심플
자이스토리 고등수학의 기본을 심플하게 완성!

SIMPLE Xi story

고등 **수학**(하)

[정답 및 해설]

자이스토리 · 수경출판사

SIMPLE Xi story 빠른 정답 찾기

Ⅳ 집합과 명제

A 집합의 뜻과 표현

01 집합 02 원소 03 공집합, $\varnothing$ 04 벤 다이어그램
05 원소나열법, 조건제시법 06 × 07 × 08 ○
09 ○ 10 × 11 집합이 아니다.
12 집합이고 원소는 1, 2, 3, 4이다.
13 집합이 아니다. 14 집합이고 원소는 없다.
15 $\in$ 16 $\in$ 17 $\notin$ 18 $\in$ 19 $\notin$ 20 $\in$
21 $\{x \mid x$는 10 이하의 짝수$\}$ 22 $\{1, 3, 5, 15\}$
23 $\{x \mid x$는 35 이하의 7의 양의 배수$\}$ 24 $\{2, 3, 5, 7\}$
25 $n(A)=4$ 26 $n(B)=2$ 27 $n(C)=1$
28 $n(D)=0$ 29 ③ 30 ② 31 ④ 32 ②
33 ④ 34 3 35 ⑤ 36 ⑤ 37 ⑤ 38 ③
39 ① 40 ⑤ 41 ④

B 집합의 포함 관계

01 부분집합, $A\subset B$ 02 $A\not\subset B$
03 서로 같다, $A=B$ 04 진부분집합, $A\neq B$
05 × 06 ○ 07 × 08 ○ 09 $A\subset B$
10 $B\subset A$ 11 $A=B$ 12 $A\subset B$
13 $B\subset A$ 14 $A=B$ 15 $a=3, b=1$
16 $a=2, b=-1$ 17 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$
18 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$ 19 16 20 15 21 8 22 4
23 2 24 ①, ④ 25 ① 26 ④ 27 ④
28 ② 29 ② 30 ⑤ 31 ② 32 ① 33 ①
34 ③ 35 ③ 36 ② 37 1 38 12 39 ②
40 ⑤ 41 ④ 42 ④ 43 ⑤ 44 15 45 ④
46 128 47 ③ 48 ④ 49 ① 50 ③ 51 ③
52 ②

연습 [A−B]

01 ③ 02 ④ 03 ② 04 ③ 05 ④ 06 3
07 ④ 08 ② 09 ⑤ 10 ② 11 ⑤ 12 ④
13 ② 14 8 15 24

C 집합의 연산

01 합집합 02 교집합 03 여집합
04 차집합 05 × 06 ○ 07 ○ 08 ○
09 ○ 10 $\{x \mid x\in A$ 또는 $x\in B\}$
11 $\{x \mid x\in A$ 그리고 $x\in B\}$ 12 $\{x \mid x\in U$ 그리고 $x\notin A\}$
13 $\{x \mid x\in A$ 그리고 $x\notin B\}$ 14 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$
15 $\{2\}$ 16 $\{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$
17 $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$ 18 $\{1, 4, 8\}$
19 $\{3, 5, 7\}$ 20 ○ 21 × 22 ○
23 $A\cap A^C$ 24 A^C 25 B 26 B^C 27 ③
28 ② 29 ④ 30 ③ 31 ④ 32 5 33 ③
34 ③ 35 ② 36 ② 37 ① 38 ② 39 ④
40 ④ 41 ⑤ 42 ① 43 ④ 44 ① 45 ③
46 ② 47 ③ 48 ① 49 ① 50 ②

D 집합의 연산법칙

01 교환법칙 02 결합법칙
03 분배법칙 04 드모르간의 법칙
05 ○ 06 × 07 ○ 08 ○
09 $A\cap B=\{2, 3\}$, $B\cap A=\{2, 3\}$
$A\cap B$와 $B\cap A$는 서로 같다.
10 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B\cup A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$A\cup B$와 $B\cup A$는 서로 같다.
11 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B\cup C=\{1, 3, 5, 7, 8\}$
12 $(A\cup B)\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$,
$A\cup(B\cup C)=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$,
$(A\cup B)\cup C$와 $A\cup(B\cup C)$는 서로 같다.
13 $A\cap B=\{1, 5\}$, $B\cap C=\{3, 5\}$
14 $(A\cap B)\cap C=\{5\}$, $A\cap(B\cap C)=\{5\}$,
$(A\cap B)\cap C$와 $A\cap(B\cap C)$는 서로 같다.
15 $B\cup C=\{2, 3, 5, 7, 9\}$, $A\cap B=\{7\}$, $A\cap C=\{3, 5\}$
16 $A\cap(B\cup C)=\{3, 5, 7\}$,
$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{3, 5, 7\}$,
$A\cap(B\cup C)$와 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$는 서로 같다.
17 $B\cap C=\{2\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
$A\cup C=\{1, 2, 3, 5, 7\}$

D 집합의 연산법칙

18 $A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 3, 5, 7\}$,
$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1, 2, 3, 5, 7\}$,
$A\cup(B\cap C)$와 $(A\cup B)\cap(A\cup C)$는 서로 같다.
19 $(A\cup B)^C=\{3\}$, $A^C\cap B^C=\{3\}$,
$(A\cup B)^C$과 $A^C\cap B^C$은 서로 같다.
20 $(A\cap B)^C=\{2, 3, 4\}$, $A^C\cup B^C=\{2, 3, 4\}$
$(A\cap B)^C$과 $A^C\cup B^C$은 서로 같다.
21 2 22 1 23 6 24 7 25 ③ 26 ⑤
27 ① 28 ⑤ 29 ① 30 ③ 31 ④ 32 ③
33 ③ 34 ② 35 6 36 ⑤ 37 ④ 38 ③
39 ⑤ 40 ③ 41 20 42 ① 43 45 44 ③
45 ① 46 ③ 47 ⑤ 48 10 49 ② 50 ③
51 ① 52 ② 53 ④

연습 [C-D]

01 15 02 ② 03 ④ 04 ① 05 ⑤ 06 ⑤
07 ② 08 15 09 ⑤ 10 ④ 11 ③ 12 15
13 34 14 ② 15 58

E 명제와 조건

01 명제 02 조건 03 부정 04 진리집합
05 $P\cap Q$, $P\cup Q$ 06 × 07 × 08 ○ 09 ○
10 ○ 11 × 12 × 13 ○ 14 ○ 15 ×
16 조건 17 명제 18 조건 19 명제
20 고래는 포유류가 아니다. 21 $\sqrt{2}$는 무리수가 아니다.
22 $x\le 3$ 23 $x\ne 1$이고 $x\ne 2$ 24 $x\le 0$ 또는 $x\ge 2$
25 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ 26 $\{7\}$ 27 $\{1, 2, 3, 4\}$
28 $\{1, 3\}$ 29 $\{2, 3, 4, 5\}$ 30 $\{4, 5, 6, 7\}$
31 $\{6\}$ 32 $\{1, 2, 3, 9, 10\}$ 33 $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$
34 ⑤ 35 ④ 36 ② 37 ③ 38 ① 39 ④
40 ③ 41 ③ 42 ③ 43 ④ 44 ④ 45 ③
46 ④ 47 ① 48 ③ 49 ③ 50 3 51 ②
52 38 53 ⑤ 54 ① 55 ④ 56 2 57 ②
58 1 59 ③ 60 ① 61 ⑤ 62 ⑤

F 명제

01 가정, 결론 02 반례 03 어떤, $\sim p$
04 모든, $\sim p$ 05 ○ 06 × 07 ○ 08 ○
09 가정 : $x=1$이다.
결론 : $x+2=3$이다.
10 가정 : x는 무리수이다.
결론 : x는 실수이다.
11 가정 : 어떤 수는 10의 약수이다.
결론 : 어떤 수는 5의 약수이다.
12 가정 : 어떤 삼각형은 정삼각형이다.
결론 : 어떤 삼각형은 이등변삼각형이다.
13 참 14 거짓 15 참 16 거짓 17 거짓 18 참
19 참 20 거짓 21 어떤 실수 x에 대하여 $x-5\ne 2$이다.
22 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\le 0$이다. 23 ④
24 ③ 25 ② 26 ④ 27 ① 28 ⑤ 29 ②
30 ②, ④ 31 ② 32 ① 33 ④ 34 ③
35 ② 36 ④

G 명제의 역과 대우

01 역 02 대우 03 정의 04 증명 05 정리
06 귀류법 07 × 08 ○ 09 ○ 10 × 11 ○
12 역 : x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다.
대우 : x가 4의 배수가 아니면 x는 2의 배수가 아니다.
13 역 : x가 9의 약수이면 x는 3의 약수이다.
대우 : x가 9의 약수가 아니면 x는 3의 약수가 아니다.
14 역 : $x^2=4$이면 $x=2$이다.
대우 : $x^2\ne 4$이면 $x\ne 2$이다.
15 역 : $x^2>1$이면 $x>1$이다.
대우 : $x^2\le 1$이면 $x\le 1$이다.
16 역 : 두 대각선이 서로 수직이면 마름모이다.
대우 : 두 대각선이 서로 수직이 아니면 마름모가 아니다.
17 역 : 기온이 떨어지면 비가 온다
대우 : 기온이 떨어지지 않으면 비가 오지 않는다.
18 $\sim q\to\sim p$ 19 $\sim q\to p$ 20 $q\to p$
21 $p\to\sim q$ 22 (가) 홀수, (나) $2k-1$ 23 ⑤
24 ② 25 ⑤ 26 6 27 ② 28 3 29 ③
30 ④ 31 해설 참조 32 ②

연습 [E-G]

01 ③ 02 ④ 03 ⑤ 04 ② 05 ④ 06 ①
07 ④ 08 ② 09 -2 10 ④ 11 ⑤ 12 ④
13 ③ 14 ⑤

H 필요조건과 충분조건

01 충분조건　02 필요조건　03 필요충분조건
04 ○　05 ×　06 ×　07 ○　08 ○　09 ○
10 ○　11 (1) $P=\{1\}$, $Q=\{1, 2\}$　(2) 충분, 필요
12 (1) $P=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $Q=\{4, 8\}$　(2) 필요, 충분
13 (1) 참　(2) 거짓　(3) 충분조건　(4) 필요조건
14 (1) 거짓　(2) 참　(3) 필요조건　(4) 충분조건
15 (1) $P=\{2\}$, $Q=\{2\}$　(2) 필요충분, 필요충분
16 (1) $P=\{-1, 1\}$, $Q=\{-1, 1\}$　(2) 필요충분, 필요충분
17 (1) 참　(2) 참　(3) 필요충분조건
18 (1) 참　(2) 참　(3) 필요충분조건
19 ③　20 ②　21 ②　22 ③　23 ②　24 ⑤
25 ③　26 ②　27 ③　28 ③　29 ③　30 ③

I 절대부등식

01 절대부등식　02 산술평균, 기하평균　03 양수
04 ○　05 ○　06 ×　07 ○　08 ×
09 $\sqrt{2}+1<\sqrt{3}+1$　10 $2+\sqrt{3}>2\sqrt{3}$　11 $3\sqrt{2}+2>6$
12 $2\sqrt{5}+3\sqrt{3}<2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$
13 (가) 252　(나) 220　(다) $>$
14 $2+\sqrt{5}<3+\sqrt{3}$　15 $1+2\sqrt{2}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$
16 (가) $\frac{2}{3}$　(나) $<$　17 ㄱ, ㄹ
18 (가) $a-\frac{1}{2}b$　(나) $a=b=0$　19 ③　20 ⑤
21 ③　22 ②　23 ③　24 ⑤　25 ①　26 ②
27 ①　28 ⑤　29 ①　30 ⑤　31 ②　32 ③
33 ④　34 ①　35 ②　36 ④　37 ⑤　38 ②
39 ④　40 ①　41 ②

연습 [H – I]

01 ③　02 ①　03 ④　04 ⑤　05 ②　06 ②
07 4　08 ④　09 ②　10 ③　11 ③　12 13
13 ③

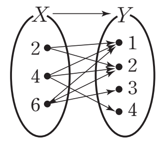
Ⅳ 대단원 총정리 [A–I]

01 ②　02 14　03 ③　04 ①　05 ②　06 ③
07 ②　08 ④　09 ②　10 ②　11 ⑤　12 ③
13 ⑤　14 9　15 30　16 ②　17 ⑤　18 19
19 ③　20 ③　21 ②　22 ⑤　23 ②　24 ②
25 ①　26 8　27 7　28 16

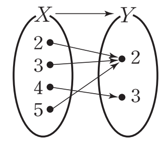
Ⅴ 함수

J 함수

01 X, Y　02 치역, 부분집합　03 하나씩만
04 서로 같다, $f=g$　05 ○　06 ×　07 ○
08 ○　09



10



11 ×　12 ×　13 ×　14 ○　15 ○　16 ○
17 정의역 : $\{1, 2, 3\}$, 공역 : $\{a, b\}$, 치역 : $\{a, b\}$
18 정의역 : $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역 : $\{a, b, c\}$, 치역 : $\{a, b\}$
19 1　20 $\sqrt{3}$　21 $\sqrt{3}-1$　22 $-\sqrt{2}$
23 서로 같은 함수이다.　24 서로 같은 함수가 아니다.
25 ①, ②　26 ②　27 ⑤　28 ④　29 ⑤
30 ①　31 ④　32 ③　33 ②　34 ④　35 ④
36 ②　37 ③　38 ⑤　39 ②　40 ①　41 ②
42 ②　43 ③　44 ③　45 ①　46 10　47 ②
48 2　49 ⑤　50 ⑤　51 ①　52 ①　53 3

K 여러 가지 함수

01 $f(x_1)\neq f(x_2)$　02 일대일대응　03 항등함수
04 상수함수　05 ○　06 ○　07 ○　08 ○
09 ㄱ, ㄴ, ㄷ　10 ㄴ, ㄷ　11 ㄷ　12 ㄹ
13 ㄱ, ㄷ　14 ㄱ, ㄷ　15 ㄷ　16 ㄴ
17 ㄱ, ㅂ　18 ㄱ, ㅂ　19 없다.
20 ㄴ　21 27　22 6　23 6　25 1　25 3
26 ①　27 ②　28 ③　29 ②　30 ①　31 ①
32 ③　33 1　34 ⑤　35 3　36 ⑤　37 ①
38 ④　39 ③

연습 [J – K]

01 ④　02 ④　03 ①　04 ①　05 ④　06 ①
07 ②　08 ②　09 172　10 ②　11 7　12 ②
13 ②　14 ③　15 ④

L 합성함수

01 합성함수   02 $-3,\ -1$ 03 -1

04 $\{-3,\ -2,\ -1,\ 0\}$ 05 ○   06 ○   07 ○

08 ×   09 ○   10 8   11 8   12 6   13 a

14 d 15 a 16 10   17 $(g\circ f)(x)=2x^2+2$

18 17   19 $(f\circ g)(x)=4x^2+1$

20 $(g\circ f)(x)=(x-1)^2$ 21 $(f\circ g)(x)=x^2-1$

22 $((h\circ g)\circ f)(x)=2(x-1)^2$

23 $(h\circ (g\circ f))(x)=2(x-1)^2$ 24 -3

25 $f^n(x)=x-n$ 26 27   27 $g^n(x)=3^n x$ 28 256

29 $h^n(x)=x^{2^n}$ 30 ④   31 ②   32 ⑤   33 c

34 ⑤   35 ④   36 ①   37 ③   38 ②   39 ②

40 ③   41 ②   42 ④   43 ③   44 ④   45 ④

46 ①   47 ②   48 ①   49 ④   50 ①   51 ④

52 ②   53 50   54 ⑤   55 1   56 ③   57 ④

58 ②   59 ④

M 역함수

01 역함수   02 일대일대응   03 치역, 정의역

04 $y=x$ 05 ×   06 ×   07 ○   08 ○

09 ㄴ, ㄷ   10 3   11 2   12 4   13 2

14 2   15 9   16 ㄱ, ㄹ   17 8   18 4

19 5   20 $y=x-2$ 21 $y=2x$

22 $y=-\frac{1}{3}x+1$ 23 $(1,\ 1)$ 24 ④   25 ③

26 ④   27 ②   28 ④   29 ③   30 ③   31 ③

32 ②   33 ⑤   34 ②   35 ⑤   36 ③   37 ⑤

38 ①   39 ④   40 ④   41 ②   42 ④   43 ⑤

44 ③   45 7   46 ③   47 ①   48 ②   49 ②

50 ⑤   51 ①   52 ②   53 ⑤   54 ②

연습 [L–M]

01 ③   02 ③   03 ③   04 ①   05 ④   06 6

07 ②   08 ⑤   09 ④   10 ⑤   11 ③   12 ③

13 ⑤   14 2   15 ①

N 유리식과 무리식

01 유리식   02 번분수식   03 무리식

04 유리화   05 ×   06 ○   07 ○   08 ×

09 $\frac{x-2}{x+5}$ 10 $\frac{x-1}{x^2-x+1}$ 11 $\frac{3x-2}{x(x-1)}$

12 $\frac{-2x-4}{(x+1)(x-1)}$ 13 $\frac{x^2+2x+10}{(x-3)(x+2)}$

14 $\frac{3}{x-1}$ 15 $\frac{1}{x(x+1)}$

16 $\frac{x+2}{x}$ 17 $\frac{(x+1)(x^2-2x+4)}{x(x-2)}$

18 $x\geq -2$ 19 $x\leq 4$ 20 $x>\frac{2}{3}$

21 $-3\leq x\leq -2$ 22 $-1<x\leq 1$ 23 2

24 $2\sqrt{2}+2$ 25 $2+2\sqrt{2}$ 26 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

27 ③   28 ①   29 ③   30 ①   31 ②   32 ⑤

33 ①   34 ④   35 ②   36 ⑤   37 ⑤   38 ①

39 2   40 ③   41 ③

O 유리함수

01 0   02 1, 3, 2, 4   03 $p,\ q$ 04 ○   05 ×

06 ×   07 ○

08 정의역 : $\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\neq 0$인 실수$\}$

09 정의역 : $\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\neq 0$인 실수$\}$

10 해설 참조   11 해설 참조

12 $y=\frac{3}{x}+2$ 13 $y=-\frac{4}{x+1}+3$

14 $y=-\frac{5}{x-3}-1$ 15 $y=\frac{2}{x+2}-4$

16 정의역 : $\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\neq -1$인 실수$\}$
점근선의 방정식 : $x=0,\ y=-1$

17 정의역 : $\{x\,|\,x\neq 3$인 실수$\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\neq 0$인 실수$\}$
점근선의 방정식 : $x=3,\ y=0$

18 정의역 : $\{x\,|\,x\neq -1$인 실수$\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\neq 2$인 실수$\}$
점근선의 방정식 : $x=-1,\ y=2$

19 $y=\frac{2}{x-1}+1$ 20 $y=\frac{5}{x+3}-2$

21 $y=-\frac{7}{x+2}+2$ 22 $y=-\frac{2}{x-4}-1$

23 $x=1,\ y=3$ 24 $x=2,\ y=-2$ 25 ①   26 3

27 ②   28 ④   29 ③   30 ①   31 11   32 ②

33 ③   34 ⑤   35 5   36 ③   37 ①   38 ③

39 ②   40 ①   41 ①   42 ②   43 ①   44 ③

45 ③   46 ④   47 ⑤   48 ①   49 ②   50 ③

51 ③

P 유리함수의 합성함수와 역함수

01 이차방정식, 부호 02 $y=x$, $y=\frac{k}{x}$
03 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$ 04 × 05 ○ 06 ○
07 서로 다른 두 점에서 만난다. 08 한 점에서 만난다.
09 접한다. 또는 한 점에서 만난다. 10 만나지 않는다.
11 $\frac{8}{3}$ 12 -4 13 $(g\circ f)(x)=-\frac{1}{x+1}$
14 $(g\circ f)(x)=\frac{3x+3}{2x+1}$ 15 0 16 2 17 0
18 2 19 2 20 $y=\frac{4}{x}$ 21 $y=-\frac{3x}{x-1}$
22 $y=\frac{1}{x-2}+3$ 23 $y=\frac{-2x-3}{x-2}$ 24 $y=\frac{-4x+5}{x+1}$
25 ⑤ 26 ② 27 ⑤ 28 ③ 29 ③ 30 ⑤
31 1 32 ① 33 ⑤ 34 ② 35 ③ 36 ③
37 2 38 ①

연습 [N−P]

01 ④ 02 ② 03 1 04 ② 05 ① 06 ⑤
07 ⑤ 08 ③ 09 ④ 10 ③ 11 ① 12 4
13 16 14 ⑤ 15 ③

Q 무리함수

01 무리함수 02 $\{x|x\geq0\}$, $\{y|y\geq0\}$
03 $\{x|x\leq0\}$, $\{y|y\geq0\}$ 04 p, q 05 × 06 ○
06 ○ 08 × 09 해설 참조 10 해설 참조
11 해설 참조 12 해설 참조 13 $y=\sqrt{2(x-1)}+2$
14 $y=\sqrt{-2(x+2)}+3$ 15 $y=-\sqrt{3(x-2)}-1$
16 $y=-\sqrt{-3(x+3)}-1$
17 정의역 : $\{x|x\geq1\}$, 치역 : $\{y|y\geq0\}$
18 정의역 : $\{x|x\geq0\}$, 치역 : $\{y|y\geq2\}$
19 정의역 : $\{x|x\geq-1\}$, 치역 : $\{y|y\geq-2\}$
20 정의역 : $\{x|x\leq0\}$, 치역 : $\{y|y\geq-1\}$
21 정의역 : $\{x|x\geq0\}$, 치역 : $\{y|y\leq3\}$
22 정의역 : $\{x|x\leq2\}$, 치역 : $\{y|y\leq1\}$
23 정의역 : $\{x|x\geq2\}$, 치역 : $\{y|y\geq0\}$
24 정의역 : $\{x|x\leq3\}$, 치역 : $\{y|y\geq0\}$
25 정의역 : $\{x|x\leq2\}$, 치역 : $\{y|y\geq1\}$
26 정의역 : $\{x|x\geq-2\}$, 치역 : $\{y|y\leq2\}$
27 정의역 : $\{x|x\leq1\}$, 치역 : $\{y|y\leq-3\}$

Q 무리함수

28 ① 29 ① 30 ① 31 ③ 32 ④ 33 ③
34 ④ 35 ① 36 ② 37 ⑤ 38 ③ 39 ③
40 ② 41 ④ 42 ④ 43 ① 44 ② 45 ②
46 ⑤ 47 ④ 48 ② 49 ④ 50 ⑤ 51 ①
52 ③ 53 ③ 54 ① 55 ②

R 무리함수의 역함수

01 0 02 x, x, y 03 $\{x|x\geq c\}$ 04 ○
05 ○ 06 ○ 07 만나지 않는다.
08 접한다. 또는 한 점에서 만난다.
09 서로 다른 두 점에서 만난다.
10 한 점에서 만난다. 11 만나지 않는다.
12 접한다. 또는 한 점에서 만난다.
13 서로 다른 두 점에서 만난다. 14 한 점에서 만난다.
15 역함수 : $y=(x+2)^2-5$, 역함수의 정의역 : $\{x|x\geq-2\}$
16 역함수 : $y=-(x-4)^2+1$, 역함수의 정의역 : $\{x|x\geq4\}$
17 역함수 : $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-3$, 역함수의 정의역 : $\{x|x\leq-1\}$
18 역함수 : $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2+\frac{4}{3}$
역함수의 정의역 : $\{x|x\leq2\}$
19 $y=-(x-2)^2+1(x\geq2)$
20 $y=(x-1)^2-2(x\leq1)$
21 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2(x\geq3)$
22 $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2-3(x\leq2)$
23 ① 24 ④ 25 ① 26 ② 27 ① 28 ①
29 ④ 30 ② 31 ③ 32 ③ 33 ② 34 ①
35 ① 36 ③ 37 ④

연습 [Q−R]

01 ② 02 ⑤ 03 ③ 04 ① 05 ③ 06 ②
07 ⑤ 08 ③ 09 4 10 ② 11 ① 12 1
13 ③ 14 ② 15 ②

V 대단원 총정리 [J−R]

01 ⑤ 02 ③ 03 ① 04 ③ 05 7 06 ③
07 ④ 08 ② 09 8 10 ① 11 ④ 12 ②
13 ① 14 ② 15 ③ 16 ③ 17 ⑤ 18 ②
19 ② 20 2 21 ⑤ 22 ⑤ 23 ⑤ 24 4
25 ③ 26 16 27 ④ 28 ③ 29 ⑤

Ⅵ 경우의 수

S 합의 법칙과 곱의 법칙

01 사건, 경우의 수　02 $m+n$　03 $m\times n$
04 ○　05 ×　06 ○　07 ○　08 4　09 5
10 4　11 10　12 5　13 25　14 20　15 45
16 12　17 40　18 4　19 6　20 9　21 18
22 6　23 5　24 8　25 9　26 ③　27 ④
28 ④　29 9　30 30　31 20　32 ③　33 ①
34 8　35 ⑤　36 12　37 ①　38 ①　39 ④
40 32

T 순열

01 순열, ${}_{n}P_{r}$　02 계승, $n!$　03 1, r　04 $n-r$
05 1, 1　06 ○　07 ×　08 ○　09 ×　10 ×
11 ${}_{4}P_{3}$　12 ${}_{5}P_{3}$　13 ${}_{7}P_{2}$　14 120　15 24　16 1260
17 3　18 6　19 7　20 4　21 120　22 60
23 24　24 60　25 12　26 24　27 240　28 18
29 ⑤　30 ②　31 ②　32 ⑤　33 ①　34 ⑤
35 ④　36 ③　37 ②　38 ⑤　39 ⑤　40 ④
41 ④　42 ④　43 ①　44 ②　45 ④　46 ③
47 ①　48 ③　49 ③　50 ②　51 ④　52 ②
53 ⑤　54 ①　55 ②　56 ④　57 ⑤　58 ④
59 ③　60 ①

연습 [S-T]

01 ④　02 ②　03 24　04 ④　05 ②　06 ④
07 ⑤　08 2　09 ④　10 64　11 ⑤　12 ③
13 72　14 72　15 ①

U 조합

01 조합　02 ${}_{n}C_{r}$　03 분할, 분배　04 ○　05 ○
06 ○　07 ×　08 ${}_{4}C_{2}$　09 ${}_{5}C_{3}$　10 ${}_{7}C_{5}$　11 ${}_{6}C_{4}$
12 6　13 10　14 20　15 35　16 70　17 15
18 21　19 28　20 9　21 7　22 28　23 120
24 60　25 280　26 280　27 90　28 ④　29 ⑤
30 ④　31 ①　32 ③　33 ④　34 ⑤　35 ⑤
36 ④　37 16　38 ①　39 ②　40 100　41 ②
42 ④

연습 [U]

01 ①　02 ②　03 ⑤　04 ①　05 ①　06 ⑤
07 ④　08 ①　09 ⑤　10 ④　11 ⑤　12 ③
13 98　14 ②　15 90　16 20

Ⅵ 대단원 총정리 [S-U]

01 ⑤　02 ①　03 ④　04 ④　05 ③　06 ②
07 ③　08 36　09 1440　10 ①　11 ③　12 432
13 ⑤　14 ③　15 ⑤　16 ④　17 8　18 60
19 ⑤　20 ③　21 ①　22 ④　23 ②　24 ②
25 44　26 ⑤　27 ③　28 ②　29 200　30 150
31 ⑤

Ⅳ 집합과 명제

Simple A 집합의 뜻과 표현

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 8～9

01 답 집합

02 답 원소

03 답 공집합, $\varnothing$

04 답 벤 다이어그램

05 답 원소나열법, 조건제시법

06 답 ×

07 답 ×

08 답 ○

09 답 ○

10 답 ×

11 답 집합이 아니다.

12 답 집합이고 원소는 1, 2, 3, 4이다.

13 답 집합이 아니다.

14 답 집합이고 원소는 없다.

15 답 $\in$

16 답 $\in$

17 답 $\not\in$

18 답 $\in$

19 답 $\not\in$

20 답 $\in$

21 답 $\{x \mid x$는 10 이하의 짝수$\}$

22 답 $\{1, 3, 5, 15\}$

23 답 $\{x \mid x$는 35 이하의 7의 양의 배수$\}$

24 답 $\{2, 3, 5, 7\}$

25 답 $n(A)=4$

26 답 $n(B)=2$

$x^2-3x+2=0$에서

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 $B=\{1, 2\}$이므로 $n(B)=2$

27 답 $n(C)=1$

짝수인 소수는 2뿐이므로 $C=\{2\}$

$\therefore n(C)=1$

28 답 $n(D)=0$

$x^2<0$을 만족시키는 실수는 없으므로 $D=\varnothing$

$\therefore n(D)=0$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 10～11

29 답 ③

①, ②, ④, ⑤는 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

③은 그 대상이 1, 3, 5, 7, 9로 분명하므로 집합이다.

30 답 ②

① 2, 4, 6, 8, 10을 원소로 가지는 집합이다.

② $3x=6$을 만족하는 x는 2이지만 2는 홀수가 아니므로 공집합이다.

③ 4를 원소로 가지는 집합이다.

④ 1을 원소로 가지는 집합이다.

⑤ 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

31 답 ④

집합 A를 원소나열법으로 나타내면

$A=\{1, 2, 5, 10\}$이므로 $1\in A$, $2\in A$, $3\not\in A$, $5\in A$, $10\in A$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

32 답 ②

집합 A를 원소나열법으로 나타내면

$A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 $2\in A$, $3\in A$, $4\not\in A$, $7\in A$, $8\not\in A$이다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

심플(고등자이)(해설)(1단원)008-043.indd 8 2017. 9. 22. 오후 8:49

33 답 ④

① 3은 자연수이므로 $3\in N$이다.

② $\sqrt{2}$는 무리수이므로 $\sqrt{2}\notin Z$

③ $\frac{3}{4}$은 정수가 아니므로 $\frac{3}{4}\notin Z$

⑤ π는 실수이므로 $\pi\in R$

심플 정리

[실수의 분류]

$$\text{실수}\begin{cases}\text{유리수}\begin{cases}\text{정수}\begin{cases}\text{양의 정수(자연수)}\\ 0\\ \text{음의 정수}\end{cases}\\ \text{정수가 아닌 유리수}\end{cases}\\ \text{무리수}\end{cases}$$

34 답 3

(ⅰ) $2n+1=5$일 때, $n=2$에서 $A=\{4,\ 5\}$이므로 집합 A는 두 원소를 가진다.

(ⅱ) $n+2=5$일 때, $n=3$에서 $A=\{5,\ 7,\ 9\}$이므로 집합 A는 세 원소를 가진다.

(ⅲ) $4n-3=5$일 때, $n=2$에서 $A=\{4,\ 5\}$이므로 집합 A는 두 원소를 가진다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $n=3$이다.

35 답 ⑤

ㄱ. $x^3-x=x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

ㄴ. $|x|\le1$에서 $-1\le x\le1$이므로 정수 x의 값은 $-1,\ 0,\ 1$이다.

ㄷ. $x^2\le1$에서 $-1\le x\le1$이므로 정수 x의 값은 $-1,\ 0,\ 1$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

36 답 ⑤

$-4\le3x-1\le11$에서

$-3\le3x\le12$

$\therefore -1\le x\le4$

이 중 $\frac{x+1}{2}$이 정수가 되기 위한 x의 값은 $-1,\ 1,\ 3$이므로 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면 $\{-1,\ 1,\ 3\}$이다.

37 답 ⑤

$A=\{0,\ 1\}$, $B=\{-1,\ 1\}$이므로 집합 A의 원소 a와 집합 B의 원소 b를 더하여 만들 수 있는 수를 나열해 보면

$0+(-1)=-1$, $0+1=1$, $1+(-1)=0$, $1+1=2$

따라서 $C=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$이다.

38 답 ③

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $x^2\ge0$이므로 $x^2\le0$을 만족하는 x의 값은 0뿐이다. 따라서 집합 $\{x\,|\,x^2\le0,\ x\text{는 실수}\}$의 원소의 개수는 1이므로 유한집합이다.

ㄴ. $2x+5>0$에서 $x>-\frac{5}{2}$

따라서 집합 $\{x\,|\,2x+5>0,\ x\text{는 실수}\}$의 원소의 개수는 무수히 많으므로 무한집합이다.

ㄷ. $2x^2=1$에서 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 집합 $\{x\,|\,2x^2=1,\ x\text{는 실수}\}$의 원소의 개수는 2이므로 유한집합이다.

따라서 유한집합은 ㄱ, ㄷ이다.

39 답 ①

ㄱ. $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1>0$이 성립한다.

따라서 집합 $\{x\,|\,x^2+x+1>0,\ x\text{는 실수}\}$의 원소의 개수는 무수히 많으므로 무한집합이다.

ㄴ. $x-2>-2$에서 $x>0$이므로 음의 실수는 없다.

따라서 집합 $\{x\,|\,x-2>-2,\ x\text{는 실수}\}$의 원소의 개수는 0이므로 유한집합이다.

ㄷ. $x^2-4x+4\le0$에서 $(x-2)^2\le0$이므로 $x=2$이다.

따라서 $\{x\,|\,x^2-4x+4\le0,\ x\text{는 실수}\}$의 원소의 개수는 1이므로 유한집합이다.

따라서 무한집합은 ㄱ 뿐이다.

40 답 ⑤

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로 $n(A)=6$

$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$이므로 $n(B)=5$

$C=\{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30\}$이므로 $n(C)=5$

$\therefore n(A)+n(B)+n(C)=6+5+5=16$

41 답 ④

$A=\{0,\ 1\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 $x\in A$, $y\in B$일 때 가능한 xy의 값은 $0\times1=0\times2=0\times3=0$, $1\times1=1$, $1\times2=2$, $1\times3=3$이다.

따라서 $A\times B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이므로 원소의 개수는 4이다.

$\therefore n(A\times B)=4$

심플(고등자이)(해설)(1단원)008-043.indd 9 2017. 9. 22. 오후 8:49

Simple B 집합의 포함 관계

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 12~13

01 답 부분집합, $A\subset B$

02 답 $A\not\subset B$

03 답 서로 같다, $A=B$

04 답 진부분집합, $A\neq B$

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ×

08 답 ○

09 답 $A\subset B$

10 답 $B\subset A$

11 답 $A=B$

12 답 $A\subset B$

13 답 $B\subset A$

14 답 $A=B$

$x^2\le 1$에서 $x^2-1\le 0$, $(x+1)(x-1)\le 0$

$\therefore\ -1\le x\le 1$

이때 x는 정수이므로 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 $B=\{-1,\ 0,\ 1\}$이므로 $A=B$

15 답 $a=3,\ b=1$

16 답 $a=2,\ b=-1$

17 답 $\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}$

18 답 $\varnothing,\ \{1\},\ \{2\}$

19 답 16

20 답 15

21 답 8

22 답 4

23 답 2

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 14~17

24 답 ①, ④

① a는 집합 $\{a,\ b\}$의 원소이므로 $a\in\{a,\ b\}$ (참)

② 집합 $\{1\}$은 집합 $\{1,\ 2\}$의 부분집합이므로

$\{1\}\subset\{1,\ 2\}$ (거짓)

③ 공집합은 원소가 없으므로 $\varnothing\not\in\varnothing$ 또는 $\varnothing\subset\varnothing$ (거짓)

④ $\varnothing$는 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset\{0\}$ (참)

⑤ 집합 A는 집합 A의 부분집합이므로 $A\subset A$ (거짓)

25 답 ①

집합 A의 원소는 $0,\ 1,\ \{1\}$이므로 $\{1\}\in A$이고,

$\{0\}\not\in A$이다.

$\varnothing$는 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$이다.

$\{1\},\ \{\{1\}\}$은 집합 A의 부분집합이므로

$\{1\}\subset A,\ \{\{1\}\}\subset A$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

26 답 ④

$\varnothing,\ \{0,\ 1\}$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A,\ \{0,\ 1\}\in A$이다.

$\{\varnothing\},\ \{\{0,\ 1\}\}$은 집합 A의 부분집합이므로 $\{\varnothing\}\subset A$,

$\{\{0,\ 1\}\}\subset A$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

27 답 ④

집합 A의 원소 중에서 집합 B에 속하지 않는 원소는 2, 4이므로 $\{x\,|\,x\in A,\ x\not\in B\}=\{2,\ 4\}$이다. 따라서 주어진 집합의 부분집합은 $\varnothing,\ \{2\},\ \{4\},\ \{2,\ 4\}$이므로 부분집합 아닌 것은 ④이다.

28 답 ②

$x^2-9x+18<0$에서 $(x-3)(x-6)<0$

$\therefore\ 3<x<6$

그런데 x는 정수이므로 $x=4$ 또는 $x=5$

즉, $A=\{4,\ 5\}$이므로 A의 부분집합은

$\varnothing,\ \{4\},\ \{5\},\ \{4,\ 5\}$이다.

29 답 ②

집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 집합은

$\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{3,\ 4\}$로 6개이다.

$\therefore\ x=6$

집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 3인 집합은

$\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 4\},\ \{2,\ 3,\ 4\}$로 4개이다.

$\therefore\ y=4$

$\therefore\ x+y=6+4=10$

30 답 ⑤

$A=B$이려면 $2a+1=-5$, $4b-5=3$이어야 하므로

$a=-3$, $b=2$

$\therefore b-a=2-(-3)=5$

31 답 ②

$a+1=3$이면 $a=2$이고 $B=\{3, 5\}$이므로 $A=B$이다.

$a+1=5$이면 $a=4$이고 $B=\{5, 11\}$이므로 $A\neq B$이다.

$\therefore a=2$

32 답 ①

$A=B$이려면 $a^2+3=a+3$ 또는 $a^2+3=4$이므로

$a=1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=-1$이다.

(i) $a=1$이면 $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4\}$이므로
$A\neq B$이다.

(ii) $a=0$이면 $A=\{2, 3\}$, $B=\{2, 3, 4\}$이므로
$A\neq B$이다.

(iii) $a=-1$이면 $A=B=\{2, 3, 4\}$이다.

(i)~(iii)에 의하여 $a=-1$이다.

33 답 ①

$a\leq 2x+1\leq 7$에서 $\dfrac{a-1}{2}\leq x\leq 3$

이때 $A=B$이므로 $\dfrac{a-1}{2}=-3$, $3=b$

따라서 $a=-5$, $b=3$이므로 $a+b=(-5)+3=-2$

34 답 ③

$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

즉, 집합 $A=\{1, 2\}$이므로 A의 부분집합은

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$이다.

따라서 집합 A의 진부분집합의 개수는 $\{1, 2\}$를 제외한 3이다.

35 답 ③

$A=\{-1, 0, 1\}$에 대하여 $x\in A$, $y\in A$일 때,

가능한 x^2+y^2의 값은

$(-1)^2+(-1)^2=(-1)^2+1^2=1^2+1^2=2$,

$(-1)^2+0^2=1^2+0^2=1$, $0^2+0^2=0$이다.

즉, 집합 $B=\{0, 1, 2\}$이므로 B의 부분집합은

$\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$이다.

따라서 집합 B의 진부분집합의 개수는 $\{0, 1, 2\}$를 제외한 7이다.

36 답 ②

ㄱ. $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $A\subset B$이다.

ㄴ. $B=\{x|x>1$ 또는 $x<-1\}$이므로 $A\subset B$이다.

ㄷ. $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$이므로
$A\not\subset B$이다.

따라서 $A\subset B$인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

37 답 1

$A\subset B$이므로 $2\in A$에서 $2\in B$이다.

따라서 $a-1=2$ 또는 $a+1=2$, 즉 $a=3$ 또는 $a=1$이다.

(i) $a=3$일 때, $A=\{2, 8\}$, $B=\{0, 2, 4\}$이므로 $A\not\subset B$
이다.

(ii) $a=1$일 때, $A=\{0, 2\}$, $B=\{0, 2\}$이므로 $A\subset B$이다.

(i), (ii)에 의하여 $a=1$

38 답 12

a는 자연수이므로 $12-a<12$이다.

즉, $12-a=0$ 또는 $12-a=2$에서

$a=12$ 또는 $a=10$

(i) $a=12$일 때, $A=\{0, 24\}$이므로 $A\subset B$이다.

(ii) $a=10$일 때, $A=\{2, 22\}$이므로 $A\not\subset B$이다.

(i), (ii)에 의하여 $a=12$

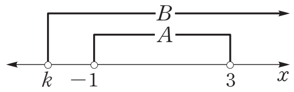
TIP

자연수 a에 대하여 $12-a$의 값의 범위를 파악하여 접근하면 조금 더 빠른 풀이가 가능하다. 이것을 생각하지 않는다면 $12-a$가 될 수 있는 값은 0 또는 2 또는 24이고 이 세 경우를 모두 따져주어야 하기 때문에 과정이 더 복잡하다.

39 답 ②

$|x-1|<2$에서 $-2<x-1<2$ $\quad\therefore -1<x<3$

즉, 집합 $A=\{x|-1<x<3\}$이고 $A\subset B$이므로 다음 그림에서 $k\leq -1$이다.



따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다.

40 답 ⑤

$A_2=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

$A_4=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$

$A_8=\{8, 16, 24, 32, \cdots\}$

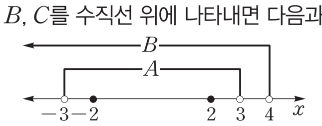
$\therefore A_8\subset A_4\subset A_2$

41 답 ④

$A=\{x|-3<x<3\}$, $B=\{x|x<4\}$, $C=\{-2, 2\}$이므로 $C\subset A\subset B$이다.

TIP

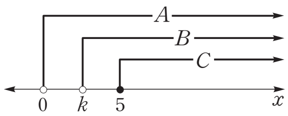
세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



42 답 ④

$2x+1>1$에서 $2x>0$이므로 $x>0$ $\quad\therefore A=\{x|x>0\}$

$A=\{x|x>0\}$, $B=\{x|x>k\}$, $C=\{x|x\geq5\}$에 대하여 $C\subset B\subset A$이므로 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음과 같아야 한다.



$\therefore 0\leq k<5$

43 답 ⑤

원소의 개수가 5인 부분집합의 개수는 $2^5=32$이고

원소의 개수가 6인 부분집합의 개수는 $2^6=64$이다.

따라서 증가하는 부분집합의 개수는 $64-32=32$이다.

44 답 15

집합 A의 원소 x와 집합 B의 원소 y에 대하여 가능한 $x+y$의 값은 $0+1=1$, $0+2=2$, $0+3=3$, $1+1=2$, $1+2=3$, $1+3=4$이다.

따라서 $C=\{x+y|x\in A,\ y\in B\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로

집합 C의 진부분집합의 개수는 $2^4-1=15$이다.

> 심플 정리
>
> **[진부분집합의 개수]**
>
> 두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$, $A\neq B$일 때 집합 A는 집합 B의 진부분집합이므로 원소의 개수가 n인 집합의 진부분집합의 개수는 전체 부분집합의 개수에서 1을 빼서 구해야 한다. 즉, 진부분집합의 개수는 2^n-1이다.

45 답 ④

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$에서 홀수인 원소는 1, 3이므로 집합 A의 부분집합 중 12의 홀수인 약수를 모두 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $2^{6-2}=2^4=16$이다.

46 답 128

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$에서 3의 배수는 3, 6, 9이다. 따라서 집합 A의 부분집합 중 3의 배수를 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{10-3}=2^7=128$이다.

47 답 ③

원소 a를 갖는 집합 A의 부분집합의 개수 x는 집합 A에서 원소 a를 제외한 집합 $\{b,\ c,\ d\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $x=2^3=8$

원소 b, d를 갖지 않는 집합 A의 부분집합의 개수 y는 집합 A에서 원소 b, d를 제외한 집합 $\{a,\ c\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $y=2^2=4$

$\therefore x+y=8+4=12$

48 답 ④

원소 2를 갖는 집합 A의 부분집합의 개수 x는 집합 A에서 원소 2를 제외한 집합 $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $x=2^4=16$

원소 1을 갖고 원소 3을 갖지 않는 집합 A의 부분집합의 개수 y는 원소 1, 3을 제외한 집합 $\{2,\ 4,\ 5\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $y=2^3=8$

$\therefore x-y=16-8=8$

49 답 ①

집합 A의 원소의 개수가 5이므로 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^5=\boxed{32}$ 이다. (가)

집합 A의 원소 중 홀수는 2, 4이므로 짝수를 하나도 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{5-2}=2^3=\boxed{8}$ 이다. (나)

따라서 집합 A의 부분집합 중 적어도 하나의 짝수를 갖는 부분집합의 개수는 $32-8=\boxed{24}$ 이다. (다)

따라서 $a=32$, $b=8$, $c=24$이므로

$a+b-c=32+8-24=16$

> 심플 정리
>
> **[특정한 원소를 적어도 하나 갖는 부분집합의 개수]**
>
> 원소의 개수가 n인 집합 A의 특정한 원소 k개 중 적어도 하나를 원소로 갖는 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^n-2^{n-k}(k<n)$이다.

50 답 ③

집합 X는 집합 B의 부분집합 중 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$이다.

51 답 ③

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{4,\ 8\}$이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 4, 8을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$이다.

52 답 ②

집합 A의 원소 x와 집합 B의 원소 y에 대하여 가능한 xy의 값은

$0\times(-1)=0\times1=0\times3=0$, $1\times(-1)=-1$, $1\times1=3$, $1\times3=3$이고

가능한 $x+y$의 값은

$0+(-1)=-1$, $0+1=1$, $0+3=3$, $1+(-1)=0$, $1+1=2$, $1+3=4$이다.

즉, $C=\{-1,\ 0,\ 1,\ 3\}$, $D=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로

집합 X는 집합 D의 부분집합 중 -1, 0, 1, 3을 반드시 원소로 가지는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^{6-4}=2^2=4$이다.

연습 문제 [A~B] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 18~19

01 답 ③

집합 $A=\{1, 2, 3\}$에 대하여

$B=\{x|x=ab, a\in A, b\in A\}$라 하자. 다음 중 옳지 않은 것은?

집합 B는 집합 A의 원소 a와 b의 곱으로 이루어진 집합이야.

① $4\in B$

② $5\notin B$

③ 집합 B의 원소 중 가장 큰 수는 6이다.

④ 집합 B의 원소 중 소수의 개수는 2이다.

⑤ 집합 B의 원소 중 6의 약수의 개수는 4이다.

1st 집합 B를 원소나열법으로 나타내자.

집합 B를 원소나열법으로 나타내면

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$이다.

a, b는 모두 집합 A의 원소이므로 가능한 ab의 값은 $1\times1=1$, $1\times2=2\times1=2$, $1\times3=3\times1=3$, $2\times2=4$, $2\times3=3\times2=6$, $3\times3=9$

2nd 선택지의 참, 거짓을 따지자.

① 4는 집합 B의 원소이므로 $4\in B$ (참)

② 5는 집합 B의 원소가 아니므로 $5\notin B$ (참)

③ 집합 B의 원소 중 가장 큰 수는 9이다. (거짓)

④ 집합 B의 원소 중 소수는 2, 3으로 2개이다. (참)

⑤ 집합 B의 원소 중 6의 약수는 1, 2, 3, 6으로 4개이다. (참)

02 답 ④

ㄱ. 2는 짝수인 소수이므로 공집합이 아니다.

ㄴ. $-x^2+x-1\geq0$에서 $x^2-x+1\leq0$

이때 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4=-3<0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2-x+1>0$이다. 따라서 공집합이다.

ㄷ. $x^2-x<0$에서 $x(x-1)<0$ $\quad\therefore 0<x<1$

이때 $0<x<1$인 자연수 x는 없으므로 공집합이다.

따라서 공집합인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

03 답 ②

(i) $a+2=2$, 즉 $a=0$일 때, $A=\{0, 2\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 2이다.

(ii) $a^2-a=2$에서 $a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

i) $a=-1$일 때, $a=\{-2, 1, 2\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 3이다.

ii) $a=2$일 때, $a=\{2, 4\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 2이다.

(iii) $2a=2$, 즉 $a=1$일 때, $a=\{0, 2, 3\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 3이다.

(i)~(iii)에 의하여 $a=-1$ 또는 $a=1$이므로 모든 a의 값의 합은 0이다.

04 답 ③

$A=\{(x, y)|ax-by=6\}$에서

$(6, 2)\in A$이므로

$6a-2b=6$ ⋯ ㉠

$(-3, -2)\in A$이므로

$-3a+2b=6$ ⋯ ㉡

㉠+㉡에서

$3a=12 \qquad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면

$-12+2b=6$, $2b=18 \qquad \therefore b=9$

$\therefore a+b=4+9=13$

05 답 ④

집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여

$B=\{(x, y)|x\in S, y\in S, x$는 y의 약수$\}$라 할 때,

집합 B의 모든 원소의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

x가 y의 약수이므로 x를 기준으로 하던지, y를 기준으로 하던지 어떤 하나의 기준을 잡고 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)를 구하자.

1st x가 y의 약수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (x, y)를 구하자.

1은 1, 2, 3, 4의 약수이고, 2는 2, 4의 약수, 3은 3의 약수, 4는 4의 약수이므로 집합 B의 모든 원소는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$이다.

집합 A의 원소 1, 2, 3, 4가 각각 집합 A의 원소 1, 2, 3, 4 중 어떤 수의 약수인지를 생각해야 해.

따라서 집합 B의 원소의 개수는 8이다.

06 답 3

i의 거듭제곱의 성질을 이용하여 집합 A의 원소를 구해.

집합 $A=\{z|z=i^n, n$은 자연수$\}$에 대하여

집합 $B=\{z_1^2+z_2^2|z_1\in A, z_2\in A\}$일 때,

집합 B의 원소의 개수를 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$)

집합 B의 원소는 집합 A의 원소 z_1, z_2의 제곱의 합 $z_1^2+z_2^2$이야.

1st 집합 A를 원소나열법으로 나타내고 z^2이 될 수 있는 값을 구하자.

$A=\{i, -1, -i, 1\}$이고

자연수 k에 대하여 $i^{4k-3}=i$, $i^{4k-2}=-1$, $i^{4k-1}=-i$, $i^{4k}=1$

$z\in A$이면 $z^2=1$ 또는 $z^2=-1$

2nd 집합 B의 모든 원소를 구하자.

$B=\{z_1^2+z_2^2|z_1\in A, z_2\in A\}=\{-2, 0, 2\}$

$(-1)+(-1)=-2$, $(-1)+1=0$, $1+1=2$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 3이다.

07 답 ④

$A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 $n(A)=4$

$B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로 $n(B)=5$

$C=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 $n(C)=4$

$\therefore n(A)=n(C)<n(B)$

심플(고등자이)(해설)(1단원)008-043.indd 13 2017. 9. 26. 오후 2:25

08 답 ②

ㄱ. $\varnothing$은 A의 원소이므로 $\varnothing \in A$ (참)

ㄴ. $\{0, 1\}$은 A의 원소이기도 하고 부분집합이기도 하므로 $\{0, 1\} \in A$, $\{0, 1\} \subset A$ (참)

ㄷ. A의 원소의 개수가 $\varnothing$, 0, 1, $\{0, 1\}$로 4이므로 부분집합의 개수는 $2^4=16$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 답 ⑤

두 집합 $A=\{2, a\}$, $B=\{x \mid x^2=b,\ x\text{는 실수}\}$가 서로 같을 때, 두 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은?
$A=B$이므로 집합 A에 속한 원소는 집합 B에도 속해야 해.

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

1st 집합 A의 원소를 이용하여 b의 값을 구해.

$A=B$이므로 $2 \in A$에서 $2 \in B$이다. 즉, $b=2^2=4$

2가 집합 A의 원소이므로 2는 집합 B의 원소이기도 하지? 즉, $2^2=b$가 성립해야 해.

2nd 집합 B의 원소를 모두 구하여 a의 값을 구해.

이때 $x^2=4$에서 $x=2$ 또는 $x=-2$이므로

$B=\{-2, 2\}$ $\therefore a=-2$

$\therefore a+b=(-2)+4=2$

10 답 ②

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$ 의 부분집합 중 두 개의 원소를 가지는 집합을 $A=\{a, b\}$로 나타낼 때, 두 원소의 곱 ab가 어떤 자연수의 제곱이 되는 집합 A의 개수는?
ab가 어떤 자연수의 제곱수니까 $ab=n^2$으로 나타낼 수 있지? 이때 집합 A의 원소의 개수는 2야.

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

1st 두 수의 곱이 완전제곱수가 되는 경우를 생각해 봐.

$a, b \in U$, $ab=n^2$ $(n=1, 2, 3, \cdots, 10)$이려면

(i) $n=1$인 경우, $1^2=1\times1 \longrightarrow \{1, 1\}=\{1\}$ ⇒ 원소의 개수가 1이므로 집합 A가 될 수 없어.

(ii) $n=2$인 경우, $2^2=4=1\times4 \longrightarrow \{1, 4\}$ ⇒ OK!

$=2\times2 \longrightarrow \{2, 2\}=\{2\}$ ⇒ 이것도 원소의 개수가 1이지?

같은 방법으로 $n=3, \cdots, 10$인 경우를 따져주면 집합 A는 $\{1, 4\}$, $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 9\}$의 4개이다.

다른 풀이

전체집합 U의 부분집합 중 두 개의 원소를 가지는 집합에서 두 원소의 곱이 어떤 자연수의 제곱이 되므로 완전제곱수를 나열해 보면
a에 대하여 $a\times a=a^2$ 꼴인 수야.

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $\cdots$

이때 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$이므로 곱하여 완전제곱수가 되는 두 수를 나열해 보면

$1\times4=4$, $1\times9=9$, $2\times8=16$, $4\times9=36$ 뿐이므로

집합 A는 $\{1, 4\}$, $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 9\}$의 4개이다.

11 답 ⑤

a는 자연수이므로 $2-a<2+a$

$\therefore 2-a=-20$ 또는 $2-a=0$

(i) $2-a=-20$, 즉 $a=22$일 때 $A=\{-20, 24\}$이므로 $A\subset B$이다.

(ii) $2-a=0$, 즉 $a=2$일 때 $A=\{0, 4\}$이므로 $A\not\subset B$이다.

(i), (ii)에 의하여 $a=22$

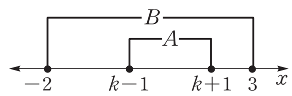
12 답 ④

집합 $A=\{x \mid |x-k|\le1\}$에서

$|x-k|\le1$, $-1\le x-k\le1$

$\therefore k-1\le x\le k+1$

이때 $A\subset B$가 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



즉, $-2\le k-1$이고 $k+1\le3$에서 $-1\le k\le2$이므로 실수 k의 최댓값은 2이다.

13 답 ②

세 집합 A, B, C가

$A=\{x \mid x^2+10\le6x\}$ ❶

$B=\{x \mid x-2\le x^2\}$ ❷

$C=\{x \mid 2x^2+5x\ge-1\}$ ❸

세 부등식 ❶, ❷, ❸을 풀어 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 따지면 돼.

일 때, 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는?

(단, x는 실수이다.)

① $A\subset B\subset C$ ② $A\subset C\subset B$
③ $B\subset A\subset C$ ④ $B\subset C\subset A$
⑤ $C\subset A\subset B$

1st 집합 A, B, C의 부등식을 풀자.

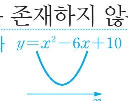
(i) $x^2+10\le6x$에서 $x^2-6x+10\le0$

이차방정식 $x^2-6x+10=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-10=-1<0$이므로 부등식

$x^2-6x+10\le0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

$y=x^2-6x+10$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 이 부등식의 해는 없어.



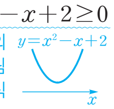
$\therefore A=\varnothing$

(ii) $x-2\le x^2$에서 $x^2-x+2\ge0$

이차방정식 $x^2-x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-8=-7<0$이므로 부등식 $x^2-x+2\ge0$의 해는 모든 실수이다.

$y=x^2-6x+10$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 이 부등식의 해는 모두 실수야.



$\therefore B=\{x \mid x\text{는 모든 실수}\}$

(ⅲ) $2x^2+5x\geq-1$에서 $2x^2+5x+1\geq0$

이차방정식 $2x^2+5x+1=0$의 판별식을 D라 하면

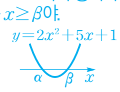
$D=5^2-8=17>0$이므로 $2x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

한편, 서로 다른 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

부등식 $2x^2+5x+1\geq0$의 해는 $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$이다.

$\therefore C=\{x|x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta\}$

$y=2x^2+5x+1$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 이 부등식의 해는 $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$야.



2nd 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 따지자.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $A\subset C\subset B$

14 답 8

$A=\{x|x$는 4의 약수$\}=\{1, 2, 4\}$이고

$B=\{x|x$는 12의 약수$\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이다.

즉, $\{1, 2, 4\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^{6-3}=2^3=8$이다.

15 답 24

집합 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$의 모든 부분집합의 개수는

$2^5=32$ … Ⅰ

4의 배수는 4와 8이므로 4의 배수를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$ … Ⅱ

따라서 4의 배수를 적어도 하나 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $32-8=24$이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	집합 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$의 모든 부분집합의 개수를 구한다.	30%
Ⅱ	4의 배수를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 구한다.	30%
Ⅲ	4의 배수를 적어도 하나 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구한다.	40%

TIP

적어도 하나라는 말은 최소 1개의 4의 배수를 원소로 갖는다는 것이다. 따라서 전체 부분집합의 개수에서 4의 배수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합의 개수를 빼서 구하면 된다.

Simple C 집합의 연산

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 20~21

01 답 합집합

02 답 교집합

03 답 여집합

04 답 차집합

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ○

09 답 ○

10 답 $\{x|x\in A$ 또는 $x\in B\}$

11 답 $\{x|x\in A$ 그리고 $x\in B\}$

12 답 $\{x|x\in U$ 그리고 $x\notin A\}$

13 답 $\{x|x\in A$ 그리고 $x\notin B\}$

14 답 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

15 답 $\{2\}$

16 답 $\{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

17 답 $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

18 답 $\{1, 4, 8\}$

19 답 $\{3, 5, 7\}$

20 답 ○

21 답 ×

22 답 ○

23 답 $A\cap A^C$

24 답 A^C

25 답 B

$A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

26 답 B^C

$A^C-B=A^C\cap B^C$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 22~25

27 답 ③

$B\cup C=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로

$A\cap(B\cup C)=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}\cap\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$=\{1,\ 3,\ 4\}$

28 답 ②

$A\cap B=\{x\,|\,x$는 $2\le x<8$인 자연수$\}$

$=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은

$2+3+4+5+6+7=27$

29 답 ④

$A\cap B=\{3\}$이므로 $3\in A$이다.

$A=\{1,\ a^2-3a+5\}$에서

$a^2-3a+5=3,\ a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0\qquad \therefore\ a=1$ 또는 $a=2$

(i) $a=1$일 때, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$가 되어 $A\cap B=\{1\}$이므로 조건에 맞지 않는다.

(ii) $a=2$일 때, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$가 되어 $A\cap B=\{3\}$이므로 조건에 맞는다.

(i), (ii)에 의하여 $a=2$

30 답 ③

$P=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$이므로

$P^C=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$

따라서 집합 P^C의 모든 원소의 합은

$1+4+6+8+9+10=38$이다.

31 답 ④

$A=\{1,\ 5,\ 7\}$이므로

$A^C=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$

집합 A^C의 원소의 개수가 7이므로 이 집합의 부분집합의 개수는 $2^7=128$이다.

32 답 5

$A-B=\{1,\ 2,\ 3\}$이므로 $a=3$

$B-A=\{6,\ 7\}$이므로 $b=2$

$\therefore\ a+b=5$

33 답 ③

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로 $B-A=\{6,\ 12\}$

즉, 집합 $B-A$의 원소의 개수가 2이므로 이 집합의 부분집합의 개수는 $2^2=4$이다.

34 답 ③

ㄱ. $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}\cap\{5,\ 6\}=\varnothing$이므로 두 집합은 서로소이다.

ㄴ. $\{x\,|\,x$는 6의 약수$\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}\cap\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}=\{1,\ 2,\ 3\}\neq\varnothing$이므로 두 집합은 서로소가 아니다.

ㄷ. $x^2+2x-3<0$에서

$(x+3)(x-1)<0$

$\therefore\ -3<x<1$

그런데 $-3<x<1$의 범위에서 자연수 x가 존재하지 않으므로 $\{x\,|\,x^2+2x-3<0,\ x$는 자연수$\}=\varnothing$이고 $\varnothing$은 모든 집합과 서로소이다.

따라서 서로소인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

35 답 ②

ㄱ. $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{5,\ 10\}$

$A\cap B=\{10\}\neq\varnothing$이므로 서로소가 아니다.

ㄴ. $A=\{3,\ 6,\ 9\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

$A\cap B=\varnothing$이므로 서로소이다.

ㄷ. $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 3\}$

$A\cap B=\{3\}\neq\varnothing$이므로 서로소가 아니다.

따라서 서로소인 것은 ㄴ이다.

36 답 ②

집합 A의 부분집합 중 원소 1, 2, 5를 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{5-3}=2^2=4$이다. 즉, 집합 B와 서로소인 집합의 개수는 4이다.

37 답 ①

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B=\{3,\ 6,\ 9\}$이므로

$B\cap A^C=B-A=\{6\}$

38 답 ②

$A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=\{4,\ 5\}$

따라서 집합 $A-B^C$의 모든 원소의 합은 $4+5=9$이다.

39 답 ④

$A-B=A$이므로 A와 B는 서로소이다.

즉, $A\cap B=\varnothing$이므로

④ $B\cap A^C=B-A=B-(A\cap B)=B$ (참)

40 답 ④

$A\subset B$이므로

ㄱ. $A\cap B=A$ (거짓)

ㄴ. $A-B=\varnothing$ (참)

ㄷ. $A^C\cup B=U$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

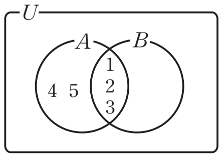
41 답 ⑤

$A\cap B=\{1,\ 2,\ 3\}$이므로 집합 A는 1, 2, 3을 원소로 갖는다. 또, $A\cap B^C=A-B=\{4,\ 5\}$이므로 집합 A는 4, 5를 원소로 갖는다.

따라서 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 5이다.

다른 풀이

$A\cap B=\{1,\ 2,\ 3\}$, $A\cap B^C=\{4,\ 5\}$이므로 벤 다이어그램으로 나타내어 보면 다음과 같다.



따라서 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 5이다.

42 답 ①

$A-B=A-(A\cap B)$이고 $(A\cup B)-(A-B)=B$이므로

$B=(A\cup B)-(A-B)$
$\quad=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}-\{1,\ 3,\ 5\}$
$\quad=\{2,\ 4\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 $2+4=6$이다.

43 답 ④

$A-B=A-(A\cap B)$이고 $(A-B)\cup(A\cap B)=A$이므로

$A=(A-B)\cup(A\cap B)$
$\quad=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}\cup\{2,\ 4,\ 9\}$
$\quad=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$

$\therefore\ A^C=\{6,\ 8,\ 10\}$

따라서 집합 A^C의 모든 원소의 합은 $6+8+10=24$이다.

44 답 ①

$\{1,\ 2\}\cap A=\varnothing$을 만족시키는 U의 부분집합 A는 원소 1, 2를 포함하지 않아야 하므로 집합 A의 개수는 $2^{4-2}=4$이다.

45 답 ③

$A\cap B^C=A-B=\{1\}$이므로 집합 B는 1은 원소로 갖지 않고, 2는 반드시 원소로 갖는 U의 부분집합이다. 따라서 집합 B의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$이다.

46 답 ②

$A\cup X=A$에서 $X\subset A$이고, $B\cap X=X$에서 $X\subset B$이다. 따라서 $X\subset(A\cap B)$이므로 구하는 집합 X는 집합 $A\cap B=\{1,\ 2\}$의 부분집합으로 그 개수는 $2^2=4$이다.

47 답 ③

$A^C=\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $B^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 9,\ 10\}$

$A^C-B=A^C\cap B^C=\{9,\ 10\}$

따라서 모든 원소의 합은 $9+10=19$이다.

다른 풀이

$A^C-B=A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로 주어진 벤 다이어그램에서 $A^C-B=\{9,\ 10\}$이다. 따라서 모든 원소는 9, 10으로 합은 19이다.

48 답 ①

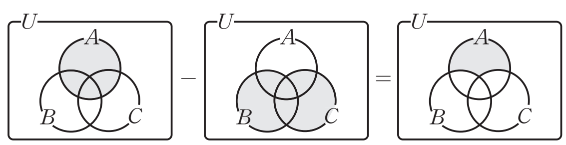
벤 다이어그램의 색칠된 부분이 나타내는 집합은 $(A\cup B)-(A\cap B)$이다.

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $A\cap B=\{2,\ 9\}$이므로

$(A\cup B)-(A\cap B)=\{1,\ 4,\ 5,\ 7\}$

따라서 모든 원소의 합은 $1+4+5+7=17$이다.

49 답 ①

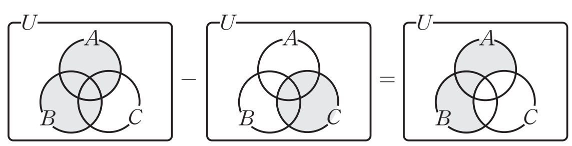


A $\quad$ $B\cup C$ $\quad$ $A-(B\cup C)$

따라서 집합 $A-(B\cup C)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 ①과 같다.

50 답 ②

주어진 벤 다이어그램의 색칠된 부분은 다음과 같다.



$A\cup B$ $\quad$ C $\quad$ $(A\cup B)-C$

$\therefore\ (A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C^C$

Simple D 집합의 연산법칙

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 26~27

01 답 교환법칙

02 답 결합법칙

03 답 분배법칙

04 답 드모르간의 법칙

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ○

09 답 $A\cap B=\{2, 3\}$, $B\cap A=\{2, 3\}$,
$A\cap B$와 $B\cap A$는 서로 같다.

10 답 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B\cup A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$A\cup B$와 $B\cup A$는 서로 같다.

11 답 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B\cup C=\{1, 3, 5, 7, 8\}$

12 답 $(A\cup B)\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$,
$A\cup (B\cup C)=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$,
$(A\cup B)\cup C$와 $A\cup (B\cup C)$는 서로 같다.

13 답 $A\cap B=\{1, 5\}$, $B\cap C=\{3, 5\}$

14 답 $(A\cap B)\cap C=\{5\}$, $A\cap (B\cap C)=\{5\}$,
$(A\cap B)\cap C$와 $A\cap (B\cap C)$는 서로 같다.

15 답 $B\cup C=\{2, 3, 5, 7, 9\}$, $A\cap B=\{7\}$
$A\cap C=\{3, 5\}$

16 답 $A\cap (B\cup C)=\{3, 5, 7\}$,
$(A\cap B)\cup (A\cap C)=\{3, 5, 7\}$,
$A\cap (B\cup C)$와 $(A\cap B)\cup (A\cap C)$는 서로 같다.

17 답 $B\cap C=\{2\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$,
$A\cup C=\{1, 2, 3, 5, 7\}$

18 답 $A\cup (B\cap C)=\{1, 2, 3, 5, 7\}$,
$(A\cup B)\cap (A\cup C)=\{1, 2, 3, 5, 7\}$,
$A\cup (B\cap C)$와 $(A\cup B)\cap (A\cup C)$는 서로 같다.

19 답 $(A\cup B)^C=\{3\}$, $A^C\cap B^C=\{3\}$,
$(A\cup B)^C$과 $A^C\cap B^C$은 서로 같다.

20 답 $(A\cap B)^C=\{2, 3, 4\}$, $A^C\cup B^C=\{2, 3, 4\}$
$(A\cap B)^C$과 $A^C\cup B^C$은 서로 같다.

21 답 2
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=3+5-6=2$

22 답 1
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=3-2=1$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 28~31

23 답 6
$A\cup (B\cup C)=(A\cup B)\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
따라서 집합 $A\cup (B\cup C)$의 모든 원소의 개수는 6이다.

24 답 7
$C=\{x\,|\,x$는 8의 양의 약수$\}=\{1, 2, 4, 8\}$이므로
$A\cap (B\cap C)=(A\cap B)\cap C=\{1, 2, 4\}$
따라서 모든 원소의 합은 $1+2+4=7$이다.

25 답 ③
$$A\cap (B\cap C)=A\cap (C\cap B)=(A\cap C)\cap B$$
$$=\{2, 3\}\cap B$$
이므로 $A\cap (B\cap C)\neq\varnothing$을 만족시키는 집합 B는 2 또는 3을 원소로 가져야 한다. $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수는 $2^5=32$이고 2와 3을 원소로 가지지 않는 집합의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$
따라서 집합 B의 개수는 $32-8=24$이다.

26 답 ⑤
$$(A\cup B)\cup A^C=(B\cup A)\cup A^C=B\cup (A\cup A^C)$$
$$=B\cup U=U$$

27 답 ①
$$(A\cap B)\cap A^C=(B\cap A)\cap A^C=B\cap (A\cap A^C)$$
$$=B\cap\varnothing=\varnothing$$

28 답 ⑤
$$(A\cup B)\cup (A^C\cup B^C)=A\cup (B\cup A^C)\cup B^C$$
$$=A\cup (A^C\cup B)\cup B^C$$
$$=(A\cup A^C)\cup (B\cup B^C)$$
$$=U\cup U=U$$

29 답 ①

$(A\cap B)\cap(A^c-B)=(A\cap B)\cap(A^c\cap B^c)$
$=A\cap(B\cap A^c)\cap B^c$
$=A\cap(A^c\cap B)\cap B^c$
$=(A\cap A^c)\cap(B\cap B^c)$
$=\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$

30 답 ③

$(A\cap B)-B^c=\varnothing$
$\Longleftrightarrow (A\cap B)\cap B=\varnothing$
$\Longleftrightarrow A\cap(B\cap B)=\varnothing$
$\Longleftrightarrow A\cap B=\varnothing$

따라서 A, B가 서로소이므로 옳은 것은 ③ $A\subset B^c$이다.

31 답 ④

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$=\{3, 4, 5\}\cup\{5, 6, 7, 8\}$
$=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

따라서 원소의 개수는 6이다.

32 답 ③

$(A\cap B)\cup(B-A)=(A\cap B)\cup(B\cap A^c)$
$=(A\cup A^c)\cap B$
$=U\cap B=B$

33 답 ③

$A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A^c)$
$=(A\cup B)\cap(A\cup A^c)$
$=(A\cup B)\cap U$
$=A\cup B$

34 답 ②

$(A\cap B^c)\cup B=A$
$\Longleftrightarrow (A\cup B)\cap(B^c\cup B)=A$
$\Longleftrightarrow (A\cup B)\cap U=A$
$\Longleftrightarrow A\cup B=A$
$\Longleftrightarrow B\subset A$

35 답 6

$A^c\cup B^c=(A\cap B)^c=\{2, 4, 5, 6\}$이므로 $a=4$
$A^c\cap B^c=(A\cup B)^c=\{5, 6\}$이므로 $b=2$
$\therefore a+b=4+2=6$

36 답 ⑤

$(A-B)^c=(A\cap B^c)^c$
$=A^c\cup(B^c)^c$
$=A^c\cup B$

37 답 ④

$B\cap(A\cap B)^c=B\cap(A^c\cup B^c)$
$=(B\cap A^c)\cup(B\cap B^c)$
$=(B\cap A^c)\cup\varnothing$
$=B\cap A^c=B-A$

38 답 ③

$A\cap(B^c\cup C^c)=A\cap(B\cap C)^c$
$=A-(B\cap C)$
$=\{2, 3, 4, 5\}-\{5, 7\}$
$=\{2, 3, 4\}$

따라서 모든 원소의 합은 $2+3+4=9$이다.

39 답 ⑤

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=20+15-10=25$

40 답 ③

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=13+10-20=3$

41 답 20

A, B가 서로소이므로
$A\cap B=\varnothing$, 즉 $n(A\cap B)=0$이다.
$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=12+8-0=20$

42 답 ①

축구를 좋아하는 학생의 모임을 A, 야구를 좋아하는 학생의 모임을 B라 하면 축구 또는 야구를 좋아하는 학생의 모임은 $A\cup B$이다.
$n(A)=17$, $n(B)=15$, $n(A\cap B)=6$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=17+15-6=26$

43 답 45

$n(A^c)=n(U)-n(A)=50-35=15$
$n(B^c)=n(U)-n(B)=50-20=30$
$\therefore n(A^c)+n(B^c)=15+30=45$

44 답 ③

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=26+19-40=5$

그런데 $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$이므로
$n(A^c\cup B^c)=n(U)-n(A\cap B)=50-5=45$

45 답 ①

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=26+33-15=44$

그런데 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)=50-44=6$

46 답 ③

전체 50명의 학생의 모임을 U, 영어를 수강하는 학생의 모임을 A, 수학을 수강하는 학생의 모임을 B라 하면 영어와 수학 모두 수강하지 않는 학생의 모임은 $A^C\cap B^C$이다.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=28+36-19=45$

그런데 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)=50-45=5$

47 답 ⑤

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=8-2=6$

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=6-2=4$

$\therefore n(A-B)+n(B-A)=6+4=10$

48 답 10

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=12+16-22=6$

$\therefore n(A^C\cap B)=n(B-A)$
$=n(B)-n(A\cap B)$
$=16-6=10$

49 답 ②

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=10-n(A\cap B)=5$

이므로 $n(A\cap B)=5$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=10+8-5=13$

50 답 ③

학급 40명의 학생의 모임을 U, 축구 경기를 시청하겠다는 학생의 모임을 A, 야구 경기를 시청하겠다는 학생의 모임을 B라 하면 두 종목의 경기를 모두 시청하지 않겠다는 학생의 모임이 $A^C\cap B^C$이다.

$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)=40-n(A\cup B)=2$

이므로 $n(A\cup B)=38$

이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$38=35+25-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=22$

따라서 축구 경기만 시청하겠다는 학생의 모임은 $A-B$이므로 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=35-22=13$

51 답 ①

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$
$-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$24=8+14+13-3-5-4+n(A\cap B\cap C)$

$\therefore n(A\cap B\cap C)=1$

52 답 ②

$A\cap B=\varnothing$에 의하여 $A\cap B\cap C=\varnothing$이므로

$n(A\cap B)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$

$\therefore n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$
$-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=14+24+20-0-10-8+0=40$

53 답 ④

$A\cap C=\varnothing$에 의하여 $A\cap B\cap C=\varnothing$이므로

$n(A\cap C)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$

$\therefore n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$
$-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=7+8+6-2-3-0+0=16$

연습 문제 [C~D]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 32~33

01 답 15

$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$

이때 $C=\{3, 5, 7, 9\}$이므로

$(A\cup B)\cap C=\{3, 5, 7\}$

따라서 모든 원소의 합은 15이다.

02 답 ②

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이고, $B=\{1, 2, 3, 6, 9\}$이므로

$B^C=\{4, 5, 7, 8, 10\}$

$\therefore A\cup B^C=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

따라서 모든 원소의 개수는 7이다.

03 답 ④

$|x-3|=1$에서 $x-3=\pm1$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

즉, $A=\{2, 4\}$이고 $B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$이므로

$B-A=\{-3, -2, -1, 0, 1, 3\}$

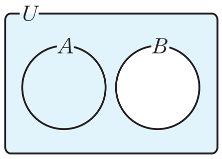
따라서 모든 원소의 개수는 6이다.

04 답 ①

> 전체집합 U의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B가 서로소일 때, 다음 중 옳은 것은?
> 서로 공통인 부분이 없다는 의미이므로 $A\cap B=\varnothing$
>
> ① $A\subset B^C$　② $B\subset A$　③ $A\cap B^C=\varnothing$
> ④ $B-A=\varnothing$　⑤ $A\cup B=U$

1st 두 집합 A, B가 서로소이면 $A\cap B=\varnothing$임을 이용하자.

$A\cap B=\varnothing$이므로 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$\therefore A\subset B^C$

05 답 ⑤

$1\in B$이므로 $x=1$ 또는 $x^2+2x+2=1$이다.

(i) $x=1$일 때, $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 5\}$이고
$A\cap B=\{1, 2\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x^2+2x+2=1$일 때, $(x+1)^2=0$　$\therefore x=-1$
$A=\{1, 0\}$, $B=\{-1, 2, 1\}$에서 $A\cap B=\{1\}$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $A\cup B=\{-1, 0, 1, 2\}$이므로 모든 원소의 합은 2이다.

06 답 ⑤

> 전체집합 U의 두 부분집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$에 대하여 집합 $A\cap(A\cap B)^C$의 모든 원소의 합은?
> ■$\cap$▲^{c}=■$-$▲가 됨을 이용하여 좀 더 쉽게 답에 접근하자.
>
> ① 5　② 6　③ 7
> ④ 8　⑤ 9

1st $A\cap(A\cap B)^C$을 간단히 한 후 원소를 구하자.

$A\cap(A\cap B)^C=A-(A\cap B)$
$A\cap B^C=A-(A\cap B)$
$=A-B$
$=\{1, 2, 3, 4, 5\}-\{2, 4\}$
$=\{1, 3, 5\}$

따라서 모든 원소의 합은 $1+3+5=9$이다.

07 답 ②

벤 다이어그램의 색칠한 부분은 $B\cap C$에서 A를 제외하면 되므로 구하고자 하는 집합은 ② $(B\cap C)-A$이다.

08 답 15

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{3, 5\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$이고
$B\cap C=\{3, 5\}$이므로
$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$
$=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 모든 원소의 합은 15이다.

09 답 ⑤

> 전체집합 U의 임의의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중 집합 $A\cup(A^C\cap B)$와 같은 집합은?
>
> ① $\varnothing$　② $A\cap B$　③ A
> ④ B　⑤ $A\cup B$
>
> 합집합과 교집합이 같이 있는 연산이므로 분배법칙을 이용하자.

1st $A\cup(A^C\cap B)$에서 분배법칙을 이용하여 전개한 후 간단히 하자.

$A\cup(A^C\cap B)=(A\cup A^C)\cap(A\cup B)$
$=U\cap(A\cup B)=A\cup B$

10 답 ④

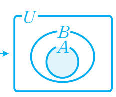
$B-(B-A)=B\cap(B\cap A^C)^C$
$=B\cap(B^C\cup A)$
$=(B\cap B^C)\cup(B\cap A)$
$=\varnothing\cup(B\cap A)=A\cap B$

11 답 ③

> 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
> $(A\cap B^C)\cup(A\cap B)=A\cap B$
> 일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?
> 좌변을 간단히 하기 위해 $A\cap$으로 묶자.
>
> ① $A\cap B=B$　② $A\cup B^C\neq U$
> ③ $A-B=\varnothing$　④ $A\cup B=U$
> ⑤ $A\cap B=\varnothing$

1st '$A\cap$'을 공통부분으로 하여 분배법칙을 적용하자.

$(A\cap B^C)\cup(A\cap B)=A\cap B$
$\Longleftrightarrow A\cap(\underbrace{B^C\cup B}_{=U})=A\cap B$
$\Longleftrightarrow A\cap U=A\cap B$
$\Longleftrightarrow A=A\cap B$



$\therefore A\subset B$

따라서 항상 옳은 것은 ③ $A-B=\varnothing$이다.
②의 경우 $A=B$이면 $A\cup B^C=B\cup B^C=U$로 거짓이야.

12 답 15

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$20=10+n(B)-5$
$\therefore n(B)=15$

13 답 34

$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$
$=n(U)-n(A\cap B)$
$=40-6=34$

14 답 ②

> 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
> $n(U)=25$, $n(A^C)=15$, $n(B)=8$, $n(A^C\cap B^C)=9$
> 일 때, $n(A\cap B)$의 값은?
>
> ① 1 ② 2 ③ 3
> ④ 4 ⑤ 5
>
> $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$ 이므로 ❶, ❷를 변형해야 겠지?

1st 여집합의 원소의 개수 $n(A^C)=n(U)-n(A)$를 이용해.

$n(A)=n(U)-n(A^C)=25-15=10$ $A=U-A^C$이니까

한편, $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$에서

$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$9=25-n(A\cup B)$ $\quad\therefore n(A\cup B)=16$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=10+8-16=2$

15 답 58

$n(A)=20$, $n(B)=25$에서 $n(A)<n(B)$이므로

$A\subset B$이면 $A\cap B=A$이다.

$\therefore 12\le n(A\cap B)\le n(A)=20$ ⋯ ㉠ ⋯ Ⅰ

이때, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=20+25-n(A\cap B)$

$=45-n(A\cap B)$

이므로 ㉠에 의하여 $25\le n(A\cup B)\le 33$ ⋯ Ⅱ

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 $M=33$, 최솟값은 $m=25$ 이므로

$M+m=33+25=58$이다. ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$n(A\cap B)$의 값의 범위를 구한다.	40%
Ⅱ	$n(A\cup B)$의 값의 범위를 구한다.	40%
Ⅲ	$M+m$의 값을 구한다.	20%

Simple E 명제와 조건

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 34~35

01 답 명제

02 답 조건

03 답 부정

04 답 진리집합

05 답 $P\cap Q$, $P\cup Q$

06 답 ×

07 답 ×

08 답 ○

09 답 ○

10 답 ○

11 답 ×

12 답 ×

13 답 ○

14 답 ○

15 답 ×

16 답 조건

17 답 명제

18 답 조건

19 답 명제

20 답 고래는 포유류가 아니다.

21 답 $\sqrt{2}$는 무리수가 아니다.

22 답 $x\le 3$

23 답 $x\ne 1$이고 $x\ne 2$

24 답 $x\le 0$ 또는 $x\ge 2$

$0<x<2$는 $x>0$이고 $x<2$이므로 $0<x<2$의 부정은 $x\le 0$ 또는 $x\ge 2$이다.

25 답 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

26 답 {7}

27 답 {1, 2, 3, 4}

28 답 {1, 3}

$x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 진리집합은 {1, 3}

29 답 {2, 3, 4, 5}

$x^2-7x+6<0$에서 $(x-1)(x-6)<0$ $\quad\therefore 1<x<6$

이때 x는 10 이하의 자연수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값은 2, 3, 4, 5이다.

따라서 진리집합은 {2, 3, 4, 5}

30 답 {4, 5, 6, 7}

$P=\{4, 5, 6, \cdots, 10\}$, $Q=\{1, 2, 3, \cdots, 7\}$이므로

조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q=\{4, 5, 6, 7\}$

31 답 {6}

$P=\{3, 6, 9\}$, $Q=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로

조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q=\{6\}$

32 답 {1, 2, 3, 9, 10}

$P=\{9, 10\}$, $Q=\{1, 2, 3\}$이므로

조건 'p 또는 q'의 진리집합은 $P\cup Q=\{1, 2, 3, 9, 10\}$

33 답 {1, 2, 3, 4, 6, 9}

$P=\{3, 6, 9\}$, $Q=\{1, 2, 4\}$이므로

조건 'p 또는 q'의 진리집합은 $P\cup Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$

유형 연습 [+내신 유형]

문제편 pp. 36~39

34 답 ⑤

⑤는 참, 거짓을 판단할 수 없으므로 명제가 아니다.

35 답 ④

ㄱ은 참, 거짓을 판단할 수 없으므로 명제가 아니다.

ㄴ, ㄹ은 거짓인 명제이고 ㄷ은 참인 명제이다.

따라서 명제의 개수는 3이다.

36 답 ②

ㄱ. 정삼각형이면 이등변삼각형이지만 이등변삼각형이 모두 정삼각형인 것은 아니다. (거짓)

ㄴ. 자연수와 자연수의 합은 자연수이다. (참)

ㄷ. 14는 7의 배수이지만 짝수이다. (거짓)

따라서 참인 명제는 ㄴ이다.

37 답 ③

ㄱ. $\sqrt{2}$는 무리수이다. (참)

ㄴ. $6=2\times3$이므로 6은 2와 3의 최소공배수이다. (참)

ㄷ. 평행사변형 중 직사각형, 정사각형은 두 대각선의 길이가 같지만 이외의 평행사변형은 두 대각선의 길이가 다르다. (거짓)

따라서 거짓인 명제는 ㄷ이다.

38 답 ①

①은 참인 명제이고 ②, ③, ④, ⑤는 x의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다.

39 답 ④

ㄱ, ㄴ, ㄷ은 x의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다. ㄹ은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하는 부등식이므로 참인 명제이다.

따라서 조건은 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 3개이다.

40 답 ③

ㄱ. 1은 3의 배수가 아니므로 주어진 명제는 거짓이고, 그 부정은 참이다.

ㄴ. 8과 12의 최대공약수는 4이므로 주어진 명제는 참이고, 그 부정은 거짓이다.

ㄷ. 소수 2는 짝수이므로 주어진 명제는 거짓이고, 그 부정은 참이다.

따라서 부정이 참인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

각 명제의 부정을 구해 참, 거짓을 따지자.

ㄱ. 부정은 '1은 3의 배수가 아니다.'로 참이다.

ㄴ. 부정은 '8과 12의 최대공약수는 4가 아니다.'로 거짓이다.

ㄷ. 부정은 '어떤 소수는 짝수이다.'로 참이다.

41 답 ③

ㄱ. 2와 3은 서로소이므로 주어진 명제는 참이고, 그 부정은 거짓이다.

ㄴ. 4와 6의 최소공배수는 12이므로 주어진 명제는 거짓이고, 그 부정은 참이다.

ㄷ. $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 주어진 명제는 참이고, 그 부정은 거짓이다.

따라서 부정이 거짓인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

42 답 ③

ㄱ, ㄴ의 명제는 참이므로 그 부정은 거짓이고, ㄷ, ㄹ의 명제는 거짓이므로 그 부정은 참이다.

따라서 부정이 참인 것의 개수는 ㄷ, ㄹ의 2이다.

43 답 ④

'$a<0$ 또는 $b\geq0$'의 부정은 '$a\geq0$이고 $b<0$이다.'

44 답 ④

$x^2-x<0$의 부정은 $x^2-x\geq0$이다.

즉, $x(x-1)\geq0$에서 $x\leq0$ 또는 $x\geq1$

45 답 ③

p : $2x+1<3x-2$에서 $x>3$

q : $x^2-4x\leq0$에서 $x(x-4)\leq0$ $\quad\therefore 0\leq x\leq4$

따라서 조건 'p이고 q'는 $3<x\leq4$이므로 부정은 '$x\leq3$ 또는 $x>4$'이다.

46 답 ④

$a^2+b^2=0$에서 $a=0$이고 $b=0$이다.

따라서 '$a=0$이고 $b=0$'의 부정은 '$a\neq0$ 또는 $b\neq0$'이다.

47 답 ①

6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 진리집합은 $\{1, 2, 3\}$이다.

따라서 진리집합의 모든 원소의 합은 $1+2+3=6$이다.

48 답 ③

$x^2+4x-5=0$에서 $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

그런데 x는 $-2\leq x\leq2$인 정수이므로 $x=1$이다.

따라서 조건 p의 진리집합은 $\{1\}$이다.

49 답 ③

$x^2-5>0$에서 $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})>0$

$\therefore x<-\sqrt{5}$ 또는 $x>\sqrt{5}$

따라서 조건 p의 진리집합은 $\{3, 4, 5\}$이다.

50 답 3

$x^2+2x-8\leq0$에서 $(x+4)(x-2)\leq0$ $\quad\therefore -4\leq x\leq2$

그런데 x는 10 이하의 자연수이므로 조건 p의 진리집합은 $\{1, 2\}$이다.

따라서 진리집합의 모든 원소의 합은 $1+2=3$이다.

51 답 ②

조건 p의 진리집합 P라 하면 $P=\{3, 4, 5\}$이므로 조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{1, 2\}$이다.

따라서 구하는 진리집합의 모든 원소의 합은 $1+2=3$이다.

52 답 38

조건 p의 진리집합을 P라 하면 조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.

$P=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 $P^C=\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$이다.

따라서 P^C의 모든 원소의 합은 38이다.

53 답 ⑤

조건 p의 진리집합을 P라 하면 $x^2=4$에서 $x=\pm2$이므로 조건 p의 진리집합 $P=\{-2, 2\}$이다.

따라서 조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{-3, -1, 0, 1, 3\}$이므로 구하는 원소의 개수는 5이다.

54 답 ①

$x^2-5x+4>0$에서 $(x-1)(x-4)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>4$

그런데 x는 10 이하의 자연수이므로 조건 p의 진리집합을 P라 하면 $P=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$이다.

따라서 조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 구하는 모든 원소의 합은 $1+2+3+4=10$이다.

다른 풀이

조건 p : $x^2-5x+4>0$의 부정은 $\sim p$: $x^2-5x+4\leq0$이고 $x^2-5x+4\leq0$에서 $(x-1)(x-4)\leq0$이므로 $1\leq x\leq4$

이때 x는 10 이하의 자연수이므로 $\sim p$의 진리집합은 $\{1, 2, 3, 4\}$이다.

(이하 동일)

55 답 ④

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 조건 'p이고 q'의 진리집합은 $P\cap Q$이다.

$P=\{1, 2, 3, 4\}$, $Q=\{1, 2\}$에서 $P\cap Q=\{1, 2\}$이므로 조건 'p이고 q'의 진리집합 $P\cap Q$의 모든 원소의 합은 $1+2=3$이다.

56 답 2

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\left\{x \middle| x\geq\frac{1}{2}\right\}$, $Q=\left\{x \middle| x\leq\frac{3}{2}\right\}$

따라서 조건 'p이고 q'의 진리집합은

$P\cap Q=\left\{x \middle| \frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\right\}$이므로 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$

57 답 ②

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$|x+1|<3$에서 $-3<x+1<3$이므로 $-4<x<2$

$\therefore P=\{-3, -2, -1, 0, 1\}$

$x^2-3x\leq0$에서 $x(x-3)\leq0$이므로 $0\leq x\leq3$

$\therefore Q=\{0, 1, 2, 3\}$

따라서 조건 'p이고 q'의 진리집합은 $P\cap Q=\{0, 1\}$이므로 구하는 원소의 개수는 2이다.

58 답 1

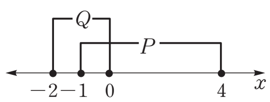
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$x^2-3x-4\le 0$에서 $(x+1)(x-4)\le 0$이므로 $-1\le x\le 4$

$\therefore P=\{x|-1\le x\le 4\}$

$x^2+2x\le 0$에서 $x(x+2)\le 0$이므로 $-2\le x\le 0$

$\therefore Q=\{x|-2\le x\le 0\}$



따라서 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 그림과 같으므로 조건 'p이고 q'의 진리집합은

$P\cap Q=\{x|-1\le x\le 0\}$이다.

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=0$이므로 $\beta-\alpha=0-(-1)=1$

59 답 ③

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

조건 'p 또는 q'의 진리집합은 $P\cup Q$이다.

$P=\{3, 6, 9\}$, $Q=\{5, 6, 7\}$에서 $P\cup Q=\{3, 5, 6, 7, 9\}$이므로 조건 '$p$ 또는 q'의 진리집합의 원소의 개수는 5이다.

60 답 ①

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$x<3$에서 $P=\{1, 2\}$

$x^2-8x+15=0$에서 $(x-3)(x-5)=0$이므로

$x=3$ 또는 $x=5$ $\quad\therefore Q=\{3, 5\}$

즉, $P\cup Q=\{1, 2, 3, 5\}$이므로 조건 'p 또는 q'의 진리집합의 모든 원소의 합은 $1+2+3+5=11$이다.

61 답 ⑤

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$3x+1>5x-7$에서 $x<4$이므로 $P=\{1, 2, 3\}$

$x^2-3x-4=0$에서 $(x+1)(x-4)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=4$ $\quad\therefore Q=\{4\}$

즉, $P\cup Q=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 조건 'p 또는 q'의 진리집합의 모든 원소의 합은 $1+2+3+4=10$이다.

62 답 ⑤

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$x^2-2x-3\le 0$에서

$(x+1)(x-3)\le 0$이므로 $-1\le x\le 3$

$\therefore P=\{1, 2, 3\}$

$x^2-8x+12\ge 0$에서

$(x-2)(x-6)\ge 0$이므로 $x\le 2$ 또는 $x\ge 6$

$\therefore Q=\{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}$

즉, $P\cup Q=\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10\}$이므로 조건 '$p$ 또는 q'의 진리집합의 원소의 개수는 8이다.

Simple F 명제

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 40~41

01 답 가정, 결론

02 답 반례

03 답 어떤, $\sim p$

04 답 모든, $\sim p$

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ○

09 답 가정 : $x=1$이다.
결론 : $x+2=3$이다.

10 답 가정 : x는 무리수이다.
결론 : x는 실수이다.

11 답 가정 : 어떤 수는 10의 약수이다.
결론 : 어떤 수는 5의 약수이다.

12 답 가정 : 어떤 삼각형은 정삼각형이다.
결론 : 어떤 삼각형은 이등변삼각형이다.

13 답 참

14 답 거짓

15 답 참

16 답 거짓

17 답 거짓

18 답 참

19 답 참

20 답 거짓

21 답 어떤 실수 x에 대하여 $x-5\ne 2$이다.

22 답 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\le 0$이다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 42~43

23 답 ④

① $x=2$이면 x는 2의 배수이지만 $x+1=2+1=3$은 홀수이다. (거짓)

② $x=1$, $y=-1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\neq y$이다. (거짓)

③ $x=1$, $y=0$, $z=2$이면 $xy=yz$이지만 $x\neq z$이다. (거짓)

④ 4의 약수는 1, 2, 4이고 8의 약수는 1, 2, 4, 8이므로 4의 약수는 모두 8의 약수이다. (참)

⑤ $x=1$, $y=-2$이면 $x>y$이지만 $x^2<y^2$이다. (거짓)

TIP

명제가 거짓임을 보이는 가장 빠른 방법은 반례를 찾는 것이다.
즉, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p\longrightarrow q$가 거짓임을 보이기 위해 $x\in P$이고 $x\notin Q$인 x를 찾자.

24 답 ③

ㄱ. 6의 배수는 모두 3의 배수이므로 명제 $p\longrightarrow q$는 참이다.

ㄴ. $x>0$, $y>0$이면 $xy>0$이므로 명제 $p\longrightarrow q$는 참이다.

ㄷ. $x=-1$이면 $x^2>0$이지만 $x<0$이므로 명제 $p\longrightarrow q$는 거짓이다.

따라서 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

25 답 ②

ㄱ. 모든 정사각형은 직사각형이므로 참이다.

ㄴ. $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$이므로 두 무리수의 곱 중에는 유리수가 되는 것도 있으므로 거짓이다.

ㄷ. $a=0$, $b=1$이면 $ab=0$이지만 $a+b=1\neq 0$이므로 거짓이다.

ㄹ. $A=\varnothing$이면 $A\cap B=\varnothing$이므로 참이다.

따라서 참인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

26 답 ④

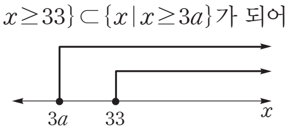
명제 '$x=2$이면 $x^3-2k=0$이다.'가 참이 되려면 방정식 $x^3-2k=0$의 해가 2이어야 한다.

즉, $x=2$를 $x^3-2k=0$에 대입하면 $8-2k=0$에서 $2k=8$

$\therefore k=4$

27 답 ①

$2x+a\leq 3x-2a$에서 $x\geq 3a$이므로 주어진 명제가 참이 되려면 $\{x\mid x\geq 33\}\subset\{x\mid x\geq 3a\}$가 되어야 한다.



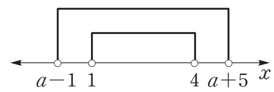
즉, $3a\leq 33$에서 $a\leq 11$

따라서 실수 a의 최댓값은 11이다.

28 답 ⑤

주어진 명제가 참이 되려면

$\{x\mid 1<x<4\}\subset\{x\mid a-1<x<a+5\}$가 되어야 한다.

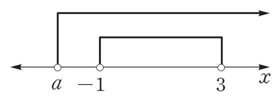


즉, $a-1\leq 1$이고, $a+5\geq 4$에서 $a\leq 2$이고 $a\geq -1$

$\therefore -1\leq a\leq 2$

29 답 ②

$|x-1|<2$에서 $-1<x<3$이므로 주어진 명제가 참이 되려면 $\{x\mid -1<x<3\}\subset\{x\mid x>a\}$가 되어야 한다.



$\therefore a\leq -1$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다.

30 답 ②, ④

① $x=0$이면 $x^2=0$이다. (거짓)

② $x+1$이 될 수 있는 값은 0, 1, 2이므로 $x+1\geq 0$이다. (참)

③ $x=1$, $y=-1$이면 $x^2+y^2=2$이다. (거짓)

④ $x=0$이면 $x^2=0\neq 1$이다. (참)

⑤ $x-1$이 될 수 있는 값은 -2, -1, 0이므로 $x-1>0$이 되는 x의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

31 답 ②

① 모든 실수 x에 대하여 $x^2\geq 0$이다. (거짓)

② $x=0$이면 $1-x^2=1>0$이다. (참)

③ 0과 1 사이에는 자연수가 없다. (거짓)

④ $x=1$이면 $x-1=0$이다. (거짓)

⑤ $x=2$이면 $x^2-x=2\neq 0$이다. (거짓)

32 답 ①

ㄱ. 전체집합 U의 가장 큰 원소가 9이므로 모든 실수 x에 대하여 $x-10\leq -1$이다. (참)

ㄴ. $x=1$일 때, $1+4=5<6$이다. (참)

ㄷ. $x=1$일 때, $1+1=2$이다. (거짓)

ㄹ. $x=6$일 때, $6+4=10>9$이다. (거짓)

따라서 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

33 답 ④

명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x+3\neq 0$이다.'의 부정은 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-4x+3=0$이다.'이므로 이차방정식 $x^2-4x+3=0$의 해가 구하는 x의 값이다.

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 모든 x의 값의 합은 $1+3=4$이다.

심플(고등자이)(해설)(1단원)008-043.indd 26 2017. 9. 22. 오후 8:50

34 답 ③

명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^3-2x^2-x+2\neq0$이다.'의 부정은 '어떤 실수 x에 대하여 $x^3-2x^2-x+2=0$이다.'이므로 삼차방정식 $x^3-2x^2-x+2=0$의 해가 구하는 x의 값이다.

$x^3-2x^2-x+2=0$에서 $x(x^2-1)-2(x^2-1)=0$

$(x^2-1)(x-2)=0$, $(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

그런데 $x=-1$은 전체집합 U의 원소가 될 수 없으므로 $x=1$ 또는 $x=2$이다. 따라서 모든 x의 값의 합은 $1+2=3$이다.

35 답 ②

'어떤 실수 x에 대하여 $x^2-4x+a<0$이다.'의 부정은 '모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x+a\geq0$이다.'이므로 주어진 명제의 부정이 참이 되려면 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 할 때 $\frac{D}{4}=4-a\leq0$이어야 한다.

$\therefore a\geq4$

따라서 실수 a의 최솟값은 4이다.

다른 풀이

모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x+a\geq0$이 성립해야 한다.

$x^2-4x+a=x^2-4x+4-4+a=(x-2)^2+a-4$이므로 x^2-4x+a의 최솟값은 $x=2$일 때 $a-4$이다.

즉, $a-4\geq0$이어야 하므로 $a\geq4$

(이하 동일)

36 답 ④

'어떤 실수 x에 대하여 $(a^2-1)x>a-1$이다.'의 부정은 '모든 실수 x에 대하여 $(a^2-1)x\leq a-1$이다.'이다.

$(a^2-1)x\leq a-1$에서

$(a+1)(a-1)x\leq a-1$ ⋯ ㉠

(i) $a=-1$일 때, ㉠은 $0\cdot x\leq-2$이므로 해는 없다.

(ii) $a=1$일 때, ㉠은 $0\cdot x\leq0$이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $a\neq-1$, $a\neq1$일 때, ㉠에서 $x\leq\frac{1}{a+1}$

(i)~(iii)에 의하여 주어진 명제의 부정이 참이 되게 하는 a의 값은 1이다.

Simple G 명제의 역과 대우

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 44~45

01 답 역

02 답 대우

03 답 정의

04 답 증명

05 답 정리

06 답 귀류법

07 답 ×

08 답 ○

09 답 ○

10 답 ×

11 답 ○

12 답 역 : x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다.

대우 : x가 4의 배수가 아니면 x는 2의 배수가 아니다.

13 답 역 : x가 9의 약수이면 x는 3의 약수이다.

대우 : x가 9의 약수가 아니면 x는 3의 약수가 아니다.

14 답 역 : $x^2=4$이면 $x=2$이다.

대우 : $x^2\neq4$이면 $x\neq2$이다.

15 답 역 : $x^2>1$이면 $x>1$이다.

대우 : $x^2\leq1$이면 $x\leq1$이다.

16 답 역 : 두 대각선이 서로 수직이면 마름모이다.

대우 : 두 대각선이 서로 수직이 아니면 마름모가 아니다.

17 답 역 : 기온이 떨어지면 비가 온다

대우 : 기온이 떨어지지 않으면 비가 오지 않는다.

18 답 $\sim q \to \sim p$

명제 $p\to q$가 참이면 이 명제의 대우도 참이다.

즉, 명제 $p\to q$가 참이면 이 명제의 대우 $\sim q\to\sim p$도 반드시 참이다.

19 답 $\sim q\to p$

20 답 $q\to p$

21 답 $p \to \sim q$

명제 $\sim p \to q$의 역은 $q \to \sim p$이다.

이때 명제가 참이면 그 대우도 참이므로

명제 $\sim p \to q$의 역 $q \to \sim p$가 참이면

명제 $p \to \sim q$ 도 반드시 참이다.

22 답 (가) 홀수, (나) $2k-1$

주어진 명제의 대우는

'자연수 n에 대하여 n이 홀수(가)이면 n^2도 홀수이다.'이므로

이 명제가 참임을 보이면 된다.

n이 홀수이면 $n=2k-1$(나)(k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로 $n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1$이다.

여기서 $2(2k^2-2k)$는 짝수이므로 n^2은 홀수이다.

따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

심플 정리

[증명의 방법]

(1) 직접증명법 : 참이라고 인정되는 몇 개의 명제에서 출발하여 차례로 타당한 추론을 계속하여 주어진 명제가 참임을 보이는 방법

(2) 간접증명법

① 귀류법 : 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 그 명제의 결론을 부정하여 가정이 모순됨을 보임으로써 간접적으로 그 명제가 참임을 증명하는 방법

② 대우법 : 명제가 참이면 그 대우도 참이므로 대우가 참임을 증명함으로써 그 명제가 참임을 증명하는 방법

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 46~47

23 답 ⑤

주어진 명제의 가정과 결론을 부정하면 각각

'$x<1$ 또는 $y<1$', '$x+y<2$'이다.

그 다음 가정과 결론의 위치를 바꾸면 주어진 명제의 대우는 '$x+y<2$이면 $x<1$ 또는 $y<1$이다.'이다.

24 답 ②

① 역은 '$a=b=0$이면 $ab=0$ 이다.'이므로 참이다.

② 역은 '$a+b>2$이면 $a>1$이고 $b>1$이다.'이고 $a=4$, $b=-1$일 때 거짓이다.

③ 역은 '$a+c=b+c$이면 $a=b$이다.'이므로 참이다.

④ 역은 '삼각형 ABC에서 $\angle A=\angle B=\angle C$이면 정삼각형이다.'이므로 참이다.

⑤ 역은 'a가 4의 약수이면 a는 8의 약수이다.'이므로 참이다.

25 답 ⑤

ㄱ. 역 : $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)

대우 : $x\neq0$이고 $y\neq0$이면 $xy\neq0$이다. (참)

ㄴ. $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ $\quad \therefore x=1$

역 : $x^2-2x+1=0$이면 $x=1$이다. (참)

대우 : $x^2-2x+1\neq0$이면 $x\neq1$이다. (참)

ㄷ. 역 : $x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (참)

대우 : $x\neq0$ 또는 $y\neq0$이면 $x^2+y^2\neq0$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ은 역과 대우가 모두 참이다.

26 답 6

주어진 명제가 참이므로 대우인

'$x=2$이면 $x^2-ax+8=0$이다.'도 참이다.

즉, $x=2$가 방정식 $x^2-ax+8=0$의 해이므로

$x^2-ax+8=0$에 $x=2$를 대입하면

$4-2a+8=0$, $2a=12$

$\therefore a=6$

27 답 ②

명제 $p \to q$의 역은 $q \to p$이다. 따라서 명제 $q \to p$가 참이면 그 대우인 $\sim p \to \sim q$도 반드시 참이다.

따라서 반드시 참인 명제는 ㄴ이다.

28 답 3

명제 $p \to \sim q$, $r \to q$가 참이므로 그 각각의 대우인

$q \to \sim p$, $\sim q \to \sim r$도 참이다.

또한, $p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$가 참이므로 $p \to \sim r$도 참이다.

따라서 참인 것의 개수는 ㄴ, ㄹ, ㅁ의 3이다.

29 답 ③

① 명제 $p \to \sim q$가 참이므로 대우 $q \to \sim p$도 참이다.

② 명제 $\sim p \to r$가 참이므로 대우 $\sim r \to p$도 참이다.

④ 명제 $q \to \sim p$와 $\sim p \to r$가 참이므로 $q \to r$도 참이다.

⑤ $q \to r$가 참이므로 대우 $\sim r \to \sim q$도 참이다.

30 답 ④

주어진 명제의 대우(가)가 참임을 보이면 된다.

자연수 x, y가 홀수이면

$x=2m+1$, $y=2n+1$(m, n은 음이 아닌 정수)로 나타내어지므로

$xy=(2m+1)(2n+1)=4mn+2m+2n+1$

$\quad =2(2mn+m+n)+1$ (나): $2mn+m+n$

이다. 그런데 $2(2mn+m+n)$은 짝수이므로 xy는 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 원래의 명제도 참이다.

31 답 해설 참조

명제 '자연수 n에 대하여 n^2+1이 짝수이면 n은 홀수이다.'의 대우 '자연수 n에 대하여 n이 짝수이면 n^2+1은 홀수이다.'가 참임을 보이자.

n이 짝수이면 $n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있고

$n^2+1=(2k)^2+1=2(2k^2)+1$이므로 n^2+1은 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 원래의 명제도 참이다.

32 답 ②

$\sqrt{3}$이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)이다.

이 식의 양변을 제곱하면 $3=\dfrac{q^2}{p^2}$이므로

(가)

$\boxed{3}\times p^2=q^2$ ⋯ ㉠이다.

이때 q^2이 3의 배수이므로 q도 3의 배수이다.

(나)

$q=\boxed{3k}$ (k는 자연수)라 하고 ㉠에 대입하면

$3p^2=(3k)^2$, 즉 $p^2=3\times\boxed{k^2}$ ←(다)

그런데 p^2이 3의 배수이므로 p도 3의 배수이다. 즉, p, q가 모두 3의 배수가 되어 p, q가 서로소라는 가정에 모순이다. 따라서 $\sqrt{3}$은 유리수가 아니다.

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 각각 3, $3k$, k^2이므로 $a=3$, $f(k)=3k$, $g(k)=k^2$이다.

$\therefore f(a)+g(a)=f(3)+g(3)=3\times3+3^2=18$

연습 문제 [E~G]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 48~49

01 답 ③

① $x=-1$일 때 $x^2=1$이지만 $x=-1\neq1$이다. (거짓)

② $x=-2$일 때 $x^2=4>1$이지만 $x=-2<1$이다. (거짓)

③ x가 9의 배수이면 $x=9k$ (k는 자연수)이고 $x=9k=3\times3k$이므로 x는 3의 배수이다. (참)

④ $x=3$, $y=-1$일 때 $x+y=2\geq2$이지만 $x=3\geq1$, $y=-1<1$이다. (거짓)

⑤ $x=1$, $y=3$일 때 $x+y=4$로 짝수지만 x, y는 모두 홀수이다. (거짓)

02 답 ④

두 실수 a, b에 대하여 조건 '$a\neq0$ 또는 $b\neq0$'의 부정은 '$a=0$이고 $b=0$'이다.

따라서 주어진 조건의 부정과 같은 것은 ④ $a^2+b^2=0$이다.

TIP

① $ab\neq0$에서 $a\neq0$ 또는 $b\neq0$

② $ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

③ $a^2+b^2>0$에서 $a\neq0$ 또는 $b\neq0$

④ $a^2+b^2=0$에서 $a=0$이고 $b=0$

⑤ $a=0$ 또는 $b=0$

03 답 ⑤

조건 p를 부정하면 $4x-5\leq2x+3$에서

$2x\leq8$ $\quad\therefore x\leq4$

즉, 조건 $\sim p$가 $x\leq4$이므로 $Q=\{1, 2, 3, 4\}$이다.

따라서 집합 Q의 모든 원소의 합은

$1+2+3+4=10$이다.

다른 풀이

$4x-5>2x+3$에서 $2x>8$ $\quad\therefore x>4$

이때 조건 p의 진리집합을 P라 하면 $P=\{5\}$이고 조건 $\sim p$의 진리집합 Q는 $Q=P^C=\{1, 2, 3, 4\}$이다.

(이하 동일)

심플 정리

[진리집합]

전체집합 U의 원소 중에서 조건 p를 참이 되게 하는 모든 원소의 집합을 조건 p의 진리집합이라 한다.

04 답 ②

조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P\cap Q=\{1, 2, 3\}$, $P\cap Q^C=\{5, 6\}$

$\therefore P=(P\cap Q)\cup(P\cap Q^C)=\{1, 2, 3, 5, 6\}$

따라서 조건 p의 진리집합 P의 모든 원소의 합은

$1+2+3+5+6=17$이다.

05 답 ④

> 명제 '$a \le x \le a+2$이면 $-3 \le x \le 5$이다.'가 참이 되게 하는 정수 a의 개수는? 가정과 결론의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P \subset Q$를 만족해야 해.
>
> ① 4　　② 5　　③ 6
>
> ④ 7　　⑤ 8

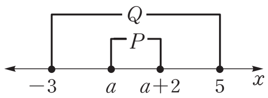
1st 진리집합의 포함 관계를 이용하여 정수 a의 개수를 구해.

주어진 명제가 참이어야 하므로

$P=\{x \mid a \le x \le a+2\}$, $Q=\{x \mid -3 \le x \le 5\}$라 하면

$P \subset Q$이다. 이를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 두 조건 p, q의 진리집합 P, Q에 대하여 $P \subset Q$가 성립해.



즉, $a \ge -3$이고 $a+2 \le 5$이므로 $-3 \le a \le 3$이다.

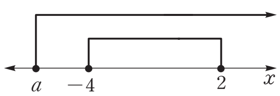
따라서 주어진 명제를 참이 되게 하는 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3으로 7개이다.

06 답 ①

$x^2+2x-8 \le 0$에서 $(x+4)(x-2) \le 0$

$\therefore -4 \le x \le 2$

이때 주어진 명제가 참이려면 $\{x \mid -4 \le x \le 2\} \subset \{x \mid x \ge a\}$이어야 하므로 $a \le -4$이다.



따라서 실수 a의 최댓값은 -4이다.

07 답 ④

> 전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에서 두 조건 p, q가 다음과 같다.
>
> p : x는 홀수이다.
>
> q : x는 3의 배수이다.
>
> 집합 U의 원소 중 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례가 될 수 있는 모든 수의 합은? 조건 p를 만족하면서 조건 q를 만족하지 않는 거야.
>
> ① 10　　② 11　　③ 12
>
> ④ 13　　⑤ 14

1st 두 조건 p, q의 진리집합을 구하자.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Q=\{3, 6, 9\}$

2nd 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례를 찾자.

명제 $p \longrightarrow q$는 'x가 홀수이면 x는 3의 배수이다.'이고 이 명제가 거짓임을 보이는 반례는 홀수이면서 3의 배수가 아닌 수이므로 1, 5, 7이다.

따라서 반례가 될 수 있는 모든 수의 합은 $1+5+7=13$이다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례 x는 $x \in P$이고 $x \notin Q$를 만족해.

08 답 ②

> 두 명제
>
> p : $x>0$인 어떤 실수 x에 대하여 $x+a<0$
>
> q : $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $x-a-2 \le 0$
>
> 가 모두 참일 때, 실수 a의 값의 범위는?
>
> ① $a<-2$　　② $-2 \le a<0$　　③ $-2 \le a<2$
>
> ④ $0 \le a<2$　　⑤ $a \ge 2$
>
> '어떤'이 있는 명제는 전체집합의 원소 중 하나만 만족시켜도 참이고 '모든'이 있는 명제는 전체집합의 모든 원소가 만족시켜야 참이야.

1st 명제 p가 참이 되도록 하는 a의 값의 범위를 구하자.

$x+a<0$에서 $x<-a$

즉, 명제 p가 참이려면 양수 x가 하나라도 부등식 $x<-a$를 만족시켜야 하므로

$-a>0$에서 $a<0$ ⋯ ㉠ $-a$가 양수가 되어야 부등식 $x<-a$를 만족시키는 양수 x가 존재해.

2nd 명제 q가 참이 되도록 하는 a의 값의 범위를 구하자.

$x-a-2 \le 0$에서 $x \le a+2$

즉, 명제 q가 참이려면 모든 음수 x가 부등식 $x \le a+2$를 만족시켜야 하므로

$a+2 \ge 0$에서 $a \ge -2$ ⋯ ㉡ $a+2$가 0보다 크거나 같아야 모든 음수 x가 부등식 $x \le a+2$를 만족해.

㉠, ㉡에 의하여 두 명제 p, q가 모두 참이 되도록 하는 a의 값의 범위는 $-2 \le a<0$이다.

09 답 -2

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

조건 p : $|x-5|<2$에서 $-2<x-5<2$

$\therefore 3<x<7 \Rightarrow P=\{x \mid 3<x<7\}$ ⋯ Ⅰ

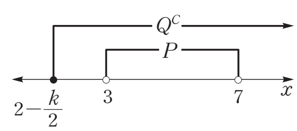
조건 q : $3x-4<x-k$에서 $2x<4-k$

$\therefore x<2-\frac{k}{2} \Rightarrow Q=\left\{x \,\middle|\, x<2-\frac{k}{2}\right\}$

즉, 조건 $\sim q$의 진리집합은 $Q^C=\left\{x \,\middle|\, x \ge 2-\frac{k}{2}\right\}$ ⋯ Ⅱ

이때 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P \subset Q^C$이어야 한다.

이를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



$2-\frac{k}{2} \le 3$　　$\therefore k \ge -2$

따라서 상수 k의 최솟값은 -2이다. ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	조건 p의 진리집합을 구한다.	30%
Ⅱ	조건 $\sim q$의 진리집합을 구한다.	30%
Ⅲ	상수 k의 최솟값을 구한다.	40%

10 답 ④

> 두 조건 p, q에 대하여 명제 '$p \to$ (가) '의 대우가 '$q \to$ (나) '일 때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?
>
> 명제의 가정과 결론을 부정한 후 위치를 바꾸면 대우야.
>
> ① q, p ② $\sim q$, p ③ q, $\sim p$
> ④ $\sim q$, $\sim p$ ⑤ $\sim p$, $\sim q$

1st 명제 $p \to q$의 대우는 $\sim q \to \sim p$지?

명제 $p \to$ (가) 의 대우는 $\sim$(가) $\to \sim p$이다.

그런데 이것이 $q \to$ (나) 이므로 $\sim$(가) $=q$이고 $\sim p=$ (나) 이다.

$\sim p$의 부정은 이지? 즉, $\sim(\sim p)=p$

따라서 (가)에 알맞은 것은 $\sim q$이고 (나)에 알맞은 것은 $\sim p$이다.

11 답 ⑤

$Q \subset P$이므로 명제 $q \to p$는 항상 참이다.

따라서 대우 $\sim p \to \sim q$도 항상 참이다.

12 답 ④

ㄱ. $q \to p$가 참이므로 대우 $\sim p \to \sim q$도 참이다.

ㄴ. $\sim q \to \sim r$가 참이므로 대우 $r \to q$도 참이고 $q \to p$가 참이므로 $r \to p$도 참이다.

ㄷ. $r \to p$가 참이므로 대우 $\sim p \to \sim r$도 참이다.

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13 답 ③

명제 $\sim q \to p$의 역인 $p \to \sim q$가 참이므로 대우 $q \to \sim p$도 참이다. 또한, $\sim r \to q$가 참이므로 대우 $\sim q \to r$도 참이다. 즉, 명제 $p \to \sim q$와 $\sim q \to r$가 참이므로 ③ $p \to r$도 참이다.

14 답 ⑤

n이 3의 배수가 아니면 자연수 k에 대하여 $n=3k-1$ 또는 $n=3k-$ 2 로 나타낼 수 있다.

(가)

$n=3k-1$이면

$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1=3(\underbrace{3k^2-2k}_{(나)})+1$

$n=3k-2$이면

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4=3(3k^2-4k+1)+\underbrace{1}_{(다)}$

여기서 $3(3k^2-2k)$와 $3(3k^2-4k+1)$은 3의 배수이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 원래의 명제도 참이다.

그러므로 (가), (나), (다)에 들어갈 것은 각각 2, $3k^2-2k$, 1이므로 $a=2$, $b=1$, $f(k)=3k^2-2k$

$\therefore f(a)-f(b)=f(2)-f(1)=8-1=7$

Simple H 필요조건과 충분조건

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 50~51

01 답 충분조건

02 답 필요조건

03 답 필요충분조건

04 답 ○

05 답 ×

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ○

09 답 ○

10 답 ○

11 답 (1) $P=\{1\}$, $Q=\{1, 2\}$ (2) 충분, 필요

(1) $x+1=2$에서 $x=1$ $\therefore P=\{1\}$

$(x-1)(x-2)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore Q=\{1, 2\}$

(2) $P \subset Q$이므로 $p \Rightarrow q$

즉, p는 q이기 위한 충분조건이고, q는 p이기 위한 필요조건이다.

12 답 (1) $P=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $Q=\{4, 8\}$ (2) 필요, 충분

(1) 10 이하의 2의 양의 배수는 2, 4, 6, 8, 10이므로

$P=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

10 이하의 4의 양의 배수는 4, 8이므로 $Q=\{4, 8\}$

(2) $Q \subset P$이므로 $q \Rightarrow p$

즉, p는 q이기 위한 필요조건이고, q는 p이기 위한 충분조건이다.

13 답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 충분조건 (4) 필요조건

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$x^2=1$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

$\therefore P=\{1, -1\}$

$x^2 \le 4$에서 $x^2-4 \le 0$, $(x-2)(x+2) \le 0$

따라서 $-2 \le x \le 2$이므로 $Q=\{x \mid -2 \le x \le 2\}$

$\therefore P \subset Q$ ⋯ ㉠

(1) ㉠에 의하여 명제 $p \to q$는 참이다.

(2) ㉠에 의하여 명제 $q \to p$는 거짓이다.

(3) p는 q이기 위한 충분조건이다.

(4) q는 p이기 위한 필요조건이다.

14 답 (1) 거짓 (2) 참 (3) 필요조건 (4) 충분조건

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이므로

$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이므로

$Q=\{1, 2, 3, 6\}$

$\therefore Q\subset P$ ⋯ ㉠

(1) ㉠에 의하여 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

(2) ㉠에 의하여 명제 $q \longrightarrow p$는 참이다.

(3) p는 q이기 위한 필요조건이다.

(4) q는 p이기 위한 충분조건이다.

15 답 (1) $P=\{2\}$, $Q=\{2\}$ (2) 필요충분, 필요충분

(1) $x=2$에서 $P=\{\ 2\ \}$

$2x+1=5$에서 $2x=4$, $x=2$ $\quad\therefore Q=\{\ 2\ \}$

(2) $P=Q$이므로 $p \Longleftrightarrow q$

즉, p는 q이기 위한 필요충분 조건이고, q는 p이기 위한 필요충분 조건이다.

16 답 (1) $P=\{-1, 1\}$, $Q=\{-1, 1\}$

(2) 필요충분, 필요충분

(1) $|x|=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore P=\{\ -1, 1\ \}$

$x^2=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore Q=\{\ -1, 1\ \}$

(2) $P=Q$이므로 $p \Longleftrightarrow q$

즉, p는 q이기 위한 필요충분 조건이고, q는 p이기 위한 필요충분 조건이다.

17 답 (1) 참 (2) 참 (3) 필요충분조건

$3x-6>0$에서 $3x>6$ $\quad\therefore x>2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x>2\}$, $Q=\{x|x>2\}$

$\therefore\ P=Q$ ⋯ ㉠

(1) ㉠에 의하여 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

(2) ㉠에 의하여 명제 $q \longrightarrow p$는 참이다.

(3) p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

18 답 (1) 참 (2) 참 (3) 필요충분조건

$x^2-x<0$에서 $x(x-1)<0$ $\quad\therefore 0<x<1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|0<x<1\}$, $Q=\{x|0<x<1\}$

$\therefore\ P=Q$ ⋯ ㉠

(1) ㉠에 의하여 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

(2) ㉠에 의하여 명제 $q \longrightarrow p$는 참이다.

(3) p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 52~53

19 답 ③

ㄱ. $\sqrt{a}=1$에서 $a=1$이므로 $a>0$이다. 즉, p는 q이기 위한 충분조건이다.

한편, $a=4>0$일 때 $\sqrt{a}=2\neq1$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이 아니다.

ㄴ. $a=1$이면 $a^2=1$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

한편, $a=-1$일 때 $a^2=1$이지만 $a\neq1$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이 아니다.

ㄷ. $a=0$일 때, $|a|=-a$이지만 $a<0$이 성립하지 않으므로 p는 q이기 위한 충분조건이 아니다.

한편, $a<0$이면 $|a|=-a$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20 답 ②

ㄱ. $ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

$a^2+b^2=0$에서 $a=0$이고 $b=0$

$a=0$, $b=1$일 때, 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이므로 p가 q이기 위한 충분조건이 아니다.

한편, $a=0$이고 $b=0$이면 $ab=0$, 즉 명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 p가 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $a>1$이고 $b>1$이면 $ab>1$이므로 명제 $p \longrightarrow q$가 참이다. 즉, p가 q이기 위한 충분조건이다.

한편, $a=\frac{1}{2}$, $b=4$일 때, $ab=2>1$이므로

명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다. 즉, p가 q이기 위한 필요조건이 아니다.

ㄷ. $a=1$, $b=-1$일 때, $a+b=0$이지만 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다. 즉, p가 q이기 위한 충분조건이 아니다.

한편, $a=b=0$이면 $a+b=0$이므로 명제 $q \longrightarrow p$가 참이다. 즉, p가 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄴ이다.

심플 정리

[필요조건, 충분조건과 진리집합 사이의 관계]

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때,

(1) p는 q이기 위한 충분조건 $P\subset Q$

(2) p는 q이기 위한 필요조건 $Q\subset P$

(3) p는 q이기 위한 필요충분조건 $P=Q$

21 답 ②

ㄱ. 명제 $p \longrightarrow q$는 참이지만 $x=\frac{1}{2}$일 때 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄴ. $x^2=1$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$
$x^3=1$에서 $x=1$
$x=-1$일 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이므로 p는 q이기 위한 충분조건이 아니다. 한편, 명제 $q \longrightarrow p$는 참이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $x=2$, $y=1$일 때, $\frac{1}{2}<1$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이고 $x=-2$, $y=-4$일 때 명제 $q \longrightarrow p$도 거짓이므로 p는 q이기 위한 충분조건도 필요조건도 아니다.

따라서 p가 q이기 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄴ이다.

22 답 ③

① $p : x<0,\ y>0$
$q : xy<0 \Longleftrightarrow x<0,\ y>0$ 또는 $x>0,\ y<0$
즉, 명제 $p \longrightarrow q$는 참이고 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

② $p : x^2-1=0 \Longleftrightarrow x=1$ 또는 $x=-1$
$q : x=1$
즉, 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이고 명제 $q \longrightarrow p$는 참이므로 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

③ $p : x=0$
$q : x^2\le 0 \Longleftrightarrow x=0$
즉, p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ 명제 $p \longrightarrow q$는 참이지만 $x=3$, $y=0$일 때, 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

⑤ $p : x$는 4의 배수 $\Longleftrightarrow \cdots,\ 4,\ 8,\ 12,\ \cdots$
$q : x$는 2의 배수 $\Longleftrightarrow \cdots,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots$
명제 $p \longrightarrow q$는 참이고 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

23 답 ②

ㄱ. $a=2$, $b=-3$일 때, 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이 아니다.

ㄴ. $|a|+|b|=0 \Longleftrightarrow a=b=0 \Longleftrightarrow a^2+b^2=0$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. 명제 $p \longrightarrow q$는 참이고 $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$일 때, 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이 아니다.

따라서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ뿐이다.

24 답 ⑤

(가) x가 짝수인 것은 x^2이 짝수인 것과 필요충분 조건이다. (가)

(나) y가 유리수이면 y^2도 유리수이지만 $y=\sqrt{2}$일 때, y^2은 유리수이지만 y는 무리수이다. 따라서 실수 y에 대하여 y가 유리수인 것은 y^2이 유리수이기 위한 충분조건이다. (나)

25 답 ③

$x^2+\frac{1}{3}kx+6=0$이 $x=-3$이기 위한 필요조건이므로

명제 '$x=-3$이면 $x^2+\frac{1}{3}kx+6=0$이다.'가 참이다.

즉, $x=-3$이 x에 대한 이차방정식 $x^2+\frac{1}{3}kx+6=0$의 해가 되어야 하므로 $x=-3$을 대입하면

$9-k+6=0$

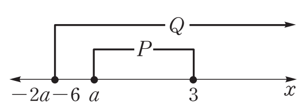
$\therefore k=15$

26 답 ②

$x-1\ne 0$이 $x^2+ax+3\ne 0$이기 위한 필요조건이므로 명제 '$x^2+ax+3\ne 0$이면 $x-1\ne 0$이다.'가 참이다.
이때 이 명제의 대우 '$x-1=0$이면 $x^2+ax+3=0$이다.'도 참이므로 $x-1=0$에서 $x=1$이 x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 해가 되어야 한다.
$x=1$을 $x^2+ax+3=0$에 대입하면 $1+a+3=0$
$\therefore a=-4$

27 답 ③

$x\ge -2a-6$이 $a\le x\le 3$이기 위한 필요조건이므로 명제 '$a\le x\le 3$이면 $x\ge -2a-6$이다.'가 참이다.
이때 두 조건 $a\le x\le 3$, $x\ge -2a-6$의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$가 성립해야 하므로 두 집합 P, Q의 포함 관계를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



즉, $-2a-6\le a$이어야 하므로 $a\ge -2$
$\therefore -2\le a<3$ ($\because a<3$)
따라서 상수 a의 최솟값은 -2이다.

28 답 ③

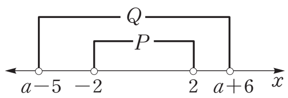
$x-1=0$이 $x^2-2ax+5=0$이기 위한 충분조건이므로
명제 '$x-1=0$이면 $x^2-2ax+5=0$이다.'가 참이다.
즉, $x-1=0$에서 $x=1$이 x에 대한 이차방정식 $x^2-2ax+5=0$의 해가 되어야 하므로 $x=1$을 대입하면
$1-2a+5=0$
$\therefore a=3$

29 답 ③

$ax^2+bx+1\neq0$이 $x-1\neq0$이기 위한 충분조건이므로
명제 '$ax^2+bx+1\neq0$이면 $x-1\neq0$이다.'가 참이다.
이때 이 명제의 대우 '$x-1=0$이면 $ax^2+bx+1=0$이다.'도 참이므로 $x-1=0$에서 $x=1$이 x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$의 해가 되어야 한다.
$x=1$을 $ax^2+bx+1=0$에 대입하면 $a+b+1=0$
$\therefore\ a+b=-1$

30 답 ③

$-2<x<2$가 $a-5<x<a+6$이기 위한 충분조건이므로
명제 '$-2<x<2$이면 $a-5<x<a+6$이다.'가 참이다.
이때 두 조건 $-2<x<2$, $a-5<x<a+6$의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$가 성립해야 하므로 두 집합 P, Q의 포함 관계를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



즉, $a-5\le-2$이고 $2\le a+6$이어야 하므로
$a\le3$이고 $a\ge-4$
$\therefore\ -4\le a\le3$
따라서 정수 a는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 8개이다.

> 심플 정리
> **[명제의 참, 거짓과 진리집합 사이의 관계]**
> 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때,
> (1) 명제 $p\longrightarrow q$가 참 $\Longleftrightarrow P\subset Q$
> (2) 명제 $p\longrightarrow q$가 거짓 $\Longleftrightarrow P\not\subset Q$

Simple I 절대부등식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 54~55

01 답 절대부등식

02 답 산술평균, 기하평균

03 답 양수

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ×

09 답 $\sqrt{2}+1<\sqrt{3}+1$

10 답 $2+\sqrt{3}>2\sqrt{3}$

11 답 $3\sqrt{2}+2>6$
$(3\sqrt{2}+2)-6=3\sqrt{2}-4=\sqrt{18}-\sqrt{16}>0$
$\therefore\ 3\sqrt{2}+2>6$

12 답 $2\sqrt{5}+3\sqrt{3}<2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$

13 답 (가) 252 (나) 220 (다) $>$

14 답 $2+\sqrt{5}<3+\sqrt{3}$
$(2+\sqrt{5})^2-(3+\sqrt{3})^2=4\sqrt{5}-6\sqrt{3}-3$
$=\sqrt{80}-\sqrt{108}-3<0$
이때 $2+\sqrt{5}>0$, $3+\sqrt{3}>0$이므로
$2+\sqrt{5}<3+\sqrt{3}$

15 답 $1+2\sqrt{2}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$

16 답 (가) $\frac{2}{3}$ (나) $<$
$\frac{A}{B}=\frac{2^{10}}{6^5}=\frac{(2^2)^5}{6^5}=\frac{4^5}{6^5}=\left(\underbrace{\frac{2}{3}}_{(가)}\right)^5$
그런데 $\frac{2}{3}<1$에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^5<1$이므로 $A\underbrace{<}_{(나)}B$이다.

17 답 ㄱ, ㄹ
ㄱ. $x^2+1>0$에서 $x^2>-1$ $\quad\therefore$ 절대부등식
ㄴ. $-|x|+1>0$에서 $|x|<1$
ㄷ. $x+1>0$에서 $x>-1$
ㄹ. $-(x-1)^2\le0$에서 $(x-1)^2\ge0$ $\quad\therefore$ 절대부등식
따라서 절대부등식인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

18 답 (가) $a-\frac{1}{2}b$ (나) $a=b=0$

$a^2+b^2-ab=a^2-ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$

$=\left(\overset{\text{(가)}}{a-\frac{1}{2}b}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

이때 $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2\geq 0$, $\frac{3}{4}b^2\geq 0$이므로

$a^2+b^2-ab\geq 0$

따라서 $a^2+b^2\geq ab$이다.

여기서 등호는 $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2=0$, $\frac{3}{4}b^2=0$,

즉 $\underset{\text{(나)}}{a=b=0}$ 일 때, 성립한다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 56～59

19 답 ③

$A-B=3\sqrt{2}-(3-2\sqrt{2})=5\sqrt{2}-3$

$=\sqrt{50}-\sqrt{9}>0$

$\therefore A>B$ ⋯ ㉠

$B-C=(3-2\sqrt{2})-(2+\sqrt{2})$

$=1-3\sqrt{2}=1-\sqrt{18}<0$

$\therefore B<C$ ⋯ ㉡

$A-C=3\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$

$=\sqrt{8}-\sqrt{4}>0$

$\therefore A>C$ ⋯ ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $B<C<A$이다.

20 답 ⑤

$a>b>0$에서 $a-b>0$이고, $c>d>0$에서 $c-d>0$

ㄱ. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0$이므로 $a^2>b^2$ (참)

ㄴ. $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)>0$이므로 $a+c>b+d$ (참)

ㄷ. $(2a-3d)-(2b-3c)=2(a-b)+3(c-d)>0$이므로 $2a-3d>2b-3c$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21 답 ③

$A=2x^2-y^2$, $B=x^2+2xy-2y^2$에서

$A-B=(2x^2-y^2)-(x^2+2xy-2y^2)$

$=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geq 0$

$\therefore A\geq B$

22 답 ②

$A-B=\frac{1}{a}-\frac{1}{2-a}=\frac{2(1-a)}{a(2-a)}$

이때 $1<a<2$에서 $1-a<0$, $2-a>0$이므로 $A-B<0$

$\therefore A<B$

23 답 ③

$\frac{a}{a+1}-\frac{b}{b+1}=\frac{a(b+1)-b(a+1)}{(a+1)(b+1)}=\frac{\overset{\text{(나)}}{a-b}}{(a+1)(b+1)}$

이때 $b>a>0$에서 $a+1>0$, $b+1>0$이고

$a-b<0$이므로

$\frac{a}{a+1}-\frac{b}{b+1}=\frac{a-b}{(a+1)(b+1)}\underset{\text{(가)}}{<}0$이다.

$\therefore \frac{a}{a+1}<\frac{b}{b+1}$

따라서 (가), (나)에 알맞은 차례로 $<$, $a-b$이다.

24 답 ⑤

$A-B=(ab+1)-(a+b)=ab-a-b+1$

$=a(b-1)-(b-1)=(a-1)(b-1)$

이때 $A>B$에서 $A-B>0$이므로 $(a-1)(b-1)>0$

따라서 부등식 $A>B$가 성립하기 위한 필요충분조건은

$a>1$, $b>1$ 또는 $a<1$, $b<1$

25 답 ①

$A=\sqrt{14}$, $B=3+\sqrt{5}$, $C=\sqrt{6}+2\sqrt{2}$에서

$A^2=14$

$B^2=14+6\sqrt{5}=14+\sqrt{180}$

$C^2=14+4\sqrt{12}=14+\sqrt{192}$

이때 $\sqrt{180}<\sqrt{192}$이므로 $A^2<B^2<C^2$이고

$A>0$, $B>0$, $C>0$이므로 $A<B<C$

26 답 ②

$A=\sqrt{2}+3$, $B=\sqrt{5}+\sqrt{6}$, $C=2+\sqrt{7}$에서

$A^2=11+6\sqrt{2}=11+\sqrt{72}$

$B^2=11+2\sqrt{30}=11+\sqrt{120}$

$C^2=11+4\sqrt{7}=11+\sqrt{112}$

이때 $\sqrt{72}<\sqrt{112}<\sqrt{120}$이므로 $A^2<C^2<B^2$이고

$A>0$, $B>0$, $C>0$이므로 $A<C<B$

27 답 ①

$A=2^{30}$, $B=3^{20}$, $C=6^{15}$에서

$\frac{A}{B}=\frac{2^{30}}{3^{20}}=\frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}}=\left(\frac{8}{9}\right)^{10}<1$이므로 $A<B$

$\frac{B}{C}=\frac{3^{20}}{6^{15}}=\frac{3^5}{2^{15}}=\frac{3^5}{(2^3)^5}=\left(\frac{3}{8}\right)^5<1$이므로 $B<C$

$\therefore A<B<C$

28 답 ⑤

$3^{20}>0$, $n^{10}>0$이므로 $3^{20}>n^{10}$의 양변을 n^{10}으로 나누면

$\frac{(3^2)^{10}}{n^{10}}>1$에서 $\left(\frac{9}{n}\right)^{10}>1$이다. 즉, $\frac{9}{n}>1$이므로 $n<9$

따라서 자연수 n의 최댓값은 8이다.

29 답 ①

ㄱ. $x+5<0$에서 $x<-5$이므로 절대부등식이 아니다.

ㄴ. $-4x^2+4x-1\le 0$에서 $4x^2-4x+1\ge 0$

따라서 $(2x-1)^2\ge 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다. 즉, 절대부등식이다.

ㄷ. $x=-1$일 때, $(-1)^3+1=0$이므로 절대부등식이 아니다.

따라서 절대부등식인 것은 ㄴ이다.

30 답 ⑤

ㄱ. $a^2\ge 0$, $|b-1|\ge 0$이므로 $a^2+|b-1|\ge 0$

따라서 절대부등식이다.

ㄴ. $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\ge 0$이므로

$(a+b)^2\ge 4ab$

따라서 절대부등식이다.

ㄷ. $a^2+2ab+2b^2=(a+b)^2+b^2$이고

$(a+b)^2\ge 0$, $b^2\ge 0$이므로 $a^2+2ab+2b^2\ge 0$

따라서 절대부등식이다.

따라서 절대부등식인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

31 답 ②

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\overbrace{\sqrt{a}-\sqrt{b}}^{\text{(가)}})^2}{2}$$

이때 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$이므로

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\ge 0$$

따라서 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$이다.

여기서 등호가 성립하는 경우는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$,

즉 $\underbrace{a=b}_{\text{(나)}}$일 때이다.

32 답 ③

$a^2+b^2-(2a+4b-5)$

$=(a^2-2a+1)+(b^2-4b+4)$

$=(a-\underbrace{1}_{\text{(가)}})^2+(b-\underbrace{2}_{\text{(나)}})^2$

이때 $(a-1)^2\ge 0$, $(b-2)^2\ge 0$이므로

$a^2+b^2-(2a+4b-5)\ge 0$

따라서 부등식 $a^2+b^2\ge 2a+4b-5$가 성립한다.

그러므로 (가), (나)에 알맞은 수는 각각 1, 2이므로

$p=1,\ q=2\qquad\therefore\ p+q=1+2=3$

33 답 ④

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2$

$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(\underbrace{|ab|-ab}_{\text{(가)}})\ge 0$

$\therefore\ (|a|+|b|)^2\ge|a+b|^2$

이때 $|a|+|b|\ge 0$, $|a+b|\ge 0$이므로

$|a|+|b|\ge|a+b|$

여기서 등호가 성립하는 경우는 $|ab|=ab$,

즉 $\underbrace{ab\ge 0}_{\text{(나)}}$일 때이다.

34 답 ①

$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$=a-b-(a-2\sqrt{ab}+b)$

$=2\sqrt{ab}-2b$

$=2\sqrt{b}(\overbrace{\sqrt{a}-\sqrt{b}}^{\text{(가)}})>0\ (\because\ a>b>0)$

$\therefore\ (\sqrt{a-b})^2\underbrace{>}_{\text{(나)}}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

이때 $\sqrt{a-b}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$이므로

$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$이다.

35 답 ②

$(a^2-4)x>a+1$에서

$(a+2)(a-2)x>a+1$

(i) $a=-2$이면

$0\cdot x>-1$이므로 해는 모든 실수이다.

(ii) $a=2$이면

$0\cdot x>3$이므로 해는 없다.

(iii) $a\ne-2$이고 $a\ne 2$이면

$$x>\frac{a+1}{(a+2)(a-2)}$$

(i)~(iii)에 의하여 $a=-2$

36 답 ④

x에 대한 이차부등식 $x^2+kx+k+3>0$이 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

즉, $D=k^2-4k-12<0$에서 $(k+2)(k-6)<0$

$\therefore\ -2<k<6$

따라서 정수 k는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$의 7개이다.

다른 풀이

$x^2+kx+k+3$의 최솟값이 0보다 크면 주어진 부등식은 항상 성립한다.

$$x^2+kx+k+3=x^2+kx+\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{4}k^2+k+3$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}k\right)^2-\frac{1}{4}k^2+k+3$$

이므로 $x^2+kx+k+3$은 $x=-\dfrac{1}{2}k$일 때

최솟값 $-\dfrac{1}{4}k^2+k+3$을 갖는다.

즉, $-\dfrac{1}{4}k^2+k+3>0$이어야 하므로

$k^2-4k-12<0$에서 $(k+2)(k-6)<0$

$\therefore\ -2<k<6$

(이하 동일)

심플 정리

[이차방정식의 판별식과 근의 개수]

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 판별식을 D라 하면 $D=b^2-4ac$

(1) $D>0$이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D=0$이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 중근을 갖는다.

(3) $D<0$이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근은 없다.

37 답 ⑤

$-x^2+2kx-k-6\leq0$에서 $x^2-2kx+k+6\geq0$

이 부등식이 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2kx+k+6=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=k^2-k-6\leq0$에서 $(k+2)(k-3)\leq0$

$\therefore\ -2\leq k\leq3$

따라서 $a=-2$, $b=3$이므로 $b-a=3-(-2)=5$

다른 풀이

$x^2-2kx+k+6\geq0$이 항상 성립하려면

$x^2-2kx+k+6$의 최솟값이 0보다 크거나 같아야 한다.

$$\begin{aligned}x^2-2kx+k+6&=x^2-2kx+k^2-k^2+k+6\\&=(x-k)^2-k^2+k+6\end{aligned}$$

이므로 $x^2-2kx+k+6$은 $x=k$일 때, 최솟값 $-k^2+k+6$을 갖는다.

즉, $-k^2+k+6\geq0$이어야 하므로

$k^2-k-6\leq0$에서 $(k+2)(k-3)\leq0$

$\therefore\ -2\leq k\leq3$

(이하 동일)

38 답 ②

이차부등식 $kx^2-(2k+1)x+k+2\geq0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 다음 두 가지를 모두 만족시켜야 한다.

(i) $k>0$

(ii) 이차방정식 $kx^2-(2k+1)x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq0$이어야 한다.

$D=(2k+1)^2-4k(k+2)\leq0$에서

$-4k+1\leq0 \qquad \therefore\ k\geq\frac{1}{4}$

(i), (ii)에 의하여 $k\geq\frac{1}{4}$이므로 실수 k의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

39 답 ④

$x>0$, $\frac{4}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{4}{x}\geq2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}=4$ (단, 등호는 $x=2$일 때 성립)

따라서 $x+\frac{4}{x}$의 최솟값은 4이다.

40 답 ①

$x>0$, $y>0$이므로 $x+y\geq2\sqrt{xy}$가 성립한다.

즉, $8\geq2\sqrt{xy}$에서

$\sqrt{xy}\leq4$ (단, 등호는 $x=y=4$일 때 성립)

$\therefore\ xy\leq16$

따라서 xy의 최댓값은 16이다.

41 답 ②

$(x+2y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}+2=4+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}$

이때 $\frac{4y}{x}>0$, $\frac{x}{y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geq2\sqrt{\frac{4y}{x}\times\frac{x}{y}}=\underbrace{4}_{(가)}$이고 등호는 $x=2y$일 때 성립한다.

따라서 $(x+2y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq4+4=\underbrace{8}_{(나)}$이므로

$(x+2y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)$의 최솟값은 8이다.

따라서 (가), (나)에 알맞은 수는 각각 4, 8이므로

$a=4$, $b=8$

$\therefore\ a+b=4+8=12$

연습 문제 [H~I]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 60~61

01 답 ③

ㄱ. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x>-2\}$, $Q=\{-1, 1\}$

즉, $Q\subset P$, $P\not\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄴ. $x=1$, $y=1$일 때 $x=y$이지만 $x^2+y^2=2\neq0$이다.

또, $x^2+y^2=0$에서 $x=0$, $y=0$이므로 $x=y$이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄷ. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$, $Q=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$

즉, $P\not\subset Q$, $Q\not\subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건도 충분조건도 아니다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

02 답 ①

(가) $|a|=|b|$에서 $a=b$ 또는 $a=-b$이므로 $|a|=|b|$는 $a=b$이기 위한 필요조건이다.

(나) $ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$이므로 $a=0$이고 $b=0$인 것은 $ab=0$이기 위한 충분조건이다.

03 답 ④

ㄱ. $xy>0$에서 $x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

한편, $x=1$, $y=-1$이면 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄴ. $|x|+|y|=0$에서 $x=0$이고 $y=0$

$x^2+y^2=0$에서 $x=0$이고 $y=0$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $x^3>1$에서 $x^3-1>0$이므로 $(x-1)(x^2+x+1)>0$

$x-1>0$ ($\because x^2+x+1>0$) $\quad \therefore x>1$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

> 심플 정리
>
> **[필요, 충분, 필요충분조건의 판정 방법]**
>
> (i) 주어진 명제를 조건 p, q로 분리한다.
>
> (ii) 조건 p, q의 진리집합 P, Q를 각각 구한다.
>
> (1) $P \subset Q$이면 p는 q이기 위한 충분조건
>
> (2) $P \supset Q$이면 p는 q이기 위한 필요조건
>
> (3) $P=Q$이면 p는 q이기 위한 필요충분조건

04 답 ⑤

> 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건일 때, 두 조건 p, q를 만족하는 각각의 진리집합 P, Q의 포함 관계로 옳지 않은 것은?
>
> p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$이어야 해. 이것으로 선택지의 참, 거짓을 따지자.
>
> ① $Q^C \subset P^C$ ② $P \cap Q=P$ ③ $P \cup Q=Q$
>
> ④ $P-Q=\varnothing$ ⑤ $P^C \cap Q=\varnothing$

1st 진리집합의 포함 관계로 선택지의 참, 거짓을 판별하자.

p가 q이기 위한 충분조건이므로 두 조건 p, q의 진리집합 P, Q의 포함 관계는 $P \subset Q$이다.

즉, $P^C \cap Q \neq \varnothing$이므로 두 집합 P, Q의 포함 관계로 옳지 않은 것은 ⑤이다.

$P^C \cap Q=Q \cap P^C=Q-P \neq \varnothing$

05 답 ②

> 두 조건 p : $-3<x-a<4$, q : $-1 \le 3x-7<23$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 정수 a의 개수는?
>
> 두 조건의 진리집합 사이의 포함 관계를 수직선 위에 나타내서 비교하면 돼.
>
> ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 두 조건 p, q의 진리집합을 구하자.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p : $-3<x-a<4$에서 $a-3<x<a+4$이므로

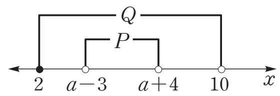
$P=\{x|a-3<x<a+4\}$

q : $-1 \le 3x-7<23$에서 $6 \le 3x<30$

즉, $2 \le x<10$이므로 $Q=\{x|2 \le x<10\}$

2nd p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P \subset Q$를 만족해야 해.

이때 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P \subset Q$가 성립해야 하므로 두 집합 P, Q 사이의 관계를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



$a-3=2$이어도 $P \subset Q$이므로 $a-3 \ge 2$

즉, $a-3 \ge 2$, $a+4 \le 10$에서 $a \ge 5$, $a \le 6$

$a+4=10$이어도 $P \subset Q$이므로 $a+4 \le 10$

$\therefore 5 \le a \le 6$

따라서 정수 a는 5, 6의 2개이다.

06 답 ②

p가 q이기 위한 필요조건이므로 명제 $q \longrightarrow p$가 참이다.

따라서 이 명제의 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이므로

명제 '$x=3$이면 $x^2-ax+3=0$이다.'가 참이다.

즉, $x=3$이 $x^2-ax+3=0$의 해이다.

$x=3$을 $x^2-ax+3=0$에 대입하면

$9-3a+3=0 \quad \therefore a=4$

07 답 4

$P=\{x|-1 \le x \le 2\}$, $Q=\{x|0<x<a\}$,

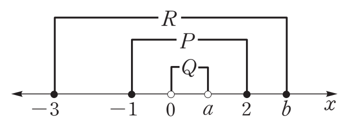
$R=\{x|-3 \le x \le b\}$라 하면

$-1 \le x \le 2$는 $0<x<a$이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$

$-1 \le x \le 2$는 $-3 \le x \le b$이기 위한 충분조건이므로 $P \subset R$

$\therefore Q \subset P \subset R$ … Ⅰ

즉, 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



$\therefore a \le 2$, $b \ge 2$ … Ⅱ

따라서 a의 최댓값은 2이고 b의 최솟값은 2이므로

$a+b=2+2=4$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	세 조건의 진리집합 사이의 포함 관계를 구한다.	40%
Ⅱ	a, b의 값의 범위를 각각 구한다.	40%
Ⅲ	a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구한다.	20%

08 답 ④

$a>b$에서 $a-b>0$

ㄱ. $\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{b+1}=\dfrac{(b+1)-(a+1)}{(a+1)(b+1)}$

$=\dfrac{-(a-b)}{(a+1)(b+1)}<0$

$\therefore \dfrac{1}{a+1}<\dfrac{1}{b+1}$ (거짓)

ㄴ. $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+1}{b+1}=\dfrac{a(b+1)-b(a+1)}{b(b+1)}=\dfrac{a-b}{b(b+1)}>0$

$\therefore \dfrac{a}{b}>\dfrac{a+1}{b+1}$ (참)

ㄷ. $\dfrac{2a}{2a+1}-\dfrac{2b}{2b+1}=\dfrac{2a(2b+1)-2b(2a+1)}{(2a+1)(2b+1)}$

$=\dfrac{2a-2b}{(2a+1)(2b+1)}$

$=\dfrac{2(a-b)}{(2a+1)(2b+1)}>0$

$\therefore \dfrac{2a}{2a+1}>\dfrac{2b}{2b+1}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

09 답 ②

$A=\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$에서 $A^2=\dfrac{a+b}{2}$

$B=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$에서 $B^2=\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{2}$

즉, $A^2-B^2=\dfrac{a+b-(a+2\sqrt{ab}+b)}{2}=-\sqrt{ab}<0$에서

$A^2<B^2$

이때 $A>0$, $B>0$이므로 $A<B$이다.

10 답 ③

ㄱ. $a-b>0$이므로

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}=\dfrac{-(a-b)}{ab}<0$

$\therefore \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ (참)

ㄴ. $a-b>0$이므로

$\dfrac{b}{a^2}-\dfrac{a}{b^2}=\dfrac{b^3-a^3}{a^2b^2}=\dfrac{-(a^3-b^3)}{a^2b^2}$

$=\dfrac{-(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2b^2}<0$

$\therefore \dfrac{b}{a^2}<\dfrac{a}{b^2}$ (거짓)

ㄷ. $a-1>0$, $b-1>0$이므로

$ab-(a+b-1)=ab-a-b+1=a(b-1)-(b-1)$

$=(a-1)(b-1)>0$

$\therefore ab>a+b-1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄴ. 【반례】 $a=3$, $b=2$일 때 $\dfrac{2}{3^2}<\dfrac{3}{2^2}$ (거짓)

11 답 ③

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(\underbrace{ay-bx}_{(가)})^2$

이때 실수의 성질에 의하여 $(ay-bx)^2\geq 0$이므로

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

여기서 등호는 $ay=bx$, 즉 $\underbrace{\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}}_{(나)}$일 때 성립한다.

심플 정리

[코시-슈바르츠의 부등식]

a, b, x, y가 실수일 때,

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$

12 답 13

> $x>1$인 실수 x에 대하여 $x+\dfrac{4}{x-1}+5$는 $x=\alpha$일 때, 최솟값 k를 갖는다. $\alpha+k$의 값을 구하시오.
>
> $x>1$에서 $x-1>0$이니까 양수 조건이 만들어졌네? 그럼, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면 되겠네.

1st 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하자.

$x-1>0$, $\dfrac{4}{x-1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\dfrac{4}{x-1}+5=(x-1)+\dfrac{4}{x-1}+6$

$\geq 2\sqrt{(x-1)\times\dfrac{4}{x-1}}+6$

(단, 등호는 $x-1=\dfrac{4}{x-1}$ …㉠일 때 성립)

$=2\times 2+6=10$ 즉, 구하는 최솟값은 $x-1=\dfrac{4}{x-1}$를 만족시키는 x에서 갖는다는 거야.

㉠에 의하여 등호는 $x-1=\dfrac{4}{x-1}$, 즉 $x=3$일 때 성립한다.

따라서 $\alpha=3$, $k=10$이므로 $\alpha+k=13$

$(x-1)^2=4$에서
$x-1=\pm 2$
$\therefore x=3$ ($\because x>1$)

13 답 ③

> 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$($a>0$, $b>0$)이 점 A(2, 3)을 지날 때, ab의 최솟값은?
>
> $a>0, b>0$이므로 $x>0, y>0$이면 $\dfrac{x}{a}>0, \dfrac{y}{b}>0$이니까 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있어.
>
> ① 18 ② 21 ③ 24
> ④ 27 ⑤ 30

1st (2, 3)을 대입한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하자.

직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$이 점 A(2, 3)을 지나므로

$y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 $b=f(a)$가 성립해.

$\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}=1$

이때 $a>0$, $b>0$에서 $\dfrac{2}{a}>0$, $\dfrac{3}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$1=\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{a}\times\dfrac{3}{b}}=2\sqrt{\dfrac{6}{ab}}$

$\sqrt{\dfrac{6}{ab}}\leq\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{6}{ab}\leq\dfrac{1}{4}$

역수를 취하면 부등호 방향이 바뀌므로 $\dfrac{ab}{6}\geq 4$에서 $ab\geq 24$

$\therefore ab\geq 24$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{2}{a}=\dfrac{3}{b}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 ab의 최솟값은 24이다.

Ⅳ 대단원 TEST [A~I] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 62~65

01 답 ②

$U=\{x\mid x$는 10 이하의 소수인 자연수$\}=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

한편, $x^2-10x+24>0$에서

$(x-4)(x-6)>0 \qquad \therefore x<4$ 또는 $x>6$

집합 A는 집합 U의 부분집합이므로 $A=\{2,\ 3,\ 7\}$

① $2\in A$ (거짓)

② $3\in A$ (참)

③ $5\notin A$ (거짓)

④ $\{2,\ 5\}\not\subset A$ (거짓)

⑤ A의 진부분집합의 개수는 $2^3-1=7$이다. (거짓)

02 답 14

집합 A의 원소 중에서 집합 B의 원소가 아닌 것은 2, 4이므로

$C=\{2x+1\mid x=2$ 또는 $x=4\}=\{5,\ 9\}$

따라서 집합 C의 모든 원소의 합은 $5+9=14$이다.

03 답 ③

> 두 집합 $A=\{1,\ a+2,\ a^2\}$,
> $B=\{a-2,\ 2a-1,\ 4a-3\}$에 대하여 $A=B$일 때, 상수 a의 값은?
> 두 집합의 원소가 모두 같다는 거지? 즉, 집합 B에는 원소 1이 꼭 포함됨을 이용해.
>
> ① 1　　② 2　　③ 3
> ④ 4　　⑤ 5

1st $1\in A$이므로 $1\in B$임을 이용해서 a의 값을 구해.

$1\in B$이므로 $a-2,\ 2a-1,\ 4a-3$ 중 어느 하나는 1이다.

(i) $a-2=1$, 즉 $a=3$일 때, $A=B=\{1,\ 5,\ 9\}$

(ii) $2a-1=1$, 즉 $a=1$일 때, $A=\{1,\ 3\}$, $B=\{-1,\ 1\}$

(iii) $4a-3=1$, 즉 $a=1$일 때는 (ii)와 같다. 같은 원소가 중복되면 한 번만 써줘야 해.

(i)~(iii)에 의하여 $a=3$

다른 풀이

$a-2\neq a+2$이므로 $a-2=1$ 또는 $a-2=a^2$이다.

(i) $a-2=1$, 즉 $a=3$일 때, $A=B=\{1,\ 5,\ 9\}$

(ii) $a-2=a^2$, 즉 $a^2-a+2=0$일 때

$a-2=a+2$이면 $0=4$로 모순이야. 즉, $a-2\neq a+2$야.

$$a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0\text{이므로}$$

이차방정식 $a^2-a+2=0$의 해는 없다.

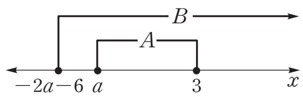
(i), (ii)에 의하여 $a=3$이다.

판별식을 이용해도 돼. 즉, $(-1)^2-4\times1\times2=-7<0$이므로 해는 없어.

> **[서로 같은 집합]** 심플 정리
> 두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $B\subset A$일 때, A와 B는 서로 같다고 하고 기호로 $A=B$와 같이 나타낸다.

04 답 ①

$A\subset B$가 되도록 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



즉, $-2a-6\leq a$에서 $3a\geq-6 \qquad \therefore a\geq-2$

이때 $a<3$이므로 상수 a의 값의 범위는 $-2\leq a<3$이다.

따라서 상수 a의 최솟값은 -2이다.

05 답 ②

> 두 집합 $A=\{1,\ a^2-3a+5\}$, $B=\{2,\ 2a-1,\ a+3\}$에 대하여 $A\cap B=\{3\}$일 때, 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은?
> 두 집합 A, B는 원소 3을 꼭 가져야 해.
>
> ① 10　　② 11　　③ 12
> ④ 13　　⑤ 14

1st 조건을 만족시키는 a의 값과 집합 B를 결정해.

$A=\{1,\ a^2-3a+5\}$이고 $A\cap B=\{3\}$이므로

$a^2-3a+5=3$이어야 한다.

즉, $a^2-3a+5=3$에서 $a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=2$

a의 값이 2개가 나왔으니까 a의 값에 대하여 집합 B의 원소를 결정할 수 있어.

(i) $a=1$일 때 $B=\{1,\ 2,\ 4\}$가 되어 $A\cap B=\{1\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때 $B=\{2,\ 3,\ 5\}$가 되어 $A\cap B=\{3\}$이므로 조건을 만족시킨다.

2nd 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합을 구하자.

(i), (ii)에 의하여 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 $1+2+3+5=11$이다.

06 답 ③

$A=\{1,\ 2\}$이면 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$이면 $B=\{1,\ 2,\ 4\}$

$A=\{1,\ 2,\ 4\}$이면 $B=\{1,\ 2,\ 3\}$

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이면 $B=\{1,\ 2\}$

따라서 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 4이다.

07 답 ②

$A=\{x\mid x$는 18의 약수$\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$

$B=\{x\mid x$는 12의 약수$\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

$C=\{x\mid x$는 6의 약수$\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

ㄱ. $C\subset A$이므로 $A\cup C=A$ (참)

ㄴ. $A\cap B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}=C$ (참)

ㄷ. $A\cup B^C=U-\{4,\ 12\}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

08 답 ④

$B^C=\{1, 3, 5\}$이므로 드모르간의 법칙에 의하여

$(A^C\cap B)^C=A\cup B^C=\{1, 2, 3\}\cup\{1, 3, 5\}$

$=\{1, 2, 3, 5\}$

따라서 집합 $(A^C\cap B)^C$의 모든 원소의 합은

$1+2+3+5=11$이다.

다른 풀이

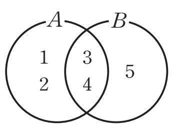
$A^C\cap B=B\cap A^C=B-A=\{2, 4\}-\{1, 2, 3\}=\{4\}$

$\therefore (A^C\cap B)^C=U-\{4\}=\{1, 2, 3, 5\}$

따라서 집합 $(A^C\cap B)^C$의 모든 원소의 합은 11이다.

09 답 ②

벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore B=\{3, 4, 5\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 $3+4+5=12$이다.

10 답 ②

두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 $A\cap X=X$, $(A-B)\cup X=X$를 만족하는 집합 X의 개수는?

여기서 세 집합 X, A, $A-B$ 사이의 포함 관계를 파악할 수 있지?

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

1st 주어진 조건으로 세 집합 X, A, $A-B$ 사이의 포함 관계를 구하자.

$A\cap X=X$이므로 $X\subset A$ → $A\cap B=A$이면 $A\subset B$

$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$ → $A\cup B=B$이면 $A\subset B$

$\therefore (A-B)\subset X\subset A$

2nd 집합 X의 개수를 구하자.

$A-B=\{1, 3, 5\}$이므로

$\{1, 3, 5\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5\}$

→ 원소의 개수가 n인 집합의 부분집합 중 특정한 원소 k개를 원소로 갖는 (갖지 않는) 부분집합의 개수는 2^{n-k}

따라서 집합 X의 개수는 $2^{5-3}=2^2=4$

TIP

집합 $A=\{a, b, c, d, e\}$의 원소 a, b를 갖는 부분집합 X의 개수를 구해 보자.

집합 X는 원소 a, b를 반드시 가져야 하고 원소 c, d, e는 가져도 되고 가지지 않아도 된다. 이것을 경우의 수로 생각하면 원소 a, b를 먼저 선택하고 원소 c, d, e는 각각 선택하거나 선택하지 않는 2가지 경우가 있으므로 이때의 경우의 수는 $2^3=8$이다.

따라서 부분집합 X의 개수는 8이다.

이것을 일반화하면 원소의 개수가 n인 집합의 부분집합 중 특정한 원소 k개를 갖는 부분집합의 개수는 특정한 원소 k개를 먼저 선택하고 나머지 원소 $(n-k)$개는 선택하거나 선택하지 않는 2가지 경우가 있으므로 2^{n-k}이다.

11 답 ⑤

전체집합 U의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 A, B^C이 서로소일 때, [보기]에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

여기서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 파악해서 [보기]의 참, 거짓을 따지자.

[보기]

ㄱ. $A-B=\varnothing$

ㄴ. $(A\cap B)^C=A^C$

ㄷ. $(A^C\cup B)\cap A=A$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 구하자.

두 집합 A, B^C가 서로소이므로

$A\cap B^C=\varnothing \Longleftrightarrow A\subset B$

→ $A\cap B^C=A-B=\varnothing$이 의미하는 것은 집합 A의 원소 중 집합 B에 속한 원소를 제외했더니 공집합이 되었다는거야. 즉, 집합 A의 원소는 모두 집합 B에 포함되어 있다는 말이야.

2nd [보기]의 참, 거짓을 따지자.

ㄱ. $A-B=A\cap B^C=\varnothing$ (참)

ㄴ. $A\cap B=A$이므로 $(A\cap B)^C=A^C$ (참)

ㄷ. $(A^C\cup B)\cap A=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$

분배법칙이 성립하지?

$=\varnothing\cup A=A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12 답 ③

$\{A\cup(B-A^C)\}\cap B=[A\cup\{B\cap(A^C)^C\}]\cap B$

$=\{A\cup(B\cap A)\}\cap B$

$=A\cap B$

13 답 ⑤

세 집합 A, B, C에 대한 연산으로 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

집합은 기본적으로 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립함을 이용하고 이외의 드모르간의 법칙 등도 이용해 봐.

[보기]

ㄱ. $A\cap B=B\cap A$

ㄴ. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

ㄷ. $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 집합의 연산의 성질을 이용하여 참, 거짓을 따지자.

ㄱ. 집합의 교환법칙이 성립하므로 $A\cap B=B\cap A$ (참)

ㄴ. 집합의 분배법칙이 성립하므로

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (참)

ㄷ. $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$ → $A-B=A\cap B^C$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$ → 집합의 분배법칙에 의해

$=A\cap(B\cap C)^C$ → 드모르간의 법칙 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$에 의해

$=A-(B\cap C)$ (참) → $A-B=A\cap B^C$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14 답 9

조건 (가)에 의하여

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=n(B)$이므로

$n(A\cap B)=0$

따라서 두 조건 (나), (다)에 의하여

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=5+4-0=9$

15 답 30

각 취미를 A, B라 두고 집합을 이용하여 간단하게 표현해 봐.

어느 학교 학생 100명을 대상으로 취미를 조사한 결과 취미가 독서인 학생이 60명, 취미가 컴퓨터 게임인 학생이 52명이었다. 취미가 독서도 아니고 컴퓨터 게임도 아닌 학생이 18명일 때, 독서와 컴퓨터 게임을 동시에 취미로 가진 학생의 수를 구하시오.

$n(A\cap B)$의 값을 묻는 거야.

1st 집합으로 지정하여 기호로 나타내자.

이 학교 학생 100명의 집합을 전체집합 U라 하고, 취미가 독서인 학생의 집합을 A, 취미가 컴퓨터 게임인 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=100$, $n(A)=60$, $n(B)=52$

2nd $n(A\cup B)$의 값을 구하여 $n(A\cap B)$의 값을 찾자.

한편, 취미가 독서도 아니고 컴퓨터 게임도 아닌 학생의 집합은 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로 A의 원소도 아니고 B의 원소도 아니야.

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=100-18=82$

따라서 독서와 컴퓨터 게임을 동시에 취미로 가진 학생 수는

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$ A의 원소이면서 B의 원소야.

$=60+52-82=30$

[합집합과 교집합의 원소의 개수]
전체집합 U의 부분집합 A, B에 대하여
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

16 답 ②

ㄱ. 제주도는 섬이랍니다. (참인 명제)

ㄴ. 한라산은 아시아에서 가장 높은 산이랍니다. (거짓인 명제)

ㄷ. 한라산에는 예쁜 꽃들이 많아요. (명제가 아님)

ㄹ. 오늘은 날씨가 참 좋군요. (명제가 아님)

따라서 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17 답 ⑤

$ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$이므로 이 조건의 부정은 $a\neq0$이고 $b\neq0$이다.

18 답 19

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x$는 10의 약수$\}=\{1, 2, 5, 10\}$

$Q=\{x|x$는 홀수$\}=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ … Ⅰ

이때 $P^C=\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$이고 조건 '$\sim p$이고 q'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이다.

$P^C\cap Q=\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}\cap\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$=\{3, 7, 9\}$ … Ⅱ

따라서 조건 '$\sim p$이고 q'의 진리집합의 모든 원소의 합은 $3+7+9=19$이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	두 조건 p, q의 진리집합을 구한다.	40%
Ⅱ	조건 '$\sim p$이고 q'의 진리집합을 구한다.	40%
Ⅲ	조건 '$\sim p$이고 q'의 진리집합의 모든 원소의 합을 구한다.	20%

19 답 ③

구하는 반례는 12의 양의 약수이지만 32의 양의 약수가 아닌 것이다. 12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이고 32의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16, 32이므로 반례가 될 수 있는 것은 3, 6, 12이다. 즉, 주어진 수 중에서 반례가 될 수 있는 것은 ③ 6이다.

20 답 ③

다음 [보기]의 명제 중에서 참인 것을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.)

[보기]

ㄱ. $a<b<0$이면 $a^2>b^2$이다. 근호 관련된 공식 중에서 a, b의 부호가 의미있는 것을 생각해.

ㄴ. $a\geq0$ 또는 $b\geq0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.

ㄷ. $|a|+|b|\geq|a+b|$이면 $a\geq0$이고 $b\geq0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 거짓인 명제는 반례를 찾아서 참, 거짓을 판별해.

ㄱ. $a<b<0$이면 $|a|>|b|$에서 $|a|^2>|b|^2$

두 음수 a, b에 대하여 $a<b$이면 a가 b보다 원점에서 멀리 떨어져 있으므로 $|a|>|b|$야.

$\therefore a^2>b^2$ (참)

ㄴ. $a<0$이고 $b<0$일 때만 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다.

$\sqrt{\ }$ 안의 부호가 둘 다 음수일 때, $i^2=-1$에 의하여 '$-$'가 붙는 거야.

따라서 $a\geq0$ 또는 $b\geq0$ 이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (참)

ㄷ. 【반례】 $a=3$, $b=-4$일 때, $|3|+|-4|\geq|3-4|$이 성립하지만 $3\geq0$이고 $-4\leq0$이다. (거짓)

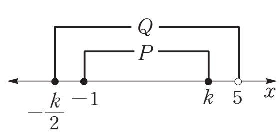
따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

21 답 ②

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-1\leq x\leq k\}$, $Q=\left\{x\middle|-\dfrac{k}{2}\leq x<5\right\}$

이때 명제 'p이면 q이다.'가 참이므로 $P\subset Q$이어야 하므로 이를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



즉, $-\frac{k}{2} \le -1$이고 $k<5$에서 $2 \le k < 5$이므로 정수 k는

2, 3, 4이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은 $2+3+4=9$이다.

22 답 ⑤

명제가 참이면 그 대우도 참이고 명제가 거짓이면 그 대우도 거짓임을 이용하자.

① 【반례】 $a=2$, $b=-2$일 때, $2^2=(-2)^2$이지만 $2 \ne -2$이다.
따라서 대우도 거짓이다.

② 【반례】 $a=2$, $b=-3$일 때, $2>-3$이지만
$2^2=4<(-3)^2=9$이다.
따라서 대우도 거짓이다.

③ 【반례】 $a=-1$일 때, $(-1)^2=1<4$이지만 $-1<0$이다.
따라서 대우도 거짓이다.

④ 【반례】 $a=3$, $b=-2$일 때, $3+(-2)=1>0$이지만
$3\times(-2)=-6<0$이다.
따라서 대우도 거짓이다.

⑤ 대우는 '$a \le 0$이고 $b \le 0$이면 $a+b \le 0$이다.'이고 이 명제는 참이다.

23 답 ②

a, b, c가 모두 홀수(가)라 하면

$a=2l-1$, $b=2m-1$, $c=2n-1$ (l, m, n은 자연수)로 놓을 수 있다.

$a^2+b^2=(2l-1)^2+(2m-1)^2$

$\quad=(4l^2-4l+1)+(4m^2-4m+1)$

$\quad=2(2l^2+2m^2-2l-2m+1)$

$c^2=(2n-1)^2=4n^2-4n+1=2(2n^2-2n)+1$

즉, a^2+b^2은 짝수(나)이고 c^2은 홀수(다)이므로

$a^2+b^2=c^2$이라는 가정에 모순이다.

따라서 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이다.

24 답 ②

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것을 찾자.

ㄱ. $x^2+x-6=0$이고 $(x-2)(x+3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=-3$
따라서 두 조건 p, q의 진리집합은 각각
$P=\{2\}$, $Q=\{-3, 2\}$이고 $P \subset Q$이므로 $p \Rightarrow q$이다.
따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄴ. 두 조건 p, q의 진리집합은 각각
$P=\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $Q=\{1, 2, 4, 8\}$이고
$Q \subset P$이므로 $q \Rightarrow p$이다. 따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄷ. 두 조건 p, q의 진리집합은 각각
$P=\{-1, 1\}$, $Q=\{-1, 1\}$이고
$P=Q$이므로 $p \Longleftrightarrow q$이다.
따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄴ이다.

25 답 ①

(가) 명제 '$a=b$이면 $a^2=b^2$이다.'는 참이다.
한편, $a=1$, $b=-1$일 때 명제 '$a^2=b^2$이면 $a=b$이다.'는 거짓이다.
따라서 $a=b$인 것은 $a^2=b^2$이기 위한 충분 조건이다.

(나) 두 삼각형이 넓이가 같다고 두 삼각형이 합동인 것은 아니지만 두 삼각형이 합동이면 두 삼각형의 넓이는 같다. 따라서 두 삼각형의 넓이가 같은 것은 두 삼각형이 합동이기 위한 필요 조건이다.

26 답 8

> 실수 x에 대하여 세 조건 p, q, r가
> $p: 0<x\le 7$
> $q: -1 \le x \le a$
> $r: x \ge b$ $p \Rightarrow q$에서 $P \subset Q$, $r \Leftarrow q$에서 $R \supset Q$ 이것을 수직선 위에서 비교해.
> 이다. p는 q이기 위한 충분조건이고, r는 q이기 위한 필요조건일 때, $a-b$의 최솟값을 구하시오.

1st 세 조건의 진리집합의 포함 관계를 살피자.

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x \mid 0<x\le 7\}$

$Q=\{x \mid -1\le x \le a\}$

$R=\{x \mid x \ge b\}$

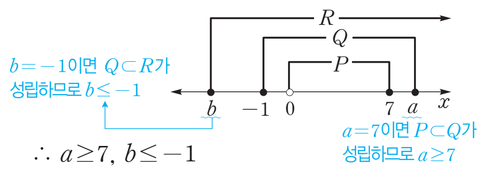
이때, p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$ $p \Rightarrow q$에서 $P \subset Q$

또, r는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset R$ $q \Rightarrow r$에서 $Q \subset R$

$\therefore P \subset Q \subset R$

2nd 진리집합 사이의 포함 관계를 이용하여 a, b의 값의 범위를 구하자.

따라서 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



$\therefore a \ge 7$, $b \le -1$

3rd $a-b$의 최솟값을 구하자.

한편, $a-b$가 최소가 되려면 a의 값은 최소, b의 값은 최대가 되어야 하므로 $a-b$의 최솟값은

$7-(-1)=8$

심플(고등자이)(해설)(1단원)008-043.indd 43 2017. 9. 22. 오후 8:50

27 답 7

주어진 부등식이 절대부등식이면 모든 실수 x에 대하여 $2x^2+(k+2)x+2k-2>0$이 성립해야 한다.

이때 이차방정식 $2x^2+(k+2)x+2k-2=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로 $\cdots$ Ⅰ

$D=(k+2)^2-4\times2\times(2k-2)<0$에서

$k^2-12k+20<0$, $(k-2)(k-10)<0$

$\therefore\ 2<k<10$ $\cdots$ Ⅱ

따라서 정수 k는 3, 4, $\cdots$, 9의 7개이다. $\cdots$ Ⅲ

다른 풀이

$2x^2+(k+2)x+2k-2>0$이 항상 성립하려면

$f(x)=2x^2+(k+2)x+2k-2$라 할 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크면 된다.

$$f(x)=2x^2+(k+2)x+2k-2$$
$$=2\left(x+\frac{k+2}{4}\right)^2-\frac{(k+2)^2}{8}+2k-2$$

즉, $-\frac{(k+2)^2}{8}+2k-2>0$에서

$k^2-12k+20<0$, $(k-2)(k-10)<0$

$\therefore\ 2<k<10$

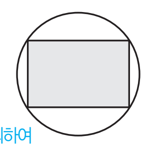
(이하 동일)

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 부등식이 절대부등식이 되기 위한 조건을 말한다.	40%
Ⅱ	k의 값의 범위를 구한다.	40%
Ⅲ	정수 k의 개수를 구한다.	20%

28 답 16

반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원에 내접하는 직사각형의 넓이가 최대일 때, 이 직사각형의 둘레의 길이를 구하시오.



직사각형의 내각은 모두 90°이므로 원주각의 성질에 의하여 직사각형의 두 대각선은 원의 지름이야.

1st 직사각형의 가로, 세로의 길이를 미지수로 놓고 관계식을 구해.

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 직사각형의 넓이는 xy이고 대각선의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로

$x^2+y^2=(4\sqrt{2})^2=32$

한 대각선을 빗변으로 하고 직사각형의 가로, 세로를 두 변으로 하는 직각삼각형에서 피타고라스 정리 이용!

2nd 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 넓이의 최댓값을 구하고 이때의 직사각형의 둘레의 길이를 구해.

이때 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq2\sqrt{x^2y^2}=2xy$ (단, 등호는 $x^2=y^2$일 때 성립)

$32\geq2xy$ $\qquad\therefore\ xy\leq16$

따라서 $x=y=4$일 때 직사각형의 넓이는 최대 16이므로

x, y는 가로, 세로의 길이이므로 양수야. 즉, $x^2=y^2=16$에서 $x=y=4$

이 직사각형의 둘레의 길이는

$2(x+y)=16$이다.

V 함수

Simple J 함수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 68～69

01 답 X, Y

02 답 치역, 부분집합

03 답 하나씩만

04 답 서로 같다, $f=g$

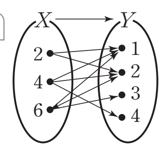
05 답 ○

06 답 ×

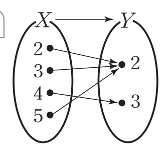
07 답 ○

08 답 ○

09 답



10 답



11 답 ×

집합 X의 원소 2에 대응하는 집합 Y의 원소가 2개이므로 함수가 아니다.

12 답 ×

집합 X의 원소 4에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

13 답 ×

집합 X의 원소 5에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

14 답 ○

15 답 ○

16 답 ○

17 답 정의역 : $\{1, 2, 3\}$, 공역 : $\{a, b\}$, 치역 : $\{a, b\}$

심플(고등자이)(해설)(2단원)044-091.indd 44 2017. 9. 22. 오후 8:51

18 답 정의역 : $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역 : $\{a, b, c\}$, 치역 : $\{a, b\}$

19 답 1

20 답 $\sqrt{3}$

21 답 $\sqrt{3}-1$

22 답 $-\sqrt{2}$

2는 유리수이므로 $f(2)=2-2=0$

$\sqrt{2}$는 무리수이므로 $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$

$\therefore f(2)-f(\sqrt{2})=0-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

23 답 서로 같은 함수이다.

두 함수의 정의역과 공역이 서로 같고

$f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$이므로 두 함수는 서로 같은 함수이다.

24 답 서로 같은 함수가 아니다.

두 함수의 정의역과 공역이 서로 같지만

$f(-1)=1$, $g(-1)=-1$에서 $f(-1)\neq g(-1)$이므로 서로 같은 함수가 아니다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 70~73

25 답 ①, ②

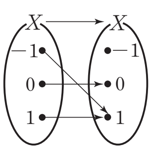
① 집합 X의 원소 2에 대응하는 집합 Y의 원소가 b, c의 2개이므로 함수가 아니다.

② 집합 X의 원소 2에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

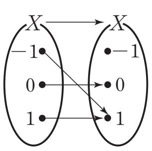
26 답 ②

ㄱ, ㄴ, ㄷ의 집합 X에서 집합 X로의 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

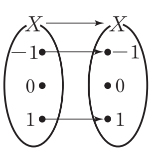
ㄱ.



ㄴ.



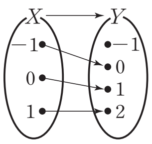
ㄷ.



따라서 ㄱ, ㄴ은 함수이고 ㄷ은 집합 X의 원소 0에 대응하는 집합 X의 원소가 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

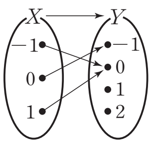
27 답 ⑤

①



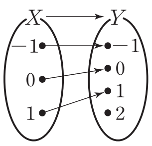
따라서 $f(x)=x+1$은 집합 X에서 집합 Y로의 함수이다.

②



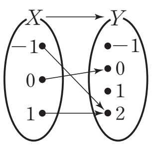
따라서 $f(x)=x^2-1$은 집합 X에서 집합 Y로의 함수이다.

③



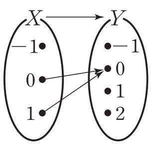
따라서 $f(x)=x^3$은 집합 X에서 집합 Y로의 함수이다.

④



따라서 $f(x)=2|x|$는 집합 X에서 집합 Y로의 함수이다.

⑤



따라서 $f(x)=x-|x|$는 집합 X의 원소 -1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 집합 X에서 집합 Y로의 함수가 아니다.

28 답 ④

임의의 실수 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나면 함수의 그래프이다.

따라서 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

29 답 ⑤

ㄱ. 하나의 요일에 대응하는 날짜는 2개 이상이므로 이 대응은 함수가 아니다.

ㄴ, ㄷ. x에 하나의 y가 대응되므로 함수이다.

30 답 ①

집합 X의 원소 1에 대응하는 집합 Y의 원소가 2이므로 $f(x)=2$를 만족시키는 집합 X의 원소는 $x=1$이다.

31 답 ④

집합 X의 원소 x가 집합 Y의 원소 x에 대응하는 x는 3, 4이므로 구하는 합은 $3+4=7$이다.

32 답 ③

함수 f의 정의역 A는 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, 공역 B는 $B=\{1, 2, 3, 4\}$, 치역 C는 $C=\{2, 3, 4\}$이므로 $A\cap B\cap C=\{2, 3, 4\}$이다.

$\therefore n(A\cap B\cap C)=3$

33 답 ②

모든 소수의 양의 약수는 1과 자기 자신으로 항상 2개이다. 즉, 모든 소수 x에 대하여 $f(x)=2$이므로 함수 f의 치역은 $\{2\}$이다.

따라서 함수 f의 치역에 속하는 원소는 2이다.

심플 정리

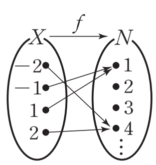
[소수와 합성수의 약수의 개수]

(1) 소수 : 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이므로 약수의 개수는 2이다.

(2) 합성수 : 1과 자기 자신 이외의 수를 약수로 가지는 수이므로 약수의 개수는 3 이상이다.

34 답 ④

함수 $f : X \longrightarrow N$의 대응 관계를 나타내면 그림과 같으므로 함수 f의 치역은 $\{1, 4\}$이다.



따라서 함수 f의 치역의 부분집합의 개수는 $2^2=4$이다.

심플 정리

[부분집합의 개수]

원소의 개수가 n인 집합 X에 대하여

(1) 집합 X의 부분집합의 개수는 2^n

(2) 집합 X의 특정한 원소 $k(k\le n)$개를 반드시 포함하는 (포함하지 않는) 부분집합의 개수는 2^{n-k}

35 답 ④

짝수의 제곱은 짝수이고, 홀수의 제곱은 홀수이므로 짝수의 제곱을 2로 나누면 나머지는 0이고, 홀수의 제곱을 2로 나누면 나머지는 1이다.

따라서 함수 f의 치역은 $\{0, 1\}$이다.

36 답 ②

$2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $\cdots$에서 2^n의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6의 네 수가 반복되므로 함수 f의 치역은 $\{2, 4, 6, 8\}$이다.

따라서 함수 f의 치역의 모든 원소의 합은 $2+4+6+8=20$이다.

37 답 ③

함수 $f(x)$의 공역과 치역이 서로 같고 $a<0$이므로

$f(-2)=3$, $f(3)=-2$이어야 한다.

즉, $f(-2)=-2a+b=3$, $f(3)=3a+b=-2$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore a+b=(-1)+1=0$

38 답 ⑤

$3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $\cdots$이므로

$f(1)=f(5)=f(9)=\cdots=3$,

$f(2)=f(6)=f(10)=\cdots=9$,

$f(3)=f(7)=f(11)=\cdots=7$,

$f(4)=f(8)=f(12)=\cdots=1$

$\therefore f(10)=9$

39 답 ②

$x-3=2$에서 $x=5$

따라서 $f(x-3)=x^2-5$의 양변에 $x=5$를 대입하면

$f(2)=5^2-5=20$이다.

40 답 ①

$1-\sqrt{2}<1$이므로

$f(1-\sqrt{2})=-(1-\sqrt{2})-1=\sqrt{2}-2$

$\sqrt{2}>1$이므로 $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}-3$

$\therefore f(1-\sqrt{2})-f(\sqrt{2})=(\sqrt{2}-2)-(\sqrt{2}-3)=1$

41 답 ②

3은 유리수이므로 $f(3)=3-1=2$

$\sqrt{2}-1$은 무리수이므로

$f(\sqrt{2}-1)=-2(\sqrt{2}-1)=2-2\sqrt{2}$

$\therefore f(3)-f(\sqrt{2}-1)=2-(2-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

42 답 ②

$f(2)=2+2=4$

$f(20)=f(18)=f(16)=\cdots=f(6)=6+2=8$

$\therefore f(2)+f(20)=4+8=12$

43 답 ③

$x+3=-2$에서 $x=-5$

$g(x+3)=f(3x+5)$의 양변에 $x=-5$를 대입하면

$g(-2)=f(-10)=|-10|+5=15$

44 답 ③

$f(1.5)=[1.5]=1$, $f(-1.5)=[-1.5]=-2$이므로

$f(1.5)-f(-1.5)=1-(-2)=3$

[가우스함수] 심플 정리

(1) 가우스함수 : $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수라 정의할 때, $f(x)=[x]$를 가우스함수라 한다.
(2) 정수 n에 대하여 $n\le a<n+1$일 때, 함수 $f(x)=[x]$의 $x=a$에서의 함숫값은 $f(a)=n$이다.

45 답 ①

조건 (나)에 의하여

$f(10)=f(8+2)=f(8)$
$\quad=f(6+2)=f(6)$
$\quad=f(4+2)=f(4)$
$\quad=f(2+2)=f(2)$
$\quad=f(0+2)=f(0)$

따라서 조건 (가)에 의하여

$f(10)=f(0)=0+1=1$

46 답 10

$f(x+y)=f(x)f(y)$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)f(0)$

이때, $f(x)>0$이므로 양변을 $f(0)$으로 나누면

$f(0)=1$

㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)f(1)=3\times3=9$

$\therefore f(0)+f(2)=1+9=10$

47 답 ②

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)\qquad\therefore f(0)=0$

㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)+f(1)$, $2f(1)=2\qquad\therefore f(1)=1$

㉠의 양변에 $x=-1$, $y=1$을 대입하면

$f(0)=f(-1)+f(1)$

$\therefore f(-1)=f(0)-f(1)=0-1=-1$

48 답 2

$f(xy)=f(x)+f(y)$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(1)\qquad\therefore f(1)=0$

㉠의 양변에 $x=2$, $y=\frac{1}{2}$을 대입하면

$f(1)=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)-f(2)=0-(-2)=2$

49 답 ⑤

$f(20)=f(2\times10)=f(2)+f(10)$
$\quad=f(2)+f(2\times5)=f(2)+f(2)+f(5)$
$\quad=2f(2)+f(5)=2\times2+5=9$

50 답 ⑤

주어진 함수 $f(x)$, $g(x)$의 정의역과 공역이 서로 같으므로 함숫값을 비교하여 서로 같은 함수를 찾자.

ㄱ. $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(1)=g(1)=1$이므로 $f=g$
ㄴ. $f(-1)=g(-1)=1$, $f(1)=g(1)=1$이므로 $f=g$
ㄷ. $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(1)=g(1)=1$이므로 $f=g$

따라서 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

51 답 ①

주어진 함수 $f(x)$, $g(x)$의 정의역과 공역이 서로 같으므로 함숫값만 같으면 된다.

$f(1)=g(1)$에서 $a+1=4+b\qquad\therefore a-b=3$ ⋯ ㉠
$f(3)=g(3)$에서 $9a+1=12+b\qquad\therefore 9a-b=11$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

$\therefore a+b=1+(-2)=-1$

52 답 ①

두 함수의 정의역은 $X=\{-1,\ 1\}$로 서로 같으므로 함숫값만 같으면 된다.

$f(-1)=g(-1)$에서 $-a+b=-2$ ⋯ ㉠
$f(1)=g(1)$에서 $a+b=2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$

$\therefore ab=2\times0=0$

53 답 3

$f(x)=g(x)$를 만족시키는 x를 원소로 갖는 집합을 정의역으로 하면 $f=g$가 성립한다.

즉, $f(x)=g(x)$에서 $x^2=3x-2$

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

즉, 집합 X는 집합 $\{1,\ 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 집합 X의 개수는 $2^2-1=3$

TIP

집합 X는 집합 $\{1, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 집합 X를 직접 구하면 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$의 3개이다.

Simple K 여러 가지 함수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 74~75

01 답 $f(x_1) \neq f(x_2)$

02 답 일대일대응

03 답 항등함수

04 답 상수함수

05 답 ○

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ○

09 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

10 답 ㄴ, ㄷ

11 답 ㄷ

12 답 ㄹ

13 답 ㄱ, ㄷ

14 답 ㄱ, ㄷ

15 답 ㄷ

16 답 ㄴ

17 답 ㄱ, ㅂ

18 답 ㄱ, ㅂ

19 답 없다.

20 답 ㄴ

21 답 27

X에서 X로의 함수의 개수는 $3^3=27$

22 답 6

X에서 X로의 함수 중에서 일대일함수의 개수는 $3\times2\times1=6$이다.

23 답 6

X에서 X로의 함수 중에서 일대일대응의 개수는 $3\times2\times1=6$이다.

24 답 1

1은 1에, 2는 2에, 3은 3에 대응되어야 항등함수이므로 그 개수는 1이다.

25 답 3

X의 세 원소 모두 1 또는 2 또는 3에 대응되어야 상수함수이므로 그 개수는 3이다.

유형 연습 [+ 내신 유형] 문제편 pp. 76~77

26 답 ①

ㄱ. 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $x_1+1 \neq x_2+1$이므로 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.
즉, 함수 $f(x)=x+1$은 일대일함수이다.

ㄴ. 【반례】 $x=1$일 때, $g(1)=1$이고 $x=-1$일 때, $g(-1)=1$이므로 일대일함수가 아니다.

ㄷ. 【반례】 $x=1$일 때, $h(1)=1$이고 $x=-1$일 때, $h(-1)=1$이므로 일대일함수가 아니다.

따라서 일대일함수인 것은 ㄱ이다.

27 답 ②

①, ⑤ $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $x_1^2 \neq x_2^2$이므로 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.
즉, 함수 $y=f(x)$는 일대일함수이다. (참)

② 치역은 $\{y|y \geq 0\}$이고, 공역은 $\{y|y$는 실수$\}$이다. (거짓)

③ $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 > x_2$이면 $x_1^2 > x_2^2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 위로 향하는 그래프이다. (참)

④ ⑤의 명제가 참이므로 ⑤의 명제의 대우인 '$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.'도 참이다. (참)

28 답 ③

함수 f가 일대일함수이고, $f(2)=4$이므로 $f(1)+f(3)$의 값이 최대가 되기 위해서는 $f(1)=2$, $f(3)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(3)=2$이어야 한다.
따라서 $f(1)+f(3)$의 최댓값은 $2+3=5$이다.

29 답 ②

ㄱ. 일대일함수이면서 공역과 치역이 같으므로 일대일대응이다.

ㄴ. 일대일함수가 아니므로 일대일대응이 아니다.

ㄷ. 일대일함수가 아니므로 일대일대응이 아니다.

ㄹ. 일대일함수이면서 공역과 치역이 같으므로 일대일대응이다.

따라서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

30 답 ①

정의역 X의 임의의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2에 대하여

ㄱ. $x_1 \neq x_2$에서 $2x_1-3 \neq 2x_2-3$이다. 즉, $f(x_1) \neq f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 일대일함수이다. 이때, 공역과 치역이 실수 전체의 집합이므로 함수 $f(x)=2x-3$은 일대일대응이다.

ㄴ. 【반례】 $x_1=1$, $x_2=-1$이면 $x_1 \neq x_2$이지만 $g(x_1)=g(x_2)=2$이다. 따라서 일대일함수가 아니므로 일대일대응도 아니다.

ㄷ. 【반례】 $x_1=1$, $x_2=-1$이면 $x_1 \neq x_2$이지만 $h(x_1)=h(x_2)=1$이다. 따라서 일대일함수가 아니므로 일대일대응도 아니다.

따라서 일대일대응인 것은 ㄱ이다.

31 답 ①

$f(1)=7$이고 $f(2)-f(3)=3$이려면 $f(2)=8$, $f(3)=5$이어야 한다.

이때, 함수 f는 X에서 Y로의 일대일대응이므로 $f(4)=6$이다.

$\therefore f(3)+f(4)=5+6=11$

32 답 ③

$a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이려면 $f(-1)=1$, $f(2)=4$이어야 한다. 즉,

$f(-1)=-a+b=1$

$f(2)=2a+b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

33 답 1

$f(x)=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$

즉, $x \geq 1$일 때, x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로 함수 f가 일대일대응이려면 $f(1)=4$이어야 한다. 즉, $1^2+2\times1+a=4$에서 $a=1$

TIP

함수 $f(x)=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$은 이차함수이므로 정의역이 실수 전체의 집합이면 함수 $f(x)$는 $x<-1$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하고 $x>-1$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.
특히, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이고 꼭짓점의 좌표는 $(-1, a-1)$이다.

34 답 ⑤

함수 f는 상수함수이고, $f(\sqrt{3})=\sqrt{5}$이므로 $f(x)=\sqrt{5}$이다.

$\therefore f(\sqrt{2})\times f(\sqrt{6})=\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$

35 답 3

함수 f는 항등함수이므로 $f(x)=x$이다.

즉, $x^2-6=x$에서 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 집합 X는 집합 $\{-2, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 집합 X의 개수는 $2^2-1=3$이다.

36 답 ⑤

함수 f는 상수함수이고 $f\left(\frac{1}{2}\right)=a$이므로 $f(x)=a$이다.

$f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=100$에서

$a+a+a+\cdots+a=100$, $10a=100$

$\therefore a=10$

37 답 ①

함수 f가 항등함수이므로 $f(9)=9$이고 $f(7)=7$이다.

이때, $f(9)=g(4)$이므로 $g(4)=9$ ⋯ ㉠

한편, 함수 g가 상수함수이므로 ㉠에 의하여 $g(x)=9$

$\therefore g(2)-f(7)=9-7=2$

38 답 ④

(i) 함수의 개수

집합 X의 각 원소에 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2개씩이므로 함수의 개수는

$2\times2=2^2=4 \qquad \therefore a=4$

(ii) 일대일대응의 개수

1에 대응할 수 있는 원소는 1, 2 중에서 하나이므로 2개이고 2에 대응할 수 있는 원소는 1에 대응한 것을 제외한 1개이므로 일대일대응의 개수는

$2\times1=2 \qquad \therefore b=2$

(iii) 상수함수의 개수

상수함수는 정의역의 모든 원소가 공역의 한 원소에 모두 대응되어야 한다. 즉, 정의역의 원소 1, 2가 공역의 원소 1 또는 2에 모두 대응되어야 하므로 상수함수의 개수는 2이다. $\qquad \therefore c=2$

(iv) 항등함수의 개수

1은 1에, 2는 2에 대응되어야 하므로 항등함수의 개수는 1이다. $\qquad \therefore d=1$

$\therefore a+b+c+d=4+2+2+1=9$

39 답 ③

$(-1)+(-1)=-2$, $(-1)+1=0$, $1+1=2$이므로

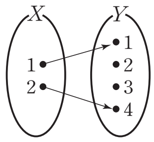
$Y=\{x+y \mid x\in X, y\in X\}=\{-2, 0, 2\}$이다.

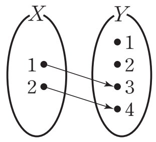
따라서 X에서 Y로의 함수가 상수함수가 되려면 집합 X의 원소 -1, 1이 집합 Y의 원소 -2 또는 0 또는 2에 모두 대응되어야 하므로 상수함수의 개수는 3이다.

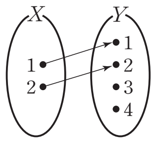
연습 문제 [J~K] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 78~79

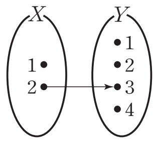
01 답 ④

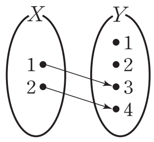
각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


따라서 ①, ②, ③, ⑤는 X에서 Y로의 함수이지만 ④는 X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

02 답 ④

> 집합 $X=\{x\,|\,-1\leq x\leq 1\}$일 때, 다음 중 X에서 X로의 함수가 아닌 것은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)
> 함수 $f: X \longrightarrow X$가 정의되려면 X의 모든 원소가 X의 모든 원소에 하나씩 대응해야 해.
>
> ① $f(x)=x$ ② $f(x)=|x|$ ③ $f(x)=x^2$
> ④ $f(x)=x^3+1$ ⑤ $f(x)=[x]$

1st $-1\leq x\leq 1$에서의 함수 $f(x)$의 함숫값의 범위를 구해서 함수가 아닌 것을 찾자.

$f: X \longrightarrow X$에 대하여

① $-1\leq x\leq 1$에서 $-1\leq f(x)\leq 1$이므로
$f(x)=x$는 함수이다. 함수 $f(x)$의 모든 함숫값이 집합 X에 포함되니까 이 함수는 X에서 X로의 함수야.

② $-1\leq x\leq 1$에서 $0\leq |x|\leq 1$이므로 $0\leq f(x)\leq 1$
따라서 $f(x)=|x|$는 함수이다.

③ $-1\leq x\leq 1$에서 $0\leq x^2\leq 1$이므로 $0\leq f(x)\leq 1$
따라서 $f(x)=x^2$은 함수이다.

④ $-1\leq x\leq 1$에서 $-1\leq x^3\leq 1$
$0\leq x^3+1\leq 2$ $\quad\therefore 0\leq f(x)\leq 2$
따라서 $f(x)=x^3+1$은 함수가 아니다. $0<x\leq 1$인 집합 X의 원소에 대응하는 집합 X의 원소가 없으므로 함수가 아니야.

⑤ $-1\leq x\leq 1$에서 $-1\leq x<0$일 때 $[x]=-1$,
$0\leq x<1$일 때 $[x]=0$, $x=1$일 때 $[x]=1$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (-1\leq x<0)\\ 0 & (0\leq x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

따라서 $f(x)=[x]$는 함수이다.

03 답 ①

ㄱ. 무리수 x에 대하여 $x+1$은 무리수이므로 $f(x)=x+1$은 무리수 전체의 집합 X에서 X로의 함수이다.

ㄴ. 【반례】 $-\sqrt{2}$는 무리수이고 $x=-\sqrt{2}$를 대입하면
$g(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$이다. 이때, $0\not\in X$이므로
$g(x)=x+\sqrt{2}$는 X에서 X로의 함수가 아니다.

ㄷ. 【반례】 $\sqrt{2}$는 무리수이고 $x=\sqrt{2}$를 대입하면
$h(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2$이다. 이때, $2\not\in X$이므로
$h(x)=x^2$은 X에서 X로의 함수가 아니다.

따라서 X에서 X로의 함수인 것은 ㄱ이다.

04 답 ①

①~⑤의 함수는 모두 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수이므로 각 함수의 치역은

① $\{y\,|\,y$는 실수$\}$ ② $\{y\,|\,y\geq 0\}$ ③ $\{y\,|\,y\leq 1\}$
④ $\{y\,|\,y\geq 0\}$ ⑤ $\{y\,|\,y=1\}$

05 답 ④

함수 $f: X \longrightarrow Y$의 정의역은 집합 X를 뜻하고 공역은 집합 Y, 치역은 정의역 X의 각각의 원소에 대응되는 공역 Y의 원소들의 모임을 뜻한다.
따라서 정의역은 $\{1, 2, 3\}$, 공역은 $\{a, b, c\}$, 치역은 $\{a, b\}$이다.

06 답 ①

$0^2=0$, $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$이므로
$f(x)=(x^2$을 5로 나눈 나머지$)$에서
$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=4$, $f(4)=1$
따라서 함수 f의 치역은 $\{0, 1, 4\}$이므로 모든 원소의 합은 $0+1+4=5$이다.

07 답 ②

$f(x)=|2x-5|$에서
$f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=1$, $f(4)=3$
이므로 치역은 $\{1, 3\}$이다.
따라서 함수 f의 치역의 모든 원소의 합은 $1+3=4$이다.

08 답 ②

$2x+1=5$에서 $2x=4$ $\quad\therefore x=2$
$f(2x+1)=x^2-2$의 양변에 $x=2$를 대입하면
$f(5)=2^2-2=2$

다른 풀이

$2x+1=t$라 하면 $2x=t-1$ $\quad\therefore x=\dfrac{t-1}{2}$

즉, $f(2x+1)=x^2-2$에서 $f(t)=\left(\dfrac{t-1}{2}\right)^2-2$

$t=5$를 대입하면 $f(5)=\left(\dfrac{5-1}{2}\right)^2-2=2$

09 답 172

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2015)$의 값을 구하시오. 답 172

(가) $f(x)=1-|x-2|$ $(1\le x\le 3)$

(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(3x)=3f(x)$

이다.

구해야 하는 값은 $f(2015)$인데 $1\le x\le 3$에서의 함수식만 주어졌지? 그래서 조건 (가)의 함수식을 이용하기 위해 조건 (나)가 주어진 거야.

1st 함숫값 $f(2015)$를 구하기 위해서 함수식이 필요하지?

조건 (가)에 의하여 x의 범위가 $1\le x\le 3$인 $f(x)$의 함숫값만 주어졌으므로 구하고자 하는 함숫값 $f(2015)$의 $x=2015$도 1과 3 사이의 값으로 대응됨을 이용하자.

조건 (나)를 이용하여 $f(2015)$를 정리하자.

$$f(2015)=f\left(3\times\frac{2015}{3}\right)=3f\left(\frac{2015}{3}\right)$$
$$=3^2f\left(\frac{2015}{3^2}\right)=\cdots=3^6f\left(\frac{2015}{3^6}\right)$$

2nd 조건 (가)를 이용하기 위해 $1<\frac{2015}{3^6}<3$인지 확인하여 $f(2015)$의 값을 구해.

$2\times3^6=2\times729=1458$, $3^7=2187$이므로 $2\times3^6<2015<3^7$ $\therefore 2<\frac{2015}{3^6}<3$

$\frac{2015}{3^6}$의 범위는 $2<\frac{2015}{3^6}<3$이므로 조건 (가)에 의하여

$$f(2015)=3^6f\left(\frac{2015}{3^6}\right)=3^6\left(1-\left|\frac{2015}{3^6}-2\right|\right)$$
$$=3^6\left(3-\frac{2015}{3^6}\right)=3^7-2015=172$$

10 답 ②

함수 f가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족시키고 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$일 때, $f(-1)$의 값은?

$f(-1)$의 값을 구할 수 있도록 적절한 x, y를 대입해야 해.

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

1st $f(0)$의 값을 구하자.

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

이런 유형의 문제가 나오면 $x=0$, $y=0$을 먼저 대입해봐.

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

2nd $f(-1)$의 값을 구하기 위해서 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 이용해.

㉠의 양변에 $y=-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x)$ $\therefore f(-x)=-f(x)$ ⋯ ㉡

㉠의 양변에 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$을 대입하면

문제에 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값이 주어졌으니까 이걸 이용하기 위해서 대입하는 거야.

$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ $\left(\because f\left(\frac{1}{2}\right)=1\right)$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(-1)=-f(1)=-2$

11 답 7

두 함수가 서로 같으려면 각각의 함숫값이 같아야 한다.

즉, $f(x)=g(x)$에서 $x^3+2=2x^2+x$ ⋯ Ⅰ

$x^3-2x^2-x+2=0$, $(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ ⋯ Ⅱ

따라서 집합 X는 $\{-1, 1, 2\}$의 부분집합 중 공집합이 아닌 집합이어야 하므로 가능한 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$이다. ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	서로 같은 함수가 되기 위한 조건을 찾는다.	20%
Ⅱ	방정식을 풀어 해를 구한다.	40%
Ⅲ	집합 X의 개수를 구한다.	40%

12 답 ②

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 일대일대응이 되려면 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 증가 또는 감소해야 한다.

이때, $x\ge1$인 범위에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 음수이므로 $x<1$에서의 기울기도 음수이어야 한다.

$\therefore a<0$

또, $y=f(x)$의 그래프는 구간이 나누어진 $x=1$에서의 함숫값이 같아야 하므로 $-1+2=a+b$에서 $a+b=1$이다.

13 답 ②

집합 $X=\{2, 3, 6\}$에 대하여 집합 X에서 X로의 일대일대응, 항등함수, 상수함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$라 하자. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)+h(2)$의 값은?

(가) $f(2)=g(3)=h(6)$

(나) $f(2)f(3)=6$

① 4 ② 5 ③ 6
④ 8 ⑤ 9

이 문제의 핵심은 $g(x)$가 항등함수이고 $h(x)$가 상수함수라는 거야. 그럼, 조건 (가)에서 $f(2)$의 값을 파악할 수 있지?

1st 일대일대응, 항등함수, 상수함수의 정의를 생각해 봐.

$g(x)$가 항등함수이므로 $g(3)=3$ ($g(x)=x$)

즉, 조건 (가)에서 $f(2)=h(6)=3$

이때, $h(x)$가 상수함수이므로 $h(x)=3$에서 $h(2)=3$

$x\in X$에 대하여 $h(x)=a$(a는 상수)

2nd 조건 (나)를 이용하여 $f(3)$의 값을 구하자.

한편, $f(x)$가 일대일대응이고 $f(2)=3$이므로

$f(3)=2$, $f(6)=6$ 또는 $f(3)=6$, $f(6)=2$이다.

그런데, 조건 (나)에서 $f(2)f(3)=f(6)$이므로 이것을 만족시키는 것은 $f(3)=2$, $f(6)=6$이다.

$f(3)=6$, $f(6)=2$이면 $f(2)f(3)=3\times6=18$, $f(6)=2$이므로 $f(2)f(3)\ne f(6)$

$\therefore f(3)+h(2)=2+3=5$

14 답 ③

치역에 속하는 임의의 실수 k에 대하여 y축에 수직인 직선 $y=k$를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나고 (치역)=(공역)인 함수는 일대일대응이다.

따라서 일대일대응인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15 답 ④

(i) 함수의 개수

X의 각 원소가 Y의 원소에 대응할 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개씩이므로 함수의 개수는

$4\times4\times4\times4=256 \quad \therefore l=256$

(ii) 일대일대응의 개수

X의 원소 a가 Y의 원소에 대응할 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중에서 하나이므로 4개

X의 원소 b가 Y의 원소에 대응할 수 있는 것은 a에 대응한 것을 제외한 3개

마찬가지로 c가 대응할 수 있는 것은 2개, d가 대응할 수 있는 것은 1개이다.

따라서 일대일대응의 개수는 $4\times3\times2\times1=24$이므로

$m=24$

(iii) 상수함수의 개수

상수함수는 정의역의 모든 원소가 공역의 한 원소에 모두 대응되어야 한다. 즉, 정의역의 원소 a, b, c, d가 공역의 원소 1 또는 2 또는 3 또는 4에 모두 대응되어야 하므로 상수함수의 개수는 4이다.

$\therefore n=4$

$\therefore l+m+n=256+24+4=284$

> 심플 정리
>
> **[여러 가지 함수의 개수]**
>
> 두 집합 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$에 대하여
>
> (1) X에서 Y로의 함수의 개수는 n^m이다.
>
> (2) $m\le n$일 때, X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-m+1)$
>
> (3) $m=n$일 때, X에서 Y로의 일대일대응의 개수는 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$이다.
>
> (4) X에서 Y로의 상수함수의 개수는 n이다.

Simple L 합성함수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 80 ~ 81

01 답 합성함수

02 답 -3, -1

03 답 -1

04 답 $\{-3, -2, -1, 0\}$

05 답 ○

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ×

09 답 ○

10 답 8

11 답 8

12 답 6

13 답 a

14 답 d

15 답 a

16 답 10

17 답 $(g\circ f)(x)=2x^2+2$

18 답 17

19 답 $(f\circ g)(x)=4x^2+1$

20 답 $(g\circ f)(x)=(x-1)^2$

21 답 $(f\circ g)(x)=x^2-1$

22 답 $((h\circ g)\circ f)(x)=2(x-1)^2$

23 답 $(h\circ(g\circ f))(x)=2(x-1)^2$

24 답 -3

$f^1(0)=f(0)=-1$에서

$f^2(0)=(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(-1)=-2$이므로

$f^3(0)=(f\circ f^2)(0)=f(f^2(0))=f(-2)=-3$

25 답 $f^n(x)=x-n$

$f^1(x)=f(x)=x-1$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(x-1)=(x-1)-1=x-2$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(x-2)=(x-2)-1=x-3$

$\vdots$

$\therefore f^n(x)=x-n$

26 답 27

27 답 $g^n(x)=3^n x$

28 답 256

29 답 $h^n(x)=x^{2^n}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 82~85

30 답 ④

$f(2)=2^2+3\times2=10$이므로

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(10)=10^2+3\times10=130$

31 답 ②

$f(4)=4-1=3$이므로

$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(3)=2\times3+1=7$

32 답 ⑤

$((f\circ g)\circ h)(1)=(f\circ(g\circ h))(1)=f((g\circ h)(1))$

$=f(2\times1+3)=f(5)=3\times5+2=17$

33 답 c

$f(1)=a$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$f(2)=b$ 또는 $f(2)=c$

(i) $f(2)=b$이면 $(g\circ f)(2)=4$이므로

$g(f(2))=g(b)=4$

(ii) $f(2)=c$이면 $g(c)=6$이므로

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(c)=6\neq4$

즉, $(g\circ f)(2)=4$에 모순이다.

(i), (ii)에 의하여 $f(2)=b$이므로 $f(3)=c$이다.

34 답 ⑤

$f(3)=2$이므로 $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(2)=5$

35 답 ④

$f(1)=5,\ f(5)=3,\ f(3)=4$이므로

$(f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))=f(f(5))=f(3)=4$

$g(2)=5,\ g(5)=3,\ g(3)=1$이므로

$(g\circ g\circ g)(2)=g(g(g(2)))=g(g(5))=g(3)=1$

$\therefore (f\circ f\circ f)(1)-(g\circ g\circ g)(2)=4-1=3$

36 답 ①

주어진 그래프에서 $f(c)=b,\ f(b)=a$이므로

$(f\circ f)(c)=f(f(c))=f(b)=a$

37 답 ③

$\sqrt{3}$은 무리수이므로 $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$

또 3은 유리수이므로 $f(3)=3\times3=9$

$\therefore (f\circ f)(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))=f(3)=9$

38 답 ②

$f(4)=3,\ f(3)=1,\ f(1)=1+1=2$이므로

$(f\circ f\circ f)(4)=f(f(f(4)))=f(f(3))=f(1)=2$

39 답 ②

$g(2)=2^2=4,\ f(4)=2\times4+3=11$이므로

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(4)=11$

또, $f(0)=3,\ g(3)=3^2=9$이므로

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(3)=9$

$\therefore (f\circ g)(2)-(g\circ f)(0)=11-9=2$

40 답 ③

유리수 a에 대하여 $f(a)=0,\ f(0)=0$이므로 x가 유리수일 때, $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(0)=0$

또 무리수 b에 대하여 $f(b)=1,\ f(1)=0$이므로 x가 무리수일 때, $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=0$

따라서 함수 $f\circ f$의 치역은 $\{0\}$이므로 치역에 속하는 원소는 ③ 0이다.

41 답 ②

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$

$=3(2x+1)-k=6x+3-k$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-k)$

$=2(3x-k)+1=6x-2k+1$

이때 $g\circ f=f\circ g$이므로

$6x+3-k=6x-2k+1$에서

$3-k=-2k+1 \qquad \therefore k=-2$

42 답 ④

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-2)=a(x-2)+1$

$=ax-2a+1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+1)=(ax+1)-2$

$=ax-1$

이때 $f\circ g=g\circ f$이므로

$ax-2a+1=ax-1$에서

$-2a+1=-1,\ 2a=2 \qquad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=x+1$이므로 $f(3)=3+1=4$

43 답 ③

$g(5)=g(f(1))\,(\because f(1)=5)$
$\quad=f(g(1))\,(\because g\circ f=f\circ g)$
$\quad=f(4)\,(\because g(1)=4)$
$\quad=4-1=3$

다른 풀이

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(5)$
$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(4)=4-1=3$
이때 $g\circ f=f\circ g$에서 $(g\circ f)(1)=(f\circ g)(1)$이므로
$g(5)=3$이다.

44 답 ④

$g(4)=g(f(2))\,(\because f(2)=4)$
$\quad=f(g(2))\,(\because g\circ f=f\circ g)$
$\quad=f(3)\,(\because g(2)=3)$
$\quad=3$

다른 풀이

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(4)$
$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(3)=3$
이때 $g\circ f=f\circ g$에서 $(g\circ f)(2)=(f\circ g)(2)$이므로
$g(4)=3$이다.

45 답 ④

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$
$\quad=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$
이때 $(f\circ f)(x)=x-2$이므로 $a^2x+ab+b=x-2$
에서 $a^2=1,\ ab+b=-2$
$a^2=1$에서 $a=1\ (\because a>0)$이고
$ab+b=-2$에서 $2b=-2\qquad \therefore b=-1$
따라서 $f(x)=x-1$이므로 $f(5)=5-1=4$

46 답 ①

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x-a)$
$\quad=(x-a)-a=x-2a$
이때 $(f\circ f)(x)=bx-4$이므로 $x-2a=bx-4$에서
$-2a=-4,\ b=1$
따라서 $a=2,\ b=1$이므로 $ab=2\times1=2$

47 답 ②

$(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))=f(f(2x-1))$
$\quad=f(2(2x-1)-1)=f(4x-3)$
$\quad=2(4x-3)-1$
$\quad=8x-7$
$(f\circ f\circ f)(a)=9$에서
$8a-7=9,\ 8a=16$
$\therefore a=2$

48 답 ①

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax-b)-b=a^2x-ab-b$
이때 $f\circ f=f$이므로 $a^2x-ab-b=ax-b$에서
$a^2=a,\ -ab-b=-b$
$a^2=a$에서 $a^2-a=0,\ a(a-1)=0\qquad \therefore a=1\ (\because a\neq0)$
$-ab-b=-b$에서 $-2b=-b\qquad \therefore b=0$
$\therefore a+b=1+0=1$

49 답 ④

$g(h(x))=f(x)$이므로 $h(2)=a$라 하고 양변에
$x=2$를 대입하면 $g(h(2))=f(2)$에서 $g(a)=f(2)$
즉, $3a-1=3\times2^2-1$에서
$3a-1=11,\ 3a=12$
$\therefore a=4 \Rightarrow h(2)=4$

다른 풀이

$g(h(x))=f(x)$에서
$3h(x)-1=3x^2-1$
$3h(x)=3x^2\qquad \therefore h(x)=x^2$
$\therefore h(2)=2^2=4$

50 답 ①

$(h\circ g)(x)=k(x)$라 하면 조건 (가)에 의하여
$k(x)=(h\circ g)(x)=2x+1$
따라서 조건 (나)에 의하여
$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$
$\quad=(k\circ f)(x)=k(f(x))$
$\quad=2f(x)+1=2x-5$
$2f(x)=2x-6\qquad \therefore f(x)=x-3=ax+b$
따라서 $a=1,\ b=-3$이므로
$a^2+b^2=1^2+(-3)^2=10$

51 답 ④

$(g\circ f)(x)=h(x)$에서
$g(2x+4)=4x+2$
이때 $2x+4=t$라 하면 $2x=t-4$
$\therefore x=\frac{1}{2}t-2$
따라서 $g(t)=4\left(\frac{1}{2}t-2\right)+2=2t-6$이므로
$g(5)=2\times5-6=4$

다른 풀이

$g(2x+4)=4x+2\ \cdots$ ㉠에서
$2x+4=5$일 때, $2x=1\qquad \therefore x=\frac{1}{2}$
$x=\frac{1}{2}$을 ㉠의 양변에 대입하면
$g(5)=4\times\frac{1}{2}+2=4$

52 답 ②

$(f\circ h)(x)=g(x)$에서

$f(h(x))=g(x)$, $3h(x)-2=2x-3$

$3h(x)=2x-1 \qquad \therefore h(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

$(k\circ f)(x)=g(x)$에서

$k(f(x))=g(x)$, $k(3x-2)=2x-3$

$3x-2=t$라 하면 $3x=t+2$에서 $x=\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}$이므로

$k(t)=2\left(\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\right)-3=\frac{2}{3}t-\frac{5}{3}$

$\therefore h(3)+k(3)=\left(\frac{2}{3}\times3-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\times3-\frac{5}{3}\right)$

$=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=2$

53 답 50

$f^1(x)=x-2$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x-2)$

$=(x-2)-2=x-4$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x-4)$

$=(x-4)-2=x-6$

⋮

$\therefore f^n(x)=x-2n$

따라서 $f^{20}(x)=x-40$이므로 $f^{20}(k)=10$에서

$k-40=10 \qquad \therefore k=50$

54 답 ⑤

$f(x)=4x$에서

$f^2(x)=f(f(x))=f(4x)=4^2x$

$f^3(x)=f(f^2(x))=f(4^2x)=4^3x$

⋮

$\therefore f^n(x)=4^nx$ (단, n은 자연수)

따라서 $f^4(x)=4^4x$이므로

$f^4(4)=4^4\times4=1024$

다른 풀이

$f(4)=4\times4=16$

$f^2(4)=f(f(4))=f(16)=4\times16=64$

$f^3(4)=f(f^2(4))=f(64)=4\times64=256$

$f^4(4)=f(f^3(4))=f(256)=4\times256=1024$

55 답 1

$f(2)=3$

$f^2(2)=f(f(2))=f(3)=1$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f(1)=2$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(2)=3$

⋮

따라서 자연수 k에 대하여

$f^{3k-2}(2)=3$, $f^{3k-1}(2)=1$, $f^{3k}(2)=2$이고

$2018=3\times673-1$이므로 $f^{2018}(2)=1$

56 답 ③

$f(2)=3$

$f^2(2)=f(f(2))=f(3)=4$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f(4)=1$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(1)=2$

$f^5(2)=f(f^4(2))=f(2)=3$

⋮

따라서 자연수 k에 대하여 $f^{4k-3}(2)=3$,

$f^{4k-2}(2)=4$, $f^{4k-1}(2)=1$, $f^{4k}(2)=2$이다.

$f(3)=4$

$f^2(3)=f(f(3))=f(4)=1$

$f^3(3)=f(f^2(3))=f(1)=2$

$f^4(3)=f(f^3(3))=f(2)=3$

$f^5(3)=f(f^4(3))=f(3)=4$

⋮

따라서 자연수 l에 대하여 $f^{4l-3}(3)=4$,

$f^{4l-2}(3)=1$, $f^{4l-1}(3)=2$, $f^{4l}(3)=3$이다.

이때 $2018=4\times505-2$이므로

$f^{2018}(2)+f^{2018}(3)=4+1=5$

57 답 ④

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=b$

이때 $f(x)=t$라 하면 $f(t)=b$에서 주어진 그래프에 의하여 $t=c$이므로 $f(x)=c$

따라서 주어진 그래프에 의하여 $x=d$이다.

58 답 ②

(i) $x=1$일 때,

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=3$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=3$

(ii) $x=2$일 때,

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(3)=4$

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=2$

(iii) $x=3$일 때,

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(2)=3$

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(4)=1$

(iv) $x=4$일 때,

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(1)=2$

$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(3)=2$

(i)~(iv)에 의하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$를 만족시키는 x의 값은 1 또는 4이다.

따라서 모든 x의 값의 곱은 $1\times4=4$이다.

59 답 ④

$f(f(x))=3$에서 $f(x)=t$라 하면 $f(t)=3$

이때 그래프에서 $f(t)=3$을 만족시키는 t의 값은

$t=2$ 또는 $t=4$ 또는 $t=6$이다.

$\therefore f(x)=2$ 또는 $f(x)=4$ 또는 $f(x)=6$

(i) $f(x)=2$를 만족시키는 x의 값은 그래프에서

$x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=7$

(ii) $f(x)=4$를 만족시키는 x의 값은 그래프에서 $x=5$

(iii) $f(x)=6$을 만족시키는 x의 값은 그래프에서 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 x의 값은 1, 3, 5, 7이므로 구하는 합은 $1+3+5+7=16$이다.

> **TIP**
> 주어진 그래프에서 조건을 만족시키는 x의 값은 그래프의 교점을 이용하여 구할 수 있다.
> 즉, $f(x)=2$를 만족시키는 x의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표이다.
> 일반화하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

Simple M 역함수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 86~87

01 답 역함수

02 답 일대일대응

03 답 치역, 정의역

04 답 $y=x$

05 답 ×

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ○

09 답 ㄴ, ㄷ

10 답 3

11 답 2

12 답 4

13 답 2

14 답 2

$f^{-1}(3)=a$에서 $f(a)=3$이므로

$2a-1=3$, $2a=4$ $\quad\therefore a=2$

> **TIP**
> 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$가 성립한다.

15 답 9

$f^{-1}(b)=5$에서 $f(5)=b$이므로

$b=2\times5-1=9$

16 답 ㄱ, ㄹ

17 답 8

18 답 4

19 답 5

20 답 $y=x-2$

주어진 함수 $y=x+2$는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=x+2$를 x에 대하여 정리하면 $x=y-2$이고

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x-2$이다.

따라서 주어진 함수의 역함수는 $y=x-2$이다.

21 답 $y=2x$

22 답 $y=-\frac{1}{3}x+1$

23 답 (1, 1)

$y=x^2\ (x>0)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은

$y=x^2\ (x>0)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

즉, $x^2=x$에서 $x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=1\ (\because x>0)$

따라서 구하는 교점의 좌표는 (1, 1)이다.

유형 연습 [+내신 유형]

문제편 pp. 88~91

24 답 ④

주어진 그림에서 $f(3)=2$

또 $f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$

주어진 그림에서 $f(4)=1$이므로 $a=4$ $\quad\therefore f^{-1}(1)=4$

$\therefore f(3)+f^{-1}(1)=2+4=6$

25 답 ③

$f^{-1}(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$2a-4=2$에서 $2a=6$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore f^{-1}(2)=3$

26 답 ④

$f^{-1}(5)=2$에서 $f(2)=5$ $\quad\therefore 2a+b=5$ ⋯㉠

$f^{-1}(2)=-1$에서 $f(-1)=2$ $\quad\therefore -a+b=2$ ⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=1,\ b=3$

따라서 $f(x)=x+3$이므로 $f(1)=1+3=4$

27 답 ②

$2x-2=t$라 하면 $2x=t+2$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}t+1$

따라서 $f(t)=-\left(\frac{1}{2}t+1\right)+3=-\frac{1}{2}t+2$이므로

$f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$에서 $-\frac{1}{2}a+2=1$

$-\frac{1}{2}a=-1$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore f^{-1}(1)=2$

28 답 ④

$f(-2)=2,\ f(-1)=0,\ f(2)=-1$이고 함수 f의 역함수가 존재하므로 일대일대응이어야 한다.

따라서 $f(0)=-2,\ f(1)=1$ 또는 $f(0)=1,\ f(1)=-2$이므로 $f^{-1}(-2)=0,\ f^{-1}(1)=1$ 또는 $f^{-1}(1)=0,$ $f^{-1}(-2)=1$이다.

$\therefore f^{-1}(1)+f^{-1}(-2)=0+1=1$

29 답 ③

$f(x)=x^2-4x-6=(x-2)^2-10$이고 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.

즉, $a\geq 2$이고 $f(a)=a$를 만족시켜야 한다.

$f(a)=a$에서 $a^2-4a-6=a,\ a^2-5a-6=0$

$(a+1)(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a\geq 2)$

30 답 ③

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해서는 일대일대응이어야 한다. $x\geq 0$일 때 직선 $y=f(x)$의 기울기가 음수이므로 $x<0$일 때에도 직선 $y=f(x)$의 기울기가 음수이어야 한다. 즉, $a-1<0$에서 $a<1$

또, 일대일대응이 되기 위해서는 방정식

$-\frac{1}{3}x+a=(a-1)x+a^2-6$의 해가 $x=0$이어야 하므로

$a=a^2-6$에서 $a^2-a-6=0,\ (a-3)(a+2)=0$

$\therefore a=-2\ (\because a<1)$

31 답 ③

역함수가 존재하기 위해서는 일대일대응이어야 한다. 즉, a에 대응할 수 있는 것은 $a,\ b,\ c$ 중에서 하나, b에 대응할 수 있는 것은 a에 대응된 것을 제외한 나머지 두 원소 중에서 하나, c에 대응할 수 있는 것은 a와 b에 대응된 것을 제외한 나머지 하나이다. 따라서 역함수가 존재하는 함수 f의 개수는 $3\times2\times1=6$이다.

32 답 ②

$(g\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g^{-1})(2)=f^{-1}(g^{-1}(2))$ ⋯ ㉠

이때 $g^{-1}(2)=a$라 하면 $g(a)=2$에서

$a+1=2$

$\therefore a=1 \Rightarrow g^{-1}(2)=1$

㉠에서 $f^{-1}(g^{-1}(2))=f^{-1}(1)$이고 $f^{-1}(1)=b$라 하면

$f(b)=1$에서 $2b-3=1,\ 2b=4$

$\therefore b=2 \Rightarrow f^{-1}(1)=2$

따라서 ㉠에 의하여

$(g\circ f)^{-1}(2)=f^{-1}(g^{-1}(2))=f^{-1}(1)=2$

다른 풀이

$(g\circ f)^{-1}(2)=k$라 하면

$2=(g\circ f)(k)=g(f(k))$

$\quad=g(2k-3)=(2k-3)+1$

$\quad=2k-2$

$2k=4$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(2)=2$

33 답 ⑤

$(g\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$\qquad=f^{-1}(g^{-1}(2))$

$\qquad=f^{-1}(1)=5$

$(f\circ g)^{-1}(4)=(g^{-1}\circ f^{-1})(4)$

$\qquad=g^{-1}(f^{-1}(4))$

$\qquad=g^{-1}(3)=4$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(2)+(f\circ g)^{-1}(4)=5+4=9$

34 답 ②

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(2)$

$=(g^{-1}\circ f)(2)$

($\because f\circ f^{-1}$는 항등함수)

$=g^{-1}(f(2))=g^{-1}(1)$

이때 $g^{-1}(1)=a$라 하면 $g(a)=1$이므로

$g(a)=-2a+5=1,\ -2a=-4\qquad \therefore a=2$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(1)=2$

35 답 ⑤

$(g\circ f)(x)=x$이므로 $g^{-1}=f$

$\therefore (g\circ f^{-1}\circ g^{-1})(1)=(g\circ f^{-1}\circ f)(1)=g(1)$

이때 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$에서 $a-4=1\qquad \therefore a=5$

$\therefore (g\circ f^{-1}\circ g^{-1})(1)=g(1)=5$

36 답 ③

$(g\circ f^{-1})^{-1}(2)=(f\circ g^{-1})(2)$

$=f(g^{-1}(2))=f(3)=2\times3-3=3$

37 답 ⑤

$((g^{-1}\circ f)^{-1}\circ g)(5)=((f^{-1}\circ g)\circ g)(5)$

$=f^{-1}(g(g(5)))=f^{-1}(g(-5))$

$=f^{-1}(-11)$

이때 $f^{-1}(-11)=a$라 하면 $f(a)=-11$에서

$2a-1=-11,\ 2a=-10\qquad \therefore a=-5$

$\therefore ((g^{-1}\circ f)^{-1}\circ g)(5)=f^{-1}(-11)=-5$

38 답 ①

$y=2x-4$라 하면 $2x=y+4\qquad \therefore x=\frac{1}{2}y+2$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x+2$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+2$이므로 $a=\frac{1}{2},\ b=2$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\times2=1$

39 답 ④

$(f^{-1})^{-1}=f$이므로 함수 $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+3$의 역함수가 $f(x)$이다.

$y=-\frac{1}{2}x+3$이라 하면 $\frac{1}{2}x=-y+3$

$\therefore x=-2y+6$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=-2x+6$

따라서 $f(x)=-2x+6$이므로 $a=-2,\ b=6$

$\therefore a+b=(-2)+6=4$

40 답 ④

$f\left(\frac{x-1}{2}\right)=3x-2$에서 $\frac{x-1}{2}=t$라 하면

$x-1=2t\qquad \therefore x=2t+1$

따라서 $f(t)=3(2t+1)-2=6t+1$이므로

$f(x)=6x+1$

이때 $y=6x+1$이라 하면 $6x=y-1$

$\therefore x=\frac{1}{6}y-\frac{1}{6}$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$이므로 $a=\frac{1}{6},\ b=-\frac{1}{6}$이다.

$\therefore a-b=\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$

41 답 ②

$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시킨다.

즉, $f(f(x))=x$에서 $f(ax+1)=x$

$a(ax+1)+1=x,\ a^2x+a+1=x$

즉, $a^2=1,\ a+1=0$이므로 $a=-1$

다른 풀이

$y=ax+1$이라 하면 $ax=y-1$

$\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{1}{a}\ (\because a\neq0)$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$이므로 $a=\frac{1}{a},\ 1=-\frac{1}{a}$

$\therefore a=-1$

42 답 ④

$(f\circ f)(x)=x$에서 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$f(3)=f^{-1}(3)=2$

또, $f^{-1}(3)=2$에서 $f(2)=3$이므로 $f^{-1}(2)=f(2)=3$

$\therefore f(3)+f^{-1}(2)=2+3=5$

43 답 ⑤

$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$

이때 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$f(x)=a(x-2)-1=ax-2a-1(a\neq0)$이라 하면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax-2a-1)-2a-1=x$에서

$a^2x-2a^2-3a-1=x$

$\therefore a^2=1,\ -2a^2-3a-1=0$

$a^2=1$에서 $a=1$ 또는 $a=-1$ ⋯ ㉠

$-2a^2-3a-1=0$에서 $2a^2+3a+1=0$

$(a+1)(2a+1)=0$에서 $a=-1$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$이므로 $f(x)=-x+1$

$\therefore f(-2)=-(-2)+1=3$

다른 풀이

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, -1)$을 지나므로

$f(2)=-1$ ⋯ ㉠

이때 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 $f^{-1}(2)=-1$

또, $f^{-1}(2)=-1$에서 $f(-1)=2$ ⋯ ㉡

한편, $f(x)=ax+b(a\neq0)$라 하면

㉠에서 $f(2)=2a+b=-1$, ㉡에서 $f(-1)=-a+b=2$

이 두 식을 연립하면 $a=-1$, $b=1$

따라서 $f(x)=-x+1$이므로 $f(-2)=3$

심플 정리

[직선의 방정식]

(1) 기울기가 m이고 y절편이 n인 직선의 방정식은
$y=mx+n$

(2) 점 (a, b)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y=m(x-a)+b$

(3) x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

44

답 ③

$g^{-1}(x)=f(x)$이므로 $g(5)=a$라 하면

$g^{-1}(a)=f(a)=5$이므로

$-\frac{1}{2}a+2=5$, $\frac{1}{2}a=-3$ $\quad\therefore a=-6$

$\therefore g(5)=-6$

다른 풀이

$y=-\frac{1}{2}x+2$라 하면 $\frac{1}{2}x=-y+2$

$\therefore x=-2y+4$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=-2x+4$

이때 $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로

$f^{-1}(x)=g(x)=-2x+4$

$\therefore g(5)=-2\times5+4=-6$

45

답 7

$g^{-1}(x)=f(x)$이므로 $g(7)=f^{-1}(7)=a$라 하면

$f(a)=7$에서 $3a-2=7$, $3a=9$

$\therefore a=3 \Rightarrow g(7)=3$

$g^{-1}(2)=f(2)=3\times2-2=4$

$\therefore g(7)+g^{-1}(2)=3+4=7$

46

답 ③

$f^{-1}(2)=0$이므로 $f(0)=2$에서 $a\times0+b=2$

$\therefore b=2$

또, $f(f(0))=4$이므로 $f(2)=4$ ($\because f(0)=2$)에서

$a\times2+b=2a+2=4$, $2a=2$

$\therefore a=1$

따라서 $f(x)=x+2$이므로 $f(1)=1+2=3$

47

답 ①

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=5$

$\therefore \sqrt{(g\circ f)(1)+(f\circ g)(a)}=\sqrt{5+f(g(a))}$ ⋯ ㉠

한편, 조건 (나)에 의하여 함수 g는 일대일대응이므로 함수 $f\circ g$의 치역은 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$이다.

즉, ㉠이 자연수가 되기 위해서는 $f(g(a))=4$이어야 하므로 $f(g(a))=4$에서

$g(a)=3$

따라서 조건 (가)에 의하여 $a=1$이다.

48

답 ②

$f^{-1}(d)=k$라 하면 $f(k)=d$에서 $k=c$

따라서 $f^{-1}(d)=c$이므로

$(g\circ f^{-1})(d)=g(f^{-1}(d))=g(c)=b$

49

답 ②

$f^{-1}(c)=m$이라 하면 $f(m)=c$에서 $m=b$이므로

$f^{-1}(c)=b$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)$ ⋯ ㉠

㉠에서 $f^{-1}(b)=n$이라 하면

$f(n)=b$에서 $n=a$이므로

$f^{-1}(b)=a$

따라서 ㉠에 의하여

$(f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(b)=a$

50

답 ⑤

주어진 조건에 의하여 $f(x)=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ 2x & (x<0) \end{cases}$이다.

ㄱ. $f(10)=10$

$f(f(10))=f(10)=10$

$\therefore f(10)=f(f(10))$ (참)

ㄴ. $(f\circ f)^{-1}(-4)=(f^{-1}\circ f^{-1})(-4)=f^{-1}(f^{-1}(-4))$ ⋯ ㉠

이때 $f^{-1}(-4)=m$이라 하면 $f(m)=-4$에서

$2m=-4$

$\therefore m=-2 \Rightarrow f^{-1}(-4)=-2$

즉, ㉠에서 $f^{-1}(f^{-1}(-4))=f^{-1}(-2)$이고

$f^{-1}(-2)=n$이라 하면 $f(n)=-2$에서 $2n=-2$

$\therefore n=-1 \Rightarrow f^{-1}(-2)=-1$

따라서 ㉠에 의하여

$(f\circ f)^{-1}(-4)=f^{-1}(f^{-1}(-4))$

$=f^{-1}(-2)=-1$ (참)

ㄷ. $x\geq0$에서 $f(x)=x$이므로 이 범위에서 $f=f^{-1}$이다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 무수히 많다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

51 답 ①

$y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

즉, $\frac{1}{2}x-1=x$에서 $\frac{1}{2}x=-1$ $\quad\therefore x=-2$

따라서 교점의 좌표는 $(-2,\ -2)$이므로

$a=-2,\ b=-2$

$\therefore ab=(-2)\times(-2)=4$

52 답 ②

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$f(1)=2$에서 $a+b=2$

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$ $\quad\therefore 2a+b=1$

이 두 식을 연립하면 $a=-1,\ b=3$

$\therefore a+b=(-1)+3=2$

> **TIP**
> 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재해야 한다. 그런데 이 문제에서는 일차함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 $(1,\ 2)$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$를 만족한다. 즉, $f(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 일차함수이다.
> $\therefore f(x)=-(x-1)+2=-x+3$

53 답 ⑤

$y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

즉, $x^2-4x=x$에서 $x^2-5x=0$, $x(x-5)=0$

$\therefore x=5$ ($\because x\ge 2$)

따라서 교점의 좌표는 $(5,\ 5)$이므로 $a=5,\ b=5$

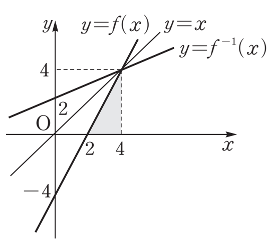
$\therefore a+b=5+5=10$

54 답 ②

$y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

즉, $2x-4=x$에서 $x=4$

따라서 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=a=4$로 둘러싸인 부분은 그림의 어두운 부분과 같다.



따라서 구하는 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times(4-2)\times4=4$

연습 문제 [L~M]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 92~93

01 답 ③

$g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax-1)$

$\quad =a(ax-1)-1=a^2x-a-1$

이때 직선 $y=f(x)$의 기울기는 a이고 직선 $y=g(x)$의 기울기는 a^2이므로 $a\times a^2=a^3=8$에서

$a^3-8=(a-2)(a^2+2a+4)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a^2+2a+4>0$)

따라서 $g(x)=4x-3$이므로 $g(2)=4\times2-3=5$

02 답 ③

$g(x)=(f\circ h)(x)=f(h(x))$에서

$-x^2+5=\frac{1}{2}h(x)+1$, $\frac{1}{2}h(x)=-x^2+4$

$\therefore h(x)=-2x^2+8 \Rightarrow h(1)=-2\times1^2+8=6$

03 답 ③

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$에서

$2(-x+k)-3=-(2x-3)+k$

$-2x+2k-3=-2x+k+3$

즉, $2k-3=k+3$에서 $k=6$

04 답 ①

$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(x-1)$

$\quad =b(x-1)-3=bx-b-3$

이때 $g(x)=-x-a$이므로 $(h\circ f)(x)=g(x)$에서

$bx-b-3=-x-a$ $\quad\therefore b=-1,\ -b-3=-a$

즉, $b=-1$이고 $a=b+3=-1+3=2$이므로

$a+b=2+(-1)=1$

05 답 ④

> 두 함수 f, g는 각각 $f(x)=2x^2-8x+9$, $g(x)=x+1$이다. $1\le x\le4$에서 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?
>
> ① 5 ② 10 ③ 15
> ④ 20 ⑤ 25
>
> $f(x)$가 이차함수, $g(x)$가 일차함수이므로 $(f\circ g)(x)$는 이차함수야. 즉, 이차함수의 최대, 최소를 구하는 거야.

1st $(f\circ g)(x)$의 식을 구하자.

$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)$ $f(x)$의 x 대신 $g(x)=x+1$을 대입해.

$\quad =2(x+1)^2-8(x+1)+9\ (1\le x\le4)$ $\cdots$ ㉠

2nd $x+1$을 치환하여 최댓값, 최솟값을 구해.

㉠에서 $x+1=t$로 치환하면

$y=2t^2-8t+9=2(t-2)^2+1\ (2\le t\le5)$ $1\le x\le4$에서 $2\le x+1\le5$이므로 $2\le t\le5$

따라서 $t=2$일 때 최솟값 $m=1$, $t=5$일 때 최댓값 $M=19$이므로 $M+m=19+1=20$

심플(고등자이)(해설)(2단원)044-091.indd 60 2017. 9. 22. 오후 8:51

다른 풀이

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)$

$=2(x+1)^2-8(x+1)+9$

$=2x^2-4x+3$

$=2(x-1)^2+1$

즉, 함수 $y=(f\circ g)(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $m=1$, $x=4$일 때 최댓값 $M=19$이므로 $M+m=19+1=20$

06 답 6

$f(1)=2$이므로

$f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(3)=4$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(4)=1$

$f^5(1)=(f\circ f^4)(1)=f(f^4(1))=f(1)=2$

⋮ … Ⅰ

따라서 자연수 k에 대하여

$f^{4k-3}(1)=2,\ f^{4k-2}(1)=3,\ f^{4k-1}(1)=4,\ f^{4k}(1)=1$이다.

이때 $2016=4\times504$이므로 $f^{2016}(1)=1$ … Ⅱ

또 $f^1(5)=f(5)=5$에서

$f^2(5)=f^3(5)=f^4(5)=\cdots=5$이므로 $f^{2018}(5)=5$

$\therefore f^{2016}(1)+f^{2018}(5)=1+5=6$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$f^1(1), f^2(1), f^3(1), \cdots$의 값을 차례로 구한다.	30%
Ⅱ	$f^n(1)$의 값의 규칙을 찾아 $f^{2016}(1)$의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	$f^n(5)$의 값의 규칙을 찾아 $f^{2018}(5)$의 값을 구하고 $f^{2016}(1)+f^{2018}(5)$의 값을 구한다.	30%

07 답 ②

집합 $X=\{1, 2, 3\}$에 대하여 두 함수

$f: X \longrightarrow X,\ g: X \longrightarrow X$ 주어진 함수에 따라 합성함수가 어떤 성질을 갖는지 따지자.

가 있다. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. f, g가 모두 항등함수이면 $g\circ f$는 항등함수이다.

ㄴ. $g\circ f$가 항등함수이면 f, g는 모두 일대일대응이다.

ㄷ. $g\circ f$가 항등함수이면 f, g는 모두 항등함수이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st f, g가 모두 항등함수이면 $f(x)=g(x)=x$야.

ㄱ. f, g가 모두 항등함수이면 모든 $x\in X$에 대하여 정의역의 원소와 같은 공역의 원소에 대응

$f(x)=g(x)=x$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=x$

즉, $g\circ f$는 항등함수이다. (참)

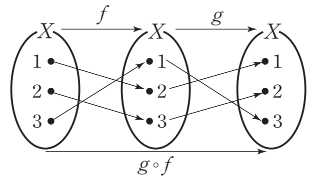
ㄴ. $g\circ f$가 항등함수이면 모든 $x\in X$에 대하여

$g(f(x))=x$ $(f^{-1}\circ f)(x)=x(x\in X),\ (f\circ f^{-1})(y)=y(y\in Y)$

즉, f의 역함수는 g이고 g의 역함수는 f이다.

따라서 f, g가 모두 역함수가 존재하므로 f, g는 모두 일대일대응이다. (참)

ㄷ. 【반례】 그림에서 $g\circ f$는 항등함수이지만 f, g는 항등함수가 아니다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

심플 정리

[일대일함수와 일대일대응]

(1) 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$일 때, 함수 f를 X에서 Y로의 일대일함수라 한다.

(2) 일대일함수 $f: X \longrightarrow Y$의 치역과 공역이 서로 같을 때, 함수 f를 X에서 Y로의 일대일대응이라 한다.

08 답 ⑤

$f^{-1}(7)=a$라 하면 $f(a)=7$이므로

$2a-3=7$에서 $2a=10$　$\therefore a=5$

$\therefore f^{-1}(7)=5$

09 답 ④

$f^{-1}(4)=a$라 하면 $f(a)=4$이므로

$2a-4=4$에서 $2a=8$　$\therefore a=4 \Rightarrow f^{-1}(4)=4$

한편, $(g\circ f)(x)=x$에서 $g=f^{-1}$이므로

$g^{-1}=(f^{-1})^{-1}=f$　$\therefore g^{-1}(4)=f(4)=2\times4-4=4$

$\therefore f^{-1}(4)+g^{-1}(4)=4+4=8$

10 답 ⑤

ㄱ. $f(x)=x^2$일 때,

$f(-1)=(-1)^2=1,\ f(1)=1^2=1$이므로

$f(-1)=f(1)$ (참)

ㄴ. $f(x)=x^3-x$일 때,

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$에서

$(f\circ f)(-1)=f(f(-1))=f(0)=0$

$(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(0)=0$

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(0)=0$

이므로 함수 $(f\circ f)(x)$의 치역은 $\{0\}$이다. (참)

ㄷ. $f(x)=x^3$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 ③

$2x+1=t$라 하면 $2x=t-1$ $\quad \therefore x=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$

즉, $f(2x+1)=4x+7$에서

$f(t)=4\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right)+7=2t+5$

$\therefore f(x)=2x+5$

이때 $f^{-1}(11)=a$라 하면 $f(a)=11$이므로

$2a+5=11$에서 $2a=6$ $\quad \therefore a=3$

$\therefore f^{-1}(11)=3$

12 답 ③

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 f는 일대일대응이다. 함수 f의 역함수가 존재한다는 거지?
(나) 집합 X의 모든 원소 a에 대하여 $f(a) \neq a$ 이다.

$f(1)+f(4)=7$일 때, $f(1)+f^{-1}(1)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

함수 f가 X에서 X로의 함수이므로 $f(1)+f(4)=7$을 만족시키는 경우는 두 가지뿐이야.

1st 두 조건 (가), (나)와 $f(1)+f(4)=7$을 이용하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 결정하자.

함수 f가 X에서 X로의 함수이므로

$f(1)+f(4)=7$에서

$f(1)=3$, $f(4)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(4)=3$이다.

그런데 조건 (나)에 의하여 $f(4)\neq 4$이므로

$f(1)=4$, $f(4)=3$이다.

한편, 조건 (가)에 의하여 정의역 2와 3에 대응하는 공역의 원소는 1과 2뿐이므로

함수 f가 일대일대응이므로 2, 3은 3 또는 4와 대응될 수 없어.

$f(2)=1$, $f(3)=2$ 또는 $f(2)=2$, $f(3)=1$이다.

그런데 조건 (나)에 의하여 $f(2)\neq 2$이므로

$f(2)=1$, $f(3)=2$이다.

2nd $f(1)+f^{-1}(1)$의 값을 구하자.

$f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

서로 역함수 관계인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=b$이면 $g(b)=a$가 성립해.

$a=2$ $\quad \therefore f^{-1}(1)=2$

$\therefore f(1)+f^{-1}(1)=4+2=6$

13 답 ⑤

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g)(2)$

$=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(2-1)=f^{-1}(1)$

이때 $f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$a-10=1$에서 $a=11$ $\quad \therefore f^{-1}(1)=11$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=f^{-1}(1)=11$

14 답 2

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해서는 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다.

즉, $x\geq 0$일 때의 직선의 기울기와 $x<0$일 때의 직선의 기울기의 부호가 같아야 하므로

$(3a+4)(5-2a)>0$, $(3a+4)(2a-5)<0$

$\therefore -\frac{4}{3}<a<\frac{5}{2}$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2이므로 구하는 합은

$(-1)+0+1+2=2$

15 답 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

즉, $\frac{1}{4}x^2+k=x$에서 $\frac{1}{4}x^2-x+k=0$이 $x\geq 0$에서 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $\frac{1}{4}x^2-x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times\frac{1}{4}\times k\geq 0$에서

$1-k\geq 0$ $\quad \therefore k\leq 1$

따라서 실수 k의 최댓값은 1이다.

심플 정리

[역함수의 그래프의 성질]

함수 f와 역함수 f^{-1}에 대하여

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점과 같다.

Simple N 유리식과 무리식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 94~95

01 답 유리식

02 답 번분수식

03 답 무리식

04 답 유리화

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ×

09 답 $\dfrac{x-2}{x+5}$

10 답 $\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$

11 답 $\dfrac{3x-2}{x(x-1)}$

12 답 $\dfrac{-2x-4}{(x+1)(x-1)}$

13 답 $\dfrac{x^2+2x+10}{(x-3)(x+2)}$

14 답 $\dfrac{3}{x-1}$

15 답 $\dfrac{1}{x(x+1)}$

$\dfrac{x-3}{x^2+4x}\times\dfrac{x+4}{x^2-2x-3}$

$=\dfrac{x-3}{x(x+4)}\times\dfrac{x+4}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{1}{x(x+1)}$

16 답 $\dfrac{x+2}{x}$

$\dfrac{x-1}{x}\div\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{x-1}{x}\times\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x+2}{x}$

17 답 $\dfrac{(x+1)(x^2-2x+4)}{x(x-2)}$

$\dfrac{x^3+8}{x^2-x}\div\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

$=\dfrac{x^3+8}{x^2-x}\times\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

$=\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x(x-1)}\times\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{(x+1)(x^2-2x+4)}{x(x-2)}$

18 답 $x\ge-2$

19 답 $x\le4$

20 답 $x>\dfrac{2}{3}$

$\sqrt{3x-2}$에서 $3x-2\ge0$, $3x\ge2$ $\quad\therefore x\ge\dfrac{2}{3}$

그런데 (분모)$\ne0$이므로 $x\ne\dfrac{2}{3}$이어야 한다.

$\therefore x>\dfrac{2}{3}$

21 답 $-3\le x\le-2$

22 답 $-1<x\le1$

(i) $\sqrt{1-x}$에서 $1-x\ge0$ $\quad\therefore x\le1$

(ii) $\sqrt{1+x}$에서 $1+x\ge0$ $\quad\therefore x\ge-1$

그런데 분모는 0이 아니므로 $1+x\ne0$에서 $x\ne-1$이다.

$\therefore x>-1$

(i), (ii)에 의하여 $-1<x\le1$

23 답 2

24 답 $2\sqrt{2}+2$

$\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}+1-(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{2}{x-1}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$=2\sqrt{2}+2$

25 답 $2+2\sqrt{2}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$이므로

$\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

$=\dfrac{2x+2}{x-1}=\dfrac{2(\sqrt{2}+1)+2}{(\sqrt{2}+1)-1}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}=\dfrac{4+4\sqrt{2}}{2}$

$=2+2\sqrt{2}$

26 답 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$ … ㉠

이때 $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$이므로

$x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$

$x-y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

$xy=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$

따라서 ㉠에 의하여 구하는 식의 값은

$\dfrac{2\sqrt{3}+2\times1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 96~97

27 답 ③

$$\boxed{\text{(가)}}=\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}-\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{2x+3-x-2}{(x+1)(x+2)}=\frac{x+1}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{1}{x+2}$$

28 답 ①

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}$$
$$=\frac{(x-2)(x+2)-2x(x+2)+3x(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{x^2-4-2x^2-4x+3x^2-6x}{x(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{2x^2-10x-4}{x(x-2)(x+2)}$$

따라서 $\boxed{}$ 안에 알맞은 식은 $2x^2-10x-4$이다.

29 답 ③

$$\frac{3x}{x-1}-\frac{x+1}{x}+\frac{x-4}{x(x-1)}$$
$$=\frac{3x^2-(x+1)(x-1)+(x-4)}{x(x-1)}$$
$$=\frac{2x^2+x-3}{x(x-1)}=\frac{(2x+3)(x-1)}{x(x-1)}=\frac{2x+3}{x}$$

30 답 ①

$$\frac{a}{x-1}+\frac{bx+1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{a(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{(bx+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{ax^2+ax+a+bx^2-bx+x-1}{x^3-1}$$
$$=\frac{(a+b)x^2+(a-b+1)x+a-1}{x^3-1}$$

이므로 $a+b=0$, $a-b+1=5$, $a-1=1$

$a-1=1$에서 $a=2$

$a=2$를 $a+b=0$에 대입하면 $b=-2$

$\therefore\ a+2b=2+2\times(-2)=-2$

31 답 ②

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x-3}\div\frac{x^2-x-2}{x^2-3x}$$
$$=\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x-3}\times\frac{x^2-3x}{x^2-x-2}$$
$$=\frac{(x+1)^2}{(x-3)(x+1)}\times\frac{x(x-3)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\frac{x}{x-2}$$

32 답 ⑤

$$\frac{x-4}{x^2-9}\div\frac{x^2-x-6}{x+3}\times\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x-8}$$
$$=\frac{x-4}{(x-3)(x+3)}\times\frac{x+3}{(x-3)(x+2)}\times\frac{(x+2)^2}{(x-4)(x+2)}$$
$$=\frac{1}{(x-3)^2}$$

이므로 $x=11$일 때, 구하는 식의 값은

$$\frac{1}{(11-3)^2}=\frac{1}{64}$$

33 답 ①

$$A=\frac{x+1}{x^2-2x-3}\times\frac{x^2-3x}{x-2}$$
$$=\frac{x+1}{(x-3)(x+1)}\times\frac{x(x-3)}{x-2}=\frac{x}{x-2}$$
$$B=\frac{x-1}{x-2}\div\frac{x^2+x}{x^2-x-2}=\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x^2-x-2}{x^2+x}$$
$$=\frac{x-1}{x-2}\times\frac{(x-2)(x+1)}{x(x+1)}=\frac{x-1}{x}$$

이므로

$$A-B=\frac{x}{x-2}-\frac{x-1}{x}=\frac{x^2-(x-1)(x-2)}{x(x-2)}$$
$$=\frac{x^2-x^2+3x-2}{x(x-2)}=\frac{3x-2}{x(x-2)}$$

34 답 ④

$$\frac{x+3}{x^3+1}\times\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$$
$$=\frac{x+3}{(x+1)(x^2-x+1)}\times\frac{(x-2)(x+1)}{(x+3)(x-2)}$$
$$=\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{ax+b}{x^2-x+1}$$

이므로 $a=0$, $b=1$

$\therefore\ a+b=0+1=1$

35 답 ②

무리식 $\dfrac{\sqrt{8-2x}}{x-1}$의 값이 실수가 되려면

$x\neq1$이고, $8-2x\geq0$이어야 한다.

$8-2x\geq0$에서 $2x\leq8$ $\quad\therefore\ x\leq4$

따라서 $x\neq1$, $x\leq4$를 만족하는 자연수 x는 2, 3, 4이므로 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은 $2+3+4=9$이다.

36 답 ⑤

무리식 $\sqrt{4-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$의 값이 실수가 되려면

$4-x\geq0$에서 $x\leq4$

$2x+3>0$에서 $x>-\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2}<x\leq4$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 -1, 0, 1, 2, 3, 4의 6이다.

37 답 ⑤

집합 A는 무리식 $2\sqrt{x+1}-\sqrt{10-3x}$의 값이 실수가 되도록 하는 실수 x의 집합이다.

즉, $x+1\ge0$에서 $x\ge-1$이고 $10-3x\ge0$에서 $x\le\frac{10}{3}$

$\therefore\ -1\le x\le\frac{10}{3} \Rightarrow A=\left\{x\,\middle|\,-1\le x\le\frac{10}{3}\right\}$

한편, $x^2+2x-15<0$에서 $(x+5)(x-3)<0$

$\therefore\ -5<x<3 \Rightarrow B=\{x\,|\,-5<x<3\}$

$\therefore\ A\cap B=\{x\,|\,-1\le x<3\}$

38 답 ①

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+1}+1)-(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{2}{x}$$

이때 $x=\sqrt{5}$이므로 대입하면 (구하는 값)$=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

39 답 2

$x=\sqrt{3}$이므로 $x+1>0,\ x-1>0$

$$A=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}-\frac{x-1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}=\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$$

이때 $x=\sqrt{3}$이므로 대입하면 $A=\frac{2}{\sqrt{3-1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore\ A^2=(\sqrt{2})^2=2$

40 답 ③

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})+(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{2\sqrt{x}}{x-y}$$

이때 $x=3,\ y=3-\sqrt{3}$이므로 대입하면

$$\frac{2\sqrt{3}}{3-(3-\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$$

41 답 ③

$f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$에서

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$
$$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(x+1)-x}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

$$\therefore\ \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(99)}$$
$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{99}-\sqrt{98})+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$
$$=-\{(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{98}-\sqrt{99})+(\sqrt{99}-\sqrt{100})\}$$
$$=-(1-10)$$
$$=9$$

Simple O 유리함수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 98~99

01 답 0

02 답 1, 3, 2, 4

03 답 $p,\ q$

04 답 ○

05 답 ×

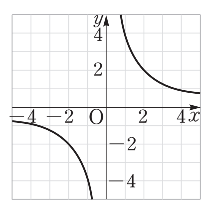
06 답 ×

07 답 ○

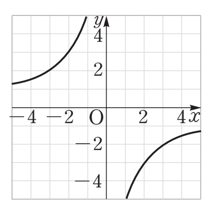
08 답 정의역 : $\{x\,|\,x\ne0$인 실수$\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\ne0$인 실수$\}$

09 답 정의역 : $\{x\,|\,x\ne0$인 실수$\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\ne0$인 실수$\}$

10 답



11 답



12 답 $y=\frac{3}{x}+2$

13 답 $y=-\frac{4}{x+1}+3$

14 답 $y=-\frac{5}{x-3}-1$

15 답 $y=\frac{2}{x+2}-4$

16 답 정의역 : $\{x\,|\,x\ne0$인 실수$\}$

치역 : $\{y\,|\,y\ne-1$인 실수$\}$

점근선의 방정식 : $x=0,\ y=-1$

17 답 정의역 : $\{x\,|\,x\ne3$인 실수$\}$

치역 : $\{y\,|\,y\ne0$인 실수$\}$

점근선의 방정식 : $x=3,\ y=0$

18 답 정의역 : $\{x \mid x \neq -1$인 실수$\}$

치역 : $\{y \mid y \neq 2$인 실수$\}$

점근선의 방정식 : $x=-1$, $y=2$

19 답 $y=\frac{2}{x-1}+1$

$y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$

20 답 $y=\frac{5}{x+3}-2$

$y=\frac{-2x-1}{x+3}=\frac{-2(x+3)+5}{x+3}=\frac{5}{x+3}-2$

21 답 $y=-\frac{7}{x+2}+2$

$y=\frac{2x-3}{x+2}=\frac{2(x+2)-7}{x+2}=-\frac{7}{x+2}+2$

22 답 $y=-\frac{2}{x-4}-1$

$y=\frac{-x+2}{x-4}=\frac{-(x-4)-2}{x-4}=-\frac{2}{x-4}-1$

23 답 $x=1$, $y=3$

$y=\frac{3x+1}{x-1}=\frac{3(x-1)+4}{x-1}=\frac{4}{x-1}+3$

따라서 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=3$이다.

24 답 $x=2$, $y=-2$

$y=\frac{1-2x}{x-2}=\frac{-2(x-2)-3}{x-2}=-\frac{3}{x-2}-2$

따라서 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-2$이다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 100～103

25 답 ①

$p=3$, $q=-4$이므로 $f(x)=\frac{2}{x-3}-4$

$\therefore f(4)=\frac{2}{4-3}-4=-2$

26 답 3

함수 $y=\frac{ax+4}{x+b}$의 정의역은 $\{x \mid x\neq -b$인 실수$\}$이므로

$-b=-1$에서 $b=1$

$b=1$을 대입하면

$y=\frac{ax+4}{x+1}=\frac{a(x+1)+4-a}{x+1}=\frac{4-a}{x+1}+a$에서

치역은 $\{y \mid y\neq a$인 실수$\}$이므로 $a=2$

$\therefore a+b=2+1=3$

27 답 ②

$y=\frac{3x-1}{x+4}=\frac{3(x+4)-13}{x+4}=-\frac{13}{x+4}+3$이므로

이 함수의 그래프는 함수 $y=-\frac{13}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $k=-13$, $p=-4$, $q=3$이므로

$k+p+q=(-13)+(-4)+3=-14$

28 답 ④

① $y=\frac{-x+1}{x-2}=\frac{-(x-2)-1}{x-2}=-\frac{1}{x-2}-1$

② $y=\frac{2x-5}{x-3}=\frac{2(x-3)+1}{x-3}=\frac{1}{x-3}+2$

③ $y=\frac{3x}{x-1}=\frac{3(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+3$

④ $y=\frac{x+3}{x+1}=\frac{(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+1$

⑤ $y=\frac{-2x-1}{x+2}=\frac{-2(x+2)+3}{x+2}=\frac{3}{x+2}-2$

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=\frac{2}{x-3}+5$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ④이다.

29 답 ③

$y=\frac{x-1}{x-4}=\frac{(x-4)+3}{x-4}=\frac{3}{x-4}+1$

$y=\frac{4x-9}{x-3}=\frac{4(x-3)+3}{x-3}=\frac{3}{x-3}+4$

이때 함수 $y=\frac{3}{x-4}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y-3=\frac{3}{(x+1)-4}+1$에서 $y=\frac{3}{x-3}+4$이므로

함수 $y=\frac{3}{x-3}+4$의 그래프와 일치한다.

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로 $a+b=(-1)+3=2$

30 답 ①

함수 $y=\frac{-2x+5}{x-4}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{-4}{1}=4$, $y=\frac{-2}{1}=-2$이므로 $a=4$, $b=-2$이다.

$\therefore ab=4\times(-2)=-8$

다른 풀이

$y=\frac{-2x+5}{x-4}=\frac{-2(x-4)-3}{x-4}=-\frac{3}{x-4}-2$이므로

주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=-2$이므로 $a=4$, $b=-2$

(이하 동일)

31 답 11

함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{c}{1}=-c$, $y=\frac{a}{1}=a$이므로 $-c=-2$에서 $c=2$이고 $a=2$이다.

즉, $y=\frac{2x+b}{x+2}$이고 이 함수의 그래프가 점 $(-1, 5)$를 지나므로 $x=-1$, $y=5$를 대입하면 $5=-2+b$에서 $b=7$

$\therefore a+b+c=2+7+2=11$

32 답 ②

$f(2)=3$이므로 $\frac{2a-2}{2-b}=3$에서

$2a-2=6-3b$, $2a=-3b+8$ $\quad \therefore a=-\frac{3}{2}b+4$ ⋯ ㉠

y축에 평행한 점근선이 점 $(4, 1)$을 지나므로 점근선은

$x=-\frac{-b}{1}=b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면 $a=-\frac{3}{2}\times4+4=-2$

따라서 $f(x)=\frac{-2x-2}{x-4}$이므로 $f(1)=\frac{4}{3}$

33 답 ③

함수 $f(x)=\frac{ax-6}{2x-4}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{-4}{2}=2$, $y=\frac{a}{2}$

함수 $g(x)=\frac{3x+2}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{b}{1}=-b$, $y=\frac{3}{1}=3$

두 함수의 그래프의 점근선이 같으므로

$-b=2$에서 $b=-2$, $\frac{a}{2}=3$에서 $a=6$

$\therefore a+b=6+(-2)=4$

34 답 ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 x축, y축이므로

$f(x)=\frac{k}{x}$ (단, $k\neq0$)로 놓을 수 있다.

$f\left(\frac{2}{3}\right)=12$이므로 $\frac{k}{\frac{2}{3}}=12$에서

$k=12\times\frac{2}{3}=8$ $\quad \therefore f(x)=\frac{8}{x}$

즉, $y=\frac{8}{x}$에서 $xy=8$을 만족하는 정수 x, y의 순서쌍은

$(1, 8)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(8, 1)$, $(-1, -8)$,
$(-2, -4)$, $(-4, -2)$, $(-8, -1)$

따라서 함수 $f(x)=\frac{8}{x}$의 그래프 위의 점 중에서 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 8이다.

TIP

$y=\frac{8}{x}$에서 x, y가 모두 정수이려면 x는 8의 약수가 되어야 한다. 즉, x의 값은 1, 2, 4, 8이고 음수인 경우도 만족하므로 가능한 정수 x의 값은 1, 2, 4, 8, -1, -2, -4, -8로 8개이다.

35 답 5

함수 $y=\frac{4x+3}{x-1}$의 그래프의 점근선은 $x=-\frac{-1}{1}=1$,

$y=\frac{4}{1}=4$이므로 이 그래프는 점 $(1, 4)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $a=1$, $b=4$이므로 $a+b=1+4=5$

심플 정리

[유리함수의 그래프의 대칭성]

유리함수의 그래프는 두 점근선의 교점에 대하여 대칭이다. 또한 두 점근선의 교점을 지나고 기울기가 1 또는 -1인 직선에 대하여 대칭이다.

36 답 ③

함수 $y=\frac{3x+4}{x+2}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{2}{1}=-2$, $y=\frac{3}{1}=3$이다.

즉, 주어진 유리함수의 그래프는 점 $(-2, 3)$을 지나고 기울기가 1인 직선에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+k$는 점 $(-2, 3)$을 지난다.

따라서 $3=-2+k$에서 $k=5$

37 답 ①

함수 $y=\frac{ax}{x+b}$의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1=\frac{2a}{2+b}$에서 $2a=b+2$ $\quad \therefore 2a-b=2$ ⋯ ㉠

또한 이 그래프는 기울기가 -1이고, 점 $(-b, a)$를 지나는 직선에 대하여 대칭이므로

$y=-(x+b)+a=-x-b+a$에서 $-b+a=0$

$\therefore a-b=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=2$, $b=2$

$\therefore a-2b=2-2\times2=-2$

38 답 ③

함수 $y=\frac{ax+2}{x-b}$의 그래프는 점 (b, a)를 지나고 기울기가 1 또는 -1인 직선에 대하여 대칭이다.

즉, 이 그래프는 직선 $y=x-b+a$ 또는

$y=-(x-b)+a=-x+b+a$에 대하여 대칭이므로

$-b+a=-2$, $b+a=2$

두 식을 연립하면 $a=0$, $b=2$

$\therefore ab=0\times2=0$

다른 풀이

두 직선 $y=x-2$, $y=-x+2$의 교점이 주어진 유리함수의 그래프의 두 점근선의 교점이므로 연립하면

$x=2$, $y=0$

따라서 두 점근선의 교점은 $(2, 0)$이므로

$a=0$, $b=2$이다.

(이하 동일)

39 답 ②

함수 $f(x)=\dfrac{x+a}{bx+c}$의 그래프는 점 $\left(-\dfrac{c}{b}, \dfrac{1}{b}\right)$에 대하여 대칭이므로 $\dfrac{1}{b}=1$에서 $b=1$, $-\dfrac{c}{b}=-c=-1$에서 $c=1$ 이다.

즉, $f(x)=\dfrac{x+a}{x+1}$이고 $f(-3)=2$가 성립하므로

$\dfrac{-3+a}{-3+1}=2$에서 $a=-1$

따라서 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$이므로 $f(1)=0$

40 답 ①

두 점근선이 $x=-a=-3$, $y=b=2$이므로

$a=3$, $b=2$

한편, 함수 $y=\dfrac{k}{x+3}+2$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{k}{0+3}+2$에서 $k=3$

$\therefore a+b+k=3+2+3=8$

41 답 ①

두 점근선이 $x=-4$, $y=2$이므로 주어진 그래프의 식은

$y=\dfrac{k}{x+4}+2$로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$\dfrac{k}{4}+2=0$에서 $k=-8$

즉, $y=-\dfrac{8}{x+4}+2=\dfrac{-8+2(x+4)}{x+4}=\dfrac{2x}{x+4}$이므로

$a=2$, $b=0$, $c=4$

$\therefore a+b-c=2+0-4=-2$

다른 풀이

함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=-c=-4$, $y=a=2$이므로 $a=2$, $c=4$이다.

한편, $y=\dfrac{2x+b}{x+4}$의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{b}{4}$에서 $b=0$

(이하 동일)

42 답 ②

함수 $y=\dfrac{x+a}{x-b}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\dfrac{x-1+a}{x-1-b}$

주어진 그래프의 점근선이 $x=3$이므로

$1+b=3$에서 $b=2$

한편, $y=\dfrac{x-1+a}{x-3}$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$\dfrac{-1+a}{-3}=2$에서 $a=-5$

$\therefore a-b=-5-2=-7$

심플 정리

[점과 도형의 평행이동]

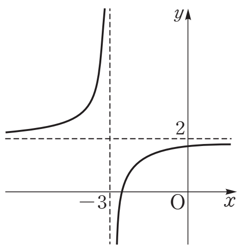
(1) 점 (a, b)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 점은 $(a+m, b+n)$이다.

(2) 도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 도형은 $f(x-m, y-n)=0$이다.

43 답 ①

$y=\dfrac{2x+5}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-1}{x+3}=-\dfrac{1}{x+3}+2$

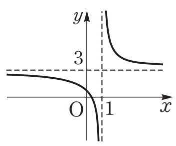
따라서 점근선은 $x=-3$, $y=2$이므로 함수 $y=-\dfrac{1}{x+3}+2$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 이 그래프가 지나는 사분면은 제1, 2, 3사분면이다.

44 답 ③

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-1}+3$의 그래프의 두 점근선이 $x=1$, $y=3$이고 k가 자연수이므로 이 함수의 그래프의 개형은 그림과 같다.



즉, 이 함수의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 $x=0$일 때, $y\geq0$이어야 한다.

$-k+3\geq0$에서 $k\leq3$

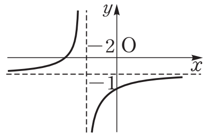
따라서 자연수 k는 1, 2, 3이므로

(구하는 합)$=1+2+3=6$

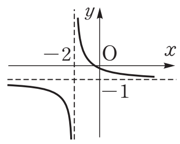
45 답 ③

$y=\dfrac{-x+k}{x+2}=\dfrac{-(x+2)+k+2}{x+2}=\dfrac{k+2}{x+2}-1$의 그래프의 두 점근선은 $x=-2$, $y=-1$이다.

(i) $k+2<0$, 즉 $k<-2$일 때,
그래프의 개형은 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



(ii) $k+2>0$, 즉 $k>-2$일 때,
그래프의 개형은 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않으려면 $x=0$일 때, $y\le 0$이어야 한다.

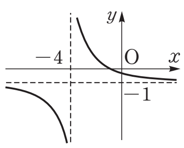


따라서 $\dfrac{k}{2}\le 0$에서 $k\le 0$이므로 $-2<k\le 0$

(i), (ii)에 의하여 k의 최댓값은 0이다.

46 답 ④

$y=\dfrac{2}{x+4}-1$의 그래프는 다음과 같다.



① $x=0$일 때, $y=\dfrac{2}{4}-1=-\dfrac{1}{2}$이므로
점 $(0, 0)$을 지나지 않는다. (거짓)

② 정의역은 $\{x \mid x\ne -4$인 실수$\}$이다. (거짓)

③ 두 점근선은 $x=-4$, $y=-1$이다. (거짓)

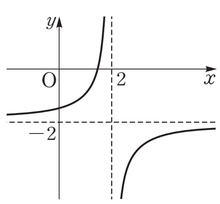
④ 두 점근선의 교점 $(-4, -1)$에 대하여 대칭이다. (참)

⑤ 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ④이다.

47 답 ⑤

$y=\dfrac{3-2x}{x-2}=\dfrac{-2(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-2$이므로
그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 제2사분면을 지나지 않는다. (참)

ㄴ. 점 $(2, -2)$를 지나고 기울기가 -1인 직선,
즉 $y=-(x-2)-2=-x$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 그래프에서 $x>2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

48 답 ①

$y=\dfrac{x-4}{x+3}=\dfrac{(x+3)-7}{x+3}=-\dfrac{7}{x+3}+1$이므로
주어진 함수는 $x>-3$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉, $-2\le x\le 1$에서 $x=-2$일 때 최솟값 $\dfrac{-2-4}{-2+3}=-6$,

$x=1$일 때 최댓값 $\dfrac{1-4}{1+3}=-\dfrac{3}{4}$을 가진다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$(-6)+\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{27}{4}$

49 답 ②

함수 $y=-\dfrac{2}{x-5}+k$는 $x<5$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $x=3$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 $-\dfrac{2}{3-5}+k=4$이므로 $k=3$

50 답 ③

$y=\dfrac{3x+a}{x+2}=\dfrac{3(x+2)+a-6}{x+2}=\dfrac{a-6}{x+2}+3$

한편, $a<6$이므로 함수 $y=\dfrac{a-6}{x+2}+3$은 $x>-2$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉, $x=-1$일 때, 최솟값을 가지므로

$\dfrac{-3+a}{-1+2}=-3+a=1$에서 $a=4$

따라서 함수 $y=\dfrac{3x+4}{x+2}$는 $x=2$일 때, 최댓값을 가지므로

구하는 최댓값은 $\dfrac{3\times 2+4}{2+2}=\dfrac{5}{2}$이다.

51 답 ③

함수 $y=\dfrac{4}{x-1}+b$는 $x<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $x=0$일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $-4+b=-2$에서 $b=2$ $\quad \therefore y=\dfrac{4}{x-1}+2$

한편, $x=a$에서 최댓값을 가지므로

$\dfrac{4}{a-1}+2=1$에서 $-a+1=4$

$\therefore a=-3$

Simple P 유리함수의 합성함수와 역함수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 104～105

01 답 이차방정식, 부호

02 답 $y=x$, $y=\dfrac{k}{x}$

03 답 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

04 답 ×

05 답 ○

06 답 ○

07 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

08 답 한 점에서 만난다.

09 답 접한다. 또는 한 점에서 만난다.

10 답 만나지 않는다.

11 답 $\dfrac{8}{3}$

$f(1)=\dfrac{1+3}{1-2}=-4$, $g(-4)=\dfrac{2\times(-4)}{-4+1}=\dfrac{8}{3}$이므로

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-4)=\dfrac{8}{3}$

12 답 -4

$g(1)=\dfrac{2\times1}{1+1}=1$, $f(1)=-4$이므로

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(1)=-4$

13 답 $(g\circ f)(x)=-\dfrac{1}{x+1}$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=\frac{\frac{x}{x+2}-1}{\frac{x}{x+2}+1}$$

$$=\frac{x-(x+2)}{x+(x+2)}=-\frac{1}{x+1}$$

14 답 $(g\circ f)(x)=\dfrac{3x+3}{2x+1}$

15 답 0

16 답 2

17 답 0

18 답 2

19 답 2

20 답 $y=\dfrac{4}{x}$

21 답 $y=-\dfrac{3x}{x-1}$

$y=\dfrac{x}{x+3}$를 x에 대하여 풀면

$(x+3)y=x$, $(y-1)x=-3y$

$\therefore\ x=-\dfrac{3y}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는 $y=-\dfrac{3x}{x-1}$이다.

다른 풀이

공식을 이용하면 $y=\dfrac{x}{x+3}$의 역함수는

$y=\dfrac{-3x}{x-1}=-\dfrac{3x}{x-1}$

> 심플 정리
>
> **[유리함수의 역함수]**
>
> (1) 역함수를 구하는 방법
>
> (i) $y=f(x)$를 x에 대하여 풀어 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 고친다.
>
> (ii) x와 y를 서로 바꾸어 대입하여 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.
>
> (2) 유리함수의 역함수
>
> ① 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 역함수는 $y=\dfrac{k}{x-q}+p$
>
> ② 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수는 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

22 답 $y=\dfrac{1}{x-2}+3$

23 답 $y=\dfrac{-2x-3}{x-2}$

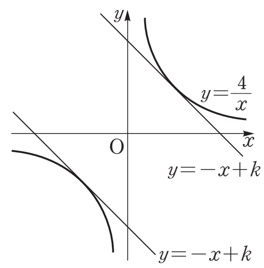
24 답 $y=\dfrac{-4x+5}{x+1}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 p. 106～107

25 답 ⑤

함수 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 한 점에서 만나려면 그림과 같이 접해야 한다.



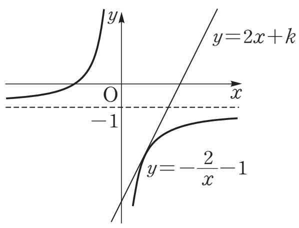
즉, $\frac{4}{x}=-x+k$에서 $x^2-kx+4=0$의 해가 단 하나 존재해야 하므로 이차방정식 $x^2-kx+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D=k^2-16=0$에서

$(k+4)(k-4)=0$ $\therefore k=4$ 또는 $k=-4$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $4+(-4)=0$이다.

26 답 ②

함수 $y=-\frac{2}{x}-1$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 제4사분면 위의 한 점에서 만나려면 그림과 같이 접해야 한다.



즉, $-\frac{2}{x}-1=2x+k$에서 $2x^2+(k+1)x+2=0$의 해가 단 하나 존재해야 하므로 이차방정식

$2x^2+(k+1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

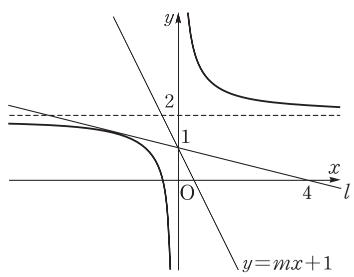
$D=(k+1)^2-16=0$에서 $(k+5)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ 또는 $k=-5$

그런데 두 그래프가 제4사분면 위의 한 점에서 만나야 하므로 $k=-5$이다.

27 답 ⑤

$n(A\cap B)=0$이므로 함수 $y=\frac{2x+1}{x}=\frac{1}{x}+2$의 그래프와 점 $(0, 1)$을 지나는 직선 $y=mx+1$은 그림과 같이 만나지 않아야 한다.



이때 점 $(0, 1)$을 지나고 함수 $y=\frac{1}{x}+2$의 그래프와 접하는 한 직선을 l이라 하면 직선 $y=mx+1$의 기울기 m은 직선 l의 기울기보다 작아야 한다.

접할 때의 m의 값을 찾기 위해 두 식을 연립하면

$\frac{1}{x}+2=mx+1$에서 $mx^2-x-1=0$

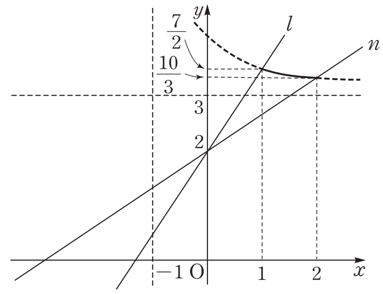
이차방정식 $mx^2-x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1+4m=0$에서 $m=-\frac{1}{4}$

따라서 구하는 실수 m의 값의 범위는 $m<-\frac{1}{4}$

28 답 ③

정의역이 $\{x|1\le x\le 2\}$인 함수 $f(x)=\frac{3x+4}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=mx+2$가 만나려면 그림과 같이 직선 $y=mx+2$의 기울기 m이 직선 n의 기울기보다 크거나 같고 직선 l의 기울기보다 작거나 같아야 한다.



이때 $f(1)=\frac{7}{2}$, $f(2)=\frac{10}{3}$이므로 직선 $y=mx+2$가

점 $\left(1, \frac{7}{2}\right)$을 지날 때 실수 m의 값은 최대이고,

점 $\left(2, \frac{10}{3}\right)$을 지날 때, 실수 m의 값은 최소이다.

즉, $m+2=\frac{7}{2}$에서 m의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이고, $2m+2=\frac{10}{3}$에서 m의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이므로 실수 m의 값의 범위는

$\frac{2}{3}\le m\le\frac{3}{2}$이다. 따라서 실수 m의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다.

29 답 ③

$f(x)=\frac{3x}{x+2}$에서 $f(-1)=-3$

$g(x)=\frac{2x+3}{x-2}$에서 $g(-3)=\frac{3}{5}$

$\therefore (g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(-3)=\frac{3}{5}$

30 답 ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-2=\frac{k}{x-1}+2$에서 $y=\frac{k}{x-1}+4$

한편, $g(x)=\frac{4x-3}{x-1}=\frac{4(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+4$

이므로 $k=1$ $\therefore f(x)=\frac{1}{x}+2$

즉, $f(1)=3$이고 $g(3)=\frac{9}{2}$이므로

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(3)=\frac{9}{2}$

심플 정리

[도형의 평행이동]

도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 도형은 $f(x-m, y-n)=0$이다.

31 답 1

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{f(x)+1}{f(x)}$

$=\dfrac{\dfrac{x+1}{x}+1}{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{2x+1}{x+1}$

따라서 $(f\circ f)(x)$의 그래프는 점 $(-1,\ 2)$에 대하여 대칭이므로 $p=-1,\ q=2$

$\therefore\ p+q=(-1)+2=1$

심플 정리

[유리함수의 그래프의 두 점근선의 교점]

(1) 함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프의 두 점근선의 교점은 $(p,\ q)$이다.

(2) 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프의 두 점근선의 교점은 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$이다.

32 답 ①

$f^1(-2)=f(-2)=0$

$f^2(-2)=f(f^1(-2))=f(0)=-2$

$f^3(-2)=f(f^2(-2))=f(-2)=0$

$f^4(-2)=f(f^3(-2))=f(0)=-2$

$\vdots$

이므로 $f^{10}(-2)=-2$

TIP

$f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n$(단, n은 자연수)일 때, $f^n(k)$의 값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

(1) $f(x),\ f^2(x),\ f^3(x),\ \cdots$를 차례로 구하여 $f^n(x)$를 유추하고, x 대신 k를 대입한다.

(2) $f(k),\ f^2(k),\ f^3(k),\ \cdots$를 차례로 구하여 규칙성을 찾는다.

33 답 ⑤

$y=\dfrac{-x+a}{x-3}$에서 $(x-3)y=-x+a$

$(y+1)x=3y+a$

$\therefore\ x=\dfrac{3y+a}{y+1}$

즉, $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+a}{x+1}=\dfrac{bx+2}{x+c}$이므로

$a=2,\ b=3,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=2+3+1=6$

다른 풀이

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수는 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$이므로

함수 $f(x)$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\dfrac{3x+a}{x+1}$

(이하 동일)

34 답 ②

$f(-1)=2$이므로 $\dfrac{3+a}{-1-b}=2$에서 $a+2b=-5\ \cdots$ ㉠

$f^{-1}(-1)=2$에서 $f(2)=-1$이므로

$\dfrac{-6+a}{2-b}=-1$에서 $a-b=4\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=1,\ b=-3$이므로

$a+b=1+(-3)=-2$

다른 풀이

$f^{-1}(x)=\dfrac{bx+a}{x+3}$이므로 $f^{-1}(-1)=2$에서

$\dfrac{-b+a}{-1+3}=2\qquad\therefore\ a-b=4$

(이하 동일)

35 답 ③

두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$\dfrac{3-a}{a+4}=1$에서 $3-a=a+4,\ 2a=-1\qquad\therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ g(1)=-\dfrac{1}{2}$

다른 풀이

$y=\dfrac{3-x}{x+4}$에서 $(x+4)y=3-x,\ (y+1)x=-4y+3$

$\therefore\ x=\dfrac{-4y+3}{y+1}$

즉, $f^{-1}(x)=g(x)=\dfrac{-4x+3}{x+1}$이므로 $g(1)=-\dfrac{1}{2}$

36 답 ③

$y=\dfrac{x-2}{3x+1}$에서 $(3x+1)y=x-2$

$(3y-1)x=-y-2\qquad\therefore\ x=\dfrac{-y-2}{3y-1}$

따라서 $f^{-1}(x)=\dfrac{-x-2}{3x-1}$이므로

$(f\circ f)^{-1}(0)=(f^{-1}\circ f^{-1})(0)=f^{-1}(f^{-1}(0))$

$=f^{-1}(2)=-\dfrac{4}{5}$

다른 풀이

$f^{-1}(0)=a$라 하면 $f(a)=0$에서

$\dfrac{a-2}{3a+1}=0\qquad\therefore\ a=2\Rightarrow f^{-1}(0)=2$

$f^{-1}(2)=b$라 하면 $f(b)=2$에서

$\dfrac{b-2}{3b+1}=2,\ b-2=6b+2$

$\therefore\ b=-\dfrac{4}{5}\Rightarrow f^{-1}(2)=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore\ (f\circ f)^{-1}(0)=(f^{-1}\circ f^{-1})(0)=f^{-1}(f^{-1}(0))$

$=f^{-1}(2)=-\dfrac{4}{5}$

37 답 2

$g(f(x))=x$이므로 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

즉, $f\circ g=I$ (I는 항등함수)이므로

$(g\circ f\circ g)(0)=g(0)$

이때 $g(0)=a$라 하면 $f(a)=0$이므로

$\frac{-2a+4}{a-1}=0$에서

$-2a+4=0 \quad \therefore a=2$

$\therefore (g\circ f\circ g)(0)=g(0)=2$

38 답 ①

$y=\frac{ax+3}{2x-1}$에서 $(2x-1)y=ax+3$

$(2y-a)x=y+3$

$\therefore x=\frac{y+3}{2y-a}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{2x-a}$이므로 $a=1$

$\therefore f(x)=\frac{x+3}{2x-1}$

이때 $f(1)=4$, $f(4)=1$이므로

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(4)=1$

다른 풀이

함수 $f(x)=\frac{ax+3}{2x-1}$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)$가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$에서

$a=1$

(이하 동일)

연습 문제 [N~P]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 108~109

01 답 ④

$$\frac{x-1}{x^2+x-2}+\frac{x-1}{x+2}=\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}+\frac{x-1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{x+2}+\frac{x-1}{x+2}$$
$$=\frac{x}{x+2}$$

02 답 ②

두 다항식 A, B에 대하여

$(A,\ B)=\frac{A+B}{A-B}$ $(A\neq B)$로 정의할 때,

$$(x^2+1,\ 2x)\times(x^2-2x,\ -x+2)=\frac{x+1}{x+a}$$

정의된 대로 (A, B)를 먼저 계산한 다음 두 유리식을 곱해서 양변을 비교해.

이 성립하도록 하는 실수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

1st 주어진 정의에 의하여 $(x^2+1,\ 2x)$, $(x^2-2x,\ -x+2)$를 정리하자.

$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$ (복호동순)

$$(x^2+1,\ 2x)=\frac{x^2+1+2x}{x^2+1-2x}=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$$

$$(x^2-2x,-x+2)=\frac{(x^2-2x)+(-x+2)}{(x^2-2x)-(-x+2)}$$
$$=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\frac{x-1}{x+1}$$

2nd 주어진 등식을 만족시키는 실수 a의 값을 구하자.

$(x^2+1,\ 2x)\times(x^2-2x,\ -x+2)$

$$=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x+1}{x+a}$$

좌변과 우변에서 분자가 일치하므로 분모만 같아지면 돼.

$\therefore a=-1$

03 답 1

모든 실수 x에 대하여 주어진 무리식의 값이 실수가 되어야 하므로 근호 안의 값이 0보다 크거나 같아야 한다.

즉, $f(x)=x^2-2x+k$라 하면 $f(x)\geq0$이어야 한다.

$f(x)=x^2-2x+k=(x^2-2x+1)+k-1=(x-1)^2+k-1$

에서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $k-1$을 가지므로

$k-1\geq0$에서 $k\geq1$

따라서 실수 k의 최솟값은 1이다.

다른 풀이

모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+k\geq0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq0$이다.

$\frac{D}{4}=1-k\leq0$에서 $k\geq1$

따라서 실수 k의 최솟값 1이다.

04 답 ②

$x>0$, $y>0$이므로

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\dfrac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}\sqrt{y}}=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}$ ⋯ ㉠

이때 $x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$,

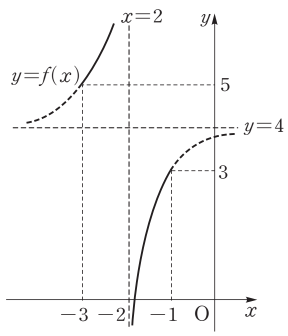
$xy=(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=1$이므로 ㉠에 대입하면

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\dfrac{4}{\sqrt{1}}=4$

05 답 ①

정의역이 $\{x\mid -3\le x\le -1,\ x\ne -2\}$인 함수

$f(x)=-\dfrac{1}{x+2}+4$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $f(-3)=5$, $f(-1)=3$이므로

함수 $f(x)$의 치역은 $\{y\mid y\ge 5$ 또는 $y\le 3\}$이다.

06 답 ⑤

함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\dfrac{3}{x-4}+5$이다.

이 그래프가 점 $(5,\ a)$를 지나므로 $x=5$, $y=a$를 대입하면

$a=3+5=8$

심플 정리

[점과 도형의 평행이동]

(1) 점 $(a,\ b)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 점은 $(a+m,\ b+n)$이다.

(2) 도형 $f(x,\ y)=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 도형은 $f(x-m,\ y-n)=0$이다.

07 답 ⑤

함수 $y=\dfrac{3ax}{2x-1}\ (a\ne 0)$의 점근선은

두 직선 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{3a}{2}$이므로

$m=\dfrac{1}{2}$이고, $\dfrac{3a}{2}=m$에서 $a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ a+m=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}$

08 답 ③

$x=2,\ y=1$을 함수식에 대입했을 때 성립한다는 거지?

유리함수 $y=\dfrac{3x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나고, 점 $(-2,\ c)$에 대하여 대칭일 때, $a+b+c$의 값은?

두 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=c$야.

(단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 그래프가 지나는 점을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 찾자.

함수 $y=\dfrac{3x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{6+b}{2+a}$에서 $a+2=b+6$

$\therefore\ b=a-4$ ⋯ ㉠

2nd 점 $(-a,\ 3)$에 대하여 대칭임을 이용하자.

함수 $y=\dfrac{3x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(-a,\ 3)$에 대하여 대칭이므로 $-a=-2$에서 $a=2$이고, $c=3$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore\ a+b+c=2+(-2)+3=3$

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 두 점근선 $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$의 교점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$에 대하여 대칭이야.

09 답 ④

주어진 그래프에서 두 점근선은 $x=2$, $y=-1$이고

$y=\dfrac{b}{x+a}+c$에서 두 점근선은 $x=-a$, $y=c$이므로

$-a=2$에서 $a=-2$이고, $c=-1$

이 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$y=\dfrac{b}{x-2}-1$에 대입하면 $-b-1=0$ $\therefore\ b=-1$

따라서 직선 $y=-2x-1$이 점 $(-1,\ k)$를 지나므로

$k=2-1=1$

10 답 ③

함수 $y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}$의 그래프가 제4사분면을 지나도록하는 모든 자연수 k의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

주어진 함수식을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 꼴로 바꾸어 점근선, y축과의 교점을 통해 지나는 사분면을 판단하자.

1st 주어진 유리함수의 그래프가 제4사분면을 지나도록 그려보자.

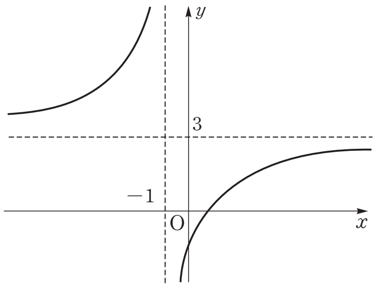
$y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+k-13}{x+1}=\dfrac{k-13}{x+1}+3$

의 두 점근선은 $x=-1$, $y=3$이다.

이때 $k-13>0$이면 제1, 2, 3사분면을 지나므로 제4사분면을 지나기 위해서는 $k-13<0$ ⋯ ㉠이고 이때의 그래프는 그림과 같다.

$k-13>0$일 때 그래프는 두 점근선을 기준으로 오른쪽 위, 왼쪽 아래에 그려져.

심플(고등자이)(해설)(2단원)044-091.indd 74 2017. 9. 22. 오후 8:51



2nd 그래프가 제4사분면을 지날 때의 y절편을 생각하자.

그림과 같이 이 함수의 그래프가 제4사분면을 지나기 위해서는 $x=0$일 때의 함숫값, 즉 y절편이 0보다 작아야 하므로

$k-10<0$에서 $k<10$ ⋯ ㉡

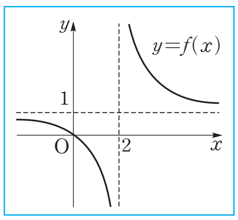
0보다 크거나 같으면 제4사분면을 지날 수 없어. 즉, 제1, 2, 3사분면만 지나게 돼.

㉠, ㉡에 의하여 k의 값의 범위는 $k<10$이므로 자연수 k는 1, 2, 3, ⋯, 9로 9개이다.

11

답 ①

그림은 유리함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



주어진 그래프가 지나는 한 점과 두 점근선을 알 수 있으니까 $f(x)$의 식을 구할 수 있어.

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(-1)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

$f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계이므로 $g(a)=b$이면 $f(b)=a$가 성립하지?

1st 함수 $f(x)$의 식을 구하자.

주어진 그래프에서 두 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로 $f(x)=\dfrac{k}{x-2}+1$이라 하자.

두 점근선이 $x=p$, $y=q$인 유리함수의 그래프가 나타내는 식은 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\,(k\neq0)$이야.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=\dfrac{k}{-2}+1=0$에서 $k=2$ $\quad\therefore f(x)=\dfrac{2}{x-2}+1$

2nd 역함수의 성질을 이용하여 $g(-1)$의 값을 구하자.

한편, $g(-1)=a$라 하면 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $f(a)=-1$에서 $\dfrac{2}{a-2}+1=-1$

서로 역함수 관계인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 $y=g(x)$의 그래프는 점 (b, a)를 지나. 즉, $f(a)=b$이면 $g(b)=a$야.

$\dfrac{2}{a-2}=-2$, $-2a+4=2$, $2a=2$

$\therefore a=1 \Rightarrow g(-1)=1$

다른 풀이

역함수를 직접 구해 보자.

$y=\dfrac{2}{x-2}+1$에서 $y-1=\dfrac{2}{x-2}$, $x-2=\dfrac{2}{y-1}$

$\therefore x=\dfrac{2}{y-1}+2$

따라서 $f^{-1}(x)=g(x)=\dfrac{2}{x-1}+2$이므로

$g(-1)=-1+2=1$

심플 정리

[서로 역함수 관계인 함수]

서로 역함수 관계인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 $y=g(x)$의 그래프는 점 (a, b)를 직선 $y=x$에 대칭이동한 점 (b, a)를 지나므로 $f(a)=b$이면 $g(b)=a$이다.

12

답 4

함수 $y=-\dfrac{3}{x+2}$은 $x=-2$에서 정의되지 않으므로 $a\geq-2$이면 $-5\leq x\leq a$에서 최댓값과 최솟값이 존재하지 않는다.

따라서 $a<-2$이고, $x<-2$에서 함수 $y=-\dfrac{3}{x+2}$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $x=a$에서 최댓값 3을 갖고, $x=-5$에서 최솟값 b를 갖는다.

$-\dfrac{3}{a+2}=3$에서 $3a+6=-3$ $\quad\therefore a=-3$

$-\dfrac{3}{-5+2}=b$에서 $b=1$

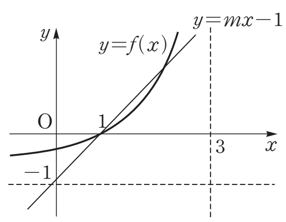
$\therefore b-a=1-(-3)=4$

13

답 16

$f(x)=\dfrac{-x+1}{x-3}=\dfrac{-(x-3)-2}{x-3}=-\dfrac{2}{x-3}-1$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



⋯ Ⅰ

이때 양수 m의 값에 관계없이 점 $(0, -1)$을 지나는 직선 $y=mx-1$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나려면 방정식 $mx-1=\dfrac{-x+1}{x-3}$이 실근을 가져야 한다. ⋯ Ⅱ

$mx-1=\dfrac{-x+1}{x-3}$에서 $mx^2-3mx-x+3=-x+1$

$mx^2-3mx+2=0$

이차방정식 $mx^2-3mx+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3m)^2-4\times m\times2=9m^2-8m=m(9m-8)\geq0$

이고 $m>0$이므로 $9m-8\geq0$ $\quad\therefore m\geq\dfrac{8}{9}$

따라서 양수 m의 최솟값은 $a=\dfrac{8}{9}$이므로 $18a=16$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	유리함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.	30%
Ⅱ	유리함수의 그래프와 직선이 만나는 경우를 파악한다.	30%
Ⅲ	양수 m의 최솟값 a를 구하여 $18a$의 값을 계산한다.	40%

14 답 ⑤

$f(x)=\dfrac{x-1}{x}$이므로

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{f(x)-1}{f(x)}=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}$$

$$=\frac{x-1-x}{x-1}=\frac{-1}{x-1}$$

따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프의 두 점근선은

$x=1$, $y=0$이므로 $p=1$, $q=0$

$\therefore\ p+q=1+0=1$

> 심플 정리
>
> **[유리함수의 그래프의 점근선의 방정식]**
>
> (1) 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프의 점근선의 방정식은
> $x=p$, $y=q$이다.
>
> (2) 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프의 점근선의 방정식은
> $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$이다.

15 답 ③

$f(2)=1$에서 $\dfrac{4+a}{2+b}=1$, $4+a=2+b$

$\therefore\ a-b=-2\ \cdots$ ㉠

또 $f^{-1}(3)=0$이므로 $f(0)=3$에서

$\dfrac{a}{b}=3 \qquad \therefore\ a=3b\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-3$, $b=-1$이므로

$f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$

따라서 $f(3)=\dfrac{3}{2}$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$이므로

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$

Simple Q 무리함수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 110~111

01 답 무리함수

02 답 $\{x\,|\,x\geq 0\}$, $\{y\,|\,y\geq 0\}$

03 답 $\{x\,|\,x\leq 0\}$, $\{y\,|\,y\geq 0\}$

04 답 p, q

05 답 ×

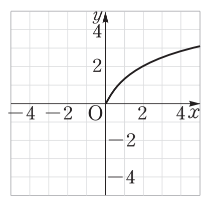
06 답 ○

07 답 ○

08 답 ×

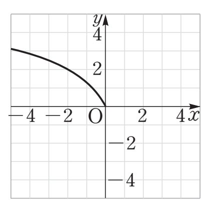
09 답 해설 참조

$y=\sqrt{2x}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이고 그래프는 다음과 같다.



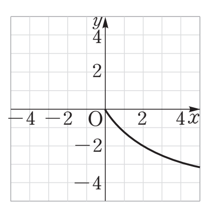
10 답 해설 참조

$y=\sqrt{-2x}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\leq 0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이고 그래프는 다음과 같다.



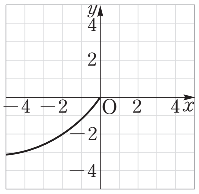
11 답 해설 참조

$y=-\sqrt{2x}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 0\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\leq 0\}$이고 그래프는 다음과 같다.



12 답 해설 참조

$y=-\sqrt{-2x}$의 정의역은 $\{x|x\le0\}$, 치역은 $\{y|y\le0\}$이고 그래프는 다음과 같다.



13 답 $y=\sqrt{2(x-1)}+2$

14 답 $y=\sqrt{-2(x+2)}+3$

15 답 $y=-\sqrt{3(x-2)}-1$

16 답 $y=-\sqrt{-3(x+3)}-1$

17 답 정의역 : $\{x|x\ge1\}$, 치역 : $\{y|y\ge0\}$

18 답 정의역 : $\{x|x\ge0\}$, 치역 : $\{y|y\ge2\}$

19 답 정의역 : $\{x|x\ge-1\}$, 치역 : $\{y|y\ge-2\}$

20 답 정의역 : $\{x|x\le0\}$, 치역 : $\{y|y\ge-1\}$

21 답 정의역 : $\{x|x\ge0\}$, 치역 : $\{y|y\le3\}$

22 답 정의역 : $\{x|x\le2\}$, 치역 : $\{y|y\le1\}$

23 답 정의역 : $\{x|x\ge2\}$, 치역 : $\{y|y\ge0\}$

24 답 정의역 : $\{x|x\le3\}$, 치역 : $\{y|y\ge0\}$

25 답 정의역 : $\{x|x\le2\}$, 치역 : $\{y|y\ge1\}$

26 답 정의역 : $\{x|x\ge-2\}$, 치역 : $\{y|y\le2\}$

27 답 정의역 : $\{x|x\le1\}$, 치역 : $\{y|y\le-3\}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 112~115

28 답 ①

$x-2\ge0$에서 $x\ge2$

즉, 함수 $y=\sqrt{x-2}+1$의 정의역은 $\{x|x\ge2\}$이므로 $a=2$이고 치역은 $\{y|y\ge1\}$이므로 $b=1$이다.

$\therefore a-b=2-1=1$

29 답 ①

$6-2x\ge0$에서 $x\le3$

즉, 함수 $y=-\sqrt{6-2x}-a+1$의 정의역은 $\{x|x\le3\}$이므로 $b=3$이고 치역은 $\{y|y\le-a+1\}$이므로 $-a+1=0$에서 $a=1$

$\therefore a+b=1+3=4$

30 답 ①

$x+a\ge0$에서 $x\ge-a$

즉, 함수 $y=\sqrt{x+a}+2$의 정의역이 $\{x|x\ge-a\}$이므로 $a=-1$이다.

한편, 그래프가 점 $(1,\ b)$를 지나므로 $x=1$, $y=b$를 대입하면 $b=\sqrt{1-1}+2=2$

$\therefore ab=(-1)\times2=-2$

31 답 ③

함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 치역은 $\{y|y\le c\}$이므로 $c=-1$에서 $y=-\sqrt{ax+b}-1$

이때, 이 함수의 정의역과 치역에 의하여 이 함수의 그래프는 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{a+b}-1$에서 $\sqrt{a+b}=0$, $a+b=0$

$\therefore b=-a \Rightarrow y=-\sqrt{ax-a}-1$

또, 이 함수의 그래프가 점 $(2,\ -3)$을 지나므로

$-3=-\sqrt{2a-a}-1$에서 $\sqrt{a}=2$ $\quad\therefore a=4$

따라서 $b=-a=-4$이므로

$abc=4\times(-4)\times(-1)=16$

다른 풀이

정의역이 $\{x|x\ge1\}$이므로 $a>0$이다.

즉, $ax+b\ge0$에서 $x\ge-\dfrac{b}{a}$이므로

$-\dfrac{b}{a}=1$ $\quad\therefore b=-a$

(이하 동일)

32 답 ④

$2x+3\ge0$에서 $2x\ge-3$ $\quad\therefore x\ge-\dfrac{3}{2}$

즉, 함수 $y=\sqrt{2x+3}$의 정의역은

$A=\left\{x\,\middle|\,x\ge-\dfrac{3}{2}\right\}$

$7-3x\ge0$에서 $3x\le7$ $\quad\therefore x\le\dfrac{7}{3}$

즉, 함수 $y=\sqrt{7-3x}$의 정의역은

$B=\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{7}{3}\right\}$

따라서 $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{7}{3}\right\}$이므로 집합 $A\cap B$의 정수인 원소의 개수는 -1, 0, 1, 2로 4이다.

33 답 ③

$y=4-\sqrt{6-3x}=-\sqrt{-3(x-2)}+4$의 그래프는

$y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$p=2,\ q=4$

$\therefore\ 2p-q=2\times2-4=0$

34 답 ④

함수 $f(x)=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{a(x+2)}+4$

이 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$-\sqrt{a}+4=2$에서 $\sqrt{a}=2$

$\therefore\ a=4$

따라서 $f(x)=-\sqrt{4x}$이므로

$f(1)=-\sqrt{4}=-2$

35 답 ①

함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-2(x-1)}-2$

이 그래프가 점 $(-7,\ k)$를 지나므로

$k=\sqrt{-2\times(-8)}-2=2$

36 답 ②

$y=\sqrt{ax-1}+b$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 평행이동한 것이므로 $a=-1$

이때, $y=\sqrt{-x-1}+b$의 그래프가 점 $(-2,\ 3)$을 지나므로 $3=\sqrt{-(-2)-1}+b$에서 $b=2$

또, $y=\sqrt{-x-1}+2=\sqrt{-(x+1)}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$c=-1,\ d=2$

$\therefore\ a+b+c+d=(-1)+2+(-1)+2=2$

37 답 ⑤

함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{-ax}$이므로 $a=3$

따라서 함수 $y=\sqrt{x+3}$에 대하여

① $x=-2$일 때, $y=1$

② $x=-1$일 때, $y=\sqrt{2}$

③ $x=0$일 때, $y=\sqrt{3}$

④ $x=1$일 때, $y=2$

⑤ $x=2$일 때, $y=\sqrt{5}$

이므로 함수 $y=\sqrt{x+3}$의 그래프가 지나지 않는 점의 좌표는 ⑤ $(2,\ 3)$이다.

38 답 ③

① $y=\sqrt{-2x+1}=\sqrt{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\sqrt{2x}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=-\sqrt{2x-3}+5=-\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+5$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=-\sqrt{4-2x}-1=-\sqrt{-2(x-2)}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 대칭이동 또는 평행이동에 의하여 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프와 겹쳐지지 않는 것은 ③이다.

TIP

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 근호 안의 x의 계수 a와 이 함수의 그래프를 평행이동, 대칭이동한 그래프의 식의 근호 안의 x의 계수는 부호는 다를 수 있어도 절댓값은 같다. 즉, 이 문제에서는 근호 안의 x의 계수의 절댓값이 다른 ③이 답이다.

39 답 ③

함수 $f(x)=\sqrt{3x-4}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+2=\sqrt{3(x+1)-4}+1$에서 $y=\sqrt{3x-1}-1$

이 그래프를 다시 원점에 대하여 대칭이동하면

$-y=\sqrt{-3x-1}-1$에서 $y=-\sqrt{-3x-1}+1$

즉, $g(x)=-\sqrt{-3x-1}+1$이므로 $g(-2)=-\sqrt{5}+1$

TIP

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입하여 구한다.

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 y 대신 $-y$를, y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 x 대신 $-x$를, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하여 구한다.

40 답 ②

주어진 무리함수의 그래프가 점 $(-1,\ -3)$에서 시작하므로 이 그래프의 식을 $y=\sqrt{a(x+1)}-3$이라 하면 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $0=\sqrt{a}-3$에서 $\sqrt{a}=3$ $\therefore\ a=9$

따라서 $y=\sqrt{9(x+1)}-3=\sqrt{9x+9}-3$이므로

$b=9,\ c=-3$

$\therefore\ a+b-c=9+9-(-3)=21$

41 답 ④

주어진 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식은 $y=\sqrt{-(x-3)}-1$이다.

따라서 이 그래프의 y절편을 구하기 위해 $x=0$을 대입하면 $y=\sqrt{3}-1$이므로 y절편은 $\sqrt{3}-1$이다.

42 답 ④

주어진 그래프의 식을 $f(x)=-\sqrt{a(x-1)}+2(a<0)$라 하면 이 그래프가 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$-\sqrt{-2a}+2=0$에서 $\sqrt{-2a}=2$, $-2a=4$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-\sqrt{-2(x-1)}+2$이므로

$f(-7)=-\sqrt{16}+2=-2$

43 답 ①

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-2)+b}+c=\sqrt{ax-2a+b}+c$ ⋯ ㉠

한편, 주어진 그래프의 식을 $y=\sqrt{a(x-3)}-2$라 하면 이 그래프가 점 $(5, 0)$을 지나므로

$\sqrt{2a}-2=0$, $\sqrt{2a}=2$, $2a=4$ $\quad\therefore a=2$

따라서 주어진 그래프의 식은

$y=\sqrt{2(x-3)}-2=\sqrt{2x-6}-2$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡이 같은 식이므로

$a=2$, $-2a+b=-6$, $c=-2$

$-2a+b=-6$에서 $b=-6+2a=-6+2\times2=-2$

$\therefore a+b+c=2+(-2)+(-2)=-2$

다른 풀이

주어진 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프는 점 $(1, -2)$에서 시작하므로 $y=\sqrt{a(x-1)}-2$라 할 수 있다.

또, 이 그래프는 점 $(3, 0)$을 지나므로

$\sqrt{2a}-2=0$, $\sqrt{2a}=2$, $2a=4$ $\quad\therefore a=2$

따라서 주어진 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{2(x-1)}-2=\sqrt{2x-2}-2$이므로 $a=2$, $b=-2$, $c=-2$이다.

$\therefore a+b+c=-2$

44 답 ②

$f(x)=\sqrt{-2x+a}-b=\sqrt{-2\left(x-\frac{a}{2}\right)}-b$에서

$\frac{a}{2}=b$, $-b=-1$ $\quad\therefore b=1$, $a=2b=2$

즉, $f(x)=\sqrt{-2x+2}-1$이므로

$c=f(0)=\sqrt{2}-1$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{2}-1$이므로

$a+b+c=2+\sqrt{2}$

다른 풀이

주어진 무리함수의 그래프의 식을

$y=\sqrt{-2(x-b)}-1=\sqrt{-2x+2b}-1$이라 하면

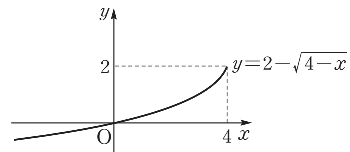
이것은 $f(x)=\sqrt{-2x+a}-b$와 같으므로

$a=2b$, $b=1$ $\quad\therefore a=2$, $b=1$

(이하 동일)

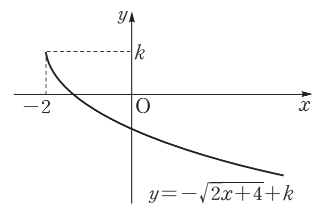
45 답 ②

함수 $y=2-\sqrt{4-x}=-\sqrt{-(x-4)}+2$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 이 그래프가 지나는 사분면은 제1, 3사분면이다.

46 답 ⑤



함수 $y=-\sqrt{2x+4}+k=-\sqrt{2(x+2)}+k$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 그림과 같아야 한다.

즉, y절편이 0보다 작거나 같아야 하므로

$-\sqrt{2\times0+4}+k=-2+k\leq0$에서 $k\leq2$

따라서 k의 최댓값은 2이다.

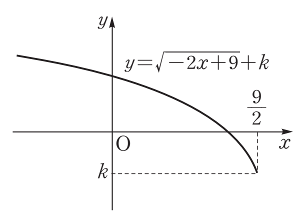
47 답 ④

주어진 그래프가 왼쪽 아래를 향하고 있으므로 $a<0$

이때 함수 $f(x)=a\sqrt{-x+b}+c=a\sqrt{-(x-b)}+c$의 그래프의 시작하는 점의 x좌표는 양수이고 y좌표는 음수이므로 $b>0$, $c<0$

따라서 $a<0$, $b>0$, $c<0$이므로 옳은 것은 ④ $abc>0$이다.

48 답 ②



함수 $y=\sqrt{-2x+9}+k=\sqrt{-2\left(x-\frac{9}{2}\right)}+k$의 그래프가 제1사분면을 지나려면 그림과 같아야 한다.

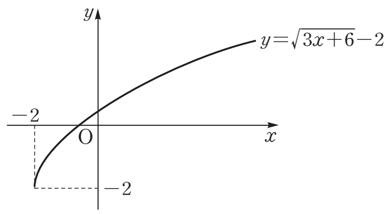
즉, y절편이 0보다 커야 하므로

$\sqrt{-2\times0+9}+k=3+k>0$에서 $k>-3$

따라서 음의 정수 k는 -2, -1의 2개이다.

49 답 ④

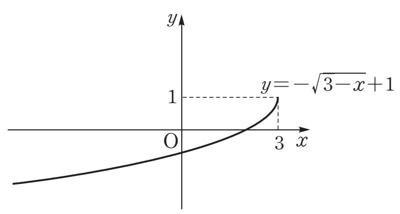
함수 $y=\sqrt{3x+6}-2=\sqrt{3(x+2)}-2$의 그래프는 다음과 같다.



① $x=1$일 때, $y=1$이므로 점 $(1,\ 1)$을 지난다. (거짓)
② 정의역은 $\{x\,|\,x\ge-2\}$이다. (거짓)
③ 치역은 $\{y\,|\,y\ge-2\}$이다. (거짓)
④ 제4사분면을 지나지 않는다. (참)
⑤ 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

50 답 ⑤

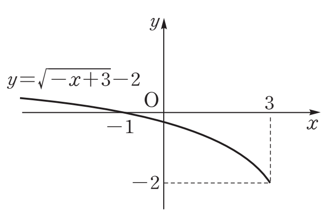
$y=-\sqrt{3-x}+1=-\sqrt{-(x-3)}+1$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-\sqrt{-x}$이고, 이 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-\sqrt{-(x-3)}+1$이다. (참)
ㄴ. 정의역은 $\{x\,|\,x\le3\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\le1\}$이다. (참)
ㄷ. 그래프는 제1, 3, 4사분면을 지난다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

51 답 ①

$y=\sqrt{-x+3}-2=\sqrt{-(x-3)}-2$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 정의역은 $\{x\,|\,x\le3\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge-2\}$이다. (참)
ㄴ. 함수식에 $x=0$을 대입하면 $y=\sqrt{3}-2$, $y=0$을 대입하면 $x=-1$이다. 따라서 주어진 무리함수의 그래프는 두 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ \sqrt{3}-2)$를 지나므로 x축, y축과 모두 만난다. (참)
ㄷ. 함수 $y=\sqrt{-(x-3)}-2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없다. (거짓)
ㄹ. 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

52 답 ③

함수 $y=-\sqrt{3-2x}+m=-\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+m$의 그래프는 점 $\left(\frac{3}{2},\ m\right)$에서 시작하여 왼쪽 아래로 향하는 그래프이다.

즉, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $x=\frac{3}{2}$에서 최댓값 m을 가진다.

따라서 $n=\frac{3}{2}$, $m=4$이므로 $mn=4\times\frac{3}{2}=6$

53 답 ③

$y=-\sqrt{4x+5}+1=-\sqrt{4\left(x+\frac{5}{4}\right)}+1$의 그래프는 점 $\left(-\frac{5}{4},\ 1\right)$에서 시작하여 오른쪽 아래로 향하는 그래프이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
즉, $x=-1$일 때 최댓값 $-\sqrt{1}+1=0$을 갖고, $x=1$일 때, 최솟값 $-\sqrt{9}+1=-2$를 갖는다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 -2이다.

54 답 ①

$y=\sqrt{-3x+9}+k=\sqrt{-3(x-3)}+k$의 그래프는 점 $(3,\ k)$에서 시작하여 왼쪽 위로 향하는 그래프이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
즉, $x=0$일 때, 최댓값 $\sqrt{9}+k=3+k$를 갖고
$x=3$일 때, 최솟값 $\sqrt{-9+9}+k=k$를 갖는다.
이때 최댓값이 1이므로 $3+k=1$에서 $k=-2$
따라서 $0\le x\le3$에서 주어진 함수의 최솟값은 -2이다.

55 답 ②

$y=\sqrt{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}-3=\sqrt{\frac{1}{2}(x+3)}-3$의 그래프는 점 $(-3,\ -3)$에서 시작하여 오른쪽 위로 향하는 그래프이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
즉, $x=-1$일 때, 최솟값 $\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}-3=-2$를 갖고,
$x=a$일 때, 최댓값 $\sqrt{\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}}-3$을 갖는다.
이때, 최댓값이 0이므로 $\sqrt{\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}}-3=0$에서
$\sqrt{\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}}=3$, $\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}=9$, $\frac{1}{2}a=\frac{15}{2}$ $\quad\therefore a=15$
또, 최솟값이 b이므로 $b=-2$
$\therefore a-b=15-(-2)=17$

Simple R 무리함수의 역함수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 116~117

01 답 0

02 답 x, x, y

03 답 $\{x|x\geq c\}$

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ○

07 답 만나지 않는다.

08 답 접한다. 또는 한 점에서 만난다.

09 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

10 답 한 점에서 만난다.

11 답 만나지 않는다.

12 답 접한다. 또는 한 점에서 만난다.

13 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

14 답 한 점에서 만난다.

15 답 역함수 : $y=(x+2)^2-5$

역함수의 정의역 : $\{x|x\geq -2\}$

$y=\sqrt{x+5}-2$에서 $y+2=\sqrt{x+5}$

양변을 제곱하면 $x+5=(y+2)^2$

$\therefore\ x=(y+2)^2-5$

여기서 x, y를 서로 바꾸면 $y=(x+2)^2-5$

이때 함수 $y=\sqrt{x+5}-2$의 치역이 $\{y|y\geq -2\}$이므로

역함수의 정의역은 $\{x|x\geq -2\}$이다.

16 답 역함수 : $y=-(x-4)^2+1$

역함수의 정의역 : $\{x|x\geq 4\}$

17 답 역함수 : $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-3$

역함수의 정의역 : $\{x|x\leq -1\}$

18 답 역함수 : $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2+\frac{4}{3}$

역함수의 정의역 : $\{x|x\leq 2\}$

19 답 $y=-(x-2)^2+1\ (x\geq 2)$

20 답 $y=(x-1)^2-2\ (x\leq 1)$

21 답 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2\ (x\geq 3)$

22 답 $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2-3\ (x\leq 2)$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 118~119

23 답 ①

$\sqrt{2x+1}=x+k$에서 $2x+1=(x+k)^2$

$2x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore\ x^2+2(k-1)x+k^2-1=0$

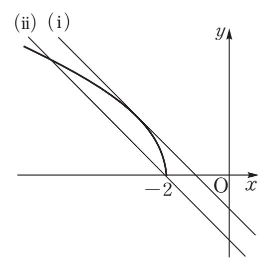
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)=0,\ -2k+2=0,\ 2k=2$

$\therefore\ k=1$

24 답 ④

함수 $y=\sqrt{-4x-8}=\sqrt{-4(x+2)}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 한 점에서 만나려면 직선이 그림의 (i)과 같이 접하거나 (ii)의 직선의 y절편보다 작아야 한다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 함수 $y=\sqrt{-4x-8}$의 그래프와 접할 때,

$\sqrt{-4x-8}=-x+k$에서 $-4x-8=(-x+k)^2$

$\therefore\ x^2-2(k-2)x+k^2+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2+8)=0,\ -4k-4=0,\ 4k=-4$

$\therefore\ k=-1$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때,

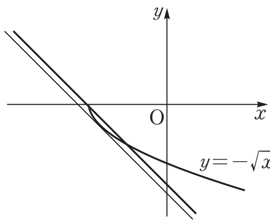
$0=2+k$에서 $k=-2$이므로 직선 (ii)의 y절편은 -2이다. $\therefore\ k<-2$

(i), (ii)에 의하여 구하는 k의 값의 범위는

$k=-1$ 또는 $k<-2$이다.

25 답 ①

함수 $y=-\sqrt{x+2}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=-x+k$가 점 $(-2,\ 0)$을 지나거나 직선 $y=-x+k$가 $(-2,\ 0)$을 지날 때와 직선 $y=-x+k$가 함수 $y=-\sqrt{x+2}$의 그래프와 접할 때 사이에 존재해야 한다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때,

$0=2+k$에서 $k=-2$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 함수 $y=-\sqrt{x+2}$의 그래프와 접할 때,

$-\sqrt{x+2}=-x+k$에서 $x+2=(-x+k)^2$

$\therefore\ x^2-(2k+1)x+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=(2k+1)^2-4(k^2-2)=0,\ 4k+9=0$

$4k=-9$

$\therefore\ k=-\dfrac{9}{4}$

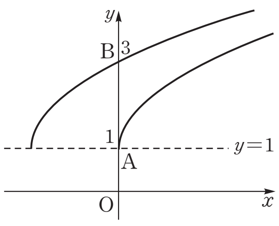
(i), (ii)에 의하여 구하는 k의 값의 범위는

$-\dfrac{9}{4}<k\le-2$이므로 $a=-\dfrac{9}{4},\ b=-2$이다.

$\therefore\ ab=\left(-\dfrac{9}{4}\right)\times(-2)=\dfrac{9}{2}$

26 답 ②

무리함수 $y=\sqrt{2x+n}+1$의 그래프와 선분 AB가 만나도록 하는 n의 값은 함수 $y=\sqrt{2x+n}+1$의 그래프가 점 A를 지날 때보다는 크거나 같고, 점 B를 지날 때보다는 작거나 같아야 한다.



(i) 점 $(0,\ 1)$을 지날 때,

$\sqrt{n}+1=1$에서 $\sqrt{n}=0$ $\quad\therefore\ n=0$

(ii) 점 $(0,\ 3)$을 지날 때,

$\sqrt{n}+1=3$에서 $\sqrt{n}=2$ $\quad\therefore\ n=4$

(i), (ii)에서 n의 값의 범위는 $0\le n\le4$이므로 자연수 n의 개수는 1, 2, 3, 4의 4이다.

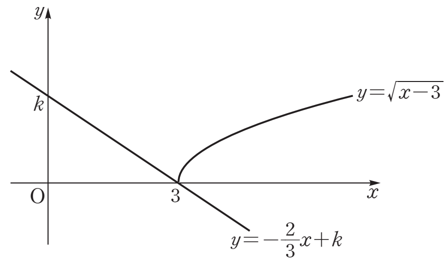
TIP

쉽게 생각해 보면 함수 $y=\sqrt{2x+n}+1$의 $x=0$일 때의 함숫값이 1보다 크거나 같고 3보다 작거나 같아야 한다.
즉, $1\le\sqrt{n}+1\le3$에서 $0\le\sqrt{n}\le2$
$\therefore\ 0\le n\le4$

27 답 ①

$n(A\cap B)>0$이므로 함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{2}{3}x+k$가 만나야 한다.

함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{2}{3}x+k$가 만나려면 그림과 같이 직선의 y절편 k는 직선이 점 $(3,\ 0)$을 지날 때의 y절편보다 크거나 같아야 한다.



이때 직선 $y=-\dfrac{2}{3}x+k$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때의 k의 값은

$0=-\dfrac{2}{3}\times3+k$에서 $k=2$

따라서 $k\ge2$이어야 하므로 k의 최솟값은 2이다.

28 답 ①

$f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로

$-\sqrt{3a-2}+4=3$에서 $\sqrt{3a-2}=1$

$3a-2=1,\ 3a=3$ $\quad\therefore\ a=1$

$\therefore\ f^{-1}(3)=1$

TIP

역함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$가 성립한다.

29 답 ④

$y=\sqrt{2-x}+3$에서 $\sqrt{2-x}=y-3$

양변을 제곱하면 $2-x=(y-3)^2$

$x=-(y-3)^2+2$

여기서 $x,\ y$를 서로 바꾸면

$y=-(x-3)^2+2=-x^2+6x-7$

이때 함수 $y=\sqrt{2-x}+3$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge3\}$이다.

따라서 역함수는 $y=-x^2+6x-7\ (x\ge3)$이므로

$a=6,\ b=-7,\ c=3$

$\therefore\ a-b+c=6-(-7)+3=16$

30 답 ②

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(-2)=2$에서 $f(2)=-2$, $\sqrt{4+k}-4=-2$

$\sqrt{4+k}=2$, $4+k=4$

$\therefore k=0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{2x}-4$

한편, $g(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$\sqrt{2a}-4=2$, $\sqrt{2a}=6$, $2a=36$ $\quad\therefore a=18$

$\therefore g(2)=18$

31 답 ③

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(-1)=0$에서 $f(0)=-1$, $-\sqrt{k}+2=-1$

$\sqrt{k}=3$ $\quad\therefore k=9 \Rightarrow f(x)=-\sqrt{9-x}+2$

이때 $9-x\geq 0$에서 $x\leq 9$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x|x\leq 9\}$이고 함수 $g(x)$의 치역은 함수 $f(x)$의 정의역과 같으므로 함수 $g(x)$의 치역은 $\{y|y\leq 9\}$이다.

32 답 ③

두 함수 $y=\sqrt{x+a}+b$, $y=x^2+4x+2(x\geq -2)$는 서로 역함수 관계이다.

$y=\sqrt{x+a}+b$에서 $y-b=\sqrt{x+a}$, $(y-b)^2=x+a$

$\therefore x=(y-b)^2-a$

여기서 x, y를 서로 바꾸면

$y=(x-b)^2-a=x^2-2bx+b^2-a$

이것이 $y=x^2+4x+2$와 같으므로

$-2b=4$에서 $b=-2$

$b^2-a=2$에서 $4-a=2$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore a+b=2+(-2)=0$

33 답 ②

주어진 그래프에 의하여 $f(x)=\sqrt{k(x+1)}-1(k\neq 0)$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$\sqrt{k}-1=1$에서 $\sqrt{k}=2$

$\therefore k=4 \Rightarrow f(x)=\sqrt{4(x+1)}-1$

또한, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 $\sqrt{4(x+1)}-1=x$에서 $\sqrt{4x+4}=x+1$

$4x+4=(x+1)^2$, $x^2-2x-3=0$, $(x-3)(x+1)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=-1$

따라서 제1사분면 위에 있는 교점의 좌표는 $(3, 3)$이므로

$a=3$, $b=3$ $\quad\therefore ab=3\times 3=9$

34 답 ①

$f(3)=\sqrt{4}-2=0$, $f(0)=\sqrt{1}-2=-1$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f)(3)&=f(f(f(3)))=f(f(0))=f(-1)\\&=\sqrt{-1+1}-2=-2\end{aligned}$$

35 답 ①

$f^{-1}\circ f=I$(I는 항등함수)이므로

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(2)=f^{-1}(2)$

이때 $f^{-1}(2)=a$라 하면 $f(a)=2$에서

$\sqrt{2a+3}=2$, $2a+3=4$, $2a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore (f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(2)=f^{-1}(2)=\frac{1}{2}$

36 답 ③

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(2)=(g^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(f(2))$

이때 $f(2)=-\sqrt{2+2}+3=1$이므로

$g^{-1}(f(2))=g^{-1}(1)$이고 $g^{-1}(1)=a$라 하면

$g(a)=1$에서 $\sqrt{1-2a}=1$, $1-2a=1$

$2a=0$ $\quad\therefore a=0$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(2)=g^{-1}(1)=0$

심플 정리

[역함수의 성질]

(1) $(f^{-1})^{-1}=f$

(2) $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$($I$는 항등함수)

(3) $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

37 답 ④

$f^{-1}\circ f=I$(I는 항등함수)이므로

$$\begin{aligned}(f\circ(f\circ g^{-1})^{-1}\circ f)(3)&=(f\circ g\circ f^{-1}\circ f)(3)\\&=(f\circ g)(3)\\&=f(g(3))=f(\sqrt{5})\\&=(\sqrt{5})^2-1\\&=4\end{aligned}$$

연습 문제 [Q~R] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 120~121

01 답 ②

$-2x+a\geq 0$에서 $-2x\geq -a$ $\quad\therefore x\leq \frac{a}{2}$

즉, 함수 $f(x)=\sqrt{-2x+a}+b$의 정의역은 $\left\{x\middle|x\leq\frac{a}{2}\right\}$이고, 치역은 $\{y|y\geq b\}$이므로 $\frac{a}{2}=4$에서 $a=8$이고, $b=-1$이다.

따라서 $f(x)=\sqrt{-2x+8}-1$이므로

$f(-4)=\sqrt{8+8}-1=3$

02 답 ⑤

$y=\sqrt{x+1}+k$에 $x=3$, $y=7$을 대입하면

$7=\sqrt{3+1}+k$에서 $7=2+k$

$\therefore k=5$

03 답 ③

주어진 그래프가 점 $(2,\ 1)$에서 왼쪽 위로 향하므로

$f(x)=\sqrt{-(x-2)}+1=\sqrt{-x+2}+1$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $a+b=2+1=3$

04 답 ①

함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{-ax}$

이 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{-a(x-2)}+3$

이때 함수 $y=\sqrt{-a(x-2)}+3$의 그래프가 점 $(3,\ 5)$를 지나므로 $5=\sqrt{-a}+3$에서 $\sqrt{-a}=2$, $-a=4$

$\therefore a=-4$

> **[대칭이동된 그래프의 식]** 심플 정리
>
> 함수 $y=f(x)$의 그래프를
> (1) x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-f(x)$
> (2) y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=f(-x)$
> (3) 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-f(-x)$

05 답 ③

함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 $y=-\sqrt{2(x-1)}+m$이고, 이 그래프는 점 $(1,\ m)$에서 오른쪽 아래로 향하므로 x가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $2(x-1)\geq 0$에서 $x-1\geq 0$ $\quad\therefore x\geq 1$

즉, $y=-\sqrt{2(x-1)}+m$의 정의역이 $\{x|x\geq 1\}$이므로 $x=1$일 때, 최댓값 m을 갖는다.

따라서 $m=4$, $n=1$이므로 $m-n=4-1=3$

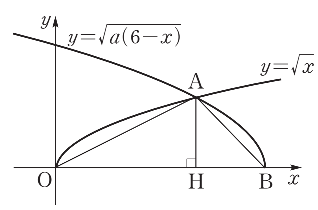
> **[그래프의 평행이동]** 심플 정리
>
> 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 x 대신 $x-m$을, y 대신 $y-n$을 대입하여 구한다. 즉, 평행이동한 그래프의 식은 $y-n=f(x-m)$이다.

06 답 ②

> 함수 $y=\sqrt{a(6-x)}\,(a>0)$의 그래프와 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프가 만나는 점을 A라 하자. 원점 O와 점 B$(6,\ 0)$에 대하여 삼각형 AOB의 넓이가 6일 때, 상수 a의 값은?
>
> 두 함수식을 연립하여 점 A의 좌표를 구할 수 있지만 두 함수의 그래프를 그리고 삼각형 AOB의 넓이를 이용하여 점 A의 좌표를 구하는 것이 더 간편해.
>
> ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1st 삼각형 AOB의 넓이를 이용하여 점 A의 y좌표를 구하자.

함수 $y=\sqrt{a(6-x)}=\sqrt{-a(x-6)}$의 그래프는 점 B$(6,\ 0)$을 지나고 $a>0$에서 $-a<0$이므로 그림과 같이 왼쪽 위로 향하는 곡선이다.



이때 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AOB의 넓이가 6이므로

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times 6\times\overline{AH}=6$

$\therefore \overline{AH}=2$

2nd 점 A가 두 무리함수의 그래프의 교점임을 이용하여 a의 값을 구하자.

즉, 점 A의 y좌표는 2이므로 $\sqrt{x}=2$에서 $x=4$

점 A는 무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 점이야.

따라서 점 A의 좌표는 $(4,\ 2)$이므로

$\sqrt{a(6-4)}=2$에서 $\sqrt{2a}=2$, $2a=4$

점 A는 무리함수 $y=\sqrt{a(6-x)}$의 그래프 위의 점이기도 해.

$\therefore a=2$

다른 풀이

$\sqrt{a(6-x)}=\sqrt{x}$에서

$6a-ax=x$, $(a+1)x=6a$

$\therefore x=\frac{6a}{a+1} \Rightarrow A\left(\frac{6a}{a+1},\ \sqrt{\frac{6a}{a+1}}\right)$

이때 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AOB의 넓이가 6이므로

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{\frac{6a}{a+1}}=6$

선분 AH의 길이는 점 A의 y좌표의 절댓값과 같아.

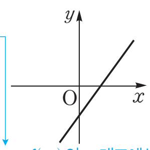
$\sqrt{\frac{6a}{a+1}}=2$, $\frac{6a}{a+1}=4$

$6a=4a+4$, $2a=4$

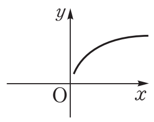
$\therefore a=2$

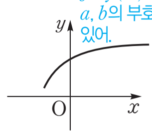
07 답 ⑤

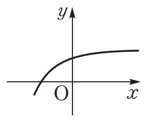
일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 무리함수 $y=a\sqrt{bx+a}+a$의 그래프의 개형은? (단, a, b는 상수)

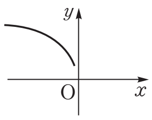


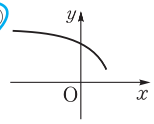
$y=f(x)$의 그래프에서 a, b의 부호를 결정할 수 있어.

①


②


③


④


⑤


1st a, b의 부호를 결정하자.

주어진 일차함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기는 양수이고, y절편은 음수이므로 $a>0$, $b<0$

직선 $y=ax+b$에서 a는 직선의 기울기를, b는 y절편을, $-\frac{b}{a}$는 x절편을 의미해.

2nd a, b의 부호로 무리함수 $y=a\sqrt{bx+a}+a$의 그래프의 개형을 그리자.

이 함수식에서 a로 그래프가 위쪽으로 향하는지, 아래쪽으로 향하는지 알 수 있고, b로 왼쪽으로 향하는지, 오른쪽으로 향하는지 알 수 있어.

$y=a\sqrt{bx+a}+a=a\sqrt{b\left(x+\frac{a}{b}\right)}+a$에서 $a>0$, $b<0$이므로 이 함수의 그래프는 왼쪽 위로 향하는 그래프이다.

이때 $bx+a\geq0$에서 $x\leq-\frac{a}{b}$이므로 정의역은 $\left\{x\middle|x\leq-\frac{a}{b}\right\}$이고 치역은 $\{y|y\geq a\}$이다.

즉, 이 함수의 그래프는 제1사분면 위의 점 $\left(-\frac{a}{b},\ a\right)$에서 시작하여 왼쪽 위로 향하는 그래프이다.

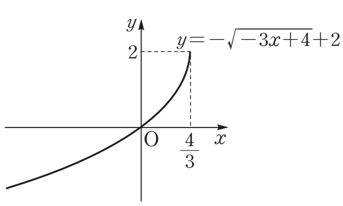
따라서 $y=a\sqrt{bx+a}+a$의 그래프의 개형은 ⑤와 같다.

08 답 ③

함수 $f(x)=-\sqrt{-3x+4}+2=-\sqrt{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+2$에서

ㄱ. 정의역은 $\left\{x\middle|x\leq\frac{4}{3}\right\}$이고, 치역은 $\{y|y\leq2\}$이다. (참)

ㄴ. $x=0$일 때, $y=-\sqrt{4}+2=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지난다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 제1, 3사분면을 지난다. (거짓)



ㄷ. $f(1)=-\sqrt{-3+4}+2=-1+2=1$이므로 $f^{-1}(1)=1$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

09 답 4

함수 $y=\sqrt{k-3x}+1=\sqrt{-3\left(x-\frac{k}{3}\right)}+1$의 그래프는 점 $\left(\frac{k}{3},\ 1\right)$에서 시작하여 왼쪽 위로 향하는 그래프이므로

$x=-2$일 때 최댓값을, $x=1$일 때 최솟값을 갖는다.

이때 최댓값이 4이므로 $\sqrt{k+6}+1=4$에서

$\sqrt{k+6}=3$, $k+6=9$ $\qquad\therefore k=3$

따라서 $y=\sqrt{3-3x}+1$이고 최솟값이 m이므로

$m=\sqrt{3-3}+1=1$

$\therefore k+m=3+1=4$

10 답 ②

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$에서 시작하여 왼쪽 아래로 향하므로 음수 a에 대하여 $f(x)=-\sqrt{a(x-1)}$이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 $-\sqrt{-a}=-2$에서

$\sqrt{-a}=2$, $-a=4$ $\qquad\therefore a=-4$

$\therefore f(x)=-\sqrt{-4(x-1)}=-\sqrt{-4x+4}$

$y=-\sqrt{-4x+4}$라 하면

$y^2=-4x+4$에서 $4x=-y^2+4$

$\therefore x=-\frac{1}{4}y^2+1$

여기서 x, y를 서로 바꾸면

$y=-\frac{1}{4}x^2+1$

한편, 함수 $f(x)$의 치역이 $\{y|y\leq0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\leq0\}$이다.

따라서 구하는 역함수는

$y=-\frac{1}{4}x^2+1\ (x\leq0)$이다.

11 답 ①

$f(2)=3$에서 $\sqrt{2a+b}=3$

$\therefore 2a+b=9$ ⋯ ㉠

또한, 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(5)=10$에서 $f(10)=5$

즉, $\sqrt{10a+b}=5$에서

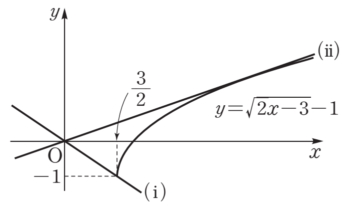
$10a+b=25$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=2$, $b=5$

$\therefore a+b=2+5=7$

12 답 1



직선 $y=mx$는 m의 값에 관계없이 원점을 지나므로 직선 $y=mx$가 함수 $y=\sqrt{2x-3}-1=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}-1$의 그래프와 만나려면 m의 값은 점 $\left(\frac{3}{2},\ -1\right)$을 지날 때의 기울기보다 크거나 같아야 하고, 접할 때의 기울기보다 작거나 같아야 한다. … Ⅰ

(ⅰ) 직선 $y=mx$가 점 $\left(\frac{3}{2},\ -1\right)$을 지날 때의 m의 값은

$\frac{3}{2}m=-1$에서 $m=-\frac{2}{3}$이므로 $m\geq-\frac{2}{3}$

(ⅱ) 직선 $y=mx$와 함수 $y=\sqrt{2x-3}-1$의 그래프가 접할 때의 m의 값은

$mx=\sqrt{2x-3}-1$에서 $mx+1=\sqrt{2x-3}$

$m^2x^2+2mx+1=2x-3$

$\therefore\ m^2x^2+2(m-1)x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-4m^2=0$에서

$3m^2+2m-1=0,\ (m+1)(3m-1)=0$

$\therefore\ m=-1$ 또는 $m=\frac{1}{3}$

그런데 접하려면 $m>0$이어야 하므로 $m=\frac{1}{3}$이다.

$\therefore\ m\leq\frac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 m의 값의 범위는 $-\frac{2}{3}\leq m\leq\frac{1}{3}$이다. … Ⅱ

따라서 $a=-\frac{2}{3},\ b=\frac{1}{3}$이므로 $b-a=\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=1$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	직선 $y=mx$와 함수 $y=\sqrt{2x-3}-1$이 만날 때의 그래프를 유추한다.	30%
Ⅱ	m의 값의 범위를 구한다.	50%
Ⅲ	$b-a$의 값을 구한다.	20%

TIP

무리함수 $y=\pm\sqrt{ax+b}+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 접할 때, 방정식 $\pm\sqrt{ax+b}+c=mx+n$을 이차방정식으로 변형한 후, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하고 $D=0$임을 이용한다.

13 답 ③

함수 $f(x)=\sqrt{3x-a}+1$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 교점 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$일 때, 상수 a의 값은?

무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있어.

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

1st 교점이 $y=x$ 위에 있음을 이용해.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 두 교점의 좌표를 $(\alpha,\ \alpha),\ (\beta,\ \beta)$라 하면 두 교점 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=3\sqrt{2}$에서

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 사이의 거리를 d라 하면 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=3\sqrt{2},\ \sqrt{(\alpha-\beta)^2}=3$

$\therefore\ (\alpha-\beta)^2=9$

2nd 방정식 $f(x)=x$에서 $\alpha,\ \beta$ 사이의 관계식을 구해서 a의 값을 구해.

한편, $\sqrt{3x-a}+1=x$에서 $\sqrt{3x-a}=x-1$

$3x-a=(x-1)^2$　$\therefore\ x^2-5x+a+1=0$

이 이차방정식의 서로 다른 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=a+1$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$

따라서 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$9=25-4(a+1),\ 4(a+1)=16,\ a+1=4$

$\therefore\ a=3$

14 답 ②

$f(x)=-2x+5$에서 $f(0)=5$

$\therefore\ (g\circ f)(0)=g(f(0))=g(5)=-\sqrt{5+4}-1=-4$

15 답 ②

$(g\circ f^{-1})^{-1}(2)=(f\circ g^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))$ … ㉠

이때 $g^{-1}(2)=a$라 하면 $g(a)=2$이므로

$\sqrt{a+2}-1=2$에서 $\sqrt{a+2}=3,\ a+2=9$

$\therefore\ a=7 \Rightarrow g^{-1}(2)=7$

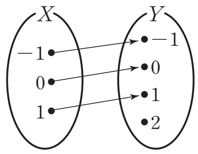
따라서 ㉠에 의하여

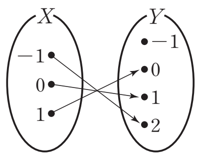
$(g\circ f^{-1})^{-1}(2)=f(g^{-1}(2))=f(7)=\frac{2}{7-1}+3=\frac{10}{3}$

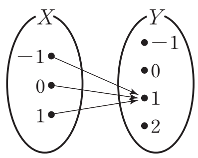
심플(고등자이)(해설)(2단원)044-091.indd 86　2017. 9. 22. 오후 8:51

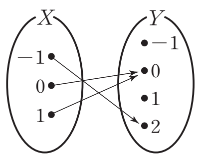
Ⅴ 대단원 TEST [J~R] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 122~125

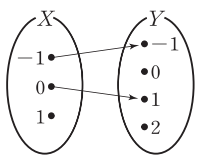
01 답 ⑤

①


②


③


④


⑤


따라서 함수가 아닌 것은 ⑤이다.

02 답 ③

$f(x)=ax-2a+1$이 X에서 X로의 함수가 되려면 치역이 공역의 부분집합이어야 하므로

$0\le f(0)\le 3$에서 $0\le -2a+1\le 3$

$-1\le -2a\le 2 \qquad \therefore -1\le a\le \frac{1}{2}$ ⋯ ㉠

$0\le f(3)\le 3$에서 $0\le 3a-2a+1\le 3$

$0\le a+1\le 3 \qquad \therefore -1\le a\le 2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a의 값의 범위는 $-1\le a\le \frac{1}{2}$

이므로 정수 a는 -1, 0이다.

따라서 모든 정수 a의 값의 합은 $(-1)+0=-1$이다.

03 답 ①

$f=g$이므로 $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$이다.

$f(1)=3-4=-1$, $g(1)=1+a+b$이므로

$-1=1+a+b$에서 $a+b=-2$ ⋯ ㉠

$f(2)=6-4=2$, $g(2)=4+2a+b$이므로

$2=4+2a+b$에서 $2a+b=-2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=0$, $b=-2$

$\therefore a+b=0+(-2)=-2$

04 답 ③

집합 $X=\{-2, -1, 3\}$에 대하여 함수

$f: X \longrightarrow X$가

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-2 & (x<0) \\ 3 & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 항등함수가 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

함수 $f(x)$가 항등함수니까 $f(x)=x$가 성립해야 해. 즉, 정의역의 어떤 x를 대입해도 자기 자신이 되어야 해.

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

1st 함수 $f(x)$가 항등함수가 되도록 하는 a, b의 값을 구하자.

$f: X \longrightarrow X$가 항등함수가 되기 위해서는

$f(-2)=-2$, $f(-1)=-1$, $f(3)=3$이어야 한다.

$f(3)=3$ $3\ge 0$이므로 $f(3)=3$이야.

또, $f(-2)=4a-2b-2=-2$에서 $2a-b=0$ ⋯ ㉠

$f(-1)=a-b-2=-1$에서 $a-b=1$ ⋯ ㉡

$-2<0$이므로 $x=-2$를 $f(x)=ax^2+bx-2$에 대입해야 해.

㉠, ㉡을 연립하면

$a=-1$, $b=-2$

$\therefore a+b=(-1)+(-2)=-3$

05 답 7

실수 전체의 집합 R에 대하여 함수 $f: R \longrightarrow R$가

$f(x)=a|x+2|-4x$

로 정의될 때, 이 함수가 일대일대응이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

함수 f가 일대일대응이려면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가하던지, $f(x)$의 값이 감소해야 해. 즉, $x=-2$를 경계로 나누어진 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 하는 거야.

1st x의 범위를 나누어 함수 $f(x)$의 식을 구하자.

(i) $x<-2$일 때, $x<-2$이면 $x+2<0$이므로 절댓값을 벗기기 위해서는 $x+2$에 $-$를 붙여줘야 해.

$f(x)=a(-x-2)-4x=-(a+4)x-2a$

(ii) $x\ge -2$일 때, $x\ge -2$이면 $x+2\ge 0$이므로 절댓값을 벗겨도 부호는 바뀌지 않아.

$f(x)=a(x+2)-4x=(a-4)x+2a$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases} -(a+4)x-2a & (x<-2) \\ (a-4)x+2a & (x\ge -2)\end{cases}$$

2nd 함수 f가 일대일대응이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하자.

이때 함수 f가 일대일대응이므로 직선

$y=-(a+4)x-2a$의 기울기 $-(a+4)$와 직선

$y=(a-4)x+2a$의 기울기 $a-4$의 기울기의 부호가 같아야 한다.

즉, $-(a+4)(a-4)>0$에서 $(a+4)(a-4)<0$

$\therefore -4<a<4$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이다.

06 답 ③

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=-x+1$에서

$g(-2x+3)=-x+1$ ⋯ ㉠

이때 $-2x+3=3$에서 $-2x=0$ $\quad\therefore x=0$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $g(3)=1$

다른 풀이

$g(-2x+3)=-x+1$에서 $-2x+3=t$라 하면

$2x=-t+3 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}$

즉, $g(t)=-\left(-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\right)+1=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$이므로

$g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\therefore g(3)=\frac{1}{2}\times3-\frac{1}{2}=1$

07 답 ④

$(g\circ h)(x)=k(x)=\frac{3}{2}x-5$라 하면

$(g\circ h)(2)=k(2)=\frac{3}{2}\times2-5=-2$이므로

$((f\circ g)\circ h)(2)=(f\circ(g\circ h))(2)$

$=(f\circ k)(2)=f(k(2))=f(-2)$

$=-3\times(-2)+6=12$

08 답 ②

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(a^2-1)=2(a^2-1)-1$

$=2a^2-3=5$

에서 $2a^2=8,\ a^2=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

09 답 8

$f^1(x)=f(x)=x+3$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x+3)$

$=(x+3)+3=x+6$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x+6)$

$=(x+6)+3=x+9$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(x+9)$

$=(x+9)+3=x+12$ ⋯ Ⅰ

⋮

$f^n(x)=x+3n$ ⋯ Ⅱ

$f^k(6)=30$에서 $6+3k=30,\ 3k=24$

$\therefore k=8$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$f^1(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x)$, ⋯를 차례로 구한다.	30%
Ⅱ	$f^n(x)$의 식을 유추한다.	40%
Ⅲ	$f^k(6)=30$을 만족시키는 자연수 k의 값을 구한다.	30%

10 답 ①

일차함수 $f(x)=mx-2$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$가 서로 같을 때, $f(-1)+f^{-1}(2)$의 값은? 일차함수와 그 역함수가 서로 같으므로 역함수를 구해서 계수를 비교해.

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

1st 역함수 $f^{-1}(x)$를 구하자.

$y=mx-2$에서 $mx=y+2$

$\therefore x=\frac{1}{m}y+\frac{2}{m}$ $f(x)$는 일차함수이므로 일차항의 계수 m이 0이 아니니까 양변을 m으로 나눌 수 있어.

여기서 x, y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{m}x+\frac{2}{m}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{m}x+\frac{2}{m}$

2nd $f(x)$와 $f^{-1}(x)$가 서로 같음을 이용하여 m의 값을 구하자.

$f=f^{-1}$이므로 $\frac{1}{m}=m,\ \frac{2}{m}=-2$에서 $m=-1$

따라서 $f(x)=-x-2$이므로 $f(-1)=-1$이고

$f^{-1}(x)=-x-2$이므로 $f^{-1}(2)=-4$

$\therefore f(-1)+f^{-1}(2)=(-1)+(-4)=-5$

다른 풀이

일차함수 $f(x)=mx-2$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$가 서로 같으므로 $m=-1$

즉, $f(x)=-x-2$이므로 $f(-1)=-1$이고

$f^{-1}(2)=a$라 하면 $f(a)=2$에서 $-a-2=2$

$\therefore a=-4 \Rightarrow f^{-1}(2)=-4$ 서로 역함수 관계인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=b$이면 $g(b)=a$야.

$\therefore f(-1)+f^{-1}(2)=(-1)+(-4)=-5$

TIP

$y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 일차함수 $y=mx-2$와 그 역함수가 서로 같으면 기울기 m의 값은 -1이어야 한다.

11 답 ④

일차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수

$y=f(2x+3)$

의 역함수를 $g(x)$에 대한 식으로 나타내면

$y=ag(x)+b$이다. 이때 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? 역함수를 구한 후, $g(x)$로 표현해 봐.

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$
④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

1st 역함수를 구하려면 x와 y의 자리를 바꾼 후 y에 대한 식으로 정리하면 돼.

$y=f(2x+3)$에서 x, y를 서로 바꾸면

$x=f(2y+3)$

이때 역함수의 성질에 의하여 $f^{-1}(x)=2y+3$
조건에서 $f^{-1}(x)=g(x)$이므로 $g(x)=2y+3$

y에 대한 식으로 정리하면 $y=\frac{1}{2}g(x)-\frac{3}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$이므로

x에 대하여 푸는 대신 f^{-1}를 양변에 취하면 $f^{-1}(x)=(f^{-1}\circ f)(2y+3)=2y+3$

$a+b=\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$

12 답 ②

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x+6)$

$=\frac{1}{2}(4x+6)-1=2x+2$

이때 $y=2x+2$라 하면 $2x=y-2$에서 $x=\frac{1}{2}y-1$

여기서 x, y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-1$

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$의 역함수는 $y=\frac{1}{2}x-1$이다.

13 답 ①

$f\circ h=g$에서 $f(h(x))=g(x)$

$\frac{4}{3}h(x)-1=-6x+2$, $\frac{4}{3}h(x)=-6x+3$

$\therefore h(x)=-\frac{9}{2}x+\frac{9}{4}$

이때 $h^{-1}(3)=a$라 하면 $h(a)=3$이므로

$-\frac{9}{2}a+\frac{9}{4}=3$, $-\frac{9}{2}a=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{6}$

$\therefore h^{-1}(3)=-\frac{1}{6}$

14 답 ②

점 $(-1, 4)$는 함수 $f(x)=mx+n$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이므로
$f(-1)=4$이고 $f^{-1}(-1)=4$에서 $f(4)=-1$
$f(-1)=-m+n=4$ ⋯ ㉠, $f(4)=4m+n=-1$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $m=-1$, $n=3$
따라서 $f(x)=-x+3$이므로 $f(1)=-1+3=2$

다른 풀이

함수 $f(x)=mx+n$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재해야 한다. 그런데 교점이 $(-1, 4)$로 직선 $y=x$ 위에 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$와 역함수 $f^{-1}(x)$는 서로 같은 함수이다. 따라서 $m=-1$이므로 $f(x)=-x+n$이고 점 $(-1, 4)$를 지나므로 $f(-1)=1+n=4$에서 $n=3$이다.
$\therefore f(x)=-x+3$
(이하 동일)

15 답 ③

그림에서 $(g\circ f)(1)=8$, $(g\circ f)(2)=9$, $(g\circ f)(3)=7$
한편, $g(6)=9$이고 함수 g는 일대일대응이므로
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=9$에서 $f(2)=6$
즉, $f(1)=4$, $f(2)=6$이고 함수 f는 일대일대응이므로
$f(3)=5$
또, $(g\circ f)(3)=g(f(3))=7$에서 $f(3)=5$이므로 $g(5)=7$
$\therefore f(2)+g(5)=6+7=13$

16 답 ③

집합 $X=\{x\,|\,x\geq a\}$에서 집합 $Y=\{y\,|\,y\geq -a\}$로의 함수 $f(x)=x^2+2x$가 역함수가 존재하도록 하는 상수 a의 값은?

함수 f의 역함수가 존재하면 함수 f는 일대일대응이므로 치역과 공역이 같아야 해.

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

1st 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 a의 값을 구해.

$f(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$이고, 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로

일대일함수이면서 공역과 치역이 같아야 해.

$a\geq -1$, $f(a)=-a$

공역과 치역이 같아야 하니까 $f(a)=-a$를 만족시켜야 해.

일대일함수이어야 하니까 $a\geq -1$이야.

즉, $a^2+2a=-a$에서 $a^2+3a=0$, $a(a+3)=0$
$\therefore a=0$ 또는 $a=-3$
그런데 $a\geq -1$이므로 $a=0$

심플 정리

[일대일대응이 되기 위한 조건]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 일대일대응이려면
(i) x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 증가하거나 감소해야 한다.
(ii) 정의역의 양 끝값의 함숫값이 공역의 양 끝값과 같아야 한다.

17 답 ⑤

$\frac{x^2+5x-6}{x^2-3x-4}\div A=\frac{x-1}{x-4}$에서

$A\times\frac{x-1}{x-4}=\frac{(x+6)(x-1)}{(x-4)(x+1)}$

$\therefore A=\frac{(x+6)(x-1)}{(x-4)(x+1)}\div\frac{x-1}{x-4}$

$=\frac{(x+6)(x-1)}{(x-4)(x+1)}\times\frac{x-4}{x-1}=\frac{x+6}{x+1}$

18 답 ②

$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}=2\sqrt{x+1}$

따라서 $x=8$일 때 구하는 식의 값은
$2\sqrt{8+1}=2\times 3=6$

19 답 ②

$y=\dfrac{bx-5}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab-5}{x+a}=\dfrac{-ab-5}{x+a}+b$의

그래프의 점근선은 두 직선 $x=-a$, $y=b$이다.

이때 유리함수 $y=\dfrac{bx-5}{x+a}$의 그래프의 점근선이 두 직선

$x=-1$, $y=2$이므로 $a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

> 심플 정리
>
> **[유리함수의 그래프의 점근선]**
>
> 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q(k\neq0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

20 답 2

함수 $f(x)=\dfrac{4}{x+k}+2k-3$의 그래프의 점근선은

두 직선 $x=-k$, $y=2k-3$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-k,\ 2k-3)$이다.

점 $(-k,\ 2k-3)$이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$2k-3=-2k-1$에서 $4k=2$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{2}$

즉, $f(x)=\dfrac{4}{x+\frac{1}{2}}-2$이므로

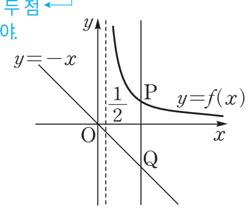
$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}-2=2$

21 답 ⑤

그림과 같이 함수 $f(x)=\dfrac{8}{2x-1}\left(x>\dfrac{1}{2}\right)$의 그래프와 직선 $y=-x$가 있다. 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=-x$와 만나는 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은?

선분 PQ의 길이는 두 점 P, Q의 y좌표의 차야.

두 점 P, Q의 x좌표는 $\dfrac{1}{2}$보다 크다는 거야.



① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$

④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$

1st 두 점 P, Q의 x좌표를 k라 하고 선분 PQ의 길이를 구하자.

두 점 P, Q의 x좌표를 $k\left(k>\dfrac{1}{2}\right)$라 하면 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\left(k,\ \dfrac{8}{2k-1}\right)$, $(k,\ -k)$

주어진 함수 $f(x)$는 $x>\dfrac{1}{2}$에서 정의되어 있으니까 $k>\dfrac{1}{2}$이야.

$\therefore \overline{PQ}=\dfrac{8}{2k-1}-(-k)=\dfrac{8}{2k-1}+k$

2nd 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하자.

이때 $k>\dfrac{1}{2}$에서 $2k-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\overline{PQ}=\dfrac{8}{2k-1}+k=\dfrac{8}{2k-1}+\dfrac{1}{2}(2k-1)+\dfrac{1}{2}$

$\geq2\sqrt{\dfrac{8}{2k-1}\times\dfrac{1}{2}(2k-1)}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$

$\left(\text{단, 등호는 } k=\dfrac{5}{2}\text{일 때 성립}\right)$

$\dfrac{8}{2k-1}=\dfrac{1}{2}(2k-1)$에서 $k=\dfrac{5}{2}\left(\because k>\dfrac{1}{2}\right)$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\dfrac{9}{2}$이다.

22 답 ⑤

유리함수 $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+3}$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다. $p-q$의 값은?

유리함수의 역함수도 유리함수야.

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

1st 역함수 $f^{-1}(x)$를 구하자.

$y=\dfrac{2x+5}{x+3}$에서 $(x+3)y=2x+5$

$(y-2)x=-3y+5$

$\therefore x=\dfrac{-3y+5}{y-2}$

여기서 x, y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{-3x+5}{x-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-3x+5}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-3$

2nd 점 $(p,\ q)$의 좌표를 구해.

따라서 함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2,\ -3)$에 대하여 대칭이므로 $p=2$, $q=-3$

유리함수의 그래프는 두 점근선의 교점에 대하여 대칭이야. 여기서는 두 점근선이 $x=2$, $y=-3$이므로 교점은 $(2,\ -3)$이야.

$\therefore p-q=2-(-3)=5$

> TIP
>
> 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수는 a와 d의 위치와 부호를 바꾸면 된다. 즉, $f(x)$의 역함수는 $f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

23 답 ⑤

$h=g\circ(f\circ g)^{-1}=g\circ(g^{-1}\circ f^{-1})$

$=(g\circ g^{-1})\circ f^{-1}=I\circ f^{-1}=f^{-1}$ (I는 항등함수)

이므로 $h(2)=f^{-1}(2)=5$에서 $f(5)=2$

$\sqrt{5-k}=2$, $5-k=4$ $\quad\therefore k=1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-1}$

즉, $h(k)=h(1)=f^{-1}(1)$이므로 $f^{-1}(1)=a$라 하면

$f(a)=1$에서 $\sqrt{a-1}=1$, $a-1=1$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore h(k)=f^{-1}(1)=2$

24 답 4

$y=\dfrac{6}{2x-1}$에서 y의 값이 정수이려면 $2x-1$의 값은

±1 또는 ±2 또는 ±3 또는 ±6이어야 한다. … Ⅰ

이때 x의 값도 정수이려면 $2x-1$의 값은 ±1 또는 ±3이어야 한다. … Ⅱ

$2x-1=-1$에서 $x=0$이고 $y=-6$

$2x-1=1$에서 $x=1$이고 $y=6$

$2x-1=-3$에서 $x=-1$이고 $y=-2$

$2x-1=3$에서 $x=2$이고 $y=2$

따라서 유리함수 $y=\dfrac{6}{2x-1}$의 그래프 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$(0,\ -6)$, $(1,\ 6)$, $(-1,\ -2)$, $(2,\ 2)$의 4이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	y의 값이 정수가 되도록 하는 $2x-1$의 값을 구한다.	30%
Ⅱ	x의 값이 정수가 되도록 하는 $2x-1$의 값을 구한다.	30%
Ⅲ	x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구한다.	40%

25 답 ③

주어진 유리함수 $y=\dfrac{a}{x-b}+c$의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=1$, $y=3$이므로 $b=1$, $c=3$

$\therefore y=\dfrac{a}{x-1}+3$

또, 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4=-a+3 \qquad \therefore a=-1$

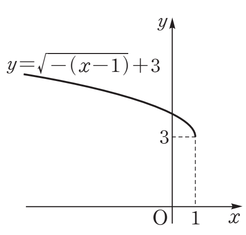
따라서 무리함수

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{-x+1}+3=\sqrt{-(x-1)}+3$에 대하여

ㄱ. 정의역은 $\{x\,|\,x\le1\}$, 치역은$\{y\,|\,y\ge3\}$이다. (참)

ㄴ. 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=\sqrt{-(x-1)}+3$의 그래프는 다음과 같이 제1, 2사분면을 지난다. (참)



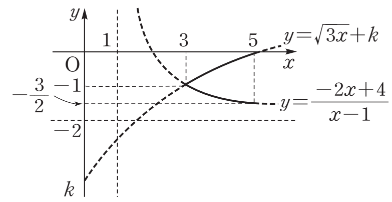
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

TIP

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq0)$의 그래프는 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 꼴로 변형하여 그린다.
이때 $a>0$이면 정의역은 $\{x\,|\,x\ge p\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge q\}$이고 $a<0$이면 정의역은 $\{x\,|\,x\le p\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge q\}$이다.

26 답 16

$3\le x\le5$에서 정의된 함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}-2$의 그래프는 그림과 같다.



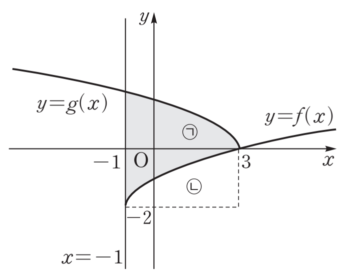
따라서 두 함수의 그래프가 한 점에서 만나려면 k의 값은 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 점 $(3,\ -1)$을 지날 때보다 작거나 같고, 점 $\left(5,\ -\dfrac{3}{2}\right)$을 지날 때보다 크거나 같아야 한다.

즉, 함수 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 점 $(3,\ -1)$을 지날 때, 실수 k의 값이 최대이므로

$\sqrt{9}+k=-1 \qquad \therefore k=-4 \Rightarrow M=-4$

$\therefore M^2=(-4)^2=16$

27 답 ④



두 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}-2$,

$g(x)=\sqrt{-x+3}=\sqrt{-(x-3)}$의 그래프와 직선 $x=-1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 어두운 부분의 넓이와 같다.

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $x=-1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 ㉠은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=3$, $y=-2$로 둘러싸인 부분의 넓이 ㉡과 같다.

따라서 ㉠부분의 넓이를 대칭이동과 평행이동을 이용하여 ㉡부분으로 이동시키면 구하는 두형의 넓이는 가로의 길이가 4, 세로의 길이가 2인 직사각형의 넓이와 같으므로

$4\times2=8$

28 답 ③

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이다.

따라서 $f(-1)=g^{-1}(-1)=k$라 하면

$g(k)=-1$에서 $-k^2+6k-6=-1$, $k^2-6k+5=0$

$(k-1)(k-5)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=5$

그런데 $k\ge3$이므로 $k=5$

$\therefore f(-1)=5$

다른 풀이

$y=\sqrt{-x+a}+b$라 하면 $y-b=\sqrt{-x+a}$

$(y-b)^2=-x+a$

$\therefore\ x=-(y-b)^2+a$

여기서 x, y를 서로 바꾸면

$y=-(x-b)^2+a=-x^2+2bx-b^2+a\ (x\geq b)$

이것이 $g(x)=-x^2+6x-6\ (x\geq 3)$과 같으므로

$2b=6$에서 $b=3$이고

$-b^2+a=-9+a=-6$에서 $a=3$

따라서 $f(x)=\sqrt{-x+3}+3$이므로

$f(-1)=\sqrt{4}+3=5$

29 답 ⑤

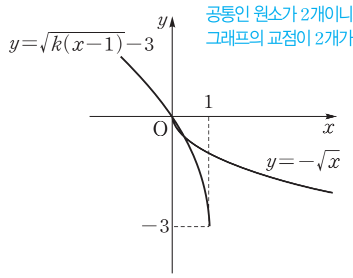
> 두 집합 $A=\{(x,\ y)\,|\,y=\sqrt{k(x-1)}-3\}$,
> $B=\{(x,\ y)\,|\,y=-\sqrt{x}\}$에 대하여 $n(A\cap B)=2$가 성립할 때, 음의 실수 k의 최솟값은?
>
> ① -5　　② -6　　③ -7
> ④ -8　　⑤ -9
>
> 두 함수 $y=\sqrt{k(x-1)}-3$, $y=-\sqrt{x}$의 그래프의 교점이 2개라는 의미야.

1st $n(A\cap B)=2$의 의미를 파악해.

두 집합 A와 B는 각각 무리함수 $y=\sqrt{k(x-1)}-3$과 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 나타내므로 $n(A\cap B)=2$가 성립하려면 두 함수의 그래프의 교점이 2개이어야 한다.

공통인 원소가 2개이니까 두 함수의 그래프의 교점이 2개가 되어야 해.

2nd 두 함수의 그래프를 그려서 음의 실수 k의 최솟값을 구해.



따라서 그림과 같이 음의 실수 k의 값이 최소인 경우는 $y=\sqrt{k(x-1)}-3$의 그래프가 원점 $(0,\ 0)$을 지날 때이므로 $0=\sqrt{-k}-3$에서

$\sqrt{-k}=3$, $-k=9$　　$\therefore\ k=-9$

음의 실수 k의 절댓값이 커질수록 $y=\sqrt{k(x-1)}-3$의 그래프는 왼쪽 위로 가파르게 증가해. 즉, 이 그래프가 원점을 지날 때 k의 값은 최소가 돼.

따라서 구하는 음의 실수 k의 최솟값은 -9이다.

Ⅵ 경우의 수

Simple S 합의 법칙과 곱의 법칙

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 128～129

01 답 사건, 경우의 수

02 답 $m+n$

03 답 $m\times n$

04 답 ○

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 답 4

09 답 5

10 답 4

홀수의 눈은 1, 3, 5로 3가지

3의 배수의 눈은 3, 6으로 2가지

그런데 3은 홀수이면서 3의 배수이므로 구하는 경우의 수는 $3+2-1=4$

11 답 10

12 답 5

13 답 25

14 답 20

15 답 45

16 답 12

17 답 40

18 답 4

x가 a, b에 곱해질 때마다 각각 하나의 항이 나오고, y도 마찬가지로 a, b에 곱해질 때마다 각각 하나의 항이 나오므로 곱의 법칙에 의하여 구하는 항의 개수는 $2\times 2=4$

19 답 6

20 답 9

21 답 18

22 답 6

23 답 5

24 답 8

24를 소인수분해하면 $24=2^3\times3$

따라서 24의 양의 약수의 개수는

$(3+1)\times(1+1)=8$

> **[약수의 개수]** 심플 정리
>
> 어떤 자연수 N이 $a^m\times b^n$(a, b는 서로 다른 소수)으로 소인수분해될 때, 자연수 N의 약수의 개수는
> $(m+1)\times(n+1)$이다.
> 이것은 a^0, a^1, a^2, $\cdots$, a^m의 $(m+1)$개와 b^0, b^1, b^2, $\cdots$, b^n의 $(n+1)$개 중에서 각각 1개씩을 선택하는 경우의 수와 같다.

25 답 9

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 130~131

26 답 ③

5의 배수가 적힌 카드는 5, 10, 15의 3장

7의 배수가 적힌 카드는 7, 14의 2장

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $3+2=5$이다.

27 답 ④

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(ii) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $3+4=7$이다.

28 답 ④

x, y가 음이 아닌 정수이므로 $2x+y$의 값도 음이 아닌 정수이다. 즉, $5\le2x+y\le6$에서

$2x+y=5$ 또는 $2x+y=6$

따라서 이 두 경우를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 다음과 같다.

(i) $2x+y=5$일 때,

(0, 5), (1, 3), (2, 1)의 3가지

(ii) $2x+y=6$일 때,

(0, 6), (1, 4), (2, 2), (3, 0)의 4가지

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $3+4=7$이다.

29 답 9

네 명의 학생 A, B, C, D의 모자를 각각 a, b, c, d라 하고 네 명의 학생 A, B, C, D가 가져가는 모자를 순서쌍 (a, b, c, d)로 나타내면

(i) A가 b를 가져가는 경우의 순서쌍은

(b, a, d, c), (b, c, d, a), (b, d, a, c)의 3가지

(ii) A가 c를 가져가는 경우의 순서쌍은

(c, a, d, b), (c, d, a, b), (c, d, b, a)의 3가지

(iii) A가 d를 가져가는 경우의 순서쌍은

(d, a, b, c), (d, c, a, b), (d, c, b, a)의 3가지

(i)~(iii)의 각 경우는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $3+3+3=9$이다.

30 답 30

온도를 선택하는 경우의 수는 5가지

바람의 세기를 선택하는 경우의 수는 3가지

바람의 방향을 선택하는 경우의 수는 2가지

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$5\times3\times2=30$이다.

31 답 20

십의 자리가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4가지

일의 자리가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times5=20$이다.

32 답 ③

0에서 9까지의 정수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9이므로 백의 자리가 될 수 있는 수는 5가지

십의 자리가 될 수 있는 수는 0, 1, 2, $\cdots$, 9의 10가지

0에서 9까지의 정수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로 일의 자리가 될 수 있는 수는 4가지

따라서 구하는 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$5\times10\times4=200$이다.

33 답 ①

첫 번째와 세 번째, 다섯 번째 순서에 여학생을 배치하는 경우의 수는

$3\times2\times1=6$

두 번째와 네 번째, 여섯 번째 순서에 남학생을 배치하는 경우의 수는

$3\times2\times1=6$

따라서 6명의 학생들이 순서를 정하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6\times6=36$

34 답 8

(ⅰ) A지점에서 출발하여 B지점을 거치지 않고 C지점으로 가는 방법의 수는 2이다.

(ⅱ) A지점에서 출발하여 B지점으로 가는 방법의 수는 3, B지점에서 출발하여 C지점으로 가는 방법의 수는 2이므로 A지점에서 출발하여 B지점을 거쳐 C지점까지 가는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3\times2=6$이다.

(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $2+6=8$이다.

35 답 ⑤

(ⅰ) A지점에서 출발하여 B지점으로 가는 방법의 수는 5

(ⅱ) B지점에서 출발하여 다시 A지점으로 돌아가는 방법의 수는 5인데 갔던 길은 다시 지나지 않으므로 이때의 방법의 수는 $5-1=4$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $5\times4=20$이다.

36 답 12

A에 칠할 수 있는 색은 3가지

B에 칠할 수 있는 색은 A의 색과 다른 2가지

C에 칠할 수 있는 색은 B의 색과 다른 2가지

따라서 칠하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times2\times2=12$이다.

다른 풀이

(ⅰ) 빨간색, 노란색, 파란색을 모두 사용하는 경우의 수는 이 세 가지 색을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $3\times2\times1=6$

(ⅱ) 빨간색, 노란색, 파란색 중에서 두 가지 색을 선택하는 경우의 수는 (빨, 노), (빨, 파), (노, 파)의 3가지이고 각 경우에 대하여 칠하는 경우의 수는 2가지이므로 이때의 경우의 수는 $3\times2=6$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $6+6=12$이다.

37 답 ①

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A의 색과 다른 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B의 색과 다른 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, C의 색과 다른 2가지

E에 칠할 수 있는 색은 C, D의 색과 다른 2가지

따라서 칠할 수 있는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times3\times2\times2\times2=96$이다.

38 답 ①

A에 칠할 수 있는 색은 4가지이다. 이때 B와 C는 같은 색을 칠하거나 다른 색을 칠할 수 있으므로 다음과 같이 경우를 나누자.

(ⅰ) B와 C에 같은 색을 칠할 때, B, C에 칠할 수 있는 색은 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C의 색과 다른 3가지이다. 따라서 이때의 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $4\times3\times3=36$이다.

(ⅱ) B와 C에 다른 색을 칠할 때, B에 칠할 수 있는 색은 A의 색과 다른 3가지이고 C에 칠할 수 있는 색은 A, B의 색과 다른 2가지이다. 마지막으로 D에 칠할 수 있는 색은 B, C의 색과 다른 2가지이다. 따라서 이때의 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $4\times3\times2\times2=48$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $36+48=84$이다.

39 답 ④

180과 216을 각각 소인수분해하면

$180=2^2\times3^2\times5$, $216=2^3\times3^3$

따라서 180과 216의 최대공약수는 $2^2\times3^2=36$이다. 이때, 180과 216의 공약수는 최대공약수 36의 약수이므로 구하는 공약수의 개수는 $(2+1)\times(2+1)=9$이다.

심플 정리

[공약수와 최대공약수]

(1) 공약수 : 두 수의 약수 중에서 공통인 약수

(2) 최대공약수 : 공약수 중에서 가장 큰 수

(3) 공약수와 최대공약수의 관계 : 두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이다.

40 답 32

구하는 경우의 수는 $2^2\times3^3\times5^2$의 약수의 개수에서 1, 2, 3, 5의 4개를 제외한 수의 개수와 같다.

$2^2\times3^3\times5^2$의 약수의 개수는

$(2+1)\times(3+1)\times(2+1)=36$이므로 구하는 경우의 수는 $36-4=32$이다.

TIP

$2^2\times3^3\times5^2$의 약수는

$2^a\times3^b\times5^c\,(a=0, 1, 2,\ b=0, 1, 2, 3,\ c=0, 1, 2)$의 꼴이다.

2^a으로 가능한 값은 2^0, 2^1, 2^2으로 3가지

3^b으로 가능한 값은 3^0, 3^1, 3^2, 3^3으로 4가지

5^c으로 가능한 값은 5^0, 5^1, 5^2으로 3가지이다.

따라서 $2^2\times3^3\times5^2$의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times4\times3=36$이다.

Simple T 순열

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 132～133

01 답 순열, ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$

02 답 계승, $n!$

03 답 1, r

04 답 $n-r$

05 답 1, 1

06 답 ○

07 답 ×

08 답 ○

09 답 ×

10 답 ×

11 답 ${}_{4}\mathrm{P}_{3}$

12 답 ${}_{5}\mathrm{P}_{3}$

13 답 ${}_{7}\mathrm{P}_{2}$

14 답 120

15 답 24

16 답 1260

$3!=3\times2\times1=6$, ${}_{7}\mathrm{P}_{3}=7\times6\times5=210$이므로

$3!\times{}_{7}\mathrm{P}_{3}=6\times210=1260$

17 답 3

$120=6\times5\times4={}_{6}\mathrm{P}_{3}$이므로 $r=3$

18 답 6

$720=1\times2\times3\times4\times5\times6=6!$이므로 $n=6$

19 답 7

${}_{n}\mathrm{P}_{3}=210$에서

$n\times(n-1)\times(n-2)=210=7\times6\times5$이므로 $n=7$

20 답 4

${}_{7}\mathrm{P}_{r}=\dfrac{7!}{(7-r)!}$이므로 ${}_{7}\mathrm{P}_{r}=\dfrac{7!}{3!}$에서 $7-r=3$

$\therefore r=4$

21 답 120

22 답 60

23 답 24

24 답 60

25 답 12

세 자리의 자연수가 5의 배수가 되려면 일의 자리의 수는 5이어야 한다. 따라서 이때의 경우의 수는 1, 2, 3, 4의 4개의 자연수 중에서 2개를 택하여 백의 자리, 십의 자리에 배치하면 되므로

${}_{4}\mathrm{P}_{2}=4\times3=12$이다.

26 답 24

세 자리의 자연수가 짝수가 되려면 일의 자리의 수가 짝수이어야 하므로 다음과 같이 경우를 나누자.

(i) 일의 자리의 수가 2일 때

1, 3, 4, 5의 4개의 자연수 중에서 2개를 택하여 백의 자리, 십의 자리에 배치하면 되므로 이때의 경우의 수는 ${}_{4}\mathrm{P}_{2}=4\times3=12$이다.

(ii) 일의 자리의 수가 4일 때

1, 2, 3, 5의 4개의 자연수 중에서 2개를 택하여 백의 자리, 십의 자리에 배치하면 되므로 이때의 경우의 수는 ${}_{4}\mathrm{P}_{2}=4\times3=12$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$12+12=24$이다.

27 답 240

남학생 대표와 부대표를 뽑는 경우의 수는 서로 다른 5개 중에서 2개를 택하는 순열의 수이므로 ${}_{5}\mathrm{P}_{2}=5\times4=20$

여학생 대표와 부대표를 뽑는 경우의 수는 서로 다른 4개 중에서 2개를 택하는 순열의 수이므로 ${}_{4}\mathrm{P}_{2}=4\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times12=240$이다.

28 답 18

백의 자리에 올 수 있는 수는 0을 제외한 1, 2, 3의 3가지이다.

십의 자리, 일의 자리에는 백의 자리에 배치한 수를 제외한 3개의 수 중에서 2개를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로

${}_{3}\mathrm{P}_{2}=3\times2=6$이다.

따라서 세 자리의 자연수의 개수는 $3\times6=18$이다.

TIP

백의 자리에 0이 오도록 선택하면 그 수는 세 자리의 자연수가 아닌 두 자리의 자연수이므로 0이 포함된 n개의 수에서 r개를 뽑아 r자리의 자연수를 만들 때는 첫째 자리에 0이 오지 못함에 주의하여야 한다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 134~137

29 답 ⑤

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

${}_6P_2=6\times5=30$

$\therefore {}_5P_3+{}_6P_2=60+30=90$

30 답 ②

$\dfrac{5!}{{}_3P_2}=\dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2}=20$

31 답 ②

${}_{2n}P_2=3\times{}_{n+1}P_2$에서

$2n\times(2n-1)=3\times(n+1)\times n$

$2(2n-1)=3(n+1)$ ($\because$ n은 자연수)

$4n-2=3n+3$

$\therefore n=5$

32 답 ⑤

${}_{n+1}P_2+{}_nP_2=128$에서

$(n+1)\times n+n\times(n-1)=128$, $2n^2=128$

$n^2=64$

$\therefore n=8$ ($\because$ n은 자연수)

33 답 ①

${}_6P_4=6\times5\times4\times3=360$

34 답 ⑤

$6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

35 답 ④

함수 $f: X \to X$가 일대일대응이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 1, 2, 3, 4, 5에 각각 하나씩 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

36 답 ③

윤이가 운전석에 앉으면 남은 4명이 7개의 자리 중 각각 한 자리에 앉으면 되므로 7개 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_7P_4=7\times6\times5\times4=840$

37 답 ②

장이와 진이를 각각 첫 번째 자리와 여섯 번째 자리에 고정시키고 나머지 네 명의 학생을 장이와 진이 사이에 일렬로 세우면 되므로 구하는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

38 답 ⑤

다섯 자리의 자연수가 짝수이려면 일의 자리의 수가 짝수이어야 한다. 따라서 일의 자리의 수를 기준으로 다음과 같이 경우를 나누자.

(i) 일의 자리의 수가 2인 경우

1, 3, 4, 5를 각 자리에 일렬로 배열하면 되므로 이때의 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

(ii) 일의 자리의 수가 4인 경우

1, 2, 3, 5를 각 자리에 일렬로 배열하면 되므로 이때의 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $24+24=48$

39 답 ⑤

처음과 마지막에 탑승하는 남학생을 선택하여 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

나머지 4명의 학생이 탑승하는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24=144$이다.

40 답 ④

남학생 3명을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!$

여학생 3명을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!$

이 각각에 대하여 맨 앞에 남학생 또는 여학생이 서는 경우의 수는 2이므로 구하는 경우의 수는 $3!\times3!\times2=72$

41 답 ④

반장, 부반장을 뽑는 경우의 수는 6명의 학생 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

${}_6P_2=6\times5=30$

이때 반장, 부반장 모두 남학생을 뽑는 경우의 수는 남학생 3명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

${}_3P_2=3\times2=6$

따라서 구하는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 반장, 부반장 모두 남학생이 뽑히는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로 $30-6=24$이다.

다른 풀이

(i) 반장, 부반장이 모두 여학생으로 뽑히는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

(ii) 반장은 남학생, 부반장은 여학생으로 뽑히는 경우의 수는 ${}_3P_1\times{}_3P_1=3\times3=9$

(iii) 반장은 여학생, 부반장은 남학생으로 뽑히는 경우의 수는 ${}_3P_1\times{}_3P_1=3\times3=9$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$6+9+9=24$이다.

42 답 ④

조건 (가)에 의하여 순서쌍 $(f(a), f(b))$, $(f(c), f(d))$는 $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$ 중 하나와 대응될 수 있다.

즉, $(f(a), f(b))$가 6개의 원소 중에서 하나와 대응되는 경우의 수는 6이다.

한편, 조건 (나)에서 함수 f는 일대일함수이므로 $(f(a), f(b))$가 $(1, 6)$에 대응되었다면 $(f(c), f(d))$가 대응될 수 있는 경우의 수는 $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$의 4이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times4=24$이다.

43 답 ①

어떤 행과 열에도 같은 색을 칠하지 않으므로 첫 번째 행의 원 3개를 색칠하는 방법은 빨강, 노랑, 파랑의 3개의 색을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 따라서 첫 번째 행을 색칠하는 경우의 수는 $3!=6$이다.

한편, 첫 번째 행에 (빨강, 노랑, 파랑)의 순으로 색칠하였다면 두 번째 행을 색칠하는 경우의 수는

(노랑, 파랑, 빨강), (파랑, 빨강, 노랑)의 2이다.

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6\times2=12$이다.

44 답 ②

$a_1>a_2$이기 위해서는 1열에 16이 쓰여야 하고 1열에 16을 써넣는 경우의 수는 2이다.

이 각각에 대하여 2, 4, 8을 나머지 자리에 쓰는 경우의 수는 $3!=6$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6=12$이다.

다른 풀이

1열에 쓰이는 두 수 a, b와 2열에 쓰이는 두 수 c, d를 $\{(a, b), (c, d)\}$로 나타내면 가능한 경우는

$\{(2, 16), (4, 8)\}$, $\{(4, 16), (2, 8)\}$, $\{(8, 16), (2, 4)\}$의 3가지이다.

이 각각에 대하여 1열에 쓰는 방법은 2가지, 2열에 쓰는 방법은 2가지이므로 각 경우마다 수를 쓰는 방법은 $2\times2=4$(가지)이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times4=12$이다.

TIP

16을 제외한 가장 큰 두 수 4, 8의 합은 $4+8=12$이므로 어떤 한 수와 16의 합은 항상 나머지 두 수의 합보다 크다. 따라서 1열에 쓰인 두 수의 합이 2열에 쓰인 두 수의 합보다 크려면 16은 반드시 1열에 쓰여야 한다.

45 답 ④

천의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

이 각각의 경우에 대하여 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 나머지 5개의 숫자 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 뽑아 나열하는 것이므로

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

따라서 구하는 경우의 수는 $5\times60=300$이다.

46 답 ③

소수는 2, 3, 5이고 일의 자리와 십의 자리가 모두 소수가 되는 경우의 수는 2, 3, 5 중에서 2개의 수를 선택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3P_2=6$

나머지 3개의 수를 나머지 자리에 배열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times6=36$

47 답 ①

다섯 자리의 자연수가 4의 배수가 되려면 끝의 두 자리의 수가 4의 배수이어야 한다.

따라서 끝의 두 자리의 수가 될 수 있는 것은 12, 24, 32, 52의 4가지이고 나머지 3개의 수를 나머지 자리에 배열하는 경우의 수는 $3!=6$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $4\times6=24$

TIP

주어진 자연수가 어떤 수의 배수인지 알아보려면 다음을 확인하자.

(1) 일의 자리의 수가 0, 2, 4, 6, 8인 수는 2의 배수(짝수)이다.
(2) 각 자리 숫자의 합이 3의 배수인 수는 3의 배수이다.
(3) 끝의 두 자리가 00 또는 4의 배수인 수는 4의 배수이다.
(4) 일의 자리의 수가 0 또는 5인 수는 5의 배수이다.
(5) 2의 배수이면서 3의 배수인 수는 6의 배수이다.
(6) 각 자리 숫자의 합이 9의 배수인 수는 9의 배수이다.

48 답 ③

네 자리의 자연수가 홀수이려면 일의 자리의 수는 1 또는 3이어야 하므로 다음과 같이 경우를 나누자.

(i) 일의 자리가 1인 경우

3000보다 작은 수이므로 천의 자리는 2이고 1, 2를 제외한 나머지 3개의 수를 백의 자리, 십의 자리에 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

(ii) 일의 자리가 3인 경우

3000보다 작은 수이므로 천의 자리는 1 또는 2의 2가지이고 천의 자리에 배열한 수와 3을 제외한 나머지 3개의 수를 백의 자리, 십의 자리에 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

따라서 이때의 경우의 수는 $2\times6=12$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $6+12=18$

49 답 ③

십의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 5의 배수가 되는 경우의 순서쌍은 (0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)이므로 다음과 같이 경우를 나누어 구하자.

(i) 십의 자리와 일의 자리의 순서쌍이 (0, 5), (5, 0)인 경우

나머지 4개의 수 중 2개의 수를 천의 자리, 백의 자리에 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

따라서 이때의 경우의 수는 $2\times12=24$

(ii) 십의 자리와 일의 자리의 순서쌍이 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)인 경우

천의 자리에 배열할 수 있는 수는 0을 제외한 나머지 3개, 백의 자리에 배열할 수 있는 수는 3개이므로

$3\times3=9$

따라서 이때의 경우의 수는 $4\times9=36$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$24+36=60$

50 답 ②

첫 번째, 세 번째, 다섯 번째 자리 중에서 두 자리에 1, 3을 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

나머지 네 개의 수를 나머지 네 개의 자리에 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24=144$이다.

51 답 ④

a□□□인 경우의 수는 $3!=6$

b□□□인 경우의 수는 $3!=6$

따라서 12번째로 나오는 문자는 맨 앞자리가 b인 문자의 마지막이므로 $bdca$이다.

52 답 ②

1□□□인 경우의 수는 $3!=6$

2□□□인 경우의 수는 $3!=6$

따라서 천의 자리의 수가 3인 가장 작은 수는 13번째의 숫자로 3124이고 14번째의 숫자는 3142, 15번째의 숫자는 3214이다.

53 답 ⑤

0, 1, 2, ⋯, 9의 10개의 숫자 중에서 서로 다른 3개를 뽑아 세 자리의 자연수를 만드는 경우이다.

1□□인 경우의 수는 ${}_9P_2=72$

2□□인 경우의 수는 ${}_9P_2=72$

30□인 경우의 수는 8

31□인 경우의 수는 8

32□인 경우의 수는 8

즉, 329는 168(=72+72+8+8+8)번째에 나열되는 수이므로 340은 169번째, 341은 170번째, 342는 171번째, 345는 172번째 나열되는 수이다.

54 답 ①

5□□□□인 경우의 수 $4!=24$

4□□□□인 경우의 수 $4!=24$

3□□□□인 경우의 수 $4!=24$

즉, 72번째로 큰 수는 31245, 71번째로 큰 수는 31254, 70번째로 큰 수는 31425이다.

55 답 ②

남학생 3명을 1명으로 생각하여 남학생 1명과 여학생 3명의 총 4명을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$이다.

이 각각에 대하여 남학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$이므로 구하는 경우의 수는

$24\times6=144$

56 답 ④

먼저 여학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

V	여	V	여	V	여	V

이 각각의 경우에 대하여 여학생 사이사이와 양 끝, 즉 그림의 V에 남학생 3명을 나열하는 경우의 수는 4개의 자리에서 3개의 자리를 뽑아서 나열하는 것과 같으므로

${}_4P_3=4\times3\times2=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$

57 답 ⑤

아버지와 어머니를 한 묶음으로 묶어 한 사람으로 보고 아들과 딸을 한 묶음으로 묶어 한 사람으로 보면 할머니를 포함하여 모두 3명이고 이 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

이 각각의 경우에 대해 아버지와 어머니, 아들과 딸이 각각 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2\times2=4$이므로 구하는 경우의 수는

$6\times4=24$

58 답 ④

여학생 3명을 한 묶음, 남학생 3명을 한 묶음으로 하여 각각 1명의 사람으로 보면 선생님 2명과 여학생 1명, 남학생 1명으로 모두 4명이고 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

이 각각의 경우에 대해 여학생, 남학생이 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!\times3!=36$이므로 구하는 경우의 수는

$24\times36=864$이다.

59 답 ③

5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 A, N, G 중에서 어떤 2개의 문자도 이웃하지 않는 경우의 수를 빼서 구하자.

(i) 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$

(ii) A, N, G 중에서 어떤 2개의 문자도 이웃하지 않는 경우

먼저 E, L을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

V	E	V	L	V

이 각각의 경우에 대하여 그림의 V에 A, N, G를 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 이때의 경우의 수는 $2\times6=12$

따라서 구하는 경우의 수는

(i)−(ii)$=120-12=108$이다.

60 답 ①

1, 2를 한 묶음으로 하여 하나의 수로 생각하면 (1, 2), 3, 4, 5의 4개의 수이다.

이때 (1, 2)와 5의 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2!=2$이고 이 각각에 대하여 1, 2의 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로 (1, 2)와 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2\times2=4$이다.

V	(1, 2)	V	5	V

이 각각의 경우에 대하여 3, 4를 그림의 V의 자리에 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$이므로 구하는 경우의 수는 $4\times6=24$이다.

다른 풀이

구하는 경우의 수는 1, 2가 이웃하는 경우의 수에서 1, 2가 이웃하고 3, 4도 이웃하는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 1, 2가 이웃하는 경우

1, 2를 한 묶음으로 하여 하나의 수로 생각하면 4개의 수를 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

이 각각에 대하여 1, 2의 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로 이때의 경우의 수는 $24\times2=48$

(ii) 1, 2가 이웃하고 3, 4도 이웃하는 경우

1, 2를 한 묶음으로 3, 4도 한 묶음으로 하여 각각 하나의 수로 생각하면 3개의 수를 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

이 각각에 대하여 1과 2, 3과 4가 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2\times2=4$이므로 이때의 경우의 수는 $6\times4=24$

따라서 구하는 경우의 수는

(i)−(ii)$=48-24=24$이다.

연습 문제[S~T] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 138~139

01 답 ④

> $1\le m\le3$, $1\le n\le8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는?
>
> $1\le m\le3$인 자연수 m은 3개이므로 $\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$에 m의 값을 각각 대입하여 $1\le n\le8$인 자연수 n의 개수를 구하자.
>
> ① 6 ② 8 ③ 10
> ④ 12 ⑤ 14

1st 자연수 m을 기준으로 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하자.

$1\le n\le8$인 자연수 n에 대하여

(i) $m=1$일 때, $\sqrt[3]{n}=n^{\frac{1}{3}}$이 자연수가 되려면 n의 값은 1, 8이 되어야 한다. 따라서 이때의 순서쌍 (m, n)의 개수는 (1, 1), (1, 8)로 2이다.

$(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$

(ii) $m=2$일 때, $\sqrt[3]{n^2}=n^{\frac{2}{3}}$이 자연수가 되려면 n의 값은 1, 8이 되어야 한다. 따라서 이때의 순서쌍 (m, n)의 개수는 (2, 1), (2, 8)로 2이다.

$(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^2=4$

(iii) $m=3$일 때, $\sqrt[3]{n^3}=n$이 자연수가 되려면 n의 값은 1, 2, 3, ⋯, 8이 되어야 한다. 따라서 이때의 순서쌍 (m, n)의 개수는 (3, 1), (3, 2), (3, 3), ⋯, (3, 8)로 8이다.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$2+2+8=12$이다.

02 답 ②

서로 다른 두 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라 하고 순서쌍 (a, b)로 나타내자.

(i) 두 눈의 수의 차가 4일 때, (1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)로 4가지

(ii) 두 눈의 수의 차가 5일 때, (1, 6), (6, 1)로 2가지

(iii) 두 눈의 수의 차가 6 이상인 경우는 없다.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$4+2+0=6$이다.

03 답 24

$2^2\times3^m\times5^n$의 양의 약수의 개수는

$(2+1)\times(m+1)\times(n+1)=105$에서

$(m+1)\times(n+1)=35$

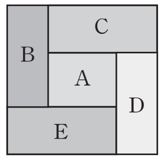
이때 m, n이 자연수이므로 $m+1$, $n+1$은 1보다 큰 자연수이다.

즉, $m+1=5$, $n+1=7$ 또는 $m+1=7$, $n+1=5$이므로 $m=4$, $n=6$ 또는 $m=6$, $n=4$이다.

$\therefore mn=4\times6=24$

04 답 ④

그림과 같이 A, B, C, D, E 다섯 개의 영역으로 나누어진 도형이 있다. 각 영역에 빨간색, 노란색, 파란색, 초록색, 하얀색 중 한 가지 색을 칠하는데, 인접한 영역은 서로 다른 색을 칠하여 구별하려고 한다. 칠할 수 있는 경우의 수는? (단, 같은 색을 중복하여 사용할 수 있다.)



① 390 ② 400 ③ 410
④ 420 ⑤ 430

영역 A가 가장 많은 영역과 인접해 있으니까 영역 A에 먼저 색을 칠하면서 나머지 영역에 칠하는 경우를 따져야 해.

1st 영역 A, B, C에 칠하는 경우의 수를 구하자.

영역 A에 칠할 수 있는 색은 5가지
영역 B에 칠할 수 있는 색은 영역 A의 색과 다른 4가지
영역 C에 칠할 수 있는 색은 영역 A, B의 색과 다른 3가지
따라서 영역 A, B, C에 칠할 수 있는 경우의 수는
$5\times4\times3=60$ ⋯ ㉠이다.

2nd 영역 D, E에 칠하는 경우의 수를 구하여 전체 경우의 수를 구하자.

이제 영역 D가 영역 B와 같은 색을 칠할 경우와 다른 색을 칠할 경우를 나누어 생각하자.
영역 D와 B는 인접해 있지 않으니까 같은 색을 칠할 수도, 다른 색을 칠할 수도 있어.

(i) 영역 D에 영역 B와 같은 색을 칠하면 영역 D에 칠할 수 있는 색은 1가지이고, 영역 E에 칠할 수 있는 색은 영역 A, B의 색과 다른 3가지이다.
따라서 이때의 경우의 수는 ㉠에 의하여
$60\times1\times3=180$

(ii) 영역 D에 영역 B와 다른 색을 칠하면 영역 D에 칠할 수 있는 색은 영역 A, B, C의 색과 다른 2가지이고, 영역 E에 칠할 수 있는 색은 영역 A, B, D의 색과 다른 2가지이다.
따라서 이때의 경우의 수는 ㉠에 의하여
$60\times2\times2=240$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $180+240=420$이다.
어느 두 사건도 동시에 일어나지 않는 셋 이상의 사건에 대해서 성립해.

05 답 ②

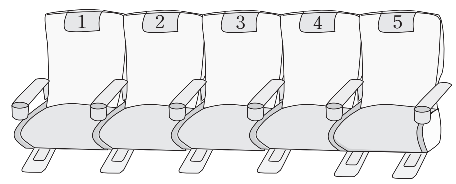
두 자리의 자연수는 10부터 99까지의 90개이다.
한편, 십의 자리의 수와 일의 자리의 수의 곱이 홀수이면 십의 자리의 수, 일의 자리의 수 모두 홀수이고 그 개수는 $5\times5=25$이다.
따라서 구하는 수의 개수는 두 자리의 자연수의 개수에서 십의 자리의 수와 일의 자리의 수의 곱이 홀수인 것의 개수를 빼면 되므로 구하는 경우의 수는 $90-25=65$이다.

06 답 ④

A 지점에서 출발하여 D 지점까지 가는 경로는
A → B → D와 A → B → C → D의 2가지가 있다.
(i) A → B → D로 가는 경우의 수는 $3\times2=6$
(ii) A → B → C → D로 가는 경우의 수는 $3\times1\times2=6$
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $6+6=12$이다.

07 답 ⑤

할머니, 아버지, 어머니, 아들, 딸로 구성된 5명의 가족이 있다. 이 가족이 그림과 같이 번호가 적힌 5개의 의자에 모두 앉을 때, 아버지, 어머니가 모두 홀수 번호가 적힌 의자에 앉는 경우의 수는?



① 28 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 36

홀수 번호는 1, 3, 5이고 이 중에 2개를 택하여 아버지, 어머니가 앉으면 돼. 그 후 나머지를 배치하면 되겠지.

1st 아버지, 어머니가 홀수 번호 1, 3, 5의 의자에 앉는 경우를 순열을 생각하여 구하자.

홀수 번호가 적힌 3개의 의자 중에서 2개의 의자에 아버지, 어머니가 앉는 경우의 수는
${}_3P_2=3\times2=6$ ⋯ ㉠ 3개 중 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우야.

2nd 남은 가족 3명이 의자에 앉는 경우도 순열을 이용하여 구하자.

나머지 3개의 의자에 할머니, 아들, 딸이 앉는 경우의 수는
${}_3P_3=3\times2\times1=6$ ⋯ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 경우의 수는
$6\times6=36$이다.
㉠, ㉡은 잇달아 일어나는 경우니까 곱의 법칙을 이용하여 계산해야 해.

다른 풀이

홀수 번호가 적힌 3개의 의자 중에서 2개의 의자를 택하는 방법은 3가지이고 이 각각에 대하여 아버지, 어머니가 앉는 경우의 수가 2이므로 $3\times2=6$이다.
(1, 3), (1, 5), (3, 5)의 3가지
또, 아버지, 어머니가 앉은 그 각각의 경우 남은 가족 3명이 앉는 경우의 수는 $3!=6$이므로 구하는 경우의 수는 $6\times6=36$이다.

08 답 2

${}_{n+1}P_2+3\times{}_{n+1}P_1=15$에서
$(n+1)\times n+3\times(n+1)=15$
$n^2+4n+3=15,\ n^2+4n-12=0$
$(n-2)(n+6)=0 \qquad \therefore n=2$ 또는 $n=-6$
이때 n은 자연수이므로 $n=2$이다.

09 답 ④

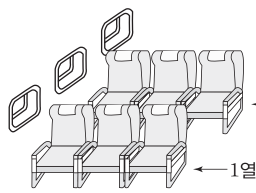
n곡 중에서 3곡을 택하는 순열의 수는 ${}_nP_3$이므로

${}_nP_3=120$에서 $n(n-1)(n-2)=120=6\times5\times4$

$\therefore n=6$

10 답 64

할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아들, 딸로 구성된 가족이 있다. 이 가족 6명이 그림과 같은 6개의 좌석에 모두 앉을 때, 할아버지, 할머니가 같은 열에 이웃하여 앉고, 아버지, 어머니도 같은 열에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. 할아버지, 할머니를 1팀, 아버지, 어머니를 2팀이라 하고 1팀, 2팀을 각각 같은 열에 배열하는 경우를 따져주자.



1st 조부모님과 부모님의 배치를 기준으로 경우의 수를 구해.

할아버지, 할머니가 앉는 열과 아버지, 어머니가 앉는 열을 정하는 경우의 수는 2 1열, 2열 중 선택

1열에 세 사람이 앉을 때, 특정한 2명이 이웃하도록 앉는 경우의 수는 $2!\times2!=4$ 특정한 2명이 자리를 바꾸는 경우야.
특정한 2명을 1명으로 생각하고 2명을 일렬로 나열하는 경우야.

2열에 세 사람이 앉을 때, 특정한 2명이 이웃하도록 앉는 경우의 수는 $2!\times2!=4$

그 각각에 대하여 아들과 딸이 앉는 열을 정하는 경우의 수가 2이므로 구하는 경우의 수는 $2\times4\times4\times2=64$

심플 정리

[합의 법칙과 곱의 법칙]

(1) 합의 법칙 : 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.
(2) 곱의 법칙 : 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

11 답 ⑤

A와 B 2명을 한 묶음으로, D와 E 2명을 한 묶음으로 하여 각각 한 명의 사람으로 보면 (A, B), C, (D, E)의 3명을 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

이 각각에 대하여 D와 E가 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로 구하는 경우의 수는 $6\times2=12$이다.

12 답 ③

6개의 의자에 세 사람이 앉는 경우의 수는 6개의 의자 중에서 3개의 의자를 선택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6P_3=6\times5\times4=120$

13 답 72

1, 2, 4, 6, 8, 9를 합이 같은 두 개의 묶음으로 나누어야 한다. 그런데 총합이 30이므로 각 묶음의 합은 15가 되어야 한다.

이러한 경우는 1, 6, 8 / 2, 4, 9의 1가지뿐이므로

1, 6, 8을 배열하는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

2, 4, 9를 배열하는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

그런데 윗줄과 아랫줄을 바꿀 수 있으므로 구하는 경우의 수는 $2\times6\times6=72$이다.

14 답 72

다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$이므로 만들 수 있는 전체 다섯 자리의 자연수의 개수는 120이다. … Ⅰ

이때 1, 2를 묶어서 하나의 수로 하여 4개의 수를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$이고 이 각각에 대하여 1, 2의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 1, 2가 이웃하는 경우의 수는 $24\times2=48$이다.

즉, 1, 2 사이에 다른 숫자가 없는 다섯 자리의 자연수의 개수는 48이다. … Ⅱ

따라서 1과 2 사이에 1개 이상의 다른 숫자가 들어 있는 자연수의 개수는 전체 자연수의 개수에서 1, 2가 이웃한 자연수의 개수를 빼면 되므로

$120-48=72$이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	다섯 개의 숫자로 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수를 구한다.	30%
Ⅱ	1, 2 사이에 다른 숫자가 없는 자연수의 개수를 구한다.	40%
Ⅲ	전체 자연수의 개수에서 조건을 만족시키지 않는 자연수의 개수를 빼서 답을 구한다.	30%

15 답 ①

1□□□인 경우 ${}_4P_3=4\times3\times2=24$

2□□□인 경우 ${}_4P_3=4\times3\times2=24$

즉, 49번째로 작은 수는 3012이고 50번째로 작은 수는 3014이다.

Simple U 조합

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 140 ~ 141

01 답 조합

02 답 ${}_{n}C_{r}$

03 답 분할, 분배

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ○

07 답 ×

08 답 ${}_{4}C_{2}$

09 답 ${}_{5}C_{3}$

10 답 ${}_{7}C_{5}$

11 답 ${}_{6}C_{4}$

12 답 6

13 답 10

14 답 20

15 답 35

16 답 70

17 답 15

${}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

18 답 21

${}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

19 답 28

${}_{8}C_{6}={}_{8}C_{2}=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

20 답 9

${}_{8}C_{0}+{}_{8}C_{1}={}_{9}C_{1}=9$

21 답 7

${}_{6}C_{5}+{}_{6}C_{6}={}_{7}C_{6}={}_{7}C_{1}=7$

22 답 28

${}_{7}C_{1}+{}_{7}C_{2}={}_{8}C_{2}=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

23 답 120

${}_{9}C_{6}+{}_{9}C_{7}={}_{10}C_{7}={}_{10}C_{3}=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

24 답 60

${}_{6}C_{3}\times{}_{3}C_{2}\times{}_{1}C_{1}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times3\times1=60$

25 답 280

${}_{8}C_{3}\times{}_{5}C_{3}\times{}_{2}C_{2}\times\dfrac{1}{2!}=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}\times\dfrac{5\times4}{2\times1}\times1\times\dfrac{1}{2}=280$

26 답 280

${}_{9}C_{3}\times{}_{6}C_{3}\times{}_{3}C_{3}\times\dfrac{1}{3!}$

$=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\dfrac{1}{3\times2\times1}=280$

27 답 90

서로 다른 신발 5켤레를 2켤레, 2켤레, 1켤레로 나누는 방법의 수는

${}_{5}C_{2}\times{}_{3}C_{2}\times{}_{1}C_{1}\times\dfrac{1}{2!}=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times\dfrac{3\times2}{2\times1}\times1\times\dfrac{1}{2}=15$

나눈 세 묶음의 신발을 신발장에 넣는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $15\times6=90$이다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 142 ~ 143

28 답 ④

${}_{10}C_{r}=120$에서

$120=\dfrac{10\times9\times8}{3!}={}_{10}C_{3}$이므로 $r=3$

또한, ${}_{10}C_{3}={}_{10}C_{7}$이므로 $r=7$

따라서 구하는 모든 자연수 r의 값의 합은

$3+7=10$

29 답 ⑤

${}_{n-1}C_{1}+{}_{n-1}C_{2}=66$에서

${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_{r}={}_{n}C_{r}$이므로 ${}_{n}C_{2}=66$

즉, $\dfrac{n\times(n-1)}{2\times1}=66$에서 $n^2-n-132=0$

$(n+11)(n-12)=0$

$\therefore n=12$ ($\because n$은 자연수)

30 답 ④

$2\times{}_{n+2}C_3=3\times{}_{n+2}P_2$에서

$2\times\frac{(n+2)\times(n+1)\times n}{3\times2\times1}=3\times(n+2)\times(n+1)$

$n(n+1)(n+2)=9(n+1)(n+2)$ ⋯ ㉠

이때 n은 자연수이므로 $n+1\neq0$, $n+2\neq0$이다.

즉, $(n+1)(n+2)\neq0$이므로 ㉠의 양변을

$(n+1)(n+2)$로 나누면 $n=9$

31 답 ①

${}_{10}C_{10-r}={}_{10}C_r$이므로 $24\times{}_{10}C_{10-r}={}_{10}P_r$에서

$24\times{}_{10}C_r={}_{10}P_r$ $\quad\therefore \frac{{}_{10}P_r}{{}_{10}C_r}=24$ ⋯ ㉠

이때 $\frac{{}_{10}P_r}{{}_{10}C_r}=\frac{{}_{10}C_r\times r!}{{}_{10}C_r}=r!$이므로 ㉠에 의하여

$r!=24=4\times3\times2\times1=4!$

$\therefore r=4$

다른 풀이

$24\times{}_{10}C_r={}_{10}P_r$에서

$24\times\frac{10!}{r!(10-r)!}=10\times9\times8\times\cdots\times(10-r+1)$

양변에 $(10-r)!$을 곱하면

$24\times\frac{10!}{r!}=10!$, $\frac{24}{r!}=1$

$r!=24=4\times3\times2\times1=4!$

$\therefore r=4$

심플 정리

[순열의 수와 조합의 수의 관계]

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_nC_r$이고 이 각각에 대하여 r개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $r!$이다. 이때 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는 ${}_nP_r$이므로 ${}_nP_r={}_nC_r\times r!$

32 답 ③

구하는 총 경기의 수는 서로 다른 10개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$

33 답 ④

두 학생 A, B는 먼저 선발하고, A, B를 제외한 8명의 학생 중에서 2명을 선발하면 되므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 8개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

34 답 ⑤

1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이고 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이다.

따라서 홀수가 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$이고 짝수가 적혀 있는 공 1개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $10\times4=40$이다.

35 답 ⑤

두 수의 합이 짝수가 되는 경우는 두 수 모두 홀수이거나 두 수 모두 짝수인 경우이다.

(i) 두 수 모두 홀수일 때,

홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 이 중에서 2개를 택하는 조합의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

(ii) 두 수 모두 짝수일 때,

짝수는 2, 4, 6, 8, 10의 5개이므로 이 중에서 2개를 택하는 조합의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $10+10=20$이다.

36 답 ④

7개의 점 중에서 세 개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$이므로 만들 수 있는 삼각형의 개수는

35이다. $\quad\therefore a=35$

7개의 점 중에서 두 개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$이므로 만들 수 있는 직선의 개수는

21이다. $\quad\therefore b=21$

$\therefore a+b=35+21=56$

37 답 16

만들 수 있는 모든 삼각형의 개수는

${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

한 변만 공유하는 삼각형의 개수는

$8\times{}_4C_1=8\times4=32$

두 변을 공유하는 삼각형의 개수는 8

따라서 한 변도 공유하지 않는 삼각형의 개수는

$56-32-8=16$이다.

38 답 ①

집합 Y의 원소 5개 중에서 서로 다른 4개를 택한 후 작은 수부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$라 하면 주어진 조건을 만족시키는 함수 f가 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 ${}_5C_4={}_5C_1=5$이다.

39 답 ②

$f(1)<f(2)=3$이므로 $f(1)$이 될 수 있는 값은 1, 2로 2개이다.

또, $f(2)=3<f(3)<f(4)$이므로 집합 Y의 원소 4, 5, 6의 3개 중에서 서로 다른 2개를 택한 후 작은 수를 $f(3)$, 큰 수를 $f(4)$라 하면 되므로 $f(3)$, $f(4)$의 값을 결정하는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$이다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times3=6$이다.

40 답 100

집합 Y의 원소 5개 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 것부터 차례대로 집합 X의 원소 1, 3, 5에 대응시키고, 집합 Y의 원소 5개 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 것부터 차례대로 집합 X의 원소 2, 4에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$$\begin{aligned}{}_5C_3\times{}_5C_2&={}_5C_2\times{}_5C_2\\&=\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1}\\&=10\times10=100\end{aligned}$$

41 답 ②

서로 다른 공 9개를 4개, 3개, 2개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_9C_4\times{}_5C_3\times{}_2C_2&=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1}\times1\\&=1260\end{aligned}$$

서로 다른 공 9개를 5개, 2개, 2개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_9C_5\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}&=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}\\&=378\end{aligned}$$

따라서 $a=1260$, $b=378$이므로

$a-b=1260-378=882$

42 답 ④

7명의 학생을 3명, 2명, 2명의 세 조로 나누는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_7C_3\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}&=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}\\&=105\end{aligned}$$

나누어진 세 조가 서로 다른 세 주제 A, B, C를 하나씩 결정하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $105\times6=630$이다.

연습 문제 [U]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 144~145

01 답 ①

${}_1C_0={}_2C_0$이므로

$$\begin{aligned}{}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3&={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3\\&={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3={}_4C_2+{}_4C_3\\&={}_5C_3={}_5C_2\end{aligned}$$

이때 ${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3={}_5C_r$이므로

$r=3$ 또는 $r=2$

따라서 구하는 모든 자연수 r의 값의 합은

$3+2=5$

심플 정리

[조합의 수의 성질]

(1) ${}_nC_0=1$, ${}_nC_1=n$, ${}_nC_n=1$
(2) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)
(3) ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$ (단, $1\le r<n$)

02 답 ②

${}_{n+2}C_2={}_nC_2+{}_{n-1}C_2$에서

$$\frac{(n+2)\times(n+1)}{2\times1}=\frac{n\times(n-1)}{2\times1}+\frac{(n-1)\times(n-2)}{2\times1}$$

$n^2+3n+2=n^2-n+n^2-3n+2$, $n^2-7n=0$

$n(n-7)=0$ $\quad\therefore n=7$ ($\because$ n은 자연수)

03 답 ⑤

n명의 참석자들이 모든 사람과 빠짐없이 한 번씩 악수를 하는 경우의 수는 ${}_nC_2$이므로 ${}_nC_2=105$에서

$\dfrac{n(n-1)}{2}=105$, $n^2-n-210=0$

$(n+14)(n-15)=0$

$\therefore n=15$ ($\because$ n은 자연수)

04 답 ①

동아리 회원 5명 중에서 회장을 1명 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$이고, 그 각각에 대하여 나머지 4명의 회원 중에서 2명의 부회장을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $5\times6=30$이다.

05 답 ①

(i) 원소의 개수가 4인 부분집합의 개수

${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

(ii) 원소의 개수가 5인 부분집합의 개수

${}_6C_5={}_6C_1=6$

(i), (ii)에 의하여 구하는 부분집합의 개수는

$15+6=21$

06 답 ⑤

남학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_{5}C_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

여학생 6명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_{6}C_{1}=6$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$10\times6=60$

07 답 ④

두 수의 곱이 짝수인 경우는 적어도 한 수가 짝수이면 되므로 구하는 경우의 수를 전체 경우의 수에서 두 수 모두 홀수인 경우의 수를 빼서 구하자.

15개의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 택하는 경우의 수는

${}_{15}C_{2}=\frac{15\times14}{2\times1}=105$

선택된 두 수가 모두 홀수인 경우의 수는 1에서 15까지의 자연수 중에서 홀수의 개수는 8이므로

${}_{8}C_{2}=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

따라서 선택된 두 수의 곱이 짝수인 경우의 수는

$105-28=77$

다른 풀이

(i) (짝수)×(짝수)인 경우

짝수 7개 중에서 서로 다른 2개를 택하는 경우이므로 이때의 경우의 수는

${}_{7}C_{2}=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

(ii) (짝수)×(홀수)인 경우

짝수 7개 중에서 1개, 홀수 8개 중에서 1개를 택하는 경우이므로 이때의 경우의 수는

${}_{7}C_{1}\times{}_{8}C_{1}=7\times8=56$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $21+56=77$

08 답 ①

> 크기가 같은 빨간 공 2개, 파란 공 3개, 노란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 서로 다른 색의 공을 꺼내는 경우의 수는?
>
> ① 26 ② 27 ③ 28
>
> ④ 29 ⑤ 30
>
> (빨, 파), (빨, 노), (파, 노) 세 가지 경우뿐임을 이용해도 되고 전체 경우의 수에서 같은 색의 공을 꺼내는, 즉 여사건을 이용해도 돼.

1st 서로 다른 색의 공을 꺼내는 경우를 찾자.

서로 다른 세 가지 색이 있고 세 가지 색 중에서 서로 다른 두 가지를 뽑는 경우는 (빨, 파), (빨, 노), (파, 노)의 세 가지 경우가 있다.

2nd 각 경우의 수를 구하자.

(i) (빨, 파)를 꺼내는 경우

빨간 공 2개 중에서 1개를 꺼내는 경우는 ${}_{2}C_{1}=2$이고

파란 공 3개 중에서 1개를 꺼내는 경우는 ${}_{3}C_{1}=3$이므로 이때의 경우의 수는

$2\times3=6$ 빨간 공 2개 중에서 1개를 꺼내는 사건과 파란 공 3개 중에서 1개를 꺼내는 사건은 동시에 일어나는 사건이니까 곱의 법칙을 이용해.

(ii) (빨, 노)를 꺼내는 경우

빨간 공 2개 중에서 1개를 꺼내는 경우는 ${}_{2}C_{1}=2$이고

노란 공 4개 중에서 1개를 꺼내는 경우는 ${}_{4}C_{1}=4$이므로 이때의 경우의 수는

$2\times4=8$

(iii) (파, 노)를 꺼내는 경우

파란 공 3개 중에서 1개를 꺼내는 경우는 ${}_{3}C_{1}=3$이고

노란 공 4개 중에서 1개를 꺼내는 경우는 ${}_{4}C_{1}=4$이므로 이때의 경우의 수는

$3\times4=12$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $6+8+12=26$

다른 풀이

서로 다른 색의 공을 꺼내는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 같은 색의 공을 꺼내는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

주머니에 들어 있는 공의 개수는 $2+3+4=9$이므로 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{9}C_{2}=\frac{9\times8}{2\times1}=36$

이때 같은 색의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{2}C_{2}+{}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}=1+{}_{3}C_{1}+\frac{4\times3}{2\times1}=1+3+6=10$

이므로 서로 다른 색의 공을 꺼내는 경우의 수는

$36-10=26$

빨간 공 2개 중에서 2개, 파란 공 3개 중에서 2개, 노란 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 각 경우의 수의 합이야.

09 답 ⑤

> 한 개의 주사위를 네 번 던질 때, k번째에 나오는 눈의 수를 $a_k(k=1, 2, 3, 4)$라 하자. $a_1<a_2<a_3<a_4$를 만족시키는 경우의 수는?
>
> 뽑은 4개의 수가 모두 다른 경우야. 그럼 주사위의 눈의 수 6개 중에서 4개를 뽑아서 크기 순으로 a_1, a_2, a_3, a_4에 대응시켜주면 돼.
>
> ① 11 ② 12 ③ 13
>
> ④ 14 ⑤ 15

1st 주어진 조건을 만족시키려면 서로 다른 6개의 수를 어떻게 뽑아야 하는지 생각해.

$a_1<a_2<a_3<a_4$를 만족시키는 경우는 1부터 6까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개를 뽑아 작은 수부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4로 지정하면 된다.

뽑힌 네 수가 1, 2, 3, 4라면 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$로 지정하면 돼.

2nd 조건을 만족시키는 경우의 수를 구해.

즉, 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 4개를 뽑는 조합의 수와 같으므로 ${}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

${}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r}$

10 답 ④

치역과 공역이 같으려면 집합 X의 원소 5개 중에서 2개가 집합 Y의 한 원소에 대응되어야 하고 집합 X의 나머지 원소 3개가 집합 Y의 나머지 원소 3개에 각각 하나씩 대응되어야 한다.

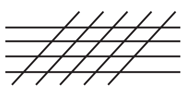
집합 Y의 한 원소에 대응되는 집합 X의 원소 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

이때 집합 Y의 한 원소에 대응되는 집합 X의 원소 2개를 묶어 a라 하고 나머지 세 원소를 b, c, d라 하면 a, b, c, d는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4와 일대일대응이 되어야 하므로 이때의 경우의 수는 $4!=24$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times24=240$

11 답 ⑤

> 그림과 같이 4개의 평행선과 5개의 평행선이 교차하고 있다. 이 들 평행선으로 만들어지는 평행사변형의 개수는?
>
> 
>
> ① 40　② 45　③ 50　④ 55　⑤ 60
>
> 평행사변형은 사각형이므로 그림에서 평행사변형을 만들려면 4개의 평행선이 필요해.

1st 조합을 이용하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수를 구하자.

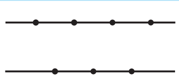
4개의 평행선 중에서 2개의 평행선을 택하고 5개의 평행선 중에서 2개의 평행선을 택하면 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_2$　${}_5C_2$

두 사건이 잇달아 일어날 때는 곱의 법칙을 이용해야 해.

${}_4C_2\times{}_5C_2=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1}=6\times10=60$

12 답 ③

> 그림과 같이 평행한 두 직선 위에 각각 4개, 3개의 점이 있다. 이 7개의 점 중에서 3개를 택하여 만들어지는 삼각형의 개수는?
>
> 
>
> 일직선 위에 있는 세 점을 택하면 삼각형이 만들어지지 않아.
>
> ① 26　② 28　③ 30　④ 28　⑤ 34

삼각형의 세 꼭짓점 중 두 점을 택하면 그 두 점은 한 직선 위에 있고 나머지 한 점은 두 점을 지나는 직선 위에 있지 않아.

1st 삼각형이 만들어지는 경우를 따져보자.

삼각형이 만들어지는 경우는 (ⅰ) 윗 줄에서 점 2개, 아랫 줄에서 점 1개를 택하거나 (ⅱ) 윗 줄에서 점 1개, 아랫 줄에서 점 2개를 택하는 경우이다.

2nd 만들어지는 삼각형의 개수를 구하자.

${}_4C_2\times{}_3C_1+{}_4C_1\times{}_3C_2=\frac{4\times3}{2\times1}\times3+4\times{}_3C_1=18+12=30$

(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙을 이용해야 해.

13 답 98

8개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$이므로 만들 수 있는 선분의 개수는 28이다.

8개의 점 중에서 4개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$이므로 만들 수 있는 사각형의 개수는 70이다.

따라서 $a=28$, $b=70$이므로 $a+b=28+70=98$

14 답 ②

가로선 4개 중에서 2개를 택하고 세로선 5개 중에서 2개를 택하면 직사각형이 만들어지므로 만들 수 있는 직사각형의 개수 m은 $m={}_4C_2\times{}_5C_2=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1}=6\times10=60$

한편, 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 12, 한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 6, 한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 2이므로 만들 수 있는 정사각형의 개수 n은

$n=12+6+2=20$

$\therefore m-n=60-20=40$

15 답 90

6명의 학생을 세 개의 조로 나누는 경우는

4명, 1명, 1명 / 3명, 2명, 1명 / 2명, 2명, 2명의 세 가지이다. … Ⅰ

(ⅰ) 나누어진 세 조가 4명, 1명, 1명일 때,

$${}_6C_4\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=\frac{6\times5}{2\times1}\times2\times1\times\frac{1}{2}=15$$

(ⅱ) 나누어진 세 조가 3명, 2명, 1명일 때,

$${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times3\times1=60$$

(ⅲ) 나누어진 세 조가 2명, 2명, 2명일 때,

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}$$

$$=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{3\times2\times1}=15$$ … Ⅱ

(ⅰ)~(ⅲ)은 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $15+60+15=90$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	6명을 세 개의 조로 나누는 경우를 찾는다.	30%
Ⅱ	각 경우의 수를 구한다.	50%
Ⅲ	합의 법칙을 이용하여 전체 경우의 수를 구한다.	20%

16 답 20

서로 다른 6권의 책을 3권씩 2조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=10$이고,

두 학생 A, B에게 나누어 주는 경우의 수는 $2!=2$이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $10\times2=20$이다.

01

답 ⑤

백의 자리의 숫자는 3의 배수이므로 가능한 수는 3, 6, 9의 3가지

십의 자리 숫자는 아무 조건이 없으므로 가능한 수는 0, 1, 2, ⋯, 9의 10가지

일의 자리의 숫자는 홀수이므로 가능한 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times10\times5=150$

02

답 ①

> 어느 고등학교 체육대회에서 이어달리기를 하는데, 여학생은 영희, 민주, 은영이가, 남학생은 철수, 상민이가 대표선수로 뽑혔다. 이 5명의 학생들이 여학생, 남학생, 여학생, 남학생, 여학생의 순서로 달려야 할 때, 달리는 순서를 정하는 방법의 수는? 문제에 주어진 순서대로 남학생을 배치하고 여학생을 배치해.
>
> ① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

1st 남학생 2명이 달리는 순서를 정하는 경우의 수를 구하자.

5명의 학생들이 여학생, 남학생, 여학생, 남학생, 여학생의 순서로 달릴 때, 두 번째와 네 번째 순서에 남학생들이 달리는 경우의 수는 $2!=2$ 2명을 일렬로 나열하는 경우와 같아.

2nd 여학생 3명이 달리는 순서를 정하는 경우의 수를 구하고 곱의 법칙을 이용하여 5명의 학생이 달리는 경우의 수를 구하자.

첫 번째, 세 번째, 다섯 번째 순서에 여학생들이 달리는 경우의 수는 $3!=6$ 3명을 일렬로 나열하는 경우와 같아.

따라서 5명의 학생들이 여학생, 남학생, 여학생, 남학생, 여학생의 순서로 달리는 방법의 수는 $2\times6=12$

03

답 ④

> 집, 도서관, 학교를 잇는 도로가 그림과 같을 때, 집에서 출발하여 학교를 거쳐 다시 집으로 돌아오는 방법의 수는? (단, 한 번 지나간 지점과 길은 다시 지나지 않는다.) 집에서 학교로 갈 때 도서관을 거칠 수도 거치지 않을 수도 있고, 학교에서 집으로 갈 때도 도서관을 거칠 수도 거치지 않을 수도 있어.
>
> 
>
>
> ① 20　② 22　③ 24　④ 26　⑤ 28

1st 집에서 출발하여 학교를 거쳐 다시 집으로 돌아오는 방법을 모두 찾아봐.

집에서 출발하여 학교를 거쳐 다시 집으로 돌아오는 방법은 집 → 학교 → 집, 집 → 도서관 → 학교 → 집, 집 → 학교 → 도서관 → 집의 세 가지이다. 한 번 지나간 지점은 다시 지나지 않으므로 집 → 도서관 → 학교 → 도서관 → 집은 빼야 해.

2nd 각 경우의 수를 구하자.

(i) 집 → 학교 → 집의 방법의 수는

$2\times1=2$ 집에서 학교로 가는 방법의 수는 2이지만 집으로 돌아갈 때는 갔던 길을 지날 수 없으므로 돌아가는 방법의 수는 1이야.

(ii) 집 → 도서관 → 학교 → 집의 방법의 수는

$3\times2\times2=12$

(iii) 집 → 학교 → 도서관 → 집의 방법의 수는

$2\times2\times3=12$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$2+12+12=26$

04

답 ④

144와 252를 각각 소인수분해하면

$144=2^4\times3^2$, $252=2^2\times3^2\times7$

따라서 144와 252의 최대공약수는 $2^2\times3^2$이므로

144와 252의 양의 공약수의 개수는

$(2+1)\times(2+1)=9$

> **TIP**
>
> (1) 두 수의 공약수는 최대공약수의 약수이다.
>
> (2) 서로 다른 소수 a, b와 자연수 m, n에 대하여 $a^m\times b^n$의 양의 약수는 a^0, a^1, a^2, ⋯, a^m 중에서 하나와 b^0, b^1, b^2, ⋯, b^n 중에서 하나의 곱이다.
> 따라서 $a^m\times b^n$의 양의 약수의 개수는 $(m+1)\times(n+1)$이다.

05

답 ③

$n=2^\alpha\times3^\beta$의 양의 약수의 개수가 16이므로

$(\alpha+1)(\beta+1)=16$

이때 α, β는 자연수이므로 α, β의 값으로 가능한 값을 순서쌍 (α, β)로 나타내면 $(1, 7)$, $(3, 3)$, $(7, 1)$이다.

따라서 구하는 자연수 n은 2×3^7, $2^3\times3^3$, $2^7\times3$으로 3개이다.

06

답 ②

${}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)$,

${}_{n+1}\mathrm{P}_3=(n+1)n(n-1)=n(n+1)(n-1)$,

${}_n\mathrm{P}_1=n$이므로 ${}_n\mathrm{P}_2+{}_{n+1}\mathrm{P}_3=10\times{}_n\mathrm{P}_1$에서

$n(n-1)+n(n+1)(n-1)=10n$

$n(n-1)(n+2)=10n$

이때 n은 자연수이므로 양변을 n으로 나누면

$(n-1)(n+2)=10$

$n^2+n-12=0$

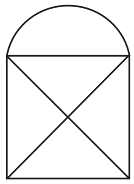
$(n+4)(n-3)=0$

$\therefore n=3$ ($\because n$은 자연수)

심플(고등자이)(해설)(3단원)092-112.indd 107 2017. 9. 22. 오후 8:52

07 답 ③

그림과 같이 다섯 개의 영역으로 나누어진 도형이 있다. 각 영역에 빨간색, 노란색, 파란색 중 한 가지 색을 칠하는데, 인접한 영역은 서로 다른 색을 칠하여 구별하려고 한다. 칠할 수 있는 방법의 수는?

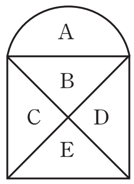


나누어진 5개의 영역을 각각 A, B, C, D, E라 지정하고 조건에 맞춰 경우의 수를 따지자.

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

1st 문제에서 주어진 조건에 맞게 경우의 수를 구하자.

그림에서 A, B 영역에 칠할 수 있는 색은 각각 3가지, 2가지



남은 C, D, E 세 영역에서 C, D영역은 B영역과 인접하므로 B영역과 다른 색을 칠해야 한다. 이때 C, D 영역에 같은 색을 칠할 수 있으므로 다음과 같이 경우를 나누자.

(i) C, D 영역에 같은 색을 칠하고 E 영역에 칠하는 경우

$2\times2=4$(가지) C, D 영역에는 B 영역과 다른 2색 중 선택 / E 영역에는 C, D 영역과 다른 2색 중 선택

(ii) C, D 영역에 다른 색을 칠하고 E 영역에 칠하는 경우

$2\times1\times1=2$(가지) C 영역에 2색, D 영역에 나머지 1색 / E 영역에 C, D 영역과 다른 1색

(i), (ii)에 의하여 칠할 수 있는 방법의 수는

$3\times2\times(4+2)=36$

08 답 36

(i) A, B가 2인용 소파에 앉는 경우

A, B가 2인용 소파에 앉는 경우의 수는 $2!=2$

C, D, E가 3인용 소파에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 이때의 경우의 수는 $2\times6=12$

(ii) A, B가 3인용 소파에 앉는 경우

C, D, E가 3인용 소파 한 자리와 2인용 소파에 나누어 앉는 경우의 수는 $3!=6$

이때 3인용 소파에서 A, B의 묶음과 나머지 한 사람이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

A, B의 묶음에서 A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 이때의 경우의 수는 $6\times2\times2=24$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $12+24=36$

[합의 법칙과 곱의 법칙] 심플 정리

(1) 합의 법칙 : 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

(2) 곱의 법칙 : 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

09 답 1440

먼저 A, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$ … Ⅰ

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

그림과 같이 ②, ④, ⑥, ⑧에 A, B, C, D가 나열되었다고 하면 E, F, G는 서로 이웃하지 않아야 하므로 이 세 문자는 ①, ③, ⑤, ⑦, ⑨의 5자리 중에서 세 자리에 각각 한 자리씩 나열되어야 한다. 즉, 이때의 경우의 수는

${}_5P_3=5\times4\times3=60$ … Ⅱ

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$24\times60=1440$이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	A, B, C, D를 나열하는 경우의 수를 구한다.	30%
Ⅱ	E, F, G가 나열되는 경우의 수를 구한다.	50%
Ⅲ	주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.	20%

10 답 ①

○		○		○	

	○		○		○

○			○		○

○		○			○

그림과 같이 학생이 앉는 자리를 ○으로 나타내면 어떤 두 명도 이웃하지 않도록 6개의 자리에 앉는 경우의 수는 4이다.

이 각각에 대하여 3명의 학생을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $4\times6=24$

11 답 ③

0, 1, 2, 3, 4를 한 번씩 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수 중 4의 배수의 개수는?

다섯 자리의 자연수가 4의 배수이면 끝의 두 자리가 4의 배수이어야 해.

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

1st 다섯 자리의 자연수가 4의 배수가 될 때를 파악하자.

다섯 자리의 자연수가 4의 배수가 되려면 끝의 두 자리의 수는 04, 12, 20, 24, 32, 40이어야 한다.

어떤 자연수가 4의 배수가 되려면 끝의 두 자리의 수는 4의 배수이어야 해.

2nd 끝의 두 자리에 0이 사용된 경우와 사용되지 않은 경우를 나누자.

다섯 자리의 자연수를 만들어야 하니까 만의 자리에는 0이 올 수 없어. 그래서 0이 이미 쓰인 경우와 쓰이지 않은 경우를 나누어야 해.

(i) 04, 20, 40과 같이 끝의 두 자리에 0이 사용된 경우

끝의 두 자리에 사용된 2개의 수를 제외한 3개의 수를 만의 자리, 천의 자리, 백의 자리에 일렬로 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는 $3!=6$이다.

(ii) 12, 24, 32와 같이 끝의 두 자리에 0이 사용되지 않은 경우

만의 자리에는 0과 끝의 자리에 사용된 2개의 수를 제외한 2개의 수가 올 수 있다. 또, 천의 자리와 백의 자리에는 나머지 2개의 수를 나열하면 되므로 천의 자리와 백의 자리에 나열하는 경우의 수는 $2!=2$이다.

따라서 이때의 경우의 수는 $2\times2=4$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$3\times6+3\times4=30$

12 답 432

1행에 A, B, C, D 네 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

A가 적힌 카드와 a가 적힌 카드가 같은 열에 배열되지 않도록 A가 배열된 열에 a를 제외한 나머지 b, c, d 중 하나를 배열하는 경우의 수는 3이고 나머지 두 문자와 문자 a의 세 문자를 B, C, D가 배열된 열에 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!=6$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$24\times3\times6=432$이다.

다른 풀이

1행의 4장의 카드를 배열하는 경우의 수는 $4!=24$이고 2행의 4장의 카드를 배열하는 경우의 수는 $4!=24$이므로 8장의 카드를 배열하는 경우의 수는 $24\times24=576$

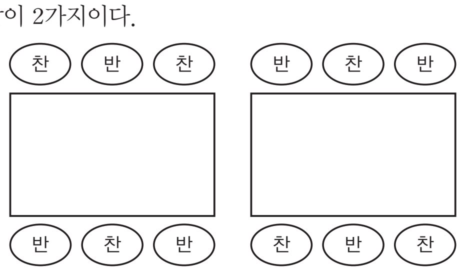
이번에는 A가 적힌 카드와 a가 적힌 카드가 같은 열에 배열되는 경우의 수를 구해 보자.

1행의 4장의 카드를 배열하는 경우의 수는 $4!=24$이고 2행의 a가 적힌 카드를 A가 적힌 카드와 같은 열에 놓은 후 나머지 3장의 카드를 배열하는 경우의 수는 $3!=6$이므로 A가 적힌 카드와 a가 적힌 카드가 같은 열에 배열되는 경우의 수는 $24\times6=144$

따라서 구하는 경우의 수는 $576-144=432$

13 답 ⑤

의견이 상반된 사람끼리 이웃하여 앉는 경우는 다음 그림과 같이 2가지이다.



이 각각에 대하여 찬성 의견을 가진 3명과 반대 의견을 가진 3명을 일렬로 배열하는 방법의 수는 각각 $3!=6$이므로 구하는 경우의 수는 $2\times6\times6=72$

14 답 ③

다음은 네 자연수 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 만든 네 자리 정수를 크기순으로 나열한 것이다.

1234	1243	……	1423	1432
2134	2143	……	2413	2431
3124	3142	……	3412	3421
4123	4132	……	4312	4321

위의 모든 수들의 총합은? 이런 유형의 문제는 반드시 규칙성이 존재해. 주어진 수들을 잘 살펴서 규칙을 찾아야 해.

① 88880 ② 77770 ③ 66660
④ 55550 ⑤ 44440

1st 주어진 수의 규칙을 파악하자.

네 자연수 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 만든 네 자리의 자연수를 크기순으로 나열했을 때, 처음 수와 마지막 수의 합은 $1234+4321=5555$, 두 번째 수와 끝에서 두 번째 수의 합은 $1243+4312=5555$, …가 된다.

그런데 나열된 수의 개수는 $4!=24$이므로 구하는 모든 수들의 합은 $5555\times\frac{24}{2}=66660$ 네 자연수 1, 2, 3, 4를 모두 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 정수의 개수야.

다른 풀이

천의 자리의 수를 1로 고정시키고 세 수 2, 3, 4를 일렬로 배열하는 방법의 수는 3!이야.

천의 자리가 각각 1, 2, 3, 4인 네 자리의 자연수의 개수는 $3!=6$이므로 주어진 수들의 천의 자리의 수끼리의 합은

$1000\times6+2000\times6+3000\times6+4000\times6=60000$

백의 자리가 각각 1, 2, 3, 4인 네 자리의 자연수의 개수도 $3!=6$이므로 주어진 수들의 백의 자리의 수끼리의 합은

$100\times6+200\times6+300\times6+400\times6=6000$

마찬가지로 주어진 수들의 십의 자리의 수끼리의 합은 600, 일의 자리의 수끼리의 합은 60이다.

따라서 모든 수들의 합은

$60000+6000+600+60=66660$

TIP

이렇게 많은 수들의 총합을 구할 때는 직감적으로 어떤 규칙이 숨겨져 있음을 알고 문제에 접근해야 한다. 만약 규칙이 없다면 문제로써 가치가 없는 단순 계산 문제가 되기 때문이다. 따라서 이런 유형의 문제가 나온다면 규칙을 찾기 위해 노력하자.

심플 정리

[계승]

(1) 계승 : 1부터 n까지의 자연수를 차례대로 곱한 것을 n의 계승이라 하고, 기호로 $n!$과 같이 나타낸다. 즉,
$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

(2) $n!$을 이용한 순열의 수
① ${}_nP_n=n!$, ${}_nP_0=1$, $0!=1$
② ${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

15 답 ⑤

두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 일대일함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중에서 $f(1)f(2)=0$인 함수 f의 개수는?

$f(1)f(2)=0$이면 $f(1)=0$ 또는 $f(2)=0$이야. 그런데 f는 일대일함수니까 $f(1)=0$이고 $f(2)=0$이 될 수 없어.

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

1st $f(1)f(2)=0$을 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값에 따라 함수 f의 개수를 구해.

함수 f는 일대일함수이고 $f(1)f(2)=0$이므로

$f(1)=0$이고 $f(2)\neq 0$ 또는 $f(1)\neq 0$이고 $f(2)=0$이다.

(i) $f(1)=0$이고 $f(2)\neq 0$일 때,

$f(2)$, $f(3)$의 값은 1, 2, 3, 4 중에서 각각 하나씩에 대응되어야 한다.

따라서 함수 f의 개수는 서로 다른 4개 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

${}_4P_2=4\times 3=12$

(ii) $f(1)\neq 0$이고 $f(2)=0$일 때,

(i)과 마찬가지로 함수 f의 개수는 ${}_4P_2=12$

(i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $2\times 12=24$이다.

16 답 ④

9□□인 경우의 수는 ${}_9P_2=9\times 8=72$

8□□인 경우의 수는 ${}_9P_2=9\times 8=72$

79□인 경우의 수는 8, 78□인 경우의 수는 8

즉, 780은 $72+72+8+8=160$(번째) 수이고 769는 161번째, 768은 162번째, 765는 163번째 수이다.

$\therefore n=163$

17 답 8

${}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5={}_nC_5-1$에서

$1+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5={}_nC_5$

이때 ${}_3C_0=1$이고, ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$ (단, $1\le r<n$)이므로

$1+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$

$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$

$={}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$

$={}_6C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$

$={}_7C_4+{}_7C_5={}_8C_5$

$\therefore n=8$

18 답 60

1학년에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times 5}{2\times 1}$이고,

2학년에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $15\times 4=60$이다.

19 답 ⑤

9명 중에서 4명을 택하는 경우의 수는

${}_9C_4=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=126$

남학생만 택하는 경우의 수는 ${}_4C_4=1$

여학생만 택하는 경우의 수는 ${}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는 $126-1-5=120$

다른 풀이

(i) 남학생 1명, 여학생 3명을 택하는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_5C_3=4\times{}_5C_2=4\times\frac{5\times 4}{2\times 1}=40$

(ii) 남학생 2명, 여학생 2명을 택하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_5C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}\times\frac{5\times 4}{2\times 1}=60$

(iii) 남학생 3명, 여학생 1명을 택하는 경우의 수는

${}_4C_3\times{}_5C_1={}_4C_1\times 5=4\times 5=20$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $40+60+20=120$

20 답 ③

1부터 20까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 자연수를 뽑는 경우의 수는

${}_{20}C_3=\frac{20\times 19\times 18}{3\times 2\times 1}=1140$

1부터 20까지의 자연수 중에서 홀수는 10개이므로 서로 다른 홀수를 3개 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_3=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=120$

1부터 20까지의 자연수 중에서 짝수는 10개이므로 서로 다른 짝수를 3개 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_3=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$1140-120-120=900$

21 답 ①

삼각형을 만들 수 있는 경우의 수는 12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_{12}C_3=\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1}=220$

이때 직각삼각형이 되는 경우는 삼각형의 한 변이 원의 지름일 때이므로 그 경우의 수는

$6\times 10=60$

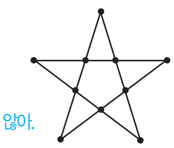
따라서 만든 삼각형이 예각삼각형 또는 둔각삼각형이 되는 경우의 수는 $220-60=160$

TIP

원의 지름을 한 변으로 하고, 원 위의 지름의 양 끝점이 아닌 한 점을 연결하여 만든 삼각형은 항상 직각삼각형이다.
또, 직각삼각형의 외심은 원의 중심과 일치한다.
자주 이용되는 성질이니까 기억하자.

22 답 ④

그림과 같이 5개의 선분으로 만들어 지는 10개의 교점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는?



일직선 위에 있는 세 점을 택하면 삼각형이 만들어지지 않아.

① 85 ② 90

③ 95 ④ 100 ⑤ 105

1st 3개의 점을 택하는 경우의 수를 구하자.

10개의 교점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

2nd 전체 경우에서 삼각형이 만들어지지 않는 경우의 수를 빼자.

이때 한 선분 위에 있는 4개의 교점 중에서 3개의 점을 택하면 삼각형이 만들어지지 않고 이때의 경우의 수는

4개의 점이 있는 선분의 개수

$$5\times{}_4C_3=5\times{}_4C_1=5\times4=20$$

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

따라서 구하는 삼각형의 개수는 $120-20=100$

23 답 ②

7개의 점 중에서 두 점을 택하는 경우의 수는

$${}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

이때 반원의 지름 위의 네 점 중에서 두 점을 택하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수 m은

$$m=21-{}_4C_2+1=21-\frac{4\times3}{2\times1}+1=21-6+1=16$$

7개의 점 중에서 세 점을 택하는 경우의 수는

$${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

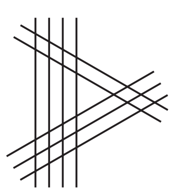
이때 반원의 지름 위의 네 점 중에서 세 점을 택하면 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수 n은

$$n=35-{}_4C_3=35-{}_4C_1=35-4=31$$

$\therefore\ m+n=16+31=47$

24 답 ②

그림과 같이 각각 평행한 2개, 3개, 4개의 직선이 있다. 이들 평행선으로 만들 수 있는 사각형 중에서 평행사변형이 아닌 사다리꼴의 개수는?



평행사변형이 아닌 사다리꼴이려면 어떤 4개의 직선을 택하여야 하는지 생각해.

① 70 ② 72 ③ 74 ④ 76 ⑤ 78

1st 한 쌍의 대변만 평행한 사각형의 개수를 구하는 거야.

평행한 2개의 직선을 각각 a_1, a_2, 평행한 3개의 직선을 각각 b_1, b_2, b_3, 평행한 4개의 직선을 각각 c_1, c_2, c_2, c_4라 하면 평행사변형이 아닌 사다리꼴을 만들려면 다음과 같이 택하여야 한다.

(i) a_1, a_2 중에서 2개, b_1, b_2, b_3 중에서 1개, c_1, c_2, c_3, c_4 중에서 1개를 택하여야 하므로

$${}_2C_2\times{}_3C_1\times{}_4C_1=1\times3\times4=12$$

(ii) a_1, a_2 중에서 1개, b_1, b_2, b_3 중에서 2개, c_1, c_2, c_3, c_4 중에서 1개를 택하여야 하므로

$${}_2C_1\times{}_3C_2\times{}_4C_1=2\times{}_3C_1\times4$$

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

$$=2\times3\times4=24$$

(iii) a_1, a_2 중에서 1개, b_1, b_2, b_3 중에서 1개, c_1, c_2, c_3, c_4 중에서 2개를 택하여야 하므로

$${}_2C_1\times{}_3C_1\times{}_4C_2=2\times3\times\frac{4\times3}{2\times1}=36$$

2nd 구하는 경우의 수를 계산하자.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$12+24+36=72$

(i)~(iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙을 이용해.

25 답 44

조건 (가)에 의하여 $f(1)<f(3)$이고 조건 (나)에 의하여 $f(1)=1$, $f(3)=6$ 또는 $f(1)=2$, $f(3)=5$ 또는 $f(1)=3$, $f(3)=4$이다. … Ⅰ

(i) $f(1)=1$, $f(3)=6$일 때,

$f(2)$의 값으로 가능한 값은 2, 3, 4, 5 중에서 하나이므로 4가지

또, 7, 8, 9, 10의 4개 중에서 2개를 택하여 작은 수를 $f(4)$, 큰 수를 $f(5)$라 하면 되므로 $f(4)$, $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는 ${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

따라서 이때의 경우의 수는 $4\times6=24$

(ii) $f(1)=2$, $f(3)=5$일 때,

$f(2)$의 값으로 가능한 값은 3, 4 중에서 하나이므로 2가지

또, 6, 7, 8, 9, 10의 5개 중에서 2개를 택하여 작은 수를 $f(4)$, 큰 수를 $f(5)$라 하면 되므로 $f(4)$, $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

따라서 이때의 경우의 수는 $2\times10=20$

(iii) $f(1)=3$, $f(3)=4$일 때,

$f(2)$의 값은 존재하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 f는 없다.

(i)~(iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$24+20+0=44$이다. … Ⅱ

[채점기준표]

Ⅰ	두 조건 (가), (나)를 만족시키는 $f(1)$, $f(3)$의 값으로 가능한 값을 모두 찾는다.	30%
Ⅱ	$f(1)$, $f(3)$의 값에 따라서 함수 f의 개수를 구한다.	70%

26 답 ⑤

4명의 사람을 2명, 2명의 두 조로 나누는 경우의 수는

$_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=3$

이 두 조를 앞좌석, 뒷좌석에 배열하는 경우의 수는 $2!=2$

이때 앞좌석에 앉은 2명, 뒷좌석에 앉은 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2\times2=4$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times2\times4=24$

27 답 ③

5개의 팀을 2개, 3개의 조로 나누는 방법의 수는

$_5C_2\times{}_3C_3=\frac{5\times4}{2\times1}\times1=10$

이때 3개의 팀으로 구성된 조에서 부전승으로 올라갈 한 팀을 택하는 경우의 수는 $_3C_1=3$

따라서 대진표를 작성하는 방법의 수는

$10\times3=30$

28 답 ②

$$\begin{aligned}{}_8C_3\times{}_5C_3\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}&=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}\times{}_5C_2\times1\times\frac{1}{2}\\&=56\times\frac{5\times4}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}\\&=280\end{aligned}$$

29 답 200

(i) 여학생 5명을 방에 배정하는 경우

여학생 5명을 3명, 2명의 두 조로 나누는 경우의 수는

$_5C_3\times{}_2C_2={}_5C_2\times1=\frac{5\times4}{2\times1}\times1=10$

이때 3명을 1호실에, 2명을 2호실에 배치하면 되므로 이때의 경우의 수는 10이다.

(ii) 남학생 6명을 방에 배정하는 경우

남학생 6명을 3명, 3명의 두 조로 나누는 경우의 수는

$_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=10$

이때 이 두 조를 3호실과 4호실에 배정하는 경우의 수는 $2!=2$이므로 이때의 경우의 수는 $10\times2=20$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$10\times20=200$

30 답 150

함수 f의 치역이 집합 Y이므로 함수 f의 원소 5개를 세 묶음으로 분할하여 이 세 묶음을 집합 Y의 세 원소에 각각 하나씩 대응시켜야 한다. … Ⅰ

이때 집합 X의 원소 5개를 세 묶음으로 분할하는 경우는 세 묶음의 원소의 개수가 각각 1개, 1개, 3개 또는 1개, 2개, 2개인 2가지뿐이다.

(i) 집합 X의 원소 5개를 1개, 1개, 3개인 세 묶음으로 분할하는 경우의 수는

$_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=5\times4\times1\times\frac{1}{2}=10$

(ii) 집합 X의 원소 5개를 1개, 2개, 2개인 세 묶음으로 분할하는 경우의 수는

$_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=5\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=15$

(i), (ii)에 의하여 집합 X의 5개의 원소를 세 묶음으로 분할하는 경우의 수는 $10+15=25$ … Ⅱ

이 각각에 대하여 분할된 세 묶음을 집합 Y의 세 원소에 각각 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $3!=6$이므로 구하는 함수 f의 개수는 $25\times6=150$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 조건을 만족시키는 함수를 파악한다.	30%
Ⅱ	집합 X의 원소 5개를 세 묶음으로 분할하는 경우의 수를 구한다.	50%
Ⅲ	치역이 집합 Y가 되도록 함수 f의 개수를 구한다.	30%

31 답 ⑤

5명을 1명, 2명, 2명의 세 개의 조로 나누어야겠지?

7층에서 내려가는 엘리베이터에 5명이 타고 있다. 이 엘리베이터가 6층에서 1층까지 6개의 층에서 설 수 있다고 할 때, 1명, 2명, 2명씩 3개의 층에서 모두 내리는 경우의 수는? (단, 중간에 타는 사람은 없다.)

① 1600 ② 1650 ③ 1700 ④ 1750 ⑤ 1800

나누어진 세 개의 조를 순서를 정해서 3개의 층에서 내리면 돼.

1st 5명을 1명, 2명, 2명의 세 조로 나누어 내리는 순서를 정하는 경우의 수를 구하자.

5명을 1명, 2명, 2명의 세 개의 조로 나누는 경우의 수는

$_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=5\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=15$

조원의 개수가 같은 것이 2개 있으니까 $2!$으로 나누어 주어야 해.

이 세 조가 내리는 순서를 정하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 5명을 1명, 2명, 2명의 세 개의 조로 나누고 이 세 조가 내리는 순서를 정하는 경우의 수는

$15\times6=90$ … ㉠

2nd 내리는 3개의 층을 결정하는 경우의 수를 구하고 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하자.

이때 6개의 층 중에서 내리는 3개의 층을 결정하는 경우의 수는 $_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$ … ㉡

서로 다른 6개에 3개를 택하는 조합의 수야.

㉠, ㉡에 의하여 구하는 경우의 수는

$90\times20=1800$