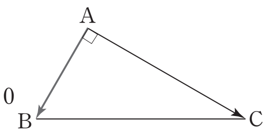
$9\times4-6\vec{a}\cdot\vec{b}+1=19 \qquad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=3$

2) $|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=1$

$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=1$

$1\times1-4\vec{a}\cdot\vec{b}+1=1 \qquad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}$

73 답 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형



그림과 같은 삼각형 ABC에서

$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

$(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

이므로 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

74 답 90°

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 \cdots ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|&=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 \cdots ㉡\end{aligned}$$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$이므로

㉠, ㉡에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

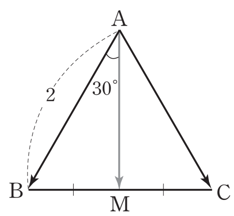
따라서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기는 90°이다.

75 답 (1) 교환 (2) 분배 (3) $k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

단원 총정리 문제 정답 Ⅱ-3 평면벡터의 내적

pp. 80~81

01 답 ③



정삼각형의 밑변을 이등분한 점이 M이면 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$

즉, $\angle BAM=30^\circ$이고,

$\cos(\angle BAM)=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ 이므로

$\cos 30^\circ=\dfrac{\overline{AM}}{2}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\overline{AM}}{2} \qquad \therefore \overline{AM}=\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}&=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|\cos(\angle BAM)\\&=2\times\sqrt{3}\times\cos 30=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\end{aligned}$$

02 답 ④

두 벡터 $\vec{a}=(-2,\ x)$, $\vec{b}=(5x+2,\ 4)$에 대하여
$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$를 만족시킬 때, x의 값은?
내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 같은 성분끼리의 곱의 합으로 구하면 돼.

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ -1
④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

1st 두 벡터가 성분으로 나타내어져 있으니까 내적은 각 성분끼리의 곱의 합이야.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\times(5x+2)+x\times4$
$=-10x-4+4x$ — $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$
$=-6x-4$

2nd 주어진 내적의 값을 만족시키는 일차방정식을 구하자.

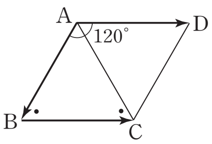
$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$이므로
$-6x-4=4$
$-6x=8$
$\therefore x=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$

03 답 ⑤

$|3\vec{a}-2\vec{b}|^2=(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$
$=9\vec{a}\cdot\vec{a}-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b}$
$=9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$
$=9\times4^2-12\times8+4\times6^2$
$=144-96+144$
$=192$
$\therefore |3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{192}=8\sqrt{3}$

04 답 -2

그림과 같이 정삼각형을 하나 더 붙이면 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$이다.
즉, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기는 120°이다.



$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos 120^\circ$
$=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos 60^\circ$
$=-2\times2\times\frac{1}{2}=-2$

05 답 ③

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times4+3\times2=10>0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0^\circ\le\theta<90^\circ)$라 하면

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{10}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{4^2+2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\therefore \theta=45^\circ$

06 답 선분 AB를 지름으로 하는 원

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$이면 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$이므로 $\angle APB=90^\circ$이다. 그런데 지름에 대한 원주각의 크기는 항상 90°이다.
따라서 점 P의 집합이 나타내는 도형은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다.

07 답 ⑤

두 벡터 $\vec{a}=(4,\ -1)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}-x\vec{b}$와 $\vec{a}+2\vec{b}$가 서로 수직일 때, 실수 x의 값은?
두 벡터가 수직이므로 두 벡터의 내적은 0이어야 해.

① $-\frac{5}{13}$ ② $-\frac{3}{13}$ ③ $-\frac{1}{13}$
④ $\frac{1}{13}$ ⑤ $\frac{3}{13}$

1st 두 벡터 $\vec{a}-x\vec{b}$와 $\vec{a}+2\vec{b}$를 성분으로 나타내자.

$\vec{a}-x\vec{b}=(4,\ -1)-x(-1,\ 3)=(4+x,\ -1-3x)$,
$\vec{a}+2\vec{b}=(4,\ -1)+2(-1,\ 3)=(2,\ 5)$

2nd 두 벡터가 수직이므로 두 벡터의 내적은 0이야.

두 벡터 $\vec{a}-x\vec{b}$와 $\vec{a}+2\vec{b}$가 서로 수직이므로
$(\vec{a}-x\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=0$
$(4+x,\ -1-3x)\cdot(2,\ 5)=0$
$(4+x)\times2+(-1-3x)\times5=0$ — $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$
$8+2x-5-15x=0$
$-13x=-3$ $\therefore x=\frac{3}{13}$

08 답 ②

$\vec{b}$와 $\vec{c}$는 서로 수직이므로 $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$
$(6,\ y)\cdot(-2,\ 4)=0$, $-12+4y=0$ $\therefore y=3$
또, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하므로
$\vec{a}=k\vec{b}$ (k는 $k\neq0$인 실수)
$(2x,\ 3)=k(6,\ 3)$
즉, $2x=6k$, $3=3k$ $\therefore k=1$, $x=3$
$\therefore x+y=3+3=6$

09 답 120°

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하고,
$\angle AOB=\theta(0<\theta<180^\circ)$라 하자.
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$이므로 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$
$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$
$\therefore |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$
이때, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$이므로
$4+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=4$ ⇨ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$
$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$이므로

$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{-2}{2\times2}=\frac{1}{2}$
$180^\circ-\theta=60^\circ$ $\therefore \theta=120^\circ$

다른 풀이

△ABC의 무게중심을 G라 할 때,

$\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\overrightarrow{OG}$

이때, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$이라 하므로 $\overrightarrow{OG}=\vec{0}$, 즉 원의 중심 O는 △ABC의 무게중심 G이다.

또, $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$이므로 점 O는 △ABC의 외심이고 내심이다.

따라서 △ABC는 정삼각형이므로 $\theta=120^\circ$이다.

10 답 -1

$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\cdot(-\overrightarrow{AB})$

$=-|\overrightarrow{AB}|^2=-1$

11 답 $2\sqrt{3}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$이고, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times2\times\cos60^\circ=2$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(2\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}-2\vec{b}$이므로

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=2^2-4\times2+4\times2^2=12$

$\therefore |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$이다.

12 답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

$2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}=\vec{0}$에서 $2\vec{a}+3\vec{b}=-4\vec{c}$

$\therefore |2\vec{a}+3\vec{b}|=|-4\vec{c}|$

위 식의 양변을 제곱하면

$(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=(-4\vec{c})\cdot(-4\vec{c})$

$4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=16|\vec{c}|^2$

$4+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9=16$ ($\because |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$)

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$이므로

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$

$=1-2\times\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$

$\therefore \overline{AB}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Ⅱ-4 직선의 방정식과 원의 방정식

pp. 82~89

76 답 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{5}$ 2) $\frac{x-5}{4}=\frac{y-1}{-1}$

77 답 1) $(4, 3)$ 2) $(-5, 1)$ 3) $(-1, -7)$

1) $\frac{x-1}{4}-\frac{y+3}{3}=1$ ⇨ $\frac{x-1}{4}=\frac{y+6}{3}$이므로

방향벡터는 $(4, 3)$이다.

2) $\frac{6-x}{5}=1$ ⇨ $\frac{x-6}{-5}=y$이므로

방향벡터는 $(-5, 1)$이다.

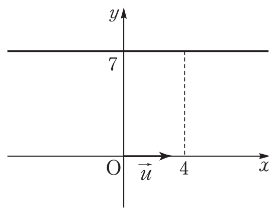
3) $-x+3=\frac{5-y}{7}$ ⇨ $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-5}{-7}$이므로

방향벡터는 $(-1, -7)$이다.

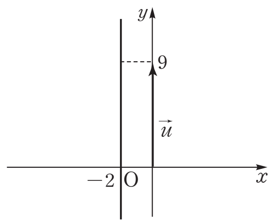
78 답 1) $y=7$ 2) $x=-2$

1) 점 $(4, 7)$을 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(3, 0)$인 직선을 그림으로 그리면 오른쪽과 같다.

따라서 직선의 방정식은 $y=7$이다.



2) 점 $(-2, 9)$를 지나고, 방향벡터가 $\vec{u}=(0, 9)$인 직선을 그림으로 그리면 오른쪽과 같다. 따라서 직선의 방정식은 $x=-2$이다.



79 답 1) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{3}$ 2) $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-9}{-6}$ 3) $x=5$

1) 두 점 A(3, 1), B(2, 4)를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x-\boxed{3}}{2-\boxed{3}}=\frac{y-\boxed{1}}{4-\boxed{1}}$ $\quad\therefore \frac{x-\boxed{3}}{\boxed{-1}}=\frac{y-\boxed{1}}{\boxed{3}}$

2) 두 점 A(1, 9), B(−2, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-9}{3-9}$ $\quad\therefore \frac{x-1}{-3}=\frac{y-9}{-6}$

3) 두 점 A(5, 6), B(5, 1)을 지나는 직선은 x좌표가 같고, 방향벡터는 $(0, 5)$이므로 구하는 직선의 방정식은 $x=5$이다.

다른 풀이

1) 직선의 방향벡터는 $(2, 4)-(3, 1)=(-1, 3)$이므로 점 A를 지나는 직선의 방정식은 $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{3}$

80 답 1) $\frac{x-5}{-5}=\frac{y+2}{5}$ 2) $x-4=\frac{y-4}{-7}$

1) 두 점 A(−3, 1), B(2, −4)를 지나는 직선에 평행하다고 하므로 방향벡터를 구하면

$\left(-3-\boxed{2},\ 1-(\boxed{-4})\right)=(\boxed{-5},\ \boxed{5})$

이때, 점 $(5, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x-5}{\boxed{-5}}=\frac{y+\boxed{2}}{\boxed{5}}$

2) $x-2=\frac{3-y}{2}$에서 $2x-4=3-y$

$\therefore y=7-2x$

위 식을 $\frac{x+3}{2}=1-y$에 대입하여 정리하면

$\frac{x+3}{2}=2x-6$

$x+3=4x-12$

$\therefore x=5,\ y=-3$

즉, 교점은 $(5,\ -3)$이므로 두 점 $(5,\ -3)$, $(4,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x-4}{5-4}=\frac{y-4}{-3-4}$ ⇨ $x-4=\frac{y-4}{-7}$

81 답 1) $\vec{a}+t\vec{u}$ 2) $x_1,\ u_1,\ y_1,\ u_2$ 3) $x_1,\ x_2-x_1,\ y_1,\ y_2-y_1$

82 답 1) $2x-y-4=0$ 2) $x+3y-7=0$ 3) $-2x+3y-10=0$

1) $2(x-1)-(y+2)=0$에서

$2x-2-y-2=0$

$\therefore 2x-y-4=0$

2) $(x+5)+3(y-4)=0$에서

$x+5+3y-12=0$

$\therefore x+3y-7=0$

3) $-2(x-4)+3(y-6)=0$에서

$-2x+8+3y-18=0$

$\therefore -2x+3y-10=0$

83 답 1) $(2,\ 6)$ 2) $(3,\ 7)$ 3) $(2,\ 8)$ 4) $(9,\ 0)$ 5) $(0,\ 7)$

2) $3(x-1)-(4-7y)=0$에서

$3(x-1)+7\left(y-\frac{4}{7}\right)=0$이므로 법선벡터는 $(3,\ 7)$이다.

84 답 1) $x=8$ 2) $y=8$

85 답 1) $5x-4y+18=0$ 2) $6x+y-28=0$

1) 직선 $\frac{x+1}{5}=\frac{-y-3}{4}$과 수직인 직선이라 하므로

$\frac{x+1}{5}=\frac{y+3}{-4}$의 방향벡터 $(5,\ -4)$는 구하는 직선의 법선벡터이다.

즉, 구하는 직선은 점 $(2,\ 7)$을 지나고 법선벡터가 $(5,\ -4)$인 직선이므로

$5(x-2)-4(y-7)=0$

$\therefore 5x-4y+18=0$

2) 직선 $\frac{x+4}{2}=3y-4$와 수직인 직선이라 하므로

$\frac{x+4}{2}=\frac{y-\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}$의 방향벡터 $\left(2,\ \frac{1}{3}\right)$은 구하는 직선의 법선벡터이다.

따라서 구하는 직선은 점 $(5,\ -2)$를 지나고 법선벡터가 $\left(2,\ \frac{1}{3}\right)$인 직선이므로

$2(x-5)+\frac{1}{3}(y+2)=0$

$\therefore 6x+y-28=0$

86 답 1) $2x-y-1=0$ 2) $b=2a$

1) 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-3,\ 2)$를 지나는 직선의 방향벡터가 $(-3-1,\ 2-0)=(-4,\ 2)$이므로 이는 직선의 법선벡터가 된다. 즉, 점 $(1,\ 1)$을 지나는 구하는 직선의 방정식은

$-4(x-1)+2(y-1)=0$ $\quad\therefore 2x-y-1=0$

2) 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방향벡터가 $(-1-1,\ 1-2)=(-2,\ -1)$이므로 이는 구하는 직선의 법선벡터가 된다. 즉, 점 $(a,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$-2(x-a)-(y-4)=0$ ⇨ $2x+y-(2a+4)=0$

이 직선이 점 $(2,\ b)$도 지나므로 대입하면

$4+b-(2a+4)=0$ $\quad\therefore b=2a$

87 답 1) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$ 2) $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

88 답 1) $\frac{11\sqrt{5}}{25}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

1) 두 직선의 방향벡터 $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면 두 직선이 이루는 각의 크기 $\theta(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$는

$$\cos\theta=|\cos\theta_1|=\frac{|1\times3+2\times4|}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{11}{5\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{25}$$

2) $\frac{x}{3}=\frac{-y-2}{2}$ ⇨ $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{-2}$,

$x-2=\frac{4-y}{5}$ ⇨ $x-2=\frac{y-4}{-5}$이므로

두 직선의 방향벡터는 각각 $(3,\ -2)$, $(1,\ -5)$이다.

이때, 두 직선의 방향벡터가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면 두 직선이 이루는 각의 크기 $\theta(0\le\theta\le90^\circ)$는

$$\cos\theta=|\cos\theta_1|=\frac{|3\times1+(-2)\times(-5)|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-5)^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}\sqrt{26}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) $x-1=-y \Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}$,

$4x=2y-3 \Rightarrow x=\frac{2y-3}{4}=\frac{y-\frac{3}{2}}{2}$이므로

두 직선의 방향벡터는 각각 $(1,\ -1)$, $(1,\ 2)$이다.

이때, 두 직선의 방향벡터가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면 두 직선이 이루는 각의 크기 $\theta(0\le\theta\le90^\circ)$는

$$\cos\theta=|\cos\theta_1|=\frac{|1\times1+(-1)\times2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+2^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

89 답 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 3) $\frac{4}{5}$

1) $2(x-1)=y-1 \Rightarrow x-1=\frac{y-1}{2}$,

$3(1-x)=y+2 \Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-3}$이므로

두 직선의 방향벡터 $(1,\ 2)$, $(1,\ -3)$이다.

이때, 두 직선의 방향벡터가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면 두 직선이 이루는 각의 크기 $\theta(0^\circ\le\theta\le90^\circ)$는

$$\cos\theta=|\cos\theta_1|=\frac{|1\times1+2\times(-3)|}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) $2(x+4)=y+1 \Rightarrow x+4=\frac{y+1}{2}$,

$3(x+2)=4(y+5) \Rightarrow \frac{x+2}{4}=\frac{y+5}{3}$이므로

두 직선의 방향벡터는 각각 $(1,\ 2)$, $(4,\ 3)$이다.

이때, 두 직선의 방향벡터가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면 두 직선이 이루는 각의 크기 $\theta(0^\circ\le\theta\le90^\circ)$는

$$\cos\theta=|\cos\theta_1|=\frac{|1\times4+2\times3|}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

3) $3(x+8)=3-y \Rightarrow \frac{x+8}{-1}=\frac{y-3}{3}$,

$-x=3(y-8) \Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y-8}{-1}$이므로

두 직선의 방향벡터는 각각 $(-1,\ 3)$, $(3,\ -1)$이다.

이때, 두 직선의 방향벡터가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면 두 직선이 이루는 각의 크기 $\theta(0^\circ\le\theta\le90^\circ)$는

$$\cos\theta=|\cos\theta_1|=\frac{|(-1)\times3+3\times(-1)|}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$$

90 답 1) 3 2) -1

1) $l\,/\!/\,m$이므로 두 직선 l, m의 방향벡터는 평행하다. 즉,

$l:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{k-1}$, $m:\frac{x-2}{4}=\frac{y+2}{-4}$에서

$l\,/\!/\,m$이므로

$\frac{-2}{4}=\frac{k-1}{-4}$

$2=k-1 \qquad \therefore k=3$

2) $l\perp m$이므로 두 직선 l, m의 방향벡터의 내적은 0이다. 즉,

$(-2,\ k-1)\cdot(4,\ -4)=0$이므로

$-2\times4-4(k-1)=0$

$\therefore k=-1$

91 답 1) -9 2) 1

1) $l\,/\!/\,m$이라 하므로 두 직선 l, m의 방향벡터는 평행하다.

$l\,/\!/\,m$이므로

$\frac{3}{-1}=\frac{k}{3}$

$\therefore k=-9$

2) $l\perp m$이라 하므로 두 직선 l, m의 방향벡터의 내적은 0이다.

$(3,\ k)\cdot(-1,\ 3)=0$

$-3+3k=0 \qquad \therefore k=1$

92 답 1) $y=-\frac{1}{2}x$ 2) $\frac{x-2}{-4}=\frac{y-3}{-1}$

1) 구하는 직선의 방향벡터를 $(a,\ b)$(단, $ab\ne0$)라 하면

$x+2=\frac{y-1}{2}$과 수직이므로

$(a,\ b)\cdot(1,\ 2)=\boxed{0}$

$a+2b=0 \qquad \therefore a=\boxed{-2}b$

방향벡터는 $(a,\ b)=(\boxed{-2}b,\ b)=b(\boxed{-2},\ 1)$,

즉 $(\boxed{-2},\ 1)$($\because ab\ne0$)이라 할 수 있다.

따라서 구하는 직선이 $(0,\ 0)$을 지난다고 하므로 직선의 방정식은 $y=\boxed{-\frac{1}{2}}x$이다.

2) $l\perp m$이라 하므로 $(6,\ -3)\cdot(-2,\ p)=0$

즉, $-12-3p=0 \qquad \therefore p=-4$

$(p,\ -1)=(-4,\ -1)$을 방향벡터로 하고 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은 $\frac{x-2}{-4}=\frac{y-3}{-1}$

93 답 1) $\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}$

2) ① $k\vec{u_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ② $a_1a_2+b_1b_2=0$

94 답 (x_1, y_1), x_1, y_1, $(\vec{p}-\vec{a})$, $(\vec{p}-\vec{a})$, $x-x_1$, $y-y_1$

$A(x_1, y_1)$, $P(x, y)$라 하면

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=\boxed{(x_1,\ y_1)}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}=(x,\ y)$이므로

$\vec{p}-\vec{a}=(x-\boxed{x_1},\ y-\boxed{y_1})$ ⋯ ㉠

이때, $|\vec{p}-\vec{a}|=r$의 양변을 제곱하면

$|\vec{p}-\vec{a}|^2=r^2$

$\boxed{(\vec{p}-\vec{a})}\cdot\boxed{(\vec{p}-\vec{a})}=r^2$

㉠을 위 식에 대입하여 정리하면

$(x-x_1,\ y-y_1)\cdot(x-x_1,\ y-y_1)=r^2$

$\therefore\ (\boxed{x-x_1})^2+(\boxed{y-y_1})^2=r^2$

95 답 $(x+2)^2+(y-3)^2=1$

$P(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x+2,\ y-3)$에서 $|\overrightarrow{AP}|=1$이므로

$(x+2)^2+(y-3)^2=1$

96 답 1) 점 A를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원

2) 점 A를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 4인 원

3) 점 A를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원

1) $|\vec{x}-\vec{a}|=1$에서 $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AP}|=1$이므로 점 A를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원이다.

2) $|\vec{x}-\vec{a}|=4$에서 $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AP}|=4$이므로 점 A를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 4인 원이다.

3) $|2\vec{x}-2\vec{a}|=1$에서 $|\vec{x}-\vec{a}|=\frac{1}{2}$

즉, $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AP}|=\frac{1}{2}$이므로 점 A를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원이다.

97 답 1) $(x-2)^2+(y-3)^2=5$

2) $x^2+(y+1)^2=8$

3) $(x-1)^2+(y-1)^2=8$

4) $(x-3)^2+y^2=5$

1) 원 위의 좌표를 $P(x,\ y)$라 놓자.

$\angle APB=\boxed{90^\circ}$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\boxed{0}$

$(x-\boxed{1},\ y-\boxed{1})\cdot(x-\boxed{3},\ y-\boxed{5})=\boxed{0}$

$(x-1)(x-3)+(y-1)(y-5)=0$

$x^2-4x+3+y^2-6y+5=0$

$\therefore\ (x-\boxed{2})^2+(y-\boxed{3})^2=5$

2) 원 위의 좌표를 $P(x,\ y)$라 놓자.

$\angle APB=90^\circ$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

$(x+2,\ y+3)\cdot(x-2,\ y-1)=0$

$(x+2)(x-2)+(y+3)(y-1)=0$

$x^2-4+y^2+2y-3=0$

$\therefore\ x^2+(y+1)^2=8$

3) 원 위의 좌표를 $P(x,\ y)$라 놓자.

$\angle APB=90^\circ$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

$(x+1,\ y-3)\cdot(x-3,\ y+1)=0$

$(x+1)(x-3)+(y-3)(y+1)=0$

$x^2-2x-3+y^2-2y-3=0$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=8$

4) 원 위의 좌표를 $P(x,\ y)$라 놓자.

$\angle APB=90^\circ$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

$(x-2,\ y-2)\cdot(x-4,\ y+2)=0$

$(x-2)(x-4)+(y-2)(y+2)=0$

$x^2-6x+8+y^2-4=0$

$\therefore\ (x-3)^2+y^2=5$

98 답 1) $(x+2)^2+(y-3)^2=2$

2) 13π

1) 점 P의 좌표를 $P(x,\ y)$라 놓자.

$\overrightarrow{AP}=(x+\boxed{1},\ y-\boxed{4})$, $\overrightarrow{BP}=(x+\boxed{3},\ y-\boxed{2})$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$이므로

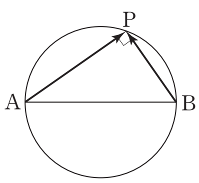
$(x+\boxed{1},\ y-\boxed{4})\cdot(x+\boxed{3},\ y-\boxed{2})=0$

$(x+\boxed{1})(x+\boxed{3})+(y-\boxed{4})(y-\boxed{2})=0$

$x^2+\boxed{4}x+\boxed{3}+y^2-\boxed{6}y+\boxed{8}=0$

$\therefore\ (x+\boxed{2})^2+(y-\boxed{3})^2=\boxed{2}$

2) 점 P의 좌표를 $P(x,\ y)$라 놓자.



$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y-4)$,

$\overrightarrow{BP}=(x+1,\ y+2)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$이므로

$(x-3,\ y-4)\cdot(x+1,\ y+2)=0$

$(x-3)(x+1)+(y-4)(y+2)=0$

$x^2-2x-3+y^2-2y-8=0$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=13=(\sqrt{13})^2$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$인 원이므로 이 도형의 넓이는 $\pi\times(\sqrt{13})^2=13\pi$

99 답 $|\overrightarrow{AP}|=r$, $\vec{p}-\vec{a}$, $|\vec{p}-\vec{a}|$

단원 총정리 문제 정답 Ⅱ-4 직선의 방정식과 원의 방정식

pp. 90~91

01 답 ②

$x-2=\frac{1-y}{4}$ ⇨ $x-2=\frac{y-1}{-4}$이므로 방향벡터는 $(1,\ -4)$이다. 점 $(-2,\ 3)$을 지나고 방향벡터가 $(1,\ -4)$인 직선의 방정식은

$x+2=\frac{y-3}{-4}$

이 직선이 점 $(-1,\ m)$을 지나므로

$-1+2=\frac{m-3}{-4}$

$-4=m-3 \qquad \therefore m=-1$

02 답 ①

두 점 $A(1,\ -4)$, $B(-2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y+4}{2-(-4)}$ ⇨ $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+4}{6}$

이때, 이 직선이 y축과 $(0,\ a)$에서 만난다고 하므로 $x=0$, $y=a$를 대입하면

$\frac{0-1}{-3}=\frac{a+4}{6} \qquad \therefore a=-2$

03 답 ③

두 점 $A(-6,\ 3)$, $B(a,\ b)$를 지나는 직선의 방향벡터는 $(a+6,\ b-3)$이다.

이때, 직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+6}{3}$과 평행하다고 하므로

두 벡터 $(a+6,\ b-3)$과 $(2,\ 3)$은 평행하다.

$\frac{a+6}{2}=\frac{b-3}{3}$

$3a+18=2b-6 \qquad \therefore 3a-2b=-24$

04 답 ④

직선 $\frac{x+1}{2}=1-y$에 수직이고 점 $(3,\ -2)$를 지나는 직선의 x절편을 구하면? 법선벡터를 구할 수 있는 중요한 단서야.

x절편은 y의 값이 항상 0이야.

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

1st 구하는 직선의 법선벡터를 먼저 구하자.

직선 $\frac{x+1}{2}=1-y$ ⇨ $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}$의 방향벡터는 $(2,\ -1)$이다.

구하는 직선이 이 직선과 수직이므로 법선벡터는 $(2,\ -1)$이다.

2nd 법선벡터와 지나는 점을 이용하여 직선의 방정식을 구하여 x절편을 구하자.

즉, 점 $(3,\ -2)$를 지나고 법선벡터가 $(2,\ -1)$인 직선의 방정식은

$2(x-3)-(y+2)=0$

법선벡터가 (a,b)이고, 점 (x_1, y_1)을 지나는 직선의 방정식은 $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

$2x-6-y-2=0$

$\therefore 2x-y-8=0$

위 방정식에 $y=0$을 대입하면

$2x-8=0 \qquad \therefore x=4$

따라서 구하는 x절편은 4이다.

05 답 ③

두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 놓으면

$\vec{u}=(1,\ 2)$, $\vec{v}=(-1,\ 3)$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta < 90^\circ)$라 하면

$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|1\times(-1)+2\times3|}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}}$

$=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\theta=45^\circ$

06 답 ⑤

두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 놓으면

$\vec{u}=(k,\ 6)$, $\vec{v}=(1,\ -2)$

먼저, 두 직선이 서로 평행하면 $\vec{u}=t\vec{v}$(t는 $t\neq0$인 실수)인 실수 t가 존재한다.

$(k,\ 6)=t(1,\ -2)$

$k=t$, $6=-2t$

$\therefore m=k=t=-3$

또, 두 직선이 서로 수직이면 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$이 성립한다.

$k\times1+6\times(-2)=0$

$\therefore n=k=12$

$\therefore m+n=-3+12=9$

07 답 ④

두 점 $A(2,\ 4)$, $B(-4,\ a)$를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-4-2,\ a-4)=(-6,\ a-4)$

직선 $\frac{x-1}{4}=\frac{2-y}{5}$ ⇨ $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-5}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(4,\ -5)$

이때, 두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$이 성립한다.

$(-6,\ a-4)\cdot(4,\ -5)=0$

$-6\times4+(a-4)\times(-5)=0$

$-24-5a+20=0$

$5a=-4 \qquad \therefore a=-\frac{4}{5}$

08 답 3

두 직선 $2-x=\frac{y+1}{k}$ ⇨ $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{k}$, $\frac{x-1}{k}=\frac{y+5}{3}$의

방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 놓으면

$\vec{u}=(-1,\ k)$, $\vec{v}=(k,\ 3)$

두 직선이 이루는 각의 크기가 60°이므로

$\cos 60^\circ=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

$\frac{1}{2}=\frac{|-k+3k|}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{k^2+9}}$

$\sqrt{1+k^2}\sqrt{k^2+9}=2|2k|$

양변을 제곱하면

$(1+k^2)(k^2+9)=16k^2$

$k^4+10k^2+9=16k^2$

$k^4-6k^2+9=0$

$(k^2-3)^2=0$

$\therefore k^2=3$

09 답 ③

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 놓으면

$\overrightarrow{AP}=(x-4,\ y-5)$

즉, $|\overrightarrow{AP}|=3$이므로

$\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=3$

$\therefore (x-4)^2+(y-5)^2=9$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 중심이 A(4, 5)이고, 반지름의 길이가 3인 원이므로 이 도형의 둘레의 길이는 $2\pi\times3=6\pi$

10 답 ④

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 놓으면

$\vec{p}-\vec{a}=(x,\ y)-(-1,\ 1)=(x+1,\ y-1)$,

$\vec{p}-\vec{b}=(x,\ y)-(3,\ 3)=(x-3,\ y-3)$

이므로

$(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=(x+1,\ y-1)\cdot(x-3,\ y-3)=0$

$(x+1)(x-3)+(y-1)(y-3)=0$

$x^2-2x-3+y^2-4y+3=0$

$(x-1)^2+(y-2)^2=5=(\sqrt{5})^2$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 (1, 2)이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이므로 이 도형의 넓이는 $\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$이다.

11 답 ③

이것은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원을 나타내.

점 A(2, −1)에 대하여 $|\overrightarrow{AP}|=2$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 넓이를 두 점 B(−3, 4), C(1, a)를 지나는 직선이 이등분할 때, a의 값은?

원을 이등분하려면 반드시 원의 중심을 지나야 해.

① −2　② −1　③ 0

④ 1　⑤ 2

1st $|\overrightarrow{AP}|=r$가 무엇을 의미하는지 생각하자.

점 A(2, −1)에 대하여 $|\overrightarrow{AP}|=2$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 A(2, −1)이고, 반지름의 길이가 2인 원이다.

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$인 원이야.

2nd 원을 지나는 직선이 원을 이등분하려면 원의 중심을 지나야 해.

이때, 두 점 B(−3, 4), C(1, a)를 지나는 직선이 이 원의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 원의 중심을 지난다.

즉, 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

세 점이 한 직선 위에 있으려면 두 점을 시점과 종점이 되는 벡터끼리는 실수배의 관계가 있어.

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ (k는 $k\neq0$인 실수)

$(-3-2,\ 4-(-1))=k(1-2,\ a-(-1))$

$(-5,\ 5)=(-k,\ k(a+1))$

즉, $-5=-k$, $5=k(a+1)$이므로

$k=5$, $a=0$

12 답 ②

세 점 A(−2, 2), B(1, −1), C(7, 5)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하면

$\left(\frac{-2+1+7}{3},\ \frac{2-1+5}{3}\right)=(2,\ 2)$

$\overrightarrow{AG}=(2,\ 2)-(-2,\ 2)=(4,\ 0)$,

$\overrightarrow{BG}=(2,\ 2)-(1,\ -1)=(1,\ 3)$

이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BG}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하므로

$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG}|}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BG}|}=\frac{|4\times1+0\times3|}{\sqrt{4^2+0^2}\sqrt{1^2+3^2}}$

$=\frac{4}{4\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

Ⅲ 공간도형과 공간좌표

Ⅲ－1 공간도형

pp. 96~103

01 답 1) ○ 2) × 3) ○ 4) ○ 5) × 6) ○

2) 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면을 결정하지 못한다.

5) 한 평면을 결정하는 데는 세 점이 필요하므로 네 점으로 반드시 한 개의 평면이 결정될 수 없다.

02 답 1) 10 2) 20

1) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정하므로 조건을 만족하는 다섯 개의 점으로 결정되는 평면의 개수는 ${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

2) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정하므로 조건을 만족하는 여섯 개의 점으로 결정되는 평면의 개수는 ${}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

03 답 1) 한 직선 2) 한 점 3) 두 직선 4) 평행한

04 답 1) 모서리 AC, 모서리 AD, 모서리 AE, 모서리 BC, 모서리 BE
2) 모서리 ED 3) 모서리 CD, 모서리 ED
4) 모서리 AE, 모서리 AB

05 답 1) ○ 2) ○ 3) ×

3) 두 직선이 점 D에서 만나므로 꼬인 위치가 아니다.

06 답 1) 한 점 2) 평행 3) 꼬인 위치

07 답 1) 면 ABCD, 면 ABFE
2) 면 AEHD, 면 BFGC
3) 면 CGHD, 면 EFGH
4) 면 AEHD, 면 CGHD
5) 모서리 AE, 모서리 EH, 모서리 HD, 모서리 DA
6) 모서리 AD, 모서리 BC, 모서리 FG, 모서리 EH

08 답 1) 직선 2) 한 점 3) 평행

09 답 1) 면 FLKE
2) 면 BHIC, 면 DJKE, 면 ABCDEF, 면 GHIJKL
3) 모서리 EK
4) 면 AGLF, 면 GHIJKL

10 답 1) 4 2) 6 3) 4

1) 면 BHIC, 면 CIJD, 면 DJKE, 면 EKLF로 4개

2) 모서리 CI, 모서리 DJ, 모서리 EK, 모서리 FL, 모서리 DE, 모서리 JK로 6개

3) 모서리 BC, 모서리 FE, 모서리 HI, 모서리 LK로 4개

11 답 1) 모서리 DE, 모서리 EF, 모서리 DF
2) 면 DEF 3) 4 4) 4

3) 모서리 AB, 모서리 AE, 모서리 BF, 모서리 EF로 4개

4) 모서리 AC, 모서리 AE, 모서리 CF, 모서리 EF로 4개

12 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 직선 BH, AG는 면 ABGH 위의 직선이고, 평행하지 않으므로 한 점에서 만난다.

ㄴ. 두 직선 BH, CE는 면 BEHC 위의 직선이고, 평행하지 않으므로 한 점에서 만난다.

ㄷ. 두 직선 BH, DF는 면 BFHD 위의 직선이고, 평행하지 않으므로 한 점에서 만난다.

ㄹ. 두 직선 BH, EF는 꼬인 위치에 있으므로 만나지 않는다.

13 답 1) ○ 2) ○ 3) × 4) ○ 5) ○

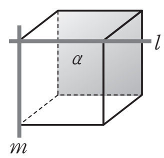
3) $\overline{AF}$와 $\overline{BE}$는 꼬인 위치에 있다.

4) 모서리 DE, 모서리 EF, 모서리 FD로 3개이다.

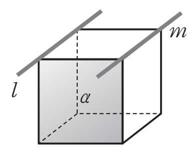
14 답 1) 만난다 2) 평행

15 답 1) ○ 2) × 3) ○ 4) ×

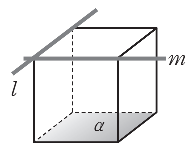
2) 그림과 같이 직육면체 모양에서 모서리를 포함하는 두 직선 l, m과 평면 α에 대하여 $l\perp m$이고 $m /\!/ \alpha$이지만 직선 l과 평면 α는 수직으로 만나지 않는다.



3) 그림과 같이 직육면체 모양에서 모서리 포함하는 두 직선 l, m과 평면 α에 대하여 $l\perp\alpha$이고 $m\perp\alpha$이면 $l /\!/ m$

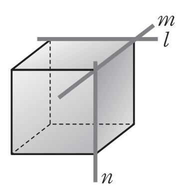


4) 그림과 같이 직육면체 모양에서 모서리를 포함하는 두 직선 l, m과 평면 α에 대하여 $l /\!/ \alpha$이고 $m /\!/ \alpha$이지만 두 직선 l, m은 평행이 아니다.

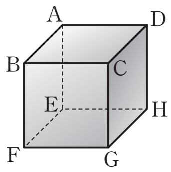


16 답 1) × 2) × 3) ○ 4) ○ 5) ×

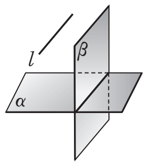
1) 【반례】 그림과 같이 l과 n이 꼬인 위치일 수도 있다.



2) 【반례】
(면 ABCD)⊥(면 CGHD),
(면 CGHD)⊥(면 BFGC)
이지만 면 ABCD와
면 BFGC가 평행한 것은 아니다.



5) 【반례】 그림에서 $l \mathbin{/\!/} \alpha$, $l \mathbin{/\!/} \beta$이지만 두 평면 α와 β는 만난다.



17 답 1) 면 AEHD, 면 CGHD
2) 면 ABCD, 면 EFGH 3) 60°

3) △AFH는 $\overline{AF}=\overline{FH}=\overline{HA}$인 정삼각형이므로 두 직선 AF와 AH가 이루는 각의 크기는 60°이다.

18 답 1) 90° 2) 45° 3) 90°

1) 직선 AB를 직선 CD로 평행이동하면 직선 AB와 직선 CG가 이루는 각의 크기는 직선 CD와 직선 CG가 이루는 각의 크기인 90°와 같다.
2) 직선 EF를 직선 AB로 평행이동하면 직선 AC와 직선 EF가 이루는 각의 크기는 직선 AC와 직선 AB가 이루는 각의 크기인 45°와 같다.
3) 직선 AH를 직선 BG로 평행이동하면 직선 AH와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 직선 BG와 직선 CF가 이루는 각의 크기인 90°와 같다.

19 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{CG} \mathbin{/\!/} \overline{DH}$이므로 $\overline{BH}$와 $\overline{CG}$가 이루는 각의 크기는 $\overline{BH}$와 $\boxed{\overline{DH}}$가 이루는 각의 크기와 같다.

$\angle BDH=\boxed{90^\circ}$이므로 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 $\overline{DH}=\boxed{a}$, $\overline{BH}=\boxed{\sqrt{3}a}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\overline{DH}}{\boxed{\overline{BH}}}=\dfrac{a}{\boxed{\sqrt{3}a}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

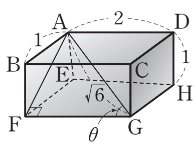
20 답 $\frac{1}{2}$

$\overline{CD} \mathbin{/\!/} \overline{BE}$이므로 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$가 이루는 각의 크기는 $\overline{AB}$와 $\overline{BE}$가 이루는 각의 크기와 같다.
이때, △ABE는 정삼각형이므로 $\angle ABE=\theta=60^\circ$

$\therefore \cos\theta=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

21 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

그림에서 $\overleftrightarrow{EH} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{FG}$이므로 직선 AG와 직선 EH가 이루는 각의 크기는 직선 AG와 직선 FG가 이루는 각의 크기와 같다.



$\overline{AG}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{CG}^2}$
$=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$
$\overline{FG}=\overline{AD}=2$
그리고 $\angle AFG=90^\circ$이므로
$\cos\theta=\dfrac{\overline{FG}}{\overline{AG}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

22 답 1) ① $l \mathbin{/\!/} m$ ② $\alpha \mathbin{/\!/} m$ ③ 평면 α
2) 이루는 각 3) $l \perp \alpha$, 수선, 수선의 발

단원 총정리 문제 정답 Ⅲ-1 공간도형

pp. 104~105

01 답 ③

③ 꼬인 위치의 두 직선으로 한 평면을 만들 수 없다.

02 답 ③

어느 세 점도 같은 평면 위에 있지 않고 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 다섯 개의 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는 ${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$(개)이다.
이때, 밑면을 이루는 네 점 B, C, D, E로 만들어지는 평면의 개수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$이고, 이들은 모두 한 평면이다.
따라서 구하는 서로 다른 평면의 개수는
$10-4+1=7$(개)이다.

03 답 ⑤

한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정하므로 조건을 만족시키는 7개의 점으로 결정되는 평면의 개수는
${}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$(개)

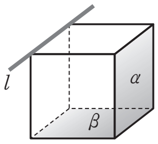
04 답 면 ACD, 면 ADE, 면 BCDE

직선 AB와 한 점에서 만나는 평면은 면 ACD, 면 ADE, 면 BCDE이다.

05 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 평면 α와 직선 m이 서로 평행하지 않고 한 점 P에서 만난다고 하자. 두 직선 l과 m이 서로 평행하므로 두 직선 l, m을 포함하는 평면이 오직 하나 β가 존재한다. 점 P는 두 평면 α, β 위에 있으므로 두 평면의 교선 l 위에 있게 된다. 즉, 두 직선 l, m은 한 점 P를 공통으로 지나게 된다. 이것은 두 직선 l, m이 평행이라는 것에 모순이 되므로 평면 α는 직선 m과 서로 평행이다. (참)

ㄴ. 【반례】 직육면체에서 직선 l이 한 모서리를 포함하고 있을 때, 그림과 같이 $l /\!/ \alpha$, $l /\!/ m$이지만 두 평면 α, β는 평행이 아니다. (거짓)



ㄷ. 직선 l과 평면 α가 평행하므로 만나지 않는다. 즉, 직선 l은 평면 α 위의 직선 m과 만나지 않는다. 그런데 두 직선 l, m은 모두 평면 β 위에 있으므로 서로 평행하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

06 답 ③

직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 AD, 직선 DE, 직선 DF로 3개이다.

07 답 ⑤

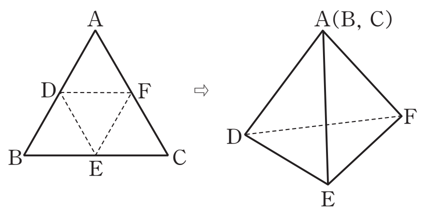
모서리 AD와 만나는 모서리는 모서리 AB, 모서리 AE, 모서리 DC, 모서리 DH로 4개이므로 $a=4$

모서리 AD와 평행한 모서리는 모서리 BC, 모서리 FG, 모서리 EH로 3개이므로 $b=3$

모서리 AD와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 BF, 모서리 CG, 모서리 EF, 모서리 HG로 4개이므로 $c=4$

$\therefore a-b+c=4-3+4=5$

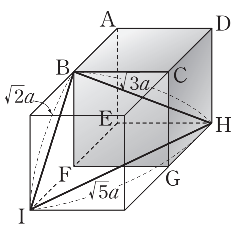
08 답 모서리 DF



그림과 같은 전개도로 만든 정사면체에서 직선 BE와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 DF이다.

09 답 0

그림과 같이 $\overline{AF}$를 $\overline{BI}$로 평행이동하면 $\overline{BH}$와 $\overline{AF}$가 이루는 각의 크기는 $\overline{BH}$와 $\overline{BI}$가 이루는 각의 크기와 같다.



주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 $\overline{BI}=\sqrt{2}a$, $\overline{BH}=\sqrt{3}a$, $\overline{IH}=\sqrt{5}a$에서 $\overline{IH}^2=\overline{BI}^2+\overline{BH}^2$이므로

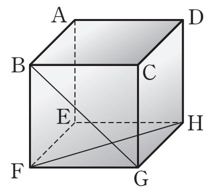
△BIH는 ∠HBI=90°인 직각삼각형이다.

따라서 $\overline{BH}$와 $\overline{AF}$가 이루는 각의 크기가 90°이므로

$\cos\theta=\cos 90°=0$

10 답 60°

그림과 같은 정육면체에서 두 직선 BG와 평행인 직선은 직선 AH이고, $\overline{AH}=\overline{FH}=\overline{AF}$이므로 삼각형 AFH는 정삼각형이다.



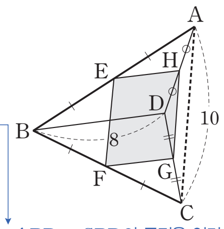
따라서 두 직선 BG와 FH가 이루는 각의 크기는 두 직선 AH와 FH가 이루는 각의 크기와 같으므로 구하는 각의 크기는 60°이다.

11 답 18

그림과 같이 한 평면 위에 있지 않은 네 점 A, B, C, D를 차례로 이어서 만든 도형의 각 변의 중점을 각각 E, F, G, H라 하자.

$\overline{AC}=10$, $\overline{BD}=8$일 때, 사각형 EFGH의 둘레의 길이를 구하여라.

사각형의 마주보는 변끼리는 길이가 같으니까 평행사변형이 돼.

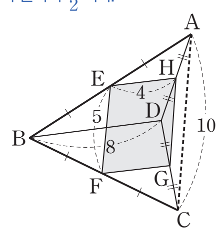


△ABD, △CBD의 중점을 연결한 것이므로 삼각형의 중점연결의 성질을 이용해.

1st △ABD, △CBD의 변의 중점으로 생기는 선분의 길이는 삼각형의 중점연결로 정리해.

삼각형의 중점을 연결한 선분은 나머지 변과 평행하고 그 길이는 나머지 변의 길이의 $\frac{1}{2}$이다.

네 점 A, B, C, D를 차례로 이어서 만든 사각형의 각 변의 중점을 각각 E, F, G, H이므로 삼각형의 중점연결의 성질을 이용하면



$\overline{EH}=\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 8=4$

$\overline{HG}=\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 10=5$

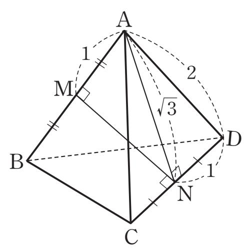
따라서 사각형 EFGH의 둘레의 길이는

$4+4+5+5=18$

[평행사변형]
① 마주보는 두 대변의 길이가 같은 사각형
② 평행하고 마주보는 한 대변의 길이가 같은 사각형
③ 두 대각선은 서로 각각을 이용하는 사각형

12 답 ⑤

정사면체에서 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 CD이다. 모서리 AB와 CD의 각각의 중점을 M, N이라 놓으면 구하는 거리는 선분 MN의 길이이다.



$\overline{ND}=1$이고, 직각삼각형 AND에 피타고라스 정리를 이용하면

$\overline{AN}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{ND}^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

또, $\overline{AM}=1$이고, 직각삼각형 ANM에 피타고라스 정리를 이용하면

$\overline{MN}=\sqrt{\overline{AN}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$

Ⅲ－2 삼수선과 정사영 pp. 106~113

23 답 1) $\overline{\mathbf{PH}}$ 2) $\overline{\mathbf{OH}}$ 3) $\overline{\mathbf{PO}}$

1) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면 $\boxed{\overline{PH}}\perp l$

2) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 $\boxed{\overline{OH}}\perp l$

3) $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 $\boxed{\overline{PO}}\perp\alpha$

24 답 1) $\sqrt{29}$ 2) 4

1) $\overline{PO}\perp\alpha$이므로 $\overline{PO}\perp\overline{OQ}$

따라서 $\triangle PQO$는 $\angle POQ=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OQ}^2+\boxed{\overline{PO}}^2}=\sqrt{3^2+\boxed{4}^2}=\boxed{5}$

또, $\overline{PO}\perp\alpha$이고 $\boxed{\overline{OQ}}\perp\overleftrightarrow{AB}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\boxed{\overline{PQ}}\perp\overleftrightarrow{AB}$

따라서 $\triangle PAQ$는 $\boxed{\angle PQA}=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{PA}=\sqrt{\boxed{\overline{AQ}}^2+\overline{PQ}^2}=\sqrt{\boxed{2}^2+\boxed{5}^2}=\boxed{\sqrt{29}}$

2) 1)에 의하여 $\triangle PAQ$는 $\angle PQA=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AQ}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{PO}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{OQ}^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=4$

25 답 1) $2\sqrt{2}$ 2) $\dfrac{2\sqrt{61}}{5}$

1) $\overline{OC}\perp\overline{OA}$, $\overline{OC}\perp\overline{OB}$이므로 $\overline{OC}\perp$(면 $\boxed{\text{OAB}}$)이고,

$\overline{CH}\perp\boxed{\overline{AB}}$이므로 삼수선의 정리에

의하여 $\overline{OH}\perp\boxed{\overline{AB}}$

직각삼각형 OAB에서 $\overline{OA}=\overline{OB}=\boxed{4}$이므로

$\overline{AB}=\boxed{4\sqrt{2}}$

$\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{AB}\times\overline{OH}$에서

$4\times\boxed{4}=\boxed{4\sqrt{2}}\times\overline{OH}$

$\therefore\ \overline{OH}=\boxed{2\sqrt{2}}$

2) 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이고 $\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{AB}\times\overline{OH}$이므로

$\overline{OH}=\dfrac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{\overline{AB}}=\dfrac{3\times4}{5}=\dfrac{12}{5}$

따라서 $\overline{OC}\perp\overline{OH}$이므로 $\triangle COH$에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CO}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{12}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{61}}{5}$

26 답 $\overline{\mathbf{BC}}$, $\overline{\mathbf{BC}}$, BCD

$\triangle ABC$, $\triangle BCD$는 모두 정삼각형이므로

$\overline{AM}\perp\boxed{\overline{BC}}$, $\overline{HM}\perp\boxed{\overline{BC}}$

또, $\overline{AH}\perp\overline{HM}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AH}\perp$(면 $\boxed{\text{BCD}}$)

27 답 $\sqrt{6}$

$\overline{AE}\perp$(면 EFGH), $\overline{EO}\perp\overline{FH}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AO}\perp\overline{FH}$

직각삼각형 FEH에서 $\overline{EF}\times\overline{EH}=\overline{FH}\times\overline{EO}$이므로

$2\times2=2\sqrt{2}\times\overline{EO}$

$\therefore\ \overline{EO}=\sqrt{2}$

따라서 직각삼각형 AEO에서

$\overline{AO}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$

28 답 삼수선, (1) $\overline{\mathbf{PH}}\perp\boldsymbol{l}$ (2) $\overline{\mathbf{OH}}\perp\boldsymbol{l}$ (3) $\overline{\mathbf{PO}}\perp\boldsymbol{\alpha}$

29 답 ⊥, ⊥, 45°, 45°

면 EFGH와 면 ABGH의 교선은 $\overline{GH}$이다.

$\overline{BG}$와 $\overline{FG}$는 교선 위의 점 G에서 만나고

$\overline{BG}\boxed{\perp}\overline{GH}$, $\overline{FG}\boxed{\perp}\overline{GH}$이다.

이때, $\angle BGF=\boxed{45^\circ}$이므로 구하는 이면각의 크기는 $\boxed{45^\circ}$이다.

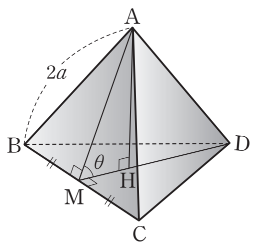
30 답 45°

$\overline{BG}\perp\overline{GH}$, $\overline{FG}\perp\overline{GH}$이므로 구하는 각의 크기는

$\angle BGF=45^\circ$이다.

31 답 ⊥, ⊥, $2\boldsymbol{a}$, $\sqrt{3}\boldsymbol{a}$, 3, 3, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{a}$, $\overline{\mathbf{AM}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{a}$, $\dfrac{1}{3}$

그림과 같이 정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라 하자. 모서리 BC의 중점을 M이라 하면



$\overline{AM}\boxed{\perp}\overline{BC}$, $\overline{DM}\boxed{\perp}\overline{BC}$

이므로 $\angle AMD=\theta$이다.

$\overline{AM}=\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\boxed{2a}=\boxed{\sqrt{3}a}$

이때, 꼭짓점 A에서 $\triangle BCD$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{MH}=\dfrac{1}{\boxed{3}}\overline{DM}$

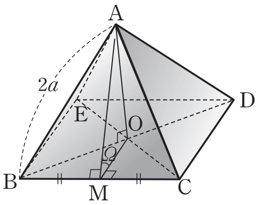
$=\dfrac{1}{\boxed{3}}\times\sqrt{3}a=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}a}$

따라서 직각삼각형 AMH에서

$\cos\theta=\dfrac{\overline{MH}}{\boxed{\overline{AM}}}$

$=\dfrac{\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}a}}{\sqrt{3}a}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

32 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



꼭짓점 A에서 면 BCDE에 내린 수선의 발을 O라 하고, $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{OM}\perp\overline{BC}$

이므로 두 면 ABC와 BCDE가 이루는 각의 크기 θ는 $\overline{AM}$과 $\overline{OM}$이 이루는 각의 크기와 같다.

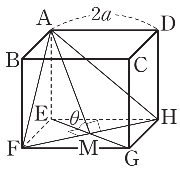
즉, $\angle AMO=\theta$이다.

이때 정사각뿔의 한 모서리의 길이를 $2a$라 하면

$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2a=\sqrt{3}a$, $\overline{OM}=\frac{1}{2}\times 2a=a$이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{OM}}{\overline{AM}}=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

33 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



$\overline{FH}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM}\perp\overline{FH}$, $\overline{EM}\perp\overline{FH}$이므로 두 면 AFH와 EFGH가 이루는 각의 크기는 $\overline{AM}$과 $\overline{EM}$이 이루는 각의 크기와 같다.

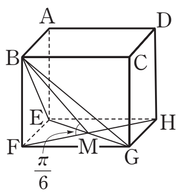
즉, $\angle AME=\theta$이다.

이때, 정육면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라 하면 $\triangle AEM$에서

$\overline{AM}=\sqrt{(2a)^2+(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{6}a$

$\cos\theta=\frac{\overline{EM}}{\overline{AM}}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{6}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

34 답 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$



그림과 같이 $\overline{EG}$와 $\overline{FH}$의 교점을 M이라 하면 $\overline{AB}=\overline{BC}=4$이므로

$\overline{FM}=\frac{1}{\boxed{2}}\overline{FH}$

$=\frac{1}{2}\times\boxed{4\sqrt{2}}=\boxed{2\sqrt{2}}$

이때, 두 면 BEG와 EFGH가 이루는 각의 크기가 30°이므로

$\angle BMF=\boxed{30^\circ}$

따라서 $\triangle BFM$에서 $\tan 30^\circ=\frac{\overline{BF}}{\boxed{\overline{FM}}}$

$\therefore\ \overline{BF}=\boxed{\overline{FM}}\tan 30^\circ$

$=\boxed{2\sqrt{2}}\times\frac{\boxed{\sqrt{3}}}{3}=\boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

35 답 1) 이면각, 이면각의 변, 이면각의 면

2) 이면각의 크기

36 답 1) $\overline{\mathbf{FH}}$ 2) $\triangle$EFG

37 답 1) $\overline{\mathbf{CD}}$ 또는 $\overline{\mathbf{AB}}$

2) $\overline{\mathbf{CD}}$ 또는 $\overline{\mathbf{AB}}$를 지름으로 하는 원

38 답 1) $\overline{\mathbf{EG}}$ 2) $\triangle$EFG 3) $\overline{\mathbf{EG}}$와 $\overline{\mathbf{HF}}$의 교점

39 답 1) 정사영 2) 정사영

40 답 1) 6 2) $6\sqrt{2}$ 3) $\frac{2}{3}$

1) $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos 60^\circ=12\times\frac{1}{2}=6$

2) $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos 45^\circ$에서 $6=\overline{AB}\cos 45^\circ$

$\therefore\ \overline{AB}=\frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=6\sqrt{2}$

3) $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$에서

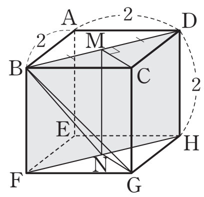
$\cos\theta=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

41 답 $4\sqrt{2}$

대각선 AG의 면 EFGH 위로의 정사영은 $\overline{EG}$이므로

$\overline{EG}=\overline{AG}\cos\theta=6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$

42 답 $\sqrt{6}$



그림과 같이 $\overline{BD}$, $\overline{FH}$의 중점을 각각 M, N이라 하자.

두 평면 BFHD와 MNGC는 수직으로 만나므로 $\overline{BG}$의 평면 BFHD 위로의 정사영은 $\overline{BN}$이다.

$\overline{MN}=2$, $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

직각삼각형 BNM에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BN}=\sqrt{\overline{BM}^2+\overline{MN}^2}=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$

43 답 $\overline{\mathbf{AB}}\cos\theta$

44 답 1) 40 2) 90 3) $10\sqrt{2}$ 4) 8π

1) $\square A'B'C'D'=\square ABCD\cos 60^\circ=80\times\frac{1}{2}=40$

2) $\square A'B'C'D'=\square ABCD\cos 30^\circ=60\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=90$

3) $\square A'B'C'D'=\square ABCD\cos 45^\circ$에서

$10=\square ABCD\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \square ABCD=10\sqrt{2}$

4) $\square A'B'C'D'=\square ABCD\cos 60^\circ$에서

$4\pi=\square ABCD\times\frac{1}{2}$

$\therefore\ \square ABCD=8\pi$

45 답 1) 45° 2) 60° 3) 45° 4) 30°

1) $S'=S\cos\theta$이므로 $2\sqrt{2}=4\cos\theta$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\theta=45^\circ$

2) $S'=S\cos\theta$이므로 $8\pi=16\pi\cos\theta$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$이므로 $\theta=60^\circ$

3) $S'=S\cos\theta$이므로 $1=\sqrt{2}\cos\theta$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\theta=45^\circ$

4) $S'=S\cos\theta$이므로 $5\sqrt{3}=10\cos\theta$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\theta=30^\circ$

46 답 60°

한 변의 길이가 2인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=60^\circ$ ($\because 0^\circ<\theta<90^\circ$)

개념 정리

[정삼각형]

한 변의 길이가 a인 정삼각형에 대하여 높이를 h, 넓이를 S라 하면

(1) $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (2) $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

47 답 $2\sqrt{3}\pi$

(정사영의 넓이)$=\pi\times 2^2\times\cos 30^\circ=4\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\pi$

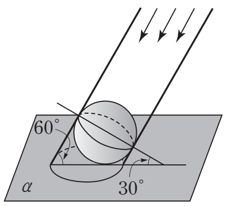
48 답 $6\sqrt{3}\pi$

타원의 넓이를 S라 하면

$S\cos\boxed{30^\circ}=\pi\times\boxed{3}^2$ $\therefore S=\frac{\boxed{9}\pi}{\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\boxed{6\sqrt{3}}\pi$

49 답 $24\sqrt{3}\pi$

그림과 같이 빛과 수직이고 구의 중심을 지나는 평면이 평면 α와 이루는 각의 크기가 60°이다.



구의 중심을 지나는 단면의 넓이는

$\pi\times\boxed{6}^2=\boxed{36}\pi$

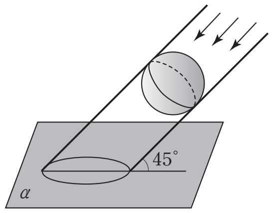
그림자를 구의 중심을 지나는 평면에 정사영한 도형이 구의 중심을 지나는 단면이므로 그림자의 넓이를 S라 하면

$S\cos\boxed{30^\circ}=\boxed{36}\pi$

$S\times\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boxed{36}\pi$ $\therefore S=\boxed{24\sqrt{3}}\pi$

50 답 10 cm

그림과 같이 빛과 수직이고 풍선의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기가 45°이다.



풍선의 반지름의 길이를 r cm라 하면 풍선의 중심을 지나는 단면의 넓이는 $\pi r^2\text{cm}^2$

그림자를 풍선의 중심을 지나는 평면에 정사영한 도형이 단면이므로 그림자의 넓이가 $100\sqrt{2}\pi\ \text{cm}^2$이므로

$100\sqrt{2}\pi\cos 45^\circ=\pi r^2$

$100\sqrt{2}\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi r^2$

$r^2=100$

$\therefore r=10$

따라서 풍선의 반지름의 길이는 10 cm이다.

51 답 $S\cos\theta$

단원 총정리 문제 정답 Ⅲ-2 삼수선과 정사영

pp. 114~115

01 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

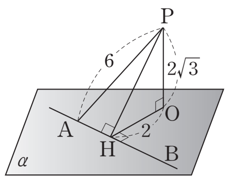
ㄱ, ㄴ, ㄹ은 삼수선의 정리이므로 옳다.

ㄷ. $\overline{PA}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$이지만 $\overline{PO}\perp\alpha$가 성립하지 않을 수 있다.

02 답 ③

선분 PH를 그으면 삼수선의 정리에 의해

$\overline{AB}\perp\overline{PH}$



직각삼각형 PHO에서

$\overline{OP}=2\sqrt{3}$, $\overline{OH}=2$

이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PO}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}$

$=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$

또, 직각삼각형 PAH에 피타고라스 정리를 적용하면

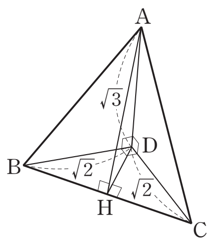
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{PH}^2}=\sqrt{6^2-4^2}$

$=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

03 답 ②

$\overline{AD}\perp\overline{BD}$, $\overline{AD}\perp\overline{CD}$이므로

$\overline{AD}\perp$(평면 BCD)



그림과 같이 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{DH}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{AH}\perp\overline{BC}$

직각삼각형 BCD에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

삼각형 BCD의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{DH}$

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times2\times\overline{DH}$

$\therefore\ \overline{DH}=1$

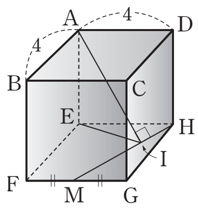
직각삼각형 AHD에 피타고라스 정리를 이용하면

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DH}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

04 답 ⑤

그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체에서 $\overline{FG}$의 중점을 M, 꼭짓점 A에서 $\overline{MH}$에 내린 수선의 발을 I라 할 때, $\overline{EI}$의 길이는?



$\overline{AE}$가 밑면인 면 EFGH와 수직이고, $\overline{AI}$와 $\overline{MH}$가 수직이므로 삼수선의 정리를 이용할 수 있어.

① $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

1st 삼수선의 정리를 적용하여 $\overline{EI}$와 $\overline{MH}$의 관계를 구하자.

$\overline{AE}\perp$(면 EFGH)이고 $\overline{AI}\perp\overline{MH}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{EI}\perp\overline{MH}$

2nd △EMH의 넓이를 구할 수 있는 방법으로 $\overline{EI}$의 식을 유도하자.

이때, △EMH는 $\overline{EM}=\overline{MH}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$인 이등변삼각형이므로

$\triangle EMH=\frac{1}{2}\times\overline{EH}\times\overline{GH}=\frac{1}{2}\times\overline{MH}\times\overline{EI}$에서

$\overline{EI}=\frac{\overline{EH}+\overline{GH}}{\overline{MH}}=\frac{4\times4}{2\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

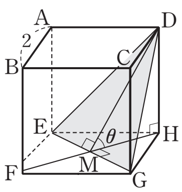
△EMH의 밑변을 $\overline{EH}$ 또는 $\overline{MH}$로 생각하느냐에 따라 다르게 구할 수 있어.

05 답 ③

두 반평면 α, β로 이루어진 도형에 대하여 이면각의 크기는 교선 위의 한 점을 지나고 교선에 수직인 반직선을 각각 반평면 α, β에 그을 때, 생기는 각의 크기이므로 이면각의 크기로 적당한 것은 ③이다.

06 답 ①

그림과 같이 $\overline{EG}$와 $\overline{HF}$의 교점을 M이라 하자.



$\overline{EG}\perp\overline{DM}$, $\overline{EG}\perp\overline{HM}$이므로 평면 DEG와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 $\overline{DM}$과 $\overline{HM}$이 이루는 각의 크기와 같다.

즉, $\angle DMH=\theta$

$\overline{DH}=2$, $\overline{HM}=\frac{1}{2}\overline{HF}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

직각삼각형 DMH에 피타고라스 정리를 이용하면

$\overline{DM}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HM}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{HM}}{\overline{DM}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

07 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

한 모서리의 길이를 a라 하면 옆면은 모두 정삼각형이므로

$\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

이때, △ABC의 면 BCDE 위로의 정사영의 넓이는

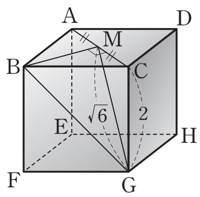
$\frac{1}{4}\square BCDE$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos\theta=\frac{1}{4}a^2$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

08 답 $\sqrt{6}$

$\overline{AC}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{BM}\perp\overline{AC}$이므로 $\overline{BG}$의 면 AEGC 위로의 정사영은 $\overline{MG}$이다.



직각삼각형 GCM에서 $\overline{GC}=2$,

$\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$이므로

직각삼각형 GCM에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{MG}=\sqrt{\overline{GC}^2+\overline{CM}^2}$

$=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$

09 답 ②

평면 α 위의 선분 AB의 길이가 12이고 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 60°, 선분 AB를 평면 β 위로의 정사영을 선분 $\mathrm{A'B'}$이라 하므로

$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos60^\circ$

$=12\times\frac{1}{2}=6$

또, 평면 β 위의 선분 $\mathrm{A'B'}$을 다시 평면 α 위로의 정사영을 선분 $\mathrm{A''B''}$이라 하므로

$\overline{A''B''}=\overline{A'B'}\cos60^\circ$

$=6\times\frac{1}{2}=3$

10 답 ④

평면 α 위의 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이다.

두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 30°이고, 평면 α 위의 정삼각형을 평면 β 위로 정사영한 도형의 넓이가 6이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cos 30^\circ = 6$

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$

$\frac{3}{8}a^2 = 6$, $a^2 = 16$

$\therefore a = 4 (\because a > 0)$

11 답 60°

밑면인 원의 반지름의 길이가 2이므로 밑면의 넓이를 구하면

$\pi \times 2^2 = 4\pi$

단면의 넓이가 밑면의 넓이의 2배이므로

$2 \times 4\pi = 8\pi$

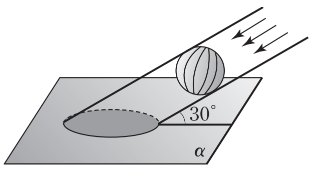
단면을 포함하는 평면과 밑면을 포함하는 평면이 이루는 각의 크기가 θ이므로

$8\pi \cos\theta = 4\pi$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$이므로 $\theta = 60^\circ$

12 답 4

그림과 같이 햇빛이 지면과 30°의 각도로 하늘에 떠있는 구 모양의 애드벌룬을 비추고 있다.



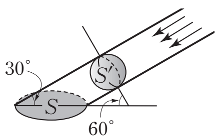
지면에 생긴 애드벌룬의 그림자의 넓이가 32π이었을 때, 이

보통 그림자가 정사영한 도형이 되지만 여기서는 그림자를 정사영한 도형이 애드벌룬의 최대 단면이야.

애드벌룬의 반지름의 길이를 구하여라.

1st 구의 지름이 지면과 이루는 각의 크기부터 구하자.

애드벌룬이 지면과 접하도록 이동하면 햇빛과 수직으로 만나는 구의 지름이 지면과 이루는 각의 크기 θ는



$\theta = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$

햇빛과 지면과의 각도로 생각하면 안 돼. 그림자를 햇빛에 수직이고 구의 중심을 지나는 평면에 정사영하는 거라구.

2nd 정사영의 넓이와 구의 단면의 넓이를 이용하여 애드벌룬의 반지름의 길이를 구하자.

따라서 그림자의 넓이를 S, 애드벌룬의 중심을 지나는 단면인 원의 넓이를 S'이라 하면 $S' = S\cos\theta$

구의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2 = 32\pi \cos 60^\circ = 32\pi \times \frac{1}{2} = 16\pi \Rightarrow r^2 = 16$

$\therefore r = 4 (\because r > 0)$

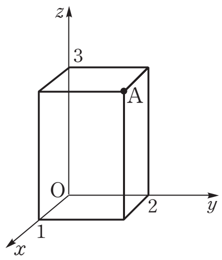
Ⅲ-3 공간좌표

pp. 116~125

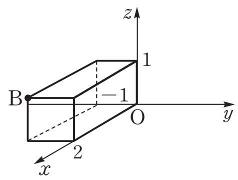
52 답 1) P(1, 5, 3) 2) P(1, 3, −2) 3) P(5, −1, 2) 4) P(2, −3, −1)

53

답 1)



2)



54 답 공간좌표, P(a, b, c), x좌표, y좌표, z좌표

55 답 1) (4, 0, 0) 2) (0, −2, 0) 3) (0, 0, −1)

56 답 1) (−1, 2, 0) 2) (0, 2, 3) 3) (−1, 0, 3)

57 답 1) (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)
2) (a, b, 0), (0, b, c), (a, 0, c)

58

답 1) x축 : (3, −4, 2), y축 : (−3, 4, 2), z축 : (−3, −4, −2)
2) xy평면 : (3, 4, 2), yz평면 : (−3, 4, −2),
zx평면 : (3, −4, −2)

59 답 (3, −4, −7)

60 답 S(2, 3, −4)

점 P(2, 3, −4)를 x축에 대하여 대칭이동한 점 Q는 Q(2, −3, 4)이고, 점 Q(2, −3, 4)를 y축에 대하여 대칭이동한 점 R는 R(−2, −3, −4)

또, 점 R(−2, −3, −4)를 z축에 대하여 대칭이동한 점 S는 S(2, 3, −4)

따라서 구하는 점 S의 좌표는 S(2, 3, −4)이다.

61 답 2

점 P(−2, 4, 6)을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면 (−2, −4, −6)

이것을 yz평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면 (2, −4, −6)

이것이 Q(a+1, $-b$, $2c$)와 일치하므로

$a+1=2$, $-b=-4$, $2c=-6$

즉, $a=1$, $b=4$, $c=-3$이므로

$a+b+c=1+4-3=2$

62 답 1) $(a,\ -b,\ -c)$, $(-a,\ b,\ -c)$, $(-a,\ -b,\ c)$
2) $(a,\ b,\ -c)$, $(-a,\ b,\ c)$, $(a,\ -b,\ c)$

63 답 1) 3 2) 3

1) $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+\{0-(-2)\}^2+(2-1)^2}=3$

2) $\overline{OA}=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$

64 답 $-2,\ 4$

$\overline{AB}=\sqrt{(2-3)^2+(-1-2)^2+(a-1)^2}=\sqrt{19}$

$\sqrt{1+9+(a-1)^2}=\sqrt{19}$

양변을 제곱하면

$1+9+(a-1)^2=19$

$(a-1)^2=9$

$a-1=\pm3$

$a=1\pm3$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=4$

65 답 6

점 P$(1,\ 2,\ -3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 Q$(1,\ 2,\ 3)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2+\{3-(-3)\}^2}=6$

66 답 2

$\overline{PA}=\sqrt{(1-2)^2+(-1-0)^2+(a-1)^2}$

$=\sqrt{(a-1)^2+2}$

$\overline{PB}=\sqrt{(0-2)^2+(-2-0)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{3}$

이때, $\overline{PA}=\frac{1}{2}\overline{PB}$이므로 $\sqrt{(a-1)^2+2}=\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$(a-1)^2+2=3$

$(a-1)^2=1,\ a-1=\pm1,\ a=1\pm1$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

67 답 1) $(-3,\ 0,\ 0)$ 2) $(0,\ 3,\ 0)$

1) 점 P의 좌표를 $(x,\ \boxed{0},\ \boxed{0})$이라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(x-3)^2+(0-1)^2+\{0-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{x^2-\boxed{6}x+\boxed{14}}$

$\overline{BP}=\sqrt{(x-1)^2+(0-0)^2+(0-5)^2}$

$=\sqrt{x^2-\boxed{2}x+\boxed{26}}$

이때, $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서

$x^2-6x+\boxed{14}=x^2-\boxed{2}x+26$

$\therefore x=\boxed{-3}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\boxed{(-3,\ 0,\ 0)}$이다.

2) 점 Q의 좌표를 $(0,\ y,\ 0)$이라 하면

$\overline{AQ}=\sqrt{(0-2)^2+\{y-(-1)\}^2+(0-3)^2}$

$=\sqrt{y^2+2y+14}$

$\overline{BQ}=\sqrt{(0-4)^2+(y-5)^2+(0-3)^2}$

$=\sqrt{y^2-10y+50}$

이때, $\overline{AQ}=\overline{BQ}$이므로 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$에서

$y^2+2y+14=y^2-10y+50$

$\therefore y=3$

따라서 구하는 점 Q의 좌표는 Q$(0,\ 3,\ 0)$이다.

68 답 $(0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ -2,\ 0)$

xy평면 위의 점 C의 좌표를 C$(x,\ y,\ 0)$이라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(0-1)^2+\{-1-(-1)\}^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

$\overline{BC}=\sqrt{(x-0)^2+\{y-(-1)\}^2+(0-1)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2y+2}$

$\overline{CA}=\sqrt{(x-1)^2+\{y-(-1)\}^2+(0-0)^2}$

$=\sqrt{x^2-2x+y^2+2y+2}$

이때, $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이므로

$\sqrt{2}=\sqrt{x^2+y^2+2y+2}$에서

$x^2+y^2+2y=0$ ⋯ ㉠

또, $\sqrt{x^2+y^2+2y+2}=\sqrt{x^2-2x+y^2+2y+2}$에서 $x=0$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$y^2+2y=0$

$y(y+2)=0$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2$

따라서 점 C의 좌표는 $(0,\ 0,\ 0)$ 또는 $(0,\ -2,\ 0)$이다.

69 답 1) $\sqrt{22}$ 2) $\sqrt{14}$

1) 좌표공간에서 주어진 두 점 A, B는 xy평면을 기준으로 같은 쪽에 있으므로 점 B를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점 B$'(-1,\ \boxed{3},\ \boxed{-2})$에 대하여 선분 AB$'$과 xy평면의 교점의 위치에 점 P가 있을 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$는 최솟값을 가진다.

즉, $\overline{AP}+\overline{BP}\ \geq\ \overline{AB'}$

$\overline{AB'}=\sqrt{(-1-\boxed{2})^2+(\boxed{3}-1)^2+(\boxed{-2}-1)^2}$

$=\boxed{\sqrt{22}}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\boxed{\sqrt{22}}$이다.

2) 좌표공간에서 주어진 두 점 A, B는 yz평면을 기준으로 반대 쪽에 있으므로 선분 AB와 yz평면의 교점의 위치에 점 Q가 있을 때 $\overline{AQ}+\overline{BQ}$는 최솟값을 가진다.

즉, $\overline{AQ}+\overline{BQ}\geq\overline{AB}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14}$

따라서 $\overline{AQ}+\overline{BQ}$의 최솟값은 $\sqrt{14}$이다.

70 답 $3\sqrt{5}$

두 점 A, B는 zx평면을 기준으로 같은 쪽에 있으므로 점 B를 zx평면에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 B′의 좌표는 $\mathrm{B}'(-1,\ -3,\ 2)$이다.

이때, $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로 점 P가 $\overline{\mathrm{AB'}}$과 zx평면의 교점에 있을 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$는 최솟값을 가진다.

즉, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

$\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(-1-3)^2+(-3-2)^2+(2-4)^2}=3\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $3\sqrt{5}$이다.

71 답 1) $\sqrt{2}$ 2) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 3) 2

1) 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 2,\ 1)$을 xy평면 위로 정사영한 점을 각각 A′, B′이라 하면 $\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{B}'(3,\ 2,\ 0)$

즉, 선분 AB의 xy평면 위로의 정사영의 길이를 구하면

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(3-2)^2+(2-1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{2}$

2) 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 4)$, $\mathrm{B}(3,\ 3,\ 2)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2+(2-4)^2}$

$=\sqrt{4+1+4}=3$

또, 두 점 A, B를 xy평면 위로 정사영한 점을 각각 A′, B′이라 하면 $\mathrm{A}'(1,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{B}'(3,\ 3,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2+(0-0)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

직선 AB와 xy평면이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$에서

$\sqrt{5}=3\cos\theta \qquad \therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

3) 삼각형 ABC를 xy평면 위로 정사영한 도형은 직각삼각형 OAB이므로

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$

72 답 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, $\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}$

73 답 1) $\mathrm{P}\left(2,\ -\dfrac{5}{3},\ 1\right)$ 2) $\mathrm{Q}(-14,\ 9,\ 9)$ 3) $\mathrm{M}\left(1,\ -1,\ \dfrac{3}{2}\right)$

1) 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$x=\dfrac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}=2,\ y=\dfrac{2\times(-3)+1\times1}{2+1}=-\dfrac{5}{3},$

$z=\dfrac{2\times0+1\times3}{2+1}=1$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(2,\ -\dfrac{5}{3},\ 1\right)$이다.

2) 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점 Q의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라고 하면

$x=\dfrac{2\times4-3\times(-2)}{2-3}=-14,$

$y=\dfrac{2\times(-3)-3\times1}{2-3}=9,\ z=\dfrac{2\times0-3\times3}{2-3}=9$

따라서 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(-14,\ 9,\ 9)$이다.

3) 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+4}{2},\ \dfrac{1+(-3)}{2},\ \dfrac{3+0}{2}\right)=\left(1,\ -1,\ \dfrac{3}{2}\right)$

74 답 1) $\left(3,\ \dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 2) $(4,\ 2,\ 1)$

1) 두 점 B, C의 중점 M의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면

$a=\dfrac{3+3}{2}=3,\ b=\dfrac{2+5}{2}=\dfrac{7}{2},\ c=\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{1}{2}$

따라서 중점 M의 좌표는 $\left(3,\ \dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$이다.

2) 두 점 $\mathrm{A}(6,\ -1,\ 2)$, $\mathrm{M}\left(\boxed{3},\ \boxed{\dfrac{7}{2}},\ \boxed{\dfrac{1}{2}}\right)$에 대하여 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점 G의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$x=\dfrac{2\times\boxed{3}+1\times\boxed{6}}{2+1}=\boxed{4},$

$y=\dfrac{2\times\boxed{\dfrac{7}{2}}+1\times\boxed{-1}}{2+1}=\boxed{2}$

$z=\dfrac{2\times\boxed{\dfrac{1}{2}}+1\times\boxed{2}}{2+1}=\boxed{1}$

따라서 점 G의 좌표는 $(\boxed{4},\ \boxed{2},\ \boxed{1})$이다.

75 답 1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{17}{3},\ \dfrac{5}{3},\ 0\right)$ 2) $\mathrm{P}'(6,\ 8,\ 3)$

1) 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점을 P라 하면

$\mathrm{P}\left(\dfrac{6m+5n}{m+n},\ \dfrac{3m-n}{m+n},\ \dfrac{-2m+4n}{m+n}\right)\ \cdots$ ㉠

이때, 점 P는 xy평면 위의 점이므로 z좌표의 값이 0이다.

$\dfrac{-2m+4n}{m+n}=0 \qquad \therefore m=2n$

이것을 ㉠에 대입하면

$\mathrm{P}\left(\dfrac{12n+5n}{2n+n},\ \dfrac{6n-n}{2n+n},\ \dfrac{-4n+4n}{2n+n}\right)$

따라서 구하는 내분점의 좌표는 $\left(\dfrac{17}{3},\ \dfrac{5}{3},\ 0\right)$이다.

2) 점 P′의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면 점 A는 $\overline{\mathrm{PP'}}$의 중점이므로

$\dfrac{-4+a}{2}=1 \qquad \therefore a=6$

$\dfrac{2+b}{2}=5 \qquad \therefore b=8$

$\dfrac{1+c}{2}=2 \qquad \therefore c=3$

따라서 점 P′의 좌표는 $(6,\ 8,\ 3)$이다.

76 답 1) $(-1, 6, 8)$ 2) $\sqrt{10}$

1) 점 D의 좌표를 (a, b, c)라 하자.

평행사변형 ABCD에서 대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치하므로

$\frac{3+1}{2}=\frac{5+a}{2}$ $\therefore a=-1$

$\frac{-1+4}{2}=\frac{-3+b}{2}$ $\therefore b=6$

$\frac{4+6}{2}=\frac{2+c}{2}$ $\therefore c=8$

따라서 D의 좌표는 $(-1, 6, 8)$이다.

2) 점 $C(a, b, c)$로 놓으면 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 점 $(2, 3, 0)$은 $\overline{AC}$의 중점이다. 즉,

$\frac{3+a}{2}=2$, $\frac{4+b}{2}=3$, $\frac{1+c}{2}=0$

즉, $a=1$, $b=2$, $c=-1$이므로 $C(1, 2, -1)$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{(1-2)^2+(2-5)^2+\{-1-(-1)\}^2}=\sqrt{10}$

77 답 0

$\frac{2+0+a}{3}=2$ $\therefore a=4$

$\frac{-10+4+b}{3}=-4$ $\therefore b=-6$

$\frac{4+(-6)+c}{3}=0$ $\therefore c=2$

$\therefore a+b+c=4+(-6)+2=0$

78 답 $\left(\frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right)$

세 점 P, Q, R의 좌표는 각각 $P(2, 3, 0)$, $Q(0, 3, 4)$, $R(2, 0, 4)$이므로 $\triangle PQR$의 무게중심 G의 좌표를 (x, y, z)라 하면

$x=\frac{2+0+2}{3}=\frac{4}{3}$, $y=\frac{3+3+0}{3}=2$, $z=\frac{0+4+4}{3}=\frac{8}{3}$

따라서 무게중심 G의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right)$이다.

79 답 1) ① $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$

② $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$

2) $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

3) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

80 답 4, $(-1, 2, 4)$, $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$

구의 중심의 좌표 (a, b, c)	반지름의 길이 r	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)=r^2$
$(3, -1, 2)$	4	$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$
$(-1, 2, 4)$	2	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$
$(2, 1, -1)$	3	$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$

81 답 1) $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=9$

2) $x^2+y^2+z^2=14$

2) 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2=r^2$이라 놓으면

점 $(-1, -2, 3)$을 지나므로

$1+4+9=r^2$ $\therefore r^2=14$

$\therefore x^2+y^2+z^2=14$

82 답 1) 중심의 좌표 : $(4, -2, 1)$, 반지름의 길이 : 2

2) 중심의 좌표 : $(0, -3, 4)$, 반지름의 길이 : 5

83 답 1) $(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=3$

2) $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=5$

1) $\overline{AB}$의 중점을 $C(a, b, c)$라 하면

$a=\frac{2+4}{2}=3$, $b=\frac{-1+1}{2}=0$, $c=\frac{1+3}{2}=2$

이므로 구의 중심은 점 $C(3, 0, 2)$이다.

반지름의 길이는

$\overline{AC}=\sqrt{(3-2)^2+\{0-(-1)\}^2+(2-1)^2}=\sqrt{3}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=3$

2) $\overline{AB}$의 중점을 $C(a, b, c)$라 하면

$a=\frac{6+2}{2}=4$, $b=\frac{2+0}{2}=1$, $c=\frac{3+3}{2}=3$

이므로 구의 중심은 점 $C(4, 1, 3)$이다.

반지름의 길이는

$\overline{AC}=\sqrt{(4-6)^2+(1-2)^2+(3-3)^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-4)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=5$

84 답 4, $y+2$, $z+3$, 2, -2, -3, 2

$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+10=0$을 변형하면

$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2+6z+9)=\boxed{4}$이므로

$(x-1)^2+(\boxed{y+2})^2+(\boxed{z+3})^2=\boxed{2}^2$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(1, \boxed{-2}, \boxed{-3})$이고, 반지름의 길이는 $\boxed{2}$이다.

85 답 1) 중심의 좌표 : $(1, -2, 3)$, 반지름의 길이 : 4

2) 중심의 좌표 : $(-4, 0, 1)$, 반지름의 길이 : 5

3) 중심의 좌표 : $(3, 0, 0)$, 반지름의 길이 : 3

1) 방정식 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$을 변형하면

$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2-6z+9)=16$

$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$

따라서 중심의 좌표는 $(1, -2, 3)$이고, 반지름의 길이는 4이다.

2) 방정식 $x^2+y^2+z^2+8x-2z-8=0$을 변형하면

$(x^2+8x+16)+y^2+(z^2-2z+1)=25$

$\therefore (x+4)^2+y^2+(z-1)^2=25$

따라서 중심의 좌표는 $(-4, 0, 1)$이고, 반지름의 길이는 5이다.

3) 방정식 $x^2+y^2+z^2-6x=0$을 변형하면

$(x^2-6x+9)+y^2+z^2=9 \qquad \therefore (x-3)^2+y^2+z^2=9$

따라서 중심의 좌표는 $(3, 0, 0)$이고, 반지름의 길이는 3이다.

86 답 1) $x^2+y^2+z^2-x-3y+4z=0$
2) $x^2+y^2+z^2-6y+8z=0$

1) 구의 방정식을

$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이라 하자.

먼저 구가 점 $(0, 0, 0)$을 지나므로 $D=0$

또, 세 점 $(1, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(0, 3, -4)$를 지나므로

$1+A=0$ ⋯ ㉠

$4+4+2A+2B=0 \Rightarrow A+B=-4$ ⋯ ㉡

$9+16+3B-4C=0 \Rightarrow 3B-4C=-25$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$A=-1$, $B=-3$, $C=4$

따라서 구하는 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2-x-3y+4z=0$

2) 구의 방정식을

$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이라 하자.

먼저 구가 점 $(0, 0, 0)$을 지나므로 $D=0$

그리고 점 $(0, 6, 0)$을 지나므로

$36+6B=0 \Rightarrow B=-6$

또, 두 점 $(3, -1, -4)$, $(0, -1, -1)$을 지나므로

$9+16+3A+6-4C=0 \Rightarrow 3A-4C=-32$ ⋯ ㉠

$1+6-C=0 \Rightarrow C=8$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $A=0$

따라서 구하는 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2-6y+8z=0$

87 답 1) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=16$
2) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$

1) xy평면에 접하는 구의 반지름의 길이는 구의 중심인 점 $(-1, 2, 4)$의 $\boxed{z}$좌표의 절댓값과 같으므로 구하는 구의 반지름의 길이는 $\boxed{4}$이다.

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x+\boxed{1})^2+(y-\boxed{2})^2+(z-\boxed{4})^2=\boxed{16}$

2) yz평면에 접하는 구의 반지름의 길이는 구의 중심인 점 $(-1, 2, 4)$의 x좌표의 절댓값과 같으므로 구하는 구의 반지름의 길이는 1이다.

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$

개념 정리

[좌표평면에 접하는 구의 방정식]

중심이 (a, b, c)인 구에 대해서

(1) xy평면에 접할 때, (반지름의 길이)$=|c|$

(2) yz평면에 접할 때, (반지름의 길이)$=|a|$

(3) zx평면에 접할 때, (반지름의 길이)$=|b|$

88 답 10

$x^2+y^2+z^2-6x+2y+4z+k=0$에서

$x^2-6x+9+y^2+2y+1+z^2+4z+4=14-k$

$(x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=14-k$

이 구가 xy평면에 접하므로 구의 반지름의 길이는 구의 중심의 z좌표의 값의 절댓값과 같다.

$|-2|=\sqrt{14-k}$

양변을 제곱하면

$4=14-k \qquad \therefore k=10$

89 답 2

구의 반지름의 길이를 r라 하면 구가 점 $(1, -2, 1)$을 지나므로 구의 방정식은

$(x-r)^2+(y+r)^2+(z-r)^2=r^2$

점 $(1, -2, 1)$은 이 구 위의 점이므로

$(1-r)^2+(-2+r)^2+(1-r)^2=r^2$

$r^2-4r+3=0$

$(r-1)(r-3)=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=3$

따라서 두 구의 반지름의 길이의 차는 $3-1=2$이다.

90 답 3

중심이 $(k, 5, -4)$인 구가 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $\sqrt{k^2+16}$

그런데 반지름의 길이가 5라 하므로

$\sqrt{k^2+16}=5$

양변을 제곱하면

$k^2+16=25$, $k^2=9$

$\therefore k=3 (\because k>0)$

개념 정리

[좌표축에 접하는 구의 방정식]

중심이 (a, b, c)인 구에 대하여

(1) x축에 접할 때, (반지름의 길이)$=\sqrt{b^2+c^2}$

(2) y축에 접할 때, (반지름의 길이)$=\sqrt{a^2+c^2}$

(3) z축에 접할 때, (반지름의 길이)$=\sqrt{a^2+b^2}$

91 답 8π

중심이 점 $(1, -2, 3)$이고 반지름의 길이가 5인 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$

xy평면 위의 점은 z좌표의 값이 0이므로 $z=0$을 대입하면

$(x-1)^2+(y+2)^2+(0-3)^2=25$

$(x-1)^2+(y+2)^2=16$

즉, 주어진 구와 xy평면의 교선은 중심이 $(1, -2)$이고 반지름의 길이가 4인 원이므로 구하는 둘레의 길이는 $2\pi\times4=8\pi$이다.

92 답 35π

두 점 $(-3, -6, 4)$, $(5, -2, -4)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{-6-2}{2}, \frac{4-4}{2}\right)=(1, -4, 0)$

반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\sqrt{\{5-(-3)\}^2+\{(-2-(-6)\}^2+(-4-4)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{64+16+64}=6$

즉, 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=36$

이 구를 yz평면으로 자를 때 생기는 도형은 $x=0$을 대입하면

$1+(y+4)^2+z^2=36$

$\therefore (y+4)^2+z^2=35$

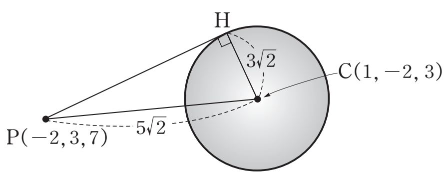
따라서 구하는 도형의 넓이는 $\pi\times(\sqrt{35})^2=35\pi$

93 답 $4\sqrt{2}$

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-4=0$을 정리하면

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=18$

따라서 주어진 구는 중심이 $(1, -2, 3)$이고, 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$이다.



그림과 같이 구의 중심을 C, 점 P에서 구에 그은 접선의 접점을 H라 하면 △PCH는 직각삼각형이고

$\overline{PC}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(-2-3)^2+(3-7)^2}=5\sqrt{2}$이므로

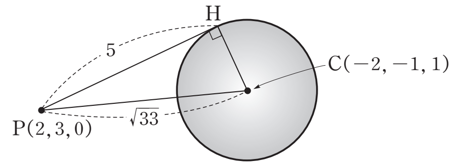
따라서 구하는 접선의 길이는 피타고라스 정리에 의해

$\overline{PH}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(3\sqrt{2})^2}=4\sqrt{2}$

94 답 -2

$x^2+y^2+z^2+4x+2y-2z+k=0$을 정리하면

$(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6-k$



그림과 같이 구의 중심을 C, 점 P에서 구에 그은 접점을 H라 하면 △PCH는 직각삼각형이고,

$\overline{PC}=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{33}$

접선의 길이가 5이므로 $\overline{PH}=5$

직각삼각형 PCH에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{CH}^2=\overline{PC}^2-\overline{PH}^2$

$=33-25=8$

즉, $6-k=8$

$\therefore k=-2$

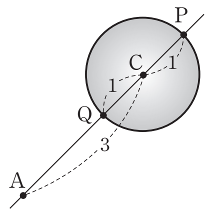
95 답 최댓값 : 4, 최솟값 : 2

주어진 구 $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$의 중심의 좌표는 $(-1, 1, 1)$이고 반지름의 길이는 1이다.

그림과 같이 구의 중심을 C라 하면

$\overline{AC}=\sqrt{(-1)^2+\{1-(-1)\}^2+(1-2)^2}=3$

따라서 직선 AC가 구와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면



선분의 길이의 최댓값은

$\overline{AP}=\overline{AC}+\overline{CP}=3+1=4$

선분의 길이의 최솟값은

$\overline{AQ}=\overline{AC}-\overline{CP}=3-1=2$

96 답 16

$x^2+y^2+z^2-4x+4y+2z+8=0$을 정리하면

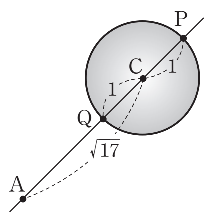
$(x-2)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=1$

주어진 구는 중심의 좌표가 $(2, -2, -1)$이고 반지름의 길이가 1이다.

그림과 같이 구의 중심을 C라 하면

$\overline{AC}=\sqrt{(2-0)^2+(-2-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{17}$

따라서 직선 AC가 구와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면



선분의 길이의 최댓값 M은

$M=\overline{AP}=\overline{AC}+\overline{CP}=\sqrt{17}+1$

선분의 길이의 최솟값 m은

$m=\overline{AQ}=\overline{AC}-\overline{CQ}=\sqrt{17}-1$

$\therefore Mm=(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)$

$=17-1=16$

97 답 8

구의 방정식 $x^2+y^2+z^2+4x-4y-2z+k=0$을 정리하면

$(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9-k=(\sqrt{9-k})^2$ ⋯ ㉠

구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=2(1-z+y)$를 정리하면

$x^2+y^2-2y+z^2+2z=2$

$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4=2^2$ ⋯ ㉡

두 구 ㉠, ㉡이 서로 외접하므로 두 구의 중심 $(-2,\ 2,\ 1)$, $(0,\ 1,\ -1)$ 사이의 거리는 두 구의 반지름의 길이의 합과 같다. 즉,

$\sqrt{\{0-(-2)\}^2+(1-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{9-k}+2$이므로

$\sqrt{9-k}=1 \Rightarrow 9-k=1 \qquad \therefore k=8$

98 답 14

중심의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$, 반지름의 길이가 4인 구의 방정식을 구하면

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=16$

이 구가 xy평면이 만나서 생기는 교선은 $z=0$을 대입하면

$(x-a)^2+(y-b)^2+(0-c)^2=16$

$(x-a)^2+(y-b)^2=16-c^2$

이것이 $(x-3)^2+(y+1)^2=12$와 같으므로

$a=3,\ b=-1,\ 16-c^2=12 \Rightarrow c^2=4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=9+1+4=14$

99 답 1) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

2) $\left(-\dfrac{A}{2},\ -\dfrac{B}{2},\ -\dfrac{C}{2}\right)$

단원 총정리 문제 정답 Ⅲ-3 공간좌표

pp. 126~127

01 답 ①

점 $P(3,\ -2,\ 4)$에서 xy평면에 내린 수선의 발 Q는

$Q(3,\ -2,\ 0)$

또, 점 Q를 z축에 대하여 대칭이동한 점 R를 구하면

$R(-3,\ 2,\ 0)$

$\therefore a=-3,\ b=2,\ c=0$

$\therefore a+b-c=-3+2-0=-1$

02 답 ③

네 점 $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(a,\ 3,\ 2)$, $B(2,\ 7,\ c)$, $C(-4,\ b,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 OABC가 평행사변형이므로 두 대각선 OB와 AC의 중점이 일치한다.

$\dfrac{0+2}{2}=\dfrac{a-4}{2},\ \dfrac{0+7}{2}=\dfrac{3+b}{2},\ \dfrac{0+c}{2}=\dfrac{2+1}{2}$

즉, $a=6,\ b=4,\ c=3$이므로

$a+b+c=6+4+3=13$

03 답 $-\frac{1}{4}$

세 점 $A(4,\ 3,\ 1)$, $B(-2,\ -4,\ 3)$, $P(a,\ 0,\ 0)$에 대하여

$\overline{PA}=\sqrt{(a-4)^2+(0-3)^2+(0-1)^2}$

$=\sqrt{a^2-8a+16+9+1}$

$=\sqrt{a^2-8a+26}$

$\overline{PB}=\sqrt{(a+2)^2+(0+4)^2+(0-3)^2}$

$=\sqrt{a^2+4a+4+16+9}$

$=\sqrt{a^2+4a+29}$

두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P가 있으므로

$\overline{PA}=\overline{PB} \Rightarrow \overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이 성립한다.

$a^2-8a+26=a^2+4a+29$

$12a=-3 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{4}$

04 답 $2\sqrt{10}$

점 B와 x축에 대하여 대칭인 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(-1,\ 0,\ -2)$이다.

이때, $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로 점 P가 $\overline{AB'}$과 x축의 교점에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$는 최솟값을 가진다. 즉,

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\ge\overline{AB'}$

$\overline{AB'}=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{10}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다.

05 답 2

선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times(-4)-3\times(-1)}{1-3},\ \dfrac{1\times4-3\times2}{1-3},\ \dfrac{1\times6-3k}{1-3}\right)$

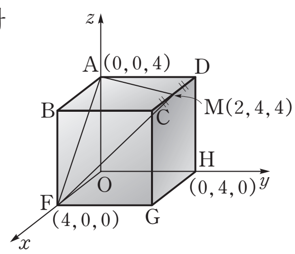
$=\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3k-6}{2}\right)$

이 점이 xy평면 위에 있으므로 z좌표의 값이 0이다.

$\dfrac{3k-6}{2}=0 \qquad \therefore k=2$

06 답 6

그림과 같이 좌표공간을 생각하면 $C(4,\ 4,\ 4)$, $D(0,\ 4,\ 4)$, $A(0,\ 0,\ 4)$, $F(4,\ 0,\ 0)$이다.



이때, $\overline{CD}$의 중점 M의 좌표는

$\left(\dfrac{4+0}{2},\ \dfrac{4+4}{2},\ \dfrac{4+4}{2}\right)$에서

$(2,\ 4,\ 4)$

삼각형 AFM의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{0+4+2}{3},\ \dfrac{0+0+4}{3},\ \dfrac{4+0+4}{3}\right)=\left(2,\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$

즉, $a=2,\ b=\dfrac{4}{3},\ c=\dfrac{8}{3}$이므로

$a+b+c=2+\dfrac{4}{3}+\dfrac{8}{3}=6$

07 답 96

구가 x축, y축, z축에 동시에 접하므로 구의 중심에서 x축, y축, z축에 이르는 거리는 같다.

구의 중심을 $C(a, b, c)$라 하므로

$a^2=b^2=c^2$ ⋯ ㉠

한편, 구의 중심에서 x축(또는 y축 또는 z축)에 내린 수선의 발을 P라 하면

$P(a, 0, 0)$(또는 $P(0, b, 0)$ 또는 $P(0, 0, c)$)

$\overline{CP}$의 길이는 구의 반지름의 길이 8과 같다.

즉, $\overline{CP}=8$이므로

$\sqrt{(a-a)^2+b^2+c^2}=8$

$\sqrt{a^2+a^2}=8(\because$ ㉠$)$

$\sqrt{2a^2}=8$

양변을 제곱하면

$2a^2=64$

$\therefore a^2=32$

$\therefore a^2+b^2+c^2=3a^2$ $(\because$ ㉠$)$

$=3\times32=96$

08 답 96π

중심의 좌표가 점 $(0, 3, 2)$이고 반지름의 길이가 10인 구의 방정식은

$x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=100$

$z=0$을 대입하여 이 구가 xy평면과 만나서 생기는 원을 구하면

$x^2+(y-3)^2+(0-2)^2=100$

$x^2+(y-3)^2=96$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{96}=4\sqrt{6}$이므로 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(4\sqrt{6})^2=96\pi$

09 답 ②

> 점 $(5, 5, 5)$에서 두 점 $(2, 3, -1)$, $(-6, -5, 3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 구에 그은 접선의 길이를 구하면?
>
> 두 점의 중점이 구의 중심이고, 두 점 사이의 거리의 $\frac{1}{2}$이 구의 반지름의 길이야.
>
> ① 8 ② $\sqrt{65}$ ③ $\sqrt{66}$
>
> ④ $\sqrt{67}$ ⑤ $2\sqrt{17}$

1st 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 중심은 두 점의 중점이야.

두 점 $(2, 3, -1)$, $(-6, -5, 3)$을 지름이 양 끝 점으로 하는 구의 중심 C의 좌표는

두 점 (a_1, a_2), (b_1, b_2)의 중점은 $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$

$\left(\frac{2-6}{2}, \frac{3-5}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)=(-2, -1, 1)$

2nd 두 점 사이의 거리가 지름이므로 그 거리의 $\frac{1}{2}$은 반지름이야.

또, 구의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\sqrt{(-6-2)^2+(-5-3)^2+(3+1)^2}$

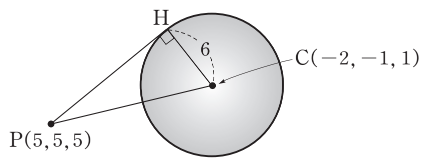
$=\frac{1}{2}\sqrt{64+64+16}$

$=\frac{1}{2}\times12=6$

즉, 구의 방정식은

$(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=36$

3rd 접선의 길이는 구의 중심, 접점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 직각삼각형에서 구하자.



점 $P(5, 5, 5)$에서 구의 중심까지의 거리를 구하면

$\overline{CP}=\sqrt{(-2-5)^2+(-1-5)^2+(1-5)^2}$

$=\sqrt{49+36+16}=\sqrt{101}$

점 P에서 구에 접선을 그었을 때 접점을 H라 하자.

직각삼각형 PCH에 피타고라스 정리를 이용하면

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{101-36}=\sqrt{65}$

10 답 8

중심이 점 $(2, -4, 3)$이고 x축에 접하는 구의 반지름의 길이 r_1은 점 $(2, -4, 3)$과 점 $(2, -4, 3)$에서 x축에 내린 수선의 발 $(2, 0, 0)$ 사이의 거리이므로

$r_1=\sqrt{(2-2)^2+(-4-0)^2+(3-0)^2}=5$

중심이 점 $(2, -4, 3)$이고 xy평면에 접하는 구의 반지름의 길이 r_2는 구의 중심의 z좌표의 절댓값과 같으므로 $r_2=3$

$\therefore r_1+r_2=5+3=8$

11 답 ④

> 점 $A(1, -3, -1)$과 구
>
> $x^2+y^2+z^2-4x+6y-4z+13=0$
>
> 위의 점을 이은 선분의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은?
>
> 고정된 점과 구 위의 점 사이의 거리가 최대 또는 최소가 되려면 고정된 점과 구의 중심을 지나는 직선을 그어보면 알 수 있어.
>
> ① $2\sqrt{7}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ 6
>
> ④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{11}$

1st 주어진 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하자.

$x^2+y^2+z^2-4x+6y-4z+13=0$을 정리하면

$x^2-4x+y^2+6y+z^2-4z+13=0$

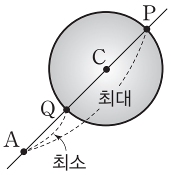
$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)+(z^2-4z+4)=4$

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=4$

즉, 중심이 $C(2, -3, 2)$이고 반지름의 길이가 2인 구이다.

2nd 점 A와 구의 중심을 지나는 직선이 구와 만나는 점을 생각하자.

점 A와 구의 중심을 지나는 직선을 그었을 때, 구와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.



이때, 점 A와 구 위의 점을 이은 선분의 길이의 최댓값은

점 A는 고정되었고 구 위의 한 점에서의 거리가 최대가 되려면 구의 중심을 지나는 직선과 만나는 점 P와 점 A 사이의 거리가 돼.

$\overline{AP}=\overline{AC}+\overline{CP}$

또, 점 A와 구 위의 점을 이은 선분의 길이의 최솟값은

$\overline{AQ}=\overline{AC}-\overline{CQ}$

즉, 선분의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은

$\overline{AP}+\overline{AQ}=(\overline{AC}+\overline{CP})+(\overline{AC}-\overline{CQ})$

$=2\overline{AC}(\because \overline{CP}=\overline{CQ})$

3rd 두 점 사이의 거리를 구하여 선분의 길이의 최댓값과 최솟값의 합을 구하자.

점 A$(1,\ -3,\ -1)$과 C$(2,\ -3,\ 2)$ 사이의 거리를 구하면

$\overline{AC}=\sqrt{(2-1)^2+(-3+3)^2+(2+1)^2}$

$=\sqrt{1+0+9}=\sqrt{10}$

따라서 구하는 선분의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은 $2\sqrt{10}$

12 답 ③

구 $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-k)^2=13$과 xy평면이 만나서 생기는 교선은 $z=0$을 대입하여 구하자.

$(x-2)^2+(y+4)^2+(0-k)^2=13$

$(x-2)^2+(y+4)^2=13-k^2$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13-k^2}$이므로 원의 둘레의 길이는 $2\pi\sqrt{13-k^2}$

그런데 구와 xy평면이 만나서 생기는 교선의 길이가 4π라 하므로

$2\pi\sqrt{13-k^2}=4\pi$

$\sqrt{13-k^2}=2$

양변을 제곱하면

$13-k^2=4,\ k^2=9$

$\therefore k=3(\because k>0)$

memo