심플
자이스토리

고등수학의 기본을 심플하게 완성!

SIMPLE Xi story

고등 수학(상)

[정답 및 해설]

자이스토리 · 수경출판사

SIMPLE Xi story 빠른 정답 찾기

I 다항식

A 다항식의 덧셈과 뺄셈

01 내림차순 정리 02 낮은, 높은 03 같은 항

04 $A+(B+C)$ 05 $-B$ 06 ○ 07 ○ 08 ×

09 × 10 × 11 $2x^2-x+3$ 12 $2x^3+x^2-x+3$

13 $1+3y+y^2$ 14 $-4+3y+y^2-y^3$

15 $x^3+yx^2+y^3x+y^2+4$ 16 $xy^3+y^2+x^2y+x^3+4$

17 $x^2-(3y+5)x+2y^2+4y-8$ 18 $-x+6$

19 $3a+2b$ 20 $a+2b-2c$ 21 $3x^2+3x$

22 $-x^2+x+6$ 23 $-3x^2+2x$ 24 $2x^3-x^2-2x+2$

25 $6x^2-5x$ 26 ④ 27 ③, ①, ②, ④

28 $a=2$, $b=1$ 29 ⑤ 30 $8x^2+5x+3$ 31 ②

32 $2x^2+7x-17$ 33 ① 34 $2y^2+13y-18$

35 $-7x^3+20x^2-4x+14$ 36 ⑤ 37 ②

38 $9x^2-13x+1$ 39 ② 40 ③

B 다항식의 곱셈과 나눗셈

01 a^7 02 a^4 03 ay 04 분배법칙 05 상수, 일차식

06 × 07 × 08 ○ 09 ○ 10 ○ 11 a^5

12 a^6b^3 13 $a^4b+ab^2-ab^3$ 14 x^3-x-6

15 $2a^3-a^2b-3ab^2-b^3$ 16 $8x^3+12x^2+6x+1$

17 $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$ 18 x^4-x^2+4x-4

19 x^2-4xz 20 $2x^2y-4y^2$ 21 5, 9

22 2, x, $4x$, $-5x$ 23 몫 : $2x^2+x+3$, 나머지 : 9

24 $Q : x$, $R : -2x+1$ 25 ⑤ 26 ② 27 1

28 ① 29 ⑤ 30 ③ 31 ① 32 ③ 33 ④

34 ① 35 ① 36 29 37 ② 38 ⑤ 39 ⑤

40 ② 41 ⑤

C 다항식의 곱셈 공식

01 a^2-b^2 02 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ 03 $2ab$

04 $b-c$ 05 ○ 06 × 07 ○ 08 $9-x^2$

09 $2x^2+5x+3$ 10 $x^3+6x^2+12x+8$

11 $27x^3-54x^2+36x-8$ 12 x^3-1 13 $8x^3+1$

14 $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$ 15 $a^3-b^3+c^3+3abc$

16 $x^4+x^2y^2+y^4$ 17 4 18 28 19 14 20 6

21 11 22 12 23 ④ 24 ④ 25 ④ 26 ⑤

27 ① 28 ① 29 ③ 30 342 31 ①

32 $x^4-4x^3+2x^2+4x-3$ 33 ① 34 ① 35 ⑤

36 ③ 37 ② 38 ① 39 ② 40 ④ 41 ①

42 ③ 43 ⑤ 44 ① 45 ⑤ 46 ④ 47 ③

48 ① 49 ③ 50 ② 51 ④

연습 [A−C]

01 ④ 02 ① 03 ① 04 ③ 05 ⑤ 06 ④

07 ② 08 ② 09 ① 10 ③ 11 ⑤ 12 ③

13 ③ 14 ③ 15 ② 16 26

D 나머지 정리와 인수정리

01 항등식 02 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ 03 $x-a$ 04 ○ 05 ○

06 × 07 (1) $a=-3$ (2) $a=5$, $b=-2$ (3) $a=1$, $b=2$

08 -7 09 1 10 $a=1$, $b=-3$

11 (1) 1 (2) -2 12 $a=-6$, $b=0$

13 (1) 몫 : x^2+4x+7, 나머지 : 17

(2) 몫 : $2x^2+5x$, 나머지 : -3

(3) 몫 : $2x^2+2x-4$, 나머지 : 7

(4) 몫 : x^2+1, 나머지 : 2

14 ② 15 ③ 16 ② 17 ② 18 ⑤ 19 ④

20 ③ 21 ② 22 ① 23 ⑤ 24 ① 25 ②

26 ② 27 ④ 28 ④ 29 ① 30 ⑤ 31 ④

32 ② 33 ② 34 ③ 35 ① 36 ④ 37 ⑤

38 ② 39 ③ 40 ③ 41 ① 42 ① 43 ②

44 ⑤ 45 ④ 46 ③ 47 ③ 48 ⑤ 49 ①

50 ①

E 인수분해 공식

01 x^2 02 낮은, 내림차순 03 인수정리 04 ×

05 × 06 ○ 07 $(x+1)(a+3)$ 08 $(x+5)^2$

09 $(2a+b)(2a-b)$ 10 $(x+7)(x-3)$

11 $(x-2)(x^2+2x+4)$ 12 $(2x+3)^3$ 13 $(a-b+1)^2$

14 $(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)$

15 $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$ 16 $(a+2)(a+3)$

17 $(x+1)(x+2)(x^2+3x+3)$

18 $x(x-5)(x^2-5x+10)$ 19 $(x+1)(x-1)(x^2+4)$

20 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 21 $(a^2+2a+3)(a^2-2a+3)$

22 $(x+y-3)(x+2y+1)$ 23 $(x+1)(x-2)(x-3)$

24 $(x+1)(x+3)(x-2)$ 25 $(x-1)(x-2)(x+3)$

26 $2(x-1)(x-2)(x+1)$ 27 ④ 28 ① 29 ③

30 ② 31 ③ 32 ① 33 ① 34 ③ 35 ③

36 ② 37 ① 38 ③ 39 ④ 40 ⑤ 41 ④

42 ② 43 ③ 44 ⑤ 45 ④ 46 ④ 47 ②

48 ③ 49 ③ 50 ④ 51 ② 52 ① 53 ②

54 ② 55 ① 56 ④ 57 ③ 58 ⑤ 59 ③

60 ③ 61 ② 62 ④ 63 ② 64 ⑤ 65 ④

66 ③ 67 ⑤ 68 ③

연습 [D-E]

01 ① 02 ③ 03 ② 04 ③ 05 ③ 06 ④
07 ④ 08 1 09 ⑤ 10 ③ 11 ① 12 ③
13 1 14 ① 15 ⑤

I 대단원 TEST [A-E]

01 ④ 02 ① 03 16 04 ⑤ 05 ① 06 ②
07 6 08 100 09 ① 10 ⑤ 11 11 12 ④
13 52 14 5 15 ④ 16 ① 17 ③ 18 ⑤
19 ④ 20 185 21 ② 22 ③ 23 ⑤ 24 ②
25 ④ 26 ④

Ⅱ 방정식과 부등식

F 복소수

01 i 02 2, 3 03 0 04 $1+i$ 05 실수
06 ○ 07 × 08 ○ 09 × 10 3, $\sqrt{2}$
11 $-2, -1$ 12 $-3, 0$ 13 0, 2 14 ㄴ, ㄹ
15 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ 16 ㄱ, ㅁ 17 ㄷ, ㅂ
18 $x=1, y=-3$ 19 $x=5, y=0$ 20 $x=0, y=-7$
21 $4+3i$ 22 $-1-2i$ 23 -2 24 $-\sqrt{3}i$
25 ④ 26 ③ 27 ② 28 ⑤ 29 ① 30 ④
31 ④ 32 ⑤ 33 ③ 34 ① 35 ② 36 ①
37 ⑤ 38 ② 39 ①

G 복소수의 계산

01 실수부분, 허수부분 02 켤레복소수 03 $1, i, -1, -i$
04 $\pm\sqrt{2}i$ 05 × 06 × 07 ○ 08 ○
09 5 10 $-2+i$ 11 $1+i$ 12 $4+\sqrt{3}i$
13 $5+12i$ 14 $-8+i$ 15 7 16 $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$
17 $2-i$ 18 $-i$ 19 0 20 0 21 $2\sqrt{2}i$
22 $-2\sqrt{2}$ 23 $2i$ 24 $-2i$ 25 2 26 ⑤
27 ③ 28 ④ 29 ③ 30 ② 31 ① 32 ③
33 ② 34 ② 35 ① 36 ⑤ 37 ① 38 ④
39 ⑤ 40 ⑤ 41 ② 42 ③ 43 ① 44 ④
45 ② 46 ③ 47 ② 48 ⑤ 49 ① 50 ①
51 ① 52 ② 53 ① 54 ④ 55 ④ 56 ③
57 ③

연습 [F-G]

01 ④ 02 ② 03 ① 04 ④ 05 ② 06 ④
07 ③ 08 4 09 ② 10 ② 11 ⑤ 12 ⑤
13 2 14 ⑤ 15 ① 16 ①

H 이차방정식의 풀이

01 방정식 02 해, 근 (근, 해) 03 2 04 실근, 허근
05 × 06 × 07 ○ 08 × 09 $x=0$
10 $x=\frac{2}{3}$ 11 $x=-1$ 12 $x=6$
13 $x=1$ 또는 $x=2$ 14 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-2$
15 $x=-2\pm\sqrt{6}$ 16 $x=1\pm i$ 17 $x=\pm\sqrt{5}i$
18 $x=\pm\frac{1}{2}i$ 19 $x=1\pm\sqrt{3}i$ 20 $x=\frac{-1\pm 2i}{2}$
21 (가) 3 (나) ±3 22 ⑤ 23 ④ 24 ④
25 ② 26 ② 27 ⑤ 28 ④ 29 ① 30 ⑤
31 ① 32 ⑤ 33 ④ 34 ④ 35 ③ 36 ③
37 $x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$ 38 ③ 39 $x=\frac{1\pm 2i}{2}$ 40 ④
41 ② 42 2 43 $\frac{1}{4}$ 44 ④ 45 ⑤ 46 ③
47 ② 48 ③ 49 ② 50 ③

I 이차방정식의 판별식

01 판별식 02 b^2-4ac 03 $(b')^2-ac$ 04 $b^2-4ac=0$
05 ○ 06 × 07 × 08 ○
09 (1) 9 (2) 서로 다른 두 실근 10 (1) 0 (2) 중근
11 (1) -7 (2) 서로 다른 두 허근
12 (1) 8 (2) 서로 다른 두 실근 13 ±4 14 16
15 $\frac{25}{4}$ 16 ±1 17 1 18 (가) 21 (나) 3 19 ②
20 (1) $k<4$ (2) $k=4$ (3) $k>4$ 21 ③ 22 ④
23 ② 24 ④ 25 ⑤ 26 ④ 27 ⑤ 28 ②
29 ④ 30 ④ 31 ② 32 ①

J 이차방정식의 근과 계수의 관계

01 $-\frac{b}{a}$ 02 $\frac{c}{a}$ 03 합, 곱 04 켤레복소수
05 × 06 × 07 ○ 08 × 09 (1) 5 (2) 3
10 (1) $-\frac{3}{2}$ (2) -2 11 $x^2-x-6=0$
12 $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$ 13 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$
14 $x^2-2x+2=0$ 15 $(x+\sqrt{5}i)(x-\sqrt{5}i)$
16 $(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$ 17 $(x-1+2i)(x-1-2i)$
18 $2\left(x-\frac{3+3i}{2}\right)\left(x-\frac{3-3i}{2}\right)$
19 (1) $2+\sqrt{3}$ (2) $a=-4, b=1$
20 (1) $3-2i$ (2) $a=-6, b=13$
21 ⑤ 22 ③ 23 ⑤ 24 ③ 25 ① 26 ④
27 ② 28 ② 29 ④ 30 ④ 31 ④ 32 ①
33 ③ 34 ④ 35 ② 36 ② 37 ④ 38 ④
39 ② 40 ② 41 $x^2-x+4=0$ 42 $x^2-3x+4=0$
43 $x^2-x+3=0$ 44 $x^2-7x+12=0$ 45 ④
46 ① 47 ② 48 ④ 49 ④ 50 ①

연습 [H-J]

01 ⑤ 02 3 03 ⑤ 04 ⑤ 05 ⑤ 06 ②
07 ④ 08 ④ 09 ② 10 ⑤ 11 ⑤ 12 6
13 48 14 ① 15 20 16 7

연습 [K-M]

01 ④ 02 ③ 03 ③ 04 ⑤ 05 ⑤ 06 ③
07 ① 08 7 09 ② 10 ① 11 ③ 12 ④
13 25 14 34

K 이차함수의 그래프

01 일차함수 02 y절편, x절편 03 위로 04 같은
05 ○ 06 × 07 ○ 08 ○ 09 제4사분면
10 제2사분면 11 제3사분면 12 제1사분면
13 해설 참조 14 해설 참조 15 해설 참조
16 해설 참조 17 (1) $x=-1$ (2) $(-1, 3)$
18 (1) $x=2$ (2) $(2, 3)$ 19 $>, >, >$ 20 $<, >, <$
21 ① 22 ④ 23 ③ 24 ② 25 ③ 26 ④
27 5 28 2 29 ⑤ 30 ② 31 0 32 4
33 ⑤ 34 ③

N 여러 가지 방정식의 풀이

01 삼차방정식, 사차방정식 02 조립제법 03 $x^2=X$
04 × 05 × 06 ○ 07 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
08 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 09 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$
10 $x=\pm 2$ 또는 $x=\pm 2i$ 11 (가) 2 (나) $\sqrt{5}$
12 (가) $2x$ (나) $\sqrt{2}$ 13 (가) 3 (나) $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$
14 ② 15 ③ 16 ② 17 ④ 18 ③ 19 ①
20 ① 21 ① 22 ① 23 ④ 24 ① 25 ⑤
26 -3 27 ⑤ 28 ① 29 ④

L 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

01 실근 02 접한다 03 $x=\alpha$, $x=\beta$ 04 ○
05 × 06 1, 2 07 0, 2 08 3 09 -5, 1
10 2 11 1 12 0 13 서로 다른 두 점에서 만난다.
14 한 점에서 만난다. (접한다.) 15 만나지 않는다.
16 -1, 4 17 1 18 -1, 3 19 ② 20 ⑤
21 ② 22 ⑤ 23 ③ 24 ⑤ 25 ② 26 ⑤
27 ① 28 ③ 29 ③ 30 ② 31 ② 32 ④
33 ⑤ 34 ⑤ 35 ② 36 ③ 37 ② 38 ①
39 ④ 40 ① 41 ③ 42 ⑤ 43 ② 44 ①
45 ⑤ 46 ② 47 ④

O 삼차방정식의 근의 성질

01 $-\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $-\frac{d}{a}$
02 $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$
03 켤레복소수 04 × 05 ○ 06 ×
07 (1) 2 (2) 3 (3) -5 08 (1) -4 (2) -7 (3) 2
09 $x^3-4x^2-7x+10=0$ 10 $x^3-x^2+4x-4=0$
11 (가) -2 (나) -4 12 (1) 0 (2) -1 (3) 1
13 (1) 0 (2) 1 (3) 1 14 ③ 15 ⑤ 16 ⑤
17 ② 18 (1) $x^3-x^2-2=0$ (2) $x^3+2x-4=0$
19 (1) $x^3-x^2-4x+4=0$ (2) $x^3+x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}=0$
20 ③ 21 ① 22 ③ 23 ② 24 ① 25 ①
26 ⑤ 27 ③

M 이차함수의 최대 · 최소

01 최댓값, 최솟값 02 꼭짓점 03 완전제곱 04 꼭짓점
05 × 06 ○ 07 ○ 08 최솟값 : -7
09 최댓값 : $\frac{1}{4}$ 10 최솟값 : 3 11 최댓값 : 12
12 (1) 1 (2) -3 13 (1) 11 (2) -5 14 (1) 6 (2) 2
15 (1) 4 (2) -2 16 4 17 10 18 45 m
19 ③ 20 ④ 21 ① 22 ④ 23 ⑤ 24 ②
25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ③ 29 24 30 16
31 ⑤ 32 ② 33 ④ 34 ③ 35 ② 36 ③
37 ② 38 ② 39 ④ 40 ① 41 ③ 42 ①
43 ④ 44 ③ 45 ④ 46 ⑤ 47 ④

연습 [N-O]

01 13 02 ② 03 ① 04 ① 05 ② 06 ③
07 ⑤ 08 ⑤ 09 ③ 10 ④ 11 2 12 ③
13 3 14 ④ 15 ②

P 연립 방정식

01 연립방정식 02 가감법, 대입법 03 부정방정식
04 × 05 ○ 06 × 07 $x=3,\ y=1$
08 해가 없다. 09 해가 무수히 많다. 10 (가) -7 (나) -1
11 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 12 $\begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$
13 $(2, 5), (4, 3)$ 14 $x=\frac{3}{2},\ y=\frac{4}{3}$ 15 ③ 16 ③
17 ③ 18 ③ 19 ④ 20 ③ 21 ⑤ 22 ②
23 ② 24 ② 25 ③ 26 ① 27 ④ 28 ①
29 ① 30 ② 31 ① 32 ③ 33 ③ 34 ③
35 ④ 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ① 40 ①

Q 이차 부등식

01 부등식 02 연립부등식 03 × 04 ○ 05 >
06 > 07 < 08 $3\le 3x\le 6$ 09 $\frac{1}{2}\le\frac{1}{x}\le 1$
10 $-3\le -2x+1\le -1$ 11 $x>-4$ 12 $x<3$
13 $3<x<4$ 14 $x\le 2$ 15 $-2<x<5$
16 $x\le 1$ 또는 $x\ge 4$ 17 $x\ne -1$인 모든 실수
18 $x=\frac{3}{2}$ 19 모든 실수 20 해가 없다.
21 $(x+3)(x-1)\le 0$ 22 $(x+5)(x-2)>0$
23 ② 24 ① 25 ③ 26 ① 27 ② 28 ②
29 ② 30 ⑤ 31 ① 32 ④ 33 ② 34 ④
35 ⑤ 36 ④ 37 ⑤ 38 ④ 39 ④ 40 ③
41 ③ 42 ② 43 ⑤ 44 ⑤ 45 ③ 46 ④
47 ① 48 ③ 49 ② 50 ④ 51 ① 52 ⑤
53 ③ 54 ② 55 ③ 56 ⑤ 57 ③ 58 ③
59 ⑤ 60 ⑤ 61 ④ 62 ③ 63 ③ 64 ⑤
65 ⑤ 66 ① 67 ④ 68 ④ 69 ① 70 ⑤
71 ⑤ 72 ① 73 ③ 74 ④ 75 ② 76 ⑤
77 ② 78 ② 79 ④ 80 ④ 81 ③

R 이차 함수의 그래프와 이차 부등식

01 $a>0,\ D<0$ 02 $p<-\frac{b}{2a},\ f(p)>0$ 03 ○
04 × 05 $x=-2,\ x=1$ 06 $x<-2$ 또는 $x>1$
07 $-2<x<1$ 08 $-1<x<3$ 9 $x<-1$ 또는 $x>3$
10 $k>\frac{9}{4}$ 11 $k\le -1$ 12 $k<-\frac{1}{8}$ 13 $k\ge 3$
14 $4\le m<5$ 15 ⑤ 16 ② 17 ③ 18 ①
19 ① 20 ③ 21 ③ 22 ④ 23 ② 24 ④
25 ② 26 ① 27 ④ 28 ③ 29 ② 30 ②
31 ④ 32 ② 33 ④ 34 ④ 35 ②

연습 [P–R]

01 ② 02 ④ 03 ④ 04 ⑤ 05 ④ 06 ②
07 10 08 ⑤ 09 ⑤ 10 ② 11 4 12 ②
13 ① 14 ③ 15 ④

Ⅱ 대단원 TEST [F–R]

01 ① 02 ① 03 ④ 04 ③ 05 ① 06 ④
07 ② 08 ④ 09 ② 10 ③ 11 ④ 12 ①
13 ⑤ 14 ④ 15 7 16 24 17 ② 18 ⑤
19 ① 20 9 21 ③ 22 ⑤ 23 ③ 24 ③
25 ⑤ 26 ③ 27 ① 28 3 29 17 30 ③
31 ②

Ⅲ 도형의 방정식

S 평면좌표

01 $|x_2-x_1|$ (또는 $|x_1-x_2|$) 02 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
03 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$ 04 $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$
05 × 06 ○ 07 ○ 08 ×
09 (1) 4 (2) 8 (3) 6 (4) 3
10 (1) R(5) 또는 R(-1) (2) R(2) 또는 R(-8)
(3) R(6) 또는 R(-6)
11 (1) $\sqrt{26}$ (2) $2\sqrt{10}$ (3) 5
12 (1) ① P(5) ② Q(3) ③ M(4)
(2) ① P(1) ② Q(-1) ③ M(0)
(3) ① P(0) ② Q(9) (4) ① P$\left(\frac{1}{2}\right)$ ② Q$\left(-\frac{11}{2}\right)$
13 (1) P$(2, -1)$ (2) Q$(9, -8)$ (3) M$\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
14 ⑤ 15 ③ 16 ② 17 ⑤ 18 ③ 19 ②
20 ③ 21 ③ 22 ① 23 -1 24 ④
25 P$(-1, 0)$ 26 ② 27 ⑤ 28 ③ 29 ②
30 ③ 31 ② 32 ④ 33 $(-3, -2)$ 34 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$
35 ④ 36 직각삼각형 37 ③ 38 ⑤ 39 ②
40 ② 41 ① 42 ③ 43 ② 44 ⑤ 45 ③
46 ④ 47 ③ 48 ③ 49 ② 50 ④ 51 ③
52 ⑤

T 평면좌표의 활용

01 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

02 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

03 평행사변형　04 ×　05 ×　06 ○

07 ○　08 (1) $D\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ (2) $G(1, 3)$

09 (1) $G\left(\frac{1}{3}, -1\right)$ (2) $G(2, 2)$ (3) $G(1, -1)$

10 (1) $\sqrt{10}$ (2) 7

11 (1) $\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right)$ (2) $\left(\frac{5+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right)$ (3) $a=4$, $b=13$

12 $D(-4, 2)$

13 (1) $2x^2-4x+2y^2-8y+50$ (2) $a=1$, $b=2$, $c=40$
(3) 40 (4) $P(1, 2)$

14 ④　15 ①　16 $B(-9, 2)$, $C(3, 0)$　17 ②

18 ③　19 ④　20 ①　21 ③　22 ②　23 ②

24 ②　25 ②　26 ④　27 ⑤　28 6, 14

29 ③　30 5　31 ④　32 ④　33 ③　34 ②

35 ④　36 ④

U 직선의 방정식

01 $ax+by+c=0$　02 평행　03 일치　04 0

05 ○　06 ×　07 ○　08 ×

09 (1) $y=2x+1$ (2) $y=3x+9$ (3) $y=2x+1$
(4) $y=-2x-3$ (5) $y=3$

10 (1) $y=-x+2$ (2) $y=\frac{1}{2}x+4$ (3) $x=0$

11 (1) $y=3x+6$ (2) $y=\frac{3}{7}x-3$ (3) $y=-\frac{2}{3}x+4$

12 (1) (기울기)>0, (y절편)<0 (2) 제2사분면

13 ①, ③　14 ①, ③　15 $2x-y=0$　16 ⑤

17 ②　18 $y=2x+1$　19 $y=-2x+9$　20 ④

21 ①　22 ①　23 ④　24 ③　25 ⑤　26 ⑤

27 ①　28 ④　29 $a=4$, $b=2$　30 ③　31 ③

32 ④　33 ①　34 ④　35 ①　36 ②　37 ③

38 ③　39 ④　40 ④　41 ①　42 $y=3x-24$

43 ②　44 ②　45 ⑤　46 ④　47 ①　48 ②

49 ①　50 ①　51 ④　52 ②　53 ④　54 ①

V 점과 직선 사이의 거리

01 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　02 $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　03 직선

04 AB, $\frac{1}{2}ah$　05 ×　06 ○　07 ×　08 ○

09 (1) $\sqrt{5}$ (2) $2\sqrt{13}$ (3) $\sqrt{5}$ (4) $2\sqrt{10}$

10 (1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{6}{5}$ (3) 1　11 (1) 3 (2) 9

12 (1) $\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{13}$ (4) 2

13 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $x-y-4=0$ (3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (4) 3

14 ②　15 ④　16 ②　17 ②　18 ④　19 ②

20 ②　21 ③　22 ④　23 ④　24 ③　25 ④

연습 [S–V]

01 ①　02 ⑤　03 ④　04 2　05 ③　06 ⑤

07 ③　08 $P(1, 1)$　09 3　10 ⑤　11 ④

12 2　13 ④　14 ③　15 3

W 원의 방정식

01 $x^2+y^2=r^2$

02 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$, $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

03 a, a　04 ×　05 ○　06 ○

07 (1) $x^2+y^2=1$ (2) $x^2+(y+1)^2=4$
(3) $(x-3)^2+y^2=1$ (4) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$
(5) $(x+1)^2+(y+3)^2=16$

08 (1) 중심의 좌표 : $(0, 0)$, 반지름의 길이 : 2
(2) 중심의 좌표 : $(2, 0)$, 반지름의 길이 : 3
(3) 중심의 좌표 : $(0, -1)$, 반지름의 길이 : 5
(4) 중심의 좌표 : $(2, -1)$, 반지름의 길이 : 4

09 (1) 중심의 좌표 : $(-2, 0)$, 반지름의 길이 : 2
(2) 중심의 좌표 : $(3, 1)$, 반지름의 길이 : 2

10 (1) $a<5$ (2) $a>2$ (3) $a<4$ (4) $a<4$

11 (1) $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ (2) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

12 (1) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ (2) $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

13 $(x+3)^2+(y+3)^2=9$　14 ③　15 ②　16 $\sqrt{10}$

17 ④　18 ⑤　19 ③　20 ④　21 ②　22 ④

23 ②　24 ④　25 ②　26 ③　27 ④　28 5

29 ①　30 ③　31 ④　32 ③　33 ④　34 ①

35 ③　36 $(x+3)^2+(y+4)^2=9$　37 ④　38 ②

39 ②　40 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$　41 ④　42 ③

43 ②　44 ②　45 ④　46 $(x-2)^2+(y+2)^2=2$

47 ②　48 ⑤　49 $x^2+y^2-10y-11=0$

X 원과 직선의 위치 관계

01 판별식 02 실근 03 $d<r$, $d>r$ 04 ×

05 ○ 06 ×

07 (1) $x^2+y^2+x+3y-4=0$ (2) $x^2+y^2-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}y-\frac{6}{5}=0$

08 (1) $3x+4y-6=0$ (2) $x+2y-5=0$

09 (1) 2 (2) 1 (3) 0

10 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다. (접한다.) (3) 만나지 않는다.

11 (1) 한 점에서 만난다. (접한다.)

(2) 서로 다른 두 점에서 만난다. (3) 만나지 않는다.

12 ④ 13 ① 14 ③ 15 π 16 ① 17 ④

18 5 19 $y=-3x+6$ 20 ③ 21 ③ 22 ②

23 ③ 24 ① 25 ② 26 $0<m<\frac{4}{3}$ 27 ①

28 ① 29 ③ 30 10 31 ① 32 $-2<m<2$

33 ② 34 $k<-8$ 또는 $k>0$ 35 ⑤ 36 ④

37 ③ 38 ⑤ 39 ③ 40 P$(-2, 0)$ 또는 P$(6, 0)$

41 ③ 42 ④ 43 ④ 44 ③ 45 ③ 46 ⑤

47 48

Y 원의 접선의 방정식

01 반지름 02 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

03 $y-y_1=m(x-x_1)$, 수직 04 $x_1x+y_1y=r^2$

05 × 06 ○ 07 × 08 ○

09 (1) $y=2x\pm 3\sqrt{5}$ (2) $y=x\pm 2$ (3) $y=-2x\pm\sqrt{5}$

(4) $y=x\pm 2\sqrt{2}$ (5) $y=-2x\pm 5$ (6) $y=-3x\pm 4\sqrt{5}$

(7) $y=-4x\pm 5\sqrt{17}$

10 (1) $3x-y+10=0$ (2) $4x+3y-25=0$

(3) $2x+3y+13=0$ (4) $x-\sqrt{3}y+4=0$

(5) $\sqrt{7}x+y-8=0$ (6) $2x+\sqrt{5}y+9=0$

(7) $\sqrt{2}x-y-6=0$

11 $y=3x+5$

12 (1) $y=mx+5$ (2) $m=\pm\frac{4}{3}$ (3) $y=\pm\frac{4}{3}x+5$

13 ③ 14 ① 15 $y=3x\pm 10$ 16 ④ 17 ③

18 ① 19 ② 20 ⑤ 21 $\sqrt{7}$ 22 ③ 23 ②

24 7

연습 [X−Y]

01 ③ 02 ⑤ 03 25 04 ⑤ 05 ④ 06 ⑤

07 ③ 08 $x^2+y^2=1$ 09 ⑤ 10 ④ 11 ②

12 200 13 ② 14 ④ 15 1

Z 원과 직선의 위치 관계

01 $f(x-a, y-b)=0$ 02 $y=x$ 03 ○ 04 ×

05 (1) $(1, -2)$ (2) $(4, 0)$ (3) $(0, 0)$ (4) $(-2, -6)$

06 (1) $(5, -3)$ (2) $(4, 1)$ (3) $(8, -5)$ (4) $(12, 1)$

07 (1) $y=x+5$ (2) $(x+3)^2+(y-4)^2=4$ 08 -1

09 x축 : $(2, -3)$, y축 : $(-2, 3)$, 원점 : $(-2, -3)$,

직선 $y=x$: $(3, 2)$

10 (1) x축 : $2x-y+3=0$, y축 : $2x-y-3=0$,

원점 : $2x+y-3=0$, 직선 $y=x$: $x+2y+3=0$

(2) x축 : $(x-2)^2+(y+1)^2=9$,

y축 : $(x+2)^2+(y-1)^2=9$,

원점 : $(x+2)^2+(y+1)^2=9$,

직선 $y=x$: $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

11 (1) $(-1, -2)$ (2) $(3, -4)$ 12 B$(1, 4)$ 13 $2\sqrt{13}$

14 ① 15 ① 16 ② 17 3 18 $y=-3x+15$

19 ② 20 ⑤ 21 ① 22 ① 23 ① 24 ③

25 ① 26 ① 27 $\frac{19}{4}$ 28 ① 29 ③ 30 ③

31 $(0, 0)$ 32 ② 33 ② 34 ③ 35 ①

36 ② 37 ⑤ 38 ① 39 ① 40 6 41 ①

42 ④ 43 ① 44 ② 45 ③ 46 ④ 47 ②

48 P$(-4, -4)$ 49 ② 50 ② 51 ④ 52 ③

53 ② 54 $(x+2)^2+(y+1)^2=9$ 55 ① 56 ④

57 ④ 58 ③ 59 ② 60 $14\sqrt{2}$

연습 [Z]

01 ③ 02 ③ 03 ② 04 ⑤ 05 ③ 06 ②

07 3 08 10 09 ② 10 ③ 11 3 12 ⑤

13 ② 14 -6 15 10 16 P$(5, 0)$

Ⅲ 대단원 TEST [S−Z]

01 ③ 02 14 03 ① 04 ⑤ 05 ⑤ 06 ②

07 ④ 08 ④ 09 ④ 10 ④ 11 ① 12 150

13 ② 14 ④ 15 4 16 ② 17 ③ 18 ③

19 ④ 20 ③ 21 ② 22 ② 23 ② 24 ⑤

25 ① 26 ② 27 ③ 28 ③ 29 ① 30 3

31 3

I 다항식

Simple A 다항식의 덧셈과 뺄셈

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 8~9

01 답 내림차순 정리

02 답 낮은, 높은

03 답 같은 항

04 답 $A+(B+C)$

05 답 $-B$

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ×

09 답 ×

10 답 ×

11 답 $2x^2-x+3$

12 답 $2x^3+x^2-x+3$

13 답 $1+3y+y^2$

14 답 $-4+3y+y^2-y^3$

15 답 $x^3+yx^2+y^3x+y^2+4$

16 답 $xy^3+y^2+x^2y+x^3+4$

17 답 $x^2-(3y+5)x+2y^2+4y-8$

18 답 $-x+6$

19 답 $3a+2b$

20 답 $a+2b-2c$

21 답 $3x^2+3x$

22 답 $-x^2+x+6$

23 답 $-3x^2+2x$

24 답 $2x^3-x^2-2x+2$

25 답 $6x^2-5x$

유형 연습 [+내신 유형]

문제편 pp. 10~11

26 답 ④

각 선택지의 바른 내림차순 정리는 다음과 같다.

① $2x^3-2x^2+3x+2$　② $-x^4-x^3+3x^2+8$

③ $2x^3+3x-1$　⑤ $x^4-x^3+3x^2+2$

27 답 ③, ①, ②, ④

주어진 다항식을 y에 대하여 오름차순으로 정리하면

$4x^3+2x^2y+3xy^2-2y^3$이 된다.

28 답 $a=2$, $b=1$

주어진 다항식을 x에 대하여 오름차순으로 정리하였더니

$4y^2-x^by^3+2x^a-3x^3$이 되었으므로 $-x^by^3$은 1차항이 되어야 하고, $2x^a$은 2차항이 되어야 한다.

29 답 ⑤

$(x^2-5xy-y^2)+(2x^2+3xy+y^2)=3x^2-2xy$

30 답 $8x^2+5x+3$

$2B=2(x^2-3x+5)=2x^2-6x+10$

$3C=3(x^2+3x-2)=3x^2+9x-6$

$\therefore A+2B+3C$

$=(3x^2+2x-1)+(2x^2-6x+10)+(3x^2+9x-6)$

$=8x^2+5x+3$

31 답 ②

$A+2B=(4x^2+y^2)+2(2xy+y^2)$

$=4x^2+y^2+4xy+2y^2$

$=4x^2+4xy+3y^2$

32 답 $2x^2+7x-17$

$2A=2(x^2+2x-1)=2x^2+4x-2$

$B+2C=(2x^2-3x+3)+2(-x^2+2x-4)$

$=2x^2-3x+3-2x^2+4x-8$

$=x-5$

$\therefore 2A+3(B+2C)=(2x^2+4x-2)+3(x-5)$

$=2x^2+4x-2+3x-15$

$=2x^2+7x-17$

TIP

다항식이 문자로 복잡하게 주어졌을 때는 정리한 후 식들을 대입해야 한다. 이 문제의 경우 식을 바로 대입하면 매우 복잡해지기 때문에 식을 먼저 정리해야 한다.

33 답 ①

$(2x^2-3xy+y^2)-(x^2-3xy+3y^2)$

$=2x^2-3xy+y^2-x^2+3xy-3y^2$

$=x^2-2y^2$

34 답 $2y^2+13y-18$

$3A=3(2y^2+3y-4)=6y^2+9y-12$

$2B=2(2y^2-2y+3)=4y^2-4y+6$

$\therefore 3A-2B=(6y^2+9y-12)-(4y^2-4y+6)$

$=2y^2+13y-18$

35 답 $-7x^3+20x^2-4x+14$

$B-2C=(x^3-2x^2+3x-1)-2(-2x^3+4x^2+2)$
$=x^3-2x^2+3x-1+4x^3-8x^2-4$
$=5x^3-10x^2+3x-5$

$\therefore A-2(B-2C)$
$=(3x^3+2x+4)-2(5x^3-10x^2+3x-5)$
$=3x^3+2x+4-10x^3+20x^2-6x+10$
$=-7x^3+20x^2-4x+14$

36 답 ⑤

$2A-B=x^2+2x-4$이므로

$B=2A-(x^2+2x-4)$
$=2(2x^2+2x-3)-x^2-2x+4$
$=4x^2+4x-6-x^2-2x+4$
$=3x^2+2x-2$

37 답 ②

$B+C=(-x^2+3xy+2y^2)+(3x^2-2xy+4y^2)$
$=-x^2+3xy+2y^2+3x^2-2xy+4y^2$
$=2x^2+xy+6y^2$

$\therefore A-(B+C)=(2x^2+3xy-2y^2)-(2x^2+xy+6y^2)$
$=2x^2+3xy-2y^2-2x^2-xy-6y^2$
$=2xy-8y^2$

38 답 $9x^2-13x+1$

$3A+B-2(A-B)+B$를 정리하면

$3A+B-2(A-B)+B=3A+B-2A+2B+B$
$=A+4B$

이므로 $A=x^2+3x-3$, $B=2x^2-4x+1$을 대입하면

$A+4B=(x^2+3x-3)+4(2x^2-4x+1)$
$=x^2+3x-3+8x^2-16x+4$
$=9x^2-13x+1$

TIP

이 문제처럼 다항식이 A, B와 같이 치환되어 있을 때 다항식을 대입해서 푸는 것보다 주어진 A, B의 식을 먼저 정리한 후 다항식을 대입하여 푸는 게 빠르다.

39 답 ②

$2A-B-(A+3B)=2A-B-A-3B$
$=A-4B$

$4B=4(-2x^3+x^2+2x-5)$
$=-8x^3+4x^2+8x-20$

$\therefore A-4B=(x^3-2x^2+3x-4)-(-8x^3+4x^2+8x-20)$
$=x^3-2x^2+3x-4+8x^3-4x^2-8x+20$
$=9x^3-6x^2-5x+16$

40 답 ③

$2A-(B+A)+2B=2A-B-A+2B$
$=A+B$

즉, $A+B=2x^2-4x+5$이므로

$B=2x^2-4x+5-A$
$=2x^2-4x+5-(x^2+3x-4)$
$=2x^2-4x+5-x^2-3x+4$
$=x^2-7x+9$

Simple B 다항식의 곱셈과 나눗셈

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 12~13

01 답 a^7

02 답 a^4

03 답 ay

04 답 분배법칙

05 답 상수, 일차식

06 답 ×

07 답 ×

08 답 ○

09 답 ○

10 답 ○

11 답 a^5

12 답 a^6b^3

13 답 $a^4b+ab^2-ab^3$

14 답 x^3-x-6

15 답 $2a^3-a^2b-3ab^2-b^3$

16 답 $8x^3+12x^2+6x+1$

17 답 $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

18 답 x^4-x^2+4x-4

19 답 x^2-4xz

20 답 $2x^2y-4y^2$

21 답 5, 9

$$\begin{array}{r}
2x+\boxed{5}\\
x-1\,\big)\overline{\,2x^2+3x+4}\\
\underline{2x^2-2x\quad\;\;}\\
5x+4\\
\underline{5x-5}\\
\boxed{9}
\end{array}$$

22 답 2, x, $4x$, $-5x$

$$\begin{array}{r}
x+\boxed{2}\\
x^2+2x-1\,\big)\overline{\,x^3+4x^2-\;2x\;+1}\\
\underline{x^3+2x^2-\;\boxed{x}\qquad}\\
2x^2-\;\;x\;+1\\
\underline{2x^2+\boxed{4x}-2}\\
\boxed{-5x}+3
\end{array}$$

23 답 몫 : $2x^2+x+3$, 나머지 : 9

24 답 Q : x, R : $-2x+1$

$x^3-2x^2+1=(x^2-2x+2)x+(-2x+1)$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 14~15

25 답 ⑤

⑤ $(a^3b^2)^3=a^9b^6$

26 답 ②

$6x^2y^4\div(3x^4y^3)\times(-x^5y^7)=\dfrac{2y}{x^2}\times(-x^5y^7)=-2x^3y^8$

27 답 1

$(x^2y)^3\times(2x^a)^4=(x^6y^3)\times(2^4x^{4a})=2^4x^{4a+6}y^3$

x의 차수가 10이므로

$4a+6=10 \qquad \therefore a=1$

28 답 ①

$(x^2+3)(y-2)=x^2(y-2)+3(y-2)$

$=x^2y-2x^2+3y-6$

29 답 ⑤

$(x+3)(x-1)=4$를 전개하여 정리하면

$x^2+2x-3=4$에서 $x^2+2x=7$

30 답 ③

$(x+3y-3)(2x-5y+3)$의 전개식에서 xy항은

$x\cdot(-5y)+3y\cdot2x=xy$

따라서 xy의 계수는 1이다.

> **TIP**
> 다항식의 곱으로 된 것을 모두 전개하면 어떤 항의 계수든 알 수 있지만 특정한 항의 계수만을 알려고 할 때는 효율적이지 못하다. 곱하는 다항식에서 특정한 항의 계수가 나오는 경우만 곱하여 더하면 간편하고 정확하게 구할 수 있다.

31 답 ①

$(4x^2-4x+1)(x^3+3x^2+3x+1)$의 전개식에서 x^2항은

$4x^2\times1+(-4x)\cdot3x+1\cdot3x^2=-5x^2$

따라서 x^2의 계수는 -5이다.

32 답 ③

$(x^2-4x+5)(3x^2+3x+a)$의 전개식에서 x^2항은

$x^2\cdot a+(-4x)\cdot3x+5\cdot3x^2=(a+3)x^2$

이때, x^2의 계수가 6이므로 $a+3=6$

$\therefore a=3$

33 답 ④

$(1+x+x^2+\cdots+x^5)^2$

$=(1+x+x^2+\cdots+x^5)\times(1+x+x^2+\cdots+x^5)$

의 전개식에서 x^2항은

$1\cdot x^2+x\cdot x+x^2\cdot1=3x^2$

따라서 x^2의 계수는 3이다.

> **TIP**
> x^3항 이후는 전개해도 x^2항이 나올 수 없으니까 간단히 $(1+x+x^2)^2$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하는 문제로 바꾸어 생각해도 된다.

34 답 ①

$(6x^2yz-12xyz^2)\div(3xy)=2xz-4z^2$

35 답 ①

$$\begin{array}{r}
\overset{a}{3}x\;+4\\
x-2\,\big)\overline{\,3x^2-2x-4}\\
\underline{3x^2\underset{b}{-6}x\qquad}\\
c\to\;4x-4\\
\underline{4x-8}\leftarrow d\\
4\leftarrow e
\end{array}$$

$a=3$, $b=-6$, $c=4$, $d=-8$, $e=4$이므로

$a+b+c+d+e=-3$

36 답 29

$$\begin{array}{r}
3x^2+4x+6\\
x-4\,\big)\overline{\,3x^3-\;8x^2-10x-5}\\
\underline{3x^3-12x^2\qquad\qquad\;\;}\\
4x^2-10x\qquad\\
\underline{4x^2-16x\qquad}\\
6x-5\\
\underline{6x-24}\\
19
\end{array}$$

몫 $Q(x)=3x^2+4x+6$이고 나머지 $R=19$이다.

$\therefore Q(-2)+R=10+19=29$

37 답 ②

$2x^3+x^2-7x+7=B(x^2+x-3)+4$이므로

$B(x^2+x-3)=2x^3+x^2-7x+3$

$B=(2x^3+x^2-7x+3)\div(x^2+x-3)$

$$\begin{array}{r}
2x-1 \\
x^2+x-3\,\overline{)\,2x^3+x^2-7x+3} \\
\underline{2x^3+2x^2-6x} \\
-x^2-x+3 \\
\underline{-x^2-x+3} \\
0
\end{array}$$

$\therefore B=2x-1$

38 답 ⑤

$P(x)=(x+3)(2x+3)-2$이므로

$P(x)=2x^2+9x+7$

$\therefore P(-2)=8-18+7=-3$

39 답 ⑤

$P(x)=(x^2+3)(2x-1)+3x-1=2x^3-x^2+9x-4$

$$\begin{array}{r}
2x^2-7x+30 \\
x+3\,\overline{)\,2x^3-x^2+9x-4} \\
\underline{2x^3+6x^2} \\
-7x^2+9x \\
\underline{-7x^2-21x} \\
30x-4 \\
\underline{30x+90} \\
-94
\end{array}$$

따라서 나머지는 -94이다.

TIP

뒤에서 배우는 나머지정리를 이용하면 $P(-3)$을 구하면 된다는 것을 알 수 있을 것이다. 나머지정리를 배우기 전에 계산되는 과정들에서 나머지정리까지 순차적으로 배워나가자.

40 답 ②

$P(x)=(2x-1)Q(x)+R$

$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2Q(x)+R$

다항식 $P(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫은 $2Q(x)$이고 나머지는 R이다.

41 답 ⑤

$P(x)=\left(x-\frac{1}{4}\right)Q(x)+R$

$=\frac{1}{4}(4x-1)Q(x)+R$

$=(4x-1)\cdot\frac{1}{4}Q(x)+R$

따라서 다항식 $P(x)$를 $4x-1$로 나눈 몫은 $\frac{1}{4}Q(x)$이고, 나머지는 R이므로 이들의 합은 $\frac{1}{4}Q(x)+R$

Simple C 다항식의 곱셈 공식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 16~17

01 답 a^2-b^2

02 답 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

03 답 $2ab$

04 답 $b-c$

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ○

08 답 $9-x^2$

09 답 $2x^2+5x+3$

10 답 $x^3+6x^2+12x+8$

11 답 $27x^3-54x^2+36x-8$

12 답 x^3-1

13 답 $8x^3+1$

14 답 $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$

15 답 $a^3-b^3+c^3+3abc$

16 답 $x^4+x^2y^2+y^4$

17 답 4

18 답 28

19 답 14

20 답 6

21 답 11

22 답 12

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 18~21

23 답 ④

$(k-1)(k+2)(k+3)$을 전개할 때 곱셈 공식

$(x+a)(x+b)(x+c)$

$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

가 적합하다.

24 답 ④

$(2a+3)(3a-4)$

$=2\cdot 3a^2+\{2\cdot(-4)+3\cdot 3\}a+3\cdot(-4)$

$=6a^2+a-12$

25 답 ④

$(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})(a^2+2)$

$=(a^2-2)(a^2+2)=a^4-4$

26 답 ⑤

$(a-2)(a+2)(a^2+4)(a^4+16)$

$=(a^2-4)(a^2+4)(a^4+16)$

$=(a^4-16)(a^4+16)=a^8-256$

$a^8=1000$이니까 $a^8-256=744$

27 답 ①

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$에서

x의 계수가 5이므로 $a+b=5$

상수항이 4이므로 $ab=4$

위 조건을 만족하는 것은 $a=1$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=1$이다.

28 답 ①

$(x+2y+z)(x^2+4y^2+z^2-2xy-2yz-zx)$

$=(x+2y+z)\{x^2+(2y)^2+z^2-x\cdot 2y-2y\cdot z-z\cdot x\}$

$=x^3+(2y)^3+z^3-3\cdot x\cdot 2y\cdot z$

$=x^3+8y^3+z^3-6xyz$

29 답 ③

$(x-2)(x^2+2x+4)=(x-2)\{x^2+2\cdot x+(-2)^2\}$을 전개하는데 곱셈 공식 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$이 적합하다.

30 답 342

$(a-1)(a^2+a+1)\ (a+1)(a^2-a+1)$

$=(a^3-1)(a^3+1)$

$=a^6-1$

$a^2=7$이므로 $a^6-1=(a^2)^3-1=7^3-1=342$

31 답 ①

$(ax+b)^3=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$에서

x의 계수 $3ab^2=144$이므로 $ab^2=48$이고 상수항 $b^3=-64$이므로 $b=-4$

$48=ab^2=a\cdot(-4)^2=16a$에서 $a=3$

$\therefore\ a+b=3+(-4)=-1$

32 답 $x^4-4x^3+2x^2+4x-3$

$(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)$에서 x^2-2x가 공통이므로

$x^2-2x=X$라 하면

$(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)=(X-3)(X+1)$

$=X^2-2X-3$

$x^2-2x=X$를 대입하여 전개하면

(주어진 식)$=(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$

$=x^4-4x^3+4x^2-2x^2+4x-3$

$=x^4-4x^3+2x^2+4x-3$

33 답 ①

$(x+3)(x+2)(x-1)(x-6)$

$=\{(x+3)(x+2)\}\{(x-1)(x-6)\}$

$=(x^2+5x+6)(x^2-7x+6)$

이때 x^2+6이 공통이므로 $x^2+6=X$라 하면

$(x^2+5x+6)(x^2-7x+6)=(X+5x)(X-7x)$

$=X^2-2xX-35x^2$

$x^2+6=X$를 대입하여 전개하면

(주어진 식)$=(x^2+6)^2-2x(x^2+6)-35x^2$

$=x^4+12x^2+36-2x^3-12x-35x^2$

$=x^4-2x^3-23x^2-12x+36$

34 답 ①

$x(x+2)(x-1)(x+3)$

$=\{x(x+2)\}(x-1)\{(x+3)\}$

$=(x^2+2x)(x^2+2x-3)$

이때 x^2+2x가 공통이므로 $x^2+2x=X$라 하면

$(x^2+2x)(x^2+2x-3)=X(X-3)$

또한 $x^2+2x-5=0$이므로

$X-5=0 \qquad \therefore\ X=5$

$\therefore\ X(X-3)=5\times(5-3)=10$

따라서 주어진 식의 값은 10이다.

35 답 ⑤

$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$이므로

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

$=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$

이때 $x^2=X$라 하면

$(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$

$=(X^2+X+1)(X^2-X+1)$

$=X^4+X^2+1$

$=x^8+x^4+1$ ← $X=x^2$을 대입

$x^4=6$이므로 $(x^4)^2+x^4+1=6^2+6+1=43$

36 답 ③

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$19=25-2ab$이므로 $ab=3$

$\therefore\ a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=5\times(19-3)=80$

심플 정리

[곱셈 공식의 변형]

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(4) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

37 답 ②

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=6^2-2\times4=28$

$\therefore x^2+xy+y^2=28+4=32$

다른 풀이

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$

$=36-4=32$

38 답 ①

$2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$에서 $a+b=6$이므로 $ab=3$

$a>b$이므로

$a-b=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$

$=\sqrt{6^2-4\times3}$

$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

39 답 ②

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

에서 $a+b+c=5$, $ab+bc+ca=6$,

$a^3+b^3+c^3=36$이므로

$5(a^2+b^2+c^2-6)=36-3abc$ ⋯ ㉠

이때,

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=5^2-2\times6=13$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$5\times(13-6)=36-3abc$

$35=36-3abc$

$3abc=1$

$\therefore abc=\frac{1}{3}$

40 답 ④

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

에서 $a+b+c=4$, $a^2+b^2+c^2=12$,

$a^3+b^3+c^3=31$이므로

$4(12-ab-bc-ca)=31-3abc$ ⋯ ㉠

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$12=4^2-2(ab+bc+ca)$이므로

$ab+bc+ca=2$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$4\times(12-2)=31-3abc$이므로

$abc=-3$ ⋯ ㉢

$\therefore \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=-\frac{4}{3}$ ($\because$ ㉢)

TIP

문제 중 $a^3+b^3+c^3$이 나오면 대부분

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

를 이용하게 된다.

구하는 식을 변형해서 어떤 식의 값이 필요한지 알 수 있다.

41 답 ①

$2x^2+5x+2=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 $2x$로 나누면

$x+\frac{5}{2}+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2=\frac{17}{4}$

42 답 ③

$x^4-7x^2+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-7+\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=7$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$7=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=3\ (\because x>0)$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\times3=27-9=18$

43 답 ⑤

$x+\frac{1}{x}=-3$에서 $x\neq0$이므로 양변에 x를 곱하면

$x^2+3x+1=0$ ⋯ ㉠

$\therefore x^4+3x^3-2x^2-9x+7$

$=x^2(x^2+3x+1)-3(x^2+3x+1)+10$

$=10$ ($\because$ ㉠)

44 답 ①

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=5^2-2\times2=21$

이므로

$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

$=2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$

$=2\times21+2\times2=46$

45 답 ⑤

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$이므로

$(3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)$

$=(3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)$

$=(3^4-2^4)(3^4+2^4)(3^8+2^8)$

$=(3^8-2^8)(3^8+2^8)=3^{16}-2^{16}$

46 답 ④

$100=x$라 놓으면

$(x+2)^2+(2x-1)(2x+1)$

$=x^2+4x+4+4x^2-1$

$=5x^2+4x+3$

$=5\times100^2+4\times100+3$

$=50403$

47 답 ③

$5(4^2+1)(4^4+1)$에서 $5=4+1$이므로 $4-1=3$을 곱하면

$(4-1)(4+1)(4^2+1)(4^4+1)$

$=(4^2-1)(4^2+1)(4^4+1)$

$=(4^4-1)(4^4+1)$

$=4^8-1$

이므로

$5(4^2+1)(4^4+1)=\dfrac{4^8-1}{3}$

따라서 $k=3$이다.

TIP

문제의 모양을 보면 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$을 이용하면 풀릴 것이라는 생각이 들 것이다.
그런데 $a-b$가 되는 것을 찾을 수 없다. 없으면 만들면 된다.
$5=4+1$로 만들 수 있다면 $4-1$이 있으면 된다. 즉,
$\dfrac{4-1}{3}=1$이므로 $k=3$임을 알 수 있다.

48 답 ①

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하자.

주어진 직육면체의 겉넓이가 16이므로

$2(ab+bc+ca)=16 \Rightarrow ab+bc+ca=8$

대각선의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=2\sqrt{5} \Rightarrow a^2+b^2+c^2=20$

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이므로 $a+b+c$의 값만 구하면 된다.

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$20=(a+b+c)^2-2\times8$

$(a+b+c)^2=36$

$\therefore a+b+c=6$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4\times6=24$이다.

TIP

직육면체는 곱셈 공식을 활용할 수 있는 요소들이 많다.
모서리의 길이는 $a+b+c$, 겉넓이는 $ab+bc+ca$,
대각선의 길이는 $a^2+b^2+c^2$으로 표현할 수 있기 때문이다.
이들의 관계를 잘 알아 두자.

49 답 ③

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하자.

모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=24 \Rightarrow a+b+c=6$

직육면체의 겉넓이는

$2(ab+bc+ca)=20 \Rightarrow ab+bc+ca=10$

모든 모서리의 길이의 세제곱의 합은

$4(a^3+b^3+c^3)=204 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=51$

직육면체의 부피는 abc이므로 abc의 값을 구하자.

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$\qquad=6^2-2\times10=16$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$이므로

구한 값들을 대입하면

$51-3abc=6\times(16-10)$

$\therefore abc=5$

50 답 ②

원에 내접하는 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 a, b라 하면 $ab=14$

또한 원의 넓이가 29π이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{29}$이다.

그리고 직사각형의 대각선의 길이와 원의 지름의 길이가 같으므로

$\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{29} \Rightarrow a^2+b^2=116$

이때 직사각형의 둘레의 길이는 $2(a+b)$이므로 $a+b$의 값을 구하자.

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=116+28=144$에서

$a+b=12$

따라서 직사각형의 둘레의 길이는 $2\times12=24$이다.

51 답 ④

$a+b+c=\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c}$에서

$(a+b+c)(-a+b+c)=(a-b+c)(a+b-c)$

$\{a+(b+c)\}\{-a+(b+c)\}$

$\qquad=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$

$-a^2+(b+c)^2=a^2-(b-c)^2$

$(b+c)^2+(b-c)^2=2a^2$

$b^2+2bc+c^2+b^2-2bc+c^2=2a^2$

$2b^2+2c^2=2a^2$

$\therefore b^2+c^2=a^2$

따라서 이 삼각형은 a가 빗변인 직각삼각형이다.

답_008032_심플자이고등(A~E).indd 14 2017. 9. 15. 오후 5:39

연습 문제 [A~C] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 22~23

01 답 ④

① $3x^2+4x^3-2x+8$

⇨ $4x^3+3x^2-2x+8$

② $3xy^3-2x^2y+4x-2$

⇨ $-2x^2y+(3y^3+4)x-2$

③ $2y^3+3xy^2-4y+3$

⇨ $3xy^2+2y^3-4y+3$

⑤ $-4+x-4x^2+3x^3$

⇨ $3x^3-4x^2+x-4$

02 답 ①

$X+A=B$를 변형하면 $X=B-A$

$\therefore\ X=(2x+5)-(2x^2+3x-4)$

$=-2x^2-x+9$

03 답 ①

$2A-B=2(2x^2-x+1)-(x^2-2x-1)$

$=4x^2-2x+2-x^2+2x+1$

$=3x^2+3$

04 답 ③

> 두 자연수 a, b에 대하여 $(7^3\times9)^3=7^a\times3^b$이 성립할 때, $a+b$의 값은?
>
> 지수법칙을 이용하면 해결되겠지?
>
> ① 11 ② 13 ③ 15
> ④ 17 ⑤ 19

1st $(ab)^n=a^nb^n$을 이용하여 식을 정리하자.

$(7^3\times9)^3=(7^3)^3\times9^3$

2nd $(a^m)^n=a^{mn}$임을 이용하자.

$=7^9\times(3^2)^3$

$=7^9\times3^{2\times3}$

$=7^9\times3^6$

따라서 $a=9$, $b=6$이므로 $a+b=9+6=15$

[지수법칙]

a, b가 실수이고, m, n이 자연수일 때,

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n=a^{mn}$

(3) $(ab)^n=a^nb^n$

(4) $a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ $(a\neq0)$

05 답 ⑤

$(2x-3y)(3x+2y+2)$의 전개식에서 xy항은

(x항)$\times$(y항)+(y항)$\times$(x항)

즉, $2x\times2y+(-3y)\times3x=-5x$

따라서 xy항의 계수는 -5이다.

06 답 ④

$$\begin{array}{r}
\overset{a}{3}x+1 \\
x^2-x+2\,\big)\,\overline{3x^3-2x^2+3x+7} \\
\underline{3x^3-3x^2+6x} \\
x^2-3x+7 \\
\underline{x^2-x+2} \\
-2x+5 \leftarrow b
\end{array}$$

$\therefore\ a=3,\ b=5$ ⇨ $a+b=3+5=8$

07 답 ②

$f(x)=(x^2-2x+3)(2x+3)+(-2)$

$=2x^3+3x^2-4x^2-6x+6x+9-2$

$=2x^3-x^2+7$

08 답 ②

다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 나머지를 R라 하면

$f(x)=(2x+1)(x^2-3x-4)+R$

이때, $2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$이므로

$f(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2-3x-4)+R$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\{2(x^2-3x-4)\}+R$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-6x-8)+R$

즉, 다항식 $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나눈 몫은

$Q(x)=2x^2-6x-8$

$\therefore\ Q(3)=2\times3^2-6\times3-8=-8$

09 답 ①

$(5x+2y-z)^2=(5x+2y-z)(5x+2y-z)$의 전개식에서 xz항은

(x항)$\times$(z항)+(z항)$\times$(x항)이므로

$5x\times(-z)+(-z)\times5x=-10xz$

따라서 xz항의 계수는 -10이다.

10 답 ③

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc-c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$a-b$, $b-c$의 값은 알고 있으므로 $c-a$의 값만 알면 된다.

$\begin{cases} a-b=2 \cdots ㉠ \\ b-c=3 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$a-c=5$ $\therefore\ c-a=-5$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{1}{2}\{2^2+3^2+(-5)^2\}=19$

11 답 ⑤

$x^2-4x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-4+\dfrac{1}{x}=0$

$x+\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$=4^2-2=14$

심플 정리

[곱셈 공식의 변형]

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

(2) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4$

(3) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

12 답 ③

$x+y=6$, $x^2+y^2=22$일 때, xy의 값은?

x^2+y^2과 $x+y$의 관계를 곱셈 공식에서 찾자.

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

1st $x+y$, x^2+y^2이 주어졌을 때, xy의 값과 연결되는 곱셈 공식을 떠올리자.

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서 주어진 값을 대입하면

$6^2=22+2xy$

$2xy=14 \Rightarrow xy=7$

[기본적인 곱셈 공식]

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

13 답 ③

$(a+b+2c)^2=a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc+4ca$

주어진 값을 대입하면

$(a+b+2c)^2=22+2\times12=46$

14 답 ③

$10=x$로 놓으면

$9\times11\times101\times10001$

$=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^4-1)(x^4+1)$

$=x^8-1$

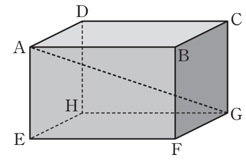
$=10^8-1$

15 답 ②

직육면체의 모서리는 같은 것이 4개씩 있어.

그림과 같이 모든 모서리의 길이의 합이 20인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. $\overline{AG}=\sqrt{13}$일 때, 직육면체 ABCD−EFGH의 겉넓이는?

같은 모양의 직사각형이 각각 2개씩 있지.



① 10 ② 12 ③ 14

④ 16 ⑤ 18

1st 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 정하여 식을 세우자.

직육면체 ABCD−EFGH의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하자.

모든 모서리 길이의 합이 20이므로

$4(a+b+c)=20 \Rightarrow a+b+c=5$

직육면체는 가로, 세로, 높이가 각각 4개씩 있어.

$\overline{AG}=\sqrt{13}$에서

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{13} \Rightarrow a^2+b^2+c^2=13$

2nd 구하려는 것을 곱셈 공식과 연결하여 생각하자.

이때 직육면체 ABCD−EFGH의 겉넓이는

$2(ab+bc+ca)$이므로

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$5^2=13+2(ab+bc+ca)$

$\therefore 2(ab+bc+ca)=12$

16 답 26

직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 a, b라 하면 둘레의 길이는

$2(a+b)=28 \Rightarrow a+b=14$ … Ⅰ

직사각형의 대각선의 길이와 원의 지름의 길이가 같으므로

$\sqrt{a^2+b^2}=12 \Rightarrow a^2+b^2=144$ … Ⅱ

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$이므로

$14^2=144+2ab \Rightarrow ab=26$

따라서 직사각형의 넓이는 26이다. … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	직사각형의 가로와 세로의 길이를 a, b로 정하고 $a+b$의 값을 구한다.	40%
Ⅱ	대각선의 길이와 원의 지름의 길이가 같음을 이용하여 a^2+b^2의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	곱셈 공식으로 ab의 값을 구한다.	20%

Simple D 나머지정리와 인수정리

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 24～25

01 답 항등식

02 답 $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

03 답 $x-a$

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ×

07 답 (1) $a=-3$ (2) $a=5,\ b=-2$ (3) $a=1,\ b=2$

08 답 -7

$f(-1)=-9+3-1=-7$

09 답 1

$f(1)=1-a+2=2 \qquad \therefore a=1$

10 답 $a=1,\ b=-3$

$f(-1)=-a+b=-4,\ f(2)=2a+b=-1$

연립하여 풀면 $a=1,\ b=-3$

11 답 (1) 1 (2) -2

(1) $f(x)=-2x^2+ax+3$이라 놓으면

$f(-1)=-2-a+3=0 \qquad \therefore a=1$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+4x-3$이라 놓으면

$f(1)=1+a+4-3=0 \qquad \therefore a=-2$

12 답 $a=-6,\ b=0$

$f(-2)=-8-4-2a+b=0 \Rightarrow -2a+b=12$

$f(3)=27-9+3a+b=0 \Rightarrow 3a+b=-18$

연립하여 풀면 $a=-6,\ b=0$

13 답 (1) 몫 : x^2+4x+7, 나머지 : 17

(2) 몫 : $2x^2+5x$, 나머지 : -3

(3) 몫 : $2x^2+2x-4$, 나머지 : 7

(4) 몫 : x^2+1, 나머지 : 2

(1)
$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ & & 2 & 8 & 14 \\ \hline & 1 & 4 & 7 & \boxed{17} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 3 & -5 & -3 \\ & & 2 & 5 & 0 \\ \hline & 2 & 5 & 0 & \boxed{-3} \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 4 & -2 & 3 \\ & & -2 & -2 & 4 \\ \hline & 2 & 2 & -4 & \boxed{7} \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{r|rrrr} -\dfrac{2}{3} & 3 & 2 & 3 & 4 \\ & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 3 & 0 & 3 & \boxed{2} \end{array}$$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 26~31

14 답 ②

주어진 식을 x에 대하여 정리하면

$(a+k)x+(-a+2k-3)=0$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+k=0,\ -a+2k-3=0$

연립하여 풀어보면 $a=-1,\ k=1$

$\therefore k-a=1-(-1)=2$

15 답 ③

주어진 식을 x, y에 대하여 정리하면

$(a-1)x+(2b-4)y=0$

이 식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-1=0,\ 2b-4=0 \qquad \therefore a=1,\ b=2$

$\therefore a+b=3$

16 답 ②

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+a)k+(x^2+3x-a+2b-3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 $x=1$을 근으로 가지므로

$(1+a)k+(1+3-a+2b-3)=0$

$(a+1)k+(1-a+2b)=0$

이것이 k에 대한 항등식이므로

$a+1=0,\ 1-a+2b=0$

$a=-1,\ b=-1$이므로 $a+b=-2$

17 답 ②

$(x+1)(e-2)+k=x$를 x에 대하여 정리하면

$(e-3)x+(e+k-2)=0$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$e-3=0,\ e+k-2=0$

연립하여 풀면 $e=3,\ k=-1$

TIP

'임의의 실수 x에 대하여~'라는 말 속에 x에 대한 항등식임을 의미하고 있는 것이다. 식을 x에 대하여 정리를 하는 것이 우선이다. 식이 복잡해도 무엇에 대하여 정리하는지만 알게 되면 어렵지 않다.

18 답 ⑤

주어진 나눗셈을 식으로 표현하면

$x^3+ax^2+b=(x^2-x+3)(x+3)+2$

$\qquad\qquad\quad =x^3+2x^2+11$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 계수를 비교하면

$a=2,\ b=11$

$\therefore ab=2\times 11=22$

19 답 ④

주어진 등식 $kx^2+ky^2+3xy-17k-12=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x^2+y^2-17)k+3xy-12=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2+y^2-17=0$, $3xy-12=0$

$\therefore x^2+y^2=17$, $xy=4$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=17+8=25$

x와 y 모두 양수, 즉 $x+y$도 양수이므로 $x+y=5$

20 답 ③

$\dfrac{ax+3y-2}{-2x+by+1}$의 값이 항상 일정하므로 그 값을 k라 하면

$\dfrac{ax+3y-2}{-2x+by+1}=k$ ($k\neq0$인 상수)

이 식을 x, y에 대해 정리하면

$(a+2k)x+(3-bk)y+(-2-k)=0$

이 식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+2k=0$, $3-bk=0$, $-2-k=0$

이때, $-2-k=0$에서 $k=-2$이므로

$a+2k=0$과 $3-bk=0$에 대입하면

$a=4$, $b=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore ab=4\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-6$

TIP

식이 복잡해 보이지만 '실수 x, y의 값에 관계없이 ~'라는 것에서 식을 x, y에 관해 정리해야 함을 알아야 한다.
일정한 값을 가진다니까 상수 k로 놓고 식을 정리하자.

21 답 ②

등식 $a(2x-3)+b(x+4)=3x-10$이 x에 대한 항등식이므로 양변에

$x=\dfrac{3}{2}$을 대입하면 $b\times\dfrac{11}{2}=-\dfrac{11}{2}$ ⇨ $b=-1$

$x=-4$를 대입하면 $-11a=-22$ ⇨ $a=2$

$\therefore ab=2\times(-1)=-2$

22 답 ①

등식

$3x^2-2x-3$

$=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x+1)+c(x+1)(x-1)$

이 x에 대한 항등식이므로

$x=1$을 대입하면 $-2=-2b$ ⇨ $b=1$

$x=2$를 대입하면 $5=3c$ ⇨ $c=\dfrac{5}{3}$

$x=-1$을 대입하면 $2=6a$ ⇨ $a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore 9a+b+3c=9\times\dfrac{1}{3}+1+3\times\dfrac{5}{3}=9$

23 답 ⑤

$(x+2)(x-1)f(x)=x^4+ax^2+3x+b$가 x에 대한 항등식이므로

$x=-2$를 대입하면 $0=10+4a+b$ ⇨ $4a+b=-10$

$x=1$을 대입하면 $0=4+a+b$ ⇨ $a+b=-4$

연립하면 $a=-2$, $b=-2$

$\therefore ab=4$

TIP

수치대입법으로 항등식의 계수를 구할 때 인수분해된 꼴인 경우가 대부분이므로 수치대입법에 적합한 꼴을 눈에 익히자.

24 답 ①

등식

$(3x^2+4x-7)^2$

$=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$에

$x=1$을 대입하면

$\therefore a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=0$

25 답 ②

등식

$(x^2+3)^2=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$에

$x=-1$을 대입하면

$\therefore a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=16$

26 답 ②

등식

$(2x^2+x-1)^3=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5+a_6x^6$에

$x=1$을 대입하면

$8=a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$ ⋯ ㉠

$x=-1$을 대입하면

$0=a_0-a_1+\cdots-a_5+a_6$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$8=2(a_0+a_2+a_4+a_6)$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6=4$

27 답 ④

등식

$(x^3-2x^2+x+2)^2=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5+a_6x^6$에

$x=1$을 대입하면

$4=a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$ ⋯ ㉠

$x=-1$을 대입하면

$4=a_0-a_1+\cdots-a_5+a_6$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면

$0=2(a_1+a_3+a_5)$

$\therefore a_1+a_3+a_5=0$

28 답 ④

나머지정리에 의해

$f(2)=2^3+3\times2^2-4\times2+2=14$

29 답 ①

나머지정리에 의해

$f(-1)=-2-4-5-3=-14$

$f(2)=16-16+10-3=7$

$a=-14,\ b=7$

$\therefore\ a+b=-7$

30 답 ⑤

나머지정리에 의해 $f(-2)=-3$ ⋯ ㉠

또한 $(x-2)(x+3)f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 나머지정리로 구하면

$(-2-2)(-2+3)f(-2)=-4\times1\times(-3)\ (\because ㉠)$

$=12$

31 답 ④

나머지정리에 의해

$f(-3)=-2,\ g(-3)=3$ ⋯ ㉠

다항식 $f(x)+g(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 나머지정리로 구하면

$f(-3)+g(-3)=-2+3\ (\because ㉠)$

$=1$

TIP

두 다항식을 더한 식에 대하여 일차식으로 나눈 것도 나머지정리로 풀면 된다.
$(x+a)f(x)$와 같이 곱해져 있는 다항식도 일차식 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 $(x+a)f(x)$에 $x=\alpha$를 넣으면 구할 수 있다.

32 답 ②

나머지정리에 의해

$2f(2)+g(2)=5,\ f(2)-g(2)=7$

연립하여 풀면

$f(2)=4,\ g(2)=-3$ ⋯ ㉠

따라서 $f(x)+2g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$f(2)+2g(2)$이므로

$f(2)+2g(2)=4+2\times(-3)\ (\because ㉠)$

$=-2$

33 답 ②

나머지정리에 의해 $f(-3)=3,\ f(2)=8$

$f(x)=(x+3)(x-2)Q(x)+R(x)$ ⋯ ㉠

이때 이차식으로 나눈 나머지는 일차식 혹은 상수항이므로 $R(x)=ax+b$(단, a, b는 상수)라 놓자.

㉠에 $x=-3$을 대입하면

$f(-3)=R(-3) \Rightarrow -3a+b=3$

㉠에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=R(2) \Rightarrow 2a+b=8$

연립하여 풀면 $a=1,\ b=6$이므로

$R(x)=x+6$

$\therefore\ R(-4)=-4+6=2$

심플 정리

[나머지의 차수]

(1) 다항식 $f(x)$를 이차식으로 나눈 나머지는 $ax+b$로 놓는다.

(2) 다항식 $f(x)$를 삼차식으로 나눈 나머지는 ax^2+bx+c로 놓는다.

(3) 다항식 $f(x)$를 n차식으로 나눈 나머지는 $(n-1)$차식으로 놓는다.

34 답 ③

다항식 $f(x)$를 $(x+2)(x-1)$로 나눈 나머지는 $3x-1$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x+2)(x-1)Q(x)+3x-1$ ⋯ ㉠

또, 다항식 $f(x)$를 $(x-3)(x+2)$로 나눈 나머지는 $x-5$이므로 몫을 $Q'(x)$라 하면

$f(x)=(x-3)(x+2)Q'(x)+x-5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡ 각각에 $x=1,\ x=3$을 대입하면

$f(1)=2$ ⋯ ㉢, $f(3)=-2$ ⋯ ㉣

다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나눈 나머지를 $ax+b$라 하고, 몫을 $Q''(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)(x-3)Q''(x)+ax+b$

이 식에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=a+b=2\ (\because ㉢)$

또, $x=3$을 대입하면 $f(3)=3a+b=-2\ (\because ㉣)$

연립하여 풀면 $a=-2,\ b=4$

따라서 구하는 나머지는 $-2x+4$이다.

35 답 ①

다항식 $(x^2+4x-1)f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지를 $ax+b$(단, a, b는 상수)라 하고, 몫을 $Q(x)$라 하면

$(x^2+4x-1)f(x)$

$=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$

$=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$

$x=-3$을 대입하면 $-4f(-3)=-3a+b$

$x=1$을 대입하면 $4f(1)=a+b$

다항식 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지가 3이고, $x-1$로 나눈 나머지가 5이므로

$f(-3)=3,\ f(1)=5$

$-3a+b=-12,\ a+b=20$

연립하여 풀면 $a=8,\ b=12$

따라서 구하는 나머지는 $8x+12$이다.

36 답 ④

$f(x)=x^3-3x^2+kx-4$라 하면 나머지정리에 의해

$f(-2)=-12$이므로

$-8-12-2k-4=-12$

$-2k=12 \qquad \therefore k=-6$

37 답 ⑤

$f(x)=ax^3-x^2+bx-4$라 하면 나머지정리에 의해

$f(2)=14$, $f(-1)=-10$이므로

$8a-4+2b-4=14$, $-a-1-b-4=-10$

$\therefore 8a+2b=22$, $a+b=5$

연립하여 풀면

$a=2$, $b=3 \qquad \therefore ab=6$

38 답 ②

$f(x)=2x^3+kx+4$라 하면

$f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해

$\alpha=-16-2k+4$ ⋯ ㉠

$f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해

$\beta=54+3k+4$ ⋯ ㉡

$\alpha+\beta=10$이므로 ㉠+㉡을 하면

$(-12-2k)+(58+3k)=10$

$\therefore k=-36$

39 답 ③

나머지정리에 의해 $3x^3-4x^2+ax+b$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $3-4+a+b=7$이므로 $a+b=8$

또한 $ab=5$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=8^2-2\times5=54$

40 답 ③

$(x+2)^5$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(x+2)^5=x\cdot Q(x)+R$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $2^5=R$

㉠의 양변에 $x=100$을 대입하면

$102^5=100\cdot Q(100)+2^5$

따라서 102^5을 100으로 나누었을 때의 나머지는

$2^5=32$이다.

41 답 ①

$9=x$라고 놓으면 $8^{334}=(x-1)^{334}$

$(x-1)^{334}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(x-1)^{334}=x\cdot Q(x)+R$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $1=R$

㉠의 양변에 $x=9$를 대입하면 $8^{334}=9\cdot Q(9)+1$

따라서 8^{334}을 9로 나눈 나머지는 1이다.

42 답 ①

$26=x$라고 놓으면 $27^{33}=(x+1)^{33}$

$(x+1)^{33}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(x+1)^{33}=x\cdot Q(x)+R$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $R=1$

㉠의 양변에 $x=26$을 대입하면

$27^{33}=26Q(26)+1$

따라서 27^{33}을 26으로 나눈 나머지는 1이다.

43 답 ②

x^3+kx^2-9가 $x+3$으로 나누어떨어지므로

$x=-3$을 대입하면

$-27+9k-9=0$

$\therefore k=4$

44 답 ⑤

$2x^3+ax^2+bx-6$이 $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$로 나누어떨어지므로

$x=1$을 대입하면

$2+a+b-6=0 \Rightarrow a+b=4$

$x=-2$를 대입하면

$-16+4a-2b-6=0 \Rightarrow 4a-2b=22$

연립하여 풀면 $a=5$, $b=-1$

$\therefore a-b=6$

45 답 ④

다항식 $x^3+ax^2+bx+18$이 $x^2-9=(x+3)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 $x=3$과 $x=-3$을 각각 대입하면

$27+9a+3b+18=0$, $-27+9a-3b+18=0$

$9a+3b=-45$, $9a-3b=9$

연립하여 풀면

$a=-2$, $b=-9$

따라서 $ax^2+4x+b=-2x^2+4x-9$이고, 이 다항식을 $x-2$로 나눈 나머지는

$-2\times2^2+4\times2-9=-9$

다른 풀이

다항식 $x^3+ax^2+bx+18$이 x^2-9로 나누어떨어지므로

$x^3+ax^2+bx+18=(x+k)(x^2-9)$

상수항만 전개하여 비교하면 $k=-2$

즉, $x^3+ax^2+bx+18=(x-2)(x^2-9)$이므로

$x^3+ax^2+bx+18=x^3-2x^2-9x+18$의 계수를 비교하면

$a=-2$, $b=-9$

따라서 $ax^2+4x+b=-2x^2+4x-9$이고, 이 다항식을 $x-2$로 나눈 나머지는

$-2\times2^2+4\times2-9=-9$

46 답 ③

최고차항의 계수가 2인 삼차식 $f(x)$가 $x+1$, $x+2$, $x+3$으로 각각 나누어떨어지므로

$f(-1)=f(-2)=f(-3)=0$

즉, $f(x)$는 $x+1$, $x+2$, $x+3$을 인수로 가지는 다항식이다.

$\therefore\ f(x)=2(x+1)(x+2)(x+3)$

$f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$f(1)=2(1+1)(1+2)(1+3)=48$

> 심플 정리
>
> [인수정리]
>
> 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
>
> 즉, 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가진다.

47 답 ③

다항식 x^3+ax^2+4x-3을 $x+2$로 나눈 몫과 나머지를 조립제법으로 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & & a & & c \\
b\rightarrow -2 & 1 & -2 & 4 & -3 \\
 & & -2 & 8 & -24\leftarrow d \\ \hline
 & e\rightarrow 1 & -4 & 12 & -27
\end{array}$$

$\therefore\ a=-2$, $b=-2$, $c=8$, $d=-24$, $e=1$

48 답 ⑤

다항식 $3x^3-2x^2+x-4$를 $x-3$으로 나눈 몫과 나머지를 조립제법으로 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & & b & & \\
a\rightarrow 3 & 3 & -2 & 1 & -4 \\
 & & 9 & 21 & 66\leftarrow c \\ \hline
 & 3 & 7 & 22 & 62
\end{array}$$

$\therefore\ a=3$, $b=9$, $c=66 \Rightarrow a+b+c=3+9+66=78$

49 답 ①

다항식 $2x^3-3x^2+x-1$을 $2x-1$로 나눈 몫과 나머지를 조립제법으로 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
a\rightarrow \frac{1}{2} & 2 & -3 & 1 & -1 \\
 & & & & b \\
 & & 1 & -1 & 0 \\ \hline
 & 2 & -2 & 0 & -1 \\
 & & c & &
\end{array}$$

$2x^3-3x^2+x-1$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은

$2x^2-2x$, 나머지는 -1이므로

$2x^3-3x^2+x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x)-1$

$=(2x-1)(x^2-x)-1$

따라서 주어진 다항식을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은

x^2-x

50 답 ①

$2x^3-x^2+3x-4$

$=(x+1)(2x^2-3x+6)-10$

$=(x+1)\{(x+1)(2x-5)+11\}-10$

$=(x+1)^2(2x-5)+11(x+1)-10$

$=(x+1)^2\{(x+1)\times 2-7\}+11(x+1)-10$

$=2(x+1)^3-7(x+1)^2+11(x+1)-10$

$\therefore\ a=2$, $b=-7$, $c=11$, $d=-10$

$\therefore\ 4a+3b+2c+d=8-21+22-10=-1$

다른 풀이

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 2 & -1 & 3 & -4 \\
 & & -2 & 3 & -6 \\ \hline
-1 & 2 & -3 & 6 & -10\leftarrow d \\
 & & -2 & 5 & \\ \hline
-1 & 2 & -5 & 11\leftarrow c & \\
 & & -2 & & \\ \hline
 & a\rightarrow 2 & -7\leftarrow b & &
\end{array}$$

Simple E 인수분해 공식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 32~33

01 답 x^2

02 답 낮은, 내림차순

03 답 인수정리

04 답 ×

05 답 ×

06 답 ○

07 답 $(x+1)(a+3)$

08 답 $(x+5)^2$

09 답 $(2a+b)(2a-b)$

10 답 $(x+7)(x-3)$

11 답 $(x-2)(x^2+2x+4)$

12 답 $(2x+3)^3$

13 답 $(a-b+1)^2$

14 답 $(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)$

15 답 $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$

16 답 $(a+2)(a+3)$

$a+1=X$로 치환하면

$X^2+3X+2=(X+1)(X+2)$

$=(a+2)(a+3)$

17 답 $(x+1)(x+2)(x^2+3x+3)$

$x^2+3x=X$로 치환하면

$$\begin{aligned} X^2+5X+6&=(X+2)(X+3) \\ &=(x^2+3x+2)(x^2+3x+3) \\ &=(x+1)(x+2)(x^2+3x+3) \end{aligned}$$

18 답 $x(x-5)(x^2-5x+10)$

$$\begin{aligned} &\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}-24 \\ &=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-24 \\ &=(X+4)(X+6)-24 \leftarrow x^2-5x=X\text{로 치환} \\ &=X^2+10X=X(X+10) \\ &=(x^2-5x)(x^2-5x+10) \\ &=x(x-5)(x^2-5x+10) \end{aligned}$$

19 답 $(x+1)(x-1)(x^2+4)$

$x^2=X$로 치환하면

$$\begin{aligned} X^2+3X-4&=(X-1)(X+4) \\ &=(x^2-1)(x^2+4) \\ &=(x+1)(x-1)(x^2+4) \end{aligned}$$

20 답 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$$\begin{aligned} x^4+x^2+1&=x^4+2x^2+1-x^2 \\ &=(x^2+1)^2-x^2 \\ &=(x^2+1+x)(x^2+1-x) \\ &=(x^2+x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

21 답 $(a^2+2a+3)(a^2-2a+3)$

$$\begin{aligned} a^4+2a^2+9&=a^4+6a^2+9-4a^2 \\ &=(a^2+3)^2-(2a)^2 \\ &=(a^2+2a+3)(a^2-2a+3) \end{aligned}$$

22 답 $(x+y-3)(x+2y+1)$

$$\begin{aligned} &x^2+3xy+2y^2-2x-5y-3 \\ &=x^2+(3y-2)x+2y^2-5y-3 \\ &=x^2+(3y-2)x+(2y+1)(y-3) \\ &=(x+y-3)(x+2y+1) \end{aligned}$$

23 답 $(x+1)(x-2)(x-3)$

$$\begin{aligned} &(x+1)(x^2-5x+6) \\ &=(x+1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

24 답 $(x+1)(x+3)(x-2)$

$$\begin{aligned} &(x+1)(x^2+x-6) \\ &=(x+1)(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

25 답 $(x-1)(x-2)(x+3)$

$$\begin{aligned} &(x-1)(x^2+x-6) \\ &=(x-1)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

26 답 $2(x-1)(x-2)(x+1)$

$$\begin{aligned} &(x-1)(2x^2-2x-4) \\ &=2(x-1)(x^2-x-2) \\ &=2(x-1)(x-2)(x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -4 & -2 & 4 \\ & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 2 & -2 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 34~39

27 답 ④

다항식 $2-x+2y-xy$를 인수분해하면

$2-x+2y-xy=(2-x)+y(2-x)=(2-x)(1+y)$

28 답 ①

다항식 $6a-3ab-2ac+abc$를 인수분해하면

$$\begin{aligned} 6a-3ab-2ac+abc&=3a(2-b)-ac(2-b) \\ &=(3a-ac)(2-b) \\ &=a(2-b)(3-c) \end{aligned}$$

29 답 ③

$3x^2+kx=3x\left(x+\dfrac{k}{3}\right)=3x(x-3)$에서

$\dfrac{k}{3}=-3$이므로 $k=-9$

다른 풀이

$3x^2+kx=3x(x-3)=3x^2-9x$

양변의 계수를 비교하면

$k=-9$

30 답 ②

다항식 $ab+ac+kb+kc$를 인수분해하면

$$\begin{aligned} ab+ac+kb+kc&=a(b+c)+k(b+c) \\ &=(a+k)(b+c) \end{aligned}$$

이때 인수 중 하나가 $a+3$이므로

$a+k=a+3$에서 $k=3$

31 답 ③

인수분해 공식 $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$에 의해

$a^2-4ab+4b^2=(a-2b)^2$

32 답 ①

$6x^2+x-2=(2x-1)(3x+2)$

33 답 ①

$a^2+6ab+9b^2=(a+3b)^2$

34 답 ③

$4x^2+kxy+y^2$의 인수 중 하나가 $2x+y$이고, x^2의 계수가 4가 되어야 하므로 $4x^2+kxy+y^2=(2x+y)(2x+by)$가 되어야 한다.

$(2x+y)(2x+by)=4x^2+(2b+2)xy+by^2$

위 식이 $4x^2+kxy+y^2$과 같아야 하므로 $b=1$

$\therefore\ k=2b+2=2\times1+2=4$

35 답 ③

$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$

$=(x+a)(x+b)$

$\therefore a=-2,\ b=-4 \Rightarrow a^2+b^2=4+16=20$

36 답 ②

$(x-6)(x+b)=x^2+(b-6)x-6b$

x^2+ax-6과 계수를 비교하면

$a=b-6, -6=-6b$

$\therefore a=-5,\ b=1 \Rightarrow ab=(-5)\times1=-5$

37 답 ①

인수분해 공식 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$에 의해

$-8a^3+12a^2b-6ab^2+b^3$

$=(-2a)^3+3(-2a)^2b+3(-2a)b^2+b^3$

$=(-2a+b)^3$

TIP

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$은 눈에 익숙해지기 전에 쉽게 알 수 없다. 다만 숫자의 세제곱인 1, 8, 27을 보고 세제곱일 수 있겠다는 추측을 해보고 실제로 맞는지 확인하는 방법이 있다.

38 답 ③

인수분해 공식

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$에 의해

$a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca=(a+2b-c)^2$

39 답 ④

① $a^3+3a^2+3a+1=(a+1)^3$

② $x^3+8y^3=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

③ $a^2+1+x^2+2a+2x+2xa=(a+1+x)^2$

⑤ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

40 답 ⑤

a^6-b^6

$=(a^3)^2-(b^3)^2$

$=(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$

41 답 ④

$x^4+ax^2y^2+81y^4=(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+by^2)$

$=x^4+bx^2y^2+(3b-27)xy^3+9by^4$

양변의 계수를 비교하면

$a=b,\ 3b-27=0,\ 81=9b$

$81=9b$에서 $b=9$이고 $a=b$이므로 $a=9$

$\therefore a+b=18$

42 답 ②

다항식 x^4+4x^2-5에서 $x^2=A$로 놓으면

$A^2+4A-5=(A-1)(A+5)$

$=(x^2-1)(x^2+5)$

$=(x-1)(x+1)(x^2+5)$

43 답 ③

다항식 $(x+1)^2+5(x+1)+6$에서

$x+1=A$로 놓으면

$A^2+5A+6=(A+2)(A+3)$

$=(x+1+2)(x+1+3)$

$=(x+3)(x+4)$

44 답 ⑤

다항식 $(x^2+5x+k)(x^2+5x+2)-24$에서

$x^2+5x=A$로 놓으면

$(A+k)(A+2)-24=A^2+(k+2)A+2k-24$ ⋯ ㉠

또한 이 식을 인수분해한 식

$(x^2+5x+8)(x^2+5x-2)$에서

$x^2+5x=A$이므로

$(A+8)(A-2)=A^2+6A-16$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡의 계수를 비교하면

$k+2=6,\ 2k-24=-16$

$\therefore k=4$

45 답 ④

$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16$

$=\{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}+16$

$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+16$

$x^2-8x=A$로 놓으면

(주어진 식)$=(A+7)(A+15)+16$

$=A^2+22A+121$

$=(A+11)^2$

$=(x^2-8x+11)^2$

46 답 ④

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$

$=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}+k$

$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+k$

$x^2-5x=A$로 놓으면

(주어진 식)$=(A+4)(A+6)+k$

$=A^2+10A+k+24$

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱 꼴로 인수분해 되기 위해서는

$\left(\frac{10}{2}\right)^2=k+24,\ 25=k+24$

$\therefore k=1$

47 답 ②

$x(x-1)(x+2)(x+3)-4$
$=\{x(x+2)\}\{(x-1)(x+3)\}-4$
$=(x^2+2x)(x^2+2x-3)-4$
$x^2+2x=A$로 놓으면
(주어진 식)$=A(A-3)-4$
$=A^2-3A-4$
$=(A-4)(A+1)$
$=(x^2+2x-4)(x^2+2x+1)$
$=(x^2+2x-4)(x+1)^2$
따라서 $x+1$이 인수이므로 $a=1$이다.

48 답 ③

$(x-6)(x-2)(x+1)(x+3)-7x^2$
$=\{(x-6)(x+1)\}\{(x-2)(x+3)\}-7x^2$
$=(x^2-5x-6)(x^2+x-6)-7x^2$
$x^2-6=A$라 하면
(주어진 식)$=(A-5x)(A+x)-7x^2$
$=A^2-4xA-5x^2-7x^2$
$=A^2-4xA-12x^2$
$=(A-6x)(A+2x)$
$=(x^2-6x-6)(x^2+2x-6)$
따라서 x^2-6x-6과 x^2+2x-6이 인수이다.

49 답 ③

x^4+x^2+1에 x^2을 더하고 빼면
$x^4+x^2+1+x^2-x^2=x^4+2x^2+1-x^2$
$=(x^2+1)^2-x^2$
$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$
$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

50 답 ④

$(x^2-x-4)(x^2+x-4)$에서 x^2의 계수와 상수항만 구하면 된다.

$\begin{cases} ax^2=x^2\times(-4)+(-x)\times x+(-4)\times x^2=-9x^2 \\ b=-4\times(-4)=16 \end{cases}$

$\therefore a=-9,\ b=16 \Rightarrow 2a+b=2\times(-9)+16=-2$

TIP

다항식을 전개하는 목적에 따라 모두를 전개해야 하는 경우와 일부만 전개해도 상관없는 경우가 있다. 계수 비교를 위해 전개하는 경우는 미정계수와 관련된 부분만 전개해서 구하자.

51 답 ②

$x^4-19x^2+25=x^4-10x^2+25-9x^2$
$=(x^2-5)^2-(3x)^2$
$=(x^2-3x-5)(x^2+3x-5)$

52 답 ①

$2x^2+5xy+2y^2-7x-5y+3$을 x에 대해 내림차순으로 정리해서 인수분해하면
$2x^2+(5y-7)x+2y^2-5y+3$
$=2x^2+(5y-7)x+(2y-3)(y-1)$
$=(x+2y-3)(2x+y-1)$

53 답 ②

$(2x-y+6)(x+y+2)$
$=2x^2+xy-y^2+10x+4y+12$
$2x^2+xy-y^2+\alpha x+\beta y+12$와 계수를 비교하면
$\alpha=10,\ \beta=4$
$\therefore \alpha\beta=40$

54 답 ②

다항식 $x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2+2xyz$를 x에 대해 내림차순으로 정리해서 인수분해하면
$x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2+2xyz$
$=(y+z)x^2+(z^2+y^2+2yz)x+y^2z+yz^2$
$=(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)$
$=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}$
$=(y+z)(x+y)(x+z)$
따라서 모든 인수의 합은
$(y+z)+(x+y)+(x+z)=2(x+y+z)$

TIP

문자가 여러 개 혼합된 식에서 인수를 찾기 위해서 각 문자의 최고차수를 비교하여 가장 낮은 차수의 문자에 대하여 내림차순으로 정리하면 된다.
만약 최고차수가 같을 때는 어떤 문자에 대해 정리해도 상관없이 같은 결과를 얻을 수 있다.

55 답 ①

다항식 $x^2+xy+4x+2y+4$에서 y의 차수가 낮으므로 y에 대하여 내림차순으로 정리해서 인수분해하면
$x^2+xy+4x+2y+4=(x+2)y+x^2+4x+4$
$=(x+2)y+(x+2)^2$
$=(x+2)(y+x+2)$
$=(x+2)(x+y+2)$

56 답 ④

다항식 $a^3-ab^2-b^2c+a^2c$에서 c의 차수가 가장 낮으므로 c에 대하여 내림차순으로 정리해서 인수분해하면
$a^3-ab^2-b^2c+a^2c=(a^2-b^2)c+a^3-ab^2$
$=(a^2-b^2)c+a(a^2-b^2)$
$=(a+b)(a-b)c+a(a+b)(a-b)$
$=(a+b)(a-b)(c+a)$
따라서 모든 인수의 합은
$(a+b)+(a-b)+(c+a)=3a+c$

57 답 ③

$(x+y)(x-y)(y+z)=(x^2-y^2)(y+z)$

$=x^2y+x^2z-y^3-y^2z$

$x^2y+x^2z+ky^2z-y^3$과 계수를 비교하면 $k=-1$

58 답 ⑤

$a^3+b^3+a^2b+ab^2-ac^2-bc^2=0$에서 c의 차수가 가장 낮으므로 c에 대하여 내림차순으로 정리해서 인수분해하면

$a^3+b^3+a^2b+ab^2-ac^2-bc^2=0$

$-(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3=0$

$-(a+b)c^2+a^2(a+b)+(a+b)b^2=0$

$(a+b)(-c^2+a^2+b^2)=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 변의 길이이므로 $a+b\neq 0$이다.

$\therefore\ -c^2+a^2+b^2=0 \Rightarrow a^2+b^2=c^2$

따라서 각 C가 직각인 직각삼각형이다.

심플 정리

[삼각형의 종류]

세 변의 길이가 a, b, c일 때,

(1) $a=b=c$: 정삼각형

(2) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$: 이등변삼각형

(3) $a^2=b^2+c^2$ 또는 $b^2=a^2+c^2$ 또는 $c^2=a^2+b^2$: 직각삼각형

(4) $a^2>b^2+c^2$ 또는 $b^2>a^2+c^2$ 또는 $c^2>a^2+b^2$: 둔각삼각형

59 답 ③

$f(x)=x^3-7x+a$라 놓자.

$f(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로

$f(2)=2^3-7\times 2+a=0 \qquad \therefore\ a=6$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-7x+6=(x-2)(x^2+2x-3)$

$=(x-2)(x-1)(x+3)$

따라서 다른 두 인수는 $x-1$, $x+3$이므로

$(x-1)+(x+3)=2x+2$

60 답 ③

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 놓자.

$f(1)=1^3-2\times 1^2-5\times 1+6=0$이므로 $x-1$이 인수이다.

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$

$=(x-1)(x+2)(x-3)$

61 답 ②

$f(x)=2x^3-3x^2-3x+2$라 놓자.

$f(-1)=2\times(-1)^3-3\times(-1)^2-3\times(-1)+2=0$이므로 $x+1$이 인수이다.

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & -3 & 2 \\ & & -2 & 5 & -2 \\ \hline & 2 & -5 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$2x^3-3x^2-3x+2=(x+1)(2x^2-5x+2)$

$=(x+1)(2x-1)(x-2)$

62 답 ④

$f(x)=x^3-6x^2+14x-15$라 하면

$f(3)=3^3-6\times 3^2+14\times 3-15=0$이므로

$x-3$이 인수이다.

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -6 & 14 & -15 \\ & & 3 & -9 & 15 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-6x^2+14x-15=(x-3)(x^2-3x+5)$

$(x+a)(x^2+bx+5)$와 비교하면

$a=-3$, $b=-3$

$\therefore\ a-3b=(-3)-3\times(-3)=6$

TIP

인수정리를 이용하여 인수분해를 하는 경우 대입하는 수는

$\pm\dfrac{(\text{상수항의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 약수})}$를 대입하면 된다.

이 문제의 경우 최고차항의 계수가 1이므로 상수항 15의 약수를 구하면 된다.

63 답 ②

$x+1$과 $2x+1$이 다항식 $f(x)=2x^3-x^2+ax+b$의 인수이므로 $f(-1)=0$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$이다.

$f(-1)=-2-1-a+b=0 \Rightarrow a-b=-3$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}a+b=0 \Rightarrow a-2b=-1$

연립하여 풀면

$a=-5$, $b=-2$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -1 & -5 & -2 \\ & & -2 & 3 & 2 \\ \hline -\frac{1}{2} & 2 & -3 & -2 & \boxed{0} \\ & & -1 & 2 & \\ \hline & 2 & -4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore\ f(x)$

$=2x^3-x^2-5x-2$

$=(x+1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(2x-4)$

$=(x+1)(2x+1)(x-2)$

따라서 모든 인수를 더하면

$(x+1)+(2x+1)+(x-2)=4x$

64 답 ⑤

$f(x)=3x^3-5x^2+ax+12$라 놓자.

인수 중 하나가 $x+2$이므로

$f(-2)=3\times(-2)^3-5\times(-2)^2+a\times(-2)+12=0$

$\therefore a=-16$

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 3 & -5 & -16 & 12 \\
 & & -6 & 22 & -12 \\ \hline
\frac{2}{3} & 3 & -11 & 6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
 & & 2 & -6 & \\ \hline
 & 3 & -9 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}$$

$3x^3-5x^2-16x+12$

$=(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)(3x-9)$

$=(3x-2)(x+2)(x-3)$

$\therefore b=-3$

$\therefore b-a=13$

65 답 ④

$72=3\times24$, $228=3\times76$이므로

$76^3+72\cdot76^2+228\cdot24^2+24^3$

$=76^3+3\times76^2\times24+3\times76\times24^2+24^3$

$=(76+24)^3\,(\because a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3)$

$=100^3=1000000$

66 답 ③

$21=x$라 놓으면

$(\text{주어진 식})=\dfrac{x^4+x^2+1}{x(x+1)+1}$

$=\dfrac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1}$

$=x^2-x+1\,(\because x^2+x+1\neq0)$

x에 21을 대입하면 $21^2-21+1=421$

다른 풀이

$21^4+21^2+1=21^4+2\times21^2+1-21^2$

$=(21^2+1)^2-21^2$

$=(21^2+21+1)(21^2-21+1)$

이므로

$\dfrac{21^4+21^2+1}{21\times22+1}=\dfrac{(21^2+21+1)(21^2-21+1)}{21\times(21+1)+1}$

$=\dfrac{(21^2+21+1)(21^2-21+1)}{21^2+21+1}$

$=21^2-21+1$

$=21(21-1)+1$

$=21\times20+1$

$=420+1$

$=421$

67 답 ⑤

$20=x$로 놓자.

$20\times18\times16\times14+16$

$=x(x-2)(x-4)(x-6)+16$

$=\{x(x-6)\}\{(x-2)(x-4)\}+16$

$=(x^2-6x)(x^2-6x+8)+16$

$=A(A+8)+16$ ← $x^2-6x=A$라 놓자.

$=A^2+8A+16$

$=(A+4)^2$

$=(x^2-6x+4)^2$ ← $A=x^2-6x$를 대입하자.

$=(20^2-6\times20+4)^2$ ← $x=20$을 대입하자.

$\therefore \sqrt{20\times18\times16\times14+16}=\sqrt{(20^2-6\times20+4)^2}$

$=20^2-6\times20+4$

$=400-120+4=284$

68 답 ③

$10=x$로 놓자.

$9999=10^4-1=x^4-1$

$10^{12}-1=(10^4)^3-1=(x^4)^3-1$

$=(x^4-1)\{(x^4)^2+x^4+1\}$

$\therefore \dfrac{10^{12}-1}{9999}=\dfrac{(x^4-1)\{(x^4)^2+x^4+1\}}{x^4-1}$

$=(x^4)^2+x^4+1$

$=x^8+x^4+1$

$=10^8+10^4+1$ ← $x=10$을 대입

$=100010001$

연습 문제 [D~E] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 40~41

01 답 ①

$4x-6=a(x-2)+bx=(a+b)x-2a$

양변의 계수를 비교하면

$a+b=4$, $-2a=-6$

$\therefore a=3$, $b=1$ ⇨ $ab=3\times1=3$

다른 풀이

$4x-6=a(x-2)+bx$에

$x=2$를 대입하면 $2=2b$ ⇨ $b=1$

$x=0$을 대입하면 $-6=-2a$ ⇨ $a=3$

$\therefore ab=3\times1=3$

02 답 ③

x^2+3x+2

$=(x-2)^2+7(x-2)+12$

$\therefore a=7$, $b=12$

⇨ $a+b=7+12=19$

$$\begin{array}{r|rrr}
2 & 1 & 3 & 2 \\
 & & 2 & 10 \\ \hline
2 & 1 & 5 & \multicolumn{1}{|r}{12} \\
 & & 2 & \\ \hline
 & 1 & \multicolumn{1}{|r}{7} &
\end{array}$$

답_008032_심플자이고등(A~E).indd 26 2019-09-20 오후 01:25:11

다른 풀이1

$x^2+3x+2=(x-2)^2+a(x-2)+b$에

$x=2$를 대입하면

$2^2+3\times2+2=b$에서 $b=12$

$x^2+3x+2=(x-2)^2+a(x-2)+12$

$x=3$을 대입하면

$9+9+2=1+a+12 \qquad \therefore a=7$

$\therefore a+b=7+12=19$

다른 풀이2

$x^2+3x+2=(x-2)^2+a(x-2)+b$

$\qquad =x^2-4x+4+ax-2a+b$

$\qquad =x^2+(a-4)x+4-2a+b$

계수를 비교하면

$a-4=3,\ 4-2a+b=2$

$\therefore a=7,\ b=12 \Rightarrow a+b=7+12=19$

03 답 ②

모든 실수 x에 대하여 등식

$$(x^2-4x+1)^3=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5+a_6x^6$$

이 성립할 때, 상수 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_5,\ a_6$에 대하여

$a_1+3a_2+7a_3+15a_4+31a_5+63a_6$의 값은?

계수의 특징을 잘 살펴보자. 계수가 2^n-1 꼴이지?

① -16 ② -19 ③ -22

④ -25 ⑤ -28

1st 구하려는 식에서 계수를 보면 1, 3, 7, 15, 31, 63은 2^n-1 꼴이야.

$(x^2-4x+1)^3=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5+a_6x^6$에

최고차항의 계수와 상수항이 모두 1임을 알 수 있어.

$x=2$를 대입하면

$(2^2-4\times2+1)^3=a_0+2a_1+\cdots+32a_5+64a_6$

$-27=a_0+2a_1+\cdots+32a_5+64a_6 \cdots$ ㉠

$x=1$을 대입하면

$(1^2-4\times1+1)^3=a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$

$-8=a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6 \cdots$ ㉡

2nd ㉠과 ㉡의 식을 적절히 계산하여 구하려는 식이 나오도록 하자.

㉠$-$㉡을 하면

$a_1+3a_2+7a_3+15a_4+31a_5+63a_6$

$=-27-(-8)=-19$

04 답 ③

다항식 x^2+4x-2에 $x=-2$를 대입하면

$(-2)^2+4\times(-2)-2=-6$

따라서 x^2+4x-2를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 -6이다.

05 답 ③

이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

$(x-a)(x-b)=0$이 되는 x의 값이 중요해.

(단, a, b는 서로 다른 두 실수이다.)

[보기]

ㄱ. $f(a)-R(a)=0$

ㄴ. $f(a)-R(b)=f(b)-R(a)$

ㄷ. $af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 항등식의 성질을 이용하자. x에 어떤 값을 대입해도 등식이 성립해.

다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x) \cdots$ ㉠

ㄱ. ㉠은 x에 대한 항등식이므로 $x=a$를 대입하면

$f(a)=R(a)$이므로 $f(a)-R(a)=0$ (참)

2nd 반례를 하나 찾아서 거짓임을 보이자.

ㄴ. [반례] $f(x)=(x-a)(x-b)+x$라 하면 $R(x)=x$이고

$$\begin{cases} f(a)-R(b)=a-b \\ f(b)-R(a)=b-a \end{cases}$$

이때, $a\neq b$이므로 단서 중 a, b가 서로 다르다고 했어.

$f(a)-R(b)\neq f(b)-R(a)$ (거짓)

3rd 이차식으로 나누면 나머지는 일차식 이하야.

ㄷ. $R(x)=px+q$라 하면 이차식 $(x-a)(x-b)$로 나누니까 나머지는 일차 이하야.

$f(a)=pa+q,\ f(b)=pb+q$에서

$af(b)-bf(a)=abp+aq-abp-bq=(a-b)q$

$R(0)=q$이므로

$af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

06 답 ④

다항식 x^3-2x^2-ax+3이 $x-2$로 나누어떨어지면

x^3-2x^2-ax+3에 $x=2$를 대입하면 0이 되어야 한다.

$2^3-2\times2^2-a\times2+3=0 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

07 답 ④

조립제법으로 x^3-3x^2+5x-5를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & 5 & -5 \\ & & \boxed{2} & \boxed{-2} & \boxed{6} \\ \hline & 1 & \underset{a}{-1} & \underset{b}{3} & \boxed{1} \leftarrow c \end{array}$$

$\therefore a=-1,\ b=3,\ c=1 \Rightarrow abc=(-1)\times3\times1=-3$

답_008032_심플자이고등(A~E).indd 27 2017. 9. 15. 오후 5:39

08 답 1

조립제법으로 $3x^3-x^2-8x-4$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -1 & -8 & -4 \\ & & -3 & 4 & 4 \\ \hline & 3 & -4 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$3x^3-x^2-8x-4=(x+1)(3x^2-4x-4)$

$=(x+1)(x-2)(3x+2)$

$\therefore a=3,\ b=2 \Rightarrow a-b=3-2=1$

09 답 ⑤

$x^6+y^3+1-3x^2y$에서

$x^2=a,\ y=b,\ 1=c$라 하면

$x^6+y^3+1-3x^2y=a^3+b^3+c^3-3abc$

이므로 인수분해 공식

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

에 의해

$x^6+y^3+1-3x^2y$

$=(x^2+y+1)(x^4+y^2+1-x^2y-y-x^2)$

10 답 ③

반복되는 식이 보이지? 그것을 치환해서 풀자.

다항식 $(2x+y)^2-2(2x+y)-3$을 인수분해하면 $(ax+y+1)(2x+by+c)$일 때, $a+b+c$의 값은?

(단, $a,\ b,\ c$는 상수이다.)

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

1st 반복되는 식이 보이지? 그것을 치환하자.

$2x+y=X$라 놓자.

반복되는 식을 치환하여 식을 간단히 만들 수 있어.

$(2x+y)^2-2(2x+y)-3$

$=X^2-2X-3$

$=(X+1)(X-3)$

$=(2x+y+1)(2x+y-3)$

2nd 이제 계수를 비교하여 $a,\ b,\ c$의 값을 구하자.

$\therefore a=2,\ b=1,\ c=-3 \Rightarrow a+b+c=2+1+(-3)=0$

11 답 ①

x^4+7x^2+16

$=x^4+8x^2+16-x^2$

$=(x^2+4)^2-x^2$

$=(x^2+4+x)(x^2+4-x)$

$=(x^2+x+4)(x^2-x+4)$

$\therefore a=1,\ b=4 \Rightarrow a+b=1+4=5$

12 답 ③

$x^3+x^2y-x^2+y^2+xy-2x-3y+2$에서 차수가 낮은 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+x^2y-x^2+y^2+xy-2x-3y+2$

$=y^2+(x^2+x-3)y+x^3-x^2-2x+2$

$=y^2+(x^2+x-3)y+x^2(x-1)-2(x-1)$

$=y^2+(x^2+x-3)y+(x-1)(x^2-2)$

$=(y+x^2-2)(y+x-1)$

$=(x^2+y-2)(x+y-1)$

13 답 1

$2x^3-5x^2-4x+3$에 $x=-1$을 대입하면

$2\times(-1)^3-5\times(-1)^2-4\times(-1)+3=0$ … Ⅰ

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ & & -2 & 7 & -3 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$2x^3-5x^2-4x+3=(x+1)(2x^2-7x+3)$

$=(x+1)(2x-1)(x-3)$ … Ⅱ

즉, $(x+1)+(2x-1)+(x-3)=4x-3$에서

$a=4,\ b=-3$이므로 $a+b=1$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	x에 적당한 수를 대입하여 0이 되는 수를 구한다.	30%
Ⅱ	조립제법을 이용하여 인수분해한다.	40%
Ⅲ	모든 인수를 더하여 $a,\ b$를 구하고 $a+b$를 계산한다.	30%

14 답 ①

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$의 양변에 2를 곱하면

$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ca$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0 \Rightarrow a=b=c$

따라서 구하는 삼각형은 세 변의 길이가 같은 정삼각형이다.

15 답 ⑤

$\dfrac{10101}{1001\times999}$

$=\dfrac{10^4+10^2+1}{(10^3+1)(10^3-1)}$

$=\dfrac{x^4+x^2+1}{(x^3+1)(x^3-1)}$ ← $10=x$로 놓자.

$=\dfrac{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{1}{(10+1)(10-1)}$ ← $x=10$을 대입하자.

$=\dfrac{1}{11\times9}=\dfrac{1}{99}$

Ⅰ 대단원 TEST [A~E] [기출+기출 변형]
문제편 pp. 42~45

01 답 ④

$A-2B=-4x^2+3xy$ ⇨ $2B=A+4x^2-3xy$

$A=2x^2-xy$를 대입하면

$2B=2x^2-xy+4x^2-3xy$

$\quad=6x^2-4xy$

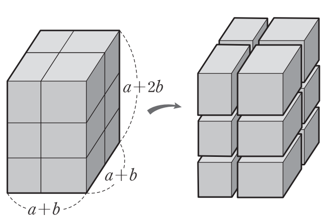
$\therefore\ B=3x^2-2xy$

02 답 ①

$(3x-y)^3=27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3$

따라서 xy^2의 계수는 9이다.

03 답 16

> 서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 세 모서리의 길이가 각각 $a+b$, $a+b$, $a+2b$인 직육면체가 있다. 이 직육면체를 그림과 같이 각 모서리의 길이가 a 또는 b가 되도록 12개의 작은 직육면체로 나누었을 때, 부피가 150인 직육면체는 5개이다. $a+2b$의 값을 구하시오. 같은 부피가 5개가 나오는 경우를 찾자.
>
> 
>

1st 직육면체의 부피를 a, b에 대한 식으로 나타내자.

직육면체의 부피는

$(a+b)^2(a+2b)=a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$

부피가 a^3인 직육면체 : 1개

부피가 a^2b인 직육면체 : 4개

부피가 ab^2인 직육면체 : 5개

부피가 b^3인 직육면체 : 2개

$(a+b)^2(a+2b)$
$=(a^2+2ab+b^2)(a+2b)$
$=a^3+2a^2b+2a^2b+4ab^2+ab^2+2b^3$
$=a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$

2nd 부피가 같은 5개의 직육면체를 찾아 a, b를 구하자.

부피가 150인 직육면체가 5개라고 하므로

$ab^2=150=6\times5^2$

즉, 서로소인 두 자연수 $a=6$, $b=5$

$\therefore\ a+2b=16$

04 답 ⑤

$$\begin{array}{r|l} & 3x\ -3 \\ x^2+x & 3x^3\qquad -x+3 \\ & 3x^3+3x^2 \\ \hline & -3x^2-\ x+3 \\ & -3x^2-3x \\ \hline & 2x+3 \end{array}$$

05 답 ①

$f(x)=(3x-2)(x^2+3x-1)-1$

$\quad=3x^3+9x^2-3x-2x^2-6x+2-1$

$\quad=3x^3+7x^2-9x+1$

06 답 ②

다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나눈 몫이 $3x^2+2x-6$이고

나머지가 R라 하자.

$f(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+2x-6)+R$

$\quad=\frac{1}{3}(3x-1)(3x^2+2x-6)+R$

$\quad=(3x-1)\cdot\frac{1}{3}(3x^2+2x-6)+R$

$\quad=(3x-1)\left(x^2+\frac{2}{3}x-2\right)+R$

따라서 다항식 $f(x)$를 $3x-1$로 나눈 몫은

$x^2+\frac{2}{3}x-2$이다.

07 답 6

$x^2y^2=9$에서 x, y가 양수이므로 $xy=3$ ⋯ Ⅰ

$x^2+y^2=30$이므로

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=30+2\times3=36$ ⋯ Ⅱ

x, y가 양수이므로 $x+y=6$ ⋯ Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	x, y가 양수임을 이용하여 xy의 값을 구한다.	40%
Ⅱ	$(x+y)^2$의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	양수 $x+y$의 값을 구한다.	20%

08 답 100

$(a+b+2c)^2$

$=a^2+b^2+(2c)^2+2ab+2b\cdot2c+2\cdot2c\cdot a$

$=a^2+b^2+4c^2+2(ab+2bc+2ca)$

$=44+2\times28=100$

09 답 ①

$x^2+(a-1)x-a=bx^2-3x+2$

항등식의 성질에 의해

$b=1$, $a-1=-3$, $-a=2$

$\therefore\ a=-2$, $b=1$ ⇨ $a+b=-1$

다른 풀이

등식 $(x-1)(x+a)=bx^2-3x+2$의 양변에

$x=0$을 대입하면 $-a=2$ ⇨ $a=-2$

$x=1$을 대입하면 $b-1=0$ ⇨ $b=1$

$\therefore\ a+b=-1$

10 답 ⑤

> 등식 $(2x^2-4x+3)^3=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5+a_6x^6$이
> x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 a_0, a_1, $\cdots$,
> a_5, a_6에 대하여 $a_1+a_2+\cdots+a_5+a_6$의 값은?
> x에 대한 항등식이므로 적당한 x의 값을 넣어서 구하는 계수의 합을 유도하자.
> ① -22　② -23　③ -24
> ④ -25　⑤ -26

1st 주어진 등식이 항등식임을 이용하여 적당한 x의 값을 대입하자.

$(2x^2-4x+3)^3=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5+a_6x^6$에서

$x=1$을 대입하면 $a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$의 값을 구할 수 있어.

$(2-4+3)^3=a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$

$1=a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$ ⋯ ㉠

$x=0$을 대입하면 $3^3=a_0$ ⋯ ㉡ 우변에 a_0만 남으니까 a_0의 값을 구할 수 있어.

2nd 구하는 것도 a_0가 빠진 것이므로 ㉠과 ㉡을 빼자.

㉠−㉡을 하면

$\therefore a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6-a_0=a_1+a_2+\cdots+a_6$

$=1-27=-26$

11 답 11

다항식 $f(x)$를 x^2-7x로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

나머지가 $x+4$이므로

$f(x)=(x^2-7x)Q(x)+x+4$

$=x(x-7)Q(x)+x+4$ ⋯ ㉠

나머지정리에 의하여 다항식 $f(x)$를 $x-7$로 나눈 나머지는 $f(7)$이다.

따라서 $f(x)$를 $x-7$로 나눈 나머지는 ㉠에 $x=7$을 대입하면

$f(7)=7+4=11$

12 답 ④

> x에 대한 삼차다항식 $x^2-1=0$이 되는 x의 값을 구해서 대입하면 그 나머지는 항상 -4가 되겠지?
> $P(x)=(x^2+x-1)(ax+b)-3$에 대하여
> $P(x+1)$을 x^2-1로 나눈 나머지가 -4일 때,
> $5a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)
> ① 1　② 0　③ -1
> ④ -2　⑤ -3

1st x^2-1이 0이 되는 x의 값에 대한 $P(x)$를 구하자.

$P(x+1)$을 x^2-1로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 -4라 하면

$P(x+1)=(x^2-1)Q(x)-4$

$x=1$을 대입하면 $Q(x)$에 상관 없으려면 $x^2-1=0$, 즉 $x=\pm1$을 대입하면 돼.

$P(2)=0\times Q(2)-4=-4$

$x=-1$을 대입하면

$P(0)=0\times Q(-1)-4=-4$

즉, $P(2)=-4$, $P(0)=-4$

2nd 구한 $P(2)$, $P(0)$의 값을 이용하도록 $x=0$, $x=2$를 대입하여 a, b의 값을 구하자.

$P(x)=(x^2+x-1)(ax+b)-3$에

$x=2$를 대입하면

$P(2)=(4+2-1)(2a+b)-3=-4$

$\therefore 10a+5b=-1$ ⋯ ㉠

$x=0$을 대입하면

$P(0)=(-1)\cdot b-3=-4$

$\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-\dfrac{3}{5}$

$\therefore 5a+b=5\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)+1=-2$

13 답 52

> 나머지정리를 이용할 수 있어.
> 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를
> $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 8이고, $f(x)g(x)$
> 를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 6이다.
> $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머
> 지를 구하시오. 나머지정리에 의해 $\{f(3)\}^2+\{g(3)\}^2$을 구하라는 거야.

1st $f(3)+g(3)$, $f(3)g(3)$의 값을 구하자.

나머지정리에 의하여 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나눌 때의 나머지는 $f(a)$야.

$f(3)+g(3)=8$, $f(3)g(3)=6$

2nd 곱셈 공식의 변형 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$를 이용하자.

$\{f(3)\}^2+\{g(3)\}^2=\{f(3)+g(3)\}^2-2f(3)g(3)$

$=8^2-2\times6=52$

14 답 5

$x=0$을 대입하면

$6=(0-1)(0+2)(0+b)$　$\therefore b=-3$

$x=-1$을 대입하면

$-2-1+7+6=(-1-1)(-1+2)(-a-3)$　$\therefore a=2$

$\therefore a-b=5$

다른 풀이

다항식 $2x^3-x^2-7x+6$을

인수분해하면

$(x-1)(x+2)(2x-3)$

이므로 $a=2$, $b=-3$

$\therefore a-b=5$

1	2	−1	−7	6
		2	1	−6
−2	2	1	−6	0
		−4	6	
	2	−3	0	

15

답 ④

$x^2-x=X$라 놓자.

$(x^2-x)^2+2x^2-2x-15$

$=(x^2-x)^2+2(x^2-x)-15$

$=X^2+2X-15$

$=(X+5)(X-3)$

$=(x^2-x+5)(x^2-x-3)$

이므로

$a=-1,\ b=5,\ c=-3$ 또는 $a=-1,\ b=-3,\ c=5$

$\therefore\ a+b+c=1$

16

답 ①

> 복이차식이고 $x^2=X$로 치환해도 인수분해가 안 되는 꼴이야. A^2-B^2의 꼴로 바꿔야겠지?
>
> 다항식 x^4+4x^2+16이 $(x^2+ax+b)(x^2-cx+d)$로 인수분해될 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, $a,\ b,\ c,\ d$는 양수이다.)
>
> ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

1st 복이차식에서 $x^2=X$로 치환해도 인수분해가 안 되니까 A^2-B^2 꼴로 고치자.

다항식 x^4+4x^2+16을 인수분해하면

x^4+4x^2+16

$=(x^4+8x^2+16)-4x^2$

$=(x^2+4)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

$=(x^2+ax+b)(x^2-cx+d)$

[복이차식의 인수분해]
(1) $x^2=X$로 치환해서 인수분해한다.
(2) 인수분해가 안 되는 경우 식을 적절히 변형하여 A^2-B^2 꼴로 만든다.

2nd 양수 $a,\ b,\ c,\ d$의 값을 구하자.

$a,\ b,\ c,\ d$가 양의 실수이므로 $a=2,\ b=4,\ c=2,\ d=4$

$\therefore\ a+b+c+d=12$

17

답 ③

> 반복되는 식이 보이지? 치환하여 전개한 후 인수분해하자.
>
> 다항식 $(x^2+2x)(x^2+2x-3)+2$를 인수분해하면 $(x^2+ax+b)(x^2+2x-2)$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a,\ b$는 상수이다.)
>
> ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

1st 반복되는 식 x^2+2x를 치환하자.

$x^2+2x=X$라 하면

$(x^2+2x)(x^2+2x-3)+2$

$=X(X-3)+2$

$=X^2-3X+2$

$=(X-1)(X-2)$

$=(x^2+2x-1)(x^2+2x-2)$

1 ⟶ -1
1 ⟶ -2
$-1-2=-3$

2nd $a,\ b$의 계수를 비교하여 구하자.

$\therefore\ a=2,\ b=-1 \Rightarrow a+b=1$

다른 풀이

등식

$(x^2+2x)(x^2+2x-3)+2=(x^2+ax+b)(x^2+2x-2)$

는 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=0$을 대입하면

$2=-2b \Rightarrow b=-1$

양변에 $x=1$을 대입하면 $2=1+a+b$이고 $b=-1$이므로

$a=2$

$\therefore\ a+b=1$

18

답 ⑤

다항식 $2a^2-6b^2+ab-3a+8b-2$에서

a에 대하여 내림차순으로 정리를 하면

$2a^2+(b-3)a-6b^2+8b-2$

$=2a^2+(b-3)a+(-3b+1)(2b-2)$

$=(2a-3b+1)(a+2b-2)$

19

답 ④

$x^3+x^2+3x^2y-6x+2xy^2+5xy+6y^2-12y$에서

y에 대하여 내림차순 정리를 하면

$(2x+6)y^2+(3x^2+5x-12)y+x^3+x^2-6x$

$=2(x+3)y^2+(3x-4)(x+3)y+x(x+3)(x-2)$

$=(x+3)\{2y^2+(3x-4)y+x(x-2)\}$

$=(x+3)(2y+x)(y+x-2)$

$=(x+3)(x+2y)(x+y-2)$

20

답 185

$x^3-ax+12$의 인수 중 하나가 $x-1$이므로

$x=1$을 대입하면 0이 되어야 한다.

$1^3-a+12=0$에서 $a=13$ … Ⅰ

$x^3-13x+12$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

$x^3-13x+12=(x-1)(x^2+x-12)$

$=(x-1)(x-3)(x+4)$ … Ⅱ

$(x-1)(x-3)(x+b)$와 비교하면 $b=4$

$\therefore\ a^2+b^2=13^2+4^2=185$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	$x-1$이 인수임을 이용하여 a의 값을 구한다.	30%
Ⅱ	$x^3-13x+12$를 인수분해한다.	40%
Ⅲ	b를 구하여 a^2+b^2의 값을 계산한다.	30%

21 답 ②

다항식 $2x^3+7x^2+2x-3$을

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 7 & 2 & -3 \\ & & -2 & \overset{a}{-5} & 3 \\ \hline b\to -3 & 2 & 5 & -3 & \boxed{0} \\ & & -6 & 3 & \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

이므로 $x+1$, $x+3$이라는 인수가 있다.

즉, $2x^3+7x^2+2x-3$은

$(x+1)(x+3)(\underset{A}{2x-1})$로 인수분해된다.

$\therefore a=-5,\ b=-3,\ A=2x-1$

$\therefore bA+a=-3(2x-1)+(-5)=-6x-2$

22 답 ③

$f(x)=x^4-2x^3+2x^2-x-6$이라 놓자.

$f(-1)=1+2+2+1-6=0$,

$f(2)=16-16+8-2-6=0$이므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 2 & -1 & -6 \\ & & -1 & 3 & -5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 5 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4-2x^3+2x^2-x-6$

$=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

$\therefore a=-2,\ b=-1,\ c=3 \Rightarrow a+b+c=0$

23 답 ⑤

> 다항식 $x^4-2x^3-7x^2+ax+12$가
> $(x+b)(x-2)(x-3)(x+c)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c에 대하여 $-a+2b+4c$의 값은?
> 주어진 다항식의 인수가 있으니까 이것으로 a의 값을 구하자.
> (단, $c>b$)
>
> ① -2 ② -1 ③ 0
> ④ 1 ⑤ 2

1st 인수가 $x-2$, $x-3$임을 이용하여 조립제법으로 몫을 구하자.

$x^4-2x^3-7x^2+ax+12$의 인수 중 하나가 $x-2$이므로

$x=2$를 대입하면 0이어야 하므로

다항식의 인수라는 것은 인수가 0이 되는 값을 대입하면 다항식이 0이 나온다는 거야.

$16-16-28+2a+12=0 \Rightarrow a=8$

다항식 $x^4-2x^3-7x^2+8x+12$를 조립제법으로 인수분해하면

인수가 $x-2$, $x-3$이라고 하지?

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -2 & -7 & 8 & 12 \\ & & 2 & 0 & -14 & -12 \\ \hline 3 & 1 & 0 & -7 & -6 & \boxed{0} \\ & & 3 & 9 & 6 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4-2x^3-7x^2+8x+12=(x-2)(x-3)(x^2+3x+2)$

$=(x+1)(x-2)(x-3)(x+2)$

2nd $c>b$임을 이용하여 b, c의 값을 구하자.

$c>b$이므로 $b=1$, $c=2$

$\therefore -a+2b+4c=-8+2\times1+4\times2=2$

24 답 ②

$11^4-6^4=(11^2-6^2)(11^2+6^2)$

$=(11-6)(11+6)(11^2+6^2)$

$=5\times17\times157$

$\therefore a=5,\ b=17 \Rightarrow a+b=5+17=22$

25 답 ④

$a^3+b^3+a^2b+ab^2=ac^2+bc^2$

$a^3+a^2b+b^3+ab^2=ac^2+bc^2$

$a^2(a+b)+b^2(a+b)=c^2(a+b)$

$a+b\neq0$이므로 양변을 $a+b$로 나누면

$a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 각 C가 직각인 직각삼각형이다.

26 답 ④

$f(x)=x^3+x^2-8x-12$에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=3^3+3^2-8\times3-12=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 1 & -8 & -12 \\ & & 3 & 12 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=x^3+x^2-8x-12$

$=(x-3)(x^2+4x+4)$

$=(x-3)(x+2)^2$

여기에 $x=98$을 대입하면

$f(98)=(98-3)(98+2)^2$

$=95\times100^2$

$=950000$

Ⅱ 방정식과 부등식

Simple F 복소수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 48~49

01 답 i

02 답 2, 3

03 답 0

04 답 $1+i$

05 답 실수

06 답 ○

07 답 ×

08 답 ○

09 답 ×

10 답 3, $\sqrt{2}$

11 답 -2, -1

12 답 -3, 0

13 답 0, 2

14 답 ㄴ, ㄹ

15 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

16 답 ㄱ, ㅁ

17 답 ㄷ, ㅂ

18 답 $x=1$, $y=-3$

19 답 $x=5$, $y=0$

20 답 $x=0$, $y=-7$

21 답 $4+3i$

22 답 $-1-2i$

23 답 -2

24 답 $-\sqrt{3}i$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 50~51

25 답 ④

① 실수는 복소수이다.

② 제곱하여 -4가 되는 수는 $x^2=-4$에서 $x=\pm 2i$이다.

③ $2=2+0\cdot i$이므로 허수부분은 0이다.

⑤ 실수 a, $b\,(b\neq 0)$에 대하여 허수는 $a+bi$ 꼴로 나타낸다.

26 답 ③

$-1+i$: 허수, 0 : 실수, $\sqrt{5}i$: 순허수,

$i^2=-1$: 실수, $(-\sqrt{2})^2=2$: 실수

27 답 ②

$-2i$: 순허수, $\sqrt{3}+\sqrt{2}i$: 허수, $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}i$: 허수

$i^2=-1$: 실수, $\sqrt{2}i^2=-\sqrt{2}$: 실수

따라서 허수의 개수 $a=3$, 순허수가 아닌 허수의 개수 $b=2$이므로 $a+b=5$

TIP

순허수와 허수를 헷갈릴 수 있다. 순허수와 허수의 공통점은 허수부분이 모두 0이 아니라는 것이다.
차이점은 순허수는 실수부분이 0인 복소수이고, 허수는 실수부분이 0이 아닌 복소수라는 것이다.

28 답 ⑤

복소수 $(3a-2)+(a-2)i$에서

$a-2=0$일 때 실수가 된다.

$\therefore a=2$

29 답 ①

복소수 $(x^2-1)+(x^2+3x+2)i$가 0이 아닌 실수가 되려면

$x^2-1\neq 0$, $x^2+3x+2=0$이어야 한다.

$$\begin{cases} x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1 \\ x^2+3x+2=0 \Rightarrow (x+1)(x+2)=0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow x=-1 \text{ 또는 } x=-2 \end{cases}$$

따라서 조건을 만족하는 x의 값은 -2이다.

30 답 ④

복소수 $x(x-3)+(x-1)(x-3)i$가 순허수가 되려면

$x(x-3)=0$, $(x-1)(x-3)\neq 0$이어야 한다.

$$\begin{cases} x(x-3)=0 \Rightarrow x=0 \text{ 또는 } x=3 \\ (x-1)(x-3)\neq 0 \Rightarrow x\neq 1 \text{ 또는 } x\neq 3 \end{cases}$$

따라서 조건을 만족하는 x의 값은 0이다.

31 답 ④

복소수 $(x^2-3x+2)+(x^2-x-2)i$가 순허수가 되려면

$x^2-3x+2=0$, $x^2-x-2\neq 0$이어야 한다.

$$\begin{cases} x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow x=1 \text{ 또는 } x=2 \\ x^2-x-2\neq 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)\neq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow x\neq -1 \text{ 또는 } x\neq 2 \end{cases}$$

따라서 조건을 만족하는 x의 값은 1이다.

32 답 ⑤

등식 $(x-2)+(2y-3)i=-7i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$x-2=0$, $2y-3=-7$

$\therefore x=2$, $y=-2$

심플 정리

[복소수가 서로 같을 조건]
a, b, c, d가 실수일 때,
(1) $a+bi=c+di$이면 $a=c, b=d$
(2) $a+bi=0$이면 $a=0, b=0$

33 답 ③

등식 $(x-1)+(x+2y)i=2+3i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$x-1=2, x+2y=3$

연립하여 풀면

$x=3, y=0 \quad \therefore x+y=3$

34 답 ①

등식 $(2x+4)+(x-y)i=2-4i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$2x+4=2, x-y=-4$

연립하여 풀면

$x=-1, y=3 \quad \therefore xy=-3$

35 답 ②

등식 $x(1+2i)+y(2-i)+5i=0$에서

$x+2xi+2y-yi+5i=0$

$(x+2y)+(2x-y+5)i=0$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$x+2y=0, 2x-y+5=0$

연립하여 풀면

$x=-2, y=1 \quad \therefore \frac{x}{y}=-2$

36 답 ①

$\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi=(2a-1)+(b-2)i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$a=2a-1, -b=b-2$

$\therefore a=1, b=1 \Rightarrow ab=1$

TIP

켤레복소수를 적용할 때, 착각하기 쉬운 것이 i의 위치가 바뀌었을 때이다. $\overline{3i+4}$를 $3i-4$로 착각하는 경우가 있는데, 허수부분이 보통은 뒤에 위치했던 것에 익숙하기 때문이다. 항상 허수부분만 부호가 바뀐다는 사실을 기억하자.

37 답 ⑤

$\overline{z}=\overline{x+2yi}=x-2yi=5+4i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$x=5, -2y=4$

$\therefore x=5, y=-2 \Rightarrow x+y=3$

38 답 ②

$(x-y)+(x+2y)i=\overline{z}=2-4i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$x-y=2, x+2y=-4$

연립하여 풀면

$x=0, y=-2 \Rightarrow x+y=-2$

39 답 ①

$(4x-y)-(2x+3y)i=\overline{z}=7+7i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$4x-y=7, 2x+3y=-7$

연립하여 풀면

$x=1, y=-3 \Rightarrow \frac{y}{x}=-3$

Simple G 복소수의 계산

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 52～53

01 답 실수부분, 허수부분

02 답 켤레복소수

03 답 $1, i, -1, -i$

04 답 $\pm\sqrt{2}i$

05 답 ×

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ○

09 답 5

$(2+i)+(3-i)=(2+3)+(1-1)i=5$

10 답 $-2+i$

$(-3+2i)+(1-i)=(-3+1)+(2-1)i=-2+i$

11 답 $1+i$

$(3-2i)-(2-3i)=(3-2)+(-2+3)i=1+i$

12 답 $4+\sqrt{3}i$

$(1-\sqrt{3}i)-(-3-2\sqrt{3}i)$

$=\{1-(-3)\}+\{-\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})\}i$

$=4+\sqrt{3}i$

13 답 $5+12i$

$(3+2i)^2=9+12i+4i^2=9+12i-4=5+12i$

14 답 $-8+i$

$(2+i)(-3+2i)=-6+4i-3i+2i^2=-8+i$

15 답 7

$(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)=4-3i^2=7$

16 답 $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

$\frac{1}{2-i}=\frac{2+i}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+i}{4-i^2}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

17 답 $2-i$

$\frac{1+2i}{i}=\frac{-(1+2i)i}{-i\times i}=\frac{-i-2i^2}{1}=2-i$

18 답 $-i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}=\frac{-2i}{2}=-i$

19 답 0

$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$

20 답 0

$i^4+i^{10}=1+(i^4)^2\cdot i^2=1-1=0$

21 답 $2\sqrt{2}i$

$\sqrt{2}\sqrt{-4}=\sqrt{2}\sqrt{4}i=2\sqrt{2}i$

22 답 $-2\sqrt{2}$

$\sqrt{-2}\sqrt{-4}=\sqrt{2}i\sqrt{4}i=2\sqrt{2}i^2=-2\sqrt{2}$

23 답 $2i$

$\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}}=2i$

24 답 $-2i$

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}=\frac{2}{i}=-2i$

25 답 2

$\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}=2$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 54~57

26 답 ⑤

$z_1-\overline{z_2}=(3+i)-(1+i)=2$

27 답 ③

$z_1=(a-b)-(2b-1)i$, $z_2=3+(a+2)i$에서

$z_1+z_2=(a-b+3)+(a-2b+3)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$a-b+3=0$, $a-2b+3=0$

연립하여 풀면

$a=-3$, $b=0$ $\quad\therefore a+b=-3$

28 답 ④

$(2+i)(a+bi)=2a+2bi+ai+bi^2$

$=(2a-b)+(a+2b)i=1+3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$2a-b=1$, $a+2b=3$

연립하여 풀면

$a=1$, $b=1$ $\quad\therefore a+b=2$

TIP

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$와 같이 복소수의 곱셈을 공식처럼 외울 필요가 없이 다항식의 곱셈을 전개하듯이 차례로 곱셈을 하면 된다. 다만 $i^2=-1$임을 꼭 기억하여 적용하기만 하면 된다.

29 답 ③

$\frac{3-2i}{2+i}=\frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6-3i-4i+2i^2}{4-i^2}$

$=\frac{4-7i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i=a+bi$

$\therefore a=\frac{4}{5}$, $b=-\frac{7}{5}$ ⇨ $a+b=-\frac{3}{5}$

30 답 ②

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$이므로 $x+y$와 xy의 값을 구하자.

$\begin{cases} x+y=1+2i+1-2i=2 \\ xy=(1+2i)(1-2i)=1-4i^2=5 \end{cases}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{2}{5}$

31 답 ①

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=i^2+(-i)^2=-1-1=-2$

TIP

복소수의 사칙연산에서 자주 나오는 것은 기억하면 나중에 계산할 때, 시간을 절약할 수 있다.

$\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$가 그 대표적인 예이다.

32 답 ③

$\frac{1}{5}(1-2i)(3+i)(3-i)-\frac{3+4i}{1+i}$

$=\frac{1}{5}(1-2i)(3^2-i^2)-\frac{(3+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=2(1-2i)-\frac{7+i}{2}$

$=-\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i=x+yi$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$, $y=-\frac{9}{2}$ ⇨ $\frac{y}{x}=3$

33 답 ②

$$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}$$
$$=\frac{3-i}{2}$$

$\therefore x+y=3,\ -x+y=-1$

연립하여 풀면

$x=2,\ y=1 \qquad \therefore xy=2$

34 답 ②

$(3+i)(x-3i)=3x-9i+ix+3=3(x+1)+(x-9)i$

여기서 $x=9$이면 실수이고 $x=-1$이면 순허수이다.

$\therefore a=9,\ b=-1 \Rightarrow a+2b=7$

TIP

복소수 z의 특성에 대해 자주 시험에 나오고 있다.
특히, z^2이 음의 실수가 나올 조건은 z가 순허수일 때이기 때문에 실수부분이 0이 되고 허수부분이 0이 아니어야 한다.

35 답 ①

주어진 식을 정리하면

$z=(x^2-2x-3)+(x-3)i$

이때, z^2이 음의 실수이려면 z는 순허수이어야 한다.

즉, $x^2-2x-3=0,\ x-3\neq0$이어야 하므로

$(x+1)(x-3)=0,\ x-3\neq0$

$\therefore x=-1$

36 답 ⑤

주어진 식을 정리하면

$z=(x^2-3x-18)+(x^2+4x+3)i$
$\ =(x+3)(x-6)+(x+1)(x+3)i$

z^2이 음의 실수이려면 z는 순허수이어야 한다.

즉, $(x+3)(x-6)=0,\ (x+1)(x+3)\neq0$

$\therefore x=6$

37 답 ①

$i(x+3i)^2=i(x^2+6xi-9)$
$\qquad =-6x+i(x^2-9)$

가 양의 실수가 되려면 (실수부분)>0, (허수부분)$=0$이어야 하므로

$-6x>0,\ x^2=9 \qquad \therefore x=-3$

38 답 ④

$\alpha=3+2i,\ \beta=1-i$이므로 $\alpha+\beta=4+i$

$\therefore \overline{\alpha+\beta}=4-i$

$\therefore (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})=(4+i)(4-i)$
$\qquad =16+1=17$

39 답 ⑤

$\alpha+\overline{\beta}=(a+2i)+(\overline{3-bi})=(a+2i)+(3+bi)$
$\qquad =(a+3)+(b+2)i=5-6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$a+3=5,\ b+2=-6$이므로

$a=2,\ b=-8$

$\therefore a+b=-6$

심플 정리

[복소수가 서로 같을 조건]

$a,\ b,\ c,\ d$가 실수일 때,

(1) $a+bi=c+di$이면 $a=c,\ b=d$

(2) $a+bi=0$이면 $a=0,\ b=0$

40 답 ⑤

복소수 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면

$\overline{z}=a-bi$

이것을 주어진 등식에 대입하여 정리하면

$(2-i)(a+bi)-i(a-bi)=2+4i$

$2a+2bi-ai+b-ai-b=2+4i$

$\therefore 2a+2(b-a)i=2+4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$2a=2,\ 2(b-a)=4$

$\therefore a=1,\ b=3$

따라서 $z=1+3i,\ \overline{z}=1-3i$이므로

$z\overline{z}=(1+3i)(1-3i)=1+9=10$

41 답 ②

$z^2=(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=a^2-b^2+2abi$

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

$z+i\overline{z}=(a+bi)+i(a-bi)$
$\qquad =a+bi+ai-bi^2$
$\qquad =a+b+(a+b)i$

$z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

따라서 실수인 것은 $z\overline{z}$뿐이므로 1개이다.

42 답 ③

$i+2i^2+3i^3+4i^4=i-2-3i+4=2-2i$

43 답 ①

$i^{10}=(i^4)^2\cdot i^2=-1$이므로

$i^{10}+\frac{1}{i^{10}}=-1-1=-2$

44 답 ④

$\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i,\ \frac{1}{i^2}=-1,\ \frac{1}{i^3}=\frac{i}{i^4}=i,$

$\frac{1}{i^4}=1$이므로

$\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}=-i-2+3i+4=2+2i$

45 답 ②

$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$

$i^5+i^6+i^7+i^8=i+i^2+i^3+i^4=0$

$\vdots$

$i^{1013}+i^{1014}+i^{1015}+i^{1016}=i+i^2+i^3+i^4=0$

이므로

$i+i^2+\cdots+i^{1017}=i^{1017}=(i^4)^{254}\cdot i=i$

> 심플 정리
>
> [i의 거듭제곱]
>
> k가 음이 아닌 정수일 때,
>
> (1) $i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$
>
> (2) $i^{4k}+i^{4k+1}+i^{4k+2}+i^{4k+3}=0$

46 답 ③

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{1+1}=-i$이므로

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}=(-i)^{100}=\{(-i)^4\}^{25}=1$

47 답 ②

$\frac{1-i}{i}=\frac{(1-i)i}{i^2}=\frac{i-i^2}{-1}=-1-i$

$\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)i}{i^2}=\frac{i+i^2}{-1}=1-i$

$\therefore \left(\frac{1-i}{i}\right)^2+\left(\frac{1+i}{i}\right)^2=(-1-i)^2+(1-i)^2$

$=2i-2i=0$

48 답 ⑤

$(1-i)^2=1-2i-1=-2i$

$(1-i)^4=(-2i)^2=-4$

$(1-i)^2+(1-i)^4=-4-2i=a+bi$

$\therefore a=-4,\ b=-2 \Rightarrow a^2+b^2=20$

49 답 ①

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로

$(1+i)^5=\{(1+i)^2\}^2(1+i)=(2i)^2(1+i)$

$=-4(1+i)=-4-4i$

$=a+bi$

$\therefore a=-4,\ b=-4 \Rightarrow a+b=-8$

50 답 ①

$(5+\sqrt{-64})+(-3-\sqrt{-81})$

$=(5+8i)+(-3-9i)$

$=2-i$

51 답 ①

$\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{2}i\times 2\sqrt{2}i+\frac{2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i}$

$=4i^2+2=-4+2=-2$

> TIP
>
> 음의 제곱근을 이용하여 계산하려면 제곱근 안이 음수인 조건을 적당히 써야 하지만 헷갈릴 수 있다. 그래서 허수단위 i를 이용하여 나타내고 $i^2=-1$을 적용하면 틀리지 않고 정확히 계산할 수 있다.

52 답 ②

$\frac{2-\sqrt{-4}}{2+\sqrt{-4}}-\frac{3+\sqrt{-9}}{3-\sqrt{-9}}$

$=\frac{2-2i}{2+2i}-\frac{3+3i}{3-3i}=\frac{2(1-i)}{2(1+i)}-\frac{3(1+i)}{3(1-i)}$

$=\frac{1-i}{1+i}-\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}-\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$

$=\frac{-2i}{2}-\frac{2i}{2}=-2i$

53 답 ①

$\sqrt{-3}\sqrt{-2}\sqrt{2}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{2}i\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}i}$

$=6i^2+\frac{\sqrt{3}}{i}=-6+\frac{\sqrt{3}i}{-1}$

$=-6-\sqrt{3}i=a+bi$

$\therefore a=-6,\ b=-\sqrt{3} \Rightarrow a-b^2=-9$

54 답 ④

$\sqrt{ab}=-\sqrt{ab}$가 성립하기 위한 조건은 $a\le 0,\ b\le 0$이다.

따라서 선택지 중 조건을 만족시키는 순서쌍으로 알맞은 것은 $(-2,\ -2)$이다.

55 답 ④

$\sqrt{x-4}\sqrt{2-x}=-\sqrt{(x-4)(2-x)}$가 성립하려면

$x-4\le 0,\ 2-x\le 0$이어야 한다.

$\therefore 2\le x\le 4$

따라서 정수 x의 값의 합은 $2+3+4=9$이다.

56 답 ③

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$가 성립하기 위한 조건은 $a\ge 0,\ b<0$이다.

따라서 선택지 중 조건을 만족시키는 순서쌍으로 알맞은 것은 $(2,\ -3)$이다.

57 답 ③

$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}=-\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$가 성립하려면

$x+2\ge 0,\ x-1<0$이어야 한다.

$\therefore -2\le x<1$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0$으로 3개이다.

연습 문제 [F~G] [기출＋기출 변형] 문제편 pp. 58~59

01 답 ④

> 등식 $2x(3+i)=3y+4i$를 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)
>
> 정리하여 복소수가 서로 같을 조건을 이용하자.
>
> ① 3 ② 4 ③ 5
> ④ 6 ⑤ 7

1st 주어진 등식을 정리하여 $a+bi=c+di$ (a, b, c, d는 실수) 꼴로 만들어야 해.

$2x(3+i)=3y+4i$

$6x+2xi=3y+4i$

2nd x, y가 실수라는 조건에서 복소수가 서로 같을 조건을 이용하자.

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$6x=3y$, $2x=4$ 실수 a, b, c, d에 대하여 $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.

연립하여 풀면

$\therefore x=2,\ y=4 \Rightarrow x+y=6$

02 답 ②

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

$$\begin{cases} x+y=(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=2 \\ xy=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=1-3i^2=4 \end{cases}$$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-8=-4$

03 답 ①

$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1+2i+i^2}{2}=i$,

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1-2i+i^2}{2}=-i$이므로

$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=i-(-i)=2i$

04 답 ④

$(2x-i)(1+2yi)=2\sqrt{6}+3i$를 정리하면

$(2x+2y)+(4xy-1)i=2\sqrt{6}+3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+2y=2\sqrt{6}$, $4xy-1=3$이므로

$x+y=\sqrt{6}$, $xy=1$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6-2=4$

05 답 ②

$a-c=(a-b)+(b-c)=(2+i)+(2-i)=4$이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2$

$=(2+i)^2+(2-i)^2+4^2$

$=4+4i+i^2+4-4i+i^2+16=22$

06 답 ④

> 두 양수 x, y에 대하여 복소수 $(1+2i)x-(2+i)y+i$를 제곱하였더니 -4가 되었다. 이때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)
>
> 제곱한 값이 음수가 나오려면 주어진 복소수가 순허수이어야 하지.
>
> ① -3 ② -1 ③ 0
> ④ 1 ⑤ 3

1st 제곱하여 a가 되는 것은 $x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$가 돼.

$z^2=-4$에서 $z=\pm 2i$이므로 제곱하여 -4가 되는 복소수는 순허수 $\pm 2i$뿐이다. 제곱한 값이 음수가 나오는 경우는 순허수밖에 없어.

$(1+2i)x-(2+i)y+i=(x-2y)+(2x-y+1)i$

$=\pm 2i$

2nd $+2i$, $-2i$인 두 경우로 나눠서 양수 x, y를 구하자.

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$x-2y=0$, $2x-y+1=\pm 2$

(i) $x=2y$, $2x-y+1=2$일 때,

$x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore x+y=1$

$x=2y$를 $2x-y+1=2$에 대입하면 $4y-y+1=2 \Rightarrow 3y=1$ $\therefore y=\dfrac{1}{3}$, $x=2y=2\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

(ii) $x=2y$, $2x-y+1=-2$일 때,

$x=-2$, $y=-1$

그런데 x, y가 양수이므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 구하는 값은 1이다.

07 답 ③

$(1+2i)x+\dfrac{y}{2-i}=1-2i$의 양변에 $2-i$를 곱하면

$(1+2i)(2-i)x+y=(1-2i)(2-i)$

$(4+3i)x+y=-5i$

$(4x+y)+3xi=-5i$

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$4x+y=0$, $3x=-5$

$\therefore x=-\dfrac{5}{3},\ y=\dfrac{20}{3} \Rightarrow x+y=5$

08 답 4

$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1+2i+i^2}{2}=i$이므로

$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n=i^n=1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

09 답 ②

$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

$i-\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{501}=i-(-i)^{501}=i-\{(-i)^4\}^{125}\cdot(-i)$

$=i+i=2i$

따라서 $a+bi=2i$에서 $a=0$, $b=2$이므로 $a+b=2$이다.

10 답 ②

$z i=(2-i) i=1+2 i$이므로

$\overline{z i}=1-2 i=a+b i$

$\therefore a=1, b=-2 \Rightarrow a+b=-1$

11 답 ⑤

복소수 $z=1-i$이므로 $\bar{z}=1+i$

$z+\frac{1}{\bar{z}}=1-i+\frac{1}{1+i}=1-i+\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}$

$=1-i+\frac{1-i}{2}=\frac{3-3i}{2}$

12 답 ⑤

두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha\bar{\beta}=1$, $\alpha+\frac{1}{\bar{\alpha}}=2i$일 때,

$\beta+\frac{1}{\bar{\beta}}$의 값은?

두 복소수 α, β의 관계를 잘 살펴보면 돼. 특히 $\alpha\bar{\beta}=1$을 이용하자.

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

① -2 ② 2 ③ $-2i$ ④ i ⑤ $2i$

1st 켤레복소수의 성질을 이용하여 $\bar{\beta}$를 α에 대해 나타내보자.

$\alpha\bar{\beta}=1$에서 $(\overline{\alpha\bar{\beta}})=\bar{\alpha}\beta=1$이므로

$\frac{1}{\beta}=\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}=\frac{1}{\alpha}$ $(\overline{\alpha\bar{\beta}})=\bar{\alpha}(\bar{\bar{\beta}})=\bar{\alpha}\beta$

2nd $\beta+\frac{1}{\bar{\beta}}$을 α에 대하여 나타내고 그 값을 구하자.

$\therefore \beta+\frac{1}{\bar{\beta}}=\frac{1}{\bar{\alpha}}+\alpha=2i$

심플 정리

[켤레복소수의 성질]

두 복소수 z_1, z_2와 그 각각의 켤레복소수 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$에 대하여

(1) $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$

(2) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

13 답 2

$z-2i\bar{z}=a+bi-2i(a-bi)$

$=a+bi-2ai-2b$

$=(a-2b)+(b-2a)i$

$=3-3i$ … Ⅰ

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$a-2b=3$, $b-2a=-3$

연립하여 풀면

$a=1$, $b=-1$ … Ⅱ

$\therefore a-b=1-(-1)=2$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	식을 정리하여 $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$ (α, β, γ, δ는 실수) 꼴로 나타낸다.	40%
Ⅱ	복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 식을 구하고, a, b의 값을 유도한다.	40%
Ⅲ	$a-b$의 값을 구한다.	20%

14 답 ⑤

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=-4$

허수단위 i를 이용하여 식을 나타낸 후 계산하자.

ㄴ. $\frac{4}{\sqrt{(-2)^2}}=2$

ㄷ. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=-2i$ (단, $i=\sqrt{-1}$)

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$로 놓고 계산하자.

ㄱ. $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\times2\sqrt{2}i=4i^2=-4$ (참)

음의 제곱근의 계산에 의해 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=-\sqrt{(-2)\times(-8)}=-4$로 구해도 돼.

ㄴ. $\frac{4}{\sqrt{(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{4}}=2$ (참)

ㄷ. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}=\frac{2}{i}=-2i$ (참)

이것도 음의 제곱근의 계산에 의해 $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{\frac{8}{-2}}=-2i$.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15 답 ①

$x-3\leq0$, $2-x\leq0$에서 $2\leq x\leq3$

$\therefore |x-2|+|x-3|=(x-2)-(x-3)=1$

16 답 ①

$a\geq0$, $b<0$이므로 $a-b>0$, $b-1<0$, $a+2>0$

$\therefore |a-b|-|b-1|-|a+2|$

$=(a-b)+(b-1)-(a+2)$

$=a-b+b-1-a-2=-3$

TIP

$|A|=\begin{cases} A & (A\geq0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$에서 음의 부호($-$)가 붙었다고 음수라고 생각하지 말자. 문자로 나타낼 때, 그 문자가 0보다 작거나 같을 경우 음의 부호를 붙여서 양수 또는 0이 되도록 한 것이므로 음이 나오지 않도록 한 것이다.

Simple H 이차방정식의 풀이

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 60～61

01 답 방정식

02 답 해, 근 (근, 해)

03 답 2

04 답 실근, 허근

05 답 ×

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ×

09 답 $x=0$

10 답 $x=\frac{2}{3}$

11 답 $x=-1$

12 답 $x=6$

13 답 $x=1$ 또는 $x=2$

14 답 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-2$

15 답 $x=-2\pm\sqrt{6}$

16 답 $x=1\pm i$

17 답 $x=\pm\sqrt{5}i$

18 답 $x=\pm\frac{1}{2}i$

19 답 $x=1\pm\sqrt{3}i$

20 답 $x=\frac{-1\pm2i}{2}$

21 답 (가) 3 (나) ±3

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 62~65

22 답 ⑤

$2(x-5)+1=-3(2x-1)+4$를 정리하면

$2x-9=-6x+7$

$8x=16 \qquad \therefore x=2$

23 답 ④

$\frac{x-1}{3}-1=2(x-4)$의 양변에 3을 곱하면

$x-1-3=6x-24$

$5x=20 \qquad \therefore x=4$

24 답 ④

$x=2$가 주어진 방정식의 해이므로 $ax=x+b$에 대입하면

$2a=b+2$ ⋯ ㉠

방정식 $bx=-2x+4a$에서

$(b+2)x=4a$, $2ax=4a$ ($\because$ ㉠)

$\therefore x=2$ ($\because a\neq0$)

25 답 ②

방정식 $|x-1|+3x=1$에서 다음과 같이 x의 값의 범위를 나눈다.

(i) $x\geq1$일 때, $|x-1|=x-1$이므로

$x-1+3x=1$

$4x=2 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}<1$이므로 모순이다.

(ii) $x<1$일 때, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$-x+1+3x=1 \qquad \therefore x=0$

(i), (ii)에서 $x=0$

TIP

절댓값 기호가 보이면 절댓값 기호를 없애서 식을 정리해야 한다. 절댓값 기호를 없애는 방법은 절댓값 안이 0이 되는 값을 기준으로 범위를 나누는 것이다. 이것은 절댓값이 있는 모든 문제에 적용하는 기본적인 방법임을 기억하자.

26 답 ②

방정식 $(k^2-1)x=k^2-k$를 정리하면

$(k+1)(k-1)x=k(k-1)$

(i) $k=-1$이면 $0\cdot x=2$가 되어 해가 없다.

(ii) $k=1$이면 $0\cdot x=0$이 되어 해는 모든 실수이다.

$\therefore k=-1$

27 답 ⑤

방정식 $a^2x-2=6x+a(x+1)$을 정리하면

$(a^2-a-6)x=a+2$

$(a-3)(a+2)x=a+2$

(i) $a=3$이면 $0\cdot x=5$가 되어 해가 없다.

(ii) $a=-2$이면 $0\cdot x=0$이 되어 해는 모든 실수이다.

$\therefore a=3$

28 답 ④

$2a^2x+3=3a+2x$

$2(a+1)(a-1)x=3(a-1)$

(i) $a=-1$이면 $0\cdot x=-6$이 되어 해가 없다.

(ii) $a=1$이면 $0\cdot x=0$이 되어 해는 모든 실수이다.

$\therefore a=1$

29 답 ①

$(a^2-2a)x-1=3x+a$

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

(i) $a=3$이면 $0\cdot x=4$가 되어 해가 없다.

(ii) $a=-1$이면 $0\cdot x=0$이 되어 해는 모든 실수이다.

$\therefore a=-1$

TIP

일차방정식 꼴의 해가 2개 이상이라는 의미를 잘 이해한다면 어렵지 않다. 간단히 해가 무수히 많을 때와 의미가 같은 것이다. 다른 표현이지만 같은 의미를 잘 이해해야 한다. 항등식의 표현도 '모든 실수 x에 대하여 등식 ~이 성립', '임의의 실수 x에 대하여 등식 ~이 성립' 다른 표현 같지만 같은 의미인 것과 마찬가지이다.

30 답 ⑤

이차방정식 $-x^2+2x-1=x^2-3x+1$에서

$2x^2-5x+2=0$

$(2x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

심플 정리

[인수분해 공식]

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(3) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(4) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

31 답 ①

이차방정식 $(x+3)^2=3x+13$에서

좌변을 전개하여 정리하면

$x^2+6x+9=3x+13$

$x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

32 답 ⑤

이차방정식 $\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{2}x=\frac{3}{5}$의 양변에 분모의 최소공배수 10을 곱하면

$x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

33 답 ④

이차방정식 $\frac{x^2-1}{2}+1=\frac{2x^2-x}{3}$의 양변에 분모의 최소공배수 6을 곱하면

$3x^2-3+6=4x^2-2x$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

34 답 ④

$4x^2+4x+3=0$에서

$(4x^2+4x+1)+2=0$

$(2x+\underset{(가)}{\boxed{1}})^2=-2$

$2x+\boxed{1}=\pm\underset{(나)}{\boxed{\sqrt{2}}}i$

$2x=-\boxed{1}\pm\boxed{\sqrt{2}}i$

$\therefore x=\frac{-\boxed{1}\pm\boxed{\sqrt{2}}i}{2}$

즉, $a=1$, $b=\sqrt{2}$이므로 $a+b=1+\sqrt{2}$

35 답 ③

$2(x-a)^2=5$

$(x-a)^2=\frac{5}{2}$

$x-a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x=a\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

이것이 $x=-3\pm\frac{\sqrt{b}}{2}$이므로

$a=-3$, $b=10$ $\quad\therefore a+b=7$

36 답 ③

이차방정식 $5x^2+x-1=0$에 근의 공식을 이용하면

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot5\cdot(-1)}}{2\cdot5}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{10}$

37 답 $x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$

이차방정식 $3x^2-4x-2=0 \Rightarrow 3x^2+2\cdot(-2)x-2=0$에 근의 공식(짝수 공식)을 이용하면

$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-3\times(-2)}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$

TIP

이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근을

$x=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}$를 이용하면 계산이 편리하다.

이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$을 일반 근의 공식을 이용하여 구하면 이 공식을 유도할 수 있다.

$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b')^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{(b')^2-ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}$

38 답 ③

이차방정식 $2x^2-3x+3=0$에 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times3}}{2\cdot2}=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{4}$$

39 답 $x=\frac{1\pm2i}{2}$

이차방정식 $4x^2-4x+5=0$ ⇨ $4x^2+2\cdot(-2)x+5=0$에

근의 공식(짝수 공식)을 이용하면

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times5}}{4}=\frac{2\pm4i}{4}=\frac{1\pm2i}{2}$$

40 답 ④

$x^2-|x|=0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2-|x|=0$

$|x|(|x|-1)=0$

$|x|=0$ 또는 $|x|=1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm1$

41 답 ②

$x^2-2|x|-3=0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2-2|x|-3=0$

$(|x|+1)(|x|-3)=0$

$|x|+1>0$이므로 $|x|=3$

$\therefore x=\pm3$

42 답 2

$x^2-2|x|+1=0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2-2|x|+1=0$

$(|x|-1)^2=0$ ($\because x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$)

$|x|=1$ $\quad\therefore x=\pm1$

따라서 모든 근의 제곱의 합은 $1^2+(-1)^2=2$이다.

43 답 $\frac{1}{4}$

$2x^2-3|x|+1=0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$2|x|^2-3|x|+1=0$

$(2|x|-1)(|x|-1)=0$

$|x|=\frac{1}{2}$ 또는 $|x|=1$

$\therefore x=\pm\frac{1}{2}$ 또는 $x=\pm1$

따라서 모든 근을 곱한 값은 $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot1=\frac{1}{4}$이다.

44 답 ④

$x^2-|x|-1=0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2-|x|-1=0$

근의 공식을 이용하면

$|x|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\because |x|\ge0$)

$\therefore |\alpha|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

45 답 ⑤

$|x^2-3|=2x$에서 $|x^2-3|\ge0$이므로

$2x\ge0$이다. 즉, $x\ge0$

(i) $x^2-3=2x$일 때

$x^2-2x-3=0$이므로

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ (가)

$x\ge0$이므로 $x=3$이다.

(ii) $x^2-3=-2x$일 때

$x^2+2x-3=0$이므로

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$ (나)

$x\ge0$이므로 $x=1$이다.

(i), (ii)에서 $|x^2-3|=2x$의 해는

$x=3$ 또는 $x=1$이다.

$\therefore a=3,\ b=1$ ⇨ $a+b=4$

46 답 ③

이차방정식 $x^2+kx+2=0$의 한 근이 1이므로

$x=1$을 대입하면

$1+k+2=0$ $\quad\therefore k=-3$

47 답 ②

이차방정식 $x^2+2ax-4a^2=0$의 한 근이 1이므로

$x=1$을 대입하면

$1+2a-4a^2=0$

a에 대한 이차방정식 $4a^2-2a-1=0$에서

근의 공식(짝수 공식)을 이용하면

$a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$a>0$이므로 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

TIP

이 문제의 경우 x에 대한 이차방정식과 a에 대한 이차방정식이 연달아 나온다. 문자의 종류와 상관없이 이차방정식 꼴이면 근의 공식을 이용하여 풀 수 있다.

48 답 ③

이차방정식 $x^2-mx+3m-1=0$의 한 근이 2이므로

$x=2$를 대입하면

$4-2m+3m-1=0$

$\therefore m=-3$

$m=-3$을 주어진 식에 대입하면

$x^2+3x-10=0$

$(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

따라서 다른 한 근은 $x=-5$이다.

49 답 ②

이차방정식 $x^2+mx+m-3=0$의 한 근이 1이므로

$x=1$을 대입하면

$1+m+m-3=0$

$\therefore m=1$

$m=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

즉, 나머지 한 근 $\alpha=-2$이다.

$\therefore m+\alpha=-1$

50 답 ③

이차방정식 $kx^2-3x+k^2-2=0$의 한 근이 -2이므로

$x=-2$를 대입하면

$4k+6+k^2-2=0$

$k^2+4k+4=0$

$(k+2)^2=0$

$\therefore k=-2$

$k=-2$를 주어진 방정식에 대입하면

$-2x^2-3x+2=0$

$2x^2+3x-2=0$

$(x+2)(2x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

즉, 나머지 한 근은 $\alpha=\frac{1}{2}$이다.

$\therefore k+\alpha=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

Simple Ⅰ 이차방정식의 판별식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 66~67

01 답 판별식

02 답 b^2-4ac

03 답 $(b')^2-ac$

04 답 $b^2-4ac=0$

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ×

08 답 ○

09 답 (1) 9 (2) 서로 다른 두 실근

10 답 (1) 0 (2) 중근

11 답 (1) -7 (2) 서로 다른 두 허근

12 답 (1) 8 (2) 서로 다른 두 실근

13 답 ±4

14 답 16

15 답 $\frac{25}{4}$

16 답 ±1

17 답 1

18 답 (가) 21 (나) 3

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 68~69

19 답 ②

ㄱ. 이차방정식 $3x^2+x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times3\times(-1)=13>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2+x+\frac{1}{4}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times\frac{1}{4}=0$

이므로 중근을 갖는다.

ㄷ. 이차방정식 $2x^2-\sqrt{3}x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(\sqrt{3})^2-4\times2\times(-2)=19>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.

ㄹ. 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\times4=-3<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 서로 다른 두 실근을 가지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

20 답 (1) $k<4$ (2) $k=4$ (3) $k>4$

이차방정식 $x^2+2x-3+k=0$의 판별식 $\frac{D}{4}$를 구하면

$\frac{D}{4}=1^2+3-k=4-k$

(1) $4-k>0$이므로 $k<4$

(2) $4-k=0$이므로 $k=4$

(3) $4-k<0$이므로 $k>4$

21 답 ③

이차방정식 $x^2+4x-(a-3)=0$의 판별식 $\frac{D}{4}$를 구하면

$\frac{D}{4}=2^2+(a-3)=a+1>0$

$a>-1$이므로 정수 a의 최솟값은 0이다.

22 답 ④

이차방정식 $2x^2+4x-a=0$의 판별식 $\frac{D}{4}$를 구하면

$\frac{D}{4}=2^2+2a=2a+4\geq0$

$\therefore a\geq-2$

TIP

이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은 판별식 $D>0$이지만 실근을 가질 조건은 판별식 $D\geq0$이다.
문제가 원하는 것이 서로 다른 두 실근인지 실근인지 정확히 알아 둘 필요가 있다.

23 답 ②

이차방정식 $x^2+3(k-1)x+2-3k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9(k-1)^2-4(2-3k)$

$=9k^2-6k+1$

$=(3k-1)^2=0$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

24 답 ④

이차방정식 $2x^2-2(k+2)x+3(k+2)=0$의 판별식을 $\frac{D}{4}$라 하면

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-6(k+2)=k^2-2k-8$

$=(k+2)(k-4)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=4$

k는 양수이므로 $k=4$

TIP

이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근을 짝수 공식

$x=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}$을 이용해서 푼 것처럼 판별식도

$\frac{D}{4}=(b')^2-ac$를 이용하면 편리하다.

이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 판별식 D를 구하면

$D=(2b')^2-4ac$

$D=4\{(b')^2-ac\}$가 되어 양변을 4로 나누면

$\frac{D}{4}=(b')^2-ac$

25 답 ⑤

이차방정식 $x^2-2(m-1)x+2m^2-6m+4=0$의 판별식을 $\frac{D}{4}$라 하면

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-2m^2+6m-4$

$=-m^2+4m-3=0$

$m^2-4m+3=0$

$(m-1)(m-3)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=3$

따라서 모든 상수 m의 값의 합은 4이다.

26 답 ④

이차방정식 $x^2-4(k+1)x+4k^2+12=0$의 판별식을 $\frac{D}{4}$라 하면

$\frac{D}{4}=4(k+1)^2-(4k^2+12)=8k-8<0$

$k<1$이므로 정수 k의 최댓값은 0이다.

27 답 ⑤

이차방정식 $x^2+8x+4k=0$의 판별식을 $\frac{D}{4}$라 하면

$\frac{D}{4}=16-4k<0$

$k>4$이므로 자연수 k의 최솟값은 5이다.

28 답 ②

이차방정식 $kx^2-4x+k=0$의 판별식을 $\frac{D}{4}$라 하면

$\frac{D}{4}=4-k^2=0$

$\therefore k=\pm2$

29 답 ④

이차방정식 $2x^2+(k-1)x+\frac{9}{8}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2-9=k^2-2k-8=0$

$(k+2)(k-4)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=4$

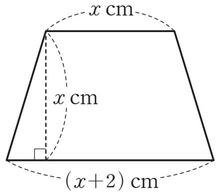
따라서 모든 k의 값의 합은 $-2+4=2$이다.

30 답 ④

윗변의 길이를 x cm라 하면 아랫변의 길이는 $(x+2)$ cm이다.

사다리꼴의 넓이가 30 cm^2이므로

$\frac{1}{2}\{x+(x+2)\}\times x=30$에서



$x^2+x=30$

$x^2+x-30=0$

$(x+6)(x-5)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=5$

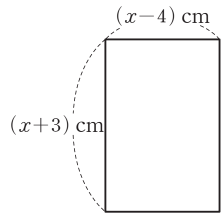
$x>0$이므로 $x=5$(cm)

TIP

이차방정식을 세우고 반드시 그 문제의 답이 문제의 조건에 맞는지 확인해야 한다.
이 문제에서는 길이를 x로 놓았기 때문에 x가 양수라는 조건이 숨겨져 있는 것이다.
활용 문제는 개수, 길이, 시간이 음수가 되면 안 되기 때문에 마지막에 이 조건에 맞는지 점검해야 한다.

31 답 ②

처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면



$(x-4)(x+3)=30$

$x^2-x-12=30$

$x^2-x-42=0$

$(x+6)(x-7)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=7$

$x>0$이므로 $x=7(\text{cm})$

32 답 ①

t초 후의 직사각형의 넓이는 $(10+t)(10+2t)$이다.

$(10+t)(10+2t)=300$

$2t^2+30t-200=0$

$t^2+15t-100=0$

$(t+20)(t-5)=0$

$\therefore t=-20$ 또는 $t=5$

$t>0$이므로 $t=5$

따라서 직사각형의 넓이가 300이 되는 것은 5초 후이다.

Simple J 이차방정식의 근과 계수의 관계

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 70~71

01 답 $-\dfrac{b}{a}$

02 답 $\dfrac{c}{a}$

03 답 합, 곱

04 답 켤레복소수

05 답 ×

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ×

09 답 (1) 5　(2) 3

10 답 (1) $-\dfrac{3}{2}$　(2) -2

11 답 $x^2-x-6=0$

12 답 $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0$

13 답 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$

14 답 $x^2-2x+2=0$

15 답 $(x+\sqrt{5}i)(x-\sqrt{5}i)$

16 답 $(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$

17 답 $(x-1+2i)(x-1-2i)$

18 답 $2\left(x-\dfrac{3+3i}{2}\right)\left(x-\dfrac{3-3i}{2}\right)$

19 답 (1) $2+\sqrt{3}$　(2) $a=-4$, $b=1$

20 답 (1) $3-2i$　(2) $a=-6$, $b=13$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 72~75

21 답 ⑤

이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-\dfrac{-2}{1}=2$, $\alpha\beta=\dfrac{-1}{1}=-1$

22 답 ③

이차방정식 $2x^2+2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{2}=-1$, $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

23 답 ⑤

이차방정식 $x^2+ax+a+2=0$의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=a+2$

$\alpha+\beta=-6$이므로

$-a=-6$에서 $a=6$

$\therefore \alpha\beta=8$

24 답 ③

이차방정식 $x^2-(a-1)x+2a+1=0$의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=a-1$, $\alpha\beta=2a+1$

$\alpha\beta=5$이므로

$2a+1=5$에서 $a=2$

$\therefore \alpha+\beta=1$

25 답 ①

이차방정식 $x^2+3x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9+4=13$

TIP

곱셈 공식의 변형인 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$는 매우 자주 나오는 공식이다. 합과 곱을 이용하면 a^2+b^2뿐만 아니라 a^3+b^3도 구할 수 있다. 즉, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$를 이용하면 된다.

26 답 ④

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=3$

27 답 ②

이차방정식 $3x^2+8x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{8}{3}$, $\alpha\beta=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-2$

28 답 ②

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$

$$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{2^2-2\times3}{3}=-\frac{2}{3}$$

29 답 ④

이차방정식 $x^2-6x+2k=0$의 두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 α, $2\alpha\,(\alpha\neq0)$라고 하면 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{cases}\alpha+2\alpha=3\alpha=6 \Rightarrow \alpha=2\\ \alpha\cdot2\alpha=2k\end{cases}$$

$\therefore\ k=\alpha^2=4$

30 답 ④

이차방정식 $x^2-2kx+3=0$의 두 근의 비가 $1:3$이므로 두 근을 α, $3\alpha\,(\alpha\neq0)$라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}\alpha+3\alpha=4\alpha=2k \Rightarrow k=2\alpha\\ \alpha\cdot3\alpha=3 \Rightarrow \alpha=\pm1\end{cases}$$

$\therefore\ k=2\alpha=\pm2$

$k<0$이므로 $k=-2$

31 답 ④

이차방정식 $x^2-10x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 2α, $3\alpha\,(\alpha\neq0)$라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}2\alpha+3\alpha=10 \Rightarrow \alpha=2\\ 2\alpha\cdot3\alpha=k\end{cases}$$

$\therefore\ k=6\alpha^2=24$

32 답 ①

이차방정식 $x^2-(a-1)x+a=0$의 두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 2α, $3\alpha\,(\alpha\neq0)$라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}2\alpha+3\alpha=a-1 \Rightarrow 5\alpha=a-1 \Rightarrow 5\alpha+1=a \ \cdots ㉠\\ 2\alpha\cdot3\alpha=a \Rightarrow 6\alpha^2=a \ \cdots ㉡\end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$6\alpha^2=5\alpha+1$

$6\alpha^2-5\alpha-1=0$

$(6\alpha+1)(\alpha-1)=0$

$\therefore\ \alpha=-\frac{1}{6}$ 또는 $\alpha=1$

α의 값을 ㉡에 대입하여 a의 값을 각각 구하면

$a=\frac{1}{6}$ 또는 $a=6$

a는 정수이므로 $a=6$

33 답 ③

이차방정식 $x^2+3x+k=0$의 두 근의 차가 3이므로 두 근을 α, $\alpha+3$이라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}\alpha+\alpha+3=2\alpha+3=-3 \Rightarrow \alpha=-3\\ \alpha\cdot(\alpha+3)=k\end{cases}$$

$\therefore\ k=0$

34 답 ④

이차방정식 $x^2-(k+1)x+2=0$의 두 근의 차가 1이므로 두 근을 α, $\alpha+1$이라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}\alpha+\alpha+1=2\alpha+1=k+1 \Rightarrow k=2\alpha \ \cdots ㉠\\ \alpha\cdot(\alpha+1)=2 \ \cdots ㉡\end{cases}$$

㉡을 풀면

$\alpha^2+\alpha-2=0$

$(\alpha+2)(\alpha-1)=0$

$\therefore\ \alpha=-2$ 또는 $\alpha=1$

이 값들을 ㉠에 대입하면

$k=-4$ 또는 $k=2$

$k<0$이므로 $k=-4$

35 답 ②

이차방정식 $x^2-mx+m+2=0$의 두 근의 차가 2이므로 두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}\alpha+\alpha+2=2\alpha+2=m \ \cdots ㉠\\ \alpha\cdot(\alpha+2)=m+2 \ \cdots ㉡\end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$\alpha^2+2\alpha=2\alpha+4$

$\alpha^2=4 \qquad \therefore\ \alpha=\pm2$

이 값들을 ㉠에 대입하면

$m=-2$ 또는 $m=6$

$m>0$이므로 $m=6$

36 답 ②

이차방정식 $x^2-(m-1)x+2m=0$의 두 근의 차가 1이므로 두 근을 α, $\alpha+1$이라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}\alpha+\alpha+1=2\alpha+1=m-1 \Rightarrow m=2\alpha+2 \cdots ㉠ \\ \alpha\cdot(\alpha+1)=2m \cdots ㉡\end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$\alpha(\alpha+1)=4(\alpha+1)$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

이 값들을 ㉠에 대입하면

$m=0$ 또는 $m=10$

$m>0$이므로 $m=10$

37 답 ④

이차방정식 $2x^2+6x+k=0$의 한 근이 다른 근의 2배이므로 두 근을 α, $2\alpha\,(\alpha\neq0)$라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}\alpha+2\alpha=3\alpha=-3 \Rightarrow \alpha=-1 \cdots ㉠ \\ \alpha\cdot2\alpha=\dfrac{k}{2} \cdots ㉡\end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$k=4\alpha^2=4$

TIP

한 근이 다른 근의 배수가 되는 것은 기본적으로 두 근의 비가 주어진 것과 같다. 즉, 한 근이 다른 근의 k배라는 것은 두 근의 비가 $1:k$라는 것과 같은 것이므로 풀이 방법도 두 근의 비가 주어진 경우와 같다.

38 답 ④

이차방정식 $x^2-20x+a=0$의 한 근이 다른 근의 3배이므로 두 근을 α, $3\alpha\,(\alpha\neq0)$라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}\alpha+3\alpha=4\alpha=20 \Rightarrow \alpha=5 \cdots ㉠ \\ \alpha\cdot3\alpha=a \cdots ㉡\end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$a=3\alpha^2=75$

39 답 ②

이차방정식 $x^2-(m+1)x+2=0$의 한 근이 다른 근의 2배이므로 두 근을 α, $2\alpha\,(\alpha\neq0)$라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}\alpha+2\alpha=3\alpha=m+1 \cdots ㉠ \\ \alpha\cdot2\alpha=2 \Rightarrow \alpha=\pm1 \cdots ㉡\end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$m=-4$ 또는 $m=2$

$m>0$이므로 $m=2$

40 답 ②

이차방정식 $x^2-(k-1)x+3=0$의 한 근이 다른 근의 3배이므로 두 근을 α, $3\alpha\,(\alpha\neq0)$라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}\alpha+3\alpha=4\alpha=k-1 \cdots ㉠ \\ \alpha\cdot3\alpha=3 \Rightarrow \alpha=\pm1 \cdots ㉡\end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$k=-3$ 또는 $k=5$

$k>0$이므로 $k=5$

41 답 $x^2-x+4=0$

이차방정식 $x^2+x+4=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=4$

$$\begin{cases}(-\alpha)+(-\beta)=-(\alpha+\beta)=1 \\ (-\alpha)\cdot(-\beta)=\alpha\beta=4\end{cases}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-x+4=0$이다.

42 답 $x^2-3x+4=0$

이차방정식 $x^2-x+2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=2$

$$\begin{cases}(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=3 \\ (\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=4\end{cases}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-3x+4=0$이다.

43 답 $x^2-x+3=0$

이차방정식 $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=\frac{3}{4}$

$$\begin{cases}2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=1 \\ 2\alpha\cdot2\beta=4\alpha\beta=3\end{cases}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-x+3=0$이다.

44 답 $x^2-7x+12=0$

이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$

$$\begin{cases}(\alpha+\beta)+\alpha\beta=7 \\ (\alpha+\beta)\cdot\alpha\beta=12\end{cases}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-7x+12=0$이다.

45 답 ④

갑은 b를 바르게 보고 풀었으므로

$\frac{b}{1}=b=(-2)\times4=-8$

을은 a를 바르게 보고 풀었으므로

$-\frac{a}{1}=-a=(-1+\sqrt{5})+(-1-\sqrt{5})=-2$

$\therefore a=2$

α, β의 값을 주어진 식에 대입하면

$x^2+ax+b=x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

$\alpha>\beta$이므로 $\alpha=2$, $\beta=-4$

$\therefore 2\alpha-\beta=2\times2-(-4)=8$

46

답 ①

수민이는 b를 바르게 보고 풀었으므로

$\frac{b}{1}=b=(-1)\times5=-5$

희진이는 a를 바르게 보고 풀었으므로

$-\frac{a}{1}=-a=(-2+\sqrt{2}i)+(-2-\sqrt{2}i)=-4$

$\therefore a=4$

a, b의 값을 주어진 식에 대입하면

$x^2+ax+b=x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

$\alpha>\beta$이므로 $\alpha=1$, $\beta=-5$

$\therefore \alpha-2\beta=1-2\times(-5)=11$

47

답 ②

이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 해를 근의 공식을 이용하여 구하면 $x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$이므로

$2x^2-4x+1=2\left(x-\overset{\alpha}{\boxed{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}}\right)\left(x-\overset{\beta}{\boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}}\right)$

$\therefore \alpha-\beta=\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

다른 풀이

이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\times\frac{1}{2}=2$

$\therefore \alpha-\beta=\sqrt{2}$ ($\because \alpha>\beta$)

48

답 ④

이차방정식 $4x^2+2x+1=0$의 해를 근의 공식을 이용하여 구하면 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{4}$이므로

$4x^2+2x+1=4\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{4}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{4}\right)$

$\alpha-\beta=\frac{-1+\sqrt{3}i}{4}-\frac{-1-\sqrt{3}i}{4}=\frac{\sqrt{3}i}{2}$ 또는

$\alpha-\beta=\frac{-1-\sqrt{3}i}{4}-\frac{-1+\sqrt{3}i}{4}=-\frac{\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}i}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{3}{4}$

49

답 ④

계수인 a, b가 유리수이므로 이차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{5}$이면 다른 한 근은 $2-\sqrt{5}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}-a=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4 \Rightarrow a=-4\\ b=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-1\end{cases}$$

$\therefore ab=4$

TIP

계수가 유리수 또는 실수라는 조건이 있으면 거의 대부분 켤레근을 이용하는 문제이다. 보통 한 근이 주어지면 그것을 방정식에 대입하여 복잡한 과정을 거쳐서 다른 한 근을 구하게 된다. 하지만 계수가 유리수 또는 실수인 경우 켤레근을 갖는다는 것에서 간단히 다른 근을 구할 수 있는 큰 장점이 있다.

50

답 ①

계수인 a, b가 실수이므로 이차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}i$이면 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}i$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}-a=(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=4 \Rightarrow a=-4\\ b=(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=7\end{cases}$$

$\therefore a+b=3$

연습 문제 [H~J] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 76~77

01

답 ⑤

방정식 $a^2x+1=a(x+1)$을 정리하면

$a(a-1)x=a-1$

ㄱ. $a=0$이면 $0\cdot x=-1$이므로 해가 없다. (참)

ㄴ. $a=1$이면 $0\cdot x=0$이므로 해가 무수히 많다. (참)

ㄷ. $a\neq0$이고 $a\neq1$이면 주어진 방정식의 근은 $x=\frac{1}{a}$뿐이므로 해의 개수는 1이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

02

답 3

이차방정식 $2x^2-8x-1=0 \Rightarrow 2x^2-2\cdot4x-1=0$의 해를 근의 공식(짝수 공식)을 이용하여 구하면

$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-2\times(-1)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{18}}{2}$

$=\frac{4\pm3\sqrt{2}}{2}=2\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}=a\pm b\sqrt{2}$

$\therefore a=2$, $b=\pm\frac{3}{2} \Rightarrow |ab|=\left|2\times\left(\pm\frac{3}{2}\right)\right|=3$

03 답 ⑤

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax-3a+5=0$의 두 근이 1, b일 때, $a-3b$의 값은? '근'이라는 것에서 근의 대입을 생각하자.

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

1st 주어진 이차방정식의 두 근 중 한 근이 주어졌어. 대입!

이차방정식 $x^2+ax-3a+5=0$의 한 근이 1이므로

$x=1$을 대입하면 근의 의미가 값을 대입했을 때 방정식이 성립하는 거야.

$1+a-3a+5=0$

$2a=6$

$\therefore a=3$

2nd a의 값이 구해졌으니까 원래의 식에 대입하여 나머지 한 근을 구하면 돼.

$a=3$을 원래의 식에 대입하면

$x^2+3x-3\times3+5=0$에서

$x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \searrow\nearrow & 4 \\ 1 & & -1 \\ \hline & & 4-1=3 \end{array}$$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

따라서 나머지 한 근은 $b=-4$

$\therefore a-3b=3-3\times(-4)=15$

다른 풀이

이차방정식 $x^2+ax-3a+5=0$의 두 근이 1, b이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{cases} 1+b=-a & \cdots ㉠ \\ 1\cdot b=-3a+5 \Rightarrow b=-3a+5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$1-3a+5=-a,\ 2a=6$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면

$b=-9+5=-4$

$\therefore a-3b=3-3\times(-4)=15$

04 답 ⑤

이차방정식 $(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)$

$=m^2-(m^2+m-2)=-m+2=0$

$\therefore m=2$

$m=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$\therefore x=2$(중근) $\Rightarrow \alpha=2$

$\therefore m+\alpha=4$

05 답 ⑤

이차방정식 $x^2-4x+2a-3=0$의 판별식을 $\frac{D_1}{4}$이라 하면

$\frac{D_1}{4}=4-(2a-3)>0,\ 7-2a>0$

$\therefore a<\frac{7}{2}$ ⋯ ㉠

이차방정식 $ax^2-3x+2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=9-8a<0$

$\therefore a>\frac{9}{8}$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡을 모두 만족해야 하므로

$\frac{9}{8}<a<\frac{7}{2}$

따라서 구하는 정수 a는 2, 3이므로 그 합은 5이다.

06 답 ②

$(20+x)(20+x+10)=3\times20\times20$

$(x+20)(x+30)=1200$

$x^2+50x+600=1200$

$x^2+50x-600=0$

$(x+60)(x-10)=0$

$\therefore x=-60$ 또는 $x=10$

$x>0$이므로 $x=10$

07 답 ④

이차방정식 $x^2+mx-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-m,\ \alpha\beta=-4$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-m}{-4}=4 \Rightarrow m=16$

08 답 ④

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3 \Rightarrow \beta=\frac{3}{\alpha}$

$\therefore \alpha+\frac{3}{\alpha}=\alpha+\beta=2$

다른 풀이

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 한 근이 α이므로 방정식에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^2-2\alpha+3=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha-2+\frac{3}{\alpha}=0$

$\therefore \alpha+\frac{3}{\alpha}=2$

09 답 ②

이차식 $2x^2+(3a+1)x+a^2+a+2$가 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $2x^2+(3a+1)x+a^2+a+2=0$의 판별식 $D=0$이어야 한다.

$D=(3a+1)^2-4\times2\times(a^2+a+2)=0$

$a^2-2a-15=0$

$(a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=5$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $-3+5=2$이다.

10 답 ⑤

이차방정식 $x^2+6x-3=0$의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=-3$ ⋯ ㉠

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 두 근 $2\alpha-1$, $2\beta-1$을 가지므로

$$\begin{cases}(2\alpha-1)+(2\beta-1)=2(\alpha+\beta)-2=-14=-a \\ (2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1=1=b\end{cases}\ (\because ㉠)$$

$\therefore a=14,\ b=1 \Rightarrow a+b=15$

11 답 ⑤

이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$ ⋯ ㉠

α^2, β^2을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\times3=-2 \\ \alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=9\end{cases}\ (\because ㉠)$$

따라서 α^2, β^2을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2+2x+9=0$이다.

12 답 6

이차방정식 $x^2-kx+k+2=0$의 두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 α, $2\alpha\,(\alpha>0)$라 놓자.

두 근의 차가 2이므로

$2\alpha-\alpha=2 \Rightarrow \alpha=2$

이차방정식 $x^2-kx+k+2=0$에 $x=2$를 대입하면

$4-2k+k+2=0$

$\therefore k=6$

13 답 48

두 근의 차가 주어졌으니까 적당히 근을 정하고 근과 계수의 관계를 이용하라는 의미야.

이차방정식 $x^2+(a-4)x-4=0$의 두 근의 차가 4일 때, 이차방정식 $x^2+(a+4)x+4=0$의 두 근의 차는 d이다. d^2의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

1st 두 근의 차가 4가 되도록 두 근을 잡자.

이차방정식 $x^2+(a-4)x-4=0$의 두 근을 t, $t+4$라 하고, 근과 계수의 관계에 의하여

두 근을 t, $t-4$라 놓아도 돼.

$$\begin{cases}t+(t+4)=4-a \cdots ㉠ \\ t(t+4)=-4 \Rightarrow (t+2)^2=0\end{cases}\qquad \therefore t=-2$$

$t=-2$를 ㉠에 대입하면 $a=4$

2nd 근과 계수의 관계에 의하여 d^2의 값을 구하자.

이차방정식 $x^2+(a+4)x+4=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-(a+4)=-8$, $\alpha\beta=4$

$\therefore d^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=48$

$(\alpha+\beta)^2$과 $(\alpha-\beta)^2$의 관계를 이용한 거야.

14 답 ①

이차방정식 $x^2+(k^2-k-2)x+2k-1=0$의 두 근을 α, $-\alpha$라 하고, 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}\alpha+(-\alpha)=-(k^2-k-2)=0 \cdots ㉠ \\ \alpha\cdot(-\alpha)=2k-1 \cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

여기서 $k=2$이면 $\alpha^2=-3$이 되어 α가 실근이라는 것에 모순이다.

$\therefore k=-1$

15 답 20

두 유리수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{5}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=-a \\ (1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=b\end{cases}$$

$\therefore a=-2,\ b=-4 \Rightarrow a^2+b^2=(-2)^2+(-4)^2=20$

다른 풀이

$x=1+\sqrt{5}$가 근이므로 방정식에 대입하면

$(1+\sqrt{5})^2+a(1+\sqrt{5})+b=0$

$(a+b+6)+(a+2)\sqrt{5}=0$

$a+b+6$과 $a+2$는 유리수이므로

$a+b+6=0$, $a+2=0$

$\therefore a=-2,\ b=-4$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+(-4)^2=20$

심플 정리

[이차방정식의 켤레근]

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

(1) 계수가 유리수일 때,

$p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.

(단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)

(2) 계수가 실수일 때,

$p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다.

(단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

16 답 7

$$\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$$

두 실수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $1+2i$이므로 다른 한 근은 $1-2i$이다. … Ⅰ

근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases} a=(1+2i)+(1-2i)=2 \\ b=(1+2i)(1-2i)=5 \end{cases}$$ … Ⅱ

$\therefore\ a+b=7$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	주어진 이차방정식의 켤레근을 구한다.	40%
Ⅱ	근과 계수의 관계에 의하여 a, b의 값을 각각 구한다.	40%
Ⅲ	$a+b$의 값을 구한다.	20%

Simple K 이차함수의 그래프

01 답 일차함수

02 답 y절편, x절편

03 답 위로

04 답 같은

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ○

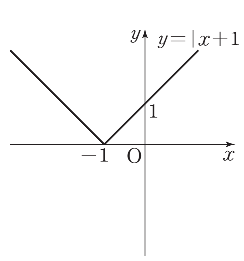
09 답 제4사분면

10 답 제2사분면

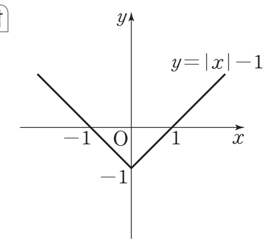
11 답 제3사분면

12 답 제1사분면

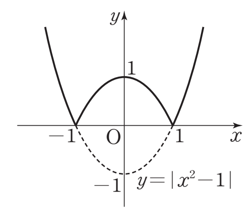
13 답



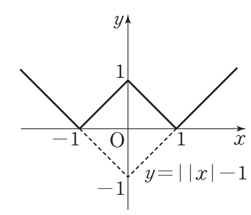
14 답



15 답



16 답



17 답 (1) $x=-1$ (2) $(-1, 3)$

18 답 (1) $x=2$ (2) $(2, 3)$

19 답 $>$, $>$, $>$

20 답 $<$, $>$, $<$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 80~81

21 답 ①

기울기가 1이므로

$m+2=1$

$\therefore\ m=-1$

$y=(m+2)x+m-n$이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=m-n$

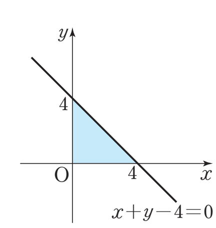
여기에 $m=-1$을 대입하면

$n=-1-3=-4$

$\therefore\ m+n=-5$

22 답 ④

직선 $x+y-4=0$의 x절편과 y절편이 모두 4이므로 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$이다.

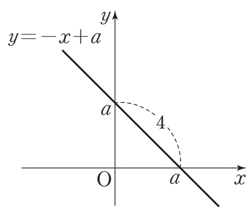


23 답 ③

함수 $y=-x+a$의 그래프의 x절편과 y절편이 모두 a이므로 구하는 선분의 길이는

$\sqrt{a^2+a^2}=4$

$\sqrt{2}a=4$이므로 $a=2\sqrt{2}$



24 답 ②

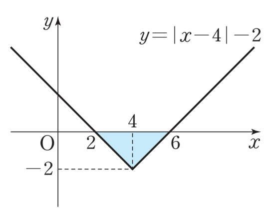
$y=|x-4|-2$의 그래프가 x축과 만나는 점을 구하자.

$y=0$일 때 $|x-4|=2$이므로

$x-4=\pm 2 \Rightarrow x=4\pm 2$

$\therefore x=2$ 또는 $x=6$

함수 $y=|x-4|-2$의 그래프는 다음과 같다.



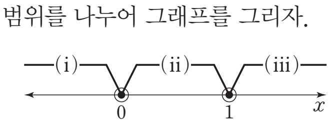
따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$이다.

TIP

절댓값 기호가 있는 함수 $y=a|x-p|+q$의 그래프를 간단히 그리는 방법이 있다. $y=|x|$의 그래프 모양을 기준으로, $a>0$인 경우는 아래로 뾰족한 모양, $a<0$인 경우는 위로 뾰족한 모양으로 그려진다. 그리고 뾰족한 꼭짓점은 (p, q)가 된다.

25 답 ③

함수 $y=|x|+|x-1|$의 절댓값 안의 값이 0이 되는 $x=0$, $x=1$을 경계로 범위를 나누어 그래프를 그리자.



(i) $x<0$일 때,

$x-1<0$이므로

$y=|x|+|x-1|$

$=-x-(x-1)=-2x+1$

(ii) $0\le x<1$일 때,

$x-1<0$이므로

$y=|x|+|x-1|$

$=x-(x-1)=1$

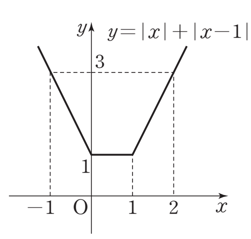
(iii) $x\ge 1$일 때,

$x-1\ge 0$이므로

$y=|x|+|x-1|$

$=x+(x-1)=2x-1$

(i)~(iii)에 의하여 주어진 함수의 그래프는 그림과 같다.



26 답 ④

이차함수 $y=3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=3(x-a)^2+b=3x^2-6ax+3a^2+b$

이 식이 $y=3x^2+6x+5$와 포개져야 하므로 각 항의 계수를 비교하면

$\begin{cases} -6a=6 \Rightarrow a=-1 \\ 3a^2+b=5 \Rightarrow b=2 \end{cases}$

$\therefore a+b=1$

27 답 5

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 꼭짓점의 좌표가 $(2, 4)$이므로

$y=ax^2+bx+c=a(x-2)^2+4 \cdots$ ㉠

y절편이 8이므로 $x=0$일 때, $y=8$이다.

$8=a(0-2)^2+4=4a+4 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$y=(x-2)^2+4=x^2-4x+8$이므로 $b=-4$, $c=8$

$\therefore a+b+c=1+(-4)+8=5$

28 답 2

$y=x^2-2kx+2k+3$에서

$y=(x^2-2kx+k^2)-k^2+2k+3$

$=(x-k)^2-k^2+2k+3$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(k, -k^2+2k+3)$

이때, 꼭짓점이 x축 위에 있으려면 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 하므로

$-k^2+2k+3=0$

$k^2-2k-3=(k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $3-1=2$이다.

심플 정리

[인수분해 공식]

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(2) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

29 답 ⑤

꼭짓점의 좌표가 $(0, 2)$이므로 이차함수의 식을 구하면

$y=a(x-0)^2+2=ax^2+2 \cdots$ ㉠

이차함수가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$3=a+2 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$y=x^2+2=ax^2+bx+c$이므로 계수를 비교하면

$b=0$, $c=2$

$\therefore 2a-b+c=4$

30 답 ②

x축과의 두 교점이 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$이므로 이차함수의 식은 $y=a(x+1)(x-3)$ ⋯ ㉠

이 이차함수가 점 $(2,\ -3)$을 지나므로

$-3=-3a \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$y=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$

이 식이 $y=ax^2+bx+c$이므로 계수를 비교하면

$b=-2,\ c=-3$

$\therefore a-b+c=0$

31 답 0

축의 방정식이 $x=-3$이므로 이차함수의 식은

$y=a(x+3)^2+k$ ⋯ ㉠

이 이차함수가 두 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 14)$를 지나므로

$2=4a+k,\ 14=16a+k$

연립하여 풀면

$a=1,\ k=-2$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$y=(x+3)^2-2=x^2+6x+7$

이 식이 $y=ax^2+bx+c$이므로 계수를 비교하면

$b=6,\ c=7$

$\therefore a+b-c=0$

32 답 4

이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$라 놓자.

이차함수가 세 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 6)$을 지나므로

$$\begin{cases} 0=c \\ 2=a+b+c \\ 6=4a+2b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 & \cdots ㉠ \\ 4a+2b=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1$

즉, $y=ax^2+bx+c=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

축의 방정식 : $x=-\frac{1}{2} \qquad \therefore p=-\frac{1}{2}$

꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$이므로 $m=-\frac{1}{2},\ n=-\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{p+m}{n}=4$

33 답 ⑤

ㄱ. x절편이 1이므로 $x=1$일 때, 함숫값이 0이다.

$\therefore a\cdot1^2+b\cdot1+c=a+b+c=0$

ㄴ. $x=-1$에서 그래프가 y축 위쪽에 있으므로

$a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=a-b+c>0$

ㄷ. ㄱ에 의하여 $a+b+c=0$이므로

$a+b=-c>0(\because c<0)$

따라서 부호가 양인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

34 답 ③

ㄱ. 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$ (참)

ㄴ. 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$, 그래프가 y축과 $y>0$인 부분에서 만나므로 $c>0$

$\therefore\ ac<0$ (거짓)

ㄷ. $x=1$일 때, $y>0$이므로 $a+b+c>0$ (참)

ㄹ. $x=-1$일 때, $y=0$이므로 $a-b+c=0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ의 2개이다.

TIP

그래프의 축이 y축을 기준으로 오른쪽, 왼쪽에 위치하는 것에 따라 ab의 부호가 결정된다. 그 원리는 간단하다.

$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$에서 축은

$x=-\frac{b}{2a}$가 된다.

축이 왼쪽에 있으면 $-\frac{b}{2a}<0 \Rightarrow \frac{b}{a}>0$이고 결국 $ab>0$

오른쪽에 있으면 부호가 모두 반대가 될 것이다.

Simple L 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 82～83

01 답 실근

02 답 접한다

03 답 $x=\alpha,\ x=\beta$

04 답 ○

05 답 ×

06 답 1, 2

07 답 0, 2

08 답 3

09 답 −5, 1

10 답 2

11 답 1

12 답 0

13 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

14 답 한 점에서 만난다. (접한다.)

15 답 만나지 않는다.

16 답 −1, 4

17 답 1

18 답 −1, 3

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 84~87

19 답 ②

이차방정식 $-x^2-x+k=0 \Rightarrow x^2+x-k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$D=1+4k>0 \qquad \therefore k>-\frac{1}{4}$

따라서 정수 k의 최솟값은 0이다.

20 답 ⑤

이차방정식 $x^2-kx+(k-1)=0$이 중근을 가져야 하므로

$D=k^2-4k+4=(k-2)^2=0 \qquad \therefore k=2$

21 답 ②

이차방정식 $x^2-2kx+k+10=0$이 중근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-k-10=0$

k에 대한 이차방정식 $k^2-k-10=0$에 근과 계수의 관계를 이용하면 모든 실수 k의 값의 곱은 -10이다.

22 답 ⑤

이차방정식 $2x^2-2x-k=0$이 서로 다른 허근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=1+2k<0 \qquad \therefore k<-\frac{1}{2}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다.

23 답 ③

이차방정식 $x^2-mx+n=0$의 두 근이 -1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$m=-1+3=2,\ n=(-1)\times 3=-3 \qquad \therefore 2m-n=7$

> 심플 정리
>
> **[이차방정식의 근과 계수의 관계]**
>
> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
>
> (1) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ (2) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

24 답 ⑤

이차방정식 $x^2+2x-k=0$의 두 근이 -4, a이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases} -4+a=-2 & \therefore a=2 \\ (-4)\times a=-k & \therefore k=8 \end{cases}$$

$\therefore a+k=10$

25 답 ②

이차방정식 $x^2+2x-k=0$이 중근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=1+k=0 \qquad \therefore k=-1$

$k=-1$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+2x+1=(x+1)^2=0 \qquad \therefore \alpha=-1$

$\therefore k+\alpha=-2$

26 답 ⑤

이차방정식 $x^2-2ax-a+2=0$이 중근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

$a>0$이므로 $a=1$

$a=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-2x+1=(x-1)^2 \qquad \therefore k=1$

$\therefore a+k=2$

27 답 ①

$y=-x^2+x+2$와 $y=-2x+k$를 연립하면

$-x^2+x+2=-2x+k$

$x^2-3x+k-2=0$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$D=9-4k+8>0 \qquad \therefore k<\frac{17}{4}$

따라서 정수 k의 최댓값은 4이다.

28 답 ③

$y=x^2-2x+k$와 $y=-3x+1$을 연립하면

$x^2-2x+k=-3x+1$

$x^2+x+k-1=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$D=1-4k+4=0$

$\therefore k=\frac{5}{4}$

29 답 ③

$y=x^2+4x+4$와 $y=x+k$를 연립하면

$x^2+4x+4=x+k$

$x^2+3x+4-k=0$

이 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로

$D=9-16+4k<0 \qquad \therefore k<\frac{7}{4}$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

30 답 ②

$y=ax^2+6x+a+1$과 $y=2ax+1$을 연립하면

$ax^2+6x+a+1=2ax+1$

$ax^2+2(3-a)x+a=0$

이 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(3-a)^2-a^2=-6a+9<0$

$\therefore a>\frac{3}{2}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다.

31 답 ②

$y=-x^2+b$와 $y=ax+1$을 연립한 이차방정식

$x^2+ax+1-b=0$의 해가 -1, 3이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\begin{cases} -a=-1+3=2 & \therefore a=-2 \\ 1-b=(-1)\times 3=-3 & \therefore b=4 \end{cases}$

$\therefore a+b=2$

32 답 ④

$y=-x^2+x$와 $y=3x+k$를 연립한 이차방정식

$x^2+2x+k=0$이 중근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=1-k=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 방정식에 대입하면

$x^2+2x+1=(x+1)^2=0$이므로 $a=-1$

$\therefore k+a=0$

33 답 ⑤

$y=-x^2+4x$와 $y=2x+k$를 연립한 이차방정식

$x^2-2x+k=0$이 적어도 하나의 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=1-k\ge 0 \qquad \therefore k\le 1$

따라서 실수 k의 최댓값은 1이다.

34 답 ⑤

$f(x)=x^2+bx+c$로 놓으면

$x^2+bx+c=x$에서 $x^2+(b-1)x+c=0$

이 이차방정식의 두 근이 1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-(b-1)$, $1\times 3=c$ ⇨ $b=-3$, $c=3$

즉, $f(x)=x^2-3x+3$이므로

$f(2)=2^2-3\times 2+3=1$

TIP

함수 $f(x)$가 주어져 있지 않아서 약간 당황스러운 문제일 수 있다.
최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)$의 x^2의 계수가 1로 정해졌다. x의 계수와 상수항을 구하면 되는데 이차함수 $f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 이용하면 된다. 주어진 조건을 충분히 이용하고 있는지 체크하자.

35 답 ②

$y=2x^2-x$와 $y=mx-2$를 연립한 이차방정식

$2x^2-(m+1)x+2=0$이 중근을 가져야 하므로

$D=(m+1)^2-16=0$

$m^2+2m-15=0$

$(m+5)(m-3)=0$

$\therefore m=-5$ 또는 $m=3$

$m>0$이므로 $m=3$

36 답 ③

$y=x^2+ax+b$가 점 $(-1, 1)$을 지나야 하므로

$1=1-a+b \qquad \therefore b=a$

이차함수 $y=x^2+ax+a$와 $y=-x$가 접하므로

두 식을 연립하면

$x^2+ax+a=-x$

$x^2+(a+1)x+a=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$D=(a+1)^2-4a=0$

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0 \qquad \therefore a=1, b=1$

$\therefore a+b=2$

37 답 ②

직선 $y=ax+b$가 점 $(3, -6)$을 지나므로

$-6=3a+b \qquad \therefore b=-3a-6$ ⋯ ㉠

즉, $y=ax+b=ax-3a-6$

이 직선이 이차함수 $y=x^2-5x$와 접하므로

두 식을 연립하면

$x^2-5x=ax-3a-6$

$x^2-(a+5)x+3a+6=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$D=(a+5)^2-12a-24=0$

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$, $b=-9$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a+b=-8$

38 답 ①

기울기가 2인 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 $m=-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}x+n$과 $y=x^2+2x-2$를 연립하면

$x^2+\frac{5}{2}x-2-n=0$

$2x^2+5x-4-2n=0$

이 이차방정식의 판별식 $D=0$이어야 하므로

$D=25+32+16n=0 \qquad \therefore n=-\frac{57}{16}$

$\therefore 2m-16n=-1+57=56$

심플 정리

[두 직선의 관계]

두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$에 대하여

(1) 평행 : $a=a'$, $b\ne b'$

(2) 일치 : $a=a'$, $b=b'$

(3) 수직 : $aa'=-1$

39 답 ④

이차함수 $y=f(x)$의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 3)$이므로

$y=a(x-2)^2+3$

이 이차함수가 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=4a+3 \qquad \therefore a=-1$

따라서 이차함수는

$y=-(x-2)^2+3=-x^2+4x-1$

이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 근과 계수의 관계를 이용하면 두 근의 합은 4이다.

40 답 ①

주어진 이차함수의 그래프는 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$을 지나므로

$f(x)=a(x+1)(x-2)=ax^2-ax-2a\ (a>0)$

$ax^2-ax-2a=kx$에서

$ax^2-(a+k)x-2a=0$

이 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 두 근의 곱은 $\dfrac{-2a}{a}=-2\ (\because a>0)$이다.

41 답 ③

이차함수 $y=x^2+4x-5$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 α, β라 하면 α, β는 이차방정식

$x^2+4x-5=0$의 두 실근이다.

$(x+5)(x-1)=0$에서 $x=-5$ 또는 $x=1$이므로

x축 위의 두 교점 사이의 거리 $|\alpha-\beta|$는

$|\alpha-\beta|=|-5-1|=6$

42 답 ⑤

이차방정식 $x^2-8x-k=0$의 두 근을 α, β라고 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8,\ \alpha\beta=-k$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=64+4k$

$|\alpha-\beta|=12$이므로 $(\alpha-\beta)^2=144$

$64+4k=144,\ 4k=80$

$\therefore k=20$

43 답 ②

이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$의 두 근을 α, β라고 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=3a$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4a^2-12a$

$|\alpha-\beta|=4$이므로 $(\alpha-\beta)^2=16$

$4a^2-12a=16$

$a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

$a>0$이므로 $a=4$

44 답 ①

이차방정식 $x^2-ax+9=0$의 두 근을 α, β라고 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=9$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=a^2-36$

$|\alpha-\beta|=8$이므로 $(\alpha-\beta)^2=64$

$a^2-36=64,\ a^2=100$

$\therefore a=\pm10$

$a<0$이므로 $a=-10$

45 답 ⑤

이차함수 $y=x^2-1$의 그래프와 직선 $y=2x+1$의 두 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 2\alpha+1)$, $(\beta,\ 2\beta+1)$이라고 하면 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근은 α, β이다.

이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-2$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=12$

$\therefore |\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$

따라서 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(2\alpha-2\beta)^2}=\sqrt{5}|\alpha-\beta|$

$=2\sqrt{15}$

심플 정리

[곱셈 공식의 변형]

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(3) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(4) $a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

46 답 ②

이차함수 $y=-x^2+4x-5$의 그래프와 직선 $y=2x-6$의 두 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 2\alpha-6)$, $(\beta,\ 2\beta-6)$이라 하면 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근은 α, β이다.

$x^2-2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=4+4=8$

$\therefore |\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$

따라서 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(2\alpha-2\beta)^2}=\sqrt{5}|\alpha-\beta|$

$=2\sqrt{10}$

47 답 ④

이차함수 $y=-x^2+4x+a$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 두 교점의 좌표를 $(\alpha,\ \alpha+2)$, $(\beta,\ \beta+2)$라고 하면 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2-3x+2-a=0$의 두 근은 α, β이다.

이차방정식 $x^2-3x+2-a=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=2-a$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9-8+4a=4a+1$

두 교점 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=3\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$2(\alpha-\beta)^2=18$

$(\alpha-\beta)^2=9$에서 $4a+1=9$

$\therefore\ a=2$

Simple M 이차함수의 최대 · 최소

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 88~89

01 답 최댓값, 최솟값

02 답 꼭짓점

03 답 완전제곱

04 답 꼭짓점

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 답 최솟값 : -7

$y=x^2-4x-3$

$=(x^2-4x+4)-7$

$=(x-2)^2-7$

09 답 최댓값 : $\frac{1}{4}$

$y=-x^2+3x-2$

$=-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+\frac{1}{4}$

$=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

10 답 최솟값 : 3

$y=2x^2-4x+5$

$=2(x^2-2x+1)+3$

$=2(x-1)^2+3$

11 답 최댓값 : 12

$y=-2x^2+8x+4$

$=-2(x^2-4x+4)+12$

$=-2(x-2)^2+12$

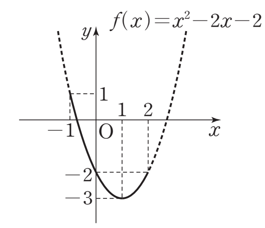
12 답 (1) 1 (2) -3

$f(x)=x^2-2x-2$

$=(x-1)^2-3$

$x=-1$일 때, 최댓값 1

$x=1$일 때, 최솟값 -3



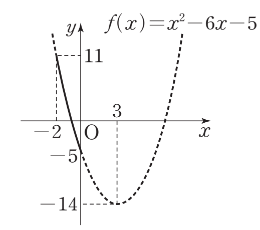
13 답 (1) 11 (2) -5

$f(x)=x^2-6x-5$

$=(x-3)^2-14$

$x=-2$일 때, 최댓값 11

$x=0$일 때, 최솟값 -5



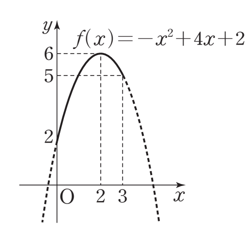
14 답 (1) 6 (2) 2

$f(x)=-x^2+4x+2$

$=-(x-2)^2+6$

$x=2$일 때, 최댓값 6

$x=0$일 때, 최솟값 2



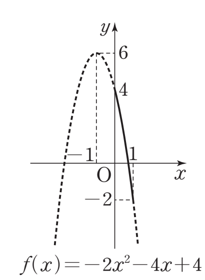
15 답 (1) 4 (2) -2

$f(x)=-2x^2-4x+4$

$=-2(x+1)^2+6$

$x=0$일 때, 최댓값 4

$x=1$일 때, 최솟값 -2



16 답 4

$x^2+y^2-2x+4y+9$

$=(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+4$

$=(x-1)^2+(y+2)^2+4$

17 답 10

$2x^2+4x+3y^2-6y+15$

$=2(x^2+2x+1)+3(y^2-2y+1)+10$

$=2(x+1)^2+3(y-1)^2+10$

18 답 45 m

$y=-5t^2+30t=-5(t^2-6t+9)+45$

$=-5(t-3)^2+45$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 90~93

19 답 ③

$y=-(x+1)(x-3)=-(x^2-2x-3)=-(x-1)^2+4$

이므로 $x=1$일 때, 최댓값 4를 갖는다.

$\therefore k=1, M=4 \Rightarrow k+M=5$

20 답 ④

$y=2x^2-8x+4=2(x-2)^2-4$이므로

$x=2$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

$\therefore k=2, m=-4 \Rightarrow k-m=6$

21 답 ①

$y=x^2-2ax+a^2-a=(x-a)^2-a$이므로

$x=a$일 때 최솟값 $-a$를 가진다.

$y=-x^2+4x+b=-(x-2)^2+4+b$이므로

$x=2$일 때 최댓값 $4+b$를 가진다.

$-a=4+b$

$\therefore a+b=-4$

22 답 ④

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 $(-2, 0)$, $(4, 0)$에서 만나므로 $f(x)=a(x+2)(x-4)$로 놓자.

$f(0)=-8a=8$

$\therefore a=-1$

$f(x)=-(x+2)(x-4)$

$=-x^2+2x+8$

$=-(x-1)^2+9$

즉, 이차함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 최댓값 9를 갖는다.

> 심플 정리
> [이차식의 인수분해]
> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
> $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

23 답 ⑤

$y=x^2-6x+a=(x-3)^2+a-9$이므로

$x=3$에서 최솟값 $a-9$를 갖는다.

$a-9=-6$

$\therefore a=3$

24 답 ②

$y=x^2-2ax+3=(x-a)^2-a^2+3$이므로

$x=a$에서 최솟값 $-a^2+3$을 갖는다.

$-a^2+3=-1$, $a^2=4$

$\therefore a=\pm 2$

a는 양수이므로 $a=2$

25 답 ②

$y=-2(x+1)^2+5$

$=-2x^2-4x+3$

$=-2x^2+px+q$

$\therefore p=-4, q=3 \Rightarrow p+q=-1$

26 답 ③

이차함수 $y=f(x)$가 $x=1$에서 최솟값 4를 가지므로

$f(x)=a(x-1)^2+4\ (a>0)$

$f(-1)=8$이므로

$f(-1)=4a+4=8$

$\therefore a=1$

$f(x)=ax^2+bx+c=(x-1)^2+4=x^2-2x+5$이므로

$b=-2$, $c=5$

$\therefore 2a+b+c=2\times 1-2+5=5$

27 답 ④

$y=f(x)=x^2-2x-2$

$=(x-1)^2-3$

의 꼭짓점의 x좌표는 1이므로

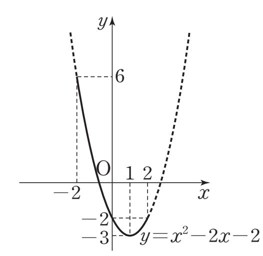
$-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는

$x=1$일 때 최솟값 $m=-3$을

갖고, $x=-2$일 때 최댓값

$M=6$을 갖는다.

$\therefore M-m=9$



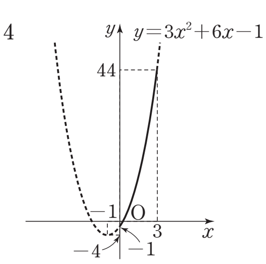
28 답 ③

$y=3x^2+6x-1=3(x+1)^2-4$

의 꼭짓점의 x좌표는 -1이므로 $0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때, 최댓값 44를 갖는다.

$a=3$, $M=44$이므로

$\therefore a+M=47$



29 답 24

$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$

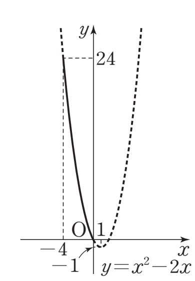
의 꼭짓점의 x좌표는 1이므로

$-4\le x\le 0$에서 함수 $f(x)$는

$x=-4$일 때, 최댓값 $M=24$,

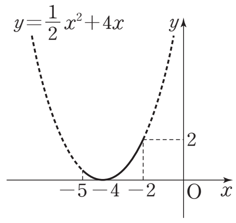
$x=0$일 때, 최솟값 $m=0$을 갖는다.

$\therefore M+m=24+0=24$



30 답 16

$y=\frac{1}{2}x^2+4x+k=\frac{1}{2}(x+4)^2+k-8$의 꼭짓점의 x좌표는 -4이므로 $-5\le x\le -2$에서 함수 $f(x)$는 $x=-4$일 때 최솟값, $x=-2$일 때 최댓값을 갖는다.



$x=-4$일 때 최솟값은 $k-8$이고

$k-8=0$이므로 $k=8$

$M=\frac{1}{2}\times(-2+4)^2=\frac{1}{2}\times 4=2$

$\therefore\ k\times M=16$

31 답 ⑤

$2x^2+y^2-4x+2y+8=2(x-1)^2+(y+1)^2+5$이므로

$x=1,\ y=-1$일 때, 최솟값 5를 갖는다.

32 답 ②

$x^2+4y^2-8x+16y-4=(x-4)^2+4(y+2)^2-36$이므로

$x=4,\ y=-2$일 때, 최솟값 -36을 갖는다.

$\therefore\ a=4,\ b=-2,\ k=-36 \Rightarrow a+b+k=-34$

33 답 ④

$-2x^2+12x-y^2-4y+18=-2(x-3)^2-(y+2)^2+40$

이므로 $x=3,\ y=-2$일 때, 최댓값 40을 갖는다.

34 답 ③

$-x^2-y^2-2x+4y+10=-(x+1)^2-(y-2)^2+15$이므로 $x=-1,\ y=2$일 때, 최댓값 15를 갖는다.

$\therefore\ a=-1,\ b=2,\ k=15 \Rightarrow a+b+k=16$

35 답 ②

$x^2+2x=t$라 하면

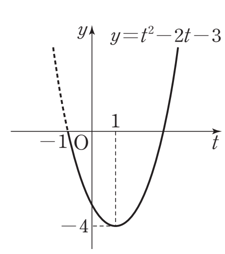
$x^2+2x=(x+1)^2-1$이므로

$t\ge -1$

$y=(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3$

$=t^2-2t-3$

$=(t-1)^2-4$



따라서 $t=1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

> **TIP**
>
> 반복되는 식은 치환을 이용하여 간단하게 표현될 수 있다.
> 이 문제에서는 치환한 함숫값 자체에 범위가 생기므로 이 범위부터 구해야 한다.
> 치환을 하게 되면 범위가 생기는데 주의하자.

36 답 ③

$x^2-4x+3=t$라 하면

$x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로

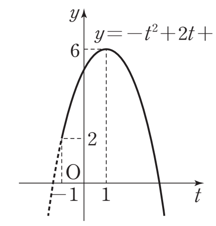
$t\ge -1$

$y=-(x^2-4x+3)^2$

$+2(x^2-4x+3)+5$

$=-t^2+2t+5$

$=-(t-1)^2+6$



따라서 $t=1$일 때, 최댓값 6을 갖는다.

37 답 ②

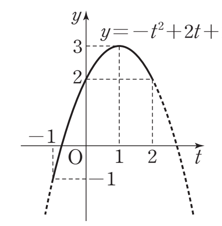
$2x+3=t$라 하면

$-2\le x\le -\frac{1}{2}$에서 $-1\le t\le 2$

$y=-(2x+3)^2+2(2x+3)+2$

$=-t^2+2t+2$

$=-(t-1)^2+3$



따라서 $t=1$일 때 최댓값 3을 갖고, $t=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

$\therefore\ M=3,\ m=-1 \Rightarrow M+m=2$

38 답 ②

$f(x)=x^2-2x=t$라 하면

$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$

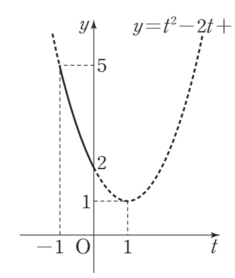
이므로 $0\le x\le 2$에서 최솟값은 -1이고, 최댓값은 0이다.

$\therefore\ -1\le t\le 0$

$y=\{f(x)\}^2-2\{f(x)\}+2$

$=t^2-2t+2$

$=(t-1)^2+1$



따라서 $t=0$일 때 최솟값 2를 갖고, $t=-1$일 때 최댓값 5를 갖는다.

$\therefore\ M=5,\ m=2 \Rightarrow M+m=7$

39 답 ④

$y=x-2$이므로

$x^2-2y=x^2-2(x-2)$

$=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$

따라서 $x=1$일 때, 최솟값 3을 갖는다.

40 답 ①

$y=2x-1$이므로

$x^2+y^2=x^2+(2x-1)^2$

$=5x^2-4x+1$

$=5\left\{x^2-\frac{4}{5}x+\left(\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}+1$

$=5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$

따라서 $x=\frac{2}{5}$일 때, 최솟값 $\frac{1}{5}$을 갖는다.

41 답 ③

$y=1-x$이므로

$4y-x^2=4(1-x)-x^2$

$=-x^2-4x+4$

$=-(x+2)^2+8$

따라서 $x=-2$일 때, 최댓값 8을 갖는다.

42 답 ①

$y=1-2x$이므로

$x^2-y^2=x^2-(1-2x)^2$

$=-3x^2+4x-1$

$=-3\left\{x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}-1$

$=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$

따라서 $x=\frac{2}{3}$일 때, 최댓값 $\frac{1}{3}$을 갖는다.

43 답 ④

$y=60t-2t^2$

$=-2(t^2-30t+225)+450$

$=-2(t-15)^2+450$

$t>0$이므로 $t=15$일 때, 최댓값은 450이다.

즉, 이 물체는 15초 후에 최고 높이 450 m에 도달한다.

$\therefore a=15, b=450 \Rightarrow a+b=465$

44 답 ③

직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면

$2x+2y=20$, $x+y=10$

$\therefore y=10-x$

$x>0$, $y>0$이므로 $0<x<10$

직사각형의 넓이는 xy이므로

$xy=x(10-x)=-x^2+10x=-(x-5)^2+25$

즉, $x=5$일 때 최댓값은 25이다.

따라서 이 직사각형의 최대 넓이는 25 cm^{2}이다.

45 답 ④

$b=10-a$이므로

$c^2=a^2+b^2$ ($\because$ 직각삼각형)

$=a^2+(10-a)^2$

$=2a^2-20a+100$

$=2(a-5)^2+50$

따라서 $a=5$일 때, 최솟값은 50이다.

46 답 ⑤

직사각형 모양의 울타리의 가로의 길이를 y m, 세로의 길이를 x m라 하면 철망의 길이는 20 m이므로

$2x+y=20 \quad \therefore y=20-2x$

$x>0$, $y>0$이므로

$20-2x>0 \quad \therefore 0<x<10$

울타리의 넓이는 xy이므로

$xy=x(20-2x)$

$=-2x^2+20x$

$=-2(x^2-10x+25-25)$

$=-2(x-5)^2+50$

즉, $x=5$일 때 최댓값은 50이다.

따라서 울타리의 최대 넓이는 50 m^{2}이다.

TIP

울타리의 벽은 철망이 없다는데 주의하자. 울타리의 벽까지 철망이 있다면 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하는 것과 같은 문제가 된다. 이런 유형의 문제는 항상 직사각형의 한 변의 길이가 빠진 것으로 이해하자.

47 답 ④

물받이의 높이를 x cm라 하면 색칠한 직사각형의 가로의 길이는 $(40-2x)$ cm, 세로의 길이는 x cm이다.

$x>0$, $40-2x>0$이므로 $0<x<20$

직사각형의 넓이는 xy이므로

$xy=x(40-2x)$

$=-2x^2+40x$

$=-2(x^2-20x+100)+200$

$=-2(x-10)^2+200$

즉, $x=10$일 때 최댓값은 200이다.

따라서 색칠한 직사각형의 최대 넓이는 200 cm^{2}이다.

연습 문제 [K~M] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 94~95

01 답 ④

ㄱ. $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

기울기가 양수이므로 $-\frac{a}{b}>0$

$\therefore ab<0$ … ㉠ (거짓)

ㄴ. y절편이 0보다 크므로 $-\frac{c}{b}>0$

$\therefore bc<0$ … ㉡ (참)

ㄷ. ㉠, ㉡에 의해

a	+	−
b	−	+
c	+	−

$\therefore ac>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

심플 정리

[일차함수 $ax+by+c=0$의 그래프]

일차함수 $ax+by+c=0 \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$로 변형한 후

기울기 $-\frac{a}{b}$와 y절편 $-\frac{c}{b}$를 구한다.

(1) $ab>0$: 기울기 음수, $bc>0$: y절편 음수

(2) $ab>0$: 기울기 음수, $bc<0$: y절편 양수

(3) $ab<0$: 기울기 양수, $bc>0$: y절편 음수

(4) $ab<0$: 기울기 양수, $bc<0$: y절편 양수

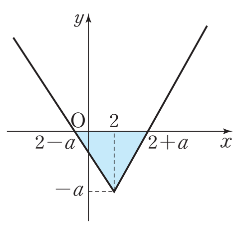
02 답 ③

$y=|x-2|-a$의 x절편은 $y=0$일 때의 값이므로

$0=|x-2|-a$

$\therefore x=2-a$ 또는 $x=2+a$

$y=|x-2|-a$의 그래프는 그림과 같다.



그래프에서

$\frac{1}{2}\{(2+a)-(2-a)\}\times a=9$

$a^2=9$

$\therefore a=\pm3$

a는 양수이므로 $a=3$

03 답 ③

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 4)$이므로

$y=ax^2+bx+c=a(x-2)^2+4$

y절편이 12이므로 $x=0$, $y=12$를 대입하면

$12=a(0-2)^2+4=4a+4$

$\therefore a=2$

$y=2(x-2)^2+4=2x^2-8x+12=ax^2+bx+c$이므로

$b=-8$, $c=12$

$\therefore a-b+c=2-(-8)+12=22$

04 답 ⑤

최고차항의 계수가 1인 이차함수의 꼭짓점이 $(3,\ 2)$이므로

$y=(x-3)^2+2$

$=x^2-6x+9+2$

$=x^2-6x+11$

$=x^2+px+q$

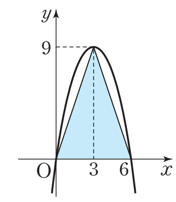
$\therefore p=-6$, $q=11 \Rightarrow p+q=5$

05 답 ⑤

삼각형 OAB의 넓이가 27이므로

꼭짓점의 좌표가 $(3,\ k)$이면

$\frac{1}{2}\times6\times k=27 \qquad \therefore k=9$



이차함수의 꼭짓점 B의 좌표는

$(3,\ 9)$이다.

$y=a(x-3)^2+9$

이 이차함수가 $O(0,\ 0)$을 지나므로

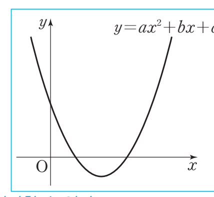
$0=a(0-3)^2+9 \Rightarrow a=-1$

$y=-(x-3)^2+9=-x^2+6x$이므로 $b=6$

$\therefore a+b=-1+6=5$

06 답 ③

그림은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프이다. 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?



그래프의 모양을 보고 a, b, c의 부호를 판단할 수 있어.
아래로 볼록, 축이 y축 오른쪽에 위치, y절편이 양수가 보이지.

[보기]

ㄱ. $a>0$ ㄴ. $bc>0$ ㄷ. $4a-2b+c>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 주어진 이차함수의 그래프는 아래로 볼록이고, 축이 y축의 오른쪽에 있어.

ㄱ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 아래로 볼록인 그래프이므로 $a>0$이다. (참)

ㄴ. 축의 방정식이 $x=-\frac{b}{2a}$이고 $-\frac{b}{2a}>0$이므로

$b<0$이고 y절편이 양수이므로 $c>0$이다.

$\therefore bc<0$ (거짓) ㄱ에서 $a>0$이라니까 $-b>0$ 즉, $b<0$이 되는 거야.

2nd 함숫값이 $4a-2b+c$가 나오도록 x의 값을 정하자.

ㄷ. $x=-2$일 때, 함숫값은 $4a-2b+c>0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. $f(-2)=a\times(-2)^2+b\times(-2)+c=4a-2b+c$

07 답 ①

이차함수 $y=x^2-2(a+k)x+k^2-2k+b$의 그래프가

x축에 접하려면 이차방정식

$x^2-2(a+k)x+k^2-2k+b=0$이 중근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(a+k)^2-(k^2-2k+b)=0$

$(2a+2)k+a^2-b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$2a+2=0$, $a^2-b=0 \Rightarrow a=-1$, $b=1$

$\therefore a+2b=1$

08 답 7

이차함수 $y=x^2+ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x+b$가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 x좌표가 -2와 1일 때, $2b-a$의 값을 구하시오.
① 연립하여 구한 이차방정식이 두 실근을 가져.
② 그 실근이 -2와 1이라는 거야.
(단, a, b는 상수이다.)

1st 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표가 연립한 이차방정식의 해와 같음을 이용하자.

이차함수 $y=x^2+ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x+b$의 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+(a-2)x+3-b=0$의 두 근이다.
이차함수와 직선을 연립하면 $x^2+ax+3=2x+b$
$x^2+(a-2)x+3-b=0$으로 정리돼.

2nd 근과 계수의 관계를 이용하여 값을 구하자.

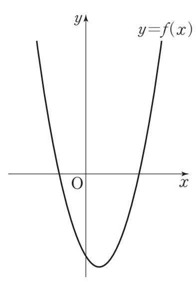
이차방정식 $x^2+(a-2)x+3-b=0$의 두 근이 -2와 1이므로 근과 계수의 관계로부터
두 근을 아니까 근과 계수의 관계를 이용할 수 있어.

$-2+1=-a+2$, $(-2)\times1=3-b$

$\therefore a=3$, $b=5$ ⇨ $2b-a=7$

09 답 ②

그림은 최고차항의 계수가 1이고 $f(-2)=f(4)=0$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근의 합은?



① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

① 최고차항의 계수가 주어졌어.
② 이차함수가 x축과 만나는 x절편이 -2, 4라는 거야.

1st $f(x)$를 먼저 구하자.

이차함수 $y=f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고
$f(-2)=f(4)=0$을 만족하므로
인수정리에 의하여 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$이면 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 가지게 돼.

$f(x)=(x+2)(x-4)$

2nd $f(2x-1)=0$을 만족시키는 x의 값을 구하여 두 근의 합을 구하자.

$f(2x-1)=0$에서
$(2x-1+2)(2x-1-4)=0$
$f(x)=(x+2)(x-4)$에 x 대신 $2x-1$을 대입한 거야.
$(2x+1)(2x-5)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

따라서 두 근의 합은 $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=2$이다.

TIP

이차함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(-2)=0$, $f(4)=0$을 만족한다는 것은 x축과의 교점이 $(-2, 0)$, $(4, 0)$이라는 것이다.
이것을 이용하면 이차함수 $y=f(x)$를 구할 수 있다.

10 답 ①

$f(x)=-x^2+2kx-3k=-(x-k)^2+k^2-3k$

$x=k$일 때 $f(x)$는 최댓값 k^2-3k를 갖고, 최댓값이 4이므로

$k^2-3k=4$, $k^2-3k-4=0$, $(k+1)(k-4)=0$

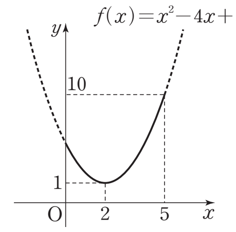
$\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

따라서 모든 상수 k의 값의 곱은 $-1\times4=-4$이다.

11 답 ③

$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 축의 방정식이 $x=2$이고, 아래로 볼록한 이차함수이므로 $0\le x\le5$에서 함수 $f(x)$는 $x=5$일 때 최댓값을 갖고, $x=2$일 때 최솟값을 갖는다.



$f(5)=10$이므로

$9+k-4=10$

$\therefore k=5$

$0\le x\le5$에서 함수 $f(x)=x^2-4x+5$의 최솟값은

$f(2)=4-8+5=1$

12 답 ④

$y=x^2-2mx-m^2+2m+1=(x-m)^2-2m^2+2m+1$

주어진 이차함수는 $x=m$일 때, 최솟값 $-2m^2+2m+1$을 갖는다.

$f(m)=-2m^2+2m+1$

$=-2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$

따라서 $f(m)$은 $m=p=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k=\frac{3}{2}$을 갖는다.

$\therefore p=\frac{1}{2}$, $k=\frac{3}{2}$ ⇨ $p+k=2$

13 답 25

$2x-1=t$라고 하면

$1\le x\le4$에서 $1\le t\le7$

$y=(2x-1)^2-4(2x-1)+3$

$=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

이므로 $t=2$일 때 최솟값 -1을 갖고, $t=7$일 때 최댓값 24를 갖는다.

$\therefore M=24$, $m=-1$ ⇨ $M-m=25$

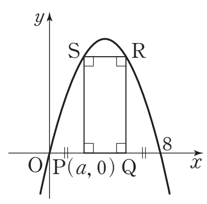
14 답 34

$y=-x^2+8x$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표를 구해 보면

$-x^2+8x=0,\ x(x-8)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=8$

오른쪽 그림에서 점 P의 x좌표를 $a(a>0)$이라 하면



$\overline{PQ}=8-2a$

$\overline{PS}=-a^2+8a$ ··· Ⅰ

이때 직사각형 PQRS의 둘레의 길이를 l이라 하면

$l=2(\overline{PQ}+\overline{PS})$

$=2(8-2a-a^2+8a)$

$=-2a^2+12a+16$

$=-2(a^2-6a+9-9)+16$

$=-2(a-3)^2+34$ ··· Ⅱ

따라서 $a=3$일 때, 직사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최댓값은 34이다. ··· Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	$\overline{PQ}$, $\overline{PS}$를 문자에 대한 식으로 나타낸다.	40%
Ⅱ	둘레의 길이에 대한 식을 세운다.	40%
Ⅲ	둘레의 길이의 최댓값을 구한다.	20%

Simple N 여러 가지 방정식의 풀이

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 96~97

01 답 삼차방정식, 사차방정식

02 답 조립제법

03 답 $x^2=X$

04 답 ×

05 답 ×

06 답 ○

07 답 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$x^3-4x=x(x^2-4)$

$=x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

08 답 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

09 답 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

$x^4-2x^2=x^2(x^2-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

10 답 $x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

$x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)$

$=(x+2)(x-2)(x^2+4)=0$

$\therefore\ x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

11 답 (가) 2 (나) $\sqrt{5}$

12 답 (가) $2x$ (나) $\sqrt{2}$

13 답 (가) 3 (나) $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 98~99

14 답 ②

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

$x=1,\ x^2+x+1=0$

α는 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0$

$\therefore\ \alpha^2+\alpha=-1$

15 답 ③

$8x^3+1=(2x+1)(4x^2-2x+1)=0$에서

$x=-\dfrac{1}{2},\ 4x^2-2x+1=0$

α는 방정식 $4x^2-2x+1=0$의 한 허근이므로

$4\alpha^2-2\alpha+1=0$

$4\alpha^2-2\alpha=-1$

양변에 $\dfrac{1}{2}$을 곱하면

$\therefore\ 2\alpha^2-\alpha=-\dfrac{1}{2}$

16 답 ②

$x^4-81=(x^2+9)(x^2-9)=0$에서

$x=\pm3i$ 또는 $x=\pm3$

$\therefore\ \dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta}=\dfrac{3\times(-3)}{3i\times(-3i)}=-1$

17 답 ④

$x^4-7x^3-x^2+7x=x^2(x^2-7x)-(x^2-7x)$

$=(x^2-1)(x^2-7x)$

$=(x-1)(x+1)x(x-7)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=7$

$\therefore\ \alpha-\beta=7-(-1)=8$

답_052071_심플자이고등(K~O).indd 63 2017. 9. 15. 오후 5:44

18 답 ③

$f(x)=x^3-2x^2-9x+18$이라고 하면

$f(2)=8-8-18+18=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -2 & -9 & 18 \\ & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-2x^2-9x+18=(x-2)(x^2-9)$

$=(x-2)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

$\alpha<\beta<\gamma$이므로

$\alpha=-3,\ \beta=2,\ \gamma=3$

$\therefore \beta+\gamma-\alpha=2+3-(-3)=8$

심플 정리

[인수정리]

다항식 $f(x)$가 $f(\alpha)=0$을 만족할 때, $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

즉, 다항식 $f(x)$는 $x-\alpha$라는 인수를 가진다.

19 답 ①

$f(x)=x^3-2x^2-x+2$라고 하면

$f(1)=1-2-1+2=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x^2-x-2)$

$=(x-1)(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1+1+4=6$

20 답 ①

$f(x)=x^3-3x^2+14x-12$라고 하면

$f(1)=1-3+14-12=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & 14 & -12 \\ & & 1 & -2 & 12 \\ \hline & 1 & -2 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-3x^2+14x-12=(x-1)(x^2-2x+12)=0$

$\therefore x=1,\ x^2-2x+12=0$

$\alpha,\ \beta$는 방정식 $x^2-2x+12=0$의 서로 다른 두 허근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=12$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-20$

21 답 ①

$f(x)=x^4+x^3+8x+8$이라고 하면

$f(-1)=1-1-8+8=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 8 & 8 \\ & & -1 & 0 & 0 & -8 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^4+x^3+8x+8=(x+1)(x^3+8)$

$=(x+1)(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

$\therefore \alpha\beta+\gamma\delta=(-2)\times(-1)+(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)$

$=2+4=6$

22 답 ①

$(x-1)^3-4(x-1)=0$에서

$x-1=t$로 치환하면

$t^3-4t=0,\ t(t^2-4)=0$

$t(t+2)(t-2)=0$

$t=0$ 또는 $t=-2$ 또는 $t=2$

$t=x-1$이므로

$x-1=0$ 또는 $x-1=-2$ 또는 $x-1=2$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 모든 실근의 곱은

$1\times(-1)\times3=-3$

23 답 ④

$(x^2-x)^2-2(x^2-x)-24=0$에서

$x^2-x=t$로 치환하면

$t^2-2t-24=0$

$(t+4)(t-6)=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=6$

(i) $t=-4$일 때,

$x^2-x=-4$

$x^2-x+4=0 \qquad \therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{2}$

(ii) $t=6$일 때,

$x^2-x=6$에서

$x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 모든 실근의 합은 $(-2)+3=1$이다.

다른 풀이

이차방정식 $x^2-x+4=0$에서 $D_1=1-16=-15<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이차방정식 $x^2-x-6=0$에서 $D_2=1+24=25>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식 $x^2-x-6=0$의 근과 계수의 관계에 의해 모든 실근의 합은 1이다.

24 답 ①

$(x^2+x)^2-x^2-x-2=0$

$(x^2+x)^2-(x^2+x)-2=0$에서

$x^2+x=t$로 치환하면

$t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

(i) $t=-1$일 때,

$x^2+x=-1$에서

$x^2+x+1=0 \qquad \therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $t=2$일 때,

$x^2+x=2$에서

$x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

따라서 모든 실근의 합은 $1+(-2)=-1$이다.

다른 풀이

$x^2+x+1=0$에서 $D_1=1-4=-3<0$이므로

이차방정식 $x^2+x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$x^2+x-2=0$에서 $D_2=1+8=9>0$이므로

이차방정식 $x^2+x-2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 근과 계수의 관계에 의해 모든 실근의 합은 -1이다.

25 답 ⑤

$(x^2+2x+2)(x^2+2x+3)=6$에서

$x^2+2x=t$로 치환하면

$(t+2)(t+3)=6$

$t^2+5t=0$

$\therefore t=-5$ 또는 $t=0$

(i) $t=-5$일 때,

$x^2+2x=-5$에서

$x^2+2x+5=0$

$\therefore x=-1\pm2i$

(ii) $t=0$일 때,

$x^2+2x=0$에서

$x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 모든 허근의 곱은 $(-1+2i)\times(-1-2i)=5$이다.

다른 풀이

$x^2+2x+5=0$에서 $D=1-5=-4<0$이므로

이차방정식 $x^2+2x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 이차방정식 $x^2+2x+5=0$의 근과 계수의 관계에 의해 모든 허근의 곱은 5이다.

26 답 -3

$x^4-3x^2-10=(x^2-5)(x^2+2)=0$에서

$x^2=5$ 또는 $x^2=-2$

$\alpha=\sqrt{5},\ \beta=-\sqrt{5}$ (또는 $\alpha=-\sqrt{5},\ \beta=\sqrt{5}$)

$\gamma=\sqrt{2}i,\ \delta=-\sqrt{2}i$ (또는 $\gamma=-\sqrt{2}i,\ \delta=\sqrt{2}i$)

$\alpha\beta+\gamma\delta=-5+2=-3$

27 답 ⑤

$x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2$

$=(x^2+2)^2-x^2$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$

$\therefore x^2+x+2=0$ 또는 $x^2-x+2=0$

근과 계수의 관계에 의해

이차방정식 $x^2+x+2=0$의 두 근의 곱은 2

이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근의 곱은 2

따라서 모든 근의 곱은 $2\times2=4$이다.

심플 정리

[이차방정식의 근과 계수의 관계]

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

(1) $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ (2) $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

28 답 ①

$x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x-1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-3=0$

$x+\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면 $t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

(i) $t=-3$일 때,

$x+\dfrac{1}{x}=-3$에서

$x^2+3x+1=0 \qquad \therefore x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii) $t=1$일 때,

$x+\dfrac{1}{x}=1$에서

$x^2-x+1=0 \qquad \therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=-3$

다른 풀이

$x^2-x+1=0$에서 $D_1=1-4=-3<0$이므로

이차방정식 $x^2-x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$x^2+3x+1=0$에서 $D_2=9-4=5>0$이므로

이차방정식 $x^2+3x+1=0$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=-3$

29 답 ④

$x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2-5t+6=0$, $(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3$

(i) $t=2$일 때,

$x+\frac{1}{x}=2$에서

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$(중근)

(ii) $t=3$일 때,

$x+\frac{1}{x}=3$에서

$x^2-3x+1=0$

$\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

따라서 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

Simple O 삼차방정식의 근의 성질

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 100 ~ 101

01 답 $-\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $-\frac{d}{a}$

02 답 $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

03 답 켤레복소수

04 답 ×

05 답 ○

06 답 ×

07 답 (1) 2 (2) 3 (3) -5

08 답 (1) -4 (2) -7 (3) 2

09 답 $x^3-4x^2-7x+10=0$

10 답 $x^3-x^2+4x-4=0$

11 답 (가) -2 (나) -4

12 답 (1) 0 (2) -1 (3) 1

13 답 (1) 0 (2) 1 (3) 1

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 102 ~ 103

14 답 ③

삼차방정식 $x^3-3x^2+2x-5=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=5$

$\therefore \frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{5}$

15 답 ⑤

삼차방정식 $x^3-8x^2+20x-10=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=8$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=20$, $\alpha\beta\gamma=10$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{20}{10}=2$

16 답 ⑤

삼차방정식 $x^3-4x^2+5x+2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5$, $\alpha\beta\gamma=-2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=6$

17 답 ②

삼차방정식 $ax^3-2x^2+3x-1=0$의 세 근이 -1, α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1\cdot\alpha\cdot\beta=-\left(\frac{-1}{a}\right)=\frac{1}{a}$

$\therefore a\alpha\beta=-1$

18 답 (1) $x^3-x^2-2=0$ (2) $x^3+2x-4=0$

삼차방정식 $x^3+x^2+2=0$의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=-2$

(1) 구하는 삼차방정식의 세 근이 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$이므로

$$\begin{cases} -\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=1 \\ (-\alpha)(-\beta)+(-\beta)(-\gamma)+(-\gamma)(-\alpha) \\ \qquad =\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 \\ (-\alpha)(-\beta)(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=2 \end{cases}$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma=0$이므로

$x^3-x^2-2=0$

(2) 구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$이므로

$$\begin{cases} \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 \\ \alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=2 \\ \alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=4 \end{cases}$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x^2+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)x-(\alpha\beta\gamma)^2=0$

이므로

$x^3+2x-4=0$

심플 정리

[삼차방정식의 근과 계수의 관계]

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (a, b, c, d는 실수)의 세 근을 α, β, γ라 하면

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$ (2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$ (3) $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

19 답 (1) $x^3-x^2-4x+4=0$ (2) $x^3+x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}=0$

삼차방정식 $x^3+x^2-4x-4=0$의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$, $\alpha\beta\gamma=4$

(1) 구하는 삼차방정식의 세 근이 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$이므로

$$\begin{cases}-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=1\\(-\alpha)(-\beta)+(-\beta)(-\gamma)+(-\gamma)(-\alpha)\\\qquad=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4\\(-\alpha)(-\beta)(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-4\end{cases}$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma=0$이므로

$x^3-x^2-4x+4=0$

(2) 구하는 삼차방정식의 세 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$이므로

$$\begin{cases}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-1\\\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{1}{4}\\\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{4}\end{cases}$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=0$

이므로 $x^3+x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}=0$

TIP

$\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값들을 알 때, 다음을 기억하면 유용하다.

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$

(2) $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}$

(3) $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$

20 답 ③

삼차방정식 $x^3-x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이므로 한 근이 $2-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{cases}2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+\alpha=1 \qquad \therefore \alpha=-3\\(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\alpha+\alpha(2+\sqrt{3})=a\\\Rightarrow 1+4\alpha=a \qquad \therefore a=-11\\(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\alpha=-b \Rightarrow \alpha=-b \qquad \therefore b=3\end{cases}$$

$\therefore ab=-33$

21 답 ①

삼차방정식 $x^3+ax^2-5x+b=0$에서 a, b가 유리수이므로 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{cases}1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+\alpha=2+\alpha=-a\\(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\alpha+\alpha(1+\sqrt{2})=-5\\\Rightarrow -1+2\alpha=-5 \qquad \therefore \alpha=-2 \Rightarrow a=0\\(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\alpha=-b\\\Rightarrow -\alpha=-b \qquad \therefore b=-2\end{cases}$$

$\therefore a+b=-2$

22 답 ③

삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이므로 한 근이 $1+\sqrt{2}i$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}i$이다.

나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{cases}1+\sqrt{2}i+1-\sqrt{2}i+\alpha=5 \qquad \therefore \alpha=3\\(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)\alpha+\alpha(1+\sqrt{2}i)=a\\\Rightarrow 3+2\alpha=a \qquad \therefore a=9\\(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)\alpha=-b \Rightarrow 3\alpha=-b \qquad \therefore b=-9\end{cases}$$

$\therefore \frac{b}{a}=-1$

23 답 ②

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-4=0$에서 a, b가 실수이므로 한 근이 $1+i$이면 다른 한 근은 $1-i$이다.

나머지 한 근을 α라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{cases}1+i+1-i+\alpha=-a \Rightarrow 2+\alpha=-a\\(1+i)(1-i)+(1-i)\alpha+\alpha(1+i)=b\\\Rightarrow 2+2\alpha=b\\(1+i)(1-i)\alpha=4 \Rightarrow \alpha=2\end{cases}$$

$\therefore a=-4$, $b=6$

$\therefore b-a=10$

24 답 ①

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

$x=1$, $x^2+x+1=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

또한 ω가 한 허근이면 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

근과 계수의 관계에 의해

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}=-1$

25 답 ①

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

$x=1$, $x^2+x+1=0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

또한 ω가 $x^3-1=0$의 한 허근이므로 $\omega^3=1$

$\therefore \omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1$

$=\omega^3(\omega^2+\omega+1)+\omega^2+\omega+1=0$

26 답 ⑤

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$에서

$x=-1$, $x^2-x+1=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\omega^2-\omega+1=0$

또한 ω가 한 허근이면 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

근과 계수의 관계에 의해

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1 \Rightarrow \overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$

$\therefore \dfrac{\omega^2+1}{\omega-1}=\dfrac{\omega}{\omega^2}=\dfrac{1}{\omega}=\overline{\omega}$

27 답 ③

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$에서

$x=-1$, $x^2-x+1=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\omega^2-\omega+1=0$

또한 ω가 $x^3+1=0$의 한 허근이므로 $\omega^3=-1$

$\therefore \omega^5-\omega^4=-\omega^2+\omega=1$

연습 문제 [N~O] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 104~105

01 답 13

> $f(x)=x^2-7x+6$이라 놓으면 $f(1)=0$이 성립해. 인수정리가 떠오르지.
>
> 삼차방정식 $x^3-7x+6=0$의 세 근 α, β, $\gamma\,(\alpha>\beta>\gamma)$에 대하여 $\alpha+2\beta-3\gamma$의 값을 구하시오.

1st 주어진 삼차방정식을 풀기 위해 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해하자.

[인수정리]
다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$일 때, $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

$f(x)=x^3-7x+6$이라 하면

$f(1)=1-7+6=0$이므로 조립제법을 이용하면

1	1	0	-7	6
		1	1	-6
	1	1	-6	0

$f(x)=(x-1)(x^2+x-6)=(x+3)(x-1)(x-2)$

2nd 세 근 α, β, γ가 $\alpha>\beta>\gamma$임에 유의하여 값을 정하자.

삼차방정식 $x^3-7x+6=0$의 세 근은 각각

$\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=-3\,(\because \alpha>\beta>\gamma)$

$\therefore \alpha+2\beta-3\gamma=13$

02 답 ②

방정식 $x^3-x^2+x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$x^3-x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$\therefore x^3-x^2+x+5=x^3-x^2+x+1+4$

$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+4$

k가 $x^3-x^2+x+5=0$의 한 근이므로

$(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)+4=0$

$\therefore (k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)=-4$

03 답 ①

$(x+2)(x+3)(x+1)-1=x$를 전개하면

$x^3+6x^2+11x+6-1-x=0$

$x^3+6x^2+10x+5=0$

이 삼차방정식의 세 근을 α, β, γ라 하므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=-6$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=10$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=36-20=16$

다른 풀이

$(x+2)(x+3)(x+1)-1=x$에서

$(x+2)(x+3)(x+1)-(x+1)=0$

$(x+1)\{(x+2)(x+3)-1\}=0$

$\therefore (x+1)(x^2+5x+5)=0$

위의 삼차방정식의 한 근은 $\alpha=-1$이고,

나머지 두 근을 β, γ라 하면

이차방정식 $x^2+5x+5=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\beta+\gamma=-5$, $\beta\gamma=5$이므로

$\beta^2+\gamma^2=(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma=15$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1+15=16$

> **심플 정리**
>
> **[곱셈 공식의 변형]**
>
> (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
>
> (2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
>
> (3) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
>
> (4) $a^3+b^3+c^3$
>
> $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

04 답 ①

$f(x)=x^3-3x^2-3x+10$이라 놓자.

$f(2)=8-12-6+10=0$이므로 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하면

2	1	-3	-3	10
		2	-2	-10
	1	-1	-5	0

$x^3-3x^2-3x+10=(x-2)(x^2-x-5)$

α, β는 정수가 아닌 수이므로 $x^2-x-5=0$의 두 근이고, 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-5$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-5)=11$

05 답 ②

$f(x)=x^4-2x^2+3x-2$라 놓자.

$f(1)=1-2+3-2=0$, $f(-2)=16-8-6-2=0$

이므로 조립제법을 이용하면

1	1	0	-2	3	-2
		1	1	-1	2
-2	1	1	-1	2	0
		-2	2	-2	
	1	-1	1	0	

$x^4-2x^2+3x-2=(x-1)(x+2)(x^2-x+1)=0$에서

$x^2-x+1=0$은 허근을 갖는다.

α는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\alpha^2-\alpha+1=0$

양변에 $(\alpha+1)$을 곱하면

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$, $\alpha^3+1=0$

$\therefore\ \alpha^3=-1$

06 답 ③

> 사차방정식 $(x^2-3x)^2+5(x^2-3x)+6=0$의 모든 실근의 곱은?
> x^2-3x가 반복되고 있어. 치환을 이용하면 되겠지.
>
> ① -4　② -1　③ 2　④ 5　⑤ 8

1st 반복되는 문자는 치환해야 해. 치환하면 범위가 나오니까 주의해.

$(x^2-3x)^2+5(x^2-3x)+6=0$에서

$x^2-3x=t$라 하면

반복되는 문자를 치환해서 풀어야 해. 치환 후 범위가 항상 나온다는 것을 기억하자.

$t=\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\geq-\frac{9}{4}$

$t^2+5t+6=0$

$(t+3)(t+2)=0$

$\therefore\ t=-2\left(\because\ t\geq-\frac{9}{4}\right)$

2nd 치환한 문자를 원래대로 바꾸어 실근을 구해야 해.

$x^2-3x=-2$

$x^2-3x+2=0$

근과 계수의 관계를 이용하면 실근의 곱은 $\frac{2}{1}=2$로 바로 구할 수 있어.

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

따라서 모든 실근의 곱은 $1\times2=2$이다.

07 답 ⑤

> x^2+x가 반복되는 거 보이지? 치환을 이용하자.
> 사차방정식 $(x^2+x-1)(x^2+x+3)-5=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$의 값은?
> (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)
>
> ① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

1st 반복되는 문자는 치환해야 해.

$(x^2+x-1)(x^2+x+3)-5=0$에서

$x^2+x=t$로 치환하면　x^2+x가 반복해서 보이지? 치환!

$(t-1)(t+3)-5=0$

$t^2+2t-8=0$

$(t+4)(t-2)=0$

$(x^2+x+4)(x^2+x-2)=0$

2nd 서로 다른 두 허근이 나오는 경우를 찾자.

α, β는 $x^2+x+4=0$의 서로 다른 두 허근이므로

판별식 $D=1^2-4\times4=-15<0$이므로 허근을 가져.

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=4$

3rd 계수가 실수니까 이차방정식의 두 허근은 서로 켤레근이야.

$\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이므로

$\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=2\alpha\beta=8$

08 답 ⑤

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$

$\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}=3$

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3$

$x^2+5x=t$로 치환하면

$(t+4)(t+6)=3$, $t^2+10t+21=0$

$(t+3)(t+7)=0$

$t=-3$ 또는 $t=-7$

$x^2+5x=-3$ 또는 $x^2+5x=-7$

$\therefore\ x^2+5x+3=0$ 또는 $x^2+5x+7=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 각각 3, 7이므로 모든 근의 곱은 $3\times7=21$이다.

09 답 ③

$x^4+4x^3-3x^2+4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2+4t-5=0$

$(t+5)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-5$ 또는 $t=1$

(i) $t=-5$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-5$에서 $x^2+5x+1=0$의 판별식 $D>0$이므로 실근을 갖는다.

(ii) $t=1$, 즉 $x+\frac{1}{x}=1$에서 $x^2-x+1=0$의 판별식 $D<0$ 이므로 허근을 갖는다.

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=25-2=23$

10 답 ④

삼차방정식 $x^3-x^2+2x-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=1$

$$\therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$$
$$=\frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{1-\beta}{\beta}+\frac{1-\gamma}{\gamma}$$
$$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-3=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3$$
$$=\frac{2}{1}-3=-1$$

11 답 2

삼차방정식 $x^3-2x^2+3x-4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=4$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$
$=(2-\gamma)(2-\alpha)(2-\beta)$
$=2^3-(\alpha+\beta+\gamma)\times2^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\times2-\alpha\beta\gamma$
$=8-8+6-4=2$

다른 풀이

$x^3-2x^2+3x-4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

또한 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-2x^2+3x-4$

양변에 $x=2$를 대입하면

$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=8-8+6-4=2$

12 답 ③

> a, b가 유리수일 때, x에 대한 삼차방정식
> $x^3+ax^2+bx+1=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$이다.
> $a+b$의 값은?
> 계수가 유리수이고 한 근이 무리수야. 켤레근이 생각나야지.
>
> ① 0 ② -1 ③ -2
> ④ -3 ⑤ -4

1st a, b가 유리수이므로 주어진 근의 켤레근을 생각하자.

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이므로
주어진 조건이 켤레근을 떠오르게 하지.
$-1+\sqrt{2}$가 한 근이면 $-1-\sqrt{2}$도 근이 된다.

2nd 근과 계수의 관계에 의해 나머지 한 근과 유리수 a, b를 모두 구할 수 있어.

나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}(-1+\sqrt{2})\times(-1-\sqrt{2})\times\alpha=-\alpha=-1 & \therefore \alpha=1\\ (-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})+1=-1=-a & \therefore a=1\\ (-1+\sqrt{2})\times(-1-\sqrt{2})+(-1+\sqrt{2})\times1 & \\ \qquad +(-1-\sqrt{2})\times1=-3=b & \end{cases}$$

$\therefore a+b=1+(-3)=-2$

> 심플 정리
>
> **[삼차방정식의 켤레근]**
>
> (1) 계수가 유리수인 삼차방정식의 한 근이
> $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
> (단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)
>
> (2) 계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이
> $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다.
> (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

13 답 3

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 $1+i$가 한 근이면 $1-i$도 근이 된다. ··· Ⅰ

나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}(1+i)+(1-i)+\alpha=k+1 \Rightarrow \alpha=k-1\\ (1+i)(1-i)+(1-i)\cdot\alpha+\alpha\cdot(1+i)=4\\ \Rightarrow 2+2\alpha=4 \quad \therefore \alpha=1\\ (1+i)\cdot(1-i)\cdot\alpha=k \Rightarrow 2\alpha=k \quad \therefore k=2 \quad \cdots \text{Ⅱ}\end{cases}$$

$\therefore k+\alpha=2+1=3$ ··· Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	계수가 모두 실수이므로 켤레근을 구한다.	20%
Ⅱ	근과 계수의 관계를 이용하여 α, k의 값을 구한다.	60%
Ⅲ	$k+\alpha$의 값을 구한다.	20%

14 답 ④

> ω가 근이니까 $\omega^3=1$임을 알 수 있어. 그리고 $\omega^2+\omega+1=0$도 알고 있어야 해.
> 이차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하자.
> $$\omega+2\omega^2+3\omega^3+4\omega^4+5\omega^5+6\omega^6=a+b\omega$$
> 가 성립할 때, 두 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?
>
> ① -2 ② 0 ③ 2
> ④ 4 ⑤ 8

1st 인수분해를 이용하여 허근에 관한 식들을 유도하자.

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 ω는

$x^2+x+1=0$의 허근이다.
판별식 $D=1-4=-3<0$이므로 허근을 가져.

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

2nd $\omega^3=1$을 이용하여 ω에 대한 일차식이 되도록 유도하자.

$\omega+2\omega^2+3\omega^3+4\omega^4+5\omega^5+6\omega^6$

$=\omega+2\omega^2+3+4\omega+5\omega^2+6$

$=7\omega^2+5\omega+9$

$=7(-\omega-1)+5\omega+9$ ($\because$ $\omega^2=-\omega-1$)

$=2-2\omega$

$\therefore$ $a=2$, $b=-2$ ⇨ $a-b=4$

15 답 ②

ㄱ. $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$에서

α는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$ (참)

ㄴ. α가 $x^2-x+1=0$의 근이므로 $\overline{\alpha}$도 근이 된다.

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}=1$ (참)

ㄷ. α, $\overline{\alpha}$가 방정식 $x^3+1=0$의 근이므로

$\alpha^3=\overline{\alpha}^3=-1$ $\quad\therefore$ $\alpha^3+\overline{\alpha}^3=-2$

한편, $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}=1$이므로

$\alpha^2+\overline{\alpha}^2=(\alpha+\overline{\alpha})^2-2\alpha\overline{\alpha}=1-2=-1$

$\therefore$ $\alpha^3+\overline{\alpha}^3\neq\alpha^2+\overline{\alpha}^2$(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른 풀이

ㄷ. $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}=1$이고,

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$이므로

$\alpha^3+\overline{\alpha}^3=(\alpha+\overline{\alpha})(\alpha^2-\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2)$

$=\alpha^2+\overline{\alpha}^2-1\neq\alpha^2+\overline{\alpha}^2$

Simple P 연립방정식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 106~107

01 답 연립방정식

02 답 가감법, 대입법

03 답 부정방정식

04 답 ×

05 답 ○

06 답 ×

07 답 $x=3$, $y=1$

08 답 해가 없다.

09 답 해가 무수히 많다.

10 답 (가) -7 (나) -1

11 답 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

$t^2-5t+6=0$

$(t-2)(t-3)=0$

$\therefore$ $t=2$ 또는 $t=3$

12 답 $\begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$

$x+y=4$를 $x-xy+y=16$에 대입하면 $xy=-12$

$t^2-4t-12=0$

$(t-6)(t+2)=0$

$\therefore$ $t=6$ 또는 $t=-2$

13 답 $(2, 5)$, $(4, 3)$

14 답 $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{4}{3}$

$2x-3=0$, $3y-4=0$ ⇨ $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{4}{3}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 108~111

15 답 ③

$\begin{cases} -x+y=1 & \cdots ㉠ \\ 2x-3y=-3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x+1$을 ㉡에 대입하면

$2x-3(x+1)=-3$

$2x-3x-3=-3$

$-x=0$ $\quad\therefore$ $x=0$

$x=0$을 ㉠에 대입하면 $y=1$

$\therefore$ $\alpha=0$, $\beta=1$ ⇨ $\alpha+\beta=1$

16 답 ③

$\begin{cases} 0.6x+0.5y=3.2 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에 10을 곱하고 ㉡에 6을 곱하여 정리하면

$\begin{cases} 6x+5y=32 & \cdots ㉢ \\ 2x+3y=12 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉣×3−㉢을 하면

$4y=4$ $\quad\therefore$ $y=1$

$y=1$을 ㉣에 대입하면 $x=\frac{9}{2}$

$\therefore$ $\alpha=\frac{9}{2}$, $\beta=1$ ⇨ $2\alpha+\beta=10$

17 답 ③

$\underline{2x-y=4x+10}=x+y$ (i), $2x-y=\underline{4x+10=x+y}$ (ii)

(i) $2x-y=4x+10$에서

$2x+y=-10$ ⋯ ㉠

(ii) $4x+10=x+y$에서

$3x-y=-10$ ⋯ ㉡

㉠+㉡에서

$5x=-20$ $\therefore x=-4$

$x=-4$를 ㉠에 대입하면 $y=-2$

$\therefore \alpha=-4,\ \beta=-2 \Rightarrow \alpha\beta=8$

18 답 ③

$x=2,\ y=3$을 주어진 연립방정식에 대입하면

$\begin{cases} 4-3a=10 \\ 2+3=b \end{cases}$ 이므로 $a=-2,\ b=5$

$\therefore a+b=3$

19 답 ④

$\begin{cases} kx+y=-1 & \cdots ㉠ \\ 2x+(k-1)y=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 에서

㉠$\times(k-1)-$㉡을 하면

$\{k(k-1)-2\}x=-(k-1)-2$

$(k+1)(k-2)x=-(k+1)$

(i) $k=-1$이면 $0\cdot x=0$이므로 해가 무수히 많다.

$\therefore a=-1$

(ii) $k=2$이면 $0\cdot x=-3$이므로 해가 없다.

$\therefore b=2$

$\therefore a+b=1$

심플 정리

[방정식 $ax=b$의 해]

방정식 $ax=b$에 대하여

(1) $a\neq0$일 때, $x=\dfrac{b}{a}$

(2) $a=0$일 때, $b\neq0$이면 해가 없다.

$b=0$이면 해가 무수히 많다.

20 답 ③

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-1$을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-1)^2=5$

$2x^2-2x-4=0$

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(i) $x=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=-2$이므로 $x+y=-3$

(ii) $x=2$를 ㉠에 대입하면 $y=1$이므로 $x+y=3$

$\therefore |x+y|=3$

21 답 ⑤

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$을 ㉡에 대입하면

$(2y+1)y-y^2=6$

$y^2+y-6=0$

$(y+3)(y-2)=0$

$\therefore y=-3$ 또는 $y=2$

(i) $y=-3$을 ㉠에 대입하면 $x=-5$이므로

$xy=15$

(ii) $y=2$를 ㉠에 대입하면 $x=5$이므로

$xy=10$

따라서 xy의 최댓값은 15이다.

22 답 ②

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots ㉠ \\ 2x^2+3y^2=8 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$를 ㉡에 대입하면

$2x^2+3(x-2)^2=8$

$5x^2-12x+4=0$

$(5x-2)(x-2)=0$

$\therefore x=\dfrac{2}{5}$ 또는 $x=2$

(i) $x=\dfrac{2}{5}$를 ㉠에 대입하면 $y=-\dfrac{8}{5}$이므로

$x+y=-\dfrac{6}{5}$

(ii) $x=2$를 ㉠에 대입하면 $y=0$이므로

$x+y=2$

따라서 $x+y$의 최댓값은 2이다.

23 답 ②

$\begin{cases} x+y=3 & \cdots ㉠ \\ 2xy-y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=3-x$를 ㉡에 대입하면

$2x(3-x)-(3-x)=3$

$6x-2x^2-3+x=3$

$2x^2-7x+6=0$

$(2x-3)(x-2)=0$

$\therefore x=\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=2$

(i) $x=\dfrac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \dfrac{x}{y}=1$

(ii) $x=2$를 ㉠에 대입하면 $y=1$

$\therefore \dfrac{x}{y}=2$

따라서 $\dfrac{x}{y}$의 최댓값은 2이다.

24 답 ②

$\begin{cases} (2x-y)(x-y)=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-2xy+2y^2=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

$y=2x$ ⋯ ㉢ 또는 $y=x$ ⋯ ㉣

(i) ㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-2x\cdot 2x+2\cdot(2x)^2=10$

$5x^2=10$, $x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$

이때 $y=2x$이므로

$x=\pm\sqrt{2}$, $y=\pm 2\sqrt{2}$ (복부호 동순)

$\therefore x^2+y^2=2+8=10$

(ii) ㉣을 ㉡에 대입하면

$x^2-2x\cdot x+2x^2=10$

$x^2=10$ $\qquad \therefore x=\pm\sqrt{10}$

이때 $y=x$이므로

$x=\pm\sqrt{10}$, $y=\pm\sqrt{10}$ (복부호 동순)

$\therefore x^2+y^2=10+10=20$

(i), (ii)에서 x^2+y^2의 최댓값은 20이다.

25 답 ③

$\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-3xy-2y^2=8 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 인수분해하면 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore y=-x$ ⋯ ㉢ 또는 $y=x$ ⋯ ㉣

(i) ㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-3x\cdot(-x)-2\cdot(-x)^2=8$

$2x^2=8$이므로

$x^2=4$ $\qquad \therefore x=\pm 2$

이때 $y=-x$이므로

$x=\pm 2$, $y=\mp 2$ (복부호 동순)

$\therefore xy=-4$

(ii) ㉣을 ㉡에 대입하면

$x^2-3x^2-2x^2=8$, $-4x^2=8$이므로

$x^2=-2$

그런데 $x^2\geq 0$이므로 해가 없다.

(i), (ii)에서 $xy=-4$

26 답 ①

$\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=0 & \cdots ㉠ \\ 5x^2-y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 인수분해하면 $(x-y)(2x+y)=0$

$\therefore y=x$ ⋯ ㉢ 또는 $y=-2x$ ⋯ ㉣

(i) ㉢을 ㉡에 대입하면

$5x^2-x^2=4$, $4x^2=4$

$\therefore x=\pm 1$

이때 $y=x$이므로

$x=\pm 1$, $y=\pm 1$ (복부호 동순)

$\therefore x+y=2$ 또는 $x+y=-2$

(ii) ㉣을 ㉡에 대입하면

$5x^2-4x^2=4$, $x^2=4$

$\therefore x=\pm 2$

이때 $y=-2x$이므로

$x=\pm 2$, $y=\mp 4$ (복부호 동순)

$\therefore x+y=-2$ 또는 $x+y=2$

(i), (ii)에서 $x+y$의 최솟값은 -2이다.

27 답 ④

$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+2xy-3y^2=40 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 인수분해하면 $(x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-y$ ⋯ ㉢ 또는 $x=2y$ ⋯ ㉣

(i) ㉢을 ㉡에 대입하면

$(-y)^2+2\cdot(-y)\cdot y-3y^2=40$

$-4y^2=40$이므로 $y^2=-10$

$y^2\geq 0$이므로 해가 없다.

(ii) ㉣을 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+2\cdot(2y)\cdot y-3y^2=40$

$5y^2=40$

$y^2=8$ $\qquad \therefore y=\pm 2\sqrt{2}$

이때 $x=2y$이므로

$x=\pm 4\sqrt{2}$, $y=\pm 2\sqrt{2}$ (복부호 동순)

$\therefore x^2+y^2=40$

(i), (ii)에서 $x^2+y^2=40$

28 답 ①

$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases}$에서 x, y의 합이 1, 곱이 -6이므로

두 수 x, y는 t에 관한 이차방정식 $t^2-t-6=0$의 두 근이다.

$(t+2)(t-3)=0$ $\qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

이때 $x-y=-5$ 또는 $x-y=5$

따라서 $x-y$의 최댓값은 5이다.

TIP

합과 곱이 주어진 방정식을 $t^2-(\text{합})t+(\text{곱})=0$을 이용해서 풀 수 있다. 이것은 두 수를 근으로 가지는 이차방정식에서 다루었던 것이다.
즉, 최고차항의 계수가 1이고 두 수 α, β를 근으로 가지는 이차방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$에서 이해할 수 있을 것이다.

29 답 ①

$\begin{cases} (x+y)^2=25 \\ xy=6 \end{cases}$

$(x+y)^2=25$에서 $x+y=\pm5$

(i) $x+y=5$, $xy=6$일 때 x, y는 t에 관한 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이다.

$(t-2)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=2$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

이때 $x-y=-1$ 또는 $x-y=1$

(ii) $x+y=-5$, $xy=6$일 때 x, y는 t에 관한 이차방정식 $t^2+5t+6=0$의 두 근이다.

$(t+2)(t+3)=0$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=-3$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$

이때 $x-y=1$ 또는 $x-y=-1$

(i), (ii)에서 $x-y$의 최솟값은 -1이다.

30 답 ②

$\begin{cases} x^2+y^2=34 \cdots ㉠ \\ xy=15 \quad\cdots ㉡ \end{cases}$에서

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x+y)^2-30=34$이므로

$(x+y)^2=64$ $\quad\therefore x+y=\pm8$

(i) $x+y=8$, $xy=15$일 때 x, y는 t에 관한 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이다.

$(t-3)(t-5)=0$ $\quad\therefore t=3$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

이때 $x-y=-2$ 또는 $x-y=2$

(ii) $x+y=-8$, $xy=15$일 때 x, y는 t에 관한 이차방정식 $t^2+8t+15=0$의 두 근이다.

$(t+3)(t+5)=0$ $\quad\therefore t=-3$ 또는 $t=-5$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$

이때 $x-y=2$ 또는 $x-y=-2$

$\therefore M-m=2-(-2)=4$

31 답 ①

직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면 $x-y=4\,(x>4)$이다.

또한 대각선의 길이는 $\sqrt{x^2+y^2}=4\sqrt{5}$이므로

$x^2+y^2=80$

x, y는 연립방정식 $\begin{cases} x-y=4 \quad\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=80 \cdots ㉡ \end{cases}$의 해이므로

㉠에서 $y=x-4$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-4)^2=80$, $2x^2-8x-64=0$, $x^2-4x-32=0$

$(x+4)(x-8)=0$

$x>4$이므로 $x=8$

32 답 ③

두 정사각형의 둘레의 길이의 합은 $4(a+b)=160$이고, 넓이의 합은 $a^2+b^2=850$

연립방정식 $\begin{cases} a+b=40 \quad\cdots ㉠ \\ a^2+b^2=850 \cdots ㉡ \end{cases}$의 해이다.

㉠에서 $b=40-a$를 ㉡에 대입하면

$a^2+1600-80a+a^2=850$

$2a^2-80a+750=0$

$a^2-40a+375=0$

$(a-15)(a-25)=0$

$\therefore a=15$ 또는 $a=25$

$a=15$이면 $b=25$이고 $a=25$이면 $b=15$이다.

그런데 $a>b$이므로 $a=25$

33 답 ③

$2x+3y=15$에서 $2x=15-3y$

(i) $y=1$이면 $2x=12$ $\quad\therefore x=6$

(ii) $y=2$이면 $2x=9$ $\quad\therefore x=\frac{9}{2}$

(iii) $y=3$이면 $2x=6$ $\quad\therefore x=3$

(iv) $y=4$이면 $2x=3$ $\quad\therefore x=\frac{3}{2}$

자연수의 순서쌍 (x, y)는 $(6, 1)$, $(3, 3)$

따라서 xy의 최댓값은 9이다.

34 답 ③

$xy-3x-2y+1=0$에서

$x(y-3)-2(y-3)-5=0$

$\therefore (x-2)(y-3)=5$

$x-2$	-5	-1	1	5
$y-3$	-1	-5	5	1

이므로

x	-3	1	3	7
y	2	-2	8	4

따라서 xy의 최댓값은 28이다.

35 답 ④

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$에서

$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{5}$

$xy-5(x+y)=0$

$\therefore (x-5)(y-5)=25$

$x-5$	1	5	25
$y-5$	25	5	1

이므로

x	6	10	30
y	30	10	6

따라서 $x+y$의 최솟값은 20이다.

36 답 ②

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=7$

$x+y$	-7	-1	1	7
$x-y$	-1	-7	7	1

$(x+y)+(x-y)=2x$, $(x+y)-(x-y)=2y$이므로

$2x$	-8	-8	8	8
$2y$	-6	6	-6	6

즉,

x	-4	-4	4	4
y	-3	3	-3	3

$\therefore x^2+y^2=16+9=25$

37 답 ③

$x^2+y^2-6x+8y+25=0$에서

$(x-3)^2+(y+4)^2=0$

$x-3=0$, $y+4=0$이므로 $x=3$, $y=-4$

$\therefore x+y=-1$

38 답 ④

$(2x+y-3)^2+(5x-y-4)^2=0$에서

$2x+y-3=0 \cdots ㉠$

$5x-y-4=0 \cdots ㉡$

㉠+㉡에서

$7x-7=0 \qquad \therefore x=1$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $y=1$

$\therefore x+y=2$

39 답 ①

$x^2+10y^2-6xy+2y+1=0$을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-6yx+10y^2+2y+1=0 \cdots ㉠$

x가 실수이므로 ㉠은 실근을 갖는다.

$\frac{D}{4}=9y^2-10y^2-2y-1\geq 0$

$-y^2-2y-1\geq 0$

$(y+1)^2\leq 0$

y가 실수이므로 $(y+1)^2\geq 0 \qquad \therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉠에 대입하면

$x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0 \qquad \therefore x=-3$

$\therefore x+2y=-5$

다른 풀이

$x^2-6xy+10y^2+2y+1=0$

$(x^2-6xy+9y^2)+(y^2+2y+1)=0$

$(x-3y)^2+(y+1)^2=0$

$x-3y$, $y+1$은 실수이므로

$x-3y=0$, $y+1=0 \qquad \therefore x=-3$, $y=-1$

$\therefore x+2y=-5$

40 답 ①

$2x^2+4y^2+4xy-2x+1=0$을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+2(2y-1)x+4y^2+1=0 \cdots ㉠$

x가 실수이므로 ㉠은 실근을 갖는다.

$\frac{D}{4}=(2y-1)^2-8y^2-2\geq 0$

$-4y^2-4y-1\geq 0$

$(2y+1)^2\leq 0$

y가 실수이므로 $(2y+1)^2\geq 0$

$\therefore y=-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$2x^2-4x+2=0$

$2(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$

$\therefore 2xy=-1$

다른 풀이

$2x^2+4y^2+4xy-2x+1=0$

$x^2-2x+1+x^2+4xy+4y^2=0$

$(x-1)^2+(x+2y)^2=0$

$x-1$, $x+2y$가 실수이므로

$x-1=0$, $x+2y=0$

$\therefore x=1$, $y=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2xy=-1$

Simple Q 이차부등식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 98~99

01 답 부등식

02 답 연립부등식

03 답 ×

04 답 ○

05 답 >

06 답 >

07 답 <

08 답 $3\leq 3x\leq 6$

09 답 $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{x}\leq 1$

10 답 $-3\leq -2x+1\leq -1$

11 답 $x>-4$

12 답 $x<3$

13 답 $3<x<4$

14 답 $x\le 2$

15 답 $-2<x<5$

16 답 $x\le 1$ 또는 $x\ge 4$

17 답 $x\ne -1$인 모든 실수

18 답 $x=\frac{3}{2}$

19 답 모든 실수

20 답 해가 없다.

21 답 $(x+3)(x-1)\le 0$

22 답 $(x+5)(x-2)>0$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 100~103

23 답 ②

① $a+2>b+2$

② $a>b \Rightarrow -a<-b \Rightarrow 4-a<4-b$

③ $2a+3>2b+3$

④ $-\frac{a}{5}+2<-\frac{b}{5}+2$

⑤ 【반례】 $a=1$, $b=-1$이면 $a>b$이지만 $\frac{7}{a}>\frac{7}{b}$이다.

24 답 ①

ㄱ. $a<b$의 양변에 양수 c를 곱하면 $ac<bc$

$c<d$의 양변에 양수 b를 곱하면 $bc<bd$

$\therefore ac<bd$ (참)

ㄴ. 【반례】 $a=-1$, $b=-2$, $c=1$이면

$a>b$, $b^2>c^2$이지만 $a<c$이다. (거짓)

ㄷ. 【반례】 $c=-2$, $d=1$이면 $c<d$이면 $c^2>d^2$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

25 답 ③

ㄱ. $b<0$이므로 $a<b$의 양변으로 b로 나누면 $\frac{a}{b}>1$ (참)

ㄴ. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a-b<0$, $a+b<0$이므로 $a^2-b^2>0$

$\therefore a^2>b^2$ (참)

ㄷ. $ab>0$이므로 $a^2>b^2$의 양변을 ab로 나누면

$\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

26 답 ①

$\frac{x-2}{3}-\frac{x+1}{2}\ge x$의 양변에 분모 3, 2의 최소공배수 6을 곱하여 정리하면

$2x-4-3x-3\ge 6x$, $7x\le -7$

$\therefore x\le -1$

27 답 ②

$\frac{x-4}{2}-\frac{2x-1}{5}<x$의 양변에 분모 2, 5의 최소공배수 10을 곱하여 정리하면

$5x-20-4x+2<10x$

$9x>-18$

$\therefore x>-2$

28 답 ②

$ax+b<0 \Rightarrow ax<-b$ ⋯ ㉠

㉠과 그 해인 $x>-4$의 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

이때, ㉠의 해는 $x>-\frac{b}{a}$

주어진 조건에서 부등식의 해는 $x>-4$이므로

$-\frac{b}{a}=-4$ $\quad\therefore b=4a$ ⋯ ㉡

㉡을 부등식 $bx-a>b$에 대입하면

$4ax-a>4a$

$4ax>5a$

$a<0$이므로 $x<\frac{5}{4}$

TIP

부등식을 풀 때, 부등호의 방향에 항상 주의하자. 부등호의 방향이 일치해야 값을 바르게 구할 수 있기 때문이다.
이 문제에서 구한 해의 부등호 방향이 주어진 조건과 일치가 되는지 먼저 체크했다. 만약 다르다면 양변에 -1을 곱하여 부등호 방향을 일치시켜야 한다.

29 답 ②

$(2a-b)x+3a-2b<0$에서

$(2a-b)x<-(3a-2b)$ ⋯ ㉠

㉠의 해가 $x<-3$이므로 부등호의 방향이 같으므로

$2a-b>0$이고 $x<-\frac{3a-2b}{2a-b}$

$-\frac{3a-2b}{2a-b}=-3$에서

$3a-2b=6a-3b$

$\therefore b=3a$ ⋯ ㉡

$2a-b=-a>0$이므로 $a<0$

㉡을 부등식 $(4a-b)x+a-3b<0$에 대입하면

$ax-8a<0$

$ax<8a$

$a<0$이므로 $x>8$

30 답 ⑤

$ax-b\le bx+a$에서 $(a-b)x\le a+b$

① $a>b$이면 $x\le\frac{a+b}{a-b}$

② $a<b$이면 $x\ge\frac{a+b}{a-b}$

③ $a=b$이고 $a+b<0$이면 $0\cdot x\le a+b$에서

$0\cdot x\le$(음수)이므로 해가 존재하지 않는다.

④ $a=b$이고 $a+b>0$이면 $0\cdot x\le a+b$에서

$0\cdot x\le$(양수)이므로 해는 모든 실수이다.

⑤ $a=b$이고 $a+b\ge 0$이면 $0\cdot x\le a+b$에서

$0\cdot x\le$(음이 아닌 실수)이므로 해는 모든 실수이다.

31 답 ①

$a^2x-3\ge 4x+2a$에서

$(a^2-4)x\ge 2a+3$

$(a+2)(a-2)x\ge 2a+3$

(i) $a=-2$이면 $0\cdot x\ge -1$이므로 해는 모든 실수이다.

(ii) $a=2$이면 $0\cdot x\ge 7$이므로 해가 없다.

$\therefore a=-2$

32 답 ④

$a^2x+1>x+3a$에서

$(a^2-1)x>3a-1$

$(a+1)(a-1)x>3a-1$

(i) $a=-1$이면 $0\cdot x>-4$이므로 해는 모든 실수이다.

(ii) $a=1$이면 $0\cdot x>2$이므로 해가 없다.

$\therefore a=1$

33 답 ②

$ax+2<2b+x$에서

$(a-1)x<2(b-1)$의 해가 존재하지 않기 위한 조건은

$a-1=0,\ b-1\le 0$

$a=1,\ b\le 1$

$\therefore a+b\le 2$

따라서 $a+b$의 최댓값은 2이다.

34 답 ④

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7,\ 2x-a>7$

$x<\frac{a-7}{2},\ x>\frac{a+7}{2} \Longleftrightarrow x<b,\ x>6$

$\frac{a-7}{2}=b$ ⋯ ㉠

$\frac{a+7}{2}=6$ ⇨ $a=5$이고 이를 ㉠에 대입하면

$b=-1$

$\therefore a+b=4$

35 답 ⑤

$|x-k|<k^2$에서

$-k^2<x-k<k^2$

$-k^2+k<x<k^2+k$

이것이 $-2<x<6$이므로

$-k^2+k=-2$이고 $k^2+k=6$

(i) $k^2-k-2=0$에서

$(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

(ii) $k^2+k=6$에서

$k^2+k-6=0$

$(k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$

(i), (ii)에 의하여 $k=2$이다.

36 답 ④

(i) $x\ge 1$일 때 주어진 부등식은

$2x-2+x\le 7$이므로 $x\le 3$

$\therefore 1\le x\le 3$

(ii) $x<1$일 때 주어진 부등식은

$-2x+2+x\le 7$이므로 $x\ge -5$

$\therefore -5\le x<1$

(i), (ii)에 의하여 $-5\le x\le 3$

$\therefore \alpha=-5,\ \beta=3$ ⇨ $\beta-\alpha=3-(-5)=8$

37 답 ⑤

$|x-1|<3-2|x|$에서

(i) $x<0$일 때

$-(x-1)<3+2x$

$3x>-2$

$\therefore x>-\frac{2}{3}$

즉, $-\frac{2}{3}<x<0$

(ii) $0\le x<1$일 때

$-(x-1)<3-2x$

$\therefore x<2$

즉, $0\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때

$x-1<3-2x$

$3x<4\qquad \therefore x<\frac{4}{3}$

즉, $1\le x<\frac{4}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$

$\therefore \alpha=-\frac{2}{3},\ \beta=\frac{4}{3}$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=2$

38 답 ④

$3x<18-x^2$에서

$x^2+3x-18<0$

$(x+6)(x-3)<0$

$\therefore\ -6<x<3$

$\therefore\ \alpha=-6,\ \beta=3 \Rightarrow \beta-\alpha=3-(-6)=9$

39 답 ④

$2x^2-5x+2\ge0$에서

$(2x-1)(x-2)\ge0$

$\therefore\ x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge2$

$\therefore\ \alpha=\frac{1}{2},\ \beta=2 \Rightarrow \alpha\beta=\frac{1}{2}\cdot2=1$

40 답 ③

$3x^2-5x-12\le0$에서

$(3x+4)(x-3)\le0$

$\therefore\ -\frac{4}{3}\le x\le3$

따라서 부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5이다.

41 답 ③

$x^2+2x>2x^2-7x+14$에서

$x^2-9x+14<0$

$(x-2)(x-7)<0$

$\therefore\ 2<x<7$

따라서 부등식을 만족시키는 모든 정수는 3, 4, 5, 6이므로 모든 정수 x의 값의 합은 $3+4+5+6=18$이다.

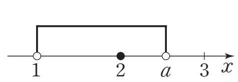
42 답 ②

$(x-1)(x-a)<0$에서

$a<x<1$ 또는 $1<x<a$

그런데 $a<x<1$은 정수 2를 포함할 수 없으므로

$1<x<a$이다.



$\therefore\ 2<a\le3$

43 답 ⑤

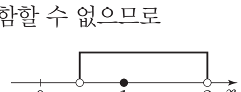
$x^2-(a+2)x+2a<0$에서

$(x-2)(x-a)<0$

$a<x<2$ 또는 $2<x<a$

그런데 $2<x<a$는 정수 1을 포함할 수 없으므로

$a<x<2$이다.



$\therefore\ 0\le a<1$

44 답 ⑤

이차부등식 $x^2-4x+1\le0$의 해가 $\alpha\le x\le\beta$이므로

$x^2-4x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$

즉, $\alpha,\ \beta$가 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이고,

근의 공식에서 $x=2\pm\sqrt{3}$이므로

$\alpha=2-\sqrt{3},\ \beta=2+\sqrt{3}\ (\because\ \alpha\le\beta)$

$\therefore\ \beta-\alpha=2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

다른 풀이

$\alpha,\ \beta$가 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16-4=12$

$\therefore\ \beta-\alpha=2\sqrt{3}\ (\because\ \beta-\alpha\ge0)$

45 답 ③

$\alpha,\ \beta$가 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-4$

$$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{4-(-8)}{-4}=-3$$

심플 정리

[곱셈 공식의 변형]

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(3) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(4) $a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

46 답 ④

이차항의 계수가 1이고, 해가 $x<-2$ 또는 $x>5$인 이차부등식은

$(x+2)(x-5)>0$

$\therefore\ x^2-3x-10>0$

주어진 부등식 $x^2+ax+b>0$과 계수를 비교하면

$a=-3,\ b=-10$

$\therefore\ a-b=7$

47 답 ①

이차항의 계수가 1이고, 해가 $-3<x<1$인 이차부등식은

$(x+3)(x-1)<0$

$x^2+2x-3<0 \qquad \therefore\ -x^2-2x+3>0$

주어진 부등식 $-x^2+ax+b>0$과 계수를 비교하면

$a=-2,\ b=3$

$\therefore\ a+b=1$

48 답 ③

이차항의 계수가 1이고, 해가 $-1<x<3$인 이차부등식은

$(x+1)(x-3)<0$

$x^2-2x-3<0$ ⋯ ㉠

그런데 주어진 부등식은 ㉠과 부등호의 방향이 같으므로

$a>0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$ax^2-2ax-3a<0$ ⋯ ㉡

주어진 부등식 $ax^2-bx-6<0$과 ㉡의 계수를 비교하면

$-2a=-b$, $-3a=-6$

$\therefore a=2$, $b=4$ ⇨ $a+b=6$

49 답 ②

이차항의 계수가 1이고, 해가 $x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$인 이차부등식은

$\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$ ⋯ ㉠

$x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}>0$

주어진 부등식 $ax^2+bx+4<0$과 부등호의 방향이 반대이므로 $a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$ax^2-\frac{a}{6}x-\frac{a}{6}<0$ ⋯ ㉡

주어진 부등식 $ax^2+bx+4<0$과 ㉡의 계수를 비교하면

$b=-\frac{a}{6}$, $4=-\frac{a}{6}$

$\therefore a=-24$, $b=4$ ⇨ $b-a=28$

50 답 ④

이차항의 계수가 1이고, 해가 $x=2$뿐인 이차부등식은 $(x-2)^2\le 0$이다.

즉, $x^2-4x+4\le 0$ ⋯ ㉠

주어진 부등식과 부등호의 방향이 같으므로

$a>0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$ax^2-4ax+4a\le 0$ ⋯ ㉡

주어진 부등식 $ax^2-8x+b\le 0$과 ㉡의 계수를 비교하면

$8=4a$, $b=4a$

$\therefore a=2$, $b=8$ ⇨ $ab=16$

51 답 ①

이차항의 계수가 1이고, 해가 $-2<x<3$인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)<0$ $\therefore x^2-x-6<0$

주어진 부등식 $x^2+ax+b<0$과 계수를 비교하면

$a=-1$, $b=-6$

$x^2-ax+b<0$에서

$x^2+x-6<0$

$(x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$

52 답 ⑤

이차항의 계수가 1이고, 해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$인 이차부등식은

$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$

$\therefore x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}<0$ ⋯ ㉠

주어진 부등식과 부등호의 방향이 서로 다르므로

$a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$ax^2-\frac{5}{6}ax+\frac{a}{6}>0$

부등식 $ax^2+bx+c>0$과 계수를 비교하면

$b=-\frac{5}{6}a$, $c=\frac{a}{6}$ ⋯ ㉡

$cx^2+bx+a>0$에 ㉡을 대입하면

$\frac{a}{6}x^2-\frac{5}{6}ax+a>0$

양변을 a로 나누면

$\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{6}x+1<0$ ($\because a<0$)

양변에 6을 곱하면

$x^2-5x+6<0$

$(x-2)(x-3)<0$

$\therefore 2<x<3$

53 답 ③

ㄱ. $x^2-4x+4\ge 0$

$(x-2)^2\ge 0$

주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $-x^2+8x-16\ge 0$

$x^2-8x+16\le 0$

$(x-4)^2\le 0$

실수 x에 대하여 $(x-4)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=4$이다.

ㄷ. $x^2+2x+5>0$

$(x+1)^2+4>0$

주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

54 답 ②

ㄱ. $x^2-10x+20=0$에서

$\frac{D}{4}=25-20=5>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

부등식 $x^2-10x+20>0$의 해가 존재한다.

ㄴ. $3x^2-6x+2=0$에서

$\frac{D}{4}=9-6=3>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

부등식 $3x^2-6x+2\le0$의 해가 존재한다.

ㄷ. $x^2-x+1=0$에서

$D=1-4=-3<0$

이고, 이차항의 계수가 양수이므로

부등식 $x^2-x+1\le0$의 해가 존재하지 않는다.

따라서 해가 존재하지 않는 것은 ㄷ이다.

55 답 ③

ㄱ. $x^2+9\le6x$

$x^2-6x+9\le0$

$(x-3)^2\le0$

실수 x에 대하여 $(x-3)^2\ge0$이므로 이차부등식 $x^2+9\le6x$의 해는 $x=3$뿐이다.

ㄴ. $-x^2+2x-1<0$의 양변에 -1을 곱하면

$x^2-2x+1>0$

$(x-1)^2>0$

따라서 부등식 $-x^2+2x-1<0$의 해는 $x\ne1$인 모든 실수이다.

ㄷ. $-2x^2+4x-2\ge0$의 양변에 -1을 곱하면

$2x^2-4x+2\le0$

$2(x-1)^2\le0$

실수 x에 대하여 $2(x-1)^2\ge0$이므로 이차부등식 $-2x^2+4x-2\ge0$의 해는 $x=1$뿐이다.

따라서 해가 오직 하나의 실수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

56 답 ⑤

$-x^2+4x-k-3<0$의 양변에 -1을 곱하면

$x^2-4x+k+3>0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 방정식 $x^2-4x+k+3=0$이 허근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=4-k-3<0$

$\therefore k>1$

따라서 정수 k의 최솟값은 2이다.

57 답 ③

이차부등식 $x^2-2kx+k+2\le0$의 해가 $x=\alpha$뿐일 조건은 이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$이 중근을 가질 때이므로

$\frac{D}{4}=k^2-(k+2)=0$

$k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

$k>0$이므로 $k=2$

$k=2$를 주어진 부등식에 대입하면

$x^2-4x+4=(x-2)^2\le0$이므로 $\alpha=2$

$\therefore k+\alpha=4$

58 답 ③

이차부등식 $4x^2-kx+k\le0$의 해가 존재하지 않으려면 방정식 $4x^2-kx+k=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=k^2-16k<0$

$k(k-16)<0$

$\therefore 0<k<16$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 15이므로 15개이다.

59 답 ⑤

$10x-35<3x+2$에서

$7x<37$

$\therefore x<\frac{37}{7}$ $\cdots$ ㉠

$3x+2\le20x-15$에서

$17x\ge17$

$\therefore x\ge1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $1\le x<\frac{37}{7}$

따라서 정수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 모든 정수 x의 값의 합은 15이다.

60 답 ⑤

$5x-3\ge x-7$에서

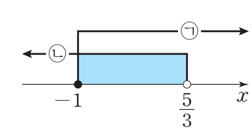
$4x\ge-4$

$\therefore x\ge-1$ $\cdots$ ㉠

$2x-4<-x+1$에서

$3x<5$

$\therefore x<\frac{5}{3}$ $\cdots$ ㉡



㉠, ㉡에서 $-1\le x<\frac{5}{3}$

따라서 정수 x의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

$\therefore M-m=2$

61 답 ④

$2x-1>-3x+7$에서

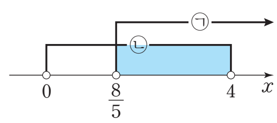
$5x>8$

$\therefore x>\frac{8}{5}$ ⋯ ㉠

$|x-2|<2$에서

$-2<x-2<2$

$\therefore 0<x<4$ ⋯ ㉡



㉠, ㉡에서

$\frac{8}{5}<x<4$

따라서 정수 x의 값은 2, 3이므로 모든 정수 x의 값의 합은 5이다.

62 답 ③

$2x-7<-x+8$에서

$3x<15$

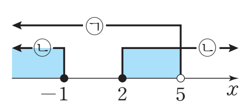
$\therefore x<5$ ⋯ ㉠

$|2x-1|\geq 3$에서

$2x-1\leq -3$ 또는 $2x-1\geq 3$

$2x\leq -2$ 또는 $2x\geq 4$

$\therefore x\leq -1$ 또는 $x\geq 2$ ⋯ ㉡



㉠, ㉡에서

$x\leq -1$ 또는 $2\leq x<5$

따라서 정수 x의 최댓값은 4이다.

63 답 ③

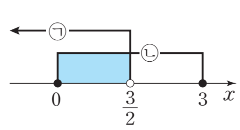
$2x-3<0$에서

$x<\frac{3}{2}$ ⋯ ㉠

$x^2-3x\leq 0$에서

$x(x-3)\leq 0$

$0\leq x\leq 3$ ⋯ ㉡



㉠, ㉡에서 $0\leq x<\frac{3}{2}$

따라서 정수 x는 0, 1의 2개이다.

64 답 ⑤

$2x<x+4$에서

$x<4$ ⋯ ㉠

$x^2-4x-5<0$에서

$(x+1)(x-5)<0$

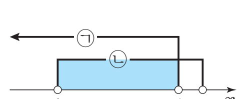
$-1<x<5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$-1<x<4$

$\therefore \alpha=-1,\ \beta=4$

$\therefore \beta-\alpha=4-(-1)=5$



65 답 ⑤

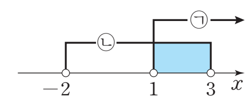
$2x-1>2-x$에서

$3x>3 \quad \therefore x>1$ ⋯ ㉠

$x^2-x-6<0$에서

$(x+2)(x-3)<0$

$-2<x<3$ ⋯ ㉡



㉠, ㉡에서 $1<x<3$

$\therefore \alpha=1,\ \beta=3$

$\therefore \alpha\beta=3$

66 답 ①

$x^2-x-2>0$에서

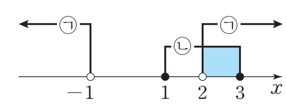
$(x+1)(x-2)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>2$ ⋯ ㉠

$x^2-4x+3\leq 0$에서

$(x-1)(x-3)\leq 0$

$\therefore 1\leq x\leq 3$ ⋯ ㉡



㉠, ㉡에서 $2<x\leq 3$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 3뿐이므로 1개이다.

67 답 ④

$x^2-4x-5\leq 0$에서

$(x+1)(x-5)\leq 0$

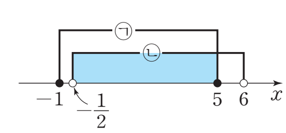
$\therefore -1\leq x\leq 5$ ⋯ ㉠

$2x^2-11x<6$에서

$2x^2-11x-6<0$

$(2x+1)(x-6)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<6$ ⋯ ㉡



㉠, ㉡에서 $-\frac{1}{2}<x\leq 5$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개이다.

68 답 ④

$x^2+x-6\geq 0$에서

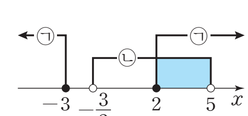
$(x+3)(x-2)\geq 0$

$\therefore x\leq -3$ 또는 $x\geq 2$ ⋯ ㉠

$2x^2-7x-15<0$에서

$(2x+3)(x-5)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<x<5$ ⋯ ㉡



㉠, ㉡에서 $2\leq x<5$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 3, 4이므로 모든 정수 x의 값의 합은 $2+3+4=9$이다.

69 답 ①

$x^2+2x+3>0$에서

$x^2+2x+3=0$의 판별식 D를 구하면

$\frac{D}{4}=1^2-3=-2<0$이므로

$x^2+2x+3>0$의 해는 모든 실수이다.

즉, 주어진 연립부등식의 해는 $(x-1)(x-3)\le 0$의 해와 같으므로 이를 전개하면

$x^2-4x+3\le 0$ ⋯ ㉠

㉠은 $ax^2+4x+b\ge 0$과 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$ax^2-4ax+3a\ge 0$

부등식 $ax^2+4x+b\ge 0$과 계수를 비교하면

$-4a=4$, $3a=b$

$\therefore a=-1$, $b=-3 \Rightarrow a+b=-4$

70 답 ⑤

$x^2+6x+5>0$에서

$(x+5)(x+1)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>-1$ ⋯ ㉠

$x^2+|x|-6\le 0$에서 $x=0$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<0$일 때,

$x^2-x-6=(x+2)(x-3)\le 0$

$\therefore -2\le x\le 3$

$x<0$이므로 $-2\le x<0$

(ii) $x\ge 0$일 때,

$x^2+x-6=(x+3)(x-2)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 2$

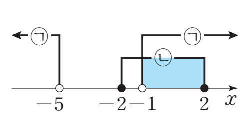
$x\ge 0$이므로 $0\le x\le 2$

(i), (ii)에서 $-2\le x\le 2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $-1<x\le 2$

$\therefore \alpha=-1$, $\beta=2$

$\Rightarrow \beta-\alpha=3$



다른 풀이

$x^2=|x|^2$이므로

$x^2+|x|-6\le 0 \Rightarrow |x|^2+|x|-6\le 0$

$(|x|-2)(|x|+3)\le 0$

$|x|+3>0$이므로 $|x|-2\le 0 \Rightarrow |x|\le 2$

$\therefore -2\le x\le 2$

(이하 동일)

71 답 ⑤

$|x-1|\ge 1$에서

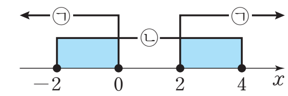
$x-1\le -1$ 또는 $x-1\ge 1$

$\therefore x\le 0$ 또는 $x\ge 2$ ⋯ ㉠

$|x-1|\le 3$에서

$-3\le x-1\le 3$

$\therefore -2\le x\le 4$ ⋯ ㉡



㉠, ㉡에서 $-2\le x\le 0$ 또는 $2\le x\le 4$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 -2, -1, 0, 2, 3, 4의 6개이다.

TIP

연립방정식 $A=B=C$를 풀 때, $A=B$, $B=C$ 또는 $A=C$, $B=C$ 어떤 것으로 풀어도 상관없다.
그런데 연립부등식 $A<B<C$를 풀 때는 $A<B$, $B<C$만으로 풀어야지 $A<C$, $B<C$로 풀면 틀리게 되니까 주의하자.

72 답 ①

$x-1<3$에서 $x<4$ ⋯ ㉠

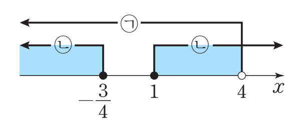
$4x^2-x\ge 3$에서 $4x^2-x-3\ge 0$

$(4x+3)(x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -\frac{3}{4}$ 또는 $x\ge 1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$x\le -\frac{3}{4}$ 또는 $1\le x<4$



따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값은 3이다.

73 답 ③

$x^2+2x-8>-5$에서

$x^2+2x-3>0$

$(x+3)(x-1)>0$

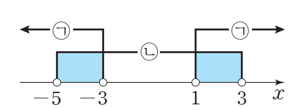
$\therefore x<-3$ 또는 $x>1$ ⋯ ㉠

$x^2+2x-8<7$에서

$x^2+2x-15<0$

$(x+5)(x-3)<0$

$\therefore -5<x<3$ ⋯ ㉡



㉠, ㉡에서 $-5<x<-3$ 또는 $1<x<3$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 -4, 2이므로 모든 정수 x의 값의 합은 $-4+2=-2$이다.

74 답 ④

$x^2-2x\ge x-2$에서

$x^2-3x+2\ge 0$

$(x-1)(x-2)\ge 0$

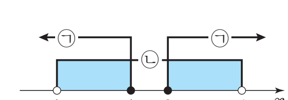
$\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge 2$ ⋯ ㉠

$x^2-2x<x+4$에서

$x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$ ⋯ ㉡



㉠, ㉡에서 $-1<x\le 1$ 또는 $2\le x<4$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

75 답 ②

$2x^2+1<3x$에서

$2x^2-3x+1<0$

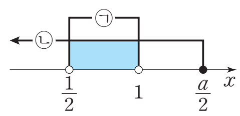
$(2x-1)(x-1)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<x<1 \cdots$ ㉠

$3x\le x+a$에서 $x\le\frac{a}{2} \cdots$ ㉡

이때, ㉠, ㉡의 공통부분이

$\frac{1}{2}<x<1$이므로



$\frac{a}{2}\ge1 \qquad \therefore a\ge2$

따라서 실수 a의 최솟값은 2이다.

76 답 ⑤

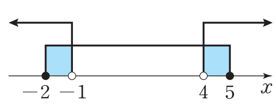
$x^2-3x-4=(x+1)(x-4)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>4$

연립부등식의 해가 $-2\le x<-1$, $4<x\le5$가 되기 위해서는 이차부등식 $x^2+ax+b\le0$의 해가 $-2\le x\le5$가 되어야 한다.

$(x+2)(x-5)\le0$에서

$x^2-3x-10\le0$



$a=-3$, $b=-10$

$\therefore a-b=7$

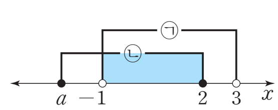
77 답 ②

$x^2-2x-3<0$에서

$(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3 \cdots$ ㉠

$(x-2)(x-a)\le0$에서



$a\le x\le2$ 또는 $2\le x\le a \cdots$ ㉡

따라서 연립부등식의 해가 $-1<x\le2$이기 위해서는 그림과 같아야 하므로 $a\le-1$이다.

따라서 a의 최댓값은 -1이다.

78 답 ②

$x^2-(a-2)x-2a\ge0$에서

$(x+2)(x-a)\ge0$

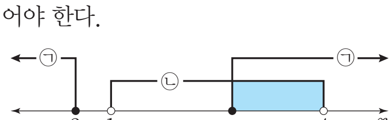
$\therefore x\le-2$, $x\ge a$ 또는 $x\le a$, $x\ge-2 \cdots$ ㉠

$x^2-3x-4<0$에서

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위가 $2\le x<4$가 되기 위해서는 그림에서 $a=2$이어야 한다.



79 답 ④

$x^2-4x>0$에서

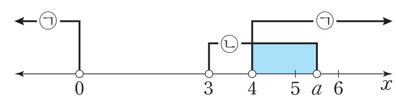
$x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4 \cdots$ ㉠

$x^2-(a+3)x+3a<0$에서

$(x-3)(x-a)<0$

$\therefore a<x<3$ 또는 $3<x<a \cdots$ ㉡



두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 5뿐이려면 그림에서 $5<a\le6$이어야 한다.

따라서 a의 최댓값은 6이다.

80 답 ④

공의 높이가 마룻바닥으로부터 9 m 이상이 되는 시간은 이차부등식 $-5t^2+14t+1\ge9$의 해이다.

$5t^2-14t+8\le0$

$(5t-4)(t-2)\le0$

$\therefore \frac{4}{5}\le t\le2$

$\therefore a=\frac{4}{5}$, $b=2 \Rightarrow a+b=\frac{14}{5}$

81 답 ③

직사각형 한 변의 길이를 x cm라 하면 다른 한 변의 길이는 $(50-x)$ cm이다.

따라서 직사각형의 넓이 S는

$S=x(50-x)$

$\quad=50x-x^2\ge400$

$x^2-50x+400\le0$

$(x-10)(x-40)\le0$

$\therefore 10\le x\le40$

따라서 $M=40$, $m=10$이므로

$M-m=40-10=30$

Simple R 이차함수의 그래프와 이차부등식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 122～123

01 답 $a>0$, $D<0$

02 답 $p<-\frac{b}{2a}$, $f(p)>0$

03 답 ○

04 답 ×

05 답 $x=-2$, $x=1$

06 답 $x<-2$ 또는 $x>1$

07 답 $-2<x<1$

08 답 $-1<x<3$

09 답 $x<-1$ 또는 $x>3$

10 답 $k>\frac{9}{4}$

11 답 $k\le-1$

12 답 $k<-\frac{1}{8}$

13 답 $k\ge3$

14 답 $4\le m<5$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 124~129

15 답 ⑤

이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$의 해는 이차함수 $y=f(x)=ax^2+bx+c$에서 $y\ge0$인 범위, 즉 그림에서 그래프가 x축 또는 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 범위이므로 $x\le1$ 또는 $x\ge3$이다.

16 답 ②

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해는 이차함수 $y=f(x)=ax^2+bx+c$에서 $y>0$인 범위, 즉 그림에서 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 범위이므로 $-1<x<3$이다.

17 답 ③

$y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 범위는 $1<x<6$이다.

$\therefore\ \alpha=1,\ \beta=6 \Rightarrow \beta-\alpha=6-1=5$

18 답 ①

그림에서 방정식 $f(x)-x=0$의 해는 $x=\pm2$이다.

$f(x)>x$인 부분은 $y=f(x)$의 그래프가 $y=x$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.

$\therefore\ -2<x<2$

$\therefore\ \alpha=-2,\ \beta=2 \Rightarrow \alpha\beta=-4$

19 답 ①

$ax^2+(b-m)x+c-n\ge0$에서

$ax^2+bx+c\ge mx+n$

그림에서 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 $y=mx+n$의 그래프와 만나는 점 또는 윗부분을 나타내는 x의 범위이다.

$\therefore\ -2\le x\le3$

$\therefore\ \alpha=-2,\ \beta=3 \Rightarrow \alpha+\beta=1$

20 답 ③

$f(x)=a(x+2)(x-1)\ (a>0)$으로 놓을 수 있다.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}a=-\frac{9}{4}$에서 $a=1$

$\therefore\ f(x)=(x+2)(x-1)=x^2+x-2$

방정식 $f(x)-x=0$의 해는

$f(x)-x=x^2+x-2-x=x^2-2=0$에서 $x=\pm\sqrt{2}$

$f(x)-x<0$

$f(x)<x$

구하는 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=x$의 그래프보다 아래쪽을 나타내는 x의 값의 범위이다.

$\therefore\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

$\therefore\ \alpha=-\sqrt{2},\ \beta=\sqrt{2} \Rightarrow \beta-\alpha=2\sqrt{2}$

21 답 ③

$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$으로 놓을 수 있다.

$f(1)=-4a=-4$에서 $a=1$

$\therefore\ f(x)=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$

방정식 $f(x)+2x=0$의 해는

$f(x)+2x=x^2-2x-3+2x=x^2-3=0$에서 $x=\pm\sqrt{3}$

$f(x)+2x<0$

$f(x)<-2x$

구하는 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=-2x$의 그래프의 아랫부분을 나타내는 x의 값의 범위이다.

$\therefore\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

$\therefore\ \alpha=-\sqrt{3},\ \beta=\sqrt{3} \Rightarrow \alpha\beta=-3$

22 답 ④

$f(x)\cdot g(x)>0$이므로

$f(x)>0,\ g(x)>0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)<0$이다.

(i) $f(x)>0$일 때, $x<2$ 또는 $x>4$

$g(x)>0$일 때, $1<x<3$

$\therefore\ 1<x<2$ ⋯ ㉠

(ii) $f(x)<0$일 때, $2<x<4$

$g(x)<0$일 때, $x<1$ 또는 $x>3$

$\therefore\ 3<x<4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $1<x<2$, $3<x<4$

$\therefore\ |\alpha-\gamma|+|\beta-\delta|=|1-3|+|2-4|=4$

23 답 ②

$y=x^2+kx+5$의 그래프가 직선 $y=2$보다 아래쪽에 있으므로

$x^2+kx+5<2$

$x^2+kx+3<0$ ⋯ ㉠

해가 $1<x<3$이고 이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)<0$

$x^2-4x+3<0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로 $k=-4$

24 답 ④

$y=-x^2+px+2$의 그래프가 직선 $y=a$보다 위쪽에 있으므로

$-x^2+px+2>a$

$x^2-px+(a-2)<0$ ⋯ ㉠

해가 $-2<x<1$이고 이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-1)<0$

$\therefore x^2+x-2<0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로 $p=-1$, $a-2=-2 \Rightarrow a=0$

$\therefore a-p=1$

25 답 ②

$y=x^2-ax+4$의 그래프가 직선 $y=x-2$보다 위쪽에 있으므로

$x^2-ax+4>x-2$

$x^2-(a+1)x+6>0$ ⋯ ㉠

이때 ㉠의 해가 $x<2$ 또는 $x>b$이다.

해가 $x<2$ 또는 $x>b$이고 이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)(x-b)>0$

$\therefore x^2-(2+b)x+2b>0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$a+1=2+b$, $6=2b$ $\quad\therefore a=4$, $b=3$

$\therefore a+b=7$

26 답 ①

$y=x^2-2x-5$의 그래프가 $y=-2x^2+x+1$의 그래프보다 아래쪽에 있으므로

$x^2-2x-5<-2x^2+x+1$

$3x^2-3x-6<0$, $x^2-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0$ $\quad\therefore -1<x<2$

$\therefore \alpha=-1$, $\beta=2 \Rightarrow \alpha+\beta=1$

27 답 ④

$y=-2x^2+6x-6$의 그래프가 $y=x^2-6x+3$의 그래프보다 위쪽에 있으므로

$-2x^2+6x-6>x^2-6x+3$

$3x^2-12x+9<0$, $x^2-4x+3<0$

$(x-1)(x-3)<0$ $\quad\therefore 1<x<3$

$\therefore \alpha=1$, $\beta=3 \Rightarrow \beta-\alpha=2$

28 답 ③

$x^2+2x+a-4<0$의 해가 존재하지 않으려면 방정식 $x^2+2x+a-4=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

$\frac{D}{4}=1-(a-4)\le0$

$\therefore a\ge5$

29 답 ②

$x^2-(m-4)x+9>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하기 위해서는 방정식 $x^2-(m-4)x+9=0$이 허근을 가져야 한다.

$D=(m-4)^2-36<0$

$m^2-8m-20<0$, $(m+2)(m-10)<0$

$\therefore -2<m<10$

30 답 ②

$ax^2+4x+a-3\le0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

(i) $a<0$ ⋯ ㉠

(ii) $\frac{D}{4}=2^2-a(a-3)\le0$

$a^2-3a-4\ge0$, $(a+1)(a-4)\ge0$

$\therefore a\le-1$ 또는 $a\ge4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 공통범위를 구하면 $a\le-1$

따라서 실수 a의 최댓값은 -1이다.

31 답 ④

$(k-2)x^2+2(k-2)x+4>0$ ⋯ ㉠

(i) $k=2$일 때,

주어진 부등식에 $k=2$를 대입하면 $4>0$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k\ne2$일 때,

주어진 부등식이 항상 성립할 조건은

$k-2>0$ ⋯ ㉡

$D=(k-2)^2-4(k-2)<0$

$k^2-8k+12<0$, $(k-2)(k-6)<0$

$\therefore 2<k<6$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢의 공통범위는 $2<k<6$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는 $2\le k<6$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은 $2+3+4+5=14$이다.

32 답 ②

$x^2-2kx+3k+4=0$의 판별식 D와 이차함수 $f(x)=x^2-2kx+3k+4$에 대하여 다음 세 조건을 만족해야 한다.

(i) $\frac{D}{4}=k^2-(3k+4)\ge0$

$k^2-3k-4\ge0$

$(k+1)(k-4)\ge0$

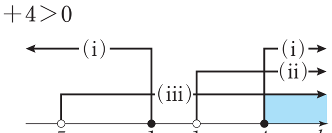
$\therefore k\le-1$ 또는 $k\ge4$

(ii) $f(x)=x^2-2kx+3k+4$의 축의 방정식 $x=k$가 1보다 커야 하므로 $k>1$

(iii) $f(1)=1-2k+3k+4>0$

$\therefore k>-5$

(i), (ii), (iii)에서 $k\ge4$



33 답 ④

$x^2+2ax-3a=0$의 판별식 D와 이차함수

$f(x)=x^2+2ax-3a$에 대하여 다음 세 조건을 만족해야 한다.

(i) $\frac{D}{4}=a^2+3a\geq0$

$a(a+3)\geq0$

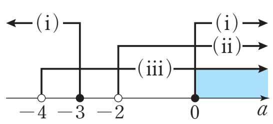
$\therefore a\leq-3$ 또는 $a\geq0$

(ii) $f(x)=x^2+2ax-3a$의 축의 방정식 $x=-a$가 2보다 작아야 하므로

$a>-2$

(iii) $f(2)=4+4a-3a>0$

$\therefore a>-4$



(i), (ii), (iii)에서 $a\geq0$

34 답 ④

$f(x)=x^2-mx+4$에서

$f(2)=4-2m+4<0$

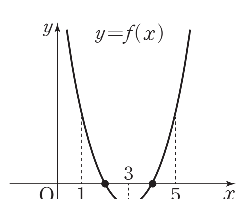
$\therefore m>4$

TIP

이차방정식의 실근의 위치를 구할 때, 두 근 사이에 p가 있는 경우는 $f(p)<0$만 구하면 된다. 판별식 $D\geq0$과 대칭축에 대한 조건이 없어서 빠진 느낌일 것이다. 그런데 두 근 사이에 p가 있는 경우는 대칭축 조건과 판별식 조건을 저절로 만족시키기 때문에 특별히 체크할 필요가 없는 것이다.

35 답 ②

$f(x)=x^2-6x-3m+2$라 할 때, 이차방정식 $x^2-6x-3m+2=0$의 두 근이 모두 1과 5 사이에 있으려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



이차방정식 $x^2-6x-3m+2=0$의 판별식을 D라 할 때, 두 근이 모두 1과 5 사이에 있기 위해서는 다음 세 조건을 만족시켜야 한다.

(i) $\frac{D}{4}=9-(-3m+2)\geq0$

$3m+7\geq0$

$\therefore m\geq-\frac{7}{3}$

(ii) $f(1)>0$, $f(5)>0$

$f(1)=1-6-3m+2>0$

$\therefore m<-1 \cdots$ ㉠

$f(5)=25-30-3m+2>0$

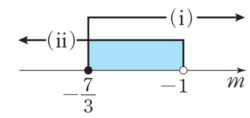
$\therefore m<-1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $m<-1$

(iii) 축의 방정식 $x=3$은

$1<3<5$이므로

$1<$(축)<5를 만족시킨다.



(i), (ii), (iii)에 의하여 실수 m의 값의 범위는

$-\frac{7}{3}\leq m<-1$

연습 문제 [P~R] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 128~129

01 답 ②

연립방정식 $\begin{cases}x+y=a-2\\2x+y=2a-8\end{cases}$을 만족시키는 x와 y의 값의 비가 1 : 2일 때, 상수 a의 값은?

결국 두 근의 비가 1 : 2라는 거야. 문자 하나로 통일할 수 있어.

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

1st x와 y의 값의 비가 주어졌으니까 한 문자로 표현할 수 있어.

연립방정식 $\begin{cases}x+y=a-2\\2x+y=2a-8\end{cases}$에서

$x=k$, $y=2k\,(k\neq0)$라 놓고, 주어진 연립방정식을 정리하면

두 근의 비가 주어졌으니까 k, $2k$로 놓고 직접 대입하여 정리하면 돼.

$\begin{cases}3k=a-2 & \cdots ㉠\\4k=2a-8 & \cdots ㉡\end{cases}$

2nd k, a에 대한 연립일차방정식을 풀면 돼.

㉠$\times2-$㉡에서

$2k=4$ $\quad\therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면 $a=8$

02 답 ④

연립방정식 $\begin{cases}x-y=3\\x^2-y^2=15\end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$로 인수분해가 되지? 또, $x-y=3$이 주어졌으니까 $x+y$의 값을 구할 수 있어.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 일차방정식을 이용하여 이차방정식을 더 간단히 표현하자.

$\begin{cases}x-y=3 & \cdots ㉠\\x^2-y^2=15 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$는 자주 쓰이는 공식이야.

$(x+y)(x-y)=3(x+y)\,(\because ㉠)=15$

$\therefore x+y=5 \cdots$ ㉢

2nd 이제 연립일차방정식 ㉠, ㉢을 풀자.

㉠+㉢에서 $2x=8$ $\quad\therefore x=4$

$x=4$를 ㉠에 대입하면 $y=1$

$\therefore \alpha=4,\ \beta=1 \Rightarrow \alpha\beta=4$

03 답 ④

$\begin{cases} 2x-y=6 & \cdots ㉠ \\ x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $x^2-2xy-3y^2=(x+y)(x-3y)=0$이므로

$x+y=0 \cdots ㉢$ 또는 $x-3y=0 \cdots ㉣$

(i) ㉠+㉢에서

$3x=6 \quad \therefore x=2,\ y=-2$

(ii) ㉠−㉣×2에서

$5y=6 \quad \therefore y=\frac{6}{5},\ x=\frac{18}{5}$

(i), (ii)에서

$a+b+c+d=2+(-2)+\frac{6}{5}+\frac{18}{5}=\frac{24}{5}$

04 답 ⑤

연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$가 한 쌍의 해를 갖도록 하는 실수 k에 대하여 k^2의 값은?

보통 일차방정식과 이차방정식에 대한 연립방정식은 두 쌍의 해를 가지거나 없을 수 있어. 한 쌍의 해를 갖기 위한 조건은 하나야!

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

1st 일차방정식을 이용하여 한 문자에 대한 식으로 바꾸자.

$x+y=k$에서 $y=-x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하여 정리하면

일차방정식을 한 문자에 대하여 정리하여 다른 방정식에 대입하면 한 문자에 대한 이차방정식이 유도 돼.

$x^2+(-x+k)^2=4$

$2x^2-2kx+k^2-4=0$

2nd 한 쌍의 해를 가질 조건은 이차방정식이 중근을 가지는 거야.

주어진 연립방정식이 한 쌍의 해를 가지려면 위 이차방정식이 중근을 가져야 한다.

중근을 가지지 않으면 두 쌍의 해 또는 해를 가지지 않게 돼.

$\frac{D}{4}=k^2-2k^2+8=0$

$\therefore k^2=8$

05 답 ④

이차방정식 $x^2-2kx+2k+4=0$의 두 근이 정수일 때, 양수 k의 값은?

① 이차방정식의 근과 계수를 이용할 수 있는지 생각해 보자.
② 부정방정식으로 유도되는지 확인하자.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 정수인 두 근에 관한 식으로 유도하자.

$x^2-2kx+2k+4=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

[이차방정식의 근과 계수의 관계]
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
(1) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ (2) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\begin{cases} \alpha+\beta=2k & \cdots ㉠ \\ \alpha\beta=2k+4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡을 연립하면

$\alpha+\beta=\alpha\beta-4$

2nd $\alpha,\ \beta$가 정수이고 방정식이 1개니까 정수 조건을 가진 부정방정식이야.

$\alpha\beta-(\alpha+\beta)-4=0$

$(\alpha-1)(\beta-1)=5$

부정방정식의 꼴은 $\alpha\beta\pm(\alpha+\beta)=k$임을 기억하자.

$\alpha,\ \beta$가 정수이므로 $\alpha-1,\ \beta-1$도 정수이다.

$\alpha-1$	-5	-1	1	5
$\beta-1$	-1	-5	5	1

이므로

α	-4	0	2	6
β	0	-4	6	2

㉠에서 $k=\frac{\alpha+\beta}{2}$이고 위의 표에서 $k=-2$ 또는 $k=4$

$k>0$이므로 $k=4$

TIP

방정식이 모두 정수라는 조건에 혹시 부정방정식으로 풀어야 하는지 생각할 수 있을 것이다. 풀이 중간 과정에서 이런 생각이 맞았다는 것을 확인할 수 있다. 문제 속에서 푸는 방향에 대한 힌트들이 숨겨 있는 경우가 많다. 문제를 면밀히 분석하는 습관이 중요하다.

06 답 ②

$|2x-1|\le a$에서

$-a\le 2x-1\le a$

$-a+1\le 2x\le a+1$

$\frac{-a+1}{2}\le x\le\frac{a+1}{2}$

이 식은 $-2\le x\le b$와 같아야 하므로

$\frac{-a+1}{2}=-2,\ \frac{a+1}{2}=b$

$-a+1=-4,\ a+1=2b$

두 식을 연립하여 풀면

$a=5,\ b=3$

$\therefore a+b=8$

07 답 10

$2x^2+5x-a-3\le 0$의 해가 $b\le x\le -\frac{1}{2}$이므로

이차방정식 $2x^2+5x-a-3=0$의 두 근이 $-\frac{1}{2},\ b$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\begin{cases} -\frac{1}{2}+b=-\frac{5}{2} \Rightarrow b=-2 & \cdots ㉠ \\ -\frac{b}{2}=-\frac{a+3}{2} & \cdots ㉡ \end{cases}$

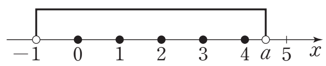
㉠을 ㉡에 대입하면

$-1=\frac{a+3}{2} \quad \therefore a=-5$

$\therefore ab=10$

08 답 ⑤

$(x+1)(x-a)<0$



에서 a가 양수이므로

$-1<x<a$

이 범위를 만족시키는 정수 x가 5개가 되려면 x가 0, 1, 2, 3, 4가 되어야 하므로 a의 범위가 $4<a\le5$이어야 한다.

따라서 양수 a의 최댓값은 5이다.

09 답 ⑤

그림을 그려서 해가 $x=2$뿐이 되는 경우를 알아보면 돼.
즉, $a<0$이 되어야 하는 것은 필수야.

이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$의 해가 $x=2$뿐일 때, 옳은 내용을 [보기]에서 모두 고른 것은?

[보기]

ㄱ. $a<0$

ㄴ. $b^2-4ac=0$ → 판별식 $D=0$인지 묻고 있어.

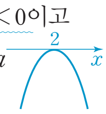
ㄷ. $a+b+c<0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 이차부등식의 해가 $x=2$뿐이니까 $a>0$이면 안 되겠지?

$ax^2+bx+c\ge0$의 해가 $x=2$뿐이므로 $a<0$이고

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2=ax^2-4ax+4a$



$\therefore a<0,\ b=-4a,\ c=4a \cdots$ ㉠

이어야 하므로 $a<0$이야.

ㄱ. $a<0$ (참)

2nd 주어진 ax^2+bx+c가 완전제곱식이 되어야 하니까 방정식은 중근을 가져야 해.

ㄴ. $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가지므로 판별식

$b^2-4ac=0$ (참) $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 접해야 해.

ㄷ. $a+b+c=a+(-4a)+4a\,(\because$ ㉠$)=a<0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 ②

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$이고, x절편이 1, 3이므로

$$ax^2+bx+c=a(x-1)(x-3)$$
$$=a(x^2-4x+3)$$
$$=ax^2-4ax+3a$$

$\therefore b=-4a\ ,\ c=3a$

이것을 이차부등식 $bx^2+cx+a>0$에 대입하면

$-4ax^2+3ax+a>0$

부등식의 양변을 $-a$로 나누면

$4x^2-3x-1<0\ (\because\ -a<0)$ $\quad\therefore -\frac{1}{4}<x<1$

$\therefore \alpha=-\frac{1}{4},\ \beta=1 \Rightarrow \beta-\alpha=\frac{5}{4}$

11 답 4

(i) $x\ge3$일 때,

$x(x-3)<10$

$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)<0$

$\therefore -2<x<5$

$x\ge3$이므로 $3\le x<5$ $\cdots$ Ⅰ

(ii) $x<3$일 때,

$-x(x-3)<10$

$x^2-3x+10>0$

$x^2-3x+10=0$의 판별식 $D=9-40=-31<0$이므로

이차부등식 $x^2-3x+10>0$의 해는 모든 실수이다.

$x<3$이므로 $x<3$ $\cdots$ Ⅱ

(i), (ii)에서 x의 값의 범위는 $x<5$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, 4의 4개이다. $\cdots$ Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	$x\ge3$일 때, 부등식의 해를 구한다.	40%
Ⅱ	$x<3$일 때, 부등식의 해를 구한다.	40%
Ⅲ	부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구한다.	20%

12 답 ②

$|2x-1|<5$에서

$-5<2x-1<5$

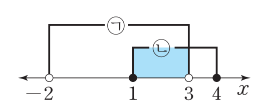
$-4<2x<6$

$\therefore -2<x<3 \cdots$ ㉠

$x^2-5x+4\le0$에서

$(x-1)(x-4)\le0$

$\therefore 1\le x\le4 \cdots$ ㉡



㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는 $1\le x<3$

따라서 모든 정수 x는 1, 2의 2개이다.

13 답 ①

$x^2-2kx-2k^2+k+4=0$의 판별식을 D라 하면

$x^2-2kx-2k^2+k+4>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하기 위해서는 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=k^2+2k^2-k-4<0$

$3k^2-k-4<0$

$(3k-4)(k+1)<0$

$\therefore -1<k<\frac{4}{3}$

따라서 정수 k는 0, 1이므로 모든 정수 k의 값의 합은 $0+1=1$이다.

14 답 ③

$-1\le x\le 5$에서 $f(x)-g(x)<0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^2+4x-5a=(x+2)^2-4-5a$

함수 $h(x)$는 $x=5$에서 최댓값을 갖고 최댓값은 0보다 작아야 한다.

$h(5)=45-5a<0 \qquad \therefore a>9$

따라서 정수 a의 최솟값은 10이다.

15 답 ④

'$x^2-2x+k^2-4=0$의 두 근의 부호가 서로 다르다.'는 '두 근 사이에 0이 있다.'와 같은 의미이다.

$f(x)=x^2-2x+k^2-4$에서

$f(0)=k^2-4<0 \qquad \therefore -2<k<2$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1의 3개이다.

심플 정리

[이차방정식의 실근의 위치]

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a>0)$에 대하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근의 위치는 다음과 같다.

(1) 두 근이 모두 p보다 크다.

⇨ $D\ge 0,\ p<-\frac{b}{2a},\ f(p)>0$

(2) 두 근이 모두 p보다 작다.

⇨ $D\ge 0,\ p>-\frac{b}{2a},\ f(p)>0$

(3) 두 근 사이에 p가 있다. ⇨ $f(p)<0$

(4) 두 근이 모두 $p,\ q\,(p<q)$ 사이에 있다.

⇨ $D\ge 0,\ p<-\frac{b}{2a}<q,\ f(p)>0,\ f(q)>0$

Ⅱ 대단원 TEST [F~R]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 130~133

01 답 ①

$$\frac{1-i}{1+i}-\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1-i)^2-(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$
$$=\frac{(1-2i-1)-(1+2i-1)}{2}=-2i$$

02 답 ①

z^2이 음의 실수이려면 z는 순허수이어야 한다.

$z=(1+i)x^2+(3-i)x+2-2i$

$=(x^2+3x+2)+(x^2-x-2)i$

$=(x+1)(x+2)+(x+1)(x-2)i$

$x=-1$이면 $z=0$이고, $x=-2$이면 $z=4i$이다.

$\therefore x=-2$

TIP

복소수 z의 특성 중 z^2이 음의 실수가 나올 조건은 z가 순허수라는 것은 자주 출제가 되고 있다. 즉, z가 순허수이면 실수부분이 0이 되고 허수부분이 0이 아니어야 z^2이 음의 실수가 되는 것이다.

03 답 ④

$z=x+yi$이므로 $\overline{z}=x-yi$

$(1-i)z+2\overline{z}=(1-i)(x+yi)+2(x-yi)$

$=(3x+y)-(x+y)i$

$=2+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$3x+y=2,\ x+y=-2$

연립하여 풀면

$x=2,\ y=-4$

$\therefore x^2+y^2=20$

04 답 ③

$z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i,$

$z^4=(-i)^2=-1,$

$z^8=(-1)^2=1$이므로

$z^8+z^{12}=z^8+z^8\times z^4=1-1=0$

05 답 ①

이차방정식 $x^2-2(k+2)x+2k^2-28=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-(2k^2-28)>0$

즉, $k^2-4k-32<0,\ (k+4)(k-8)<0$이므로

$-4<k<8$

따라서 정수 k는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 7$의 11개이다.

06 답 ④

이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$의 판별식을 D라 하면 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-2k^2+6k-4=0$

$k^2-4k+3=0,\ (k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $1+3=4$이다.

07 답 ②

이차방정식 $(m+1)x^2-2mx-3m-1=0$이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=m^2+(m+1)(3m+1)=0$

$4m^2+4m+1=0$

$(2m+1)^2=0 \qquad \therefore m=-\frac{1}{2}$

$m=-\frac{1}{2}$을 주어진 방정식에 대입하면

$\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=0$

$\frac{1}{2}(x+1)^2=0 \qquad \therefore x=a=-1$

$\therefore a+m=-\frac{3}{2}$

08 답 ④

이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 허근을 가지므로

$\frac{D}{4}=1-a<0 \qquad \therefore a>1$

$\therefore |1-a|+a=-(1-a)+a=2a-1$

09 답 ②

$2x^2+3kx-5k^2=0$에 $x=1$을 대입하면

$5k^2-3k-2=0$

$(5k+2)(k-1)=0 \qquad \therefore k=-\frac{2}{5}$ 또는 $k=1$

$k>0$이므로 $k=1$

$k=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$2x^2+3x-5=0$

$(2x+5)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-\frac{2}{5}$ 또는 $x=1$

즉, 나머지 한 근 $\alpha=-\frac{5}{2}$

$\therefore k+\alpha=1-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$

10 답 ③

이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-1$

$\therefore \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=0$

11 답 ④

이차방정식 $x^2+(k-3)x+8=0$에서 두 근의 비가 1 : 2이므로 두 근을 α, $2\alpha\ (\alpha\neq0)$로 놓자.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\begin{cases}\alpha+2\alpha=-k+3 & \cdots ㉠\\ \alpha\times2\alpha=8 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서 $\alpha^2=4$

$\therefore \alpha=\pm2$

㉠에서 $\alpha=2$이면 $k=-3$, $\alpha=-2$이면 $k=9$

$k>0$이므로 $k=9$

12 답 ①

실수 a, b에 대하여 x에 대한 이차방정식
$x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-4i$일 때,
$a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

계수가 실수라는 조건과 한 근이 허수이므로 켤레근을 떠올려야 해.

① 16 ② 19 ③ 22
④ 25 ⑤ 28

1st a, b가 실수이므로 이차방정식의 계수는 모두 실수지? 켤레근을 떠올리자.

계수가 모든 실수이면 이차방정식은 근을 켤레근과 쌍으로 갖게 돼.

실수 계수의 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-4i$이므로 다른 한 근은 $2+4i$이다.

2nd 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 a, b의 값을 각각 구하자.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\begin{cases}(2+4i)+(2-4i)=-a\\ (2+4i)(2-4i)=b\end{cases}$

[이차방정식의 근과 계수의 관계]
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
(1) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
(2) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

따라서 $a=-4$, $b=20$이므로 $a+b=16$

13 답 ⑤

$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ k-4)$이다.

점 $(2,\ k-4)$가 직선 $y=2x-5$ 위에 있으므로

$k-4=4-5 \qquad \therefore k=3$

즉, $f(x)=x^2-4x+3$

$\therefore f(0)=3$

14 답 ④

$f(x)=-2x^2+8x+k$

$\quad=-2(x^2-4x+4)+k+8$

$\quad=-2(x-2)^2+k+8$

$x=2$일 때 최댓값 $k+8$을 갖고, $x=-1$일 때 최솟값 $k-10$을 갖는다.

최댓값이 10이므로 $k+8=10 \qquad \therefore k=2$

즉, 최솟값 $m=-8$

$\therefore k-m=10$

15 답 7

이차함수 $y=x^2-2x+k$의 그래프와 직선 $y=3x+1$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2-5x+k-1=0$의 판별식 D가 $D>0$이어야 한다.

$D=5^2-4(k-1)=29-4k>0$

$\therefore k<\frac{29}{4}$

따라서 자연수 k의 최댓값은 7이다.

16 답 24

(i) $y=x^2+ax+b$와 $y=-x+4$가 접할 때,

$x^2+ax+b=-x+4$에서

$x^2+(a+1)x+b-4=0$이 중근을 가져야 하므로

$D=(a+1)^2-4(b-4)=0 \cdots ㉠$

(ii) $y=x^2+ax+b$와 $y=5x+7$이 접할 때,

$x^2+ax+b=5x+7$에서

$x^2+(a-5)x+b-7=0$이 중근을 가져야 하므로

$D=(a-5)^2-4(b-7)=0 \cdots ㉡$

㉠$-$㉡에서

$12a-36=0 \qquad \therefore a=3$

또, $a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=8$

$\therefore ab=3\times8=24$

17 답 ②

$f(x)=x^3+x^2+x-3$이라 하면

$f(1)=1+1+1-3=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)=0$

주어진 삼차방정식의 두 허근 α, β는

이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=4-6=-2$

18 답 ⑤

> 사차방정식 사차방정식을 풀기 위해서는 인수정리와 조립제법을 가장 많이 쓰지.
>
> $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$
>
> 의 네 실근 중 가장 작은 것을 α, 가장 큰 것을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은?
>
> ① -4 ② -2 ③ 0
>
> ④ 2 ⑤ 4

1st 사차식을 $f(x)$로 놓고 $f(\alpha)=0$인 α를 구하여 인수분해하자.

$f(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$이라 하면

$f(1)=f(-1)=0$ 최고차항의 계수가 1이니까 $f(\alpha)=0$인 α는 상수항인 6의 약수에서 찾자.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline -1 & 1 & -4 & 1 & 6 & \boxed{0} \\ & & -1 & 5 & -6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4-5x^3+5x^2+5x-6$

$=(x-1)(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)=0$

2nd 실근 중 가장 큰 값과 가장 작은 값을 구하자.

즉, 해는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=3$이므로 $\beta-\alpha=4$

19 답 ①

삼차방정식 $x^3-3x^2+2x-5=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=5$

$\therefore\ (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-3+2-5=-5$

다른 풀이

$x^3-3x^2+2x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 이므로

양변에 $x=1$을 대입하면

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-3+2-5=-5$

20 답 9

$x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore\ (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$

$=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$

$=\{(1-\omega)(1-\omega^2)\}^2$

$=\{1-(\omega+\omega^2)+\omega^3\}^2$

$=3^2=9$

21 답 ③

$|2x-1|+|x-1|<3$에서

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때,

$-(2x-1)-(x-1)<3$

$-3x<1$ $\therefore\ x>-\frac{1}{3}$

즉, $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{1}{2}\le x<1$일 때,

$(2x-1)-(x-1)<3$ $\therefore\ x<3$

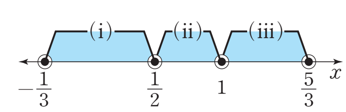
즉, $\frac{1}{2}\le x<1$

(iii) $x\ge1$일 때,

$(2x-1)+(x-1)<3$

$3x<5$ $\therefore\ x<\frac{5}{3}$

즉, $1\le x<\frac{5}{3}$



(i), (ii), (iii)에서

$-\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}$

따라서 정수 x는 0, 1의 2개이다.

22 답 ⑤

$\begin{cases} 2x-y=-3 & \cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=27 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x+3$이므로 ㉡에 대입하면

$2x^2+(2x+3)^2=27$

$6x^2+12x-18=0$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1$, $y=5$ 또는 $x=-3$, $y=-3$

$\therefore\ \alpha=1$, $\beta=5$ ($\because\ \alpha>0$, $\beta>0$) ⇨ $\alpha\beta=5$

23 답 ③

다음 두 쌍의 연립방정식의 근이 같을 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 상수이다.)

상수 m, n을 포함하지 않은 방정식으로 근을 구해도 돼.

$$\begin{cases} x^2-y^2=8 \\ mx+y=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-y=4 \\ x^2+2y^2=n \end{cases}$$

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

1st m과 n이 없는 두 식을 연립하여 α, β의 값을 각각 구하자.

$x=\alpha$, $y=\beta$를 주어진 두 연립방정식의 같은 근이라 하면 네 식을 모두 만족시키므로

$$\begin{cases} \alpha^2-\beta^2=8 & \cdots ㉠ \\ m\alpha+\beta=2 & \cdots ㉡ \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha-\beta=4 & \cdots ㉢ \\ \alpha^2+2\beta^2=n & \cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢에서 $\alpha-\beta=4$이므로 ㉠에서

네 개의 방정식 중 m, n이 없는 두 방정식을 이용하여 α, β의 값을 구하면 되겠지?

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=4(\alpha+\beta)=8$

$\therefore \alpha+\beta=2 \cdots ㉤$

㉢과 ㉤을 연립하여 계산하면

$\therefore \alpha=3$, $\beta=-1$

2nd 구한 α, β를 다른 식에 대입하여 m, n의 값을 각각 구하자.

이 값을 ㉡, ㉣에 각각 대입하면

$3m-1=2$, $9+2=n$

$\therefore m=1$, $n=11 \Rightarrow m+n=12$

24 답 ③

이차방정식 $x^2-px-3p=0$의 두 정수인 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=-3p$

두 식을 연립하면

$\alpha\beta+3\alpha+3\beta=0$

$(\alpha+3)(\beta+3)=9$

$\alpha+3$	-9	-3	-1	1	3	9
$\beta+3$	-1	-3	-9	9	3	1

이므로

α	-12	-6	-4	-2	0	6
β	-4	-6	-12	6	0	-2

$\alpha+\beta=p$이고, p는 양의 정수이므로 $p=-2+6=4$이다.

심플 정리

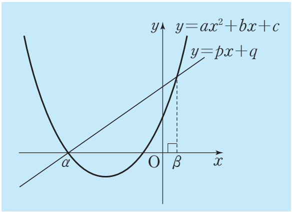
[부정방정식의 해법]

(1) 해가 정수라는 조건이 주어질 때, (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형하고, 곱해서 (정수)가 나오는 모든 경우를 구하여 해를 구하자.

(2) 실수 조건이 주어질 때, $(실수)^2+(실수)^2=0$ 꼴로 변형하여 (실수)=0이 되는 값을 구한다.

25 답 ⑤

직선 $y=px+q$와 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 그림과 같을 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



그림에서 직선과 이차함수의 그래프의 교점과 연립한 이차방정식의 관계를 알아야 해.

[보기]

ㄱ. $b^2-4ac>0$

ㄴ. $aq^2+bq+c>0$

ㄷ. 부등식 $ax^2+(b-p)x+c-q\le0$의 해는 $\alpha\le x\le\beta$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st b^2-4ac는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식이야.

이차함수의 그래프가 x축과 만나는 것과 이차방정식의 실근의 개수와 관계가 있어.

ㄱ. 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 판별식 $D=b^2-4ac>0$ (참)

2nd aq^2+bq+c는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에 $x=q$를 대입한 값이야.

ㄴ. $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$x>0$일 때, $f(x)>0$

직선의 y절편 q가 양수이므로

$f(q)=aq^2+bq+c>0$ (참)

3rd 이차함수의 그래프와 직선의 교점 사이의 관계를 이용하여 주어진 부등식을 풀자.

ㄷ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=px+q$의 교점의 x좌표는 α, β

$ax^2+(b-p)x+c-q$

이것은 연립한 이차방정식의 근이 α, β라는 것과 관계가 있어.

$=a(x-\alpha)(x-\beta)\le0$

$a>0$이므로 $\alpha\le x\le\beta$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

심플 정리

[이차함수의 그래프와 직선의 교점]

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표가 α, β이면 두 식을 연립한 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다.

26 답 ③

$ax^2+bx+1>0$의 해가 $-2<x<1$이므로 $a<0$

이차항의 계수가 1이고 해가 $-2<x<1$인 이차부등식은

$(x+2)(x-1)<0$

$x^2+x-2<0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2+ax-2a>0$

주어진 이차부등식과 계수를 비교하면 $a=b=-\frac{1}{2}$

$bx^2-ax+3\ge 0$

$-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3\ge 0$

$x^2-x-6\le 0$

$(x-3)(x+2)\le 0$

$\therefore\ -2\le x\le 3$

TIP

두 실수 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$에 대하여 이차부등식의 해가 $\alpha<x<\beta$이고 이차항의 계수가 1인 x에 대한 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$이고, 이차부등식의 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이고 이차항의 계수가 1인 x에 대한 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$이다. 해의 부등호의 방향에 따라 이차부등식이 다르게 나오니까 주의해야 한다.

27 답 ①

이차방정식 $2x^2-2(a-1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-4\le 0$

$a^2-2a-3\le 0$

$(a+1)(a-3)\le 0$

$\therefore\ -1\le a\le 3$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

28 답 3

두 변의 길이를 x m씩 각각 늘이고 줄이면 두 변의 길이는 $(2+x)$ m, $(5-x)$ m

이때, 대각선의 길이가 5 m 이하이므로

$\sqrt{(2+x)^2+(5-x)^2}\le 5$ ⋯ Ⅰ

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$(2+x)^2+(5-x)^2\le 25$

$2x^2-6x+4\le 0$

$x^2-3x+2\le 0$

$(x-1)(x-2)\le 0$ $\quad\therefore\ 1\le x\le 2$ ⋯ Ⅱ

$\therefore\ M=2,\ m=1 \Rightarrow M+m=3$ ⋯ Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	부등식을 조건에 맞게 세운다.	40%
Ⅱ	부등식을 푼다.	40%
Ⅲ	최댓값 M, 최솟값 m을 구하고 $M+m$을 계산한다.	20%

29 답 17

(ⅰ) 이차방정식 $x^2-ax+16=0$은 실근을 가지므로

$D=a^2-64\ge 0$

$(a+8)(a-8)\ge 0$

$\therefore\ a\le -8$ 또는 $a\ge 8$ ⋯ Ⅰ

(ⅱ) 이차방정식 $x^2+2ax+10a=0$은 허근을 가지므로

$D=a^2-10a<0$

$a(a-10)<0$

$\therefore\ 0<a<10$ ⋯ Ⅱ

(ⅰ), (ⅱ)에서 $8\le a<10$

따라서 정수 a는 8, 9이므로 모든 정수 a의 값의 합은 17이다. ⋯ Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	주어진 이차방정식에 실근을 가질 조건을 구한다.	40%
Ⅱ	주어진 이차방정식이 허근을 가질 조건을 구한다.	40%
Ⅲ	정수 a의 값들의 합을 구한다.	20%

30 답 ③

절댓값이 있기 때문에 범위를 나누어 푸는 게 일반적인 방법이지만 $|x|<k\,(k>0)$은 $-k<x<k$로 빠르게 풀 수 있어.

연립부등식 $\begin{cases} |x-2|<k \\ x^2-2x-3\le 0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x가 세 개 존재할 때, 양수 k의 최댓값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

1st 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 각각 구하자.

$\begin{cases} |x-2|<k & \cdots ㉠ \\ x^2-2x-3\le 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

$k>0$일 때, $|x-a|<k$는 $-k<x-a<k$가 성립해.

㉠에서

$-k<x-2<k$

$\therefore\ 2-k<x<2+k$

㉡에서

$(x+1)(x-3)\le 0$

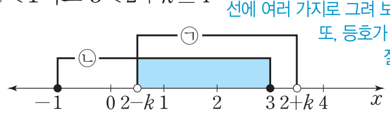
$\therefore\ -1\le x\le 3$

2nd 정수해가 세 개가 되도록 하는 k의 값의 범위를 구하고, 최댓값을 찾아보자.

주어진 연립부등식의 정수해가 세 개가 되려면

$0\le 2-k<1$이고 $3<2+k\le 4$

정수해의 개수에 맞추기 위해 수직선에 여러 가지로 그려 보자.
또, 등호가 포함되는지 잘 따져보자.



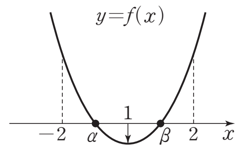
$\therefore\ 1<k\le 2$

따라서 구하는 양수 k의 최댓값은 2이다.

31 답 ②

$f(x)=x^2+mx-1$이라 할 때,

이차방정식 $x^2+mx-1=0$의 두 실근 α, β가 $-2<\alpha<1$, $1<\beta<2$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 두 실근 α, β가 $-2<\alpha<1$, $1<\beta<2$일 조건은 다음과 같다.

(i) $f(-2)>0$이어야 하므로

$4-2m-1>0$

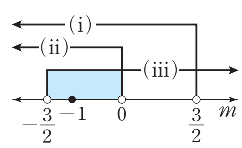
$\therefore m<\frac{3}{2}$

(ii) $f(1)<0$이어야 하므로

$1+m-1<0 \qquad \therefore m<0$

(iii) $f(2)>0$이어야 하므로

$4+2m-1>0 \qquad \therefore m>-\frac{3}{2}$



(i), (ii), (iii)에서 실수 m의 값의 범위는 $-\frac{3}{2}<m<0$이므로 정수 $m=-1$이다.

Ⅲ 도형의 방정식

Simple S 평면좌표

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 136~137

01 답 $|x_2-x_1|$ (또는 $|x_1-x_2|$)

02 답 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

03 답 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

04 답 $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ×

09 답 (1) 4 (2) 8 (3) 6 (4) 3

(1) $\overline{AB}=|5-1|=4$

(2) $\overline{AB}=|6-(-2)|=8$

(3) $\overline{AB}=|(-1)-5|=6$

(4) $\overline{AB}=|(-6)-(-3)|=3$

10 답 (1) $R(5)$ 또는 $R(-1)$

(2) $R(2)$ 또는 $R(-8)$

(3) $R(6)$ 또는 $R(-6)$

(1) 점 R의 좌표를 x라고 하면

$|x-2|=3$에서 $x-2=\pm3$

$\therefore x=5$ 또는 $x=-1$

$\therefore R(5)$ 또는 $R(-1)$

(2) 점 R의 좌표를 x라고 하면

$|x-(-3)|=5$에서 $x+3=\pm5$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-8$

$\therefore R(2)$ 또는 $R(-8)$

(3) 점 R의 좌표를 x라고 하면

$|x-0|=6$에서 $x=\pm6$

$\therefore R(6)$ 또는 $R(-6)$

11 답 (1) $\sqrt{26}$ (2) $2\sqrt{10}$ (3) 5

(1) $\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+\{4-(-1)\}^2}=\sqrt{26}$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-4)\}^2+\{-3-(-1)\}^2}=2\sqrt{10}$

(3) $\overline{OA}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

답_094112심플자이고등(S~V).indd 94 2017. 9. 15. 오후 5:45

12 답 (1) ① $\mathrm{P}(5)$ ② $\mathrm{Q}(3)$ ③ $\mathrm{M}(4)$

(2) ① $\mathrm{P}(1)$ ② $\mathrm{Q}(-1)$ ③ $\mathrm{M}(0)$

(3) ① $\mathrm{P}(0)$ ② $\mathrm{Q}(9)$

(4) ① $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\right)$ ② $\mathrm{Q}\left(-\frac{11}{2}\right)$

(1) ① $\mathrm{P}\left(\frac{2\times7+1\times1}{2+1}\right)$ $\therefore \mathrm{P}(5)$

② $\mathrm{Q}\left(\frac{1\times7+2\times1}{1+2}\right)$ $\therefore \mathrm{Q}(3)$

③ $\mathrm{M}\left(\frac{1+7}{2}\right)$ $\therefore \mathrm{M}(4)$

(2) ① $\mathrm{P}\left(\frac{3\times2+1\times(-2)}{3+1}\right)$ $\therefore \mathrm{P}(1)$

② $\mathrm{Q}\left(\frac{1\times2+3\times(-2)}{1+3}\right)$ $\therefore \mathrm{Q}(-1)$

③ $\mathrm{M}\left(\frac{-2+2}{2}\right)$ $\therefore \mathrm{M}(0)$

(3) ① $\mathrm{P}\left(\frac{1\times6-2\times3}{1-2}\right)$ $\therefore \mathrm{P}(0)$

② $\mathrm{Q}\left(\frac{2\times6-1\times3}{2-1}\right)$ $\therefore \mathrm{Q}(9)$

(4) ① $\mathrm{P}\left(\frac{1\times(-4)-3\times(-1)}{1-3}\right)$ $\therefore \mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\right)$

② $\mathrm{Q}\left(\frac{3\times(-4)-1\times(-1)}{3-1}\right)$ $\therefore \mathrm{Q}\left(-\frac{11}{2}\right)$

13 답 (1) $\mathrm{P}(2,\ -1)$ (2) $\mathrm{Q}(9,\ -8)$ (3) $\mathrm{M}\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

(1) 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$x=\frac{3\times4+2\times(-1)}{3+2}=2$

$y=\frac{3\times(-3)+2\times2}{3+2}=-1$

$\therefore \mathrm{P}(2,\ -1)$

(2) 점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$x=\frac{2\times4-1\times(-1)}{2-1}=9$

$y=\frac{2\times(-3)-1\times2}{2-1}=-8$

$\therefore \mathrm{Q}(9,\ -8)$

(3) 점 M의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$x=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2}$

$y=\frac{2+(-3)}{2}=-\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{M}\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 138~143

14 답 ⑤

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(3)$, $\mathrm{B}(a)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}=|a-3|$이므로 $|a-3|=5$

$a-3=5$ 또는 $a-3=-5$

$\therefore a=8$ 또는 $a=-2$

따라서 모든 a의 값의 합은 6이다.

15 답 ③

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(-3)$에 대하여

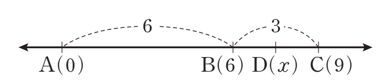
$\overline{\mathrm{AB}}=|a-(-3)|$이므로 $|a+3|\le3$

$-3\le a+3\le3$

$\therefore -6\le a\le0$

따라서 정수 a는 $-6,\ -5,\ \cdots,\ 0$의 7개이다.

16 답 ②



위 그림과 같이 점 A를 원점으로 하고, 점 D를 $\mathrm{D}(x)$라 하면 $\mathrm{A}(0)$, $\mathrm{B}(6)$, $\mathrm{C}(9)$, $\mathrm{D}(x)$

$2\overline{\mathrm{AD}}=5\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $2|x-0|=5|9-6|$

$x>0$이므로 $2x=15$, $x=\frac{15}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{CD}}=\left|\frac{15}{2}-9\right|=\frac{3}{2}$

TIP

$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이가 주어졌으니까 수직선 위에 세 점 A, B, C 중 하나를 원점으로 하여 식을 계산하자. 두 점 사이의 거리는 절댓값으로 나타내므로 점 A를 원점으로 잡으면 다른 세 점의 좌표를 양수로 잡을 수 있다.

17 답 ⑤

$\overline{\mathrm{AC}}=|a-2|=3$

$\therefore a=5$ 또는 $a=-1$

$\overline{\mathrm{BC}}=|b-2|=4$

$\therefore b=6$ 또는 $b=-2$

따라서 $a-b$의 최댓값은 a의 값이 최대이고, b의 값이 최소일 때이므로 $a-b=5-(-2)=7$

18 답 ③

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이므로 $\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2$

이때, $\overline{\mathrm{OA}}^2=3^2+(-4)^2=25$이고

$\overline{\mathrm{OB}}^2=(a+1)^2+a^2$이므로

$2a^2+2a+1=25$, $a^2+a-12=0$

$(a+4)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

19 답 ②

$\overline{AB}=\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{(0-x-1)^2+(x+1-2)^2}=\sqrt{10}$

양변을 제곱하면

$(x+1)^2+(x-1)^2=10$

$2x^2+2=10$, $x^2=4$

$\therefore x=2$ ($\because x>0$)

20 답 ③

$\overline{AB}=5\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(a-1-2)^2+(-2-3)^2}=5\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$(a-3)^2+25=50$

$a^2-6a-16=0$, $(a+2)(a-8)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=8$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-2+8=6$

21 답 ③

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(a-1)^2+(3+1)^2=(-4-a)^2+(4-3)^2$

$a^2-2a+17=a^2+8a+17$

$10a=0 \qquad \therefore a=0$

22 답 ①

점 A에서 두 점 P, Q에 이르는 거리가 각각 같으므로

$\overline{PA}=\overline{QA}$

$\sqrt{(2-0)^2+(k-1-3)^2}=\sqrt{(2+2)^2+(k-1+1)^2}$

양변을 제곱하면

$2^2+(k-4)^2=4^2+k^2$

$k^2-8k+20=k^2+16$

$-8k=-4 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

23 답 -1

$\overline{PA}=\overline{PB}$, 즉 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(4-3)^2+(a-1)^2=(4-5)^2+(a+3)^2$

$8a+8=0 \qquad \therefore a=-1$

24 답 ④

x축 위의 점 P의 좌표를 P$(a,\ 0)$이라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}$이므로

$\sqrt{(a+2)^2+(-2)^2}=\sqrt{(a-5)^2+5^2}$

양변을 제곱하면

$a^2+4a+8=a^2-10a+50$

$14a=42 \qquad \therefore a=3$

$\therefore$ P$(3,\ 0)$

25 답 P$(-1,\ 0)$

x축 위의 점 P의 좌표를 P$(a,\ 0)$이라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\sqrt{(a-1)^2+4^2}=\sqrt{(a-3)^2+(-2)^2}$

양변을 제곱하면

$a^2-2a+17=a^2-6a+13$

$4a=-4$

$\therefore a=-1$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 P$(-1,\ 0)$

26 답 ②

y축 위의 점 P의 좌표를 P$(0,\ a)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(-2)^2+(3-a)^2=(-4)^2+(1-a)^2$

$a^2-6a+13=a^2-2a+17$

$4a=-4 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore$ P$(0,\ -1)$

$\therefore \overline{OP}=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$

27 답 ⑤

두 점 A, B에서 점 Q$(0,\ a)$에 이르는 거리가 각각 같으므로 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$이다.

$\sqrt{1^2+(a-2)^2}=\sqrt{(-4)^2+(a-5)^2}$

양변을 제곱하면

$1+(a-2)^2=16+(a-5)^2$

$a^2-4a+5=a^2-10a+41$

$6a=36 \qquad \therefore a=6$

28 답 ③

점 P의 좌표를 P$(a,\ 0)$이라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-3)^2+4^2=(a-5)^2+2^2$

$a^2-6a+25=a^2-10a+29$

$4a=4 \qquad \therefore a=1$

$\therefore$ P$(1,\ 0)$

또, 점 Q의 좌표를 Q$(0,\ b)$라 하면

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-3)^2+(b+4)^2=(-5)^2+(b+2)^2$

$b^2+8b+25=b^2+4b+29$

$4b=4 \qquad \therefore b=1$

$\therefore$ Q$(0,\ 1)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$

29 답 ②

점 P의 좌표를 P(a, $-a+3$)이라 하면

$\overline{PA}=\sqrt{(a-2)^2+(-a+3-4)^2}$

$=\sqrt{2a^2-2a+5}$

$\overline{PB}=\sqrt{(a-3)^2+(-a+3-3)^2}$

$=\sqrt{2a^2-6a+9}$

이때, $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$2a^2-2a+5=2a^2-6a+9$

$4a=4 \qquad \therefore a=1$

$\therefore$ P(1, 2)

30 답 ③

직선 $y=x$ 위에 있는 점 Q의 좌표를 (a, a)라 하면

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$이므로

$\sqrt{(a-4)^2+(a-2)^2}=\sqrt{(a+3)^2+(a-3)^2}$

양변을 제곱하면

$(a-4)^2+(a-2)^2=(a+3)^2+(a-3)^2$

$-12a=-2 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$이다.

31 답 ②

점 P(a, b)가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$b=a+2 \qquad \therefore$ P(a, $a+2$)

또, $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(a+2+3)^2=(a-4)^2+(a+2-1)^2$

$12a=-12 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $b=-1+2=1$이므로

$a+b=-1+1=0$

32 답 ④

삼각형 ABC의 외심이 O(x, y)이므로

$\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$

$\overline{AO}=\overline{BO}$에서 $\overline{AO}^2=\overline{BO}^2$이므로

$(x+2)^2+y^2=(x-4)^2+y^2$

$12x=12 \qquad \therefore x=1$

$\overline{BO}=\overline{CO}$에서 $\overline{BO}^2=\overline{CO}^2$이므로

$(x-4)^2+y^2=(x-2)^2+(y-4)^2$

$4x-8y+4=0 \qquad \therefore x-2y+1=0$

여기에 $x=1$을 대입하면

$1-2y+1=0 \qquad \therefore y=1$

$\therefore x+y=1+1=2$

심플 정리

[삼각형의 외심의 성질]

(1) 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다. (외심)

(2) 외심에서 세 꼭짓점 사이의 거리는 모두 같다.

33 답 (−3, −2)

삼각형 ABC의 외심을 O(a, b)라 하면

$\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$

$\overline{AO}=\overline{BO}$에서 $\overline{AO}^2=\overline{BO}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+5)^2=a^2+(b-2)^2$

$2a-14b-22=0$

$\therefore a-7b-11=0 \cdots$ ㉠

$\overline{BO}=\overline{CO}$에서 $\overline{BO}^2=\overline{CO}^2$이므로

$a^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b+2)^2$

$4a-8b-4=0$

$\therefore a-2b-1=0 \cdots$ ㉡

㉠−㉡을 계산하면

$-5b-10=0$

$\therefore b=-2 \cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $a=-3$

따라서 외심 O의 좌표는 (−3, −2)이다.

34 답 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점은

$\overline{PA}=\overline{PB} \Rightarrow \overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로 점 P의 좌표를

P(a, 0)이라 하면

$(-1-a)^2+(2-0)^2=(3-a)^2+(6-0)^2$

$8a=40 \qquad \therefore a=5$

$\therefore$ P(5, 0)

삼각형 OPC의 외심의 좌표를 (x, y)라 하면

$x^2+y^2=(x-5)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$

$x^2+y^2=(x-5)^2+y^2$과 $x^2+y^2=x^2+(y-5)^2$에서

$-10x+25=0$, $-10y+25=0$

$\therefore x=y=\frac{5}{2}$

따라서 삼각형 OPC의 외심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$이다.

35 답 ④

세 변 a, b, c의 길이를 각각 구하면

$a=\sqrt{(5+2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$b=\sqrt{(1-5)^2+(3-0)^2}=\sqrt{25}=5$

$c=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{25}=5$

$\therefore a^2=b^2+c^2$, $b=c$

즉, △ABC는 ∠A=90°인 직각이등변삼각형이다.

또한, 세 변의 길이의 비는 $a:b:c=\sqrt{2}:1:1$

36 답 직각삼각형

$\overline{AB}=\sqrt{(3-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{18}$

$\overline{AC}=\sqrt{(2-0)^2+(5-3)^2}=\sqrt{8}$

$\overline{BC}=\sqrt{(2-3)^2+(5-0)^2}=\sqrt{26}$

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이므로 삼각형 ABC는 ∠A가 직각인 직각삼각형이다.

37 답 ③

점 C는 x축 위의 점이므로 $C(c,\ 0)$이라 하면

$\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(c-3)^2+(0+2)^2}=\sqrt{\{c-(-1)\}^2+(0-3)^2}$

양변을 제곱하면

$(c-3)^2+4=(c+1)^2+9,\ 8c=3$

$\therefore\ c=\dfrac{3}{8}$

38 답 ⑤

삼각형 ABC에서 $\angle A=90°$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$ ⋯ ㉠

이때, 세 점 $A(a,\ 2)$, $B(-1,\ -6)$, $C(3,\ 6)$에 대하여

$\overline{AB}^2=(-1-a)^2+(-6-2)^2=a^2+2a+65$

$\overline{CA}^2=(a-3)^2+(2-6)^2=a^2-6a+25$

$\overline{BC}^2=(3+1)^2+(6+6)^2=160$

㉠에 의해 $2a^2-4a+90=160$ ⇨ $2a^2-4a-70=0$

$a^2-2a-35=0$

$(a+5)(a-7)=0$

$\therefore\ a=-5$ 또는 $a=7$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-5+7=2$이다.

39 답 ②

$\angle B=90°$이므로

$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$에서

$(5-a)^2+(3-1)^2$

$=(2-6)^2+(-1-3)^2+(a-1)^2+(1+1)^2$

$a^2-10a+29=a^2-2a+37,\ 8a=-8$

$\therefore\ a=-1$

40 답 ②

$\overline{AB}^2=(3-a)^2$ ⋯ ㉠

$\overline{BC}^2=(3-4)^2+(b-a)^2=1+(b-a)^2$ ⋯ ㉡

$\overline{AC}^2=(2-a)^2+(b-a)^2$ ⋯ ㉢

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$

㉡, ㉢에서

$1+(b-a)^2=(2-a)^2+(b-a)^2$

$1=a^2-4a+4$

$a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=3$

한편, ㉠에서

(i) $a=1$일 때, $\overline{AB}^2=4$

(ii) $a=3$일 때, $\overline{AB}^2=0$

(i), (ii)에서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $\sqrt{4}=2$이다.

41 답 ①

점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면

$A'(4,\ -2)$이고 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

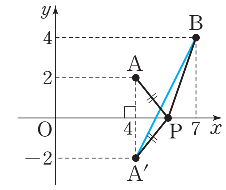
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(7-4)^2+(4+2)^2}$

$=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $3\sqrt{5}$이다.



TIP

선분의 길이의 합의 최솟값을 구하기 위해 점을 선분에 대하여 대칭이동한 점과 다른 점을 연결한 선분의 길이가 최소 거리가 된다. 삼각형의 어느 한 변의 길이도 다른 두 변의 길이의 합보다 작다는 삼각형의 결정 조건에서 그 원리를 알 수 있다.

42 답 ③

점 $A(-4,\ 2)$와 x축에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면

$A'(-4,\ -2)$이다.

그림에서 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

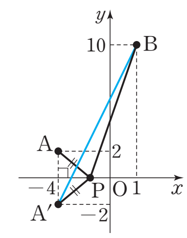
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(1+4)^2+(10+2)^2}$

$=\sqrt{169}=13$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 13이다.



43 답 ②

점 B와 y축에 대하여 대칭인 점을 B′이라 하면

$B'(-1,\ 11)$이고 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

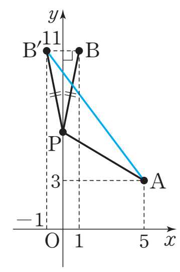
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

$\geq\overline{AB'}$

$=\sqrt{(-1-5)^2+(11-3)^2}$

$=\sqrt{100}=10$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 10이다.



44 답 ⑤

두 점 $A(-2)$, $B(a)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\dfrac{3\times a+2\times(-2)}{3+2}=\dfrac{3a-4}{5}=1$

$3a-4=5\qquad\therefore\ a=3$

45 답 ③

두 점 $A(-2)$, $B(4)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\dfrac{2\times4-3\times(-2)}{2-3}=-14$

46 답 ④

$$p=\frac{3\times8+2\times(-2)}{3+2}=4$$

$$q=\frac{2\times8-3\times(-2)}{2-3}=-22$$

$\therefore\ p-q=4-(-22)=26$

47 답 ③

$\overline{AB}$를 $3:b$로 내분하는 점의 좌표가 $(-1,\ 2)$이므로

$$\frac{3\times a+b\times8}{3+b}=-1,\ \frac{3\times12+b\times(-4)}{3+b}=2$$

$3a+8b=-3-b,\ 36-4b=6+2b$

$3a+9b=-3,\ 6b=30$

$\therefore\ a=-16,\ b=5 \Rightarrow a+b=-11$

48 답 ③

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$에서

$y=0$일 때 $x=a$이고, $x=0$일 때 $y=b$

$\therefore\ A(a,\ 0),\ B(0,\ b)$

이때, 선분 AB의 중점의 좌표가 $(1,\ 3)$이므로

$$\frac{a+0}{2}=1,\ \frac{0+b}{2}=3$$

$\therefore\ a=2,\ b=6 \Rightarrow b-a=6-2=4$

49 답 ②

선분 AB의 중점 M의 좌표가 $(3,\ b)$이므로

$$\frac{(1+a)+2}{2}=3,\ \frac{3+1}{2}=b$$

$$\frac{a+3}{2}=3,\ 2=b$$

$\therefore\ a=3,\ b=2 \Rightarrow ab=6$

50 답 ④

$$a=\frac{2\times3-3\times1}{2-3}=-3,\ b=\frac{2\times1-3\times2}{2-3}=4$$

$\therefore\ a+b=-3+4=1$

51 답 ③

점 Q는 선분 AB를 $5:3$으로 외분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{5\times2-3\times4}{5-3},\ \frac{5\times2-3\times(-2)}{5-3}\right)=Q(-1,\ 8)$$

$\therefore\ \overline{OQ}=\sqrt{(-1)^2+8^2}=\sqrt{65}$

52 답 ⑤

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2\times9+1\times3}{2+1},\ \frac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)=P(7,\ 3)$$

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{2\times9-1\times3}{2-1},\ \frac{2\times4-1\times1}{2-1}\right)=Q(15,\ 7)$$

$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{(15-7)^2+(7-3)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

Simple T 평면좌표의 활용

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 144~145

01 답 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

02 답 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

03 답 평행사변형

04 답 ×

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 답 (1) $D\left(\frac{5}{2},\ 3\right)$ (2) $G(1,\ 3)$

(1) $\overline{BC}$의 중점 D의 좌표 $(a,\ b)$는

$$a=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2},\ b=\frac{6+0}{2}=3$$

$\therefore\ D\left(\frac{5}{2},\ 3\right)$

(2) $\overline{AD}$를 $2:1$로 내분하는 점 G의 좌표 $(x,\ y)$는

$$x=\frac{2\times\frac{5}{2}+1\times(-2)}{2+1}=1,\ y=\frac{2\times3+1\times3}{2+1}=3$$

$\therefore\ G(1,\ 3)$

09 답 (1) $G\left(\frac{1}{3},\ -1\right)$ (2) $G(2,\ 2)$ (3) $G(1,\ -1)$

(1) $\frac{1-2+2}{3}=\frac{1}{3},\ \frac{1+0-4}{3}=-1$

$\therefore\ G\left(\frac{1}{3},\ -1\right)$

(2) $\frac{-1+5+2}{3}=2,\ \frac{3-5+8}{3}=2$

$\therefore\ G(2,\ 2)$

(3) $\frac{-2+1+4}{3}=1,\ \frac{-2+3-4}{3}=-1$

$\therefore\ G(1,\ -1)$

10 답 (1) $\sqrt{10}$ (2) 7

중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

(1) $6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2),\ \overline{AM}^2=10$

$\therefore\ \overline{AM}=\sqrt{10}\ (\because\ \overline{AM}>0)$

(2) $9^2+7^2=2(\overline{AM}^2+4^2),\ \overline{AM}^2=49$

$\therefore\ \overline{AM}=7\ (\because\ \overline{AM}>0)$

11 답 (1) $\left(\frac{9}{2},\ \frac{11}{2}\right)$ (2) $\left(\frac{5+a}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right)$

(3) $a=4,\ b=13$

(1) $\left(\frac{1+8}{2},\ \frac{6+5}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\ \frac{11}{2}\right)$

(3) 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

즉, ($\overline{BD}$의 중점의 좌표)=($\overline{AC}$의 중점의 좌표)이므로

$\left(\frac{5+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right)=\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right)$

$\frac{5+a}{2}=\frac{9}{2}$에서 $a=4$

$\frac{-2+b}{2}=\frac{11}{2}$에서 $b=13$

$\therefore a=4, b=13$

12 답 D$(-4, 2)$

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

($\overline{BD}$의 중점의 좌표)=($\overline{AC}$의 중점의 좌표)

꼭짓점 D의 좌표를 (x, y)라고 하면

$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right)=\left(\frac{-2+(-1)}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$

$\frac{1+x}{2}=\frac{-2+(-1)}{2}$에서 $x=-4$

$\frac{1+y}{2}=\frac{0+3}{2}$에서 $y=2$

$\therefore$ D$(-4, 2)$

13 답 (1) $2x^2-4x+2y^2-8y+50$

(2) $a=1, b=2, c=40$

(3) 40 (4) P$(1, 2)$

(1) $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(x+3)^2+(y-0)^2+(x-5)^2+(y-4)^2$

$=2x^2-4x+2y^2-8y+50$

(2) $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=2x^2-4x+2y^2-8y+50$

$=2(x-1)^2+2(y-2)^2+40$

$\therefore a=1, b=2, c=40$

(3) $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $x=1, y=2$일 때

최솟값 40을 갖는다.

유형 연습 [+내신 유형]

문제편 pp. 146~149

14 답 ④

$\left(\frac{0+x+4}{3}, \frac{2+y+5}{3}\right)=(1, 2)$

$\therefore x=-1, y=-1 \Rightarrow xy=1$

심플 정리

[삼각형의 무게중심의 성질]

(1) 무게중심은 중선을 2 : 1로 내분한다.

(2) 무게중심은 삼각형의 넓이를 6등분한다.

(3) 좌표평면에서 무게중심의 좌표는 각 점의 좌표의 평균이다.

15 답 ①

세 꼭짓점의 좌표가 A$(-3, 3)$, B$(1, a)$, C$(b, 2)$인 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-1, 1)$이므로

$\left(\frac{-3+1+b}{3}, \frac{3+a+2}{3}\right)=(-1, 1)$

$b-2=-3, a+5=3$

$\therefore a=-2, b=-1 \Rightarrow a+b=-3$

16 답 B$(-9, 2)$, C$(3, 0)$

B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)이라 하면

변 AB의 중점의 좌표가 $(-3, 3)$이므로

$\frac{3+x_2}{2}=-3, \frac{4+y_2}{2}=3$

$\therefore x_2=-9, y_2=2$

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-1, 2)$이므로

$\frac{3+(-9)+x_3}{3}=-1, \frac{4+2+y_3}{3}=2$

$\therefore x_3=3, y_3=0$

따라서 B$(-9, 2)$, C$(3, 0)$이다.

17 답 ②

삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로

$\left(\frac{4+3+(-1)}{3}, \frac{6+1+2}{3}\right)=(2, 3)$

$\therefore a=2, b=3 \Rightarrow ab=6$

18 답 ③

세 점 D, E, F의 좌표가 D$(3, 6)$, E$(-2, 2)$, F$(2, -2)$이므로 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{3+(-2)+2}{3}, \frac{6+2+(-2)}{3}\right)=(1, 2)$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 G$(1, 2)$이다.

19 답 ④

△ABC의 세 꼭짓점을

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)이라 하자.

변 AB의 중점의 좌표가 $(1, a)$이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=1, \frac{y_1+y_2}{2}=a$ ⋯ ㉠

변 BC의 중점의 좌표가 $(2, -1)$이므로

$\frac{x_2+x_3}{2}=2, \frac{y_2+y_3}{2}=-1$ ⋯ ㉡

변 CA의 중점의 좌표가 $(b, 3)$이므로

$\frac{x_3+x_1}{2}=b, \frac{y_3+y_1}{2}=3$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 더하면

$x_1+x_2+x_3=b+3, y_1+y_2+y_3=a+2$

△ABC의 무게중심이 점 G$(3, -1)$이므로

$\frac{b+3}{3}=3, \frac{a+2}{3}=-1$

$\therefore a=-5, b=6 \Rightarrow a+b=1$

TIP

세 점 A, B, C의 좌표를 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 하면

△ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

한편, 세 변 AB, BC, CA의 중점의 좌표는 각각

$$D\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right), E\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

$$F\left(\frac{x_3+x_1}{2}, \frac{y_3+y_1}{2}\right)$$

이므로 △DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

따라서 △ABC와 △DEF의 무게중심의 좌표는 같다.

20

답 ①

$3\overline{PA}=2\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$이고, 점 P가 선분 AB 위의 점이므로 점 P는 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이다.

이때, 점 B의 좌표를 $B(a, b)$라 하면

$$\left(\frac{2\times a+3\times(-1)}{2+3}, \frac{2\times b+3\times 2}{2+3}\right)=(1, 0)$$

$$\frac{2a-3}{5}=1, \frac{2b+6}{5}=0$$

$\therefore a=4, b=-3 \Rightarrow a+b=1$

21

답 ③

$2\overline{AC}=3\overline{BC}$이므로 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:2$이고, 점 C가 선분 AB의 연장선 위의 점이므로 점 C는 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이다.

$$a=\frac{3\times 3-2\times(-1)}{3-2}=11, b=\frac{3\times 5-2\times 4}{3-2}=7$$

$\therefore a+b=18$

22

답 ②

$\overline{AB}$를 $a:(1-a)$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{a\times 6+(1-a)\times(-2)}{a+1-a}, \frac{a\times(-2)+(1-a)\times 6}{a+1-a}\right)$$

$=(8a-2, -8a+6)$

이 점이 제1사분면 위의 점이므로

$8a-2>0$이고 $-8a+6>0$ $\quad\therefore \frac{1}{4}<a<\frac{3}{4}$

$\therefore m=\frac{1}{4}, n=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{n}{m}=3$

23

답 ②

평행사변형의 성질에 의해 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 선분 AC와 BD의 중점은 일치한다. 즉,

$$\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{-1+5}{2}\right)=\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$$

$\therefore a=1, b=1 \Rightarrow a+b=2$

TIP

평행사변형은 여러 가지 성질들이 있다. 먼저 두 쌍의 마주 보는 변의 길이가 같고, 두 쌍의 마주 보는 각의 크기가 같다. 그리고 가장 많이 쓰이는 성질은 '두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.'이다.

도형의 성질을 꼼꼼하게 알아 두면 문제 속에 숨겨져 있는 조건을 발견하게 될 것이다.

24

답 ②

평행사변형의 성질에 의해 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 대각선 AC와 BD의 중점은 일치한다. 즉,

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{-1+4}{2}\right)=\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-2+b}{2}\right)$$

$a+1=2, b-2=3$

$\therefore a=1, b=5 \Rightarrow ab=5$

25

답 ②

좌표평면 위에 네 점 A, B, C, D를 나타내면 평행사변형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선이 항상 지나는 점은 두 대각선의 교점이다. 즉, 대각선 AC의 중점이므로

$$\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{5+(-3)}{2}\right)=(0, 1)$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은 항상 점 $(0, 1)$을 지난다.

26

답 ④

두 점 B, D의 좌표를 각각 $B(a, b)$, $D(c, d)$라 하면

$\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(3, 2)$이므로

$\frac{3+a}{2}=3, \frac{6+b}{2}=2 \quad\therefore a=3, b=-2$

$\therefore B(3, -2)$

평행사변형 ABCD에서 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$$\frac{3+4}{2}=\frac{3+c}{2}, \frac{6+5}{2}=\frac{-2+d}{2}$$

$\therefore c=4, d=13$

따라서 $D(4, 13)$이다.

27

답 ⑤

□ABCD는 마름모이므로 네 변의 길이가 모두 같고, 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

$\overline{AD}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5=\overline{AB}$

$\overline{AB}=a-(-3)=5 \quad\therefore a=2\,(\because a>0)$

또, 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$$\left(\frac{-3+b}{2}, \frac{c}{2}\right)=\left(\frac{a}{2}, \frac{4}{2}\right)$$

이때, $a=2$이므로

$$\frac{-3+b}{2}=\frac{2}{2}, \frac{c}{2}=2$$

$\therefore b=5, c=4$

$\therefore a+b+c=2+5+4=11$

28 답 6, 14

마름모의 성질에 의하여 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표는

$\dfrac{a+7}{2}=\dfrac{3+b}{2}$ $\quad\therefore b=a+4 \cdots$ ㉠

또, 마름모의 정의에 의하여 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(3-a)^2+(6-2)^2}=\sqrt{(7-3)^2+(4-6)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-6a+5=0$

$(a-1)(a-5)=0$

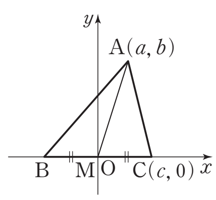
$\therefore a=1$ 또는 $a=5 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a=1,\ b=5$ 또는 $a=5,\ b=9$

따라서 $a+b$의 값은 6 또는 14이다.

29 답 ③



$\overline{BC}$의 중점 M이 원점 $(0,\ 0)$이고

$\overline{BM}=\overline{CM}$이므로 점 B의 좌표는

(가)

$\mathrm{B}(-c,\ 0)$

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$

$=2(a^2+b^2+c^2)$ ←(나)

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+c^2$ ←(다)

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

30 답 5

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

$\therefore \overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=5$

또한, 점 M이 $\overline{BC}$의 중점이므로 중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

$8^2+6^2=2(\overline{AM}^2+5^2)$, $\overline{AM}^2=25$

$\therefore \overline{AM}=5$

다른 풀이

피타고라스 정리에 의하여 $\overline{BC}=10$이고, 직각삼각형의 빗변의 중점은 삼각형의 외심이므로

$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=5$

31 답 ④

$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$이므로

$\overline{BD} : \overline{CD}=10 : 8=5 : 4$

이때, 선분 BC의 길이를 x라 하면 삼각형 ABC가 직각삼각형이므로

$10^2=8^2+x^2 \Rightarrow x^2=36 \qquad \therefore x=6\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{CD}=\dfrac{4}{9}\overline{BC}=\dfrac{4}{9}\times 6=\dfrac{8}{3}$

32 답 ④

각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$이고,

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{100}=10$

$\overline{AC}=\sqrt{(5-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{25}=5$

이므로 $\overline{BD} : \overline{CD}=10 : 5=2 : 1$

즉, 점 D는 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이다.

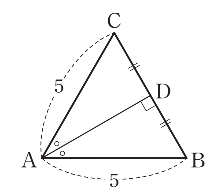
이때, $\mathrm{B}(-4,\ -4)$, $\mathrm{C}(5,\ 0)$이므로

$a=\dfrac{2\times5+1\times(-4)}{2+1}=\dfrac{6}{3}=2$

$b=\dfrac{2\times0+1\times(-4)}{2+1}=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore a+b=2+\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$

33 답 ③



오른쪽 그림에서

$\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(6-3)^2}$

$=5$

$\overline{AC}=\sqrt{(2+1)^2+(-1-3)^2}$

$=5$

$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$이고

$\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 점 D는 $\overline{BC}$의 중점이다.

따라서 점 D의 좌표는

$\mathrm{D}\left(\dfrac{3+2}{2},\ \dfrac{6-1}{2}\right)=\mathrm{D}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

34 답 ②

점 P는 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}(a,\ a+2)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$

$=(a+3)^2+(a+2)^2+(a-3)^2+(a+2)^2$

$=4a^2+8a+26$

$=4(a+1)^2+22$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$은 $a=-1$일 때 최솟값 22를 갖는다.

심플 정리

[이차함수의 최댓값 · 최솟값]

이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$로 변형하면

(1) $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 가지고, 최댓값은 없다.

(2) $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 가지고, 최솟값은 없다.

35 답 ④

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$

$=(x-2)^2+(y-2)^2+(x-4)^2+(y-6)^2$

$=2x^2-12x+2y^2-16y+60$

$=2(x-3)^2+2(y-4)^2+10$

따라서 $x=3,\ y=4$일 때, 최솟값은 10이므로 점 P의 좌표는 $(3,\ 4)$이다.

36 답 ④

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(x+1)^2+(y-1)^2+(x-4)^2+(y-2)^2+x^2+(y-6)^2$

$=3x^2-6x+3y^2-18y+58$

$=3(x-1)^2+3(y-3)^2+28$

따라서 $x=1$, $y=3$일 때 최솟값 28을 갖는다.

$\therefore x+y=4$

Simple U 직선의 방정식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 150 ~ 151

01 답 $ax+by+c=0$

02 답 평행

03 답 일치

04 답 0

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ×

09 답 (1) $y=2x+1$ (2) $y=3x+9$ (3) $y=2x+1$ (4) $y=-2x-3$ (5) $y=3$

(2) $y-0=3\{x-(-3)\}$ $\therefore y=3x+9$

(3) $y-5=2(x-2)$ $\therefore y=2x+1$

(4) x가 1만큼 증가할 때, y가 2만큼 감소하므로 직선의 기울기는 $\frac{-2}{1}=-2$

$y-1=-2\{x-(-2)\}$ $\therefore y=-2x-3$

(5) x축에 평행한 직선은 $y=3$

10 답 (1) $y=-x+2$ (2) $y=\frac{1}{2}x+4$ (3) $x=0$

(1) $y-3=\frac{-2-3}{4-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-x+2$

(2) $y-5=\frac{2-5}{-4-2}(x-2)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+4$

(3) 두 점의 x좌표가 같으므로 $x=0$

11 답 (1) $y=3x+6$ (2) $y=\frac{3}{7}x-3$ (3) $y=-\frac{2}{3}x+4$

(1) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{6}=1$

$\therefore y=3x+6$

(2) $\frac{x}{7}-\frac{y}{3}=1$

$\therefore y=\frac{3}{7}x-3$

(3) x절편이 6, y절편이 4이므로

$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$

$\therefore y=-\frac{2}{3}x+4$

12 답 (1) (기울기)>0, (y절편)<0 (2) 제2사분면

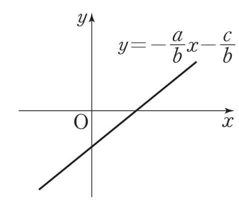
(1) $a<0$, $b>0$, $c>0$이므로

(기울기)$=-\frac{a}{b}>0$

(y절편)$=-\frac{c}{b}<0$

(2) 직선 $ax+by+c=0$

⇨ $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 개형은



그림과 같으므로 이 직선이 지나지 않는 사분면은 제2사분면이다.

13 답 ①, ③

$2x+y-3=0$에서 $y=-2x+3$

③ $2x+y-2=0$에서 $y=-2x+2$

14 답 ①, ③

① 두 직선 $y=-x+2$, $y=x-3$의 기울기의 곱이 $(-1)\times1=-1$이므로 두 직선은 서로 수직이다.

③ $3\times1+(-1)\times3=0$이므로 두 직선 $3x-y=0$, $x+3y=0$은 서로 수직이다.

따라서 두 직선이 서로 수직인 것들은 ①, ③이다.

15 답 $2x-y=0$

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+y-4+k(3x-y-1)=0$ (k는 실수) ⋯ ㉠

으로 놓으면 이 직선이 원점을 지나므로

$0+0-4+k(3\cdot0-0-1)=0$ $\therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$-10x+5y=0$ $\therefore 2x-y=0$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 152 ~ 157

16 답 ⑤

기울기가 -2이고 x절편이 2인 직선의 방정식은

$y-0=-2(x-2)$ $\therefore y=-2x+4$

따라서 직선 $y=-2x+4$의 y절편은 4이다.

17 답 ②

직선 $y=ax+1$이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$2=-a+1 \quad \therefore a=-1$

직선 $y=2x+b$가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$2=-2+b \quad \therefore b=4$

$\therefore ab=-4, a+b=3$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-4x+3$이다.

18 답 $y=2x+1$

직선의 기울기는 $\frac{4}{2}=2$이고, 점 $(1, 3)$을 지나므로

구하는 직선의 방정식은

$y-3=2(x-1)$

$\therefore y=2x+1$

19 답 $y=-2x+9$

두 점 $(-3, 2)$, $(7, 8)$을 이은 선분의 중점, 즉

$\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{2+8}{2}\right)=(2, 5)$를 지나고 기울기가 -2인

직선의 방정식은

$y-5=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x+9$

20 답 ④

x축의 양의 방향과 $45°$의 각을 이루면 직선의 기울기는

$\tan 45°=1$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-2=x-1$

$\therefore y=x+1$

심플 정리

[특수한 삼각비]

A	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	없음

21 답 ①

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $30°$이므로

직선의 기울기는 $\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이고, 점 $(1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

$x-\sqrt{3}y-1=0$

$\therefore a=1, b=-\sqrt{3} \Rightarrow ab=-\sqrt{3}$

22 답 ①

$\tan 60°=\sqrt{3}$이므로 직선 $\sqrt{3}x+ay+b=0$에서

$-\frac{\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}$

$\therefore a=-1$

따라서 직선 $\sqrt{3}x-y+b=0$이 점 $(\sqrt{3}, -1)$을 지나므로

$3+1+b=0$

$\therefore b=-4$

$\therefore a+b=-5$

23 답 ④

두 점 $(-1, 3)$, $(4, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-2-3}{4-(-1)}(x+1)$

$\therefore y=-x+2$

$\therefore a=-1, b=2 \Rightarrow a+b=1$

24 답 ③

두 점 $A(0, 2)$, $B(-1, 2)$는 y좌표가 같다.

$\therefore y=2$

25 답 ⑤

x절편이 -4이므로 구하는 직선은 두 점 $(-3, 2)$, $(-4, 0)$을 지난다.

구하는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{0-2}{-4-(-3)}\{x-(-3)\}$

$\therefore y=2x+8$

이 직선이 점 $(1, a)$를 지나므로

$a=2\times1+8=10$

26 답 ⑤

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right)=(3, -1)$

두 점 $(3, -1)$, $(2, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{4-(-1)}{2-3}(x-2)$

$\therefore y=-5x+14$

따라서 y절편은 14이다.

27 답 ①

x절편이 -1, y절편이 2인 직선의 방정식은

$\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}=1$

이 직선이 점 $(a, 4a+2)$를 지나므로

$-a+\frac{4a+2}{2}=1$

$-a+2a+1=1$

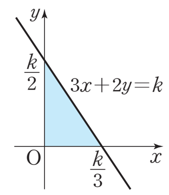
$\therefore a=0$

28 답 ④

$3x+2y=k$에서 x절편은 $\frac{k}{3}$, y절편은 $\frac{k}{2}$이다.

오른쪽 그림에서

삼각형의 넓이가 3이므로



$\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{3}\cdot\frac{k}{2}=3$, $k^2=36$

$\therefore k=6$ ($\because k>0$)

29 답 $a=4$, $b=2$

직선의 방정식 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$ ⋯ ㉠

두 좌표축과 직선이 이루는 삼각형의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}ab=4$

$ab=8$ ⇨ $\frac{1}{b}=\frac{a}{8}$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{a}+\frac{a}{8}=1$

$a^2-8a+16=0$

$(a-4)^2=0$

$\therefore a=4$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=2$

30 답 ③

세 점이 한 직선 위에 있으므로 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같다.

(직선 AB의 기울기)$=\frac{5-1}{2-(-1)}=\frac{4}{3}$

(직선 AC의 기울기)$=\frac{a-1}{8-(-1)}=\frac{a-1}{9}$

$\frac{4}{3}=\frac{a-1}{9}$, $3(a-1)=36$

$\therefore a=13$

31 답 ③

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 한다.

(직선 AB의 기울기)$=\frac{2-4}{-1-a}$ ⋯ ㉠

(직선 BC의 기울기)$=\frac{-2-2}{-a-(-1)}$

즉, $\frac{2-4}{-1-a}=\frac{-2-2}{-a-(-1)}$ ⇨ $\frac{2}{a+1}=\frac{4}{a-1}$

$2a-2=4+4a$ $\qquad\therefore a=-3$

이것을 ㉠에 대입하면 직선 l의 기울기는 -1이다.

직선 l은 기울기가 -1이고, 점 B$(-1, 2)$를 지나므로

$y-2=-(x+1)$

$\therefore y=-x+1$

32 답 ④

세 점 A$(4, 1)$, B$(-1+a, 4)$, C$(8, a)$가 한 직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같다.

$\frac{4-1}{-1+a-4}=\frac{a-4}{8-(-1+a)}$

$\frac{3}{a-5}=\frac{a-4}{9-a}$

$27-3a=a^2-9a+20$

$a^2-6a-7=0$

$(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$

따라서 모든 a의 값의 합은 $(-1)+7=6$이다.

33 답 ①

점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 변 BC의 중점 M을 지난다.

M$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-5+7}{2}\right)=M(2, 1)$

구하는 직선은 두 점 A$(-1, -1)$, M$(2, 1)$을 지나므로

$y-(-1)=\frac{1-(-1)}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

$\therefore m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{1}{3}$ ⇨ $m+n=\frac{1}{3}$

TIP

도형의 넓이를 이등분하는 직선을 알아 두면 유용하게 써먹을 수 있다.
원의 중심을 지나는 직선, 삼각형의 중선을 지나는 직선, 평행사변형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선 등을 기억하자.

34 답 ④

직선 $y=mx-m-2=m(x-1)-2$ ⋯ ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1, -2)$를 지나므로 점 A를 지난다.

주어진 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 직선이 $\overline{\text{BC}}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{\text{BC}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{7+3}{2}, \frac{4+6}{2}\right)$, 즉 $(5, 5)$

이것을 ㉠에 대입하면

$5=m(5-1)-2$ $\qquad\therefore m=\frac{7}{4}$

다른 풀이

삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은 삼각형의 무게중심을 지난다.

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{1+7+3}{3}, \frac{-2+4+6}{3}\right)=\left(\frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$이므로

$y=mx-m-2$에 대입하면 $\frac{8}{3}=\frac{11}{3}m-m-2$

$\frac{8}{3}m=\frac{14}{3}$ $\qquad\therefore m=\frac{7}{4}$

답_094112심플자이고등(S~V).indd 105 2017. 9. 15. 오후 5:46

35 답 ①

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)=(3, 2)$

따라서 두 점 $(0, 0)$, $(3, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{2-0}{3-0}x \qquad \therefore y=\frac{2}{3}x$

36 답 ②

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때, $ab>0$, $bc<0$이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$

직선 $ax+by+c=0$의 기울기는 음수이고 y절편이 양수이므로 직선의 개형은 ②이다.

37 답 ③

직선 $ax+by+1=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}$의 기울기는 양수이고 y절편은 음수이므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{1}{b}<0$

$\therefore a<0$, $b>0$

직선 $x+ay-b=0$에서 $y=-\frac{1}{a}x+\frac{b}{a}$이므로

이 직선의 기울기는 $-\frac{1}{a}>0$이고 y절편은 $\frac{b}{a}<0$이다.

따라서 이 직선의 개형은 ③이다.

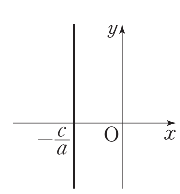
38 답 ③

$bc=0$에서 $b=0$ 또는 $c=0$

그런데 $ac>0$이므로 $c\neq0$

$\therefore b=0$

$ax+by+c=0$에서 $x=-\frac{c}{a}$



이때, $-\frac{c}{a}<0$이므로 주어진 직선은 제2, 3사분면을 지난다.

39 답 ④

두 직선이 만나지 않으려면 두 직선이 평행해야 하므로 두 직선의 기울기는 같고, y절편이 다르다.

$x+2y+1=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이므로

기울기는 $-\frac{1}{2}$, y절편은 $-\frac{1}{2}$

① $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ ← 기울기 $\frac{1}{2}$, y절편 $-\frac{3}{2}$

② $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ ← 기울기 $\frac{1}{2}$, y절편 $\frac{1}{4}$

③ $y=-2x-1$ ← 기울기 -2, y절편 -1

④ $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$ ← 기울기 $-\frac{1}{2}$, y절편 $-\frac{5}{4}$

⑤ $y=-2x-\frac{3}{2}$ ← 기울기 -2, y절편 $-\frac{3}{2}$

따라서 직선 $x+2y+1=0$과 만나지 않는 직선은 ④이다.

40 답 ④

두 직선 $ax+y+3=0$, $2x+by-3=0$이 평행하므로

$\frac{a}{2}=\frac{1}{b}\neq\frac{3}{-3}$

$\therefore ab=2$

41 답 ①

두 직선 $3x+y-2=0$, $2x+ay-3=0$이 평행해야 하므로

$\frac{3}{2}=\frac{1}{a}\neq\frac{-2}{-3} \qquad \therefore a=\frac{2}{3}$

42 답 $y=3x-24$

두 점 $(4, 1)$, $(3, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{-2-1}{3-4}(x-4)$

$y=3(x-4)+1$

$\therefore y=3x-11$

이 직선과 평행하므로 기울기는 3, x절편이 8이므로

점 $(8, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=3(x-8)=3x-24$

43 답 ②

두 직선 $y=(k-2)x+1$, $y=kx+3$이 수직이므로 기울기의 곱이 -1이다.

$(k-2)k=-1$

$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

$\therefore k=1$

44 답 ②

두 직선 $ax+2y+1=0$, $ax-8y-2=0$이 서로 수직이므로

$a\times a+2\times(-8)=0$, $a^2=16$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

45 답 ⑤

(직선 AB의 기울기)$=\frac{5-2}{4-3}=3$

(직선 BC의 기울기)$=\frac{a-1-5}{a+2-4}=\frac{a-6}{a-2}$

두 직선이 수직이어야 하므로

$3\times\frac{a-6}{a-2}=-1$

$3a-18=-a+2$

$\therefore a=5$

46 답 ④

두 점 $A(2, 3)$, $B(-2, 5)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{5-3}{-2-2}=-\frac{1}{2}$

$\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 2이다.

또, $\overline{AB}$의 수직이등분선은 $\overline{AB}$의 중점 $\left(\frac{2-2}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$, 즉 $(0, 4)$를 지나므로 수직이등분선의 방정식은

$y-4=2(x-0)$ $\therefore y=2x+4$

47 답 ①

직선 AB의 기울기는 $\frac{5-3}{3-1}=1$이므로 수직이등분선의 기울기는 -1이다.

또, $\overline{AB}$의 수직이등분선은 $\overline{AB}$의 중점 $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$, 즉 $(2, 4)$를 지나므로 수직이등분선의 방정식은

$y-4=-(x-2)$ $\therefore y=-x+6$

따라서 수직이등분선이 y축과 만나는 점의 y좌표는 6이다.

48 답 ②

두 점 $A(2, 3)$, $B(-2, -1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-3}{-2-2}=1$이므로 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 -1

또, $\overline{AB}$의 수직이등분선은 $\overline{AB}$의 중점 $\left(\frac{2-2}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$, 즉 $(0, 1)$을 지나므로 수직이등분선의 방정식은

$y-1=-(x-0)$ $\therefore y=-x+1$

$\therefore m=-1, n=1 \Rightarrow mn=-1$

49 답 ①

주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면

직선 $kx+y=-4$가 두 직선 $3x+y=8$, $2x-y=7$의 교점을 지나야 한다.

$3x+y=8$과 $2x-y=7$을 연립하여 풀면

$x=3, y=-1$

즉, 두 직선 $3x+y=8$, $2x-y=7$의 교점의 좌표는 $(3, -1)$이다.

따라서 직선 $kx+y=-4$가 점 $(3, -1)$을 지나야 하므로

$3k-1=-4$ $\therefore k=-1$

심플 정리

[세 직선의 위치 관계]

세 직선은 다음의 위치 관계 중 하나이다.

(1) 세 직선 중 평행한 직선이 없고, 한 점에서 만나지 않는다. 즉, 세 직선으로 삼각형이 만들어진다.

(2) 세 직선이 한 점에서 만난다. 즉, 두 직선의 교점을 다른 직선이 지난다.

(3) 세 직선 중 두 직선이 평행하다. 두 직선의 기울기가 같고, 다른 한 직선의 기울기는 다르다.

(4) 세 직선이 모두 평행하다. 세 직선의 기울기가 모두 같다.

50 답 ①

세 직선

$$\begin{cases} x+2y+3=0 & \cdots ㉠ \\ 4x-3y-12=0 & \cdots ㉡ \\ ax+y+1=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

중 어느 두 직선이 서로 수직이어야 한다.

직선 ㉠, ㉡, ㉢의 기울기가 각각 $-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -a$이므로

㉠, ㉡은 서로 수직이 아니다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 수직일 때

$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-a)=-1$ $\therefore a=-2$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 수직일 때

$\frac{4}{3}\cdot(-a)=-1$ $\therefore a=\frac{3}{4}$

(i), (ii)에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은

$-2+\frac{3}{4}=-\frac{5}{4}$

51 답 ④

세 직선

$$\begin{cases} x-2y=-3 & \cdots ㉠ \\ 2x+y=4 & \cdots ㉡ \\ ax+y=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

이 삼각형을 이루지 못하는 경우는

(i) ㉠과 ㉢이 평행할 때

$\frac{1}{a}=\frac{-2}{1}$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$

(ii) ㉡과 ㉢이 평행할 때

$\frac{2}{a}=\frac{1}{1}$ $\therefore a=2$

(iii) ㉢이 ㉠과 ㉡의 교점을 지날 때

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1, y=2$

즉, ㉠과 ㉡의 교점의 좌표는 $(1, 2)$이다.

직선 $ax+y=0$이 점 $(1, 2)$를 지나야 하므로

$a+2=0$ $\therefore a=-2$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-\frac{1}{2}+2-2=-\frac{1}{2}$

52 답 ②

두 직선 $x-y+1=0$, $3x+y-5=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x-y+1)+k(3x+y-5)=0$ (단, k는 $k\neq0$인 실수) $\cdots ㉠$

직선 ㉠이 점 $(4, 3)$을 지나므로

$10k+2=0$ $\therefore k=-\frac{1}{5}$

$k=-\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x-3y+5=0$

$\therefore m=1, n=-3 \Rightarrow mn=-3$

53 답 ④

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(4x-4y+7)+k(x-2y+2)=0$ (단, k는 $k\neq0$인 실수) … ㉠

직선 ㉠이 점 $(3, -2)$를 지나므로

$27+9k=0$

$\therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$4x-4y+7-3(x-2y+2)=0$

$\therefore l : x+2y+1=0$

따라서 직선 l이 점 $(-9, a)$를 지나므로

$-9+2a+1=0$

$\therefore a=4$

54 답 ①

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(2x+6y-3)+k(2x-3y+9)=0$ (단, k는 $k\neq0$인 실수)

$\therefore (2k+2)x+(-3k+6)y+9k-3=0$ … ㉠

직선 ㉠과 직선 $3x+y-1=0$이 수직이므로

$(2k+2)\times3+(-3k+6)\times1=0$

$3k+12=0 \qquad \therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$-6x+18y-39=0$

$\therefore 2x-6y+13=0$

따라서 $a=2$, $b=-6$이므로

$a+b=-4$

Simple V 점과 직선 사이의 거리

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 158～159

01 답 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

02 답 $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

03 답 직선

04 답 AB, $\dfrac{1}{2}ah$

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ×

08 답 ○

09 답 (1) $\sqrt{5}$ (2) $2\sqrt{13}$ (3) $\sqrt{5}$ (4) $2\sqrt{10}$

(1) $\dfrac{|1\cdot1-2\cdot2-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(2) $\dfrac{|3\cdot(-4)-2\cdot5-4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{26}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}$

(3) $\dfrac{|2\cdot2-1\cdot3+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(4) 점 $(2, -4)$와 직선 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$, 즉

$x+3y-10=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1\cdot2+3\cdot(-4)-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$

10 답 (1) $\sqrt{2}$ (2) $\dfrac{6}{5}$ (3) 1

(1) $\dfrac{|10|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{50}}=\dfrac{10}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{|6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{5}$

(3) 원점과 직선 $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}$, 즉

$4x-3y+5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{5}{5}=1$

11 답 (1) 3 (2) 9

(1) $|4-1|=3$

(2) $|7-(-2)|=9$

12 답 (1) $\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{13}$ (4) 2

(1) 직선 $y=x+1$ 위의 점 $(0, 1)$과 직선 $x-y+3=0$

사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|-1+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

(2) 직선 $2x+y-3=0$ 위의 점 $(0, 3)$과

직선 $2x+y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|3+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(3) 직선 $3x-2y+6=0$ 위의 점 $(0, 3)$과

직선 $3x-2y+19=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|-6+19|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

(4) 직선 $3x+4y=0$ 위의 점 $(0, 0)$과

직선 $3x+4y-10=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

13 답 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $x-y-4=0$ (3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (4) 3

(1) $\overline{BC}=\sqrt{(4-2)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{2}$

(2) 직선 BC의 방정식은

$y-0=\frac{0+2}{4-2}(x-4)$, $y=x-4$

$\therefore x-y-4=0 \cdots ㉠$

(3) 점 A(3, 2)와 직선 ㉠ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|3-2-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(4) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=3$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 160~161

14 답 ②

점 $(1, -2)$와 직선 $5x+12y+6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5\times1+12\times(-2)+6|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{13}{13}=1$

15 답 ④

점 $(1, 5)$를 지나고, 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y-5=\frac{1}{2}(x-1)$, $x-2y+9=0$

원점과 직선 $x-2y+9=0$ 사이의 거리는

$\frac{|9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{9}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$

16 답 ②

점 $(5, 3)$에서 직선 $3x+my-17=0$에 이르는 거리가 2이므로

$\frac{|15+3m-17|}{\sqrt{3^2+m^2}}=2$

$\frac{|3m-2|}{\sqrt{9+m^2}}=2$

$|3m-2|=2\sqrt{9+m^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$9m^2-12m+4=4(9+m^2)$

$5m^2-12m-32=0$

$(5m+8)(m-4)=0$

$\therefore m=-\frac{8}{5}$ 또는 $m=4$

따라서 m은 정수이므로 $m=4$이다.

17 답 ②

두 직선이 평행하므로 직선 $x-y+1=0$ 위의 점 $(0, 1)$에서 직선 $x-y-3=0$에 이르는 거리가 두 직선 사이의 거리이다.

$\therefore \frac{|-1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

18 답 ④

두 직선이 평행하므로 직선 $2x+y+1=0$ 위의 한 점 $(0, -1)$과 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$이므로

$\frac{|0+(-1)+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=4\sqrt{5}$

$|k-1|=20$

$k-1=\pm20$

$\therefore k=21$ 또는 $k=-19$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $21-19=2$이다.

19 답 ②

두 직선 $3x+y-8=0$, $mx+(m-4)y+4=0$이 평행하므로

$\frac{m}{3}=\frac{m-4}{1}\neq\frac{4}{-8}$

$3m-12=m$

$2m=12 \quad \therefore m=6$

따라서 두 직선의 방정식은

$3x+y-8=0$, $3x+y+2=0$이므로

직선 $3x+y+2=0$ 위의 한 점 $(0, -2)$와

직선 $3x+y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot0-2-8|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

다른 풀이

$mx+(m-4)y+4=0$에서

$m(x+y)-4y+4=0$

이 직선은 m의 값에 관계없이 점 $(-1, 1)$을 지난다.

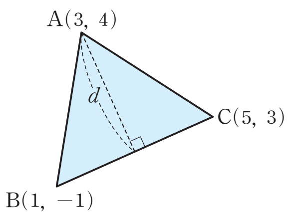
따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 점 $(-1, 1)$과 직선 $3x+y-8=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-3+1-8|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

20 답 ②

$\overline{BC}=\sqrt{(5-1)^2+(3+1)^2}=4\sqrt{2}$

직선 BC의 방정식은



$y+1=\frac{3+1}{5-1}(x-1)$

$y=x-2$

$\therefore x-y-2=0 \cdots ㉠$

점 A(3, 4)와 직선 ㉠ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|3-4-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$

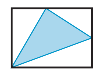
$=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot d$

$=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=6$

TIP

세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이는 이 해설처럼 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 높이를 구하고, 두 점 사이의 거리를 구하여 밑변의 길이를 알면 구해진다. 좀 더 일반적으로 넓이를 구하는 방법은 그림과 같이 좌표평면 위에 한 꼭짓점을 공유하고 삼각형을 둘러싼 직사각형을 그려서 직사각형의 넓이에서 직각삼각형 3개의 넓이를 빼서 구하는 방법을 이용한다.



21 답 ③

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-3,\ -2)$ 사이의 거리는

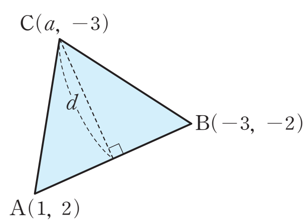
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-3-1)^2+(-2-2)^2}=4\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은

$y+2=\dfrac{2-(-2)}{1-(-3)}(x+3)$

$y=x+1$

$\therefore\ x-y+1=0$



점 $\mathrm{C}(a,\ -3)$과 직선 AB 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|a+3+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|4+a|}{\sqrt{2}}$

△ABC의 넓이가 16이므로 $\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot d=16$

$\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot\dfrac{|4+a|}{\sqrt{2}}=16$

$|4+a|=8,\ 4+a=\pm8$

$\therefore\ a=4$ 또는 $a=-12$

따라서 양수 a의 값은 4이다.

22 답 ④

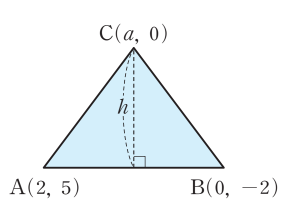
두 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-2)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{53}$

직선 AB의 방정식은

$y+2=\dfrac{-2-5}{0-2}x$

$\therefore\ 7x-2y-4=0$



점 $\mathrm{C}(a,\ 0)$과 직선 AB 사이의 거리를 h라 하면

$h=\dfrac{|7a-4|}{\sqrt{7^2+(-2)^2}}=\dfrac{|7a-4|}{\sqrt{53}}$

△ABC의 넓이가 12이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{53}\cdot\dfrac{|7a-4|}{\sqrt{53}}=12$

$|7a-4|=24,\ 7a-4=\pm24 \Rightarrow a=\dfrac{4\pm24}{7}$

$\therefore\ a=4$ 또는 $a=-\dfrac{20}{7}$

따라서 모든 a의 값의 합은 $4+\left(-\dfrac{20}{7}\right)=\dfrac{8}{7}$

23 답 ④

점 P와 주어진 두 직선 사이의 거리가 같으므로 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\dfrac{|x+2y-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|2x+y+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$|x+2y-2|=|2x+y+2|$

$x+2y-2=\pm(2x+y+2)$

$\therefore\ x-y+4=0$ 또는 $x+y=0$

따라서 원점을 지나는 도형의 방정식은

$x+y=0$

24 답 ③

각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면

점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|x+4y-1|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\dfrac{|4x+y+8|}{\sqrt{4^2+1^2}}$

$|x+4y-1|=|4x+y+8|$

$x+4y-1=\pm(4x+y+8)$

$\therefore\ x-y+3=0$ 또는 $5x+5y+7=0$

따라서 기울기가 양수인 것은 $x-y+3=0$

25 답 ④

두 직선 $x+2y-5=0$, $2x-y-2=0$으로부터 같은 거리에 있는 y축 위의 점을 $(0,\ p)$라 하면

$\dfrac{|2p-5|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{|-p-2|}{\sqrt{4+1}}$

양변을 제곱하여 정리하면

$p^2-8p+7=0$

$(p-1)(p-7)=0$

$\therefore\ p=1$ 또는 $p=7$

따라서 선분 PQ의 길이는 6이다.

연습 문제 [S~V] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 162~163

01 답 ①

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(-2-a)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$(-2-a)^2+4=20,\ a^2+4a-12=0$

$(a+6)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-6$ 또는 $a=2$

$a>0$이므로 $a=2$

심플 정리

[두 점 사이의 거리]

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

02 답 ⑤

점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\sqrt{(a+1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(0-4)^2}$

양변을 제곱하면

$a^2+2a+5=a^2-6a+25$

$8a=20 \quad \therefore a=\frac{5}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$이다.

03 답 ④

두 점 $A(-2, 0)$, $B(0, 6)$을 이은 선분 AB를

$3:k$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times0+k\times(-2)}{3+k}, \frac{3\times6+k\times0}{3+k}\right)=\left(\frac{-2k}{3+k}, \frac{18}{3+k}\right)$

이 점이 직선 $x+2y=4$ 위에 있으므로

$\frac{-2k}{3+k}+2\times\frac{18}{3+k}=4$

$-2k+36=4(3+k)$

$6k=24 \quad \therefore k=4$

심플 정리

[좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점]

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 하면

(1) $P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

(2) $Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)

04 답 2

삼각형 OAB가 정삼각형이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}$

(i) $\overline{OA}=\overline{OB}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$이므로

$4^2+0^2=a^2+(2\sqrt{3})^2$

$a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(ii) $\overline{OA}=\overline{AB}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{AB}^2$이므로

$4^2+0^2=(a-4)^2+(2\sqrt{3}-0)^2$

$a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=6$

(i), (ii)에서 공통으로 만족하는 a의 값은 2이다.

05 답 ③

꼭짓점 B, C의 좌표를 각각 (a_1, b_1), (a_2, b_2)라 하자.

두 점 M, N은 두 변 AB, AC의 중점이므로

$1+a_1=2x_1$, $1+a_2=2x_2$이고

$6+b_1=2y_1$, $6+b_2=2y_2$

$x_1+x_2=2$, $y_1+y_2=4$이므로

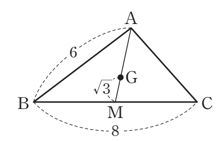
$a_1+a_2=2$, $b_1+b_2=-4$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+a_1+a_2}{3}, \frac{6+b_1+b_2}{3}\right)=\left(1, \frac{2}{3}\right)$

06 답 ⑤

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{GM}=\sqrt{3}$이고, 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심일 때, $\overline{AC}$의 길이는?



① 무게중심의 성질을 이용하라는 거야.
② $\overline{AM}$은 중선이므로 중선정리를 떠올려보자.

① 5 ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ 6 ⑤ $5\sqrt{2}$

1st 삼각형의 무게중심은 꼭짓점에서 마주 보는 변의 중점을 이은 선분을 2 : 1로 내분하는 점이야.

점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

점 M은 선분 BC의 중점이다. 삼각형의 무게중심은 각 변의 중점을 마주 보는 꼭짓점과 연결한 선이 만나는 점이야.

또, $\overline{AG}:\overline{GM}=2:1$ 이고, $\overline{GM}=\sqrt{3}$이므로

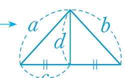
$\overline{AG}=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AM}=\overline{AG}+\overline{GM}=3\sqrt{3}$

또, $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=4$

2nd $\overline{BM}=\overline{MC}$이므로 삼각형의 중선정리를 이용하자.

삼각형의 중선정리에 의하여



에서 $a^2+b^2=2(c^2+d^2)$

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

$6^2+\overline{AC}^2=2\{(3\sqrt{3})^2+4^2\}$

$36+\overline{AC}^2=86 \Rightarrow \overline{AC}^2=50$

$\therefore \overline{AC}=5\sqrt{2}$ ($\because \overline{AC}>0$)

07 답 ③

사각형 ABCD가 평행사변형이므로 두 대각선의 중점은 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+ab}{2}, \frac{5+1}{2}\right)=\left(\frac{ab-2}{2}, 3\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{a+b}{2}\right)=\left(2, \frac{a+b}{2}\right)$

두 점 $\left(\frac{ab-2}{2}, 3\right)$과 $\left(2, \frac{a+b}{2}\right)$는 일치하므로

$$\begin{cases} \frac{ab-2}{2}=2 \Rightarrow ab=6 \\ 3=\frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b=6 \end{cases}$$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$\qquad =6^2-2\cdot6=24$

08 답 P(1, 1)

좌표평면 위의 점을 P(a, b)라 하면

세 점 A(1, 2), B(3, 1), C(-1, 0)에 대하여

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(a-1)^2+(b-2)^2+(a-3)^2+(b-1)^2+(a+1)^2+(b-0)^2$

$=3a^2-6a+3b^2-6b+16$

$=3(a-1)^2+3(b-1)^2+10$

따라서 $a=1$, $b=1$,즉 P(1, 1)일 때,

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은 10이다.

09 답 3

두 점 (-2, -3), (2, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\dfrac{5-(-3)}{2-(-2)}(x-2)$

$y-5=2(x-2)$

$\therefore y=2x+1$

이 직선이 점 $(a, 7)$을 지나므로

$7=2a+1$

$\therefore a=3$

10 답 ⑤

직선 $y=2x-1$에 평행한 직선의 기울기는 2이므로

점 (-1, 0)을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y-0=2(x+1)$ $\quad\therefore y=2x+2$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $ab=4$

11 답 ④

> 좌표평면 위의 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점을 지나고 직선 $x-3y+6=0$에 수직인 직선의 y절편은?
>
> ① 두 직선의 교점은 연립하여 풀면 돼.
> ② 두 직선의 기울기를 곱한 값이 -1이면 수직으로 만나.
>
> ① $\dfrac{13}{2}$ ② 7 ③ $\dfrac{15}{2}$
>
> ④ 8 ⑤ $\dfrac{17}{2}$

1st 두 직선의 교점을 먼저 구하자.

두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=2$이므로 두 직선의 교점의 좌표는 (2, 2)

2nd 두 직선이 수직이면 기울기의 곱은 항상 -1이야.

직선 $x-3y+6=0$과 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

3rd 기울기와 지나는 한 점을 알면 직선의 방정식을 구할 수 있어.

기울기가 -3이고 점 (2, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-3(x-2)$

$\therefore y=-3x+8$

점 (x_1, y_1)을 지나고, 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

따라서 y절편은 8이다.

다른 풀이

두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x-2y+2+k(2x+y-6)=0$ (단, k는 $k\neq0$인 실수)

$(1+2k)x+(-2+k)y+2-6k=0$ ⋯ ㉠

직선 ㉠과 직선 $x-3y+6=0$이 수직이므로

$(1+2k)-3(-2+k)=0$ ⇨ $k=7$

구하는 직선의 방정식은 $k=7$을 ㉠에 대입하면 되므로

$3x+y-8=0$

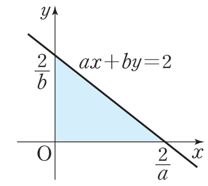
따라서 y절편은 8이다.

12 답 2

직선 $ax+by=2$ ⇨ $\dfrac{x}{\frac{2}{a}}+\dfrac{y}{\frac{2}{b}}=1$의 x절편과 y절편은

각각 $\dfrac{2}{a}$, $\dfrac{2}{b}$이다.

좌표평면 위에 나타내면



삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{a}\cdot\dfrac{2}{b}=1$

$\therefore ab=2$

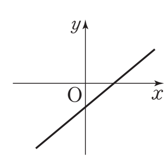
13 답 ④

$ax+by+c=0$에서 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

$ab<0$에서 $\dfrac{a}{b}<0$ $\quad\therefore -\dfrac{a}{b}>0$

$bc>0$에서 $\dfrac{c}{b}>0$

$\therefore -\dfrac{c}{b}<0$



따라서 기울기는 양수, y절편은 음수이므로 주어진 직선은 제1, 3, 4사분면을 지난다.

14 답 ③

> 두 직선
>
> l : $ax-y+a+2=0$
>
> m : $4x+ay+3a+8=0$
>
> 에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.)
>
> [보기]
>
> ㄱ. $a=0$일 때, 두 직선 l과 m은 서로 수직이다.
>
> ㄴ. 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 (1, 2)를 지난다. a에 관하여 정리하자.
>
> ㄷ. 두 직선 l과 m이 평행이 되기 위한 a의 값은 존재하지 않는다. 평행한 두 직선의 기울기는 같아.
>
> ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
>
> ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st $a=0$을 대입하여 두 직선 l, m이 수직인지 따지자.

ㄱ. $a=0$일 때, $l : y=2$, $m : x=-2$

x축과 y축은 수직으로 만나지?
직선 l과 m은 각각 x축과 y축에 평행하니까 수직으로 만나.

즉, 두 직선 l과 m은 서로 수직이다. (참)

2nd 직선 l을 a에 관하여 정리하여 a에 대한 항등식으로 풀자.

ㄴ. a에 관하여 정리하면 $a(x+1)-y+2=0$이므로 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$를 지난다.

a에 대한 항등식이야.

(거짓)

3rd 두 직선 l, m의 기울기가 같도록 하는 실수 a가 존재하는지 알아보자.

ㄷ. $a=0$일 때, ㄱ에서 두 직선은 서로 수직이다.

$a\neq0$일 때, 두 직선 l, m의 기울기는 각각 a, $-\frac{4}{a}$이다.

이때, $a=-\frac{4}{a}$ ⇨ $a^2=-4$를 만족하는 실수 a의 값은 존재하지 않으므로 두 직선이 평행이 되기 위한 a의 값은 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

15 답 3

$$f(k)=\frac{|2k+1-2k+2|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{k^2+1}} \quad \cdots \text{I}$$

$\sqrt{k^2+1}$이 최솟값을 가질 때, 즉 $k=0$일 때

$f(k)$가 최대이므로 구하는 최댓값은 $f(0)=3$ $\quad\cdots$ Ⅱ

[채점 기준표]

Ⅰ	점과 직선 사이의 거리 $f(k)$를 구한다.	50%
Ⅱ	$f(k)$가 최대가 되기 위한 k의 값을 구하여 $f(x)$의 최댓값을 구한다.	50%

Simple W 원의 방정식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 164~165

01 답 $x^2+y^2=r^2$

02 답 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$, $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

03 답 a, a

04 답 ×

05 답 ○

06 답 ○

07 답 (1) $x^2+y^2=1$ (2) $x^2+(y+1)^2=4$
(3) $(x-3)^2+y^2=1$ (4) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$
(5) $(x+1)^2+(y+3)^2=16$

08 답 (1) 중심의 좌표 : $(0, 0)$, 반지름의 길이 : 2
(2) 중심의 좌표 : $(2, 0)$, 반지름의 길이 : 3
(3) 중심의 좌표 : $(0, -1)$, 반지름의 길이 : 5
(4) 중심의 좌표 : $(2, -1)$, 반지름의 길이 : 4

09 답 (1) 중심의 좌표 : $(-2, 0)$, 반지름의 길이 : 2
(2) 중심의 좌표 : $(3, 1)$, 반지름의 길이 : 2

(1) $x^2+y^2+4x=0$에서 $(x+2)^2+y^2=4$
중심의 좌표는 $(-2, 0)$, 반지름의 길이는 2이다.

(2) $x^2+y^2-6x-2y+6=0$에서 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$
중심의 좌표는 $(3, 1)$, 반지름의 길이는 2이다.

10 답 (1) $a<5$ (2) $a>2$ (3) $a<4$ (4) $a<4$

(1) 방정식 $x^2+y^2-4x-2y+a=0$을 변형하면
$(x-2)^2+(y-1)^2=5-a$
이 방정식이 원을 나타내려면
$5-a>0$ $\quad\therefore a<5$

(2) 방정식 $x^2+y^2+2x+3-a=0$을 변형하면
$(x+1)^2+y^2=a-2$
이 방정식이 원을 나타내려면
$a-2>0$ $\quad\therefore a>2$

(3) 방정식 $x^2+y^2+2y+a-3=0$을 변형하면
$x^2+(y+1)^2=4-a$
이 방정식이 원을 나타내려면
$4-a>0$ $\quad\therefore a<4$

(4) 방정식 $x^2+y^2+6x-4y+a+9=0$을 변형하면
$(x+3)^2+(y-2)^2=4-a$
이 방정식이 원을 나타내려면
$4-a>0$ $\quad\therefore a<4$

11 답 (1) $(x-2)^2+(y+1)^2=1$
(2) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

(1) x축에 접하므로 반지름의 길이는 중심의 y좌표의 절댓값인 1이다.
$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=1$

(2) y축에 접하므로 반지름의 길이는 중심의 x좌표의 절댓값인 2이다.
$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=4$

12 답 (1) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$
(2) $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

(1) x축에 접하므로 반지름의 길이는 중심의 y좌표의 절댓값인 3이다.
$\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=9$

(2) y축에 접하므로 반지름의 길이는 중심의 x좌표의 절댓값인 2이다.
$\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=4$

13 답 $(x+3)^2+(y+3)^2=9$

x축, y축에 동시에 접하므로 반지름의 길이는 3이다.

$\therefore (x+3)^2+(y+3)^2=9$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 166~171

14 답 ③

원의 반지름의 길이를 r라고 하면 점 $(-2,\ 1)$을 중심으로 하는 원이므로

$(x+2)^2+(y-1)^2=r^2$

이 원이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$(0+2)^2+(3-1)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=8$

$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=8$

15 답 ②

선분 AB의 중점이 원의 중심이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{1+9}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 5)$

$\therefore a=1,\ b=5$

또, 선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2+(9-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot 10=5$

$\therefore r=5$

$\therefore a+b+r=1+5+5=11$

16 답 $\sqrt{10}$

원의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ a-1)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\sqrt{(a+1)^2+(a+3)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(a-1)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+2a+1+a^2+6a+9=a^2-6a+9+a^2-2a+1$

$16a=0 \qquad \therefore a=0$

따라서 원의 중심은 $\mathrm{C}(0,\ -1)$이므로 원의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

17 답 ④

원의 중심인 점 $(a,\ b)$는 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로

$b=2a+1$

구하는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-2a-1)^2=r^2$으로 놓으면 이 원이 두 점 $(0,\ 2)$, $(2,\ 2)$를 지나므로

$(0-a)^2+(2-2a-1)^2=r^2$에서

$5a^2-4a+1=r^2$ ⋯ ㉠

$(2-a)^2+(2-2a-1)^2=r^2$에서

$5a^2-8a+5=r^2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=3,\ r^2=2$

$\therefore a+b+r^2=6$

18 답 ⑤

$x^2+y^2-4x+ay+4=0$에서

$(x-2)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$

이때, 원의 중심의 좌표가 $(b,\ -2)$이므로

$2=b,\ -\frac{a}{2}=-2$

$\therefore a=4,\ b=2$

따라서 $r=\sqrt{\frac{a^2}{4}}=\frac{4}{2}=2$이므로

$a\times b\times r=16$

19 답 ③

$x^2+y^2-6x+4y-3=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2=16$

따라서 중심의 좌표는 $(3,\ -2)$, 반지름의 길이는 4이므로

$a=3,\ b=-2,\ r=4$

$\therefore a-b+r=9$

20 답 ④

$x^2+y^2-4y=0$에서 $x^2+(y-2)^2=4$

두 원의 중심의 좌표는 각각 $(0,\ 2)$, $(a,\ b)$이고 중심이 같으므로

$a=0,\ b=2 \qquad \therefore a+b=2$

21 답 ②

원의 반지름의 길이를 r라고 하면 중심의 좌표가 $(-4,\ 2)$이므로

$(x+4)^2+(y-2)^2=r^2$

이 식을 전개하여 정리하면

$x^2+y^2+8x-4y+20-r^2=0$

이 식은 $x^2+y^2+2ax-ay+4a=0$과 일치하므로

$a=4$

$4a=20-r^2$에 $a=4$를 대입하면

$16=20-r^2,\ r^2=4$

$\therefore r=2\ (\because r>0)$

따라서 반지름의 길이는 2이다.

22 답 ④

방정식 $x^2+y^2+6x-4y+k+10=0$에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=3-k$

이 방정식이 원을 나타내려면

$3-k>0 \qquad \therefore k<3$

따라서 정수 k의 최댓값은 2이다.

다른 풀이

$x^2+y^2+6x-4y+10+k=0$이 원이 되려면

$6^2+(-4)^2-4(10+k)>0$

$36+16-40-4k>0$

$12-4k>0 \qquad \therefore k<3$

TIP

원이 되는 조건을 구할 때, $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ 꼴로 변형해서 $k>0$인 조건을 일반적으로 쓰고 다른 풀이 처럼 $A^2+B^2-4C>0$을 이용하는 방법은 자주 쓰이지 않는다. 기억해 두면 좋지만 잘 잊게 되기 때문에 본 풀이의 과정을 기억하고 있자.

23 답 ②

$x^2+y^2-4x-6y+k-3=0$에서

$(x-2)^2+(y-3)^2=16-k$

이 방정식이 원을 나타내므로

$16-k>0 \qquad \therefore k<16$

따라서 정수 k의 최댓값은 15이다.

24 답 ④

방정식 $x^2+y^2-4ax-2ay+5=0$을 변형하면

$(x-2a)^2+(y-a)^2=5(a^2-1)$

이 방정식이 원을 나타내려면

$a^2-1>0$, $(a+1)(a-1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>1$

25 답 ②

$x^2+y^2+2ky-5k^2-6k-4=0$에서

$x^2+(y+k)^2=6k^2+6k+4$

이 원의 반지름의 길이가 2 이하이려면

$0<6k^2+6k+4\le 4$

(i) $0<6k^2+6k+4$에서

$6\left(k^2+k+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+4=6\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$

즉, 모든 실수 k에 대하여 성립한다. ⋯ ㉠

(ii) $6k^2+6k+4\le 4$에서 $k^2+k\le 0$

$k(k+1)\le 0$

$\therefore -1\le k\le 0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-1\le k\le 0$

26 답 ③

원의 방정식 $x^2+y^2+Ax+By-3=0$에 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$\begin{cases}-A-2B+2=0\\ B-2=0\\ 3A+6=0\end{cases}$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$A=-2$, $B=2$

$\therefore A+B=-2+2=0$

27 답 ④

원점을 지나는 외접원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By=0$으로 놓으면 외접원이 삼각형 OAB의 꼭짓점 A, B를 지나므로

$$\begin{cases}1+1+A-B=0\\ 4+1+2A-B=0\end{cases}$$

연립하여 풀면 $A=-3$, $B=-1$

원의 방정식은

$x^2+y^2-3x-y=0$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

따라서 외접원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$이므로

$a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=2$

28 답 5

방정식 $x^2+y^2+ax+by=15$가 나타내는 외접원이 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C를 지나므로

$$\begin{cases}a+2b=10\\ 4a+b=-2\\ 5a-6b=-46\end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=6$

구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-2x+6y-15=0$

$\therefore (x-1)^2+(y+3)^2=25$

따라서 외접원의 반지름의 길이는 5이다.

29 답 ①

원 $x^2+y^2-4x+2y=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=5$

따라서 중심의 좌표가 $(2, -1)$이고, x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|-1|=1$이다.

30 답 ③

원의 중심이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, a+2)$라고 하면 원이 x축에 접하므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-2)^2=(a+2)^2$

이 원이 점 $(-2, 1)$을 지나므로

$(-2-a)^2+(1-a-2)^2=(a+2)^2$

$(a+1)^2=0 \qquad \therefore a=-1$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

31 답 ④

x축에 접하는 원의 중심을 (a, b)라고 하면 $|b|$가 원의 반지름이므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ … ㉠

이 원이 점 $(-1, 1)$을 지나므로

$(1+a)^2+(1-b)^2=b^2$

$a^2+2a-2b+2=0$ … ㉡

또, 원 ㉠이 점 $(-2, 2)$를 지나므로

$(-2-a)^2+(2-b)^2=b^2$

$a^2+4a-4b+8=0$ … ㉢

$2\times$㉡$-$㉢을 하면

$a^2-4=0$ $\quad\therefore a=\pm2$

㉡에서 $a=2$일 때 $b=5$, $a=-2$일 때 $b=1$

따라서 구하는 두 원의 반지름의 길이의 합은

$1+5=6$

32 답 ③

원 $x^2+y^2-2x+4ay+b=0$이 점 $(-3, -4)$를 지나므로

$9+16+6-16a+b=0$

$-16a+b=-31$ … ㉠

원 $x^2+y^2-2x+4ay+b=0$에서

$(x-1)^2+(y+2a)^2=1+4a^2-b$이고, 이 원이 x축에 접하므로 중심의 y좌표의 절댓값과 반지름의 길이가 같다.

즉, $|-2a|=\sqrt{1+4a^2-b}$이므로 양변을 제곱하면

$4a^2=1+4a^2-b$ $\quad\therefore b=1$

㉠에서 $a=2$

$\therefore a+b=3$

33 답 ④

원 $x^2-2x+y^2+4y+10-k^2=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=k^2-5$

이 원이 y축에 접하므로 중심의 x좌표의 절댓값과 반지름의 길이는 같다.

즉, $1=\sqrt{k^2-5}$이므로 $k^2-5=1$, $k^2=6$

$\therefore k=\sqrt{6}$ $(\because k>0)$

34 답 ①

원 $x^2+y^2-4x+ky+9=0$에서

$(x-2)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}-5$이므로 중심의 좌표가

$\left(2, -\frac{k}{2}\right)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{\frac{k^2}{4}-5}$이다.

이때, 이 원의 중심이 제1사분면에 있으므로

$-\frac{k}{2}>0$ $\quad\therefore k<0$

또, 이 원이 y축에 접하므로 $\sqrt{\frac{k^2}{4}-5}=2$

$\frac{k^2}{4}-5=4$, $k^2=36$ $\quad\therefore k=-6$ $(\because k<0)$

35 답 ③

원 $x^2+y^2-2ax-4y+b=0$이 점 $(-3, -1)$을 지나므로

$9+1+6a+4+b=0$

$\therefore 6a+b=-14$ … ㉠

원 $x^2+y^2-2ax-4y+b=0$에서

$(x-a)^2+(y-2)^2=4+a^2-b$

이 원이 y축에 접하므로 중심의 x좌표의 절댓값과 반지름의 길이가 같다.

즉, $|a|=\sqrt{4+a^2-b}$이므로

$a^2=4+a^2-b$ $\quad\therefore b=4$

㉠에서 $a=-3$

$\therefore a+b=1$

36 답 $(x+3)^2+(y+4)^2=9$

원의 넓이가 9π이므로 반지름의 길이는 3이다.

또, 이 원이 점 $(0, -4)$에서 y축에 접하고, 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는

$(-3, -4)$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y+4)^2=9$

37 답 ④

원 $x^2+y^2-2ax+4y+10-b=0$에서

$(x-a)^2+(y+2)^2=a^2+b-6$

이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로 중심의 x좌표와 y좌표의 절댓값과 반지름의 길이가 모두 같다. 즉,

$2=|a|=\sqrt{a^2+b-6}$이므로

$a=2$, $b=6$ $(\because a>0, b>0)$

$\therefore a+b=8$

38 답 ②

점 $(-2, 1)$을 지나고 x축, y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제2사분면에 있어야 하므로 반지름의 길이를 $r(r>0)$라 하면 중심의 좌표는 $(-r, r)$이다.

구하는 원의 방정식을 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$으로 놓으면

이 원이 점 $(-2, 1)$을 지나므로

$(-2+r)^2+(1-r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0$

$(r-1)(r-5)=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=5$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-1, 1)$, $(-5, 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-5+1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$

39 답 ②

중심의 좌표가 $(-2,\ 2)$이고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이는 2이므로 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-2)^2=2^2$

이 원이 점 $(a,\ 4)$를 지나므로

$(a+2)^2+4=4$

$(a+2)^2=0$

$\therefore a=-2$

40 답 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

원의 반지름의 길이를 $r\,(r>0)$라 하면 원이 제1사분면에서 x축, y축에 동시에 접하므로 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이다.

이때, 점 $(r,\ r)$가 직선 $2x+3y=10$ 위에 있으므로

$2r+3r=10 \qquad \therefore r=2$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

41 답 ④

$x^2+y^2-8x+6y+21=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=4$

원점과 원의 중심 $(4,\ -3)$ 사이의 거리는

$\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로 선분 OP의 길이의 최댓값

$M=5+2=7$, 최솟값 $m=5-2=3$

$\therefore M-m=4$

42 답 ③

점 $A(-3,\ 4)$에서 원의 중심인 점 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$이고, 원의 반지름의 길이는 r이므로

선분 AP의 길이의 최댓값은 $5+r$이다.

$\therefore 5+r=8 \Rightarrow r=3$

43 답 ②

$\sqrt{(a-8)^2+(b+6)^2}$은 점 $P(a,\ b)$와 점 $(8,\ -6)$ 사이의 거리와 같다.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 점 $(8,\ -6)$ 사이의 거리는 d는

$d=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로

$10-2\le\sqrt{(a-8)^2+(b+6)^2}\le 10+2$

$\therefore 8\le\sqrt{(a-8)^2+(b+6)^2}\le 12$

따라서 주어진 식의 최댓값과 최솟값의 합은 $12+8=20$이다.

44 답 ②

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=12$이므로

$(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2=12$

$\therefore x^2+y^2=2$

45 답 ④

원 위의 점을 $P(a,\ b)$, 선분 AP의 중점을 $Q(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{4+a}{2},\ y=\dfrac{2+b}{2}$

$\therefore a=2(x-2),\ b=2(y-1)$ ⋯ ㉠

이때, 점 $P(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 위의 점이므로

$a^2+b^2-2a-4b+1=0$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4(x-2)^2+4(y-1)^2-4(x-2)-8(y-1)+1=0$

$x^2+y^2-5x-4y+\dfrac{37}{4}=0$

$\therefore \left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+(y-2)^2=1$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(\dfrac{5}{2},\ 2\right)$이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 원의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot 1=2\pi$

46 답 $(x-2)^2+(y+2)^2=2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$이므로

$x^2+(y+1)^2=(x-1)^2+(y+2)^2+(x-1)^2+(y+1)^2$

$x^2+y^2-4x+4y+6=0$

$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=2$

47 답 ②

점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 S와 $3:1$로 외분하는 점 T를 지름의 양 끝점으로 하는 원이다.

$S\left(\dfrac{3\times2+1\times(-2)}{3+1},\ \dfrac{3\times0+1\times0}{3+1}\right)=S(1,\ 0)$

$T\left(\dfrac{3\times2-1\times(-2)}{3-1},\ \dfrac{3\times0-1\times0}{3-1}\right)=T(4,\ 0)$

원의 중심은 $\overline{ST}$의 중점이므로 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$

반지름의 길이는 $\dfrac{1}{2}\overline{ST}=\dfrac{1}{2}|4-1|=\dfrac{3}{2}$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는

$2\pi\times\dfrac{3}{2}=3\pi$

다른 풀이

주어진 조건에서 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$이므로

$\overline{AP}=3\overline{BP} \qquad \therefore \overline{AP}^2=9\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$(x+2)^2+y^2=9\{(x-2)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-5x+4=0$

$\therefore \left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$

답_113130실플자이고등(W~Y).indd 117 2017. 9. 15. 오후 5:47

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이고, 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원이므로 구하는 도형의 길이는 $2\pi\times\frac{3}{2}=3\pi$이다.

48 답 ⑤

두 점 A$(1,\ -2)$, B$(7,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 S와 $2:1$로 외분하는 점 T를 구하자.

$\mathrm{S}\left(\frac{2\times7+1\times1}{2+1},\ \frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}\right)=\mathrm{S}(5,\ 2)$

$\mathrm{T}\left(\frac{2\times7-1\times1}{2-1},\ \frac{2\times4-1\times(-2)}{2-1}\right)=\mathrm{T}(13,\ 10)$

구하는 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{ST}}=\frac{1}{2}\sqrt{(13-5)^2+(10-2)^2}$

$=\frac{1}{2}\times8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

다른 풀이

주어진 조건을 만족하는 점을 P라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{BP}}\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}^2=4\overline{\mathrm{BP}}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$(x-1)^2+(y+2)^2=4\{(x-7)^2+(y-4)^2\}$

$x^2+y^2-18x-12y+85=0$

$\therefore\ (x-9)^2+(y-6)^2=32$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$이다.

49 답 $x^2+y^2-10y-11=0$

점 P가 나타내는 도형은 두 점 A$(0,\ -4)$, B$(0,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점 S와 $3:2$로 외분하는 점 T를 지름의 양 끝점으로 하는 원이다.

$\mathrm{S}\left(\frac{3\times0+2\times0}{3+2},\ \frac{3\times1+2\times(-4)}{3+2}\right)=\mathrm{S}(0,\ -1)$

$\mathrm{T}\left(\frac{3\times0-2\times0}{3-2},\ \frac{3\times1-2\times(-4)}{3-2}\right)=\mathrm{T}(0,\ 11)$

원의 중심은 $\overline{\mathrm{ST}}$의 중점이므로 $(0,\ 5)$

반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{ST}}=\frac{1}{2}|11-(-1)|=6$

따라서 구하는 도형의 방정식은 $x^2+(y-5)^2=6^2$, 즉 $x^2+y^2-10y-11=0$이다.

다른 풀이

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=3:2$에서

$2\overline{\mathrm{PA}}=3\overline{\mathrm{PB}},\ 4\overline{\mathrm{PA}}^2=9\overline{\mathrm{PB}}^2$

$4\{x^2+(y+4)^2\}=9\{x^2+(y-1)^2\}$

$\therefore\ x^2+y^2-10y-11=0$

Simple X 원과 직선의 위치 관계

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 172～173

01 답 판별식

02 답 실근

03 답 $d<r,\ d>r$

04 답 ×

05 답 ○

06 답 ×

07 답 (1) $x^2+y^2+x+3y-4=0$

(2) $x^2+y^2-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}y-\frac{6}{5}=0$

(1) 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+2x+k(x^2+y^2+4x-6y+8)=0$

(단, $k\neq-1$) ⋯ ㉠

이 원이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 대입하면

$1+k(1-6+8)=0$

$3k+1=0$

$\therefore\ k=-\frac{1}{3}$

$k=-\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+2x-\frac{1}{3}(x^2+y^2+4x-6y+8)=0$

$3x^2+3y^2+6x-x^2-y^2-4x+6y-8=0$

$2x^2+2y^2+2x+6y-8=0$

$\therefore\ x^2+y^2+x+3y-4=0$

(2) 두 원 $x^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2-2x-2y-2=0$의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-1+k(x^2+y^2-2x-2y-2)=0$

(단, $k\neq-1$) ⋯ ㉠

이 원이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 대입하면

$1+1-1+k(1+1-2-2-2)=0$

$-4k+1=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{4}$

$k=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-1+\frac{1}{4}(x^2+y^2-2x-2y-2)=0$

$4x^2+4y^2-4+x^2+y^2-2x-2y-2=0$

$5x^2+5y^2-2x-2y-6=0$

$\therefore\ x^2+y^2-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}y-\frac{6}{5}=0$

08 답 (1) $3x+4y-6=0$ (2) $x+2y-5=0$

(1) 두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-6x-8y+8)=0$

$6x+8y-12=0$

$\therefore 3x+4y-6=0$

(2) $(x-2)^2+(y-4)^2=9$에서

$x^2+y^2-4x-8y+11=0$

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-4x-8y+11)=0$

$4x+8y-20=0$

$\therefore x+2y-5=0$

09 답 (1) 2 (2) 1 (3) 0

(1) $y=-x+4$를 $x^2+y^2=16$에 대입하면

$x^2+(-x+4)^2=16$ $\therefore x^2-4x=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2=4>0$

따라서 교점의 개수는 2이다.

다른 풀이

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이가 4이므로 $2\sqrt{2}<4$

따라서 원 O와 직선 l은 두 점에서 만난다.

(2) $x+y-2=0$에서 $y=-x+2$

$y=-x+2$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(-x+2)^2=2$

$2x^2-4x+2=0$

$\therefore x^2-2x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1=0$

따라서 교점의 개수는 1이다.

(3) $y=2x+3$을 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(2x+3)^2=1$

$\therefore 5x^2+12x+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=6^2-5\cdot 8=-4<0$

따라서 교점의 개수는 0이다.

10 답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) 만나지 않는다.

(1) 원의 중심인 점 $(-5, 2)$와 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5+4+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

이때, 원의 반지름의 길이가 3이므로

$\frac{2\sqrt{5}}{5}<3$

따라서 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 원의 중심인 점 $(4, -4)$와 직선 $x+y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4-4-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

이때, 원의 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로

원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) 원의 중심인 점 $(3, 2)$와 직선 $3x+y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|9+2-1|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

이때, 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 $\sqrt{10}>\sqrt{6}$

따라서 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.

11 답 (1) 한 점에서 만난다. (접한다.)

(2) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

(1) $3x-y+5=0$에서 $y=3x+5$

$y=3x+5$를 $x^2+y^2+10x+15=0$에 대입하면

$x^2+(3x+5)^2+10x+15=0$

$x^2+4x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot 4=0$

따라서 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다. (접한다.)

(2) $x-2y+1=0$에서 $x=2y-1$

$x=2y-1$을 $x^2+y^2-8y+5=0$에 대입하면

$(2y-1)^2+y^2-8y+5=0$

$5y^2-12y+6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-5\cdot 6=6>0$

따라서 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(3) $2x+y+6=0$에서

$y=-2x-6$을 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$x^2+(-2x-6)^2=4$

$5x^2+24x+32=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=12^2-5\cdot 32=-16<0$

따라서 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.

유형 연습 [+ 내신 유형] 문제편 pp. 174~179

12 답 ④

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2-3x+2y-3)+k(x^2+y^2+x-2y-1)=0$

(단, $k\neq-1$) … ㉠

이 원이 원점을 지나므로

$-3-k=0 \quad \therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$(x^2+y^2-3x+2y-3)-3(x^2+y^2+x-2y-1)=0$

$\therefore x^2+y^2+3x-4y=0$

TIP

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식 꼴이 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식과 비슷하다. 이 값이 정해지기 위해서 도형이 지나는 점의 좌표가 하나 주어지는 것도 비슷하다. 비슷한 것들은 비슷한 것끼리 알아 두면 기억하기에 좋다.

13 답 ①

$x^2+y^2=1$에서 $x^2+y^2-1=0$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$에서 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2-1)+k(x^2+y^2-2x-2y+1)=0$

(단, $k\neq-1$) … ㉠

이 원이 원점을 지나므로

$-1+k=0$

$\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-x-y=0$

따라서 $A=-1$, $B=-1$, $C=0$이므로

$A+B+C=-2$

14 답 ③

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2-4y+2)+k(x^2+y^2+ax-2y+1)=0$

(단, $k\neq-1$) … ㉠

이 원이 원점을 지나므로

$2+k=0 \quad \therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$(x^2+y^2-4y+2)-2(x^2+y^2+ax-2y+1)=0$

$x^2+y^2+2ax=0$

$\therefore (x+a)^2+y^2=a^2$

이때, 이 원의 반지름의 길이가 a이고 원의 넓이가 16π이므로

$\pi\cdot a^2=16\pi$, $a^2=16$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

15 답 π

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$(x^2+y^2-2x-4y-2)+k(x^2+y^2-2x)=0$

(단, $k\neq-1$) … ㉠

으로 놓으면 이 원이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$-3-k=0 \quad \therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-2x+2y+1=0$

$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=1$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\cdot1^2=\pi$

16 답 ①

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2-6x)-(x^2+y^2-4x-4y+4)=0$

$2x-4y+4=0$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+1$

이 직선이 $y=ax+2$와 수직이므로

$\frac{1}{2}\times a=-1 \quad \therefore a=-2$

17 답 ④

$(x-1)^2+(y+1)^2=4$에서

$x^2+y^2-2x+2y-2=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2=4$에서

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-2x+2y-2-(x^2+y^2+2x-2y-2)=0$

$\therefore y=x$

$\therefore a=1$, $b=0 \Rightarrow a+b=1$

18 답 5

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+y+1-(x^2+y^2-x+ay-1)=0$

$\therefore (a+1)x+(1-a)y+2=0$

이 직선이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$(a+1)+2(1-a)+2=0$

$-a+5=0$

$\therefore a=5$

19 답 $y=-3x+6$

두 원의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2+x+2y)-(x^2+y^2-2x+y)=0$

$3x+y=0 \quad \therefore y=-3x$

기울기가 -3이고 점 $(3, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

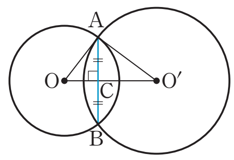
$y+3=-3(x-3)$

$\therefore y=-3x+6$

20 답 ③

두 원 $x^2+y^2=10$,

$(x-4)^2+(y-3)^2=25$의 중심을 각각 O, O′이라 하고 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라고 하자.



$(x-4)^2+(y-3)^2=25$에서

$x^2+y^2-8x-6y=0$이므로

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-10-(x^2+y^2-8x-6y)=0$

$\therefore\ 4x+3y-5=0$

원 $x^2+y^2=10$의 중심 $O(0,\ 0)$에서 공통현까지의 거리는

$\overline{OC}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{5}{5}=1$

직각삼각형 OAC에서 $\overline{OA}=\sqrt{10}$, $\overline{OC}=1$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-1^2}=3$

따라서 공통현 AB의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AC}=6$

21 답 ③

두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+2x-2y=0$의 중심을 각각 O, O′이라 하고 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라고 하자. 두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2+2x-2y)=0$

$\therefore\ x-y+2=0$

원 $x^2+y^2=4$의 중심 $O(0,\ 0)$에서 공통현까지의 거리는

$\overline{OC}=\dfrac{|2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$

직각삼각형 OAC에서 $\overline{OA}=2$, $\overline{OC}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

따라서 공통현 AB의 길이는

$\overline{AB}=2\,\overline{AC}=2\sqrt{2}$

22 답 ②

두 원 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$,

$x^2+y^2-10x-6y+4k=0$의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라고 하자.

$x^2+y^2-4x+2y-4=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=9 \qquad \therefore\ \overline{OA}=3$

$\overline{AB}=4$이므로 $\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=2$

직각삼각형 OAC에서

$\overline{OC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ ⋯ ㉠

한편, 두 원의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-4x+2y-4)-(x^2+y^2-10x-6y+4k)=0$

$\therefore\ 3x+4y-2-2k=0$

원 O의 중심 $(2,\ -1)$에서 공통현까지의 거리는

$\overline{OC}=\dfrac{|6-4-2-2k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|-2k|}{5}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{|-2k|}{5}=\sqrt{5}$, $|-k|=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ k=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ ($\because\ k>0$)

23 답 ③

원의 중심 $(4,\ -3)$과 직선 $4x-3y-5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4\cdot4-3\cdot(-3)-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{20}{5}=4$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $r>4$

따라서 양의 정수 r의 최솟값은 5이다.

TIP

원과 직선이 만날 조건은 사실 이차식과 일차식의 연립방정식이라고 생각할 수 있다. 그래서 일차식에서 어느 한 문자에 관해 정리하여 이차식에 대입하면 이차방정식이 유도되어 판별식에 따라 실근의 개수를 알 수 있고, 그것이 원과 직선이 만나는 교점의 개수와 일치하게 되는 원리이다.

24 답 ①

원의 방정식 $x^2+y^2-2x=0$에서

$(x-1)^2+y^2=1$

중심이 점 $(1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원과

직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$이 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}<1$

$|m+2|<\sqrt{m^2+1}$

$m^2+4m+4<m^2+1$

$4m<-3 \qquad \therefore\ m<-\dfrac{3}{4}$

다른 풀이

$y=mx+2$를 $x^2+y^2-2x=0$에 대입하면

$x^2+(mx+2)^2-2x=0$

$(1+m^2)x^2+2(2m-1)x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(2m-1)^2-4(1+m^2)>0$

$4m^2-4m+1-4-4m^2>0$

$-4m-3>0$

$\therefore\ m<-\dfrac{3}{4}$

25 답 ②

원의 방정식 $x^2+y^2-2x-4=0$에서

$(x-1)^2+y^2=5$

중심이 점 $(1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원과

직선 $2x-y+k=0$이 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k+2|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$

$|k+2|<5 \qquad \therefore -7<k<3$

따라서 정수 k는 $-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 2$의 9개이다.

다른 풀이

$y=2x+k$를 $(x-1)^2+y^2=5$에 대입하면

$(x-1)^2+(2x+k)^2=5$

$5x^2+2(2k-1)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k-1)^2-5(k^2-4)>0$

$-k^2-4k+21>0,\ k^2+4k-21<0$

$(k+7)(k-3)<0 \qquad \therefore -7<k<3$

따라서 정수 k는 $-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 2$의 9개이다.

26 답 $0<m<\dfrac{4}{3}$

원의 중심인 점 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y+1-2m=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이보다 작아야 하므로

$\dfrac{|1-2m|}{\sqrt{m^2+1}}<1,\ |1-2m|<\sqrt{m^2+1}$

$1-4m+4m^2<m^2+1$

$3m^2-4m<0$

$m(3m-4)<0$

$\therefore 0<m<\dfrac{4}{3}$

27 답 ①

원과 직선이 접하므로 원의 중심인 점 $(2,\ 1)$에서

직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인

$\sqrt{5}$와 같다.

$\dfrac{|2\cdot2+1\cdot1+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$

$|k+5|=5,\ k+5=\pm5$

$\therefore k=-10$ 또는 $k=0$

따라서 k는 음수이므로 $k=-10$

28 답 ①

중심이 점 $(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원과 직선

$mx-y-5=0$이 접하려면

$\dfrac{|-5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$

$\sqrt{m^2+1}=\dfrac{5}{3},\ m^2+1=\dfrac{25}{9}$

$m^2=\dfrac{16}{9} \qquad \therefore m=\dfrac{4}{3}\ (\because m>0)$

다른 풀이

$y=mx-5$를 $x^2+y^2=9$에 대입하면

$x^2+(mx-5)^2-9=0$

$(1+m^2)x^2-10mx+16=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-5m)^2-16(1+m^2)=9m^2-16=0$

$m^2=\dfrac{16}{9} \qquad \therefore m=\dfrac{4}{3}\ (\because m>0)$

29 답 ③

원과 직선이 접하므로 원의 중심인 점 $(0,\ 0)$과

직선 $y=x-3\sqrt{2}$, 즉 $x-y-3\sqrt{2}=0$ 사이의 거리는 원의

반지름의 길이인 r와 같다.

$\therefore r=\dfrac{|-3\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3$

30 답 10

원의 넓이가 5π이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

원의 중심인 점 $(-2,\ 1)$과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거

리는 $\dfrac{|-4-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-5+k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|-5+k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5},\ |-5+k|=5$

$-5+k=\pm5$

$\therefore k=10$ 또는 $k=0$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$10+0=10$

31 답 ①

$y=-x+2$를 $x^2+y^2=k$에 대입하면

$x^2+(-x+2)^2=k$

$\therefore 2x^2-4x+4-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-2(4-k)=-4+2k<0$

$\therefore k<2$

이때, $k>0$이므로 구하는 실수 k의 값의 범위는

$0<k<2$

32 답 $-2<m<2$

$y=mx+5$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(mx+5)^2=5$

$\therefore (1+m^2)x^2+10mx+20=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(5m)^2-20(1+m^2)=5m^2-20<0$

$m^2-4<0$

$\therefore -2<m<2$

33 답 ②

$y=x-1$에서 $x=y+1$이므로 $x^2+(y-a)^2=8$에 대입하면

$(y+1)^2+(y-a)^2=8$

$2y^2+2(1-a)y+a^2-7=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1-a)^2-2(a^2-7)<0$

$a^2+2a-15>0$, $(a+5)(a-3)>0$

$\therefore a<-5$ 또는 $a>3$

따라서 양의 정수 a의 최솟값은 4이다.

34 답 $k<-8$ 또는 $k>0$

두 점 $(1, -3)$, $(5, 1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 중심은 $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$, 즉 $(3, -1)$이고 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{(5-1)^2+(1+3)^2}}{2}=2\sqrt{2}$이므로 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2=8$

이때, 원의 중심 $(3, -1)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

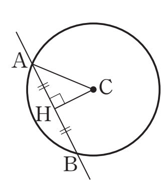
$\frac{|4+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|4+k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{|4+k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$, $|4+k|>4$

$4+k<-4$ 또는 $4+k>4$

$\therefore k<-8$ 또는 $k>0$

35 답 ⑤



오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심인 점 C$(0, 2)$에서 직선 $2x-y-3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

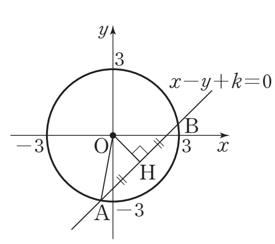
$\overline{CH}=\frac{|-2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 CHA에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{9-5}=2$

따라서 구하는 현의 길이는 $\overline{AB}=2\overline{AH}=4$

36 답 ④



오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고 원의 중심인 원점에서 직선 $x-y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{OA}=3$, $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{2}$

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}$

원점과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{7}$이므로

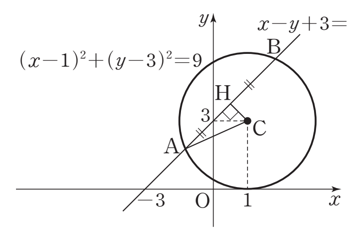
$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{7}$, $|k|=\sqrt{14}$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{14}$

37 답 ③

$x^2-2x+y^2-6y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-3)^2=9$



오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고 원의 중심인 점 C$(1, 3)$에서 직선 $x-y+3=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

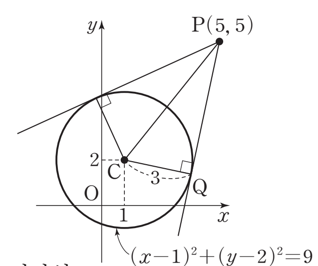
$\overline{CH}=\frac{|1-3+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}=3$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{17}{2}}=\frac{\sqrt{34}}{2}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=\sqrt{34}$

38 답 ⑤



원의 중심을 C라 하면 C$(1, 2)$이므로

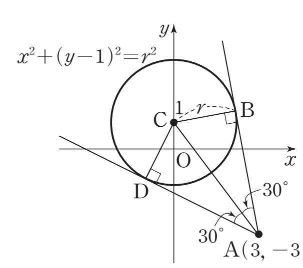
$\overline{CP}=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}=5$

$\overline{CQ}=3$

△CPQ는 $\overline{CP}$가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

39 답 ③



오른쪽 그림과 같이 점 A에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 B, D라 하면 두 접선이 이루는 각의 크기가 60°이므로

$\angle BAC=\angle DAC=30°$

△BAC는 직각삼각형이고 $\overline{BC}=r$이므로

$\overline{AC}=2r$

이때, $\overline{AC}=\sqrt{(0-3)^2+(1+3)^2}=5$이므로

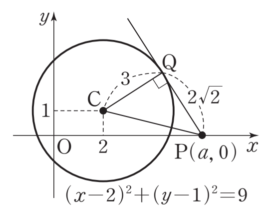
$2r=5$ $\quad\therefore r=\frac{5}{2}$

$\therefore d=\overline{AB}=\sqrt{3}r=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sqrt{3}r+d=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

40 답 $\mathrm{P}(-2,\ 0)$ 또는 $\mathrm{P}(6,\ 0)$

점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$, 원의 중심을 $\mathrm{C}(2,\ 1)$, 접점을 Q라 하면 오른쪽 그림에서



$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(a-2)^2+1}$

이때, $\triangle$CPQ가 직각삼각형이므로

$(a-2)^2+1=(2\sqrt{2})^2+3^2$

$a^2-4a-12=0$

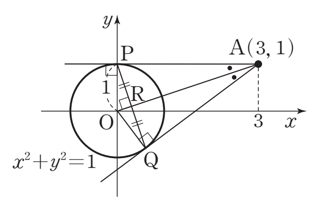
$(a+2)(a-6)=0$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=6$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(-2,\ 0)$ 또는 $\mathrm{P}(6,\ 0)$

41 답 ③

원의 중심이 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 1이므로



$\overline{\mathrm{OP}}=1$,

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

직각삼각형 OAP에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-1^2}=3$

선분 OA와 선분 PQ의 교점을 R라 하면

$\triangle\mathrm{OAP}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{PR}}$

$\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot1=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\overline{\mathrm{PR}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

42 답 ④

원의 중심인 점 $(1,\ 2)$와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1+2+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 점과 직선 사이의 최단 거리는

$3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

43 답 ④

$x^2+y^2+2x-4y+1=0$에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

원의 중심인 점 $(-1,\ 2)$와 직선 $4x-3y-10=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4\cdot(-1)-3\cdot2-10|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=4$

원의 반지름의 길이가 2이므로

$M=4+2=6,\ m=4-2=2$

$\therefore\ Mm=12$

44 답 ③

원의 중심인 점 $(0,\ 0)$에서 직선 $4x-3y+k=0$에 이르는 거리는

$\dfrac{|k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|k|}{5}$

이고, 원의 반지름의 길이는 3이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은

$\dfrac{|k|}{5}+3=5,\ |k|=10 \qquad \therefore\ k=10\ (\because\ k>0)$

45 답 ③

두 점 $\mathrm{A}(0,\ 5)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$을 지나는 직선 AB의 방정식은

$y-5=\dfrac{3-5}{4-0}(x-0) \qquad \therefore\ x+2y-10=0$

원의 중심인 점 $(0,\ 0)$과 직선 $x+2y-10=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$

이때, 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원 위의 임의의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은

$2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

또, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-0)^2+(3-5)^2}=2\sqrt{5}$이므로

삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$

46 답 ⑤

두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{5-1}{4-0}(x-0) \qquad \therefore\ y=x+1$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-0)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$

또, $x^2+y^2-4x-2y+3=0$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=2$

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$의 중심 $(2,\ 1)$과 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

따라서 삼각형 PAB의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{2})=8$

심플 정리

[직선의 방정식]

(1) 기울기가 m, y절편이 n인 직선의 방정식

$y=mx+n$

(2) 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\ (x_1\neq x_2)$

(3) x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

47 답 48

$x^2+y^2-2x-8y+15=0$에서

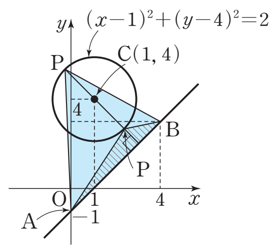
$(x-1)^2+(y-4)^2=2$

주어진 원은 중심이 점 $C(1,\ 4)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이다.

한편, 두 점 $A(0,\ -1)$, $B(4,\ 3)$을 지나는 직선 AB의 방정식은

$y-(-1)=\dfrac{3-(-1)}{4-0}(x-0)$

$\therefore\ y=x-1$



원의 중심인 점 $C(1,\ 4)$와 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1-4-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

또, $\overline{AB}$의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(3+1)^2}=4\sqrt{2}$

(i) △ABP의 넓이가 최대일 때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 임의의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 △ABP의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=12$

(ii) △ABP의 넓이가 최소일 때

원 위의 임의의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은 $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

따라서 △ABP의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$

(i), (ii)에서 △ABP의 넓이의 최댓값과 최솟값의 곱은

$12\times4=48$

Simple Y 원의 접선의 방정식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 180 ~ 181

01 답 반지름

02 답 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

03 답 $y-y_1=m(x-x_1)$, 수직

04 답 $x_1x+y_1y=r^2$

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ×

08 답 ○

09 답 (1) $y=2x\pm3\sqrt{5}$ (2) $y=x\pm2$ (3) $y=-2x\pm\sqrt{5}$ (4) $y=x\pm2\sqrt{2}$ (5) $y=-2x\pm5$ (6) $y=-3x\pm4\sqrt{5}$ (7) $y=-4x\pm5\sqrt{17}$

(1) 원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 2인 원의 접선의 방정식은 $r=3$, $m=2$이므로

$y=2x\pm3\sqrt{2^2+1}$

$\therefore\ y=2x\pm3\sqrt{5}$

다른 풀이

기울기가 2인 접선의 방정식을

$y=2x+a$ ⋯ ㉠

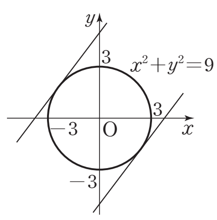
로 놓고, 이 식을 원의 방정식

$x^2+y^2=9$에 대입하면

$x^2+(2x+a)^2=9$

$\therefore\ 5x^2+4ax+a^2-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면



$\dfrac{D}{4}=(2a)^2-5(a^2-9)=0$

$\therefore\ a=\pm3\sqrt{5}$

구한 a의 값을 ㉠에 대입하면

$y=2x\pm3\sqrt{5}$

(2) 원 $x^2+y^2=2$에 접하고 기울기가 1인 원의 접선의 방정식은 $r=\sqrt{2}$, $m=1$이므로

$y=x\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{1^2+1}$

$\therefore\ y=x\pm2$

(3) 원 $x^2+y^2=1$에 접하고 기울기가 -2인 원의 접선의 방정식은 $r=1$, $m=-2$이므로

$y=-2x\pm1\cdot\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore\ y=-2x\pm\sqrt{5}$

(4) 원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 1인 원의 접선의 방정식은 $r=2$, $m=1$이므로

$y=x\pm2\cdot\sqrt{1^2+1}$

$\therefore\ y=x\pm2\sqrt{2}$

(5) 원 $x^2+y^2=5$에 접하고 기울기가 -2인 원의 접선의 방정식은 $r=\sqrt{5}$, $m=-2$이므로

$y=-2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore\ y=-2x\pm5$

(6) 원 $x^2+y^2=8$에 접하고 기울기가 -3인 원의 접선의 방정식은 $r=2\sqrt{2}$, $m=-3$이므로

$y=-3x\pm2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1}$

$\therefore\ y=-3x\pm4\sqrt{5}$

(7) 원 $x^2+y^2=25$에 접하고 기울기가 -4인 원의 접선의 방정식은 $r=5$, $m=-4$이므로

$y=-4x\pm5\cdot\sqrt{(-4)^2+1}$

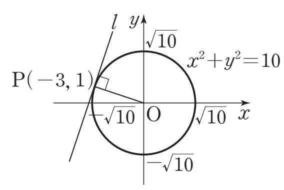
$\therefore\ y=-4x\pm5\sqrt{17}$

10 답 (1) $3x-y+10=0$　(2) $4x+3y-25=0$
(3) $2x+3y+13=0$　(4) $x-\sqrt{3}y+4=0$
(5) $\sqrt{7}x+y-8=0$　(6) $2x+\sqrt{5}y+9=0$
(7) $\sqrt{2}x-y-6=0$

(1) 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1=-3,\ y_1=1,\ r^2=10$이므로
$(-3)\cdot x+1\cdot y=10$
$\therefore\ 3x-y+10=0$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $\mathrm{P}(-3,\ 1)$에서의 접선을 l이라고 하면 직선 OP와 접선 l은 서로 수직이고 직선 OP의 기울기는



$\dfrac{1-0}{-3-0}=-\dfrac{1}{3}$
이때, 직선 l의 기울기를 m이라고 하면 두 직선의 수직 조건에 의하여 $m=3$이므로 직선 l의 방정식은
$y-1=3(x+3)$
$\therefore\ 3x-y+10=0$

(2) 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ 3)$에서의 접선의 방정식은 $x_1=4,\ y_1=3,\ r^2=25$이므로
$4\cdot x+3\cdot y=25$
$\therefore\ 4x+3y-25=0$

(3) 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ -3)$에서의 접선의 방정식은 $x_1=-2,\ y_1=-3,\ r^2=13$이므로
$(-2)\cdot x+(-3)\cdot y=13$
$\therefore\ 2x+3y+13=0$

(4) 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은 $x_1=-1,\ y_1=\sqrt{3},\ r^2=4$이므로
$(-1)\cdot x+\sqrt{3}\cdot y=4$
$\therefore\ x-\sqrt{3}y+4=0$

(5) 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점 $\mathrm{P}(\sqrt{7},\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1=\sqrt{7},\ y_1=1,\ r^2=8$이므로
$\sqrt{7}\cdot x+1\cdot y=8$
$\therefore\ \sqrt{7}x+y-8=0$

(6) 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ -\sqrt{5})$에서의 접선의 방정식은 $x_1=-2,\ y_1=-\sqrt{5},\ r^2=9$이므로
$(-2)\cdot x+(-\sqrt{5})\cdot y=9$
$\therefore\ 2x+\sqrt{5}y+9=0$

(7) 원 $x^2+y^2=12$ 위의 점 $\mathrm{P}(2\sqrt{2},\ -2)$에서의 접선의 방정식은 $x_1=2\sqrt{2},\ y_1=-2,\ r^2=12$이므로
$2\sqrt{2}\cdot x+(-2)\cdot y=12,\ 2\sqrt{2}x-2y=12$
$\therefore\ \sqrt{2}x-y-6=0$

11 답 $y=3x+5$
원의 중심인 점 $(1,\ -2)$와 접점 $(-2,\ -1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{-1+2}{-2-1}=-\dfrac{1}{3}$
원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선에 수직이므로 접선의 기울기는 3이다.
기울기가 3이고 점 $(-2,\ -1)$을 지나는 접선의 방정식은
$y+1=3(x+2)$
$\therefore\ y=3x+5$

12 답 (1) $y=mx+5$　(2) $m=\pm\dfrac{4}{3}$　(3) $y=\pm\dfrac{4}{3}x+5$
(2) 원의 중심인 점 $(0,\ 0)$과 직선 $y=mx+5$, 즉 $mx-y+5=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 3과 같아야 하므로
$\dfrac{|5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3,\ 25=9(m^2+1)$
$9m^2=16$
$\therefore\ m=\pm\dfrac{4}{3}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 182~183

13 답 ③
x축의 양의 방향과 45°의 각을 이루므로 접선의 기울기는
$\tan 45°=1$
원 $x^2+y^2=1$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은
$y=x\pm\sqrt{1^2+1}=x\pm\sqrt{2}$
따라서 y절편의 곱은
$(-\sqrt{2})\times\sqrt{2}=-2$

14 답 ①
직선 $y=2x+3$과 평행한 직선의 기울기는 2이고,
원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 접선의 방정식은
$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1}$
$\therefore\ y=2x\pm5$
따라서 접선이 y축과 만나는 점의 좌표가 $(0,\ 5),\ (0,\ -5)$이므로 선분 PQ의 길이는 10이다.

15 답 $y=3x\pm10$
직선 $x+3y-2=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$와 수직인 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1}$
$\therefore\ y=3x\pm10$

심플 정리

[두 직선의 관계]

두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$에 대하여

(1) 평행 : $a=a'$, $b\neq b'$

(2) 일치 : $a=a'$, $b=b'$

(3) 수직 : $aa'=-1$

16

답 ④

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(3,\ -4)$에서의 접선의 방정식은

$3x-4y=25$, 즉 $y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$

따라서 접선의 기울기는 $\frac{3}{4}$이다.

17

답 ③

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=5$ $\quad\therefore\ y=-\frac{a}{b}x+\frac{5}{b}$

$-\frac{a}{b}=2$이므로 $a=-2b$

즉, 점 $(-2b,\ b)$는 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$(-2b)^2+b^2=5$, $b^2=1$ $\quad\therefore\ b=1$ 또는 $b=-1$

$a=-2b$이므로 $a=2$, $b=-1$ 또는 $a=-2$, $b=1$

$\therefore\ ab=-2$

18

답 ①

원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$2x+3y=13$ ⋯ ㉠

또, 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=13$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 두 직선이 서로 평행하므로 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}\neq 1$

$\therefore\ b=\frac{3}{2}a,\ b\neq 3$ ⋯ ㉢

한편, 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=13$ 위에 있으므로

$a^2+b^2=13$ ⋯ ㉣

㉢을 ㉣에 대입하면

$a^2+\frac{9}{4}a^2=13$, $a^2=4$ $\quad\therefore\ a=\pm 2$

$\therefore\ a=-2,\ b=-3\ (\because\ b\neq 3)$

$\therefore\ a+b=-5$

TIP

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$의 접선의 방정식

$x_1x+y_1y=r^2$은 다음과 같이 유도할 수 있다.

점 P와 원의 중심 O를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1}$이다.

직선 OP와 접선은 수직이므로 접선의 기울기는 $-\frac{x_1}{y_1}$이다.

기울기가 $-\frac{x_1}{y_1}$이고, 점 $P(x_1,\ y_1)$을 지나는 접선의 방정식

을 구하면 $y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$ ⇨ $x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$

점 P는 원 위의 점이므로 $x_1^2+y_1^2=r^2$

$\therefore\ x_1x+y_1y=r^2$

19

답 ②

접선의 기울기를 m이라 하면

기울기가 m이고 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=m(x-2)$

$mx-y-2m+3=0$ ⋯ ㉠

원과 직선이 접하려면 원의 중심 $(-1,\ 2)$와 직선 사이의

거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\frac{|m\cdot(-1)-2-2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$

$|-3m+1|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2-6m+1=5(m^2+1)$

$2m^2-3m-2=0$

$(2m+1)(m-2)=0$

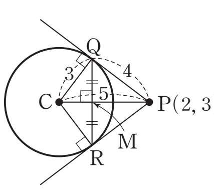
$\therefore\ m=-\frac{1}{2}$ 또는 $m=2$

따라서 구하는 기울기의 곱은

$-\frac{1}{2}\times 2=-1$

20

답 ⑤



오른쪽 그림과 같이 점 $P(2,\ 3)$

에서 원에 그은 접선의 두 접점

을 Q, R라 하고, $\overline{CP}$와 $\overline{QR}$의

교점을 M이라고 하자.

$x^2+y^2+2x+2y-7=0$에서

$(x+1)^2+(y+1)^2=9$

원의 중심 C는 $C(-1,\ -1)$이다.

$\overline{CQ}=3$, $\overline{CP}=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=5$

$\triangle CPQ$에서 피타고라스 정리에 의하여

$5^2=3^2+\overline{PQ}^2$, $\overline{PQ}^2=16$

$\therefore\ \overline{PQ}=4\ (\because\ \overline{PQ}>0)$

또한, $\triangle CPQ=\frac{1}{2}\cdot\overline{CQ}\cdot\overline{PQ}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CP}\cdot\overline{QM}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\overline{QM}$

$\therefore\ \overline{QM}=\frac{12}{5}$

$\therefore\ \overline{QR}=2\overline{QM}=\frac{24}{5}$

21

답 $\sqrt{7}$

점 $P(1,\ a)$를 지나고 원에 접하는 접선의 기울기를 m이

라 하면 접선의 방정식은

$y-a=m(x-1)$ $\quad\therefore\ mx-y-m+a=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=4$에 접하므로

$\frac{|-m+a|}{\sqrt{m^2+1}}=2$, $|m-a|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$m^2-2am+a^2=4m^2+4$

$\therefore\ 3m^2+2am+4-a^2=0$

이 이차방정식의 두 근은 두 접선의 기울기이고, 두 접선은 서로 수직이므로 기울기의 곱이 -1이어야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{4-a^2}{3}=-1 \qquad \therefore\ a=\pm\sqrt{7}$

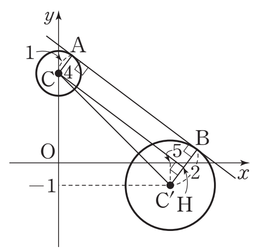
따라서 a는 양수이므로 $a=\sqrt{7}$이다.

22 답 ③

두 원 $x^2+(y-4)^2=1$, $(x-5)^2+(y+1)^2=4$의 중심을 각각 C$(0,\ 4)$, C$'(5,\ -1)$이라고 하면 두 원의 중심 사이의 거리는

$\overline{\text{CC}'}=\sqrt{(5-0)^2+(-1-4)^2}=5\sqrt{2}$

그림과 같이 두 접점을 A, B라 하고 점 C에서 $\overline{\text{C}'\text{B}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\text{AB}}=\overline{\text{CH}}$

$=\sqrt{\overline{\text{CC}'}^2-\overline{\text{C}'\text{H}}^2}$

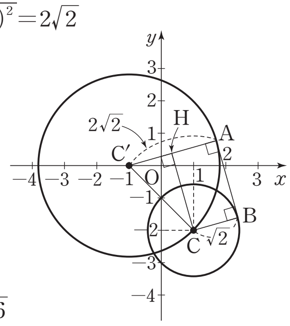
$=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-1^2}=7$

23 답 ②

두 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$, $(x+1)^2+y^2=8$의 중심을 각각 C$(1,\ -2)$, C$'(-1,\ 0)$이라고 하면 두 원의 중심 사이의 거리는

$\overline{\text{CC}'}=\sqrt{(1+1)^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{2}$

그림과 같이 두 접점을 A, B라고 하고 점 C에서 $\overline{\text{C}'\text{A}}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{\text{AB}}=\overline{\text{CH}}$

$=\sqrt{\overline{\text{CC}'}^2-\overline{\text{C}'\text{H}}^2}$

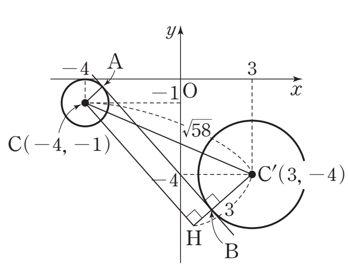
$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$

24 답 7

두 원 $(x+4)^2+(y+1)^2=1$, $(x-3)^2+(y+4)^2=4$에서 두 원의 중심을 각각 C$(-4,\ -1)$, C$'(3,\ -4)$라고 하면 두 원의 중심 사이의 거리는

$\overline{\text{CC}'}=\sqrt{(-4-3)^2+(-1+4)^2}=\sqrt{58}$

그림과 같이 두 접점을 A, B라 하고 점 C에서 $\overline{\text{C}'\text{B}}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 원의 반지름의 길이가 각각 1, 2이므로



$\overline{\text{AB}}=\overline{\text{CH}}=\sqrt{\overline{\text{CC}'}^2-\overline{\text{C}'\text{H}}^2}=\sqrt{(\sqrt{58})^2-(1+2)^2}=7$

연습 문제 [W~Y] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 184~185

01 답 ③

원 $x^2+y^2+4x+2ay-3=0$에서

$(x+2)^2+(y+a)^2=a^2+7$

원의 반지름의 길이가 4이므로

$a^2+7=16,\ a^2=9$

$\therefore\ a=\pm 3$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-2,\ 3)$ 또는 $(-2,\ -3)$이므로 원점에서 원의 중심까지의 거리는

$\sqrt{2^2+(\pm 3)^2}=\sqrt{13}$

02 답 ⑤

$x^2+y^2+6x-2ky+2k^2=0$에서

$(x+3)^2+(y-k)^2=-k^2+9$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-k^2+9>0$

$\therefore\ -3<k<3$

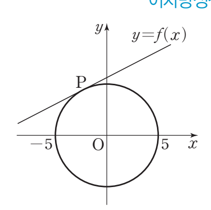
따라서 정수 k는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다.

03 답 25

$y=f(x)$가 직선이므로 $f(x)=ax+b$로 표현할 수 있어.

그림과 같이 원 $x^2+y^2=25$와 직선 $y=f(x)$가 제2사분면에 있는 원 위의 점 P에서 접할 때, $f(-5)f(5)$의 값을 구하시오.

직선과 원이 접하니까 연립한 이차방정식은 중근을 가져야 해.



1st $f(x)$가 직선이므로 문자로 표현하고, $f(-5)f(5)$를 구하기 위해 필요한 식을 찾자.

$f(x)=ax+b$라 하자.

$f(x)$가 직선이므로 $f(x)=ax+b$로 놓은 거야.

$f(-5)f(5)=(-5a+b)(5a+b)=b^2-25a^2$이므로

b^2-25a^2의 값을 구하면 된다.

2nd 직선이 원과 접하므로 연립한 이차방정식이 중근을 가져야 해.

직선 $y=ax+b$와 원 $x^2+y^2=25$가 접하므로

이차방정식 $x^2+(ax+b)^2=25$는 중근을 갖는다.

이차방정식 $(a^2+1)x^2+2abx+b^2-25=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2b^2-(a^2+1)(b^2-25)$

$=25a^2-b^2+25=0 \cdots$ ㉠

[이차방정식의 판별식]
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하면
(1) $D>0$: 서로 다른 두 실근
(2) $D=0$: 중근
(3) $D<0$: 서로 다른 두 허근

㉠에 의해

$f(-5)f(5)=b^2-25a^2=25$

답_113130심플자이고등(W~Y).indd 128 2017. 9. 15. 오후 5:47

04 답 ⑤

점 (1, 2)가 제1사분면 위의 점이므로 점 (1, 2)를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원은 제1사분면에서 x축과 y축에 접한다. 이때, 원의 반지름의 길이를 $r\,(r>0)$라 하면 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 (1, 2)를 지나므로

$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0,\ (r-1)(r-5)=0$

$\therefore\ r=1$ 또는 $r=5$

따라서 두 원의 넓이의 합은

$\pi+25\pi=26\pi$

05 답 ④

$x+3y=1$에서 기울기는 $-\dfrac{1}{3}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 3이다.

기울기가 3이고 원 $x^2+y^2=10$에 접하는 직선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1}$

$\therefore\ y=3x\pm10$

따라서 두 직선의 y절편의 차는

$10-(-10)=20$

> **심플 정리**
>
> **[원의 접선의 방정식]**
>
> (1) 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식
>
> 원 $x^2+y^2+r^2$에 접하고, 기울기가 m인 직선의 방정식
>
> $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
>
> (2) 원 위의 점에 접하는 직선의 방정식
>
> 원 $x^2+y^2+r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에 접하는 직선의 방정식
>
> $x_1x+y_1y=1$

06 답 ⑤

$y=x+k$를 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$에 대입하여 정리하면

$2x^2-2(3-k)x+k^2-2k+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\dfrac{D}{4}=(3-k)^2-2(k^2-2k+1)>0$

$k^2+2k-7<0$

$\therefore\ -1-2\sqrt{2}<k<-1+2\sqrt{2}$

따라서 정수 k는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$의 5개이다.

07 답 ③

원의 중심인 점 (0, 0)과 점 A(4, 3) 사이의 거리는

$\sqrt{4^2+3^2}=5$

따라서 구하는 최댓값 M과 최솟값 m은

$M=5+3=8,\ m=5-3=2$

$\therefore\ M-m=6$

08 답 $x^2+y^2=1$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=10$이므로

$(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2=10$

$\therefore\ x^2+y^2=1$

09 답 ⑤

직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$이

원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$에 접하므로

원의 중심인 점 $(1,\ -2)$와 직선 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$와 같다. 즉,

$\dfrac{|2\cdot1+1\cdot(-2)-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$

$|-k|=5,\ k=\pm5$

$\therefore\ k=-5$ 또는 $k=5$

따라서 $k>0$이므로 $k=5$

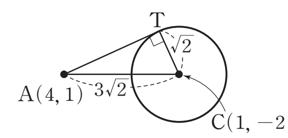
10 답 ④

$x^2+y^2-2x+4y+3=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=2$

따라서 원의 중심은

C$(1,\ -2)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로



$\overline{AC}=\sqrt{(1-4)^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{2}$

$\overline{CT}=\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{AT}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CT}^2}$

$=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=4$

11 답 ②

$x^2+y^2+4x+2ky+9=0$에서

$(x+2)^2+(y+k)^2=k^2-5$

원의 중심인 점 $(-2,\ -k)$가 제2사분면에 있으므로

$-k>0\qquad\therefore\ k<0$

이 원이 y축에 접하므로

$\sqrt{k^2-5}=|-2|,\ k^2-5=4$

$k^2=9\qquad\therefore\ k=-3$ 또는 $k=3$

따라서 $k<0$이므로 $k=-3$

12 답 200

> y축에 접하므로 반지름의 길이는 원의 중심의 x좌표의 절댓값과 같아.
>
> 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 중에서 직선 $y=\sqrt{3}x-2$와 접하는 원은 2개이다. 두 원 반지름의 길이를 각각 $a,\ b$라 할 때, $100ab$의 값을 구하시오.

1st 중심이 (p, q)이고 y축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|p|$야.

원의 중심이 $y=x^2$의 그래프 위에 있으므로 중심의 좌표를 (n, n^2)이라 하면 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|n|$이다. 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 x좌표의 절댓값과 같아.

2nd 원과 직선이 접하면 원의 중심에서 직선까지의 거리는 반지름의 길이와 같아.

원의 중심 (n, n^2)에서 직선 $y=\sqrt{3}x-2$, 즉 $\sqrt{3}x-y-2=0$까지의 거리는 이 원의 반지름의 길이인 $|n|$과 같으므로 직선이 원과 접하니까 원과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같아.

$\dfrac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=|n|$에서

$n^2-\sqrt{3}n+2=\pm 2n$

$\therefore n^2-(\sqrt{3}\pm 2)n+2=0$ ⋯ ㉠

㉠의 이차방정식 중 실근을 갖는 이차방정식은 $n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$이고 이 이차방정식의 두 실근이 a, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $ab=2$

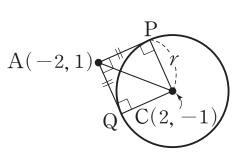
$\therefore 100ab=200$

[이차방정식의 근과 계수의 관계]
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때
(1) $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ (2) $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

13

답 ②

점 $A(-2, 1)$에서 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=r^2$에 그은 두 접선의 접점을 P, Q라 하면 두 접선이 수직이므로 사각형 CPAQ는 정사각형이다.



직각삼각형 CAP에서

$\overline{CA}^2=\overline{CP}^2+\overline{AP}^2$이므로

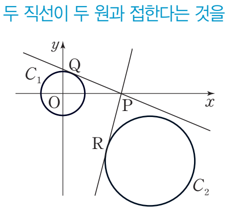
$(2+2)^2+(-1-1)^2=r^2+r^2$

$r^2=10$

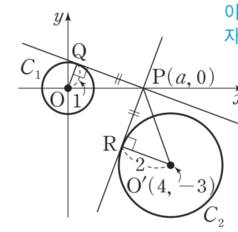
$\therefore r=\sqrt{10}$ ($\because r>0$)

14

답 ④

> 좌표평면에 두 원
>
> $C_1 : x^2+y^2=1$, $C_2 : x^2+y^2-8x+6y+21=0$
>
> 이 있다. 그림과 같이 x축 위의 점 P에서 C_1에 그은 한 접선의 접점을 Q, 점 P에서 C_2에 그은 접선의 접점을 R라 하자. $\overline{PQ}=\overline{PR}$일 때, 점 P의 x좌표는?
>
> → 점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 놓을 수 있어.
>
> 점 P를 지나는 두 직선이 두 원과 접한다는 것을 적절히 써야 해.
>
> 
>
>
> ① $\dfrac{19}{8}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ $\dfrac{21}{8}$
>
> ④ $\dfrac{11}{4}$ ⑤ $\dfrac{23}{8}$

1st 원의 접선과 접점을 지나는 원의 반지름은 서로 수직이야.



이것은 원의 접선의 성질이야. 자주 쓰이니까 기억해야 해.

점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 $\overline{OP}=a$

이때, 원 $C_1 : x^2+y^2=1$의 반지름의 길이는 $\overline{OQ}=1$이고 $\overline{OQ}\perp\overline{PQ}$이므로 직각삼각형 OPQ에서 피타고라스 정리에 의하여

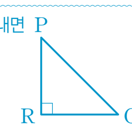
$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2$

$=a^2-1$ ⋯ ㉠

또, 원 $C_2 : x^2+y^2-8x+6y+21=0$, 즉 $(x-4)^2+(y+3)^2=4$의 중심을 O′이라 하면 점 O′의 좌표는 $(4, -3)$이고 반지름의 길이는 $\overline{O'R}=2$

한편, $\overline{PR}\perp\overline{O'R}$이므로 직각삼각형 PRO′에서 피타고라스 정리에 의하여

그림으로 나타내면 이와 같아.



$\overline{PR}^2=\overline{O'P}^2-\overline{O'R}^2$

$=\{(a-4)^2+(0+3)^2\}-4$

$=a^2-8a+21$ ⋯ ㉡

2nd $\overline{PQ}=\overline{PR}$임을 이용하여 점 P의 x좌표를 구해.

$\overline{PQ}=\overline{PR}$이므로 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$, 즉 ㉠=㉡이므로

$a^2-1=a^2-8a+21$에서

$8a=22$

$\therefore a=\dfrac{11}{4}$

따라서 점 P의 x좌표는 $\dfrac{11}{4}$이다.

15

답 1

$x^2+y^2-2x+4y+4=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=1$

원의 중심인 점 $(1, -2)$와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1-2+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$ ⋯ Ⅰ

원의 반지름의 길이가 1이므로 최댓값 M과 최솟값 m은

$M=\sqrt{2}+1$

$m=\sqrt{2}-1$ ⋯ Ⅱ

$\therefore Mm=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ ⋯ Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	원의 중심과 직선 사이의 거리를 구한다.	40%
Ⅱ	원 위의 점과 직선에 이르는 거리의 최댓값 M과 최솟값 m을 구한다.	40%
Ⅲ	Mm의 값을 계산한다.	20%

답_113130심플자이고등(W~Y).indd 130 2017. 9. 15. 오후 5:47

Simple Z 도형의 이동

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 186 ~ 187

01 답 $f(x-a, y-b)=0$

02 답 $y=x$

03 답 ○

04 답 ×

05 답 (1) $(1, -2)$ (2) $(4, 0)$ (3) $(0, 0)$ (4) $(-2, -6)$

(1) $(0+1, 0-2)$ $\quad\therefore (1, -2)$

(2) $(3+1, 2-2)$ $\quad\therefore (4, 0)$

(3) $(-1+1, 2-2)$ $\quad\therefore (0, 0)$

(4) $(-3+1, -4-2)$ $\quad\therefore (-2, -6)$

06 답 (1) $(5, -3)$ (2) $(4, 1)$ (3) $(8, -5)$ (4) $(12, 1)$

(1) $(0, 0) \longrightarrow (0+5, 0-3)$ $\quad\therefore (5, -3)$

(2) $(-1, 4) \longrightarrow (-1+5, 4-3)$ $\quad\therefore (4, 1)$

(3) $(3, -2) \longrightarrow (3+5, -2-3)$ $\quad\therefore (8, -5)$

(4) $(7, 4) \longrightarrow (7+5, 4-3)$ $\quad\therefore (12, 1)$

07 답 (1) $y=x+5$ (2) $(x+3)^2+(y-4)^2=4$

(1) $y-3=(x+1)+1$ $\quad\therefore y=x+5$

(2) $(x+1+2)^2+(y-3-1)^2=4$

$\therefore (x+3)^2+(y-4)^2=4$

08 답 -1

직선 $y=2x-1$을 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-2a, y+a)$에 의하여 옮기면

$y-a=2(x+2a)-1$

$\therefore y=2x+5a-1$

이 직선이 직선 $y=2x-6$과 일치하므로

$5a-1=-6$ $\quad\therefore a=-1$

09 답 x축 : $(2, -3)$, y축 : $(-2, 3)$, 원점 : $(-2, -3)$, 직선 $y=x$: $(3, 2)$

10 답 (1) x축 : $2x-y+3=0$, y축 : $2x-y-3=0$, 원점 : $2x+y-3=0$, 직선 $y=x$: $x+2y+3=0$

(2) x축 : $(x-2)^2+(y+1)^2=9$, y축 : $(x+2)^2+(y-1)^2=9$, 원점 : $(x+2)^2+(y+1)^2=9$, 직선 $y=x$: $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

(1) x축 : $2x+(-y)+3=0$ $\quad\therefore 2x-y+3=0$

y축 : $2(-x)+y+3=0$ $\quad\therefore 2x-y-3=0$

원점 : $2(-x)+(-y)+3=0$ $\quad\therefore 2x+y-3=0$

직선 $y=x$: $2y+x+3=0$ $\quad\therefore x+2y+3=0$

(2) x축 : $(x-2)^2+(-y-1)^2=9$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=9$

y축 : $(-x-2)^2+(y-1)^2=9$

$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=9$

원점 : $(-x-2)^2+(-y-1)^2=9$

$\therefore (x+2)^2+(y+1)^2=9$

직선 $y=x$: $(y-2)^2+(x-1)^2=9$

$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=9$

11 답 (1) $(-1, -2)$ (2) $(3, -4)$

대칭이동한 점의 좌표를 (x, y)라 하면

(1) $\dfrac{1+x}{2}=0$, $\dfrac{2+y}{2}=0$

$\therefore x=-1, y=-2$

$\therefore (-1, -2)$

(2) $\dfrac{1+x}{2}=2$, $\dfrac{2+y}{2}=-1$

$\therefore x=3, y=-4$

$\therefore (3, -4)$

12 답 B$(1, 4)$

두 점 A, B를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{3+a}{2}, \dfrac{2+b}{2}\right)$

선분 AB의 중점이 직선 $x-y+1=0$ 위의 점이므로

$\dfrac{3+a}{2}-\dfrac{2+b}{2}+1=0$

$\therefore a-b+3=0$ ⋯ ㉠

두 점 A, B를 지나는 직선은 직선 $x-y+1=0$과 수직이므로 직선 AB의 기울기는 -1이다.

$\dfrac{b-2}{a-3}=-1$

$\therefore a+b-5=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

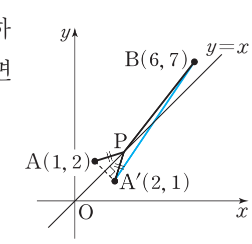
$a=1, b=4$ $\quad\therefore$ B$(1, 4)$

13 답 $2\sqrt{13}$

점 A$(1, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′$(2, 1)$

$\overline{\text{AP}}=\overline{\text{A'P}}$이므로



오른쪽 그림에서

$\overline{\text{AP}}+\overline{\text{BP}}=\overline{\text{A'P}}+\overline{\text{BP}}$

$\geq \overline{\text{A'B}}$

$=\sqrt{(6-2)^2+(7-1)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

TIP

직선에 대한 대칭이동은 길이를 변화시키지 않기 때문에 대칭이동을 할 수 있는 것이다.
대칭이동을 해도 도형의 길이나 넓이는 변하지 않는 성질을 이용한 것이다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 188~195

14 답 ①

점 $(2,\ 1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점이 $(3,\ -2)$이므로

$2+a=3,\ 1+b=-2$

$\therefore a=1,\ b=-3 \Rightarrow a+b=-2$

15 답 ①

점 $(-2,\ 3)$이 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-3,\ y+2)$에 의하여 옮겨진 점은

$(-2-3,\ 3+2)$, 즉 $(-5,\ 5)$

이 점이 직선 $y=ax+10$ 위의 점이므로

$5=-5a+10,\ -5a=-5$

$\therefore a=1$

16 답 ②

점 $(1,\ 0)$을 점 $(-2,\ 3)$으로 옮기는 평행이동은

$(x,\ y) \longrightarrow (x-3,\ y+3)$

직선 $y=mx+n$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y-3=m(x+3)+n$

$\therefore y=mx+3m+n+3$

이때, 처음 직선과 일치하므로

$3m+n+3=n$

$\therefore m=-1$

17 답 3

직선 $x+2y-3=0$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$(x+3)+2(y-1)-3=0$

$\therefore x+2y-2=0$

이 직선이 $ax+by-2=0$과 일치하므로

$a=1,\ b=2$

$\therefore a+b=3$

TIP

평행이동에서 점의 평행이동과 도형의 평행이동이 다르다.
점 $(x,\ y)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점은 $(x+m,\ y+n)$이지만 도형 $f(x,\ y)=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형은 $f(x-m,\ y-n)=0$으로 $m,\ n$ 앞에 붙는 부호가 다름에 주의해야 한다.

18 답 $y=-3x+15$

거꾸로 직선 $y=-3x+1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 직선 l과 일치하므로

$y-2=-3(x-4)+1$

$\therefore y=-3x+15$

19 답 ②

직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-1=a(x+2)+b$

즉, $y=ax+2a+b+1$이 직선이 직선 $y=x+2$와 y축 위의 점에서 수직으로 만나므로 두 직선의 y절편이 같고 기울기의 곱이 -1이어야 한다.

즉, $2a+b+1=2,\ a\times1=-1$

$\therefore a=-1,\ b=3 \Rightarrow a+b=2$

20 답 ⑤

원 $x^2+y^2+4x-2y+a=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=5-a$

이 원을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$(x-1+2)^2+(y-2-1)^2=5-a$

$(x+1)^2+(y-3)^2=5-a$

따라서 중심의 좌표가 $(-1,\ 3)$이므로 $b=3$

또, 반지름의 길이가 1이므로

$\sqrt{5-a}=1 \qquad \therefore a=4$

$\therefore a+b=7$

21 답 ①

원 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$을 변형하면

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$(x-a+1)^2+(y-b-2)^2=4$

즉, $-a+1=-1,\ -b-2=3$이므로

$a=2,\ b=-5$

$\therefore a+b=-3$

다른 풀이

원 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$의 중심의 좌표가 $(-1,\ 2)$이므로 이 점을 x축의 방향으로 a만큼 y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $(-1+a,\ 2+b)$

이 점이 평행이동한 도형 $(x-1)^2+(y+3)^2=4$의 원의 중심의 좌표와 같으므로 $-1+a=1,\ 2+b=-3$

$\therefore a=2,\ b=-5 \Rightarrow a+b=-3$

22 답 ①

포물선 $y=x^2+2x-3$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y-1=(x+2)^2+2(x+2)-3$

$\therefore y=x^2+6x+6=(x+3)^2-3$

따라서 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ -3)$이므로

$a=-3,\ b=-3$

$\therefore a+b=-6$

다른 풀이

포물선 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$이므로 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -4)$

이 점을 x축의 방향으로 -2만큼 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $(-3,\ -3)$

따라서 평행이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ -3)$이므로

$a=-3,\ b=-3$

$\therefore\ a+b=-6$

23 답 ①

$y=2x^2+4x+6=2(x+1)^2+4$

이 포물선을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p-2$만큼 평행이동하면

$y-(p-2)=2(x-p+1)^2+4$

$\therefore\ y=2(x-p+1)^2+p+2$

이 포물선의 꼭짓점 $(p-1,\ p+2)$가 x축 위에 있으므로

$p+2=0 \qquad \therefore\ p=-2$

24 답 ③

직선 $y=2x-1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $3a$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-3a=2(x-a)-1$

$\therefore\ y=2x+a-1$

이 직선이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심인 점 $(1,\ 3)$을 지나야 하므로

$3=2+a-1 \qquad \therefore\ a=2$

25 답 ①

원 $x^2+y^2=9$의 중심이 점 $(0,\ 0)$이므로 이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 중심은 점 $(a,\ b)$이다.

직선 $y=x+2$가 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심인 점 $(a,\ b)$가 직선 $y=x+2$ 위의 점이어야 하므로

$b=a+2 \qquad \therefore\ a-b=-2$

26 답 ①

직선 $x-y+2=0$을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

$x-(y-a)+2=0$

$\therefore\ x-y+a+2=0 \cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2=1$과 직선 ㉠이 접하므로 원의 중심인 점 $(0,\ 0)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다. 즉,

$\dfrac{|a+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1,\ |a+2|=\sqrt{2}$

$a+2=\pm\sqrt{2}$

$\therefore\ a=-2\pm\sqrt{2}$

따라서 모든 a의 값의 합은

$(-2+\sqrt{2})+(-2-\sqrt{2})=-4$이다.

27 답 $\dfrac{19}{4}$

직선 $y=2x+3$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y-1=2(x-a)+3$

$\therefore\ y=2x-2a+4$

이 직선이 포물선 $y=2x^2-4x-1$에 접하므로

두 식을 연립하면

$2x-2a+4=2x^2-4x-1$

$2x^2-6x+2a-5=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$\dfrac{D}{4}=9-2(2a-5)=0$

$-4a+19=0$

$\therefore\ a=\dfrac{19}{4}$

28 답 ①

직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

$y=-\dfrac{1}{2}(x-a)+1$

$\therefore\ x+2y-a-2=0 \cdots$ ㉠

원 $x^2+y^2=5$와 직선 ㉠이 서로 다른 두 점에서 만나므로 원의 중심인 점 $(0,\ 0)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$보다 작다. 즉,

$\dfrac{|-a-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}<\sqrt{5}$

$|a+2|<5$

$-5<a+2<5$

$\therefore\ -7<a<3$

따라서 $p=-7,\ q=3$이므로

$p+q=-7+3=-4$

29 답 ③

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+2,\ y-1)$에 의하여

원 $x^2+y^2=8$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$(x-2)^2+(y+1)^2=8$

이 원이 y축에 의하여 잘린 현의 길이는 원과 y축이 만나는 두 점 사이의 거리와 같으므로 $x=0$을 대입하면

$(y+1)^2=4$

$y+1=\pm 2$

$\therefore\ y=-3$ 또는 $y=1$

따라서 구하는 현의 길이는

$1-(-3)=4$

30 답 ③

점 $P(-2,\ -1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점은
$Q(2,\ 1)$
y축에 대하여 대칭이동한 점은 $R(2,\ -1)$
$\therefore\ \triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot\overline{PR}\cdot\overline{QR}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2=4$

31 답 $(0,\ 0)$

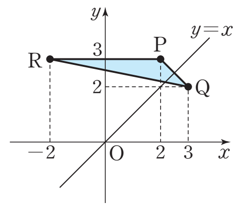
점 $A(3,\ -4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $B(3,\ 4)$, y축에 대하여 대칭이동한 점은 $C(-3,\ -4)$이므로 선분 BC의 중점의 좌표는
$\left(\frac{3+(-3)}{2},\ \frac{4+(-4)}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 0)$

32 답 ②

점 $(1,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $P(1,\ -2)$, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $Q(2,\ 1)$이므로
$\overline{PQ}=\sqrt{(2-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$

33 답 ②

점 $P(2,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은
$Q(3,\ 2)$, y축에 대하여 대칭이동한 점은 $R(-2,\ 3)$



따라서 $\triangle PQR$의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot4\cdot1=2$

34 답 ③

직선 $y=ax-2$를 x축에 대하여 대칭이동하면
$-y=ax-2 \qquad \therefore\ ax+y-2=0$
이 직선이 $2x+y+b=0$과 일치해야 하므로
$a=2,\ b=-2 \qquad \therefore\ a+b=0$

심플 정리

[점과 도형의 대칭이동]

대칭이동	점 (x, y)	도형 $f(x, y)=0$
x축에 대하여 대칭이동	$(x,\ -y)$	$f(x,\ -y)=0$
y축에 대하여 대칭이동	$(-x,\ y)$	$f(-x,\ y)=0$
원점에 대하여 대칭이동	$(-x,\ -y)$	$f(-x,\ -y)=0$
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동	$(y,\ x)$	$f(y,\ x)=0$

35 답 ①

직선 $2x-3y+6=0$을 y축에 대하여 대칭이동하면
$2(-x)-3y+6=0$
$\therefore\ 2x+3y-6=0$
이 직선과 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이므로
기울기가 $-\frac{2}{3}$이고 점 $(3,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-1=-\frac{2}{3}(x-3)$
$\therefore\ 2x+3y-9=0$
따라서 $a=2,\ b=-9$이므로 $a+b=-7$

36 답 ②

직선 $y=ax+b$를 원점에 대하여 대칭이동하면
$-y=-ax+b$
$\therefore\ y=ax-b$
이 직선이 직선 $y=3x-4$와 평행하므로 $a=3$
또, 직선 $y=3x-b$가 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로
$2=-3-b \qquad \therefore\ b=-5$
$\therefore\ a+b=-2$

37 답 ⑤

중심이 $(-3,\ -2)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y+2)^2=r^2$
이 원을 x축에 대하여 대칭이동하면
$(x+3)^2+(-y+2)^2=r^2$
$\therefore\ (x+3)^2+(y-2)^2=r^2$
이 원이 점 $(-3,\ -3)$을 지나므로
$(-3+3)^2+(-3-2)^2=r^2$
$\therefore\ r=5\ (\because\ r>0)$

38 답 ①

원 $x^2+y^2-2ax+4y+4=0$에서
$(x-a)^2+(y+2)^2=a^2$
원의 중심인 점 $(a,\ -2)$를 y축에 대하여 대칭이동하면
$(-a,\ -2)$
이 점이 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로
$-2=a+2 \qquad \therefore\ a=-4$

39 답 ①

원 $x^2+y^2+2x-6y+6=0$에서
$(x+1)^2+(y-3)^2=4$
원 $(x+1)^2+(y-3)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동하면
$(-x+1)^2+(-y-3)^2=4$
$(x-1)^2+(y+3)^2=4$
$\therefore\ a=1,\ b=-3 \Rightarrow a+b=-2$

40 답 6

$y=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$이므로

꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+b\right)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동하면 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{4}-b\right)$

이 점이 점 $(1,\ -2)$와 일치하므로

$\frac{a}{2}=1,\ \frac{a^2}{4}-b=-2$

$\therefore\ a=2,\ b=3 \Rightarrow ab=6$

다른 풀이

원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$이므로 원래의 포물선 $y=x^2+ax+b$의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 $(-1,\ 2)$이다.

점 $(-1,\ 2)$를 꼭짓점으로 하고 x^2의 계수가 1인 포물선의 식은 $y=(x+1)^2+2=x^2+2x+3$

$\therefore\ a=2,\ b=3 \Rightarrow ab=6$

41 답 ①

직선 $2x+3y-5=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$3x+2y-5=0$

이 직선이 $ax+2y+b=0$과 일치해야 하므로

$a=3,\ b=-5$

$\therefore\ a+b=-2$

42 답 ④

두 원 $(x+a-2)^2+(y+3)^2=9$, $(x-b+3)^2+(y-1)^2=9$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 원의 중심도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

두 원의 중심의 좌표가 각각

$(-a+2,\ -3)$, $(b-3,\ 1)$이므로

$-a+2=1,\ -3=b-3$

$\therefore\ a=1,\ b=0 \Rightarrow a+b=1$

43 답 ①

원 $x^2+y^2-2ax+2by=0$을 표준형으로 변형하면

$x^2-2ax+y^2+2by=0$

$x^2-2ax+a^2+y^2+2by+b^2=a^2+b^2$

$(x-a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2$

이므로 원의 중심인 점 $(a,\ -b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $(-b,\ a)$

이 점이 $(-1,\ 2)$와 일치하므로

$-b=-1,\ a=2 \qquad \therefore\ a=2,\ b=1$

$\therefore\ a-b=1$

44 답 ②

원 $x^2+y^2-4ax-6by=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x^2+y^2-6bx-4ay=0$

$\therefore\ (x-3b)^2+(y-2a)^2=4a^2+9b^2$

이 원의 중심의 좌표는 $(3b,\ 2a)$ ⋯ ㉠

한편, $y=2x^2+12x+20=2(x+3)^2+2$이므로

포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ 2)$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡이 일치하므로

$3b=-3,\ 2a=2 \qquad \therefore\ a=1,\ b=-1$

$\therefore\ ab=-1$

45 답 ③

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$의 중심은 점 $(2,\ -1)$이므로 주어진 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 중심은 점 $(-1,\ 2)$이다.

점 $(-1,\ 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로 구하는 원의 중심은 점 $(1,\ 2)$이다.

따라서 점 $(1,\ 2)$가 직선 $y=ax-1$ 위에 있으므로

$2=a-1 \qquad \therefore\ a=3$

46 답 ④

직선 $3x-4y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동하면

$-3x+4y+a=0$

$\therefore\ 3x-4y-a=0$

이 직선이 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$에 접하므로 원의 중심인 점 $(3,\ 1)$과 직선 $3x-4y-a=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 2와 같아야 한다.

$\frac{|3\cdot3-4\cdot1-a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

$|5-a|=10 \qquad \therefore\ a=15\ (\because\ a>0)$

47 답 ②

원 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+(-y)^2+2x+2\cdot(-y)+1=0$

$x^2+y^2+2x-2y+1=0$

$\therefore\ (x+1)^2+(y-1)^2=1$ ⋯ ㉠

한편, 직선 $mx-y-2m=0$이 원 ㉠과 만날 때, 원의 중심인 점 $(-1,\ 1)$과 직선 $mx-y-2m=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1보다 작거나 같아야 한다.

$\frac{|-m-1-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\le1$

$9m^2+6m+1\le m^2+1$

$8m^2+6m\le0$

$2m(4m+3)\le0 \qquad \therefore\ -\frac{3}{4}\le m\le0$

$\therefore\ p=-\frac{3}{4},\ q=0 \Rightarrow p+q=-\frac{3}{4}$

48 답 $P(-4,\ -4)$

점 $P(a,\ b)$라고 할 때, 이 점을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $(a+3,\ b+2)$이다.
이 점을 x축에 대하여 대칭이동하면
$(a+3,\ -b-2)$
즉, $a+3=-1,\ -b-2=2$이므로
$a=-4,\ b=-4$
$\therefore P(-4,\ -4)$

49 답 ②

원 $(x+1)^2+(y+2)^2=16$을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면
$(x+3)^2+(y+2)^2=16$ ⋯ ㉠
㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
$(x+2)^2+(y+3)^2=16$ ⋯ ㉡
㉡이 x축과 만나는 교점의 x좌표는 $y=0$을 대입하면
$(x+2)^2+9=16$
$(x+2)^2=7$
$x+2=\pm\sqrt{7}$
$\therefore x=-2+\sqrt{7}$ 또는 $x=-2-\sqrt{7}$
$\therefore \overline{PQ}=(-2+\sqrt{7})-(-2-\sqrt{7})=2\sqrt{7}$

50 답 ②

직선 $y=-x+2$를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면
$y-a=-x+2$
$\therefore y=-x+2+a$
이 직선을 원점에 대하여 대칭이동하면
$-y=x+2+a$
$y=-x-2-a$ ⋯ ㉠
직선 ㉠이 원 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$, 즉
$(x-1)^2+(y+2)^2=4$의 넓이를 이등분하려면 직선 ㉠이 원의 중심인 점 $(1,\ -2)$를 지나야 하므로
$-2=-1-2-a$
$\therefore a=-1$

51 답 ④

두 점 $(a,\ -2)$, $(-1,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(2,\ 3)$이므로
$\frac{a+(-1)}{2}=2,\ \frac{-2+b}{2}=3$
$\therefore a=5,\ b=8 \Rightarrow a+b=13$

52 답 ③

두 점 $A(a,\ b)$, $C(4,\ -5)$에 대하여 선분 AC의 중점이 $B(-1,\ 3)$이므로
$\frac{a+4}{2}=-1,\ \frac{b-5}{2}=3$
$\therefore a=-6,\ b=11 \Rightarrow a+b=5$

53 답 ②

두 포물선이 점 P에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 P에 대하여 대칭이다.
즉, 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점은 P이다.
$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -1)$
$y=-x^2-8x-13=-(x+4)^2+3$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-4,\ 3)$
따라서 점 P의 좌표는 $P\left(\frac{2-4}{2},\ \frac{-1+3}{2}\right)$, 즉 $P(-1,\ 1)$이다.

54 답 $(x+2)^2+(y+1)^2=9$

원 $x^2+y^2+4x-6y+4=0$에서
$(x+2)^2+(y-3)^2=9$
이므로 중심의 좌표가 $(-2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.
원의 중심인 점 $(-2,\ 3)$을 점 $(-2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면
$\frac{-2+a}{2}=-2,\ \frac{3+b}{2}=1$
$\therefore a=-2,\ b=-1$
원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 구하는 원은 중심의 좌표가 $(-2,\ -1)$이고 반지름의 길이가 3이다.
$\therefore (x+2)^2+(y+1)^2=9$

TIP
점 $(x,\ y)$를 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(2a-x,\ 2b-y)$로 구해도 된다. 이것을 기억해도 좋지만 풀이 과정에서 유도하는 것을 알아 두는 게 더 낫다.
공식을 많이 머릿속에 기억하고 있는 것도 중요하지만 원리를 이해하여 공식을 유도하는 훈련도 필요하다.

55 답 ①

두 점 $(2,\ 0)$과 $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{2+a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$가 직선 $3x-y+4=0$ 위의 점이므로
$3\cdot\frac{2+a}{2}-\frac{b}{2}+4=0$
$\therefore 3a-b=-14$ ⋯ ㉠
또, 두 점 $(2,\ 0)$과 $(a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $3x-y+4=0$과 수직이므로
$\frac{b}{a-2}\times3=-1$
$\therefore a+3b=2$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-4,\ b=2$
$\therefore a+b=-2$

56 답 ④

두 점 $(3,\ -3)$, $(-3,\ 5)$를 이은 선분의 중점

$\left(\dfrac{3-3}{2},\ \dfrac{-3+5}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 1)$이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로 $b=1$

또, 두 점 $(3,\ -3)$, $(-3,\ 5)$를 지나는 직선이

직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\dfrac{-3-5}{3+3}\cdot a=-1 \qquad \therefore a=\dfrac{3}{4}$

$\therefore ab=\dfrac{3}{4}\times1=\dfrac{3}{4}$

57 답 ④

두 원 $x^2+(y-1)^2=4$, $(x-2)^2+(y+3)^2=4$의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 1)$, $(2,\ -3)$이고, 두 원의 중심을 이은 선분의 중점 $(1,\ -1)$이 직선 $ax+by+3=0$ 위의 점이므로

$a-b+3=0$ ⋯ ㉠

또, 두 점 $(0,\ 1)$, $(2,\ -3)$을 지나는 직선이

직선 $ax+by+3=0$과 수직이므로

$\dfrac{-4}{2}\cdot\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-1$

$\therefore b=-2a$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=-1,\ b=2 \qquad \therefore a+b=1$

58 답 ③

원 $x^2+y^2+2ax+4y+c=0$에서

$(x+a)^2+(y+2)^2=a^2-c+4$

원 $x^2+y^2+2bx-4y=0$에서

$(x+b)^2+(y-2)^2=b^2+4$

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-a,\ -2)$, $(-b,\ 2)$이고,

두 원의 중심은 직선 $y=2x$에 대하여 대칭이다.

두 점 $(-a,\ -2)$, $(-b,\ 2)$를 이은 선분의 중점

$\left(\dfrac{-a-b}{2},\ \dfrac{-2+2}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{-a-b}{2},\ 0\right)$이 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

$0=2\times\dfrac{-a-b}{2}$

$\therefore a+b=0$ ⋯ ㉠

또한, 두 점 $(-a,\ -2)$, $(-b,\ 2)$를 지나는 직선이

직선 $y=2x$와 수직이므로

$\dfrac{2+2}{-b+a}\times2=-1$

$\therefore b-a=8$ ⋯ ㉡

원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$a^2-c+4=b^2+4 \Rightarrow a^2-c=b^2$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=-4,\ b=4,\ c=0$

$\therefore a+b+c=0$

59 답 ②

점 $A(1,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면 $A'(2,\ 1)$

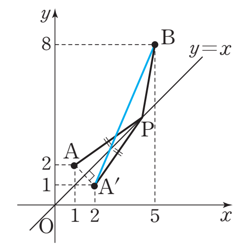
그림에서

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(5-2)^2+(8-1)^2}$

$=\sqrt{58}$



60 답 $14\sqrt{2}$

점 $A(6,\ 8)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라고 하면

$A'(-6,\ 8)$

점 $B(8,\ 6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면

$B'(8,\ -6)$

그림에서

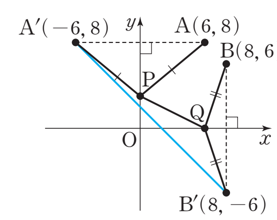
$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$

$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$

$\geq\overline{A'B'}$

$=\sqrt{(8+6)^2+(-6-8)^2}$

$=14\sqrt{2}$



연습 문제 [Z]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 196~197

01 답 ③

주어진 평행이동은 $(2,\ 1) \longrightarrow (-3,\ 4)$ 즉, x축의 방향으로 $-3-2=-5$만큼, y축의 방향으로 $4-1=3$만큼 평행이동한 것이다.

이 평행이동에 의하여 점 $(3,\ 2)$가 옮겨지는 점의 좌표는

$(3-5,\ 2+3)$이므로 $(-2,\ 5)$

$\therefore a=-2,\ b=5 \Rightarrow a+b=3$

02 답 ③

(ⅰ) 세 점 $A(-1,\ 1)$, $B(3,\ b)$, $C(a,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 $G(m,\ n)$이라고 하면

$$\begin{cases} m=\dfrac{-1+3+a}{3}=\dfrac{a+2}{3} \\ n=\dfrac{1+b+3}{3}=\dfrac{b+4}{3} \end{cases} \cdots ㉠$$

(ⅱ) 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+1,\ y+2)$에 의하여

점 $G(m,\ n)$이 원점으로 옮겨지므로

$m+1=0,\ n+2=0$

$\therefore m=-1,\ n=-2$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면

$a=-5,\ b=-10 \qquad \therefore a-b=5$

03 답 ②

도형의 평행이동을 이용하면 돼. x 대신 $x-2$, y 대신 $y+3$을 대입해야겠지.

직선 $y=kx+1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동시킨 직선이 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$의 중점을 지날 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$

④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

1st 도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $f(x-a, y-b)=0$이야.

직선 $y=kx+1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동시킨 직선의 방정식은

$y+3=k(x-2)+1$

$\therefore y=kx-2k-2$

도형의 평행이동과 점의 평행이동은 대입하는 값이 다르니까 주의하자.

2nd 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 중심의 좌표는 (a, b)지?

이 직선이 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$의 중심인 점 $(3, 2)$를 지나므로

$2=3k-2k-2$

$\therefore k=4$

04 답 ⑤

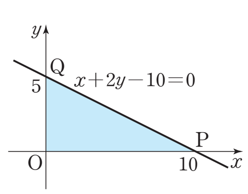
$x+2y=6$에 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-3$을 대입하면

$(x+2)+2(y-3)=6$

$\therefore x+2y-10=0$

이 직선이 x축, y축과 만나는 두 점 P, Q의 좌표는

P$(10, 0)$, Q$(0, 5)$



따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times10\times5=25$

05 답 ③

두 양수 m, n에 대하여 좌표평면 위의 점 A$(-2, 1)$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점을 B라 하고 점 B를 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심의 좌표가 $(3, 2)$일 때, mn의 값은?

세 점 A, B, C를 좌표평면에 그려봐. 직각삼각형이 그려지지.

① 16 ② 18 ③ 20

④ 22 ⑤ 24

1st 점 A를 평행이동하여 점 B를 구하고, 점 B를 평행이동하여 점 C를 구하자.

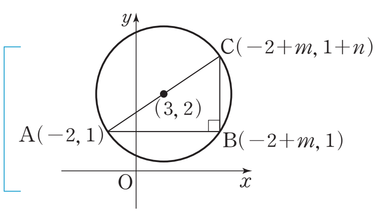
점 A$(-2, 1)$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점은 B$(-2+m, 1)$

점의 평행이동은 평행이동하는 만큼 대입하면 돼.

점 B$(-2+m, 1)$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점은 C$(-2+m, 1+n)$

2nd 점 A, B, C를 지나는 원을 구하고, m과 n의 값을 구하자.

그림에서 $\overline{\text{AB}}$와 $\overline{\text{BC}}$가 수직으로 만나니까 $\overline{\text{AC}}$는 원의 지름이 돼.



세 점 A, B, C를 지나는 원은 중심의 좌표가 $(3, 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$이므로 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=26$

점 B$(-2+m, 1)$은 원 위의 점이므로

$(-2+m-3)^2+(1-2)^2=26$

$\therefore m=10$ ($\because m>0$)

점 C$(-2+m, 1+n)$은 원 위의 점이므로

$(-2+m-3)^2+(1+n-2)^2=26$

$5^2+(n-1)^2=26$

$\therefore n=2\,(n>0)$

$\therefore mn=20$

06 답 ②

직선 $y=ax+b$를 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x, y+1)$에 의하여 옮기면

$y-1=ax+b$ $\therefore y=ax+b+1$ ⋯ ㉠

이때, 직선 ㉠과 직선 $x+2y-4=0$, 즉

$y=-\frac{1}{2}x+2$가 y축 위에서 수직으로 만나므로

$a\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ $\therefore a=2$

또, $y=-\frac{1}{2}x+2$의 y절편과 직선 ㉠의 y절편이 같으므로

$2=b+1$ $\therefore b=1$

$\therefore a+b=3$

07 답 3

$y=x+1$에 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-1$을 대입하면

$y-1=(x-a)+1$

$\therefore y=x-a+2$ ⋯ ㉠

원 $x^2+y^2-4x-2y-11=0$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=16$

직선 ㉠이 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심인 점 $(2, 1)$을 지나야 하므로 ㉠에 $x=2$, $y=1$을 대입하면

$1=2-a+2$

$\therefore a=3$

08 답 10

점 $(-4,\ 3)$을 x축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점 P, Q의 좌표는 $\mathrm{P}(-4,\ -3)$, $\mathrm{Q}(4,\ 3)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-4-4)^2+(-3-3)^2}=10$

09 답 ②

중심인 점 $(2,\ 1)$을 y축에 대하여 대칭이동하면 $(-2,\ 1)$이므로 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-1)^2=r^2$ ⋯ ㉠

원 ㉠이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$(-1+2)^2+(2-1)^2=r^2$, $r^2=2$

$\therefore r=\sqrt{2}$ ($\because r>0$)

10 답 ③

원 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

원의 중심인 점 $(-1,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동하면 $(-1,\ -2)$

이 점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $(-1+2,\ -2-3)$, 즉 $(1,\ -5)$

따라서 $a=1$, $b=-5$이므로

$a^2+b^2=26$

11 답 3

이차함수 $y=(x+1)^2-3$의 그래프를 평행이동

$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 옮기면

$y-b=(x-a+1)^2-3$ ⋯ ㉠

㉠의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=(-x-a+1)^2+b-3$ ⋯ ㉡

㉡의 그래프가 $y=x^2$의 그래프와 일치하므로

$-a+1=0$, $b-3=0$

$\therefore a=1$, $b=3 \Rightarrow ab=3$

다른 풀이

이차함수 $y=(x+1)^2-3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -3)$

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 이 꼭짓점을 옮기면 $(-1+a,\ -3+b)$

이 점이 이차함수 $y=x^2$의 그래프의 꼭짓점과 좌표와 일치하므로

$-1+a=0$, $-3+b=0$ $\quad\therefore a=1$, $b=3 \Rightarrow ab=3$

12 답 ⑤

점 $(2,\ -5)$를 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동하면 점 $(4,\ 3)$이 되므로 점 $(a,\ b)$는 두 점 $(2,\ -5)$, $(4,\ 3)$을 이은 선분의 중점이다. 즉,

$\dfrac{2+4}{2}=a$, $\dfrac{-5+3}{2}=b$

$\therefore a=3$, $b=-1 \Rightarrow a+b=2$

13 답 ②

$y=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$

$y=-x^2+4x-7=-(x-2)^2-3$

두 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ -1)$, $(2,\ -3)$이고, 두 점이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이므로

$a=\dfrac{-2+2}{2}$, $b=\dfrac{-1-3}{2}$

$\therefore a=0$, $b=-2 \Rightarrow a^2+b^2=4$

14 답 -6

(i) 선분 PQ의 중점 $\mathrm{M}\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{2+b}{2}\right)$가

직선 $x-2y-2=0$ 위에 있으므로

$\dfrac{1+a}{2}-2\times\dfrac{2+b}{2}-2=0$

$\therefore a-2b=7$ ⋯ ㉠

(ii) 선분 PQ와 직선 $x-2y-2=0$은 수직이므로

$\dfrac{b-2}{a-1}\times\dfrac{1}{2}=-1$

$\therefore 2a+b=4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-2$ $\quad\therefore ab=-6$

15 답 10

좌표평면에서 제1사분면 위의 점 A를 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점을 B라 하자. x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값이 $10\sqrt{2}$일 때, 선분 OA의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

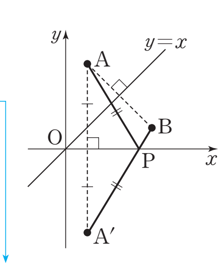
점 A를 x축에 대하여 대칭이동해서 구해야 해.

1st 그림을 그려서 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점과 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 구하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$와 같게 되는 것을 구하자.

점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 B의 좌표는 $(b,\ a)$

점 A를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 A′이라 하면

$\mathrm{A}'(a,\ -b)$



$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB}}$

직선 $y=x$에 대하여 점 $(a,\ b)$가 대칭이동하면 $(b,\ a)$가 되고, 도형 $f(a,\ b)=0$이 대칭이동하면 $f(b,\ a)=0$이 돼.

2nd $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$가 최소가 되는 경우를 구하여 $\overline{\mathrm{OA}}$의 길이를 유도하자.

x축 위의 점 P가 선분 A′B 위에 있을 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$가 최솟값 $\overline{\mathrm{A'B}}=10\sqrt{2}$를 갖는다.

$\therefore \overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}$

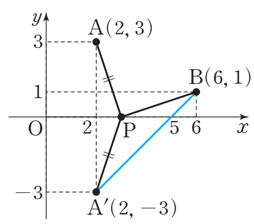
$=\sqrt{2(a^2+b^2)}=10\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+b^2}=10$

16 답 P(5, 0)

점 A(2, 3)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′(2, −3)

점 A′(2, −3)과 점 B(6, 1)을 이은 직선이 x축과 만나는 점 P에서 $\overline{AP}+\overline{BP}$는 최솟값을 가진다. … Ⅰ



직선 A′B의 방정식은

$y-1=\dfrac{1-(-3)}{6-2}(x-6)$

$\therefore\ y=x-5$ … Ⅱ

따라서 점 P의 좌표는 P(5, 0)이다. … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	$\overline{AP}+\overline{BP}$가 최솟값을 갖는 점 P의 위치를 구한다.	50%
Ⅱ	직선 A′B의 방정식을 구한다.	40%
Ⅲ	점 P의 좌표를 구한다.	10%

Ⅲ 대단원 TEST [S~Z] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 198~202

01 답 ③

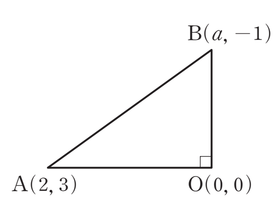
삼각형 AOB는 ∠AOB=90°인 직각삼각형이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$

$(2^2+3^2)+(a^2+1^2)$

$=(a-2)^2+4^2$



정리하면

$4a=6 \qquad \therefore\ a=\dfrac{3}{2}$

02 답 14

> 좌표평면 위에 있는 두 점 A($a-1$, 4), B(5, $a-4$) 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.
>
> 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 식을 세우면 되겠지.

1st 두 점 사이의 거리를 구하는 공식으로 $\overline{AB}$를 구하자.

두 점 A($a-1$, 4), B(5, $a-4$) 사이의 거리 $\overline{AB}$가 $\sqrt{10}$이므로

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)일 때, $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\overline{AB}=\sqrt{(a-1-5)^2+(4-a+4)^2}$

$\quad=\sqrt{(a-6)^2+(8-a)^2}=\sqrt{10}$

양변을 제곱하면 $\overline{AB}^2=(a-6)^2+(8-a)^2=10$

정리하면 $a^2-14a+45=0$

2nd a를 직접 구할 필요없이 근과 계수의 관계를 이용하여 모든 근의 합을 구하자.

따라서 이차방정식 $a^2-14a+45=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의해 14이다.

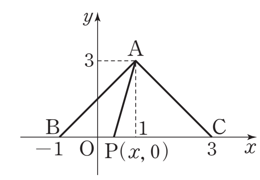
$\dfrac{D}{4}=7^2-45=4>0$이므로 서로 다른 두 실근을 가져.

03 답 ①

점 P는 x축 위의 점이므로

P(x, 0) ($-1\le x\le 3$)으로

놓으면



$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(x-1)^2+3^2+(x+1)^2$

$=2x^2+11$

따라서 $x=0$일 때, 최솟값 11을 갖는다.

04 답 ⑤

> 좌표평면 위의 세 점 O(0, 0), A(3, 0), B(0, 6)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 내부에 점 P가 있다. 이때, $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은?
>
> ① 18　② 21　③ 24
>
> ④ 24　⑤ 30
>
> 점 P의 좌표를 (x, y)라 놓고 완전제곱식으로 변형하여 최솟값을 구해야 해.

1st 점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 구하자.

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(x^2+y^2)+\{(x-3)^2+y^2\}+\{x^2+(y-6)^2\}$

$=3x^2-6x+3y^2-12y+45$

$=3(x-1)^2+3(y-2)^2+30$

실수 a에 대하여 $a^2\ge0$이므로 $a=0$일 때 최소가 되는 거야.

2nd 실수 a에 대하여 $a^2\ge0$이므로 a^2이 최솟값을 가지려면 $a=0$이어야 함을 이용하자.

따라서 $x=1$, $y=2$일 때, 최솟값은 30이다.

05 답 ⑤

$\overline{AG}=\sqrt{(6-2)^2+(2-5)^2}=5$

점 G는 $\overline{AD}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{AD}=\dfrac{3}{2}\times\overline{AG}=\dfrac{15}{2}$

06 답 ②

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a로 놓으면

$\overline{AC}=\sqrt{(k-1)^2+9}=\sqrt{2}a \qquad \therefore\ a=\sqrt{\dfrac{(k-1)^2+9}{2}}$

(정사각형 ABCD의 넓이)$=a^2=\dfrac{(k-1)^2+9}{2}=5$

$(k-1)^2=1$에서 $k=2$ ($\because k>0$)

07 답 ④

$P\left(\dfrac{2\times4+1\times1}{2+1}, \dfrac{2\times3+1\times(-3)}{2+1}\right)$에서 P(3, 1)

$Q\left(\dfrac{2\times4-1\times1}{2-1}, \dfrac{2\times3-1\times(-3)}{2-1}\right)$에서 Q(7, 9)

$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$

답_131144심플자이고등(Z).indd 140 2017. 9. 15. 오후 5:48

08 답 ④

$\dfrac{0+a+c}{3}=-2$에서 $a+c=-6$

$\dfrac{0+b+d}{3}=4$에서 $b+d=12$

선분 AB의 중점의 좌표를 (x, y)이므로

$x=\dfrac{a+c}{2}=-3$, $y=\dfrac{b+d}{2}=6$

$\therefore x+y=3$

09 답 ④

점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하므로

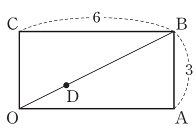
$\mathrm{P}\left(\dfrac{10-2}{2+1}, \dfrac{2k+4}{2+1}\right)$, 즉 $\mathrm{P}\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{2k+4}{3}\right)$

점 P가 x축과 만난다고 하므로

$\dfrac{2k+4}{3}=0 \qquad \therefore k=-2$

10 답 ④

그림과 같이 가로의 길이가 6, 세로의 길이가 3인 직사각형 OABC에 대하여 선분 OB를 $1:2$로 내분하는 점을 D라 하자. 선분 OD를 $2:3$으로 외분하는 점과 직선 CD 사이의 거리는?

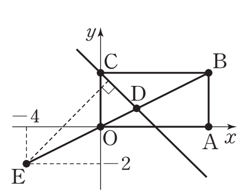


주어진 조건에 맞도록 좌표평면에 나타내면 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있을 거야.

① $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ ② $\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$ ④ $\dfrac{9}{2}\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{11}{2}\sqrt{2}$

1st 직사각형 OABC를 좌표평면에 나타내어 각 꼭짓점들의 좌표를 구하자.

직사각형 OABC를 점 O가 원점과 일치하도록 하는 좌표평면에 놓으면 A(6, 0), B(6, 3), C(0, 3)이다.



직사각형의 가로의 길이가 6, 세로의 길이가 3이므로 좌표를 정할 수 있어.

2nd 내분하는 점 D와 외분하는 점 E를 구하자.

선분 OB를 $1:2$로 내분하는 점 D는

$\mathrm{D}\left(\dfrac{6+0}{1+2}, \dfrac{3+0}{1+2}\right)=\mathrm{D}(2, 1)$

선분 OD를 $2:3$으로 외분하는 점을 E라 하면

$\mathrm{E}\left(\dfrac{4-0}{2-3}, \dfrac{2-0}{2-3}\right)=\mathrm{E}(-4, -2)$

3rd 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하자.

직선 CD의 방정식은 $x+y-3=0$

따라서 점 E와 직선 CD 사이의 거리는

한 점 (x_1, y_1)와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\dfrac{|-4-2-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{2}}=\dfrac{9}{2}\sqrt{2}$

11 답 ①

(ⅰ) 두 직선 $x+2y=5$, $2x+3y=8$의 교점 $(1, 2)$가 직선 $ax+y=0$ 위에 있을 때

$a+2=0 \Rightarrow a=-2$

(ⅱ) 두 직선 $x+2y=5$, $ax+y=0$이 평행할 때

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{1} \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

(ⅲ) 두 직선 $2x+3y=8$, $ax+y=0$이 평행할 때

$\dfrac{2}{a}=\dfrac{3}{1} \Rightarrow a=\dfrac{2}{3}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 모든 상수 a의 값의 곱은

$(-2)\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{3}$

12 답 150

점의 평행이동을 먼저 구해야겠지.
도형의 평행이동은 점의 평행이동과 다르다는 점에 유의해야 해.

좌표평면에서 점 $(1, 4)$를 점 $(-2, a)$로 옮기는 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2+8x-6y+21=0$은 원 $x^2+y^2+bx-18y+c=0$으로 옮겨진다. 세 실수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값을 구하시오.

1st 점의 평행이동에 의해 x축과 y축의 방향으로 옮겨지는 것을 구하자.

점 $(1, 4)$를 점 $(-2, a)$로 옮기는 평행이동에 의하여 좌표평면 위의 점은 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $a-4$만큼 옮겨진다. x좌표에서 $-2-1=-3$ y좌표에서 $a-4$

2nd 원의 중심의 좌표를 구하고, 평행이동한 것으로 a, b의 값을 구하자.

$x^2+y^2+8x-6y+21=0$에서

$(x+4)^2+(y-3)^2=4$ ⋯ ㉠

$x^2+y^2+bx-18y+c=0$에서

$\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+(y-9)^2=81-c+\dfrac{b^2}{4}$ ⋯ ㉡

㉠의 원의 중심 $(-4, 3)$이 평행이동에 의하여

㉡의 원의 중심 $\left(-\dfrac{b}{2}, 9\right)$로 옮겨지므로

$-4-3=-\dfrac{b}{2}$, $3+a-4=9 \qquad \therefore a=10$, $b=14$

3rd 원의 반지름의 길이는 평행이동해도 변하지 않아.

평행이동을 하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$4=81-c+\dfrac{196}{4} \qquad \therefore c=126$

평행이동해도 변하지 않는 것은 길이, 넓이가 있어.

$\therefore a+b+c=150$

13 답 ②

두 직선 $x-ay+2=0$, $2x+by-2=0$은 수직이므로

$1\times2+(-a)\times b=0 \qquad \therefore ab=2$

두 직선 $x-ay+2=0$, $x+(b-4)y-2=0$은 평행하므로

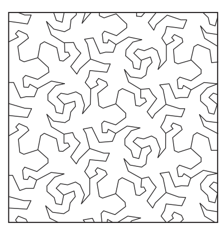
$\dfrac{1}{1}=\dfrac{-a}{b-4}\neq\dfrac{2}{-2}$에서 $a+b=4$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=12$

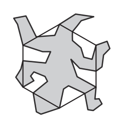
14 답 ④

테셀레이션이란 똑같은 모양의 도형을 평행이동과 대칭이동하여 빈틈이나 겹침도 없이 평면을 가득 채우는 것이다. 에스허르(Escher, M. C.)의 '도마뱀'이란 작품은 같은 크기와 모양의 여러 마리 도마뱀들이 테셀레이션을 이루고 있다. [그림 1]의 도마뱀은 [그림 2]와 같이 정육각형을 토대로 그려진 것으로 정육각형의 외부에 있는 도마뱀의 나머지 부분은 정육각형의 내부의 여백과 같다.

기본적인 도형은 정육각형이야. 정육각형이 [그림 1]에서 어떻게 배치되는지 알아보자.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]의 직사각형의 가로의 길이가 $4\sqrt{3}$일 때, [그림 1]에 있는 도마뱀 모양 한 개의 넓이는?

(단, [그림 1]의 직사각형의 각 꼭짓점은 [그림 2]와 같이 토대가 된 정육각형의 한 꼭짓점이다.)

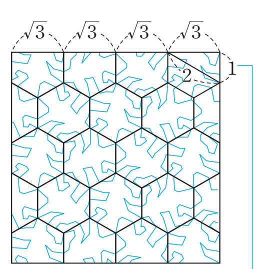
① $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

④ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

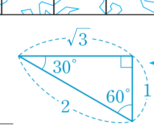
도마뱀 한 개의 넓이는 정육각형의 넓이이므로 정육각형 한 변의 길이를 구하자.

1st 그림에서 간단한 도형의 대칭이동에 의해 만들어지는 것들을 생각해 보자.

정육각형은 6개의 정삼각형으로 이루어져 있고 [그림 1]에 있는 직사각형의 가로의 길이가 $4\sqrt{3}$이므로 정육각형의 한 변의 길이는 1이고 도마뱀 모양 한 개의 넓이는 한 변의 길이가 1인 정육각형의 넓이와 같다.



그림에서

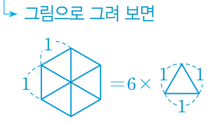


2nd 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이야.

한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이고,

한 변의 길이가 1인 정육각형은 한 변의 길이가 1인 정삼각형 6개가 모인 것이다.

그림으로 그려 보면



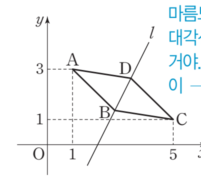
따라서 도마뱀 모양 한 개의 넓이는 한 변의 길이가 1인 정육각형의 넓이와 같으므로

$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

15 답 4

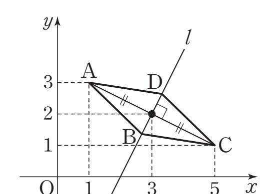
그림과 같이 좌표평면 위에 마름모 ABCD가 있다. 두 점 A, C의 좌표가 각각 $(1, 3)$, $(5, 1)$이고, 두 점 B, D를 지나는 직선 l의 방정식이 $2x+ay+b=0$일 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

마름모의 성질 중 하나가 두 대각선이 수직으로 만난다는 거야. 이것으로 기울기의 곱이 -1이 나오게 되는 거야.



1st 마름모의 성질에 의해 두 대각선은 수직으로 만나지?

두 점 A(1, 3), B(5, 1)을 지나는 직선 AC의 기울기를 구하면



(직선 AC의 기울기)

$=\frac{3-1}{1-5}=-\frac{1}{2}$

마름모의 성질 중 하나가 두 대각선이 수직으로 만나는 거야.

이때, 마름모는 두 대각선이 수직으로 만나므로 직선 l과 선분 AC는 수직으로 만난다. 즉, 직선 l의 기울기는 2이다.

2nd 기울기가 주어지고 한 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있어.

직선 l은 선분 AC를 수직이등분하므로 직선 l은 선분 AC의 중점 $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 점 $(3, 2)$를 지난다.

따라서 직선 l은 기울기가 2이고, 점 $(3, 2)$를 지나므로

$y=2(x-3)+2$

한 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

$2x-y-4=0$

이것이 $2x+ay+b=0$과 같으므로

$a=-1$, $b=-4$ $\quad\therefore ab=4$

16 답 ②

$(2a+1)x-(a-3)y-2a-15=0$, 즉

$a(2x-y-2)+(x+3y-15)=0$은 두 직선

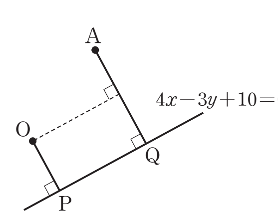
$2x-y-2=0$, $x+3y-15=0$의 교점을 지나는 직선이므로 A(3, 4)

따라서 점 A(3, 4)와 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times3+4\times4-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$

17 답 ③

선분 PQ의 길이는 원점 O에서 직선 AQ에 이르는 거리와 같다.



직선 AQ는 직선 $4x-3y+10=0$과 수직이므로 기울기는 $-\frac{3}{4}$이고, 점 A(2, 1)을 지나므로

직선 AQ의 방정식은

$y-1=-\frac{3}{4}(x-2)$

$3x+4y-10=0$

따라서 구하는 길이는 원점 O와 직선 $3x+y-10=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

18 답 ③

점 $\mathrm{P}(a,\ 0)$과 직선 $2x+y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2a+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|2a+2|}{\sqrt{5}}$ … ㉠

점 $\mathrm{P}(a,\ 0)$과 직선 $x+2y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|a-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|a-1|}{\sqrt{5}}$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $|2a+2|=|a-1|$

$2a+2=\pm(a-1)$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=-\frac{1}{3}$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 1이다.

19 답 ④

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$

직선 OA의 방정식은 $2x-5y=0$이므로

점 $\mathrm{C}(1,\ 4)$와 직선 $2x-5y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2-20|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\frac{18}{\sqrt{29}}$

따라서 평행사변형 OABC의 넓이는

$\sqrt{29}\times\frac{18}{\sqrt{29}}=18$

20 답 ③

제1사분면에서 x축 및 y축에 접하는 원의 중심은

직선 $y=x$ 위에 있다.

중심이 직선 $3x-2y-2=0$ 위에도 있으므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=2$

따라서 원의 중심의 좌표가 $(2,\ 2)$이므로 구하는 반지름의 길이는 2이다.

심플 정리

[x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식]

반지름의 길이가 r일 때, 원의 중심의 위치에 따라 다음과 같이 잡는다.

(1) 제1사분면 : $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

(2) 제2사분면 : $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

(3) 제3사분면 : $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

(4) 제4사분면 : $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

21 답 ②

원의 중심이 x축 위에 있으므로 원의 방정식을 $(x-a)^2+y^2=r^2(r>0)$으로 놓으면 이 원이 점 $(2,\ -3)$을 지나므로

$(a-2)^2+9=r^2$ … ㉠

점 $(-2,\ -1)$을 지나므로

$(a+2)^2+1=r^2$ … ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$-8a+8=0 \qquad \therefore\ a=1$

따라서 $a=1$을 ㉠에 대입하면 $r^2=10$이므로

$r=\sqrt{10}\ (\because\ r>0)$

22 답 ②

원 $x^2+y^2-2ax+4ay+10a-10=0$에서

$(x-a)^2+(y+2a)^2=5a^2-10a+10$

$f(a)=5a^2-10a+10$으로 놓으면

$f(a)=5(a-1)^2+5$이므로 $f(a)$는 $a=1$일 때 최솟값을 갖는다.

이때, 원의 중심의 좌표는 $(a,\ -2a)$에서 $(1,\ -2)$

$\therefore\ p=1,\ q=-2 \Rightarrow p+q=-1$

23 답 ②

접선의 방정식을 $y=\frac{4}{3}x+a$로 놓으면 원의 중심 $(-2,\ 1)$에서 직선 $4x-3y+3a=0$에 이르는 거리는 5이다.

$\frac{|-8-3+3a|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|3a-11|}{5}=5$에서

$a=-\frac{14}{3}$ 또는 $a=12$

구하는 접선의 방정식은

$4x-3y-14=0$ 또는 $4x-3y+36=0$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$-14+36=22$

24 답 ⑤

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$로 놓으면

각 점에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4,\ x_2x+y_2y=4$

이들은 모두 점 $(4,\ -3)$을 지나므로

$4x_1-3y_1=4$ … ㉠

$4x_2-3y_2=4$ … ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$4(x_1-x_2)-3(y_1-y_2)=0$

$\therefore$ (직선 AB의 기울기)$=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{3}$

25 답 ①

점 (4, 3)이 점 (1, 5)로 옮겨지는 평행이동은 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $a=-3$, $b=2$이고 이 평행이동에 의하여 점 $(-3, 2)$는 점 $(-6, 4)$로 옮겨진다.

26 답 ②

점 $(3, -1)$을 점 $(1, 2)$로 옮기는 것은 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$y-3=3(x+2)-5$에서

$y=3x+4$

$\therefore a=3, b=4 \Rightarrow a+b=3+4=7$

27 답 ③

$P(a, -b)$, $Q(-a, b)$, $R(-a, -b)$이므로

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a-a-a}{3}, \frac{-b+b-b}{3}\right)$에서 $\left(-\frac{a}{3}, -\frac{b}{3}\right)$

$-\frac{a}{3}=3$, $-\frac{b}{3}=-2$

$\therefore a=-9, b=6 \Rightarrow a+b=-3$

TIP

어떤 한 점을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 이은 삼각형은 항상 직각삼각형이 나오게 된다. 그 이유는 x축에 대하여 대칭이동하고 y축에 대하여 대칭이동할 때, 점들이 수직으로 움직이기 때문에 직각이 생기는 것이다.

28 답 ③

직선 $y=3x+k$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $x=3y+k$에서 $x-3y-k=0$

원의 중심인 점 $(1, 0)$에서 직선 $x-3y-k=0$까지의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같으므로

$\frac{|1-k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{10}$에서 $|1-k|=10$

$\therefore k=11$ ($\because k>0$)

29 답 ①

좌표평면 위에 직선 $y=x$ 위의 한 점 P가 있다. 점 P에서 점 A(3, 2)와 점 B(5, 3)에 이르는 거리의 합 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때, 삼각형 ABP의 넓이는?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

거리의 합의 최솟값을 구하려면 대칭이동을 이용해야 해. 직선 $y=x$에 대하여 점 B를 대칭이동해 보자.

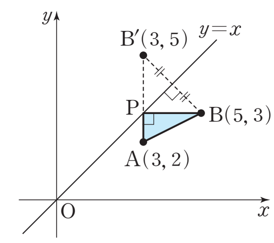
1st 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하자.

점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점을 B′(3, 5)라고 하자. 직선 $y=x$에 대하여 점 (x, y)를 대칭이동한 점은 x와 y를 바꾼 (y, x)야.

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB'}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소인 점 P는 점 B′과 점 A를 이은 직선과 직선 $y=x$의 교점인 점 (3, 3)이다.

2nd 삼각형 ABP가 직각삼각형임을 이용하여 넓이를 구하자.



그림과 같이 점 P의 좌표는 점 A의 x좌표와 같고, 점 B의 y좌표와 같으므로 점 P의 y좌표는 삼각형 ABP는 직각삼각형이다.

$\therefore$ (삼각형 ABP의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{PA}$

$=\frac{1}{2}\times2\times1=1$

30 답 3

주어진 원을 원점에 대하여 대칭이동하면

$(x+a)^2+(y-2)^2=4$

다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$(x-2)^2+(y+a)^2=4$ … Ⅰ

직선 $x+2y+4=0$에 의하여 넓이가 이등분되려면 직선 $x+2y+4=0$이 원의 중심인 점 $(2, -a)$를 지나야 하므로 … Ⅱ

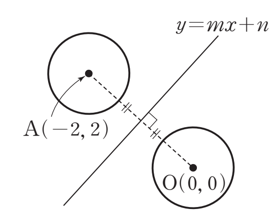
$2+2\times(-a)+4=0$에서 $a=3$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	대칭이동한 원의 방정식을 구한다.	30%
Ⅱ	직선이 원의 중심을 지나야 함을 안다.	60%
Ⅲ	상수 a의 값을 구한다.	10%

31 답 3

원 $(x+2)^2+(y-2)^2=16$의 중심 $A(-2, 2)$가 원점 $O(0, 0)$으로 이동하므로 두 원의 중심을 양 끝점으로 하는 선분의 수직이등분선이 직선 $y=mx+n$이다. … Ⅰ



선분 AO의 중점의 좌표는 $(-1, 1)$이고, 선분 AO의 기울기는 $\frac{-2}{2}=-1$이므로 선분 AO의 수직이등분선의 기울기는 1이다. … Ⅱ

기울기가 1이고 점 $(-1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=1\cdot(x+1)$에서 $y=x+2$

$\therefore m=1, n=2 \Rightarrow m+n=3$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	구하는 직선이 무엇인지 안다.	30%
Ⅱ	직선의 기울기를 수직 조건으로 구한다.	30%
Ⅲ	직선의 방정식으로 m, n을 구하고 $m+n$의 값을 계산한다.	40%