심플
자이스토리 고등수학의 기본을 심플하게 완성!

SIMPLE Xi story

수학 I

[해설편]

자이스토리 · 수경출판사

SIMPLE Xi story 빠른 정답 찾기

I 지수함수와 로그함수

A 거듭제곱과 거듭제곱근

01 n제곱, 거듭제곱 02 n제곱근, 거듭제곱근 03 n
04 × 05 × 06 ○ 07 ○ 08 2^5
09 $3^2\times7^3$ 10 $3^2\times5^2\times7^2$ 11 $a^2\times b^4$ 12 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$
13 128 14 729 15 216 16 $\frac{125}{216}$ 17 $\frac{1}{3}$
18 $\frac{x^3}{y}$ 19 x^8y^{22} 20 $\frac{8x^{26}y^5}{9}$ 21 $\frac{y^6}{4}$ 22 2
23 -3 24 -3 25 $-\frac{1}{2}$ 26 -4 27 2, -2
28 3, -3 29 2 30 5 31 11 32 1
33 $\sqrt[6]{15}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}$ 34 $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}<\sqrt{2\sqrt{2}}$
35 ⑤ 36 ③ 37 ① 38 ② 39 ⑤ 40 ③
41 ③ 42 ⑤ 43 ④ 44 ⑤ 45 ③ 46 ②
47 ④ 48 ④ 49 ④ 50 ② 51 ② 52 ③
53 ④ 54 ⑤ 55 ④ 56 144 57 23 58 5
59 36 60 ④ 61 ④ 62 ① 63 ④

연습 [A-B]

01 ④ 02 ② 03 108 04 5 05 ③ 06 ①
07 ① 08 ③ 09 ④ 10 ⑤ 11 ③ 12 ⑤
13 ③ 14 ② 15 20

B 지수의 확장과 지수법칙

01 $\frac{1}{a^n}$ 02 $\sqrt[n]{a^m}$ 03 $r-s$ 04 a^{xy} 05 a^xb^x 06 ○
07 × 08 × 09 × 10 1 11 $\frac{1}{49}$ 12 $\frac{1}{9}$
13 $\frac{9}{49}$ 14 1 15 $\frac{1}{a^4}$ 16 a^{26} 17 $\frac{1}{a^6}$ 18 $2^{\frac{5}{4}}$
19 $5^{\frac{4}{7}}$ 20 $2^{\frac{3}{2}}$ 21 $5^{\frac{2}{3}}$ 22 $\sqrt[3]{16^2}$ 23 $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{6}\right)^2}$
24 $\sqrt[10]{\frac{1}{243}}$ 25 $\sqrt[8]{16^3}$ 26 36 27 16
28 $\frac{9}{4}$ 29 $9^{\frac{1}{3}}$ 30 $\frac{1}{a}$ 31 $a^{\frac{7}{24}}$ 32 $a^{\frac{23}{24}}$ 33 $5^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$
34 7 35 36 36 $2^{\sqrt{2}}$ 37 $a^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 38 $a^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$
39 $a^{20}b^7$ 40 $a-b$ 41 ① 42 ① 43 ③
44 ③ 45 ③ 46 ① 47 8 48 23 49 ③
50 ④ 51 64 52 ⑤ 53 ① 54 9 55 ④
56 ④ 57 ④ 58 11 59 ② 60 ④ 61 ①
62 ③ 63 ② 64 ③ 65 ④ 66 ② 67 4
68 ⑤ 69 ④ 70 ④ 71 ② 72 ② 73 ①
74 ④ 75 ① 76 ③ 77 20 78 ② 79 ③
80 16 81 140 82 ⑤ 83 ②

C 로그

01 $\log_a b$, 로그 02 $a>0$, $a\neq1$, $b>0$ 03 0, 1
04 $\frac{n}{m}$ 05 × 06 × 07 ○ 08 ○ 09 ×
10 $2^4=16$ 11 $3^3=27$ 12 $9^{\frac{1}{2}}=3$
13 $3^{-4}=\frac{1}{81}$ 14 $6=\log_2 64$ 15 $-4=\log_2\frac{1}{16}$
16 $\frac{1}{2}=\log_2\sqrt{2}$ 17 $2=\log_{0.1}0.01$ 18 $\frac{1}{4}$ 19 $\frac{1}{27}$
20 2 21 16 22 0 23 1 24 3 25 10
26 6 27 2 28 $p+2q+3r$ 29 $p+q-r$
30 $\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q+r$ 31 $p-q-r$ 32 2 33 1
34 $\frac{3+b}{1+a+b}$ 35 $\frac{2a+b}{2b}$ 36 $\frac{2b}{a}$ 37 $\frac{a+b}{a}$
38 $\frac{2+b}{a+b}$ 39 6 40 81 41 $\sqrt{2}$ 42 256
43 0 44 $\frac{35}{4}$ 45 2 46 -1 47 ④ 48 ①
49 ③ 50 ④ 51 3 52 ② 53 ⑤ 54 ⑤
55 ③ 56 15 57 ③ 58 ④ 59 ⑤ 60 ③
61 ⑤ 62 ② 63 ① 64 ② 65 ① 66 ①
67 ② 68 ⑤ 69 ① 70 ① 71 ③ 72 ④
73 1 74 2 75 8 76 ② 77 ④ 78 ④
79 ② 80 ①

D 상용로그

01 상용로그, $\log N$ 02 상용로그표 03 소수
04 ○ 05 ○ 06 × 07 × 08 ○ 09 3
10 -2 11 -5 12 -3 13 -1 14 2 15 1
16 16 17 2.3945 18 -2.6055 19 5.3945
20 -4.6055 21 568 22 56800 23 0.000568
24 0.00568 25 0.4969 26 2.5092 27 -1.4672
28 1.1737 29 31 30 24 31 20 32 13
33 1 34 ② 35 ① 36 ④ 37 ⑤ 38 ④
39 ① 40 ③ 41 ① 42 ⑤ 43 22 44 ④
45 66 46 ② 47 ② 48 ④ 49 ② 50 ③

연습 [C-D]

01 ④ 02 69 03 ② 04 ① 05 ② 06 ③
07 ③ 08 13 09 ② 10 ④ 11 ② 12 10
13 ① 14 ② 15 $10^{2019}-1$

E 지수함수

01 지수함수 02 실수 전체의 집합, 양의 실수 전체의 집합
03 증가, 감소 04 ○ 05 × 06 ○ 07 ○
08 ㄱ, ㄹ, ㅁ, ㅂ 09 4 10 $\frac{1}{8}$ 11 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 12 $\frac{1}{4}$
13 $a=2, b=1$ 14 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.1}<8$ 15 $3^{-3}<\frac{1}{9}$
16 $0.5^{\frac{1}{3}}<\sqrt[3]{4}<(\sqrt{2})^2$ 17 $y=3^{x+1}+3$ 18 $y=-3^x$
19 $y=3^{-x}$ 20 $y=-3^{-x}$ 21 풀이 참조
22 최댓값 : 8, 최솟값 : $\frac{1}{2}$ 23 최댓값 : 81, 최솟값 : $\frac{1}{9}$
24 최댓값 : 128, 최솟값 : $\frac{1}{32}$
25 최댓값 : 19, 최솟값 : $\frac{13}{4}$ 26 ③ 27 ④ 28 ②
29 ③ 30 ⑤ 31 ⑤ 32 ④ 33 ① 34 ②
35 ① 36 81 37 ③ 38 ③ 39 ③ 40 ③
41 ⑤ 42 ④ 43 ④ 44 ⑤ 45 ② 46 ①
47 ③ 48 ② 49 ② 50 ③ 51 ④ 52 ①
53 ③ 54 3 55 ④

F 지수함수의 활용

01 지수방정식, 지수부등식 02 $f(x)=g(x)$ 03 $a=b$
04 $f(x)<g(x)$, $f(x)>g(x)$ 05 ○ 06 × 07 ×
08 ○ 09 × 10 $x=\frac{7}{3}$ 11 $x=5$ 12 $x=\frac{11}{4}$
13 $x=0$ 또는 $x=3$ 14 $x=1$ 또는 $x=-2$ 15 $x=2$
16 $x=0$ 17 $x=2$ 또는 $x=3$ 18 $x>\frac{1}{4}$
19 $x\ge-1$ 20 $x<6$ 21 $-1\le x\le4$ 22 $1<x<2$
23 $1<x<2$ 24 $-1\le x\le2$ 25 $-2<x<4$
26 ④ 27 ③ 28 ① 29 ③ 30 ② 31 ②
32 ⑤ 33 ② 34 ⑤ 35 ③ 36 ③ 37 ③
38 ② 39 ③ 40 ④ 41 ③ 42 ③ 43 ③
44 ② 45 ④ 46 ② 47 ② 48 ③ 49 ③
50 ④ 51 ④ 52 ⑤ 53 ③ 54 ③

연습 [E-F]

01 ① 02 ③ 03 ③ 04 10 05 ④ 06 ⑤
07 ① 08 22 09 3 10 ① 11 100 12 ②
13 7 14 ② 15 ②

G 로그함수

01 로그함수 02 $y=\log_a(x-m)+n$ 03 $0<a<1$
04 ○ 05 × 06 ○ 07 × 08 ○
09 $\{x\,|\,x>1\}$ 10 $\{x\,|\,x<3\}$ 11 $\{x\,|\,x>0\}$
12 $\{x\,|\,x\neq-3$인 모든 실수$\}$ 13 $a=1, b=4$
14 $\log_2 8>\log_2 6$ 15 $\log_{\frac{1}{2}}5<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}$
16 $\log_3\sqrt{12}<\log_3 4<2\log_3 4$ 17 $y=\log_3(x+1)+4$
18 $y=-\log_3 x$ 19 $y=\log_3(-x)$ 20 $y=-\log_3(-x)$
21 풀이 참조 22 풀이 참조 23 최댓값 : 4, 최솟값 : 1
24 최댓값 : -3, 최솟값 : -6
25 최댓값 : -1, 최솟값 : $-\log_3 20$
26 최댓값 : 11, 최솟값 : 7 27 ② 28 ① 29 ③
30 ④ 31 ④ 32 ④ 33 ④ 34 ② 35 12
36 ③ 37 ② 38 ③ 39 4 40 ② 41 ②
42 ③ 43 ① 44 ⑤ 45 ② 46 ② 47 ⑤
48 3 49 ③ 50 ④ 51 ② 52 ④ 53 ②
54 ① 55 ① 56 ③ 57 ③

H 로그함수의 활용

01 $f(x)=a^b$ 02 $f(x)=g(x)$ 03 $g(x)=h(x)$

04 $0<f(x)<g(x)$, $0<g(x)<f(x)$ 05 ○ 06 ○

07 × 08 ○ 09 × 10 $x=\frac{1}{9}$ 11 $x=5$

12 $x=2$ 13 $x=1$ 14 $x=2$ 또는 $x=\frac{1}{4}$

15 $x=9$ 또는 $x=\frac{1}{81}$ 16 $x=2$ 또는 $x=16$

17 $x=\frac{1}{64}$ 또는 $x=8$ 18 $0<x\le 2$ 19 $x>1$

20 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ 21 $0<x<1$ 22 $2\le x<6$

23 $3<x\le 4$ 24 $-4<x<-3$ 또는 $0<x<1$

25 $0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>16$ 26 ⑤ 27 ③ 28 ②

29 ④ 30 ① 31 ② 32 ② 33 ① 34 ②

35 ② 36 ⑤ 37 ② 38 ⑤ 39 ③ 40 ④

41 12 42 ⑤ 43 ③ 44 ⑤ 45 ② 46 ①

47 ② 48 ② 49 ③ 50 ④ 51 ② 52 ②

53 ① 54 ② 55 ④ 56 ②

연습 [G–H]

01 ⑤ 02 13 03 ③ 04 ① 05 ④ 06 ③

07 ① 08 2 09 ② 10 ② 11 $\frac{1}{81}$ 12 ①

13 ③ 14 ② 15 14 16 ②

I 대단원 TEST [A–H]

01 ① 02 ④ 03 ② 04 ⑤ 05 ② 06 ④

07 ③ 08 ③ 09 ① 10 7 11 ⑤ 12 ①

13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16 ① 17 ⑤ 18 ②

19 ② 20 ⑤ 21 1 22 15 23 ⑤ 24 ①

25 1 26 12 27 25 28 ② 29 ④

Ⅱ 삼각함수

I 일반각과 호도법

01 일반각 02 1라디안, 호도법 03 $r\theta$, $\frac{1}{2}r^2\theta$, $\frac{1}{2}rl$

04 ○ 05 × 06 ○ 07 ○ 08 ○

09 풀이 참조 10 풀이 참조 11 ㄱ과 ㄷ, ㄴ과 ㄹ

12 $360^\circ\times n+120^\circ$ (n은 정수) 13 $360^\circ\times n+120^\circ$ (n은 정수)

14 $360^\circ\times n+30^\circ$ (n은 정수) 15 $360^\circ\times n+240^\circ$ (n은 정수)

16 제3사분면의 각 17 제1사분면의 각

18 제4사분면의 각 19 제2사분면의 각

20 $\frac{\pi}{2}$ 21 $\frac{7}{12}\pi$ 22 $-\frac{5}{6}\pi$ 23 $-\frac{5}{4}\pi$ 24 45°

25 72° 26 -210° 27 -300° 28 $l=4\pi$, $S=12\pi$

29 5 30 $\frac{3}{4}$ 31 ② 32 ① 33 ① 34 ④

35 ④ 36 ③ 37 ⑤ 38 ⑤ 39 ② 40 ③

41 ③ 42 ⑤ 43 ② 44 ④ 45 ② 46 ①

47 ③ 48 ② 49 ③ 50 ④ 51 ④ 52 ①

53 ② 54 ② 55 ④ 56 ① 57 ③

J 삼각함수

01 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ 02 <, < 03 $\sin\theta$ 04 1, $\frac{1}{4}$

05 ○ 06 ○ 07 ○ 08 × 09 × 10 $\frac{12}{13}$

11 $-\frac{5}{13}$ 12 $-\frac{12}{5}$

13 $\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

14 $\mathrm{P}(-1, -1)$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

15 $\mathrm{P}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

16 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{4}{3}$ 17 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

18 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 19 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 20 cos, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

21 $-$tan, -1 22 tan, 1 23 $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{1}{2}$

24 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}$ 25 $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{1}{2}$ 26 $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{1}{2}$

27 $-$tan, -1 28 $\frac{\pi}{6}$, $\sqrt{3}$ 29 cos, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

30 ② 31 ⑤ 32 ④ 33 ⑤ 34 ⑤ 35 ③

36 ③ 37 ② 38 ① 39 ⑤ 40 ④ 41 ③

42 ④ 43 ⑤ 44 ① 45 ③ 46 ② 47 ③

48 ④ 49 ⑤ 50 ② 51 ③ 52 ② 53 ⑤

54 ⑤ 55 0 56 1 57 ④ 58 ④ 59 ①

60 ③ 61 ③ 62 ② 63 ② 64 ① 65 ③

66 ② 67 ① 68 ⑤ 69 ④ 70 ⑤ 71 ④

72 ① 73 ② 74 ③ 75 ①

연습 [I–J]

01 ④ 02 ① 03 ⑤ 04 ① 05 $l=20$, $\theta=2$
06 ④ 07 ① 08 ④ 09 ④ 10 ① 11 ③
12 27 13 1

K 삼각함수의 그래프

01 주기 02 2π, 원점 03 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
04 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수) 05 ○ 06 × 07 ○
08 × 09 3 10 3 11 6 12 4 13 4
14 8 15 실수 전체의 집합 16 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
17 2π 18 원점에 대하여 대칭 19 실수 전체의 집합
20 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$ 21 2π 22 y축에 대하여 대칭
23 $\theta \ne n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)인 실수 전체의 집합
24 실수 전체의 집합 25 π 26 원점에 대하여 대칭
27 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수) 28 ③ 29 ③
30 ④ 31 ⑤ 32 ⑤ 33 ② 34 ② 35 ④
36 ④ 37 2π 38 ⑤ 39 ②

L 삼각함수의 최대·최소와 주기

01 $\{y \mid -3 \le y \le 3\}$, 3, -3, 2π 02 없고, $\frac{\pi}{2}$
03 2, 1 04 ○ 05 × 06 ○ 07 ○
08 풀이 참조 09 풀이 참조 10 풀이 참조
11 최댓값 : $\frac{1}{4}$, 최솟값 : $-\frac{1}{4}$ 12 최댓값 : 5, 최솟값 : -5
13 최댓값 : 없다, 최솟값 : 없다 14 풀이 참조
15 풀이 참조 16 풀이 참조 17 π, 1, 2π
18 $\frac{\pi}{2}$, 1, π 19 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$
20 최댓값 : 4, 최솟값 : -2, 주기 : 4π
21 최댓값 : -1, 최솟값 : -3, 주기 : π
22 최댓값 : 없다, 최솟값 : 없다, 주기 : $\frac{\pi}{3}$ 23 ①
24 ④ 25 ① 26 ④ 27 ② 28 ⑤ 29 ②
30 $\frac{\pi}{3}$ 31 ⑤ 32 ① 33 ③ 34 ③ 35 ④
36 ③ 37 41 38 ③ 39 2 40 ⑤ 41 ②
42 ⑤ 43 ③ 44 ① 45 ② 46 ④ 47 ⑤

M 삼각방정식과 삼각부등식

01 삼각방정식 02 $y=a$, x 03 삼각부등식
04 $y=a$, 아래 05 × 06 ○ 07 ○ 08 ○
09 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$ 10 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$
11 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 12 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$
13 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ 14 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$
15 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$ 16 $0 \le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$
17 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$
18 $0 \le x \le \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi \le x<2\pi$ 19 $\frac{5}{6}\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi$
20 $\frac{\pi}{2}<x \le \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x \le \frac{5}{3}\pi$ 21 ④ 22 ⑤
23 ④ 24 ② 25 ③ 26 ⑤ 27 ① 28 ①
29 ② 30 ③ 31 ② 32 ① 33 ③ 34 ⑤
35 ⑤ 36 ④ 37 ② 38 ② 39 ④ 40 ⑤
41 ④ 42 ① 43 ④ 44 ② 45 ③ 46 ②
47 ② 48 ⑤

연습 [K–M]

01 ⑤ 02 A 또는 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$ 03 ⑤ 04 ③
05 9 06 ① 07 9 08 ⑤ 09 ② 10 ②
11 ② 12 ① 13 ⑤ 14 ⑤

N 사인법칙과 코사인법칙

01 내접, a, $\sin B$, c, 사인법칙 02 사인법칙, 일정
03 코사인법칙, $\cos A$, c^2+a^2, c^2 04 ○ 05 ×
06 ○ 07 ○ 08 $R=3$, $a=3\sqrt{2}$ 09 $R=4$, $a=4\sqrt{3}$
10 $A=30°$, $B=60°$, $C=90°$
11 $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$
12 $1 : \sqrt{3} : 2$ 13 $\sqrt{13}$ 14 $\sqrt{10}$ 15 13
16 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos C=-\frac{1}{2}$
17 $\cos A=\frac{9}{16}$, $\cos B=\frac{1}{8}$, $\cos C=\frac{3}{4}$
18 $\cos A=-\frac{1}{2}$, $\cos B=\frac{23}{26}$, $\cos C=\frac{11}{13}$
19 ⑤ 20 ③ 21 ② 22 ③ 23 ③ 24 ③
25 ④ 26 ② 27 ⑤ 28 ③ 29 ④ 30 ①
31 ① 32 ⑤ 33 ① 34 ② 35 ① 36 ③
37 ⑤ 38 ④ 39 ⑤ 40 ③ 41 ⑤ 42 ③
43 ③ 44 ④ 45 ④ 46 ⑤

O 삼각함수의 삼각형에의 활용

01 h, $b\sin A$, $\sin A$ 02 a, $\sin A$, $4R$ 03 2, 2, $\sin\theta$
04 × 05 × 06 ○ 07 ○ 08 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 09 3
10 20 11 $6\sqrt{3}$ 12 $9\sqrt{3}$ 13 $12\sqrt{5}$ 14 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$
15 $24\sqrt{3}$ 16 3 17 $48\sqrt{3}$ 18 ③ 19 ② 20 ②
21 ④ 22 ① 23 ③ 24 ① 25 ④ 26 ②
27 ⑤ 28 ① 29 ④ 30 ③ 31 ① 32 80
33 ② 34 ① 35 ① 36 ① 37 ② 38 ④
39 ③ 40 ④ 41 ⑤ 42 ③ 43 ②

연습 [N–O]

01 ⑤ 02 ③ 03 ④ 04 ② 05 ③ 06 ①
07 ⑤ 08 ③ 09 ⑤ 10 6 11 116 12 ②
13 199

Ⅱ 대단원 TEST [I–O]

01 ② 02 ④ 03 ③ 04 ① 05 ① 06 ②
07 4 08 ③ 09 23 10 ④ 11 ④ 12 ⑤
13 ③ 14 ② 15 ② 16 ① 17 ④ 18 ②
19 ② 20 ③ 21 4 22 ⑤ 23 ⑤ 24 ③
25 32 26 $b=c$인 이등변삼각형 27 ⑤ 28 ②
29 5

Ⅲ 수열

P 등차수열

01 수열, 항 02 등차수열, 공차 03 $a+(n-1)d$
04 등차중항 05 $\frac{n(a+l)}{2}$ 06 ○ 07 ○
08 × 09 ○ 10 ○ 11 제2항 : 5 , 제4항 : 9
12 제2항 : 2, 제4항 : 12 13 제2항 : 5, 제4항 : 17
14 3 15 -2 16 $a_n=5n-3$ 17 $a_n=-8n+12$
18 $a_n=4n-15$ 19 $a=7$, $b=23$ 20 $a=12$, $b=4$
21 100 22 -40 23 200 24 -85 25 $a_n=2n+1$
26 ③ 27 ② 28 ④ 29 ② 30 ① 31 ④
32 ③ 33 ⑤ 34 ① 35 ③ 36 ④ 37 ②
38 ① 39 ⑤ 40 ④ 41 ② 42 ② 43 ②
44 ② 45 ① 46 ① 47 ④ 48 ① 49 ②
50 ② 51 ③ 52 ② 53 ④ 54 ② 55 ⑤
56 ③ 57 ② 58 ② 59 ⑤ 60 ③ 61 ③
62 ③ 63 ② 64 ⑤ 65 ④ 66 ② 67 ③
68 ② 69 ① 70 ④ 71 ④ 72 ②

Q 등비수열

01 등비수열, 공비 02 1, 2 03 ar^{n-1} 04 등비중항
05 $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ 06 ○ 07 × 08 ×
09 ○ 10 ○ 11 -2 12 $\frac{1}{2}$ 13 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
14 $a_n=(-3)^n$ 15 $a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
16 $a_n=-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2}$ 17 $x=15$ 또는 $x=-15$
18 $x=6$ 또는 $x=-6$ 19 1023 20 -15 21 $\frac{11}{4}$
22 45 23 $a_n=2\times 3^{n-3}$ 24 10 25 $\frac{1}{9}\times(3^{10}-1)$
26 $1000000\times(1.05)^{10}$원 27 $51a\times(1.02^{10}-1)$원
28 ④ 29 ④ 30 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$ 31 ② 32 ③
33 ③ 34 ① 35 ② 36 ⑤ 37 ① 38 ②
39 ④ 40 ③ 41 ③ 42 ② 43 ③ 44 ④
45 ① 46 ③ 47 ④ 48 511 49 ② 50 ③
51 ③ 52 ④ 53 ② 54 ④ 55 ② 56 ④
57 ③ 58 ③ 59 ②

연습 [P−Q]

01 14 02 ④ 03 ③ 04 ② 05 ③ 06 1290
07 ② 08 99 09 ③ 10 32 11 ③ 12 ②
13 ① 14 96 15 ① 16 ④

R 합의 기호 Σ

01 $10, k$ 02 $30, 11$ 03 6 04 $3k$ 05 190
06 ○ 07 × 08 ○ 09 × 10 ○ 11 $\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k}$
12 $\sum_{k=1}^{5}2$ 13 $\sum_{k=1}^{10}(2k+1)^2$ 14 $\sum_{k=1}^{n}2^k$
15 $2+3+4+\cdots+11$ 16 $1+3+3^2+\cdots+3^9$
17 $2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$
18 $2\times3+3\times4+4\times5+\cdots+10\times11$
19 55 20 15 21 30 22 57 23 9 24 74
25 ④ 26 ② 27 ③ 28 ① 29 ④ 30 ③
31 ④ 32 ① 33 ① 34 ② 35 ② 36 ④
37 ③ 38 ④ 39 ② 40 ③

S 여러 가지 수열의 합

01 5, 5, 15 02 5, 5, 5, 2, 55 03 k^3, 5, 5, 225
04 2 05 k, $k+1$ 06 × 07 × 08 ×
09 ○ 10 × 11 210 12 385 13 3025 14 65
15 80 16 70 17 35 18 $\frac{2}{5}$ 19 $\frac{5}{6}$ 20 $\frac{7}{15}$
21 2 22 2 23 9 24 6 25 ④ 26 ④
27 ④ 28 ⑤ 29 ⑤ 30 200 31 ① 32 ③
33 201 34 ② 35 ① 36 ③ 37 ② 38 ③
39 ① 40 ④

연습 [R−S]

01 ③ 02 ④ 03 ④ 04 ② 05 ③ 06 120
07 2035 08 ① 09 ③ 10 ② 11 ④
12 4 13 ② 14 ② 15 ② 16 ④

T 수열의 귀납적 정의

01 귀납적 정의 02 d 03 r 04 등차
05 등비 06 ○ 07 ○ 08 × 09 ○ 10 ○
11 ○ 12 7 13 14 14 3 15 −2 16 3
17 $a_n=2n-1$ 18 $a_n=-2n+9$ 19 $a_n=7n-10$
20 $a_n=-3n+4$ 21 3 22 −4 23 $\frac{1}{2}$
24 $a_n=2^{2n-1}$ 25 $a_n=-24\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
26 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 27 ④ 28 ⑤ 29 ① 30 ④
31 ② 32 ⑤ 33 ① 34 ② 35 768 36 ①
37 ② 38 4 39 ③ 40 10 41 ② 42 $\frac{5}{2}$

U 수학적 귀납법

01 $n=1$, $n=k+1$ 02 $n=m$ 03 $n=3$, $k\geq3$, $n=k+1$
04 ○ 05 ○ 06 × 07 ○ 08 ○ 09 $p(1)$
10 $p(2)$ 11 (가) $k+1$ (나) $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
12 (가) k (나) $2k+1$ (다) $(k+1)^2$ (라) $k+1$
13 (가) 2 (나) $k+1$ (다) $(k+1)^2$ (라) $k+1$
14 ④ 15 121 16 ③ 17 ③ 18 풀이 참조
19 ② 20 풀이 참조 21 ③ 22 풀이 참조

연습 [T−U]

01 92 02 33 03 ② 04 ② 05 ⑤ 06 ①
07 ② 08 ③ 09 ① 10 ⑤ 11 ⑤ 12 ④

Ⅲ 대단원 TEST [P−U]

01 ④ 02 ⑤ 03 ④ 04 ① 05 ② 06 ⑤
07 ⑤ 08 ④ 09 ④ 10 ③ 11 6 12 ①
13 ⑤ 14 ② 15 ④ 16 ③ 17 ④ 18 ③
19 ④ 20 ③ 21 28 22 ① 23 ④ 24 10
25 ③ 26 ③ 27 ②

I 지수함수와 로그함수

Simple A 거듭제곱과 거듭제곱근

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 8～9

01 답 n제곱, 거듭제곱

02 답 n제곱근, 거듭제곱근

03 답 n

04 답 ×

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 답 2^5

09 답 $3^2\times7^3$

10 답 $3^2\times5^2\times7^2$

11 답 $a^2\times b^4$

12 답 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

13 답 128

$2^3\times2^4=2^{3+4}=2^7=128$

14 답 729

$(3^2)^3=3^{2\times3}=3^6=729$

15 답 216

$(2\times3)^3=2^3\times3^3=8\times27=216$

16 답 $\frac{125}{216}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$

17 답 $\frac{1}{3}$

$3<4$이므로 $3^3\div3^4=\frac{1}{3^{4-3}}=\frac{1}{3}$

18 답 $\frac{x^3}{y}$

$(2x^2y)^3\div8x^3y^4=8x^6y^3\div8x^3y^4=\frac{x^3}{y}$

19 답 x^8y^{22}

$(x^3y)^2\times(x^2y^3)^4\div\left(\frac{x^3}{y^4}\right)^2$

$=x^6y^2\times x^8y^{12}\div\frac{x^6}{y^8}=x^6y^2\times x^8y^{12}\times\frac{y^8}{x^6}$

$=x^8y^{22}$

20 답 $\frac{8x^{26}y^5}{9}$

$(2x^4y^3)^3\div(3x^3y^4)^2\times(x^5y)^4$

$=8x^{12}y^9\times\frac{1}{9x^6y^8}\times x^{20}y^4=\frac{8x^{26}y^5}{9}$

21 답 $\frac{y^6}{4}$

$(x^4y^5)^6\times\left(\frac{1}{2}x^3y^3\right)^2\div(x^6y^6)^5$

$=x^{24}y^{30}\times\frac{1}{4}x^6y^6\times\frac{1}{x^{30}y^{30}}=\frac{y^6}{4}$

22 답 2

$\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

23 답 -3

$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$

24 답 -3

$-\sqrt[4]{81}=-\sqrt[4]{3^4}=-3$

25 답 $-\frac{1}{2}$

$\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}=\sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}=-\frac{1}{2}$

26 답 -4

-64의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-64$에서

$x^3+64=0$

$(x+4)(x^2-4x+16)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$

따라서 -64의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -4이다.

27 답 2, -2

16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$에서

$x^4-16=0$

$(x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x-2)(x+2)(x+2i)(x-2i)=0$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

따라서 16의 네제곱근 중에서 실수인 것은 2와 -2이다.

28 답 3, -3

729의 여섯제곱근을 x라 하면 $x^6=729$에서

$x^6-729=0$

$(x^3-27)(x^3+27)=0$

$(x-3)(x^2+3x+9)(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=\pm3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 729의 세제곱근 중에서 실수인 것은 3과 -3이다.

29 답 2

$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

30 답 5

$\sqrt[6]{25^3}=\sqrt[6]{(5^2)^3}=\sqrt[6]{5^6}=5$

31 답 11

$\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{81}+\dfrac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[3]{9\times81}+\sqrt[4]{\dfrac{64}{4}}$

$=\sqrt[3]{729}+\sqrt[4]{16}=\sqrt[3]{9^3}+\sqrt[4]{2^4}$

$=9+2=11$

32 답 1

$\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{5}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{3}}}=\dfrac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[12]{5}}\times\dfrac{\sqrt[12]{5}}{\sqrt[6]{3}}=1$

33 답 $\sqrt[6]{15}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}$

$\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{16}$이므로

$\sqrt[6]{15}<\sqrt[6]{16}<\sqrt[6]{27}$

$\therefore \sqrt[6]{15}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}$

34 답 $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}<\sqrt{2\sqrt{2}}$

$\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{2^2\times2}}=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[12]{(2^3)^3}=\sqrt[12]{2^9}=\sqrt[12]{512}$

$\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^2\times2}}=\sqrt[6]{18}=\sqrt[12]{18^2}=\sqrt[12]{324}$이므로

$\sqrt[12]{324}<\sqrt[12]{512}$

$\therefore \sqrt[3]{3\sqrt{2}}<\sqrt{2\sqrt{2}}$

유형 연습 [+내신 유형]

문제편 pp. 10~13

35 답 ⑤

⑤ $m<n$일 때, $a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}$

36 답 ③

$3^2\times27\div3^5=3^2\times3^3\div3^5=3^5\div3^5=1$

37 답 ①

$2^4\times5^4\div10^3=(2\times5)^4\div10^3=10^4\div10^3$

$=10^{4-3}=10$

38 답 ②

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{3^3}{2^3}\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{27}{8}\times\dfrac{8}{9}=3$

39 답 ⑤

$\left(\dfrac{5}{3}\right)^2\times\dfrac{18}{5}=\dfrac{5^2}{3^2}\times\dfrac{18}{5}=\dfrac{25}{9}\times\dfrac{18}{5}=5\times2=10$

40 답 ③

$(2x^3y^2)^3\times(3xy)^2\div(6x^5y^3)^2$

$=8x^9y^6\times9x^2y^2\div36x^{10}y^6$

$=72x^{9+2}y^{6+2}\div36x^{10}y^6$

$=2x^{11-10}y^{8-6}=2xy^2$

41 답 ③

$(xy)^2\times\dfrac{6x}{y}\div2x^3y=x^2y^2\times\dfrac{6x}{y}\div2x^3y$

$=6x^3y\div2x^3y=3$

42 답 ⑤

$x^4=16$에서 $x^4-16=0$, $(x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)=0$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

따라서 $4i$는 16의 네제곱근이 아니다.

43 답 ④

$x^3=-8$에서 $x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 -8의 세제곱근인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

44 답 ⑤

a의 n제곱근의 개수가 $f(a, n)$이므로

$f(2017, 2018)=2018$, $f(2016, 2017)=2017$

$f(2015, 2016)=2016$, $f(2014, 2015)=2015$

따라서 구하는 식의 값은 $2018-2017+2016-2015=2$

45 답 ③

① 216의 세제곱근은 6과 $-3\pm3\sqrt{3}i$이다. (거짓)

② 25의 네제곱근은 $\pm\sqrt{5}$와 $\pm\sqrt{5}i$이다. (거짓)

③ $\sqrt[4]{256}$은 256의 네제곱근 중 하나이다. (참)

④ n이 홀수일 때 음의 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$의 1개이다. (거짓)

⑤ n이 짝수일 때 $a<0$이면 a의 n제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다. (거짓)

46 답 ②

6의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{6}$으로 1개이므로 $p=1$

-5의 네제곱근 중 실수인 것은 없으므로 $q=0$

-4의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-4}$로 1개이므로

$r=1$

$\therefore p+q+r=1+0+1=2$

47 답 ④

ㄱ. $(-x)^{2n+1}$은 음수이고 $2m$은 짝수이므로

$\sqrt[2m]{(-x)^{2n+1}}$은 실수가 아니다.

ㄴ. $(-x)^{2n}$은 양수이고 $2m+1$은 홀수이므로

$\sqrt[2m+1]{(-x)^{2n}}$은 실수이다.

ㄷ. $(-x)^{2n+1}$은 음수이고 $2m+1$은 홀수이므로

$\sqrt[2m+1]{(-x)^{2n+1}}$은 실수이다.

따라서 실수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

48 답 ④

ㄱ. n이 홀수일 때, $\sqrt[n]{(-3)^n}=-3$ (참)

ㄴ. n이 짝수일 때, $x^n=20$을 만족시키는 실수 x는

$x=\pm\sqrt[n]{20}$으로 2개이다. (참)

ㄷ. n이 짝수일 때, $x^n=-4$를 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 0개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

49 답 ④

m의 n제곱근 중 실수인 것의 개수가 $f(m,\ n)$이므로

ㄱ. 2018의 제곱근 중 실수는 $\pm\sqrt{2018}$로 2개이다.

$\therefore f(2018,\ 2)=2$ (참)

ㄴ. -2018의 네제곱근 중 실수는 존재하지 않으므로 0개 이다.

$\therefore f(-2018,\ 4)=0$ (거짓)

ㄷ. $n=2k+1$일 때, n은 홀수이므로 임의의 m에 대하여 m의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{m}$으로 1개이다.

$\therefore f(m,\ n)=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

50 답 ②

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

51 답 ②

$$\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{\frac{9}{2}}+\sqrt[4]{16^2}=\sqrt[3]{6\times\frac{9}{2}}+\sqrt[4]{(4^2)^2}$$
$$=\sqrt[3]{27}+\sqrt[4]{4^4}=\sqrt[3]{3^3}+4$$
$$=3+4=7$$

52 답 ③

$$\sqrt[6]{16}\times\sqrt[6]{4}+\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[6]{16\times4}+\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$$
$$=\sqrt[6]{64}+\sqrt[3]{27}=\sqrt[6]{2^6}+\sqrt[3]{3^3}$$
$$=2+3=5$$

53 답 ④

$\sqrt[3]{\sqrt{4096}}+\sqrt[3]{125}=\sqrt[6]{4^6}+\sqrt[3]{5^3}=4+5=9$

54 답 ⑤

$$3^2-\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}=9-\sqrt[3]{\frac{128}{2}}=9-\sqrt[3]{64}=9-\sqrt[3]{4^3}$$
$$=9-4=5$$

55 답 ④

$$(\sqrt[3]{3})^6-\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[3]{3^6}-\sqrt[6]{64}=\sqrt[3]{(3^2)^3}-\sqrt[6]{2^6}$$
$$=3^2-2=9-2=7$$

56 답 144

$$2\times\sqrt[3]{54}+3\times\sqrt[3]{16}=2\times\sqrt[3]{3^3\times2}+3\times\sqrt[3]{2^3\times2}$$
$$=6\times\sqrt[3]{2}+6\times\sqrt[3]{2}$$
$$=12\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{12^3\times2}$$

따라서 $k=12^3\times2$이므로

$$\frac{k}{24}=\frac{12^3\times2}{24}=\frac{12^3\times2}{12\times2}=12^2=144$$

57 답 23

$\sqrt[6]{a}=\sqrt[12]{a^2}$이고 $\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[12]{(a^3)^3}=\sqrt[12]{a^9}$이므로

$\sqrt[6]{a}\times\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[12]{a^2}\times\sqrt[12]{a^9}=\sqrt[12]{a^{2+9}}=\sqrt[12]{a^{11}}$

따라서 $m=12$, $n=11$이므로

$m+n=12+11=23$

58 답 5

$$\sqrt[3]{a^2\times\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}=\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[12]{a\sqrt{a}}=\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[12]{a}\times\sqrt[24]{a}$$
$$=\sqrt[24]{(a^2)^8}\times\sqrt[24]{a^2}\times\sqrt[24]{a}$$
$$=\sqrt[24]{a^{16}}\times\sqrt[24]{a^2}\times\sqrt[24]{a}$$
$$=\sqrt[24]{a^{16+2+1}}=\sqrt[24]{a^{19}}$$

따라서 $m=24$, $n=19$이므로

$m-n=24-19=5$

59 답 36

$\sqrt[6]{a}=4$에서 $a=4^6=(2^2)^6=2^{12}$

$\sqrt[4]{b}=27$에서 $b=27^4=(3^3)^4=3^{12}$

따라서 $ab=2^{12}\times3^{12}=(2\times3)^{12}=6^{12}$이므로

$\sqrt[6]{ab}=\sqrt[6]{6^{12}}=\sqrt[6]{(6^2)^6}=6^2=36$

60 답 ④

전자계산기에 입력한 결과는 $3\times\sqrt{\sqrt{A}}$ 이다.

이 값이 6이므로

$3\times\sqrt{\sqrt{A}}=6$에서 $3\times\sqrt[4]{A}=6$, $\sqrt[4]{A}=2$

$\therefore A=2^4=16$

61 답 ④

$A=\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125}$, $B=\sqrt[3]{15}=\sqrt[6]{15^2}=\sqrt[6]{225}$,

$C=\sqrt[6]{111}$

이때, $\sqrt[6]{111}<\sqrt[6]{125}<\sqrt[6]{225}$이므로 $\sqrt[6]{111}<\sqrt{5}<\sqrt[3]{15}$

$\therefore C<A<B$

62 답 ①

$A=\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}$

$B=\sqrt[4]{7}=\sqrt[12]{7^3}=\sqrt[12]{343}$

$C=\sqrt[6]{19}=\sqrt[12]{19^2}=\sqrt[12]{361}$

이때, $\sqrt[12]{256}<\sqrt[12]{343}<\sqrt[12]{361}$이므로 $\sqrt[3]{4}<\sqrt[4]{7}<\sqrt[6]{19}$

$\therefore A<B<C$

63 답 ④

$A=\sqrt[3]{5}=\sqrt[12]{5^4}=\sqrt[12]{625}$

$B=\sqrt[4]{10}=\sqrt[12]{10^3}=\sqrt[12]{1000}$

$C=\sqrt[6]{20}=\sqrt[12]{20^2}=\sqrt[12]{400}$

이때, $\sqrt[12]{400}<\sqrt[12]{625}<\sqrt[12]{1000}$이므로 $\sqrt[6]{20}<\sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{10}$

$\therefore C<A<B$

ㄱ. $A<B$이므로 $A-B<0$ (거짓)

ㄴ. $C<B$이므로 $B-C>0$ (참)

ㄷ. $C<A$이므로 $C-A<0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

Simple B 지수의 확장과 지수법칙

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 14 ~ 15

01 답 $\dfrac{1}{a^n}$

02 답 $\sqrt[n]{a^m}$

03 답 $r-s$

04 답 a^{xy}

05 답 $a^x b^x$

06 답 ○

07 답 ×

08 답 ×

09 답 ×

10 답 1

11 답 $\dfrac{1}{49}$

12 답 $\dfrac{1}{9}$

13 답 $\dfrac{9}{49}$

14 답 1

$a^2\times a^3\div a^5=a^{2+3-5}=a^0=1$

15 답 $\dfrac{1}{a^4}$

$a^4\times(a^{-3})^2\div a^2=a^4\times a^{-6}\times a^{-2}=a^{4-6-2}=a^{-4}=\dfrac{1}{a^4}$

16 답 a^{26}

$(a^3)^4\div(a^5)^{-2}\times a^4=a^{12}\times a^{10}\times a^4=a^{12+10+4}=a^{26}$

17 답 $\dfrac{1}{a^6}$

$\dfrac{(a^{-4})^2\times(a^2)^4}{a^2\times a^4}=\dfrac{a^{-8}\times a^8}{a^6}=\dfrac{1}{a^6}$

18 답 $2^{\frac{5}{4}}$

19 답 $5^{\frac{4}{7}}$

20 답 $2^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$

21 답 $5^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5^2}=5^{\frac{2}{3}}$

22 답 $\sqrt[3]{16^2}$

23 답 $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2}$

24 답 $\sqrt[10]{\dfrac{1}{243}}$

25 답 $\sqrt[8]{16^3}$

26 답 36

$(6^3)^{\frac{2}{3}}=6^{3\times\frac{2}{3}}=6^2=36$

27 답 16

$4^{\frac{1}{3}}\times32^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\times32^{\frac{2}{3}}=(2\times32)^{\frac{2}{3}}=64^{\frac{2}{3}}=(4^3)^{\frac{2}{3}}$

$=4^2=16$

28 답 $\dfrac{9}{4}$

$\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{3^2}{2^2}=\dfrac{9}{4}$

29 답 $9^{\frac{1}{3}}$

$27^{\frac{1}{3}}\div27^{\frac{1}{9}}=27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}=27^{\frac{2}{9}}=(3^3)^{\frac{2}{9}}=3^{\frac{2}{3}}=9^{\frac{1}{3}}$

30 답 $\dfrac{1}{a}$

$\left(a^{\frac{3}{8}}\times a^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(a^{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}=a^{\frac{1}{2}\times(-2)}=a^{-1}=\dfrac{1}{a}$

31 답 $a^{\frac{7}{24}}$

$\sqrt{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[4]{a}}=\sqrt{a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{4}}}=\sqrt{a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}}$

$=\sqrt{a^{\frac{7}{12}}}=\left(a^{\frac{7}{12}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{12}\times\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{24}}$

32 답 $a^{\frac{23}{24}}$

$\sqrt[4]{a^3\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}=\sqrt[8]{a^6\times a\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[8]{a^7\times\sqrt[3]{a^2}}$

$=\sqrt[24]{a^{21}\times a^2}=\sqrt[24]{a^{23}}=a^{\frac{23}{24}}$

다른 풀이

$\sqrt[4]{a^3\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}=a^{\frac{3}{4}}\times\sqrt[8]{a\sqrt[3]{a^2}}=a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}\times\sqrt[24]{a^2}$

$=a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{1}{12}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}}=a^{\frac{23}{24}}$

33 답 $5^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

$5^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times5^{\sqrt{3}}=5^{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}}=5^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

34 답 7

$(7^{\sqrt{3}})^{\frac{\sqrt{3}}{3}}=7^{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=7^1=7$

35 답 36

$(4^{\sqrt{2}}\times3^{\sqrt{8}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=4\times3^2=4\times9=36$

36 답 $2^{\sqrt{2}}$

$4^{\sqrt{2}+1} \div 2^{\sqrt{2}+2} = 2^{2\sqrt{2}+2} \div 2^{\sqrt{2}+2} = 2^{(2\sqrt{2}+2)-(\sqrt{2}+2)} = 2^{\sqrt{2}}$

37 답 $a^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

$a^{\sqrt{3}} \div a^{2\sqrt{3}} \times a^{\sqrt{2}} = a^{\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

38 답 $a^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$a^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \div a^{\sqrt{2}} \times a^{\frac{\sqrt{2}}{6}} = a^{\frac{\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}} = a^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

39 답 $a^{20}b^7$

$(a^{2\sqrt{2}} b^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \div (a^{3\sqrt{3}} b^{\sqrt{3}})^{-2\sqrt{3}}$

$= a^2 b \div (a^{-18} b^{-6}) = a^{2-(-18)} b^{1-(-6)} = a^{20} b^7$

40 답 $a-b$

$\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\times 2} - b^{\frac{1}{2}\times 2}$

$= a-b$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 16~21

41 답 ①

$5^5 \times 25^{-2} = 5^5 \times (5^2)^{-2} = 5^5 \times 5^{-4} = 5^{5+(-4)} = 5$

42 답 ①

$7^{-2} \times 49 = 7^{-2} \times 7^2 = 7^{(-2)+2} = 7^0 = 1$

43 답 ③

$3^4 \div 6^2 \times 2^3 = 3^4 \div (2\times 3)^2 \times 2^3$

$= 3^4 \div (2^2 \times 3^2) \times 2^3$

$= 3^4 \div 3^2 \times 2^3 \div 2^2$

$= 3^{4-2} \times 2^{3-2}$

$= 9 \times 2 = 18$

44 답 ③

$8^3 \times 4^{-2} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2^3)^3 \times (2^2)^{-2} \div 2^2$

$= 2^9 \times 2^{-4} \div 2^2 = 2^{9-4-2}$

$= 2^3 = 8$

45 답 ③

$16^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = (2^4)^{\frac{3}{4}} \times \frac{9}{4} = 2^3 \times \frac{9}{4} = 8 \times \frac{9}{4} = 18$

46 답 ①

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 16^{\frac{3}{4}} \times 125^{\frac{1}{3}} = 2^{-3} \times (2^4)^{\frac{3}{4}} \times (5^3)^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{-3} \times 2^3 \times 5 = 5$

47 답 8

$\sqrt{9a \times \sqrt[3]{a}} = 3\sqrt[6]{a^3 \times a} = 3\sqrt[6]{a^4} = 3 \times a^{\frac{4}{6}} = 3 \times a^{\frac{2}{3}}$

따라서 $x=3$, $m=3$, $n=2$이므로

$m+n+x = 3+2+3 = 8$

48 답 23

$\sqrt[3]{a\sqrt{a^2\sqrt{a^3}}} = \sqrt[6]{a^2 \times a^2\sqrt{a^3}} = \sqrt[6]{a^4\sqrt{a^3}}$

$= \sqrt[12]{a^8 \times a^3} = \sqrt[12]{a^{11}} = a^{\frac{11}{12}}$

따라서 $m=12$, $n=11$이므로 $m+n=12+11=23$

다른 풀이

$\sqrt[3]{a\sqrt{a^2\sqrt{a^3}}} = a^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[6]{a^2\sqrt{a^3}} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{6}} \times \sqrt[12]{a^3}$

$= a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{6}} \times a^{\frac{3}{12}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}} = a^{\frac{11}{12}}$

49 답 ③

$4^{\sqrt{2}} \times \left(\frac{3^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{2}\right)^{2\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}} \times \frac{3^2}{2^{2\sqrt{2}}} = 3^2 = 9$

50 답 ④

$7^{\sqrt{2}} \times \left(\frac{7}{3^{\sqrt{2}}}\right)^{-\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{2}} \times \frac{7^{-\sqrt{2}}}{3^{-2}} = \frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$

51 답 64

$9^{\sqrt{3}} \times \left(\frac{3}{2^{\sqrt{3}}}\right)^{-2\sqrt{3}} = 3^{2\sqrt{3}} \times \frac{3^{-2\sqrt{3}}}{2^{-6}} = 2^6 = 64$

52 답 ⑤

$(a^{\sqrt{27}} \times b^{-\sqrt{3}})^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = a^{-\sqrt{9}} \times b = a^{-3} \times b = \frac{b}{a^3}$

53 답 ①

$25^x = 3$이므로

$\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{4}{3}x} = (5^{-3})^{-\frac{4}{3}x} = 5^{4x} = (5^{2x})^2 = (25^x)^2 = 3^2 = 9$

54 답 9

$3^x = 11$이므로 $11^{\frac{y}{3}} = (3^x)^{\frac{y}{3}} = 3^{\frac{xy}{3}} = 27 = 3^3$

따라서 $\frac{xy}{3} = 3$이므로 $xy = 9$

55 답 ④

$10^x = 9$이므로

$\frac{729^{\frac{1}{x}}}{100} = \frac{(9^3)^{\frac{1}{x}}}{100} = \frac{9^{\frac{3}{x}}}{100} = \frac{(10^x)^{\frac{3}{x}}}{100} = \frac{10^3}{10^2} = 10$

56 답 ④

$a = 9^{27} = (3^2)^{27} = 3^{54}$이므로

$27^9 = (3^3)^9 = 3^{27} = (3^{54})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \qquad \therefore x = \frac{1}{2}$

57 답 ④

$\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)(x+y) = (x-y)(x+y) = x^2-y^2$

58 답 11

$2^{2x}=6$, $2^{2y}=5$이므로

$(2^x+2^y)(2^x-2^y)(2^{2x}+2^{2y})=(2^{2x}-2^{2y})(2^{2x}+2^{2y})$

$=(2^{2x})^2-(2^{2y})^2$

$=6^2-5^2=36-25=11$

59 답 ②

$\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^2-\left(x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}\right)^2$

$=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+2\right)-\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}-2\right)=4$

60 답 ④

$\dfrac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{x+y}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$

$=\dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$

$=\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)+\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)=2x^{\frac{1}{3}}$

심플 정리

[인수분해 공식]

(1) $x^2\pm2xy+y^2=(x\pm y)^2$ (복호동순)

(2) $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

(3) $x^3\pm3x^2y+3xy^2\pm y^3=(x\pm y)^3$ (복호동순)

(4) $x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)$ (복호동순)

61 답 ①

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=-1$이므로

$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^2+2=(-1)^2+2=3$

$\therefore\ a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=3^2-2=9-2=7$

62 답 ③

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$이므로

$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2=4^2-2=16-2=14$이고

$(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4=14^2-4=196-4=192$

$\therefore\ a-a^{-1}=\pm\sqrt{192}=\pm8\sqrt{3}$

이때, $a>a^{-1}$이므로 $a-a^{-1}=8\sqrt{3}$

63 답 ②

$x-x^{-1}=5$에서

$(x+x^{-1})^2=(x-x^{-1})^2+4=5^2+4=25+4=29$

따라서 $k^2=29$이므로 $\sqrt{k^2+7}=\sqrt{29+7}=\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6$

64 답 ③

$3^x+3^{-x}=5$이므로

$3^{3x}+3^{-3x}=(3^x+3^{-x})^3-3\times3^x\times3^{-x}(3^x+3^{-x})$

$=(3^x+3^{-x})^3-3(3^x+3^{-x})$

$=5^3-3\times5=125-15=110$

65 답 ④

$5^{\frac{x}{3}}+5^{-\frac{x}{3}}=3$이므로

$5^x+5^{-x}=\left(5^{\frac{x}{3}}+5^{-\frac{x}{3}}\right)^3-3\times5^{\frac{x}{3}}\times5^{-\frac{x}{3}}\left(5^{\frac{x}{3}}+5^{-\frac{x}{3}}\right)$

$=\left(5^{\frac{x}{3}}+5^{-\frac{x}{3}}\right)^3-3\left(5^{\frac{x}{3}}+5^{-\frac{x}{3}}\right)$

$=3^3-3\times3=27-9=18$

$\therefore\ 5^{2x}+5^{-2x}=(5^x+5^{-x})^2-2=18^2-2$

$=324-2=322$

66 답 ②

$7^{\frac{x}{2}}-7^{-\frac{x}{2}}=-2$이므로

$7^{\frac{3}{2}x}-7^{-\frac{3}{2}x}=\left(7^{\frac{x}{2}}-7^{-\frac{x}{2}}\right)^3+3\times7^{\frac{x}{2}}\times7^{-\frac{x}{2}}\left(7^{\frac{x}{2}}-7^{-\frac{x}{2}}\right)$

$=\left(7^{\frac{x}{2}}-7^{-\frac{x}{2}}\right)^3+3\left(7^{\frac{x}{2}}-7^{-\frac{x}{2}}\right)$

$=(-2)^3+3\times(-2)=(-8)+(-6)=-14$

심플 정리

[곱셈 공식의 변형]

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

67 답 4

$a^{2x}=5$이므로 $\dfrac{a^x+3a^{-x}}{a^x-3a^{-x}}$의 분모, 분자에 a^x을 각각 곱하면

$\dfrac{a^x+3a^{-x}}{a^x-3a^{-x}}=\dfrac{a^{2x}+3}{a^{2x}-3}=\dfrac{5+3}{5-3}=\dfrac{8}{2}=4$

68 답 ⑤

$a^{2x}=3$이므로 $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$의 분모, 분자에 a^{3x}을 각각 곱하면

$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{a^{6x}-1}{a^{4x}-a^{2x}}=\dfrac{3^3-1}{3^2-3}=\dfrac{26}{6}=\dfrac{13}{3}$

따라서 $k=\dfrac{13}{3}$이므로 $3k=13$

다른 풀이

$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$의 분모, 분자에 a^x을 각각 곱하면

$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1}=\dfrac{3^2-\frac{1}{3}}{3-1}=\dfrac{\frac{26}{3}}{2}=\dfrac{26}{6}=\dfrac{13}{3}$

$\therefore\ k=\dfrac{13}{3}\Rightarrow 3k=13$

69 답 ④

$\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{1}{3}$의 좌변의 분모, 분자에 2^x을 각각 곱하면

$\dfrac{4^x-1}{4^x+1}=\dfrac{1}{3}$, $3(4^x-1)=4^x+1$, $2\times4^x=4$

따라서 $4^x=2$이므로

$4^x+4^{-x}=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

70 답 ④

$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-3$의 좌변의 분모, 분자에 2^a을 각각 곱하면

$\frac{4^a+1}{4^a-1}=-3$, $4^a+1=-3(4^a-1)$, $4\times4^a=2$

따라서 $4^a=\frac{1}{2}$이므로

$4^a-4^{-a}=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$

71 답 ②

$3^x=4^y=12$이므로

$3^x=12$에서 $3=12^{\frac{1}{x}}$ ⋯ ㉠, $4^y=12$에서 $4=12^{\frac{1}{y}}$ ⋯ ㉡

㉠×㉡을 하면 $12^{\frac{1}{x}}\times12^{\frac{1}{y}}=3\times4=12$에서 $12^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=12^1$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

72 답 ②

$4^x=9^y=6$이므로

$4^x=6$에서 $4=6^{\frac{1}{x}}$ ⋯ ㉠, $9^y=6$에서 $9=6^{\frac{1}{y}}$ ⋯ ㉡

㉠×㉡을 하면 $6^{\frac{1}{x}}\times6^{\frac{1}{y}}=4\times9=36$에서 $6^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=6^2$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$

73 답 ①

$2^x=3^y=18$이므로

$2^x=18$에서 $2=18^{\frac{1}{x}}$ ⋯ ㉠, $3^y=18$에서 $3=18^{\frac{1}{y}}$ ⋯ ㉡

㉠^{2}×㉡^{4}을 하면

$\left(18^{\frac{1}{x}}\right)^2\times\left(18^{\frac{1}{y}}\right)^4=2^2\times3^4=(2\times3^2)^2=18^2$에서

$18^{\frac{2}{x}}\times18^{\frac{4}{y}}=18^{\frac{2}{x}+\frac{4}{y}}=18^2$

$\therefore \frac{2}{x}+\frac{4}{y}=2$

74 답 ④

$53^x=8$에서 $53=8^{\frac{1}{x}}=(2^3)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{3}{x}}$ ⋯ ㉠

$424^y=32$에서 $424=32^{\frac{1}{y}}=(2^5)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{5}{y}}$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $2^{\frac{5}{y}}\div2^{\frac{3}{x}}=424\div53=8$에서 $2^{\frac{5}{y}-\frac{3}{x}}=2^3$

$\therefore \frac{5}{y}-\frac{3}{x}=3$

75 답 ①

$23^x=9$에서 $23=9^{\frac{1}{x}}=(3^2)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{x}}$ ⋯ ㉠

$207^y=243$에서 $207=243^{\frac{1}{y}}=(3^5)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{5}{y}}$ ⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $3^{\frac{2}{x}}\div3^{\frac{5}{y}}=23\div207=\frac{1}{9}$에서 $3^{\frac{2}{x}-\frac{5}{y}}=3^{-2}$

$\therefore \frac{2}{x}-\frac{5}{y}=-2$

76 답 ③

$2^x=3^y=12^z=k$라 하면

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$

$3^y=k$에서 $3=k^{\frac{1}{y}}$

$12^z=k$에서 $12=k^{\frac{1}{z}}$

이때, $xyz\neq0$이므로 $k\neq1$이고

$k^{\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=k^{\frac{2}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}}=2^2\times3\div12=1$에서

$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$

77 답 20

$6=\frac{30}{5}$이고 $30^y=5$이므로

$6^{\frac{2x+y}{1-y}}=\left(\frac{30}{5}\right)^{\frac{2x+y}{1-y}}=\left(\frac{30}{30^y}\right)^{\frac{2x+y}{1-y}}=(30^{1-y})^{\frac{2x+y}{1-y}}$

$=30^{2x+y}=(30^x)^2\times30^y$

$=2^2\times5=20$

78 답 ②

80인분의 식사 준비시간은 $3.5\times80^{\frac{1}{2}}$이고,

5인분의 식사 준비시간은 $3.5\times5^{\frac{1}{2}}$이므로

$\frac{3.5\times80^{\frac{1}{2}}}{3.5\times5^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{80}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=16^{\frac{1}{2}}=(4^2)^{\frac{1}{2}}=4$

따라서 80인분의 식사 준비시간은 5인분의 식사 준비시간의 4배이다.

$\therefore k=4$

79 답 ③

빵 48조각을 굽는데 걸리는 시간은 $0.8\times48^{\frac{2}{3}}$이고,

빵 6조각을 굽는데 걸리는 시간은 $0.8\times6^{\frac{2}{3}}$이므로

$\frac{0.8\times48^{\frac{2}{3}}}{0.8\times6^{\frac{2}{3}}}=\left(\frac{48}{6}\right)^{\frac{2}{3}}=8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^2=4$

따라서 빵 48조각을 굽는데 걸리는 시간은 빵 6조각을 굽는데 걸리는 시간의 4배이다.

$\therefore k=4$

80 답 16

8000개의 물건을 만드는 데 걸리는 시간은 $0.7\times8000^{\frac{2}{3}}$이고, 125개의 물건을 만드는 데 걸리는 시간은 $0.7\times125^{\frac{2}{3}}$이므로

$\frac{0.7\times8000^{\frac{2}{3}}}{0.7\times125^{\frac{2}{3}}}=\left(\frac{8000}{125}\right)^{\frac{2}{3}}=64^{\frac{2}{3}}=(2^6)^{\frac{2}{3}}=2^4=16$

따라서 8000개의 물건을 만드는 데 걸리는 시간은 125개의 물건을 만드는 데 걸리는 시간의 16배이다.

81 답 140

어떤 방사능 물질 A의 반감기가 28년이므로 $T=28$이고, 이 물질의 양이 처음 양의 3.125 %가 되는 데 걸리는 시간 t를 구하기 위하여

$K=K_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$에 $K=0.03125K_0$, $T=28$을 주어진 조건식에 대입하면 $0.03125K_0=K_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}}$에서

$\frac{1}{32}K_0=K_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{28}}$

$\frac{t}{28}=5 \qquad \therefore t=140$

따라서 이 물질의 양이 처음 양의 3.125 %가 되는데 걸리는 시간은 140년이다.

82 답 ⑤

초기 농도가 r인 기체 P가 분해가 시작되고 t_1초가 지났을 때의 농도가 r^2이므로

$r^2=r\times10^{-kt_1} \qquad \therefore r=10^{-kt_1}$ … ㉠

또, 초기 농도가 r인 기체 P가 분해가 시작되고 t_2초가 지났을 때의 농도가 r^6이므로

$r^6=r\times10^{-kt_2} \qquad \therefore r^5=10^{-kt_2}$ … ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(10^{-kt_1})^5=10^{-kt_2}$, $10^{-5kt_1}=10^{-kt_2}$

$-5kt_1=-kt_2 \qquad \therefore t_2=5t_1(\because k\neq0)$

$\therefore m=5$

83 답 ②

어떤 우주선이 빛의 속력의 80 %의 속력으로 움직이므로 이 우주선의 속력을 v라 하면 $v=\frac{80}{100}c=\frac{4}{5}c$

$\therefore T=\left\{1-\left(\frac{\frac{4}{5}c}{c}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{9}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}$

즉, 우주선 내부에서 1초가 흐르는 동안 우주선 밖의 정지된 장소에서는 $\frac{5}{3}$초가 흐르므로 우주선 밖의 정지된 장소에서 1초가 흐르는 동안 우주선 내부에서는 a초가 흐르므로

$1:\frac{5}{3}=a:1$

$\therefore a=\frac{3}{5}$

연습 문제 [A~B] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 22~23

01 답 ④

$3\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}=3\sqrt[3]{3^3\times3}+\sqrt[3]{2^3\times3}$

$=9\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}=11\sqrt[3]{3}=k\sqrt[3]{3}$

$\therefore k=11$

심플 정리

[거듭제곱근의 성질]

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상인 자연수일 때,

(1) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (2) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(3) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ (4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

(5) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

02 답 ②

$f(x)=\frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}+x^{-5}+x^{-6}+x^{-7}}$

$=\frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{x^{-7}(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}=\frac{1}{x^{-7}}=x^7$

$\therefore f(\sqrt[14]{3})=(\sqrt[14]{3})^7=\left(3^{\frac{1}{14}}\right)^7=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

03 답 108

$\sqrt[3]{2k}$의 값이 자연수가 되려면 $k=2^2x^3$ (단, x는 자연수) … ㉠

의 꼴이어야 한다.

$\sqrt{3k}$의 값이 자연수가 되려면 $k=3y^2$ (단, y는 자연수) … ㉡

의 꼴이어야 한다. … Ⅰ

$\sqrt[3]{2k}$, $\sqrt{3k}$가 모두 자연수가 되려면 ㉠, ㉡에서

$k=2^2\times3^3\times z^6$ (단, z는 자연수)

의 꼴이어야 한다. … Ⅱ

따라서 자연수 k의 최솟값은 $z=1$일 때

$2^2\times3^3\times1^6=108$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\sqrt[3]{2k}$와 $\sqrt{3k}$가 각각 자연수가 될 수 있는 k의 꼴을 구한다.	30%
Ⅱ	$\sqrt[3]{2k}$와 $\sqrt{3k}$가 모두 자연수가 될 수 있는 k의 꼴을 구한다.	40%
Ⅲ	자연수 k의 최솟값을 구한다.	30%

04 답 5

m^n의 세제곱근은 $m^{\frac{n}{3}}$이다. 이 값이 자연수가 되기 위해서는 n이 3의 배수가 되어야 하므로 $n=3$ 또는 $n=6$이다.

(i) $n=3$일 때, 조건을 만족시키는 m의 값은 2이다.

(ii) $n=6$일 때, 조건을 만족시키는 m의 값은 2, 3, 4, 5이다.

(i), (ii)에 의하여 m^n의 세제곱근이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 (2, 3), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6)으로 5이다.

05 답 ③

자연수 $n(n\ge2)$에 대하여 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$라 할 때, $f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)$의 값은?

$x^n=a$가 실수인 해를 가지는 조건을 생각하여 $f_n(a)$의 값을 구해.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 실수 a의 n제곱근을 식으로 나타내어 $f_n(a)$를 구해.

-3의 제곱근 중 실수는 없으므로 $f_2(-3)=0$ 방정식 $x^n=a$의 근 중에서 실수의 개수야.

$x^2=-3$에서 $x=\pm\sqrt{-3}$이니까 허수야.

-2의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{-2}$로 한 개뿐이므로

$f_3(-2)=1$ $x^3=-2$

5의 네제곱근 중 실수는 $\sqrt[4]{5}$, $-\sqrt[4]{5}$로 2개이므로

$f_4(5)=2$ $x^4=5$

$\therefore f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)=0+1+2=3$

06 답 ①

세 수 $A=\sqrt{\sqrt[3]{5}}$, $B=\sqrt[3]{3}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{20}}$의 대소 관계는?

지수법칙을 이용하여 지수를 통일한 후 크기를 비교해.

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<B<A$

1st 지수법칙을 이용하여 거듭제곱근 A, B, C의 지수를 통일해.

$A=\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[2\times3]{5}=\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{6}}$ $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$

$B=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$

$C=\sqrt[3]{\sqrt{20}}=\sqrt[3\times2]{20}=\sqrt[6]{20}=20^{\frac{1}{6}}$

이 세 수를 각각 6제곱하면 지수인 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$을 통분하기 위해서 6, 3, 6의 최소공배수를 곱해야 해.

$A^6=5$, $B^6=3^2=9$, $C^6=20$

따라서 $A^6<B^6<C^6$이므로 $A<B<C$

다른 풀이

$A=\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

$B=\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$ $\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mk]{a^{nk}}$

$C=\sqrt[3]{\sqrt{20}}=\sqrt[6]{20}$

$\therefore A<B<C$

07 답 ①

$\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$

08 답 ③

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=2$에서 $\frac{1}{3}=2^{\frac{1}{x}}$

$27^y=32$에서 $27=32^{\frac{1}{y}}=(2^5)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{5}{y}}$

$\therefore 2^{\frac{1}{x}+\frac{5}{y}}=2^{\frac{1}{x}}\times2^{\frac{5}{y}}=\frac{1}{3}\times27=9$

09 답 ④

$7^{3a+b}=128$과 $7^{a-b}=2$를 곱하면

$7^{(3a+b)+(a-b)}=7^{4a}=128\times2=256=4^4$, $(7^a)^4=4^4$

$7^a=4$ $\therefore 7=4^{\frac{1}{a}}=(2^2)^{\frac{1}{a}}=2^{\frac{2}{a}}$

또, $7^{a-b}=2$에서 $7^a=4$이므로

$4\times7^{-b}=2$, $7^b=2$ $\therefore 7=2^{\frac{1}{b}}$

$\therefore 2^{\frac{3}{b}}\div2^{\frac{2}{a}}=\left(2^{\frac{1}{b}}\right)^3\div7=7^3\div7=7^2=49$

10 답 ⑤

$5^{\frac{1}{a}}=2$에서 $5=2^a$, $81^{\frac{1}{b}}=25$에서 $81=25^b$

$\therefore (2^a)^b=5^b=\left(25^{\frac{1}{2}}\right)^b=(25^b)^{\frac{1}{2}}=81^{\frac{1}{2}}=(9^2)^{\frac{1}{2}}=9$

11 답 ③

$4^x=9^y=16^z$이므로 $16^{xz}=9^{xy}$, $16^{yz}=4^{xy}$

$\therefore 16^{xz+yz}=16^{xz}\times16^{yz}=9^{xy}\times4^{xy}=9^{\frac{1}{2}}\times4^{\frac{1}{2}}$ $\left(\because xy=\frac{1}{2}\right)$

$=(3^2)^{\frac{1}{2}}\times(2^2)^{\frac{1}{2}}=3\times2=6$

다른 풀이

$4^x=9^y=16^z=k(k\ne1)$라 하면

$4=k^{\frac{1}{x}}$ ⋯ ㉠, $9=k^{\frac{1}{y}}$ ⋯ ㉡, $16=k^{\frac{1}{z}}$

이때, ㉠×㉡을 하면

$4\times9=36=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{x+y}{xy}}=k^{2(x+y)}$ $\left(\because xy=\frac{1}{2}\right)$

$\therefore 16^{xz+yz}=\left(k^{\frac{1}{z}}\right)^{xz+yz}=k^{x+y}=\{k^{2(x+y)}\}^{\frac{1}{2}}$

$=36^{\frac{1}{2}}=(6^2)^{\frac{1}{2}}=6$

12 답 ⑤

$4^a=\sqrt{6}$에서 $4=(\sqrt{6})^{\frac{1}{a}}$이고

$9^b=\sqrt{6}$에서 $9=(\sqrt{6})^{\frac{1}{b}}$이므로

$(\sqrt{6})^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=(\sqrt{6})^{\frac{1}{a}}\times(\sqrt{6})^{\frac{1}{b}}=4\times9=36=(\sqrt{6})^4$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$

13 답 ③

양수 a에 대하여 $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=4$일 때, $\frac{a^2+a^{-2}+6}{a+a^{-1}-4}$의 값은?

주어진 식을 구해야 하는 식의 꼴로 변형해야 해.

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

1st 주어진 식을 변형하자.

$\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=4$의 양변을 제곱하면

$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=4^2$, $a+2+\frac{1}{a}=16$

$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=(\sqrt{a})^2+2\times\sqrt{a}\times\frac{1}{\sqrt{a}}+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=a+2+\frac{1}{a}$

$\therefore a+\frac{1}{a}=14$ ⋯ ㉠

이 식의 양변을 다시 제곱하면

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=14^2$, $a^2+2+\frac{1}{a^2}=196$

$\therefore a^2+\frac{1}{a^2}=194$ ⋯ ㉡

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2\times a\times\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2+\frac{1}{a^2}$

2nd 구하는 값을 계산하자.

㉠, ㉡을 구하는 식에 대입하면

$\frac{a^2+a^{-2}+6}{a+a^{-1}-4}=\frac{194+6}{14-4}=\frac{200}{10}=20$

$a^2+a^{-2}=a^2+\frac{1}{a^2}$, $a+a^{-1}=a+\frac{1}{a}$이지?

14 답 ②

$\frac{5a^{5x}+4a^{-4x}}{5a^{5x}-4a^{-4x}}$의 분모, 분자에 각각 a^{4x}을 곱하면 $a^{3x}=2$ 이므로

$\frac{5a^{9x}+4}{5a^{9x}-4}=\frac{5(a^{3x})^3+4}{5(a^{3x})^3-4}=\frac{5\times2^3+4}{5\times2^3-4}=\frac{40+4}{40-4}=\frac{44}{36}=\frac{11}{9}$

15 답 20

$D=d$, $W=160$, $R=R_1$을 $R=k\left(\frac{W}{D+10}\right)^{\frac{1}{3}}$에 대입하면

$R_1=k\left(\frac{160}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$ ⋯ ㉠

또, $D=d$, $W=p$, $R=R_2$를 $R=k\left(\frac{W}{D+10}\right)^{\frac{1}{3}}$에 대입하면

$R_2=k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$ ⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면

$\frac{R_1}{R_2}=\frac{k\left(\frac{160}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}{k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}=2$에서 $\left(\frac{160}{p}\right)^{\frac{1}{3}}=2$

$\frac{160}{p}=2^3=8$ $\therefore p=20$

Simple C 로그

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 24~25

01 답 $\log_a b$, 로그

02 답 $a>0$, $a\neq1$, $b>0$

03 답 0, 1

04 답 $\frac{n}{m}$

05 답 ×

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ○

09 답 ×

10 답 $2^4=16$

11 답 $3^3=27$

12 답 $9^{\frac{1}{2}}=3$

13 답 $3^{-4}=\frac{1}{81}$

14 답 $6=\log_2 64$

15 답 $-4=\log_2\frac{1}{16}$

16 답 $\frac{1}{2}=\log_2\sqrt{2}$

17 답 $2=\log_{0.1}0.01$

18 답 $\frac{1}{4}$

19 답 $\frac{1}{27}$

20 답 2

$x^4=16$에서 $x=16^{\frac{1}{4}}=(2^4)^{\frac{1}{4}}=2$

21 답 16

$x^{\frac{1}{4}}=2$에서 $x=2^4=16$

22 답 0

23 답 1

24 답 3

25 답 10

26 답 6

$\log_2 4+\log_2 16=\log_2(4\times16)=\log_2 64$

$=\log_2 2^6=6$

27 답 2

$\log_2 12-\log_2 3=\log_2 \frac{12}{3}=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

28 답 $p+2q+3r$

$\log_a xy^2z^3=\log_a x+\log_a y^2+\log_a z^3$

$\qquad=\log_a x+2\log_a y+3\log_a z=p+2q+3r$

29 답 $p+q-r$

$\log_a \frac{xy}{z}=\log_a xy-\log_a z=\log_a x+\log_a y-\log_a z$

$\qquad=p+q-r$

30 답 $\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q+r$

$\log_a \sqrt{xyz^2}=\log_a (xyz^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a xyz^2$

$\qquad=\frac{1}{2}(\log_a x+\log_a y+2\log_a z)$

$\qquad=\frac{1}{2}\log_a x+\frac{1}{2}\log_a y+\log_a z$

$\qquad=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q+r$

31 답 $p-q-r$

$\log_a \frac{x}{yz}=\log_a x-\log_a yz=\log_a x-(\log_a y+\log_a z)$

$\qquad=\log_a x-\log_a y-\log_a z=p-q-r$

32 답 2

$\log_2 3\times\log_9 16=\log_2 3\times\frac{\log_2 16}{\log_2 9}=\log_2 3\times\frac{\log_2 2^4}{\log_2 3^2}$

$\qquad=\log_2 3\times\frac{4}{2\log_2 3}=2$

33 답 1

$\log_{\frac{1}{2}} 3\times\log_{\frac{1}{3}} 2=\frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}}\times\frac{1}{\log_2 \frac{1}{3}}$

$\qquad=\frac{1}{-\log_3 2}\times\frac{1}{-\log_2 3}=1$

34 답 $\frac{3+b}{1+a+b}$

$\log_{42} 56=\frac{\log_2 56}{\log_2 42}=\frac{\log_2 (2^3\times7)}{\log_2 (2\times3\times7)}$

$\qquad=\frac{3+\log_2 7}{1+\log_2 3+\log_2 7}=\frac{3+b}{1+a+b}$

35 답 $\frac{2a+b}{2b}$

$\log_9 12=\frac{\log_5 12}{\log_5 9}=\frac{\log_5 (2^2\times3)}{\log_5 3^2}=\frac{2\log_5 2+\log_5 3}{2\log_5 3}$

$\qquad=\frac{2a+b}{2b}$

36 답 $\frac{2b}{a}$

$\log_2 9=\frac{\log_7 9}{\log_7 2}=\frac{\log_7 3^2}{\log_7 2}=\frac{2\log_7 3}{\log_7 2}=\frac{2b}{a}$

37 답 $\frac{a+b}{a}$

$\log_3 15=\frac{\log_2 15}{\log_2 3}=\frac{\log_2 (3\times5)}{\log_2 3}=\frac{\log_2 3+\log_2 5}{\log_2 3}$

$\qquad=\frac{a+b}{a}$

38 답 $\frac{2+b}{a+b}$

$\log_{15} 20=\frac{\log_2 20}{\log_2 15}=\frac{\log_2 (2^2\times5)}{\log_2 (3\times5)}=\frac{2+\log_2 5}{\log_2 3+\log_2 5}$

$\qquad=\frac{2+b}{a+b}$

39 답 6

$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{64}=\log_{2^{\frac{1}{2}}} 64^{\frac{1}{2}}=\log_2 2^6=6$

40 답 81

$16^{\log_2 3}=3^{\log_2 16}=3^4=81$

41 답 $\sqrt{2}$

$3^{\log_9 2}=2^{\log_9 3}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

42 답 256

$3^{\log_{\sqrt{3}} 16}=16^{\log_{\sqrt{3}} 3}=16^{2\log_3 3}=16^2=256$

43 답 0

$\log_2 \sqrt{3}-\log_4 3=\frac{1}{2}\log_2 3-\frac{1}{2}\log_2 3=0$

44 답 $\frac{35}{4}$

$(\log_2 9+\log_4 3)(\log_3 4+\log_9 8)$

$=\left(2\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 3\right)\left(2\log_3 2+\frac{3}{2}\log_3 2\right)$

$=\frac{5}{2}\log_2 3\times\frac{7}{2}\log_3 2=\frac{35}{4}$

45 답 2

$\log_2 6\times\log_3 6-(\log_2 3+\log_3 2)$

$=(1+\log_2 3)\times\frac{1+\log_2 3}{\log_2 3}-\left(\log_2 3+\frac{1}{\log_2 3}\right)$

$=\frac{(1+\log_2 3)^2}{\log_2 3}-\frac{(\log_2 3)^2+1}{\log_2 3}=2$

46 답 -1

$\log_2 \frac{5}{4}+\log_2 \sqrt{20}-\frac{3}{2}\log_2 5$

$=\log_2 \frac{5}{4}+\log_2 \sqrt{20}-\log_2 \sqrt{125}$

$=\log_2 \frac{5}{4}+\log_2 \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{125}}=\log_2 \frac{5}{4}+\log_2 \frac{2}{5}$

$=\log_2 \left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{5}\right)=\log_2 \frac{1}{2}=-1$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 26~29

47 답 ④

$\log_2 128=x$라 하면 $2^x=128$, $2^x=2^7$

$\therefore x=7 \Rightarrow \log_2 128=7$

48 답 ①

$\log_4 \frac{1}{8}=x$라 하면 $4^x=\frac{1}{8}$, $2^{2x}=2^{-3}$, $2x=-3$

$\therefore x=-\frac{3}{2} \Rightarrow \log_4 \frac{1}{8}=-\frac{3}{2}$

49 답 ③

$a=\log_2(\sqrt{2}-1)$에서 $2^a=\sqrt{2}-1$이므로

$$\begin{aligned}2^a+2^{-a}&=2^a+\frac{1}{2^a}=\sqrt{2}-1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\\&=\sqrt{2}-1+\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\&=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

50 답 ④

$\log_2 2x=4$에서 $2x=2^4$, $2x=16$ $\quad\therefore x=8$

다른 풀이

$\log_2 2x=4$에서 $\log_2 2+\log_2 x=4$, $1+\log_2 x=4$

$\log_2 x=3 \quad \therefore x=2^3=8$

51 답 3

$\log_x 27=3$에서 $x^3=27$

$\therefore x=27^{\frac{1}{3}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}=3$

> 심플 정리
>
> [지수법칙]
>
> $a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때,
>
> (1) $a^xa^y=a^{x+y}$ (2) $a^x\div a^y=a^{x-y}$
>
> (3) $(a^x)^y=a^{xy}$ (4) $(ab)^x=a^xb^x$

52 답 ②

$\log_4(\log_2 x)=\frac{1}{2}$에서 $\log_2 x=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore x=2^2=4$

53 답 ⑤

$\log_2(10-x)$에서 진수 $10-x$는 양수이어야 하므로

$10-x>0$에서 $x<10$

따라서 $\log_2(10-x)$가 정의되기 위한 x의 값으로 옳지 않은 것은 ⑤ 10이다.

54 답 ⑤

$\log_{(x-4)}4$에서 밑 $x-4$는 1이 아닌 양수이어야 하므로

$x-4>0$, $x-4\neq1$에서 $x>4$, $x\neq5$

따라서 $\log_{(x-4)}4$가 정의되기 위한 x의 값으로 알맞은 것은 ⑤ 6이다.

55 답 ③

$\log_{(x-2)}(-x^2+11x-10)$에서

밑의 조건에 의하여 $x-2>0$, $x-2\neq1$

$\therefore x>2$, $x\neq3$ ⋯ ㉠

진수의 조건에 의하여 $-x^2+11x-10>0$에서

$x^2-11x+10<0$, $(x-1)(x-10)<0$

$\therefore 1<x<10$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $2<x<3$ 또는 $3<x<10$이므로

$\log_{(x-2)}(-x^2+11x-10)$이 정의되기 위한 정수 x의 개수는 4, 5, 6, 7, 8, 9의 6이다.

56 답 15

$\log_{(x-2)}(-x^2+8x-7)$에서

밑의 조건에 의하여 $x-2>0$, $x-2\neq1$

$\therefore x>2$, $x\neq3$ ⋯ ㉠

또, 진수의 조건에 의하여 $-x^2+8x-7>0$에서

$x^2-8x+7<0$, $(x-1)(x-7)<0$

$\therefore 1<x<7$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $2<x<3$ 또는 $3<x<7$이므로

$\log_{(x-2)}(-x^2+8x-7)$이 정의되기 위한 모든 정수는 4, 5, 6이다.

$\therefore$ (구하는 합)$=4+5+6=15$

57 답 ③

$$\begin{aligned}\log_2\frac{4}{3}+2\log_2\sqrt{48}&=\log_2 4-\log_2 3+2\log_2(2^4\times3)^{\frac{1}{2}}\\&=2\log_2 2-\log_2 3+\log_2(2^4\times3)\\&=2-\log_2 3+4\log_2 2+\log_2 3=6\end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}\log_2\frac{4}{3}+2\log_2\sqrt{48}&=\log_2\frac{4}{3}+\log_2 48\\&=\log_2\left(\frac{4}{3}\times48\right)=\log_2 64\\&=\log_2 2^6=6\end{aligned}$$

58 답 ④

$\log_2 64-\log_2\frac{3}{64}+\log_2 48$

$=\log_2 64-(\log_2 3-\log_2 64)+\log_2 48$

$=2\log_2 64+\log_2 48-\log_2 3$

$=\log_2\frac{64^2\times48}{3}=\log_2(2^{12}\times2^4)=\log_2 2^{16}=16$이므로

$\log_2\left(\log_2 64-\log_2\frac{3}{64}+\log_2 48\right)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$

59 답 ⑤

$\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})^5+\log_2(\sqrt{7}-\sqrt{3})^5$

$=5\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})+5\log_2(\sqrt{7}-\sqrt{3})$

$=5\log_2\{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})\}$

$=5\log_2 4=5\log_2 2^2=10\log_2 2=10$

60 답 ③

$$\log_{11}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\log_{11}\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\log_{11}\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$$
$$=\log_{11}\left(1-\frac12\right)\left(1+\frac12\right)+\log_{11}\left(1-\frac13\right)\left(1+\frac13\right)+\cdots+\log_{11}\left(1-\frac1{10}\right)\left(1+\frac1{10}\right)$$
$$=\log_{11}\left(1-\frac12\right)\left(1+\frac12\right)\left(1-\frac13\right)\left(1+\frac13\right)\cdots\left(1-\frac1{10}\right)\left(1+\frac1{10}\right)$$
$$=\log_{11}\left(\frac12\times\frac32\times\frac23\times\frac43\times\cdots\times\frac9{10}\times\frac{11}{10}\right)$$
$$=\log_{11}\left(\frac12\times\frac{11}{10}\right)=\log_{11}\frac{11}{20}=1-\log_{11}20$$

61 답 ⑤

$$(\log_3\sqrt8)\times(\log_2 27)=\log_3 2^{\frac32}\times\log_2 3^3$$
$$=\frac32\log_3 2\times 3\log_2 3$$
$$=\frac92\times\log_3 2\times\frac{1}{\log_3 2}=\frac92$$

62 답 ②

$\frac{\log_8 14}{\log_8 5}=\log_5 14$, $\frac{1}{\log_{10}5}=\log_5 10$이므로

$$\log_5 35-\frac{\log_8 14}{\log_8 5}+\frac{1}{\log_{10}5}$$
$$=\log_5 35-\log_5 14+\log_5 10$$
$$=\log_5\frac{35\times10}{14}=\log_5 25=2$$

63 답 ①

$2\log_3 4=\log_3 4^2=\log_3 16$

$\log_9 100=\frac{\log_3 10^2}{\log_3 3^2}=\frac{2\log_3 10}{2}=\log_3 10$

$\frac{3}{\log_2 3}=3\log_3 2=\log_3 8$이므로

$$2\log_3 4+\log_9 100-\frac{3}{\log_2 3}$$
$$=\log_3 16+\log_3 10-\log_3 8$$
$$=\log_3\frac{16\times10}{8}=\log_3 20$$

64 답 ②

$\log_5 36=\log_5 6^2=2\log_5 6$

$\log_{25}10000=\frac{\log_5 10^4}{\log_5 5^2}=\frac{4\log_5 10}{2}=2\log_5 10$이므로

$$\frac{\log_5 36+2\log_5 2}{\log_{25}10000}=\frac{2\log_5 6+2\log_5 2}{2\log_5 10}$$
$$=\frac{\log_5 6+\log_5 2}{\log_5 10}=\frac{\log_5 12}{\log_5 10}=\log_{10}12$$

65 답 ①

$$\log_a b=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}=\frac BA$$

66 답 ①

$\log_2 3=a$에서 $\log_3 2=\frac1a$ 이고, $\log_3 7=b$이므로

$$\log_6 21=\frac{\log_3 21}{\log_3 6}=\frac{\log_3(3\times7)}{\log_3(2\times3)}=\frac{1+\log_3 7}{\log_3 2+1}$$
$$=\frac{1+b}{\frac1a+1}=\frac{a+ab}{1+a}$$

67 답 ②

$\log_a 4=\frac1{20}$에서 $2\log_a 2=\frac1{20}$, $\log_a 2=\frac1{40}$

∴ $\log_2 a=40$

또, $\log_2 b=5$이므로

$$\log_b a^4=\frac{\log_2 a^4}{\log_2 b}=\frac{4\log_2 a}{\log_2 b}=\frac{4\times40}{5}=32$$

68 답 ⑤

$2^a=x$, $4^b=2^{2b}=y$, $8^c=2^{3c}=z$에서

$\log_2 x=a$, $\log_2 y=2b$, $\log_2 z=3c$

$$\therefore \log_x y^2z^4=\frac{\log_2 y^2z^4}{\log_2 x}=\frac{2\log_2 y+4\log_2 z}{\log_2 x}$$
$$=\frac{4b+12c}{a}$$

69 답 ①

$$\log_9 2^{\log_2 3}=\log_9 3^{\log_2 2}=\log_{3^2}3=\frac12\log_3 3=\frac12$$

다른 풀이

$$\log_9 2^{\log_2 3}=\log_2 3\times\log_9 2=\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 9}$$
$$=\log_2 3\times\frac{1}{2\log_2 3}=\frac12$$

70 답 ①

$$\log_a\sqrt a-\log_{a^4}a^2-\frac12\log_{a^{-1}}a$$
$$=\log_a a^{\frac12}-\frac24\log_a a-\frac12\times\left(\frac{1}{-1}\right)\log_a a$$
$$=\frac12-\frac12+\frac12=\frac12$$

71 답 ③

$$\log_4 3\times\log_9 25\times\log_5 8=\log_4 3\times\log_{3^2}5^2\times\log_5 8$$
$$=\log_4 3\times\log_3 5\times\log_5 8$$
$$=\log_4 3\times\frac{\log_4 5}{\log_4 3}\times\frac{\log_4 8}{\log_4 5}$$
$$=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac32$$

72 답 ④

$$\log_2(\log_4 3)+\log_2(\log_9 125)+\log_2(\log_{25}n)=\log_2\frac34$$
$$\log_2(\log_4 3\times\log_9 125\times\log_{25}n)=\log_2\frac34$$
$$\log_4 3\times\log_9 125\times\log_{25}n=\frac34$$
$$\log_4 3\times\frac32\log_3 5\times\frac12\log_5 n=\frac34$$

$\log_4 3 \times \log_3 5 \times \log_5 n = 1$

$\log_4 3 \times \dfrac{\log_4 5}{\log_4 3} \times \dfrac{\log_4 n}{\log_4 5} = 1$

$\log_4 n = 1$

$\therefore n = 4$

73 답 1

조건 (가)에서 $\log_a b : \log_c d = 1 : 3$이므로 양수 k에 대하여 $\log_a b = k$, $\log_c d = 3k$라 하면

$b = a^k$, $d = c^{3k}$ ⋯ ㉠

또, 조건 (나)에서 $ab = c^3 d$이므로 ㉠을 대입하면

$a \times a^k = c^3 \times c^{3k}$에서

$a^{k+1} = c^{3(k+1)}$ $\quad \therefore a = c^3 (\because k \neq -1)$

$\therefore \log_a c^3 = \log_a a = 1$

74 답 2

조건 (가)의 $\log_2 ab + \log_2 bc + \log_2 ca = 20$에서

$\log_2(ab \times bc \times ca) = 20$, $\log_2(abc)^2 = 20$

$\log_2 abc = 10$

$\therefore abc = 2^{10} = (2^5)^2 = 32^2$ ⋯ ㉠

또, 조건 (나)의 $a^{2x} = b^y = c^{\frac{1}{2}z} = 32$에서

$a = 32^{\frac{1}{2x}}$, $b = 32^{\frac{1}{y}}$, $c = 32^{\frac{2}{z}}$

위의 세 등식을 변끼리 곱하면

$abc = 32^{\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z}}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = 2$

75 답 8

$\log_a p = X$, $\log_b q = Y$라 하면

$\log_a p + \log_b q = 2$에서 $X + Y = 2$ ⋯ ㉠

$\log_p a + \log_q b = \dfrac{1}{\log_a p} + \dfrac{1}{\log_b q} = -1$에서

$\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y} = -1 \quad \therefore \dfrac{X+Y}{XY} = -1$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{2}{XY} = -1 \quad \therefore XY = -2$

$\therefore (\log_a p)^2 + (\log_b q)^2 = X^2 + Y^2$

$= (X+Y)^2 - 2XY$

$= 2^2 - 2 \times (-2) = 8$

76 답 ②

$7^a = 2$에서 $a = \log_7 2$

또, $\log_b 7 = 2$에서 $b^2 = 7 \quad \therefore b = 7^{\frac{1}{2}}$

$\therefore b^a = (7^{\frac{1}{2}})^{\log_7 2} = 7^{\log_7 \sqrt{2}} = \sqrt{2}$

77 답 ④

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\log_7 5} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_7 3} = \dfrac{3^{\log_7 5}}{2^{\log_7 5}} \times \dfrac{2^{\log_7 3}}{5^{\log_7 3}}$

$= \dfrac{5^{\log_7 3}}{2^{\log_7 5}} \times \dfrac{2^{\log_7 3}}{5^{\log_7 3}}$

$= 2^{\log_7 3 - \log_7 5} = 2^{\log_7 \frac{3}{5}}$

$= (4^{\frac{1}{2}})^{\log_7 \frac{3}{5}} = 4^{\frac{1}{2}\log_7 \frac{3}{5}}$

$= 4^{\log_7 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}$

$\therefore a = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

78 답 ④

이차방정식 $x^2 - 9x + 16 = 0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta = 16$

$\therefore \log_2 \alpha + \log_2 \beta = \log_2 \alpha\beta = \log_2 16 = 4$

79 답 ②

이차방정식 $x^2 - 5x + 2 = 0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 5$, $\alpha\beta = 2$

$\therefore \log_{\alpha\beta}\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right) + \log_{\alpha\beta}\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right)$

$= \log_{\alpha\beta}\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right) = \log_{\alpha\beta}\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha} \times \dfrac{\beta+1}{\beta}\right)$

$= \log_{\alpha\beta} \dfrac{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}{\alpha\beta}$

$= \log_2 \dfrac{2+5+1}{2} = \log_2 4 = 2$

80 답 ①

이차방정식 $x^2 - 9x - 3 = 0$의 두 근이 $\log_{10} a$, $\log_{10} b$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{10} a + \log_{10} b = 9$, $\log_{10} a \times \log_{10} b = -3$

$\therefore \log_a b + \log_b a = \dfrac{\log_{10} b}{\log_{10} a} + \dfrac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$

$= \dfrac{(\log_{10} a)^2 + (\log_{10} b)^2}{\log_{10} a \times \log_{10} b}$

$= \dfrac{(\log_{10} a + \log_{10} b)^2 - 2\log_{10} a \times \log_{10} b}{\log_{10} a \times \log_{10} b}$

$= \dfrac{9^2 - 2 \times (-3)}{-3} = -29$

심플 정리

[이차방정식의 근과 계수의 관계]

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$이다.

Simple D 상용로그

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 30～31

01 답 상용로그, $\log N$

02 답 상용로그표

03 답 소수

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ×

08 답 ○

09 답 3

10 답 -2

11 답 -5

12 답 -3

13 답 -1

14 답 2

15 답 1

16 답 16

17 답 2.3945

$\log 248=\log(100\times2.48)=2+\log 2.48$

$=2+0.3945=2.3945$

18 답 -2.6055

$\log 0.00248=\log(10^{-3}\times2.48)=-3+\log 2.48$

$=-3+0.3945=-2.6055$

19 답 5.3945

$\log 248000=\log(10^5\times2.48)=5+\log 2.48$

$=5+0.3945=5.3945$

20 답 -4.6055

$\log 0.0000248=\log(10^{-5}\times2.48)=-5+\log 2.48$

$=-5+0.3945=-4.6055$

21 답 568

$2.7543=2+0.7543=\log 10^2+\log 5.68$

$=\log(10^2\times5.68)=\log 568$

$\therefore x=568$

22 답 56800

$4.7543=4+0.7543=\log 10^4+\log 5.68$

$=\log(10^4\times5.68)=\log 56800$

$\therefore x=56800$

23 답 0.000568

$-4+0.7543=\log 10^{-4}+\log 5.68=\log(10^{-4}\times5.68)$

$=\log 0.000568$

$\therefore x=0.000568$

24 답 0.00568

$-2.2457=-2-0.2457=-3+0.7543$

$=\log 10^{-3}+\log 5.68=\log(10^{-3}\times5.68)$

$=\log 0.00568$

$\therefore x=0.00568$

25 답 0.4969

26 답 2.5092

$\log 323=\log(10^2\times3.23)=2+\log 3.23$

$=2+0.5092=2.5092$

27 답 -1.4672

$\log 0.0341=\log(10^{-2}\times3.41)=-2+\log 3.41$

$=-2+0.5328=-1.4672$

28 답 1.1737

$\log\sqrt[3]{3320}=\frac{1}{3}\log(10^3\times3.32)=\frac{1}{3}\times(3+0.5211)$

$=1.1737$

29 답 31

$\log 2^{100}=100\log 2=100\times0.3010=30.10$

즉, 정수 부분이 30이므로 2^{100}은 31자리의 수이다.

$\therefore n=31$

30 답 24

$\log 3^{50}=50\log 3=50\times0.4771=23.855$

즉, 정수 부분이 23이므로 3^{50}은 24자리의 수이다.

$\therefore n=24$

31 답 20

$\log 0.012^{10}=10\log(10^{-2}\times1.2)$

$=10(\log 10^{-2}+\log 1.2)$

$=10\times(-2+0.0792)=-20+0.792$

즉, 정수 부분이 -20이므로 0.012^{10}은 소수점 아래 20번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나온다. $\therefore n=20$

32 답 13

$\log 0.24^{20}=20\log(10^{-1}\times2.4)$

$=20(\log 10^{-1}+\log 2.4)$

$=20\times(-1+0.3802)$

$=-12.396=-12-0.396$

$=-13+0.604$

즉, 정수 부분이 -13이므로 0.24^{20}은 소수점 아래 13번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나온다. $\therefore n=13$

유형 연습 [+내신 유형]

문제편 pp. 32~33

33 답 1

$\log(5-\sqrt{15})+\log(5+\sqrt{15})$

$=\log(5-\sqrt{15})(5+\sqrt{15})=\log(25-15)$

$=\log 10=1$

34 답 ②

$a=\log(\sqrt{5}-2)$에서 $10^a=\sqrt{5}-2$이므로

$10^a-10^{-a}=\sqrt{5}-2-(\sqrt{5}-2)^{-1}=\sqrt{5}-2-\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

$=\sqrt{5}-2-(\sqrt{5}+2)=-4$

35 답 ①

$\log\dfrac{25}{3}=\log 5^2-\log 3=2\log\dfrac{10}{2}-\log 3$

$=2(1-\log 2)-\log 3=2-2\log 2-\log 3$

$=2-2a-b$

36 답 ④

$10^a=2$에서 $a=\log 2$, $10^b=3$에서 $b=\log 3$

$\therefore \log_5 6=\dfrac{\log 6}{\log 5}=\dfrac{\log 2+\log 3}{\log 10-\log 2}=\dfrac{a+b}{1-a}$

37 답 ⑤

진수의 조건에 의하여 $a-2>0$, $6-b>0$

이때, a, b는 양수이므로 $a>2$, $0<b<6$ … ㉠

한편, $\log(a-2)+\log(6-b)=1$에서

$\log(a-2)(6-b)=\log 10$

$\therefore (a-2)(6-b)=10$ … ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 a, b의 순서쌍은 (4, 1), (7, 4), (12, 5)이므로 $a+b$의 최댓값은 $12+5=17$

TIP

$a-2$, $6-b$가 양수이고 a, b가 양의 정수이므로 $a-2$, $6-b$도 양의 정수이다.
따라서 $(a-2)(6-b)=10$을 만족시키는 $a-2$, $6-b$의 값은 다음과 같다.

$a-2$	1	2	5	10
$6-b$	10	5	2	1

38 답 ④

$\log 50-\log 12=\log\dfrac{100}{2}-\log(2^2\times 3)$

$=\log 100-\log 2-(2\log 2+\log 3)$

$=2-3\log 2-\log 3$

$=2-3\times 0.30-0.48=0.62$

39 답 ①

$10^{0.3010}=2$에서 $\log 2=0.3010$

$10^{0.4771}=3$에서 $\log 3=0.4771$

$\therefore \log 2.4=\log\dfrac{24}{10}=\log\dfrac{2^3\times 3}{10}$

$=3\log 2+\log 3-\log 10$

$=3\times 0.3010+0.4771-1=0.3801$

40 답 ③

$\log 205=\log(100\times 2.05)=2+\log 2.05=2.3118$

따라서 $\log 2.05=0.3118$이므로

$3.3118=3+0.3118=3+\log 2.05$

$=\log 1000+\log 2.05=\log(1000\times 2.05)$

$=\log 2050$

$\therefore x=2050$

41 답 ①

$\log 0.815=-0.0888$이므로

$-1.0888=-1-0.0888=\log 10^{-1}+\log 0.815$

$=\log(10^{-1}\times 0.815)=\log 0.0815$

$\therefore x=0.0815$

42 답 ⑤

$\log a=2.3$, $\log b=1.1$이므로

$2.3-2\times 1.1=0.1$에서 $\log a-2\log b=\log\dfrac{a}{b^2}=0.1$

따라서 $2.1=2+0.1=\log 10^2+\log\dfrac{a}{b^2}=\log\dfrac{100a}{b^2}$

이므로 $N=\dfrac{100a}{b^2}$

43 답 22

정수 부분이 2이므로 $2\le\log n^2<3$에서

$\log 100\le\log n^2<\log 1000$

따라서 n^2은 세 자리의 자연수이다.

이때, $10^2=100$, $31^2=961$, $32^2=1024$이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 10, 11, 12, …, 31로 22이다.

TIP

$N>1$일 때, $\log N$의 정수 부분이 n이면
$n\le\log N<n+1$에서
$10^n\le N<10^{n+1}$이므로 N은 정수 부분이 $(n+1)$자리인 수이다.

44 답 ④

5^{60}이 42자리의 수이므로

$41\le\log 5^{60}<42$에서 $\dfrac{41}{60}\le\log 5<\dfrac{42}{60}$

$40\times\dfrac{41}{60}\le 40\log 5<40\times\dfrac{42}{60}$

$\therefore 27.\times\times\times\le\log 5^{40}<28$

따라서 $\log 5^{40}$의 정수 부분이 27이므로 5^{40}은 28자리의 수이다.

$\therefore n=28$

I D

45 답 66

$$\log\left(\frac{2}{9}\right)^{100}=100\times(\log 2-\log 9)$$
$$=100\times(\log 2-2\log 3)$$
$$=100\times(0.3010-0.9542)$$
$$=-65.32=-65-1+1-0.32$$
$$=-66+0.68$$

따라서 $\log\left(\frac{2}{9}\right)^{100}$의 정수 부분이 -66이므로 $\left(\frac{2}{9}\right)^{100}$은 소수점 아래 66째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore n=66$

> **심플 정리**
>
> **[상용로그의 정수 부분]**
>
> (1) 정수 부분이 n자리인 수의 상용로그의 정수 부분은 $n-1$이다.
>
> (2) 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 수의 상용로그의 정수 부분은 $-n$이다.

46 답 ②

(i) $n=15$일 때,

$$\log 15^{-15}=-15\log 15=-15\log\frac{30}{2}$$
$$=-15\{\log(10\times3)-\log 2\}$$
$$=-15\times(1+\log 3-\log 2)$$
$$=-15\times(1+0.4771-0.3010)$$
$$=-17.6415=-17-0.6415$$
$$=-17-1+1-0.6415=-18+0.3585$$

따라서 $\log 15^{-15}$의 정수 부분이 -18이므로 15^{-15}은 소수점 아래 18째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore f(15)=18$

(ii) $n=30$일 때

$$\log 30^{-30}=-30\log(10\times3)=-30\times(1+\log 3)$$
$$=-30\times(1+0.4771)=-44.3130$$
$$=-44-1+1-0.3130=-45+0.6870$$

따라서 $\log 30^{-30}$의 정수 부분이 -45이므로 30^{-30}은 소수점 아래 45째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore f(30)=45$

$\therefore f(15)+f(30)=18+45=63$

47 답 ②

(i) $1\le n\le 3$일 때,

$2\le 2^n\le 8$에서 2^n은 한 자리의 정수이므로

$f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0$

(ii) $4\le n\le 6$일 때,

$16\le 2^n\le 64$에서 2^n은 두 자리의 정수이므로 $f(4)=1$, $f(5)=1,\ f(6)=1$

(iii) $7\le n\le 9$일 때,

$128\le 2^n\le 512$에서 2^n은 세 자리의 정수이므로

$f(7)=2,\ f(8)=2,\ f(9)=2$

(iv) $10\le n\le 13$일 때,

$1024\le 2^n\le 8192$에서 2^n은 네 자리의 정수이므로

$f(10)=3,\ f(11)=3,\ f(12)=3,\ f(13)=3$

이때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)=12$이므로 $n=10$

48 답 ④

투과하기 전의 전파의 세기를 A, 투과한 후의 전파의 세기를 B라 하면 $F=-7$이므로

$$-7=10(\log B-\log A)$$
$$-7=10\log\frac{B}{A},\ \log\frac{B}{A}=-\frac{7}{10},\ \frac{B}{A}=10^{-\frac{7}{10}}$$
$$\therefore B=10^{-\frac{7}{10}}A$$

따라서 투과한 후의 전파의 세기는 투과하기 전의 전파의 세기의 $10^{-\frac{7}{10}}$배이다.

49 답 ②

올해의 생산량을 a라 할 때, 생산량을 매년 $k\%$씩 증가시킨다고 하면 10년 후의 생산량은 $a\left(1+\frac{k}{100}\right)^{10}$이다.

이때, 10년 후의 생산량이 올해의 생산량의 4배이므로

$a\left(1+\frac{k}{100}\right)^{10}=4a$에서 $\left(1+\frac{k}{100}\right)^{10}=4$

양변에 상용로그를 취하면

$$10\log\left(1+\frac{k}{100}\right)=\log 4=2\log 2=2\times0.3=0.6$$
$$\log\left(1+\frac{k}{100}\right)=0.06=\log 1.15$$
$$1+\frac{k}{100}=1.15,\ \frac{k}{100}=0.15\qquad\therefore k=15$$

50 답 ③

주위 온도가 18℃로 유지될 때, 최초 온도가 30℃인 물체의 2시간 후의 온도가 24℃이므로

$$24=18+\frac{30-18}{10^{2k}},\ \frac{12}{10^{2k}}=6,\ 10^{2k}=2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$2k=\log 2=0.3\qquad\therefore k=0.15$$

같은 조건에서 최초 온도가 24℃인 물체의 온도가 20℃가 될 때까지 걸린 시간을 t라 하면

$$20=18+\frac{24-18}{10^{0.15t}},\ \frac{6}{10^{0.15t}}=2,\ 10^{0.15t}=3$$

양변에 상용로그를 취하면

$$0.15t=\log 3=0.48\qquad\therefore t=\frac{16}{5}$$

따라서 $\frac{16}{5}$(시간), 즉 3시간 12분이 걸린다.

연습 문제 [C~D] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 34~35

01 답 ④

$\log_a 9=5$에서 $a^5=9$

$\log_3 2=b$에서 $3^b=2$

$\therefore a^{10b}=(a^5)^{2b}=9^{2b}=3^{4b}=(3^b)^4=2^4=16$

02 답 69

$\log_2 \sqrt{a}=3$에서 $\sqrt{a}=2^3$ $\quad\therefore a=2^6=64$

또, $\log_b 125=3$에서 $b^3=125$ $\quad\therefore b=125^{\frac{1}{3}}=(5^3)^{\frac{1}{3}}=5$

$\therefore a+b=64+5=69$

03 답 ②

밑의 조건에 의하여 $a-1>0$, $a-1\neq1$

즉, $a>1$, $a\neq2$이므로 $1<a<2$ 또는 $a>2$ … ㉠

또, 진수의 조건에 의하여 $x^2-2ax+8a>0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2-2ax+8a=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 한다. 즉, $\frac{D}{4}=a^2-8a<0$에서 $a(a-8)<0$

$\therefore 0<a<8$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $1<a<2$ 또는 $2<a<8$

따라서 자연수 a의 개수는 3, 4, 5, 6, 7로 5이다.

04 답 ①

> 2 이상의 자연수 n에 대하여
>
> $f(n)=\sqrt[n+2]{\sqrt[n]{16}}$ 지수 법칙을 이용하여 식을 정리해.
>
> 이라 할 때, $\log_{\sqrt{2}} f(1)+\log_{\sqrt{2}} f(3)+\log_{\sqrt{2}} f(5)$의 값은? (단, $f(1)=2^{\frac{4}{3}}$으로 계산한다.) 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 해.
>
> ① $\frac{24}{7}$ ② $\frac{25}{6}$ ③ $\frac{26}{5}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ $\frac{28}{3}$

1st $f(n)$을 간단히 하자.

$f(n)=\sqrt[n+2]{\sqrt[n]{16}}=\left(16^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n+2}}=2^{\frac{4}{n(n+2)}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=a^{\frac{1}{mn}}$, $(a^m)^n=a^{mn}$

$=2^{2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)}$ → 부분분수 $\frac{1}{ab}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$을 이용한 거야.

2nd 구하는 값을 계산하자.

$\therefore \log_{\sqrt{2}} f(1)+\log_{\sqrt{2}} f(3)+\log_{\sqrt{2}} f(5)$

$=\log_{\sqrt{2}}\{f(1)\times f(3)\times f(5)\}$ → $f(1)=2^{\frac{4}{3}}=2^{2\times\frac{2}{3}}=2^{2\left(1-\frac{1}{3}\right)}$

$=\log_{\sqrt{2}}\left\{\underbrace{2^{2\left(1-\frac{1}{3}\right)}\times2^{2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)}\times2^{2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)}}_{a^b\times a^c=a^{b+c}}\right\}$

$=\log_{\sqrt{2}}\left\{2^{2\left(1-\frac{1}{7}\right)}\right\}$

$=\log_{\sqrt{2}} 2^{\frac{12}{7}}=\frac{\frac{12}{7}}{\frac{1}{2}}\log_2 2=\frac{24}{7}$ → $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

05 답 ②

$x=2^{\log_4 3}-3^{\log_3 2}=3^{\log_{2^2} 2}-2^{\log_3 3}=3^{\frac{1}{2}}-2=\sqrt{3}-2$

$\therefore x-\frac{1}{x}=\sqrt{3}-2-\frac{1}{\sqrt{3}-2}$

$=\sqrt{3}-2+(\sqrt{3}+2)=2\sqrt{3}$

06 답 ③

> $3^a=4^b=5^c=6$을 만족시키는 세 수 a, b, c에 대하여
>
> 지수를 로그로 나타내서 a, b, c를 각각 구해.
>
> $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값은?
>
> ① $\log_6 20$ ② $\log_6 40$ ③ $\log_6 60$
>
> ④ $\log_6 80$ ⑤ $\log_6 100$

1st 지수를 로그로 변형해.

$3^a=4^b=5^c=6$에서

$a=\log_3 6$, $b=\log_4 6$, $c=\log_5 6$ → $a^x=b$에서 $x=\log_a b$이지?

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{\log_3 6}+\frac{1}{\log_4 6}+\frac{1}{\log_5 6}$

$=\log_6 3+\log_6 4+\log_6 5$ → 밑의 변환 공식 $\log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a}$을 이용한 거야.

$=\log_6(3\times4\times5)=\log_6 60$ → $\log_a m+\log_a n=\log_a mn$

07 답 ③

$9^{(\log_3 49-\log_3\sqrt{7})}\times7^{(\log_7 27-\log_{49} 9)}$

$=9^{(2\log_3 7-\frac{1}{2}\log_3 7)}\times7^{(3\log_7 3-\log_7 3)}$

$=9^{\frac{3}{2}\log_3 7}\times7^{2\log_7 3}$

$=3^{\log_3 7^3}\times7^{\log_7 3^2}$

$=7^3\times3^2$

08 답 13

$\log_2 a=\log_3 b=k$(k는 실수)라 하면

$a=2^k$, $b=3^k$

이때, $ab=36$에서 $ab=2^k\times3^k=6^k=36=6^2$

따라서 $k=2$이므로 $a=4$, $b=9$

$\therefore a+b=4+9=13$

09 답 ②

$\log_a b=t$라 하면 $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}=\frac{1}{t}$

즉, $\log_a b+\log_b a=\frac{5}{2}$에서 $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$

$2t^2-5t+2=0$, $(2t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

이때, $1<a<b$에서 $t>1$이므로 $t=2$

따라서 $\log_a b=2$, $\log_b a=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{\log_b a}{\log_a b}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$

답_008026_심플자이 수1(A~D).indd 25 2019. 9. 24. 오후 12:12

TIP

$1<a<b$에서 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면
$\log_a 1<\log_a a<\log_a b$에서 $0<1<\log_a b$
즉, $t=\log_a b>1$이다.

10 답 ④

정수 n과 $0\le\alpha<1$인 실수 α에 대하여 $\log A=n+\alpha$라 하면 n과 α는 이차방정식 $2x^2-15x+k+3=0$의 두 근이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\frac{15}{2}$ ⋯ ㉠, $n\alpha=\frac{k+3}{2}$ ⋯ ㉡

㉠에서 $\frac{15}{2}=7+\frac{1}{2}$이므로 $n=7$, $\alpha=\frac{1}{2}$이다.

이것을 ㉡에 대입하면 $7\times\frac{1}{2}=\frac{k+3}{2}$에서 $k=4$

11 답 ②

10보다 작은 자연수 n에 대하여 $\left(\frac{n}{10}\right)^{10}$이 소수 여섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타날 때, n의 값은? $\log_a\left(\frac{n}{10}\right)^{10}$의 정수 부분이 -6이라는 거야.
(단, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

1st 상용로그의 성질을 이용해.

$\left(\frac{n}{10}\right)^{10}$이 소수 여섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $\log\left(\frac{n}{10}\right)^{10}$의 정수 부분은 -6이다.

즉, $-6\le\underbrace{\log\left(\frac{n}{10}\right)^{10}}_{\log_a b^n=n\log_a b}<-5$에서

$-6\le10(\underbrace{\log n-1}_{\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n})<-5$

$-0.6\le\log n-1<-0.5$

$\therefore 0.4\le\log n<0.5$ ⋯ ㉠

2nd n의 값을 구하자.

이때, $\log 2=0.3010$이고, $\log 4=0.6020$이므로 ㉠에 의하여 $\log 2<\log n<\log 4$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 10보다 작은 자연수 n은 3이다.

12 답 10

$2^{31}+2^{28}$은 n자리의 정수이다. n의 값을 구하시오.
(단, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)
$\log(2^{31}+2^{28})$의 정수 부분을 알면 $2^{31}+2^{28}$의 자리의 수를 구할 수 있어.

1st 지수법칙을 이용해서 $2^{31}+2^{28}$을 간단히 해.

$2^{31}+2^{28}=\underbrace{2^3\times2^{28}}_{a^b\times a^c=a^{b+c}}+2^{28}=(8+1)\times2^{28}=9\times2^{28}$

2nd 주어진 정수가 몇 자리의 정수인지 구하자.

$\log(9\times2^{28})=\log(3^2\times2^{28})=2\log 3+28\log 2$

$=2\times0.4771+28\times0.3010$ ($\log_a b^n=n\log_a b$, $\log_a mn=\log_a m+\log_a n$)

$=9.3822=9+0.3822$

따라서 $\log(2^{31}+2^{28})$의 정수 부분이 9이므로 $2^{31}+2^{28}$은 10자리의 정수이다.

$\therefore n=10$

심플 정리

[상용로그의 정수 부분]
(1) 정수 부분이 n자리인 수의 상용로그의 정수 부분은 $n-1$이다.
(2) 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 수의 상용로그의 정수 부분은 $-n$이다.

13 답 ①

$\log(2^n\times3^{-2n}\times10^2)=n\log 2-2n\log 3+2$

$=n(\log 2-2\log 3)+2$

$=n(0.3-0.96)+2$

$=-0.66n+2$

이때, $2^n\times3^{-2n}\times10^2$의 정수 부분이 한 자리의 자연수이므로 $\log(2^n\times3^{-2n}\times10^2)$의 정수 부분은 0이다.

즉, $0\le-0.66n+2<1$에서

$-2\le-0.66n<-1$, $1<0.66n\le2$

$\therefore 1.\times\times\times\cdots<n\le3.\times\times\times$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 2, 3이므로 구하는 합은 $2+3=5$이다.

14 답 ②

고속철도의 최고소음도 $\mathrm{L(dB)}$을 예측하는 모형에 따르면 한 지점에서 가까운 선로 중앙 지점까지의 거리를 $d(\mathrm{m})$, 열차가 가까운 선로 중앙 지점을 통과할 때의 속력을 $v(\mathrm{km/h})$라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다. 주어진 식에서 문자가 의미하는 것을 정확히 파악하고 주어진 조건을 대입해.

$$L=80+28\log\frac{v}{100}-14\log\frac{d}{25}$$

가까운 선로 중앙 지점 P까지의 거리가 75 m인 한 지점에서 속력이 서로 다른 두 열차 A, B의 최고소음도를 예측하고자 한다. 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력이 열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력의 0.9배일 때, 두 열차 A, B의 예측 최고소음도를 각각 L_A, L_B라 하자. L_B-L_A의 값은?

① $14-28\log 3$ ② $28-56\log 3$ ③ $28-28\log 3$
④ $56-34\log 3$ ⑤ $56-56\log 3$

1st 주어진 L, d, v의 관계식을 이용하여 L_A, L_B를 각각 구해.

열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력을 v_A, 열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력을 v_B라 하면 v_A가 v_B의 0.9배이므로 $v_A=0.9v_B$

또한, 두 열차 모두 가까운 선로 중앙 지점 P까지의 거리 d가 75 m로 같으므로 두 열차 A, B의 최고소음도인 L_A와 L_B를 각각 구하면

$$L_A=80+28\log\frac{v_A}{100}-14\log\frac{75}{25}$$

$$=80+28\log\frac{0.9v_B}{100}-14\log\frac{75}{25}\ \cdots ㉠$$

$$L_B=80+28\log\frac{v_B}{100}-14\log\frac{75}{25}\ \cdots ㉡$$

2nd L_B-L_A의 값을 구하자.

㉡－㉠을 하면

$$L_B-L_A=\underbrace{28\log\frac{v_B}{100}-28\log\frac{0.9v_B}{100}}_{n\log a-n\log b=n(\log a-\log b)=n\log\frac{a}{b}}$$

$$=28\log\frac{\frac{v_B}{100}}{\frac{0.9v_B}{100}}=\underbrace{28\log\frac{1}{0.9}}_{\text{선택지의 값이 }\log 3\text{으로 나타나있으니까 }\log 3\text{이 나오도록 변형하자.}}$$

$$=28\log\frac{10}{9}=28(\log 10-\underbrace{\log 9}_{\log 9=\log 3^2=2\log 3})$$

$$=28(1-2\log 3)=28-56\log 3$$

15 답 $10^{2019}-1$

$f(n)=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log\frac{n+1}{n}$이므로 $\cdots$ Ⅰ

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(k)$

$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{k+1}{k}$

$=\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{k+1}{k}\right)$

$=\log(k+1)$ $\cdots$ Ⅱ

이 값이 2019이므로 $\log(k+1)=2019$에서

$k+1=10^{2019}$ $\quad\therefore k=10^{2019}-1$ $\cdots$ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	진수를 통분하여 식을 정리한다.	20%
Ⅱ	$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(k)$를 구한다.	40%
Ⅲ	자연수 k의 값을 구한다.	40%

Simple E 지수함수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 36～37

01 답 지수함수

02 답 실수 전체의 집합, 양의 실수 전체의 집합

03 답 증가, 감소

04 답 ○

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ, ㅂ

09 답 4

$f(2)=2^2=4$

10 답 $\frac{1}{8}$

$f(-3)=2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

11 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(-1)f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{-1}\times 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

12 답 $\frac{1}{4}$

$\frac{f(3)}{f(5)}=\frac{2^3}{2^5}=2^{3-5}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

13 답 $a=2$, $b=1$

$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$이고 $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^b$에서 $b=1$

14 답 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.1}<8$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{0.1}=2^{-0.1}$, $8=2^3$이고 $-0.1<3$

이때, 함수 $y=2^x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{0.1}<8$이다.

15 답 $3^{-3}<\frac{1}{9}$

$3^{-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$이고 $3>2$

이때, 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $3^{-3}<\frac{1}{9}$이다.

16 답 $0.5^{\frac{1}{3}}<\sqrt[3]{4}<(\sqrt{2})^2$

$(\sqrt{2})^2=2^1$, $0.5^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$이고 $-\frac{1}{3}<\frac{2}{3}<1$

이때, 함수 $y=2^x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $0.5^{\frac{1}{3}}<\sqrt[3]{4}<(\sqrt{2})^2$이다.

17 답 $y=3^{x+1}+3$

x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동이므로 x 대신에 $x+1$을, y 대신에 $y-3$을 대입하면

$y-3=3^{x+1}$, 즉 $y=3^{x+1}+3$이다.

18 답 $y=-3^x$

x축에 대하여 대칭이동이므로 y 대신에 $-y$를 대입하면

$-y=3^x$, 즉 $y=-3^x$이다.

19 답 $y=3^{-x}$

y축에 대하여 대칭이동이므로 x 대신에 $-x$를 대입하면

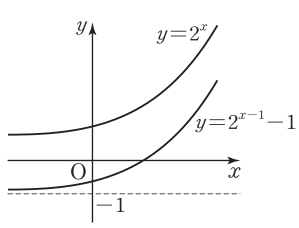
$y=3^{-x}$이다.

20 답 $y=-3^{-x}$

원점에 대하여 대칭이동이므로 x 대신에 $-x$, y 대신에 $-y$를 대입하면 $-y=3^{-x}$, 즉 $y=-3^{-x}$이다.

21 답 풀이 참조

함수 $y=2^{x-1}-1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같다.



따라서 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.

22 답 최댓값 : 8, 최솟값 : $\frac{1}{2}$

$y=2^x$의 밑이 1보다 크므로

$x=3$일 때, 최댓값은 $2^3=8$

$x=-1$일 때, 최솟값은 $2^{-1}=\frac{1}{2}$

23 답 최댓값 : 81, 최솟값 : $\frac{1}{9}$

$y=3^{-2x}=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 밑이 1보다 작으므로

$x=-2$일 때, 최댓값은 $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}=(9^{-1})^{-2}=81$

$x=1$일 때, 최솟값은 $\left(\frac{1}{9}\right)^1=\frac{1}{9}$

24 답 최댓값 : 128, 최솟값 : $\frac{1}{32}$

$y=2^{-3x+1}=2\times\left(\frac{1}{8}\right)^x$의 밑이 1보다 작으므로

$x=-2$일 때, 최댓값은 $2\times\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}=128$

$x=2$일 때, 최솟값은 $2\times\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{32}$

25 답 최댓값 : 19, 최솟값 : $\frac{13}{4}$

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}+3=\frac{1}{4}\times 4^x+3$의 밑이 1보다 크므로

$x=3$일 때, 최댓값은 $\frac{1}{4}\times 4^3+3=19$

$x=0$일 때, 최솟값은 $\frac{1}{4}\times 4^0+3=\frac{13}{4}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 38~41

26 답 ③

함수 $f(x)=a^{2x-1}+3$에 대하여 $f(2)=67$이므로

$f(2)=a^3+3=67$에서

$a^3=64=4^3 \qquad \therefore a=4$

따라서 $f(x)=4^{2x-1}+3$이므로

$f(1)=4+3=7$

27 답 ④

$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 $g(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

$f(x)=3^x$에서 $f(4)=3^4=81$

$\therefore (f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f(4)=81$

28 답 ②

$f(x)=3^{1-x}$에서

$f(-1)=3^{1-(-1)}=9$, $f(9)=3^{1-9}=3^{-8}$

$\therefore (f\circ f)(-1)=f(f(-1))=f(9)=3^{-8}$

또, $f(4)=3^{1-4}=3^{-3}$이므로

$\frac{(f\circ f)(-1)}{f(4)}=\frac{3^{-8}}{3^{-3}}=3^{-5}$

즉, $\frac{(f\circ f)(-1)}{f(4)}=f(c)$에서

$3^{-5}=3^{1-c}$, $1-c=-5$

$\therefore c=6$

29 답 ③

함수 $f(x)=a^x$에 대하여 $f(m)=n$이므로 $a^m=n$

즉, $f(2m)=a^{2m}=(a^m)^2=n^2$이고

$f\left(\frac{m}{2}\right)=a^{\frac{m}{2}}=(a^m)^{\frac{1}{2}}=n^{\frac{1}{2}}$이므로

$\frac{f(2m)}{f\left(\frac{m}{2}\right)}=\frac{n^2}{n^{\frac{1}{2}}}=n^{2-\frac{1}{2}}=n^{\frac{3}{2}}$

$\therefore k=\frac{3}{2}$

답_027039_심플자이 수1(E~F)-삼.indd 28 2018. 5. 2. 오후 8:04

30 답 ⑤

ㄱ. 정의역은 실수 전체의 집합이다. (참)

ㄴ. 그래프의 점근선은 x축(직선 $y=0$)이다. (참)

ㄷ. x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 즉, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

31 답 ⑤

⑤ $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$이므로 $y=a^x$에서 x 대신 $-x$를 대입한 것이다.

따라서 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다. (거짓)

32 답 ④

ㄱ. $f(0)=a^0=1$ (참)

ㄴ. 【반례】 $n=2$, $a=2$, $p=2$라 하면

$f(np)=f(2\times2)=2^{2\times2}=16$

$nf(p)=2\times f(2)=2\times2^2=8$

$\therefore f(np)\neq nf(p)$ (거짓)

ㄷ. $f(p-q)=a^{p-q}=\frac{a^p}{a^q}=\frac{f(p)}{f(q)}$ (참)

ㄹ. $f(p+q)=a^{p+q}=a^p\times a^q=f(p)f(q)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

33 답 ①

함수 $y=3^{x+1}-2$의 그래프가 점 $(a, 7)$을 지나므로

$x=a$, $y=7$을 대입하면 $7=3^{a+1}-2$에서

$9=3^{a+1}$, $3^2=3^{a+1}$, $a+1=2$

$\therefore a=1$

34 답 ②

점근선이 $y=-1$이므로 $b=-1$

또, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}-1$의 그래프가 점 $(-3, 0)$을 지나므로

$x=-3$, $y=0$을 대입하면

$0=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3+a}-1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3+a}=1=\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$-3+a=0$ $\qquad\therefore a=3$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$

35 답 ①

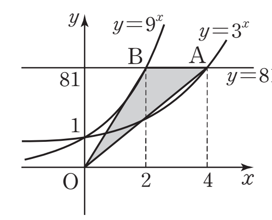
점 $A(a, 8)$이 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로

$2^a=8=2^3$ $\qquad\therefore a=3$

따라서 삼각형 AOH의 밑변을 선분 OH, 높이를 선분 AH라 하면

$\triangle AOH=\frac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times3\times8=12$

36 답 81



두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면 점 A는 곡선 $y=3^x$, 점 B는 곡선 $y=9^x$ 위의 점이므로

$3^a=81=3^4$에서 $a=4$

$9^b=81=9^2$에서 $b=2$

즉, 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(4, 81)$, $(2, 81)$이다.

이때, 삼각형 AOB의 밑변을 선분 AB라 하면 높이는 점 A의 y좌표이므로

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times(\text{점 A의 }y\text{좌표})=\frac{1}{2}\times2\times81=81$

37 답 ③

지수함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=2^{x+1}+3$

이 그래프가 점 $(a, 11)$을 지나므로

$11=2^{a+1}+3$, $2^{a+1}=8=2^3$, $a+1=3$ $\qquad\therefore a=2$

TIP

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입하여 구한다.
또, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 y 대신 $-y$를, y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 x 대신 $-x$를, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하여 구한다.

38 답 ③

$y=3^{2x+1}-2=3^{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}-2$

즉, 이 그래프는 $y=9^x=3^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향을 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-2$이므로 $ab=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$

39 답 ③

ㄱ. $y=9^x-2$는 밑이 9이므로 겹쳐질 수 없다.

ㄴ. $y=-9\times3^x=-3^2\times3^x=-3^{x+2}$이므로 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후, x축에 대하여 대칭이동하면 겹쳐질 수 있다.

ㄷ. $y=\frac{1}{3^x}+1=3^{-x}+1$이므로 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 겹쳐질 수 있다.

ㄹ. $y=3^{1-2x}=3^{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x-\frac{1}{2}}$은 밑이 $\frac{1}{9}$이므로 겹쳐질 수 없다.

따라서 $y=3^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

40 답 ③

$y=a^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=-a^x$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=-a^{x+2}+3$

한편, $x=-2$일 때, $y=-a^0+3=-1+3=2$이므로

이 함수의 그래프는 점 $(-2,\ 2)$를 반드시 지난다.

따라서 $p=-2,\ q=2$이므로

$p+q=(-2)+2=0$

41 답 ⑤

$(h\circ g\circ f)(x)=h(g(f(x)))=h(g(x-1))$

$\qquad\qquad\qquad =h(4^{x-1})=-4^{x-1}$

이때, 함수 $y=(h\circ g\circ f)(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동시키면 $y=-4^{x-k-1}$

이 함수의 그래프가 함수 $y=-4^x$의 그래프와 일치하므로

$-4^{x-k-1}=-4^x$에서

$-k-1=0 \qquad \therefore k=-1$

42 답 ④

$A=\sqrt{8}=2^{\frac{3}{2}},\ B=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}},\ C=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$

이때, $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{3}{2}$이고 (밑)$=2>1$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}<\sqrt[3]{2}<\sqrt{8} \qquad \therefore B<C<A$

43 답 ④

$A=\sqrt{0.1}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}},\ B=\sqrt[3]{0.01}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{3}},$

$C=\sqrt[5]{0.001}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{3}{5}}$

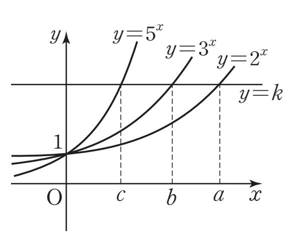
이때, $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$이고 $0<$(밑)$=\frac{1}{10}<1$이므로

$\sqrt[3]{0.01}<\sqrt[5]{0.001}<\sqrt{0.1} \qquad \therefore B<C<A$

44 답 ⑤

$2^a=3^b=5^c=k$라 하면

$a,\ b,\ c$는 각각 세 곡선 $y=2^x,\ y=3^x,\ y=5^x$과 직선 $y=k$가 만나는 점의 x좌표이다.



세 곡선 $y=2^x,\ y=3^x,$

$y=5^x$과 직선 $y=k$는 그림과 같으므로 $c<b<a$이다.

45 답 ②

함수 $y=2^{x+1}-3$에서 (밑)$=2>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 주어진 함수의

최댓값은 $x=3$일 때 $M=2^{3+1}-3=13$이고

최솟값은 $x=1$일 때 $m=2^{1+1}-3=1$이다.

$\therefore M+m=13+1=14$

46 답 ①

함수 $y=3^{-x+a}=3^{-(x-a)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-a}$에서 $0<$(밑)$=\frac{1}{3}<1$이므로 이 함수는 x가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $x=-2$일 때 최댓값 27을 가지므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2-a}=27=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$에서 $-2-a=-3 \qquad \therefore a=1$

47 답 ③

정의역이 주어진 지수함수 $y=a^x$은 정의역의 양끝의 함숫값 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다. 즉, 정의역이 $\{x\,|\,-1\le x\le 3\}$으로 주어진 지수함수 $y=a^x$의 최댓값과 최솟값의 곱은 $a^{-1},\ a^3$의 곱과 같다.

즉, $a^{-1}\times a^3=4$이므로 $a^{-1+3}=a^2=4 \quad \therefore a=2\,(\because a>0)$

48 답 ②

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 $0<$(밑)$=\frac{1}{2}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 주어진 함수의

최댓값은 $x=-5$일 때 $M=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=2^5$이고,

최솟값은 $x=k$일 때 $m=\left(\frac{1}{2}\right)^k=2^{-k}$이다.

이때, $\frac{M}{m}=8$이므로 $\frac{2^5}{2^{-k}}=8=2^3$에서

$2^{5-(-k)}=2^3,\ 5+k=3 \qquad \therefore k=-2$

49 답 ②

$f(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$라 하면

$-3\le x\le 2$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 -4를, $x=2$에서 최댓값 5를 갖는다.

즉, $f(x)$가 갖는 값의 범위는 $-4\le f(x)\le 5$이다.

한편, $y=3^{f(x)}$에서 (밑)$=3>1$이므로 지수가 최대일 때 최댓값을, 지수가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 함수 $y=3^{f(x)}=3^{x^2+2x-3}$은 $f(x)=5$일 때 최댓값 $y=3^5$을, $f(x)=-4$일 때 최솟값 $y=3^{-4}$을 가지므로 최댓값과 최솟값의 곱은 $3^5\times 3^{-4}=3^{5-4}=3$

50 답 ③

$0<a<1$이므로 함수 $y=a^{x^2+2x+3}$은 지수 x^2+2x+3이 최소일 때 최댓값을 갖는다.

이때, $f(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$라 하면 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 2를 가지므로 함수 $y=a^{f(x)}$의 최댓값은 a^2이다.

즉, $a^2=\frac{1}{9}$이므로 $a=\frac{1}{3}\,(\because 0<a<1)$

51 답 ④

$y=2^{x^2-2x}\times 3^{2x-x^2}=2^{x^2-2x}\times 3^{-(x^2-2x)}$

$\quad =2^{x^2-2x}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-2x}$

답_027039_심플자이 수1(E~F)-삼.indd 30 2018. 5. 2. 오후 8:04

에서 $0<(\text{밑})=\frac{2}{3}<1$이므로 주어진 함수는 지수 x^2-2x가 최소일 때 최댓값을 갖는다.
이때, $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$이라 하면 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -1을 가지므로 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}$의 최댓값은 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$이다.

52 답 ①
$2^x=t$라 하면
$y=2^{2x}-2^{x+2}+3=(2^x)^2-4\times2^x+3$
$\quad=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$
이때, $-1\le x\le3$에서 $2^{-1}\le2^x\le2^3$이므로 t의 값의 범위는 $\frac{1}{2}\le t\le8$이다.
따라서 주어진 함수는 $t=2$일 때 최솟값 -1을, $t=8$일 때 최댓값 35를 갖는다.
따라서 $M=35$, $m=-1$이므로 $Mm=35\times(-1)=-35$

53 답 ③
$2^x=t$라 하면
$y=-4^x+2^{x+2}+1=-(2^x)^2+4\times2^x+1$
$\quad=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$
이때, $-1\le x\le2$에서 $2^{-1}\le2^x\le2^2$이므로 t의 값의 범위는 $\frac{1}{2}\le t\le4$이다.
따라서 주어진 함수는 $t=2$, 즉 $2^x=2$일 때, 최댓값 5를 가지므로 $q=5$이고 $2^x=2$에서 $x=1$이므로 $p=1$이다.
$\therefore p+q=1+5=6$

54 답 3
모든 실수 x에 대하여 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$3^x+4\times3^{-x}-1\ge2\sqrt{3^x\times(4\times3^{-x})}-1=3$
(단, 등호는 $3^x=4\times3^{-x}$일 때 성립)
따라서 함수 $y=3^x+4\times3^{-x}-1$의 최솟값은 3이다.

심플 정리
[산술평균과 기하평균의 관계]
$a>0$, $b>0$인 두 수 a, b에 대하여
$a+b\ge2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

55 답 ④
모든 실수 x에 대하여 $2^{a+x}>0$, $2^{-x}>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2^{a+x}+2^{-x}\ge2\sqrt{2^{a+x}\times2^{-x}}=2\sqrt{2^{a+x-x}}=2\sqrt{2^a}$
(단, 등호는 $2^{a+x}=2^{-x}$일 때 성립)
즉, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $2\sqrt{2^a}$이고 이 값이 8이므로
$2\sqrt{2^a}=8$에서 $\sqrt{2^a}=4$, $2^a=16=2^4$
$\therefore a=4$

Simple F 지수함수의 활용

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 42~43

01 답 지수방정식, 지수부등식

02 답 $f(x)=g(x)$

03 답 $a=b$

04 답 $f(x)<g(x)$, $f(x)>g(x)$

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ×

08 답 ○

09 답 ×

10 답 $x=\frac{7}{3}$
$8^x=128$에서 $2^{3x}=2^7$, $3x=7$ $\quad\therefore x=\frac{7}{3}$

11 답 $x=5$
$3^{x-2}=27$에서 $3^{x-2}=3^3$, $x-2=3$ $\quad\therefore x=5$

12 답 $x=\frac{11}{4}$
$\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}=2\sqrt{2}$에서 $(2^{-2})^{2-x}=2^{\frac{3}{2}}$, $2^{2x-4}=2^{\frac{3}{2}}$
$2x-4=\frac{3}{2}$, $2x=\frac{11}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{11}{4}$

13 답 $x=0$ 또는 $x=3$
$(x+1)^x=2^{2x}$에서 $(x+1)^x=4^x$
(i) 밑이 같을 때, $x+1=4$에서 $x=3$
(ii) 지수가 같을 때, $x=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

14 답 $x=1$ 또는 $x=-2$
$5^{x^2+3x}=25^{x+1}$에서 $5^{x^2+3x}=5^{2x+2}$
$x^2+3x=2x+2$, $x^2+x-2=0$
$(x-1)(x+2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

15 답 $x=2$
$4^x-2^{x+1}-8=0$에서 $2^x=t\,(t>0)$라 하면
$t^2-2t-8=0$, $(t+2)(t-4)=0$ $\quad\therefore t=4\,(\because t>0)$
즉, $2^x=4=2^2$이므로 $x=2$

16 답 $x=0$
$3^x+3^{-x}=2$에서 $3^x=t\,(t>0)$라 하면
$t+\frac{1}{t}=2$, $t^2-2t+1=0$, $(t-1)^2=0$
즉, $t=1$에서 $3^x=1$ $\quad\therefore x=0$

17 답 $x=2$ 또는 $x=3$

$(2^x-5)(2^x-7)=3$에서 $2^x=t\,(t>0)$라 하면

$(t-5)(t-7)=3$, $t^2-12t+32=0$

$(t-4)(t-8)=0$ $\quad\therefore t=4$ 또는 $t=8$

(i) $t=2^x=4$에서 $x=2$

(ii) $t=2^x=8$에서 $x=3$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

18 답 $x>\frac{1}{4}$

$3^{2x}>\sqrt{3}$에서 $3^{2x}>3^{\frac{1}{2}}$

이때, 밑이 1보다 크므로

$2x>\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x>\frac{1}{4}$

19 답 $x\ge-1$

$9^x\ge3^{x-1}$에서 $3^{2x}\ge3^{x-1}$

이때, 밑이 1보다 크므로

$2x\ge x-1$ $\quad\therefore x\ge-1$

20 답 $x<6$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{x+6}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x+6}$

이때, 밑이 1보다 작으므로

$2x<x+6$ $\quad\therefore x<6$

21 답 $-1\le x\le4$

$(0.008)^x\le(0.2)^{x^2-4}$에서 $(0.2)^{3x}\le(0.2)^{x^2-4}$

이때, 밑이 1보다 작으므로

$3x\ge x^2-4$, $x^2-3x-4\le0$, $(x+1)(x-4)\le0$

$\therefore -1\le x\le4$

22 답 $1<x<2$

$x^{2x}>x^{x^2}$에서

(i) $0<x<1$일 때,

$2x<x^2$에서 $x^2-2x>0$, $x(x-2)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>2$

그런데 $0<x<1$이므로 이때의 해는 존재하지 않는다.

(ii) $x>1$일 때,

$2x>x^2$에서 $x^2-2x<0$, $x(x-2)<0$

$\therefore 0<x<2$

그런데 $x>1$이므로 주어진 부등식의 해는 $1<x<2$

(iii) $x=1$일 때,

$1>1$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $1<x<2$이다.

23 답 $1<x<2$

$(3^x-3)(3^x-9)<0$에서 $3^x=t\,(t>0)$라 하면

$(t-3)(t-9)<0$ $\quad\therefore 3<t<9$

즉, $3<3^x<3^2$이고 밑이 1보다 크므로 $1<x<2$

24 답 $-1\le x\le2$

$4^{2x+1}-65\times4^x+16\le0$에서 $4^x=t\,(t>0)$라 하면

$4t^2-65t+16\le0$, $(4t-1)(t-16)\le0$

$\therefore \frac{1}{4}\le t\le16$

즉, $4^{-1}\le4^x\le4^2$이고 밑이 1보다 크므로 $-1\le x\le2$

25 답 $-2<x<4$

$\frac{1}{16}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<4$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^4<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

이때, 밑이 1보다 작으므로 $-2<x<4$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 44~47

26 답 ④

$3^{(x-1)^2}=3^{7-x}$에서 $(x-1)^2=7-x$

$x^2-2x+1=7-x$, $x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$ $\quad\therefore x=3$ 또는 $x=-2$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 x의 값의 합은

$3+(-2)=1$이다.

27 답 ③

$2^{x^2+2}=4^{x+1}$에서 $2^{x^2+2}=2^{2x+2}$

$x^2+2=2x+2$, $x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 x의 값의 합은

$0+2=2$이다.

28 답 ①

$4^{|x|}=2^{x^2}$에서 $2^{2|x|}=2^{x^2}$, $2|x|=x^2$ $\quad\therefore x^2-2|x|=0$

(i) $x\ge0$일 때, $x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

(ii) $x<0$일 때, $x^2+2x=0$에서 $x(x+2)=0$

$\therefore x=-2\,(\because x<0)$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-2$이므로 $\alpha=-2$, $\beta=2$

$\therefore \alpha-\beta=-2-2=-4$

29 답 ③

$4^{x^2-a}-2^{x^2-x+2}=0$에서 $4^{x^2-a}=2^{x^2-x+2}$

$2^{2x^2-2a}=2^{x^2-x+2}$, $2x^2-2a=x^2-x+2$

$\therefore x^2+x-2a-2=0$ ⋯ ㉠

이때, 방정식 ㉠의 한 근이 2이므로

$4+2-2a-2=0$ $\quad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $x^2+x-6=0$에서

$(x-2)(x+3)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=-3$

따라서 다른 한 근은 -3이다.

30 답 ②

$9^x-10\times3^x+9=0$에서 $3^x=t\,(t>0)$라 하면

$t^2-10t+9=0$, $(t-1)(t-9)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=9$

(i) $t=3^x=1$일 때, $x=0$

(ii) $t=3^x=9$일 때, $x=2$

따라서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 $\alpha=0$, $\beta=2\,(\because \alpha<\beta)$

$\therefore \alpha-\beta=0-2=-2$

31 답 ②

$8^x-7\times4^x+14\times2^x-8=0$에서 $2^x=t\,(t>0)$라 하면

$t^3-7t^2+14t-8=0$, $(t-1)(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$ 또는 $t=4$

(i) $t=2^x=1$에서 $x=0$

(ii) $t=2^x=2$에서 $x=1$

(iii) $t=2^x=4$에서 $x=2$

따라서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0^2+1^2+2^2=5$

32 답 ⑤

$2^x+32\times2^{-x}=12$에서 $2^x=t\,(t>0)$라 하면

$t+\dfrac{32}{t}=12$, $t^2-12t+32=0$, $(t-4)(t-8)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=8$

(i) $t=2^x=4$에서 $x=2$

(ii) $t=2^x=8$에서 $x=3$

따라서 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 주어진 방정식을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은 $2\times3=6$이다.

33 답 ②

$(9^x+81\times9^{-x})-11(3^x+9\times3^{-x})+28=0$에서

$\left(3^{2x}+\dfrac{81}{3^{2x}}\right)-11\left(3^x+\dfrac{9}{3^x}\right)+28=0$

$\therefore \left\{\left(3^x+\dfrac{9}{3^x}\right)^2-18\right\}-11\left(3^x+\dfrac{9}{3^x}\right)+28=0$

이때, $3^x+\dfrac{9}{3^x}=X$라 하면 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$X=3^x+\dfrac{9}{3^x}\geq2\sqrt{3^x\times\dfrac{9}{3^x}}=6$ ⋯ ㉠

$\left(\text{단, 등호는 } 3^x=\dfrac{9}{3^x}\text{일 때 성립}\right)$

이고 주어진 방정식은 $(X^2-18)-11X+28=0$에서

$X^2-11X+10=0$, $(X-1)(X-10)=0$

$\therefore X=10\,(\because ㉠)$

즉, $3^x+\dfrac{9}{3^x}=10$에서 $3^x=Y\,(Y>0)$라 하면

$Y+\dfrac{9}{Y}=10$, $Y^2-10Y+9=0$, $(Y-1)(Y-9)=0$

$\therefore Y=1$ 또는 $Y=9$

(i) $Y=3^x=1$에서 $x=0$

(ii) $Y=3^x=9$에서 $x=2$

따라서 $x=0$ 또는 $x=2$이므로 주어진 방정식을 만족시키는 모든 x의 값의 합은 $0+2=2$이다.

34 답 ⑤

$(x+2)^{x^2}=(x+2)^{6x-8}$에서 밑이 같으므로

(i) 지수가 같을 때, $x^2=6x-8$에서

$x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

(ii) 밑이 1일 때, $x+2=1$에서 $x=-1$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식을 만족시키는 x의 값은 $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-1$이므로 구하는 합은 $2+4+(-1)=5$이다.

35 답 ③

$(x-3)^{x-4}=5^{x-4}$에서 지수가 같으므로

(i) 밑이 같을 때, $x-3=5$에서 $x=8$

(ii) 지수가 0일 때, $x-4=0$에서 $x=4$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식을 만족시키는 x의 값은 $x=8$ 또는 $x=4$이므로 구하는 곱은 $8\times4=32$이다.

36 답 ③

$\begin{cases}3\times2^x-3^y=-3\\2^x+3^y=11\end{cases}$에서

$2^x=X\,(X>0)$, $3^y=Y\,(Y>0)$라 하면

$\begin{cases}3X-Y=-3 \cdots ㉠\\X+Y=11 \cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $4X=8$ $\quad\therefore X=2$

이것을 ㉡에 대입하면 $2+Y=11$ $\quad\therefore Y=9$

따라서 $X=2^x=2$에서 $x=1$이고 $Y=3^y=9$에서 $y=2$이므로 $x+y=1+2=3$

37 답 ③

$\begin{cases}2^x+2^y=12\\2^x\times2^y=32\end{cases}$에서

$2^x=X\,(X>0)$, $2^y=Y\,(Y>0)$라 하면

$\begin{cases}X+Y=12 \cdots ㉠\\XY=32 \cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $Y=12-X$이고 이것을 ㉡에 대입하면

$X(12-X)=32$, $X^2-12X+32=0$

$(X-4)(X-8)=0$ $\quad\therefore X=4$ 또는 $X=8$

$\therefore \begin{cases}X=4\\Y=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}X=8\\Y=4\end{cases}$

한편, $2^x=4$일 때 $x=2$이고, $2^x=8$일 때 $x=3$이므로

주어진 방정식의 해는 $x=2$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=2$이다.

$\therefore x^2+y^2=2^2+3^2=13$

답_027039_심플자이 수1(E~F)-삼.indd 33 2018. 5. 2. 오후 8:04

다른 풀이

$\begin{cases} X+Y=12 \\ XY=32 \end{cases}$ 이므로 X, Y를 두 근으로 하는 이차방정식을 $t^2-12t+32=0$이라 하면

$(t-4)(t-8)=0$에서 $t=4$ 또는 $t=8$

$\therefore \begin{cases} X=4 \\ Y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} X=8 \\ Y=4 \end{cases}$

(이하 동일)

TIP

두 수의 합과 곱이 주어진 경우 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 근과 계수의 관계를 이용하여 세울 수 있다.
즉, $a+b=\alpha$, $ab=\beta$일 때, 두 수 a, b를 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-\alpha x+\beta=0$임을 이용하자.

38 답 ②

$\begin{cases} 2^{x+1}+2^{y+1}=9 \\ 2^{x+y}=2^y-2^{x+2} \end{cases}$ 에서

$2^x=X(X>0)$, $2^y=Y(Y>0)$라 하면

$\begin{cases} 2X+2Y=9 \cdots ㉠ \\ XY=Y-4X \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $Y=\frac{9}{2}-X$를 ㉡에 대입하면

$X\left(\frac{9}{2}-X\right)=\frac{9}{2}-X-4X$에서

$\frac{9}{2}X-X^2=\frac{9}{2}-5X$, $2X^2-19X+9=0$

$(X-9)(2X-1)=0 \qquad \therefore X=9$ 또는 $X=\frac{1}{2}$

그런데 $X=9$이면 $Y=-\frac{9}{2}$이므로 해가 될 수 없다.

즉, $X=\frac{1}{2}$, $Y=4$이므로 $2^x=\frac{1}{2}$에서 $x=-1$이고

$2^y=4$에서 $y=2$이다.

$\therefore x-y=-1-2=-3$

39 답 ③

$\left(\frac{1}{9}\right)^x<3^{x^2+1}$에서 $3^{-2x}<3^{x^2+1}$

이때, 밑이 1보다 크므로 $-2x<x^2+1$에서

$x^2+2x+1>0$, $(x+1)^2>0$

$\therefore x\neq-1$

따라서 주어진 부등식의 해의 집합은 $\{x|x\neq-1\}$이다.

40 답 ④

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-3x}\geq16^{x-1}$에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-3x}\geq\left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+2}$

이때, 밑이 1보다 작으므로 $x^2-3x\leq-2x+2$에서

$x^2-x-2\leq0$, $(x+1)(x-2)\leq0$

$\therefore -1\leq x\leq2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는 -1, 0, 1, 2로 4이다.

다른 풀이

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-3x}\geq16^{x-1}$에서 $4^{-x^2+3x}\geq4^{2x-2}$

이때, 밑이 1보다 크므로 $-x^2+3x\geq2x-2$

$x^2-x-2\leq0$, $(x+1)(x-2)\leq0 \qquad \therefore -1\leq x\leq2$

(이하 동일)

41 답 ③

$2^{x+1}=10$의 해가 α이므로 $2^{\alpha+1}=10$이 성립하고

$2^3=8<10<16=2^4$이므로 $2^3<2^{\alpha+1}<2^4$

이때, 밑이 1보다 크므로 $3<\alpha+1<4 \qquad \therefore 2<\alpha<3$

42 답 ③

$3^{2x+1}-28\times3^x+9\leq0$에서 $3^x=t\,(t>0)$라 하면

$3t^2-28t+9\leq0$, $(3t-1)(t-9)\leq0 \qquad \therefore \frac{1}{3}\leq t\leq9$

즉, $3^{-1}\leq3^x\leq3^2$이고 밑이 1보다 크므로 $-1\leq x\leq2$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$이므로 $(\alpha-\beta)^2=(-1-2)^2=9$

43 답 ③

$\left\{4\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{5}{4}\right\}^2<\frac{9}{16}$에서 $16\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-10\left(\frac{1}{2}\right)^x+1<0$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\,(t>0)$라 하면

$16t^2-10t+1<0$, $(2t-1)(8t-1)<0$

$\therefore \frac{1}{8}<t<\frac{1}{2}$

즉, $\frac{1}{8}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\frac{1}{2}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^3<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^1$이고

밑이 1보다 작으므로 $1<x<3$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$이므로 $\alpha\beta=1\times3=3$

44 답 ②

$27\times a^{2x}-12\times a^x+1\leq0$에서 $a^x=t\,(t>0)$라 하면

$27t^2-12t+1\leq0$, $(9t-1)(3t-1)\leq0$

$\therefore \frac{1}{9}\leq t\leq\frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2\leq a^x\leq\left(\frac{1}{3}\right)^1$

이때, $0<a<1$이고 부등식의 해가 $1\leq x\leq2$이므로

$a=\frac{1}{3}$

45 답 ④

(i) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x+4}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x+4}$

이때, 밑이 1보다 작으므로 $2x^2<x^2-3x+4$

$x^2+3x-4<0$, $(x-1)(x+4)<0$

$\therefore -4<x<1$

(ii) $8^{x^2-3x-4}<4^{x^2-2x+6}$에서 $2^{3x^2-9x-12}<2^{2x^2-4x+12}$

이때, 밑이 1보다 크므로 $3x^2-9x-12<2x^2-4x+12$

$x^2-5x-24<0$, $(x+3)(x-8)<0$

$\therefore -3<x<8$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 연립부등식의 해는 $-3<x<1$이므로 $\alpha=-3$, $\beta=1$

$\therefore \beta-\alpha=1-(-3)=4$

46 답 ②

$4^{1-x}\le 2^{x^2-3x}\le 2^{x-3}$에서 $\begin{cases}4^{1-x}\le 2^{x^2-3x}\\ 2^{x^2-3x}\le 2^{x-3}\end{cases}$

(ⅰ) $4^{1-x}\le 2^{x^2-3x}$에서 $2^{2-2x}\le 2^{x^2-3x}$

이때, 밑이 1보다 크므로 $2-2x\le x^2-3x$

$x^2-x-2\ge0$, $(x+1)(x-2)\ge0$

$\therefore x\le-1$ 또는 $x\ge2$

(ⅱ) $2^{x^2-3x}\le 2^{x-3}$에서 밑이 1보다 크므로

$x^2-3x\le x-3$, $x^2-4x+3\le0$

$(x-1)(x-3)\le0$ $\quad\therefore 1\le x\le3$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 연립부등식의 해는 $2\le x\le3$이므로 x의 최솟값은 2이다.

47 답 ②

(ⅰ) $3^{x+2}\ge9^{2x}$에서 $3^{x+2}\ge3^{4x}$

이때, 밑이 1보다 크므로

$x+2\ge4x$, $3x\le2$ $\quad\therefore x\le\frac{2}{3}$

(ⅱ) $4^{x^2-7}\le16$에서 $4^{x^2-7}\le4^2$

이때, 밑이 1보다 크므로 $x^2-7\le2$

$x^2-9\le0$, $(x+3)(x-3)\le0$ $\quad\therefore -3\le x\le3$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 연립부등식의 해는 $-3\le x\le\frac{2}{3}$이므로 정수 x는 -3, -2, -1, 0이다.

따라서 구하는 합은 $(-3)+(-2)+(-1)+0=-6$이다.

48 답 ③

$\begin{cases}4^x-2^x\le2\\ 4^x\le5\times2^x-6\end{cases}$에서 $2^x=t\ (t>0)$라 하면

$\begin{cases}t^2-t\le2\\ t^2\le5t-6\end{cases}$ $\cdots$ ㉠

(ⅰ) $t^2-t\le2$에서 $t^2-t-2\le0$

$(t+1)(t-2)\le0$ $\quad\therefore -1\le t\le2$

그런데 $t>0$이므로 $0<t\le2$

(ⅱ) $t^2\le5t-6$에서 $t^2-5t+6\le0$

$(t-2)(t-3)\le0$ $\quad\therefore 2\le t\le3$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 연립부등식 ㉠의 해는 $t=2$이므로 주어진 연립부등식의 해는 $t=2^x=2$에서 $x=1$

49 답 ③

$x^{x^2-1}\le x^{x+1}$에서

(ⅰ) 밑이 1보다 클 때, 즉 $x>1$일 때,

$x^2-1\le x+1$에서 $x^2-x-2\le0$

$(x+1)(x-2)\le0$ $\quad\therefore -1\le x\le2$

그런데 $x>1$이므로 $1<x\le2$

(ⅱ) 밑이 1보다 작을 때, 즉 $0<x<1$일 때,

$x^2-1\ge x+1$에서 $x^2-x-2\ge0$

$(x+1)(x-2)\ge0$ $\quad\therefore x\le-1$ 또는 $x\ge2$

그런데 $0<x<1$이므로 해는 존재하지 않는다.

(ⅲ) 밑이 1일 때, 즉 $x=1$일 때,

$x^{x^2-1}\le x^{x+1}$에서 $1^0\le1^2$이므로 주어진 부등식을 만족시킨다.

$\therefore x=1$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $1\le x\le2$이고 모든 정수 x의 값의 합은 $1+2=3$이다.

50 답 ④

(ⅰ) 밑이 1보다 클 때, $x^2-1>1$에서 $x^2-2>0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})>0$

$\therefore x>\sqrt{2}\ (\because x>1)$ $\cdots$ ㉠

이때, $(x^2-1)^x>1=(x^2-1)^0$에서 밑이 1보다 크므로

$x>0$ $\cdots$ ㉡

따라서 밑이 1보다 클 때 주어진 부등식의 해는 ㉠, ㉡에 의하여 $x>\sqrt{2}$이다.

(ⅱ) 밑이 1보다 작을 때, $x^2-1<1$에서 $x^2-2<0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})<0$

$\therefore 1<x<\sqrt{2}\ (\because x>1)$ $\cdots$ ㉢

이때, $(x^2-1)^x>1=(x^2-1)^0$에서 밑이 1보다 작으므로

$x<0$ $\cdots$ ㉣

따라서 밑이 1보다 작을 때 주어진 부등식의 해는 ㉢, ㉣에 의하여 존재하지 않는다.

(ⅲ) 밑이 1일 때, $x^2-1=1$에서 $x^2=2$

$\therefore x=\sqrt{2}\ (\because x>1)$

이때, $(x^2-1)^x>1$에서 $1^{\sqrt{2}}>1$이므로 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 주어진 부등식의 해의 집합은 $\{x\,|\,x>\sqrt{2}\}$이다.

51 답 ④

$9^x-k\times3^{x+1}+k=0$에서 $3^x=t\ (t>0)$라 하면

$t^2-3kt+k=0$ $\cdots$ ㉠

따라서 주어진 지수방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이고 두 실근은 모두 양수이어야 한다.

(ⅰ) $D>0$에서 $9k^2-4k>0$, $k(9k-4)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>\frac{4}{9}$

(ⅱ) 두 근이 모두 양수이므로 두 근의 합, 두 근의 곱이 모두 양수이다. 즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 (두 근의 합)$=3k>0$, (두 근의 곱)$=k>0$이므로 $k>0$

(i), (ii)에 의하여 주어진 지수방정식이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 k의 값의 범위는 $k>\frac{4}{9}$이므로 정수 k의 최솟값은 1이다.

TIP

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 모두 양수가 될 조건은 다음과 같다.
(i) 판별식 $D>0$
(ii) $\alpha+\beta>0$
(iii) $\alpha\beta>0$

52 답 ⑤

$16^x-8\times4^x+k^2>0$에서 $4^x=t\,(t>0)$라 하면
$t^2-8t+k^2>0$ ⋯ ㉠이고 주어진 지수부등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위해서는 부등식 ㉠이 $t>0$에서 항상 성립해야 한다.
이때, $f(t)=t^2-8t+k^2=(t-4)^2+k^2-16$이라 하면
$f(t)$는 $t=4$에서 최솟값 k^2-16을 가지므로 $k^2-16>0$이어야 한다.
즉, $(k+4)(k-4)>0$이므로 $k<-4$ 또는 $k>4$
따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다.

53 답 ③

$f(x)=k\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{x}{500}}$에 $k=1000$, $f(x)=1$을 대입하면
$1=1000\times\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{x}{500}}$에서
$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{x}{500}}=\frac{1}{1000}=\left(\frac{1}{10}\right)^3$, $\frac{x}{500}=3$
$\therefore x=1500$
따라서 어떤 물질은 1500년 전 것이다.

54 답 ③

처음 투자금액이 80만 원일 때 t년 후의 투자이익금이 270만 원 이상이므로
$80\left(\frac{3}{2}\right)^t\geq270$에서 $\left(\frac{3}{2}\right)^t\geq\frac{27}{8}=\left(\frac{3}{2}\right)^3$
이때, 밑이 1보다 크므로 $t\geq3$
따라서 투자이익금이 270만 원 이상이 되기 위해서는 최소한 3년을 투자해야 한다.

연습 문제 [E~F] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 48~49

01 답 ①

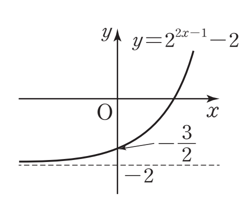
함수 $y=a^{x-2}$의 그래프와 직선 $y=x$의 접점이 함수 $y=a^{x-2}$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 접점이다.
이때, 함수 $y=a^{x-2}$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 접점의 x좌표가 4이므로 접점의 좌표는 $(4,\ 4)$이다.
따라서 함수 $y=a^{x-2}$의 그래프는 점 $(4,\ 4)$를 지나므로
$a^{4-2}=4$에서 $a^2=4$
$\therefore a=2\,(\because a>0)$

심플 정리

[함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점]
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 모두 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이다. 하지만 역은 성립하지 않는다.

02 답 ③

$y=2^{2x-1}-2=2^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-2=4^{x-\frac{1}{2}}-2$
ㄱ. (밑)$=4>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. (거짓)
ㄴ. 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,y>-2\}$이다. (참)
ㄷ. $x=0$이면 $y=4^{-\frac{1}{2}}-2=2^{-1}-2=-\frac{3}{2}$이므로 그래프는 점 $\left(0,\ -\frac{3}{2}\right)$을 지나고 ㄱ에 의하여 증가함수이므로 그래프는 그림과 같다.
따라서 제2사분면을 지나지 않는다. (참)



ㄹ. 함수 $y=2^{2x-1}-2$의 그래프는 함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. 즉, 함수 $y=2^x$의 그래프와 평행이동하여도 겹치지 않는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

03 답 ③

함수 $y=a^x-b$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것이다.
이때, $y=a^x-b$의 그래프의 점근선이 $y=-1$이므로
$-b=-1$에서 $b=1$

즉, $y=a^x-1$이고 이 함수의 그래프가 점 $(-1, 3)$을 지나므로 $3=a^{-1}-1$에서 $\frac{1}{a}=4 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

$\therefore ab=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$

04 답 10

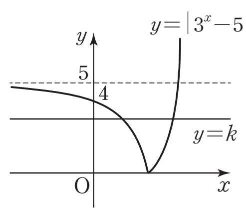
방정식 $|3^x-5|=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=|3^x-5|$와 직선 $y=k$의 교점의 개수야.

1st 함수 $y=|3^x-5|$의 그래프를 그리자.

함수 $y=|3^x-5|$의 그래프는 $y=3^x-5$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이므로 그림과 같다.

$y=3^x-5$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 거야.



2nd 방정식 $|3^x-5|=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되는 k의 값의 범위를 구하자.

$y=3^x-5$의 점근선이 $y=-5$이므로 $y=|3^x-5|$의 점근선은 x축에 대하여 대칭이동 되어 $y=5$가 돼.

한편, 그림과 같이 함수 $y=|3^x-5|$의 그래프의 점근선이 $y=5$이므로 $y=|3^x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수, 즉 방정식 $|3^x-5|=k$의 실근의 개수가 2가 되기 위한 k의 값의 범위는 $0<k<5$이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 k는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은 $1+2+3+4=10$이다.

TIP

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다. 즉, 방정식의 실근의 개수를 구하는 문제에서 방정식의 근을 쉽게 구할 수 없다면 그래프 문제로 생각하여 그래프를 그려 해결하자.

05 답 ④

$A=\sqrt[4]{0.25}=\sqrt[4]{\frac{1}{4}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$B=2^{-\frac{5}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

$C=\sqrt[3]{64^{-1}}=\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

이때, 세 수 A, B, C의 밑이 모두 $\frac{1}{2}$로 1보다 작으므로 세 수의 대소 관계는 지수가 작은 것이 더 큰 수이다.

즉, $\frac{1}{2}<2<\frac{5}{2}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$이므로

$B<C<A$이다.

06 답 ⑤

두 함수 $f(x)=x^2-4x-1$, $g(x)=a^x(0<a<1)$에 대하여 $-1\le x\le 3$에서 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 최댓값은 32, 최솟값은 m일 때, $\frac{a}{m}$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1
④ 4 ⑤ 8

$(g\circ f)(x)=a^{f(x)}$이므로 $f(x)$가 어떤 값을 가져야 $(g\circ f)(x)$가 최댓값, 최솟값을 갖는지 생각해.

1st 합성함수 $(g\circ f)(x)$를 구하자.

$f(x)=x^2-4x-1$, $g(x)=a^x$이므로

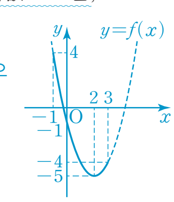
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-4x-1)=a^{x^2-4x-1}$

2nd $f(x)$의 값의 범위를 구하자.

$f(x)=x^2-4x-1=(x-2)^2-5$이므로

$-1\le x\le 3$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -5를, $x=-1$일 때 최댓값 4를 갖는다.

$-1\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 -5이고 최댓값은 4야.



3rd 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하여 $\frac{a}{m}$의 값을 계산하자.

지수함수 $y=a^x$는 $a>1$이면 증가함수이고 $0<a<1$이면 감소함수야.

합성함수 $(g\circ f)(x)$는 밑 a의 값의 범위가 $0<a<1$이므로 $f(x)$가 최소일 때 최댓값 32를 갖고, 최대일 때 최솟값 m을 갖는다.

$a^{-5}=32$에서 $a^{-5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

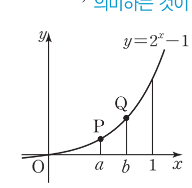
$\left(\frac{1}{2}\right)^4=m$에서 $m=\frac{1}{16}$

$\therefore \frac{a}{m}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}}=8$

07 답 ①

그림에서 함수 $y=2^x-1$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 a, b라 할 때, $A=\frac{2^a-1}{a}$, $B=\frac{2^b-1}{b}$, $C=\frac{2^b-2^a}{b-a}$의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? (단, $0<a<b<1$)

원점과 두 점 P, Q에 대하여 A, B, C가 의미하는 것이 무엇인지 파악해.



① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

1st 주어진 A, B, C가 무엇을 의미하는 알아보자.

점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a-1)$에 대하여 $A=\dfrac{2^a-1}{a}=\dfrac{(2^a-1)-0}{a-0}$은

원점과 점 P를 잇는 직선의 기울기를 의미한다.

마찬가지로 점 $\mathrm{Q}(b,\ 2^b-1)$에 대하여

두 점$(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 잇는 직선의 기울기는 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이야.

$B=\dfrac{2^b-1}{b}=\dfrac{(2^b-1)-0}{b-0}$은 원점과 점 Q를 잇는 직선의

기울기를 의미하고,

$C=\dfrac{2^b-2^a}{b-a}=\dfrac{(2^b-1)-(2^a-1)}{b-a}$은 두 점 P와 Q를 잇는

직선의 기울기를 의미한다.

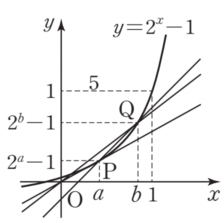
2nd 세 직선의 기울기를 각각 직관적으로 비교하여 대소 관계를 파악해.

따라서 그림과 같이 세 직선의

기울기를 비교하면

$A<B<C$이다.

A, B의 크기는 쉽게 비교할 수 있지만 C는 비교하기가 힘들기 때문에 직선 PQ를 원점을 지나도록 평행이동하여 비교해.



08

답 22

곡선 $y=2^{x-2}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 2만큼 평행

이동한 것이므로 $\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}=2$

따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k$의 밑변을 $\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}$라 하면 높이는 두

점 P_k, Q_k의 y좌표 k이므로

$A_k=\triangle\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}\times k$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\times k=k$

$\therefore A_1+A_4+A_7+A_{10}=1+4+7+10=22$

심플 정리

[점과 도형의 평행이동]

(1) 점 $(x,\ y)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(x+m,\ y+n)$

(2) 도형 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$y-n=f(x-m)$

09

답 3

$4^{x+1}-9\times 2^x+2=0$, 즉 $4\times 2^{2x}-9\times 2^x+2=0$에서

$2^x=t\,(t>0)$라 하면 $4t^2-9t+2=0$에서

$(4t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=\dfrac{1}{4}$ 또는 $t=2$

(i) $t=2^x=\dfrac{1}{4}$에서 $x=-2$

(ii) $t=2^x=2$에서 $x=1$

따라서 주어진 방정식의 해는 $x=-2$ 또는 $x=1$이므로

$\alpha=-2$, $\beta=1\,(\because \alpha<\beta)$이다.

$\therefore \beta-\alpha=1-(-2)=3$

10

답 ①

조건 (가)에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $f(2)=g(2)$

이때, $f(2)=a^{2b-1}$, $g(2)=a^{1-2b}$이므로

$a^{2b-1}=a^{1-2b}$, $2b-1=1-2b$ $\quad\therefore b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x)=a^{\frac{1}{2}x-1}$, $g(x)=a^{1-\frac{1}{2}x}$

한편, 조건 (나)에서 $f(4)+g(4)=\dfrac{5}{2}$이고

$f(4)=a^{\frac{1}{2}\times 4-1}=a$, $g(4)=a^{1-\frac{1}{2}\times 4}=a^{-1}$이므로

$f(4)+g(4)=a+a^{-1}=\dfrac{5}{2}$에서

양변에 $2a$를 곱하면 $2a^2-5a+2=0$

$(2a-1)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{2}\,(\because 0<a<1)$

$\therefore a+b=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

11

답 100

방정식 $9^x+9^{-x}+4(3^x+3^{-x})+a=0$이 실근을 갖기 위한 상수 a의 최댓값은 M이다. M^2의 값을 구하시오.

$3^x+3^{-x}=t$로 치환했을 때 만들어지는 이차방정식에서 생각해.

1st 치환을 이용하여 방정식을 간단히 하자.

$9^x+9^{-x}+4(3^x+3^{-x})+a=0$ ⋯ ㉠에서

$3^x+3^{-x}=t$라 하면 $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

주어진 방정식은

$t^2-2+4t+a=0$ $\quad\therefore t^2+4t+a-2=0$ ⋯ ㉡

2nd 주어진 방정식이 실근을 갖기 위한 조건을 생각하자.

이때, $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a>0$, $b>0$일 때, $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$t=3^x+3^{-x}\geq 2\sqrt{3^x\times 3^{-x}}=2$

(단, 등호는 $3^x=3^{-x}$일 때 성립)

이므로 방정식 ㉠이 실근을 갖기 위해서는 t에 대한 이차방정식 ㉡이 $t\geq 2$에서 실근이 존재해야 한다.

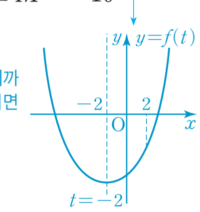
한편, $f(t)=t^2+4t+a-2=(t+2)^2+a-6$이라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축이 $t=-2$이므로 $t\geq 2$에서 근이 존재하려면 $f(2)=a+10\leq 0$이어야 한다.

$\therefore a\leq -10$

따라서 상수 a의 최댓값은 -10이므로 $M=-10$

$\therefore M^2=(-10)^2=100$

함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축이 $t=-2$이니까 $t\geq 2$에서 방정식 $f(t)=0$의 근이 존재하려면 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같아야 해. 즉, $f(2)\leq 0$이어야 해.



12 답 ②

$4^{-x}-3\times2^{-x+1}+8\le0$, 즉 $(2^{-x})^2-6\times2^{-x}+8\le0$에서

$2^{-x}=t\,(t>0)$라 하면

$t^2-6t+8\le0$, $(t-2)(t-4)\le0$ $\quad\therefore 2\le t\le4$

즉, $2\le2^{-x}\le2^2$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$이고 밑이 1보다 작으므로 $-2\le x\le-1$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-1$이므로

$\alpha\beta=(-2)\times(-1)=2$

13 답 7

$(5^x-125)\left(\frac{1}{3^x}-81\right)<0$에서

$5^x-125>0$, $\frac{1}{3^x}-81<0$ 또는 $5^x-125<0$, $\frac{1}{3^x}-81>0$

이다. … Ⅰ

(i) $5^x-125>0$, $\frac{1}{3^x}-81<0$일 때,

$5^x-125>0$에서 $5^x>125=5^3$

이때, 밑이 1보다 크므로 $x>3$ … ㉠

또, $\frac{1}{3^x}-81<0$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x<81=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

이때, 밑이 1보다 작으므로 $x>-4$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $x>3$

(ii) $5^x-125<0$, $\frac{1}{3^x}-81>0$일 때,

$5^x-125<0$에서 $5^x<125=5^3$

이때, 밑이 1보다 크므로 $x<3$ … ㉢

또, $\frac{1}{3^x}-81>0$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x>81=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

이때, 밑이 1보다 작으므로 $x<-4$ … ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $x<-4$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$x<-4$ 또는 $x>3$이다. … Ⅱ

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=3$이므로

$\beta-\alpha=3-(-4)=7$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 부등식을 만족시키는 경우를 찾는다.	30%
Ⅱ	각 경우의 해를 구한다.	50%
Ⅲ	$\beta-\alpha$의 값을 구한다.	20%

14 답 ②

$a^{f(x)}\ge a^{g(x)}$에서 밑 a의 값의 범위가 $0<a<1$이므로

$f(x)\le g(x)$

따라서 주어진 부등식의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만날 때의 x의 값의 범위이므로

$b\le x\le0$ 또는 $d\le x\le f$

15 답 ②

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립해야 한다는 거야.

임의의 실수 x에 대하여 $k(4^x+2^{x+1})\ge2^{x+3}-2$가 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는? (단, $k\ne0$)

① $2\le k\le8$ ② $k\ge2$ ③ $0<k\le8$
④ $k\le8$ ⑤ $k>0$

1st 주어진 부등식을 치환을 이용하여 간단히 하자.

$k(4^x+2^{x+1})\ge2^{x+3}-2$에서 $2^x=t\,(t>0)$라 하면

$k(t^2+2t)\ge8t-2$

$\therefore kt^2+2(k-4)t+2\ge0$ … ㉠

2nd 주어진 부등식이 항상 성립하기 위한 k의 값의 범위를 구해.

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립해야 하므로 t에 대한 이차부등식 ㉠이 $t>0$에서 항상 성립해야 한다.

즉, $k>0$이어야 한다. 이때,

$k<0$이면 $y=kt^2+2(k-4)t+2$의 그래프는 위로 볼록하므로 $kt^2+2(k-4)t+2<0$인 t의 값의 범위가 존재하게 돼.

$f(t)=kt^2+2(k-4)t+2$

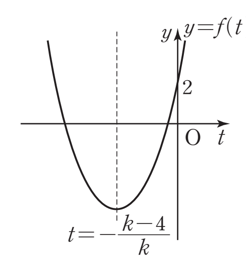
$=k\left(t+\frac{k-4}{k}\right)^2-\frac{(k-4)^2}{k}+2$

라 하면 $y=f(t)$의 그래프는 대칭축이 $t=-\frac{k-4}{k}$이므로

$y=f(t)$의 그래프는 항상 점 $(0, 2)$를 지나.

대칭축의 위치에 따라 경우를 나누면

(i) $-\frac{k-4}{k}\le0$일 때,

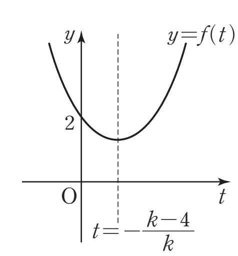


$y=f(t)$의 그래프는 그림과 같으므로 주어진 부등식이 항상 성립한다. 즉,

$-\frac{k-4}{k}\le0$에서 $k-4\ge0$

$\therefore k\ge4$

(ii) $-\frac{k-4}{k}>0$ … ㉡일 때,



주어진 부등식이 항상 성립하려면 그래프는 그림과 같아야 하므로 이차방정식 $kt^2+2(k-4)t+2=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이어야 한다.

$f(t)\ge0$이어야 하므로 $y=f(t)$의 그래프는 x축과 접하거나 x축과 만나면 안 돼. 즉, 방정식 $f(t)=0$이 중근을 갖거나 실근이 존재하지 않아야 하니까 $D\le0$이야.

$\frac{D}{4}=(k-4)^2-2k=(k-2)(k-8)\le0$

$\therefore 2\le k\le8$

그런데 ㉡에서 $k-4<0$, 즉 $k<4$이므로 $2\le k<4$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 지수부등식이 임의의 실수 x에 대하여 성립하기 위한 k의 값의 범위는 $k\ge2$이다.

Simple G 로그함수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 50~51

01 답 로그함수

02 답 $y=\log_a(x-m)+n$

03 답 $0<a<1$

04 답 ○

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ×

08 답 ○

09 답 $\{x|x>1\}$
$x-1>0$에서 $x>1$이므로 정의역은 $\{x|x>1\}$

10 답 $\{x|x<3\}$
$3-x>0$에서 $x<3$이므로 정의역은 $\{x|x<3\}$

11 답 $\{x|x>0\}$
$2x>0$에서 $x>0$이므로 정의역은 $\{x|x>0\}$

12 답 $\{x|x\neq-3$인 모든 실수$\}$
$(x+3)^2>0$에서 $x\neq-3$이므로 정의역은
$\{x|x\neq-3$인 모든 실수$\}$

13 답 $a=1,\ b=4$
$a=\log_2 2=1$
$2=\log_2 b \Longleftrightarrow b=2^2=4$

14 답 $\log_2 8>\log_2 6$
$8>6$이고 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값이 증가하므로 $\log_2 8>\log_2 6$

15 답 $\log_{\frac{1}{2}} 5<\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$
$5>\frac{1}{5}$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값이 감소하므로 $\log_{\frac{1}{2}} 5<\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$

16 답 $\log_3\sqrt{12}<\log_3 4<2\log_3 4$
$2\log_3 4=\log_3 4^2=\log_3 16$이고 $\sqrt{12}<\sqrt{16}<\sqrt{256}$이다.
이때, 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값이 증가하므로 $\log_3\sqrt{12}<\log_3 4<2\log_3 4$이다.

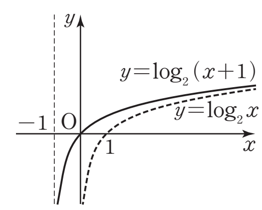
17 답 $y=\log_3(x+1)+4$
x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동이므로 x 대신에 $x+1$을 y 대신에 $y-4$를 대입하면
$y-4=\log_3(x+1)$, 즉 $y=\log_3(x+1)+4$이다.

18 답 $y=-\log_3 x$
x축에 대하여 대칭이동이므로 y 대신에 $-y$를 대입하면
$-y=\log_3 x$, 즉 $y=-\log_3 x$

19 답 $y=\log_3(-x)$
y축에 대하여 대칭이동이므로 x 대신에 $-x$를 대입하면
$y=\log_3(-x)$

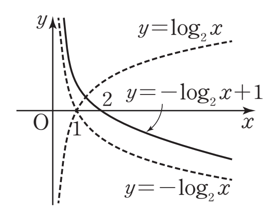
20 답 $y=-\log_3(-x)$
원점에 대하여 대칭이동이므로 x 대신에 $-x$, y 대신에 $-y$를 대입하면 $-y=\log_3(-x)$, 즉 $y=-\log_3(-x)$

21 답 풀이 참조
$y=\log_2(x+1)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x>-1\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=-1$이다.

22 답 풀이 참조
$y=-\log_2 x+1$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

23 답 최댓값 : 4, 최솟값 : 1
$y=\log_2 x$의 밑이 1보다 크므로
$x=16$일 때, 최댓값은 $\log_2 16=\log_2 2^4=4$
$x=2$일 때, 최솟값은 $\log_2 2=1$

24 답 최댓값 : -3, 최솟값 : -6
$y=\log_{\frac{1}{2}} 4x$의 밑이 1보다 작으므로
$x=2$일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{2}} 8=-\log_2 2^3=-3$
$x=16$일 때, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{2}} 64=-\log_2 2^6=-6$

25 답 최댓값 : -1, 최솟값 : $-\log_3 20$
$y=\log_{\frac{1}{3}}(3x+2)$의 밑이 1보다 작으므로
$x=\frac{1}{3}$일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}} 3=-\log_3 3=-1$
$x=6$일 때, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{3}} 20=-\log_3 20$

26 답 최댓값 : 11, 최솟값 : 7
$y=\log_2(x-1)+5$의 밑이 1보다 크므로
$x=65$일 때, 최댓값은 $\log_2 64+5=6+5=11$
$x=5$일 때, 최솟값은 $\log_2 4+5=2+5=7$

유형 연습 [+ 내신 유형] 문제편 pp. 52~55

27 답 ②

$f(\sqrt{3})=\log_3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

$f(9)=\log_3 9=\log_3 3^2=2$

$\therefore f(\sqrt{3})+f(9)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

28 답 ①

$f(x)=\log_a(4x+1)+2$에 대하여 $f(2)=4$이므로

$4=\log_a(8+1)+2$에서 $\log_a 9=2$, $a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>0,\ a\neq1)$

$\therefore f(20)=\log_3(80+1)+2=\log_3 3^4+2=6$

29 답 ③

$f(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=(2^{-1})^{-2}=2^2=4$이므로

$(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(4)=\log_4 4=1$

30 답 ④

$f(x)=\log_2 x$에 대하여 $f(f(x))=2$이므로

$\log_2(\log_2 x)=2$에서 $\log_2 x=2^2=4$

$\therefore x=2^4=16$

31 답 ④

진수가 양수이어야 하므로 $(x+2)^2>0$에서 $x\neq-2$인 모든 실수이다.

따라서 로그함수 $y=\log(x+2)^2$의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq-2$인 모든 실수$\}$이다.

32 답 ④

④ $y=\log_{\frac{1}{a}}x$에서 $y=-\log_a x$이므로 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

33 답 ④

주어진 함수 $y=\log_2 x$의 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$이다.

ㄱ. $y=-\log_2\frac{1}{x}=\log_2 x$이고 정의역은 $\frac{1}{x}>0$에서

$\{x\,|\,x>0\}$

ㄴ. $y=\log_4 x^2=\log_2|x|$이고 정의역은 $x^2>0$에서

$\{x\,|\,x\neq0\}$

ㄷ. $y=\frac{1}{3}\log_2 x^3=\log_2 x$이고 정의역은 $x^3>0$에서

$\{x\,|\,x>0\}$

따라서 $y=\log_2 x$와 같은 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

34 답 ②

함수 $y=\log_2(x+3)+5$의 그래프가 점 $(a,\ 8)$을 지나므로

$8=\log_2(a+3)+5$에서 $\log_2(a+3)=3$

$a+3=2^3=8 \qquad \therefore a=5$

35 답 12

주어진 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(ax+b)$의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$과 점 $(0,-2)$를 지나므로

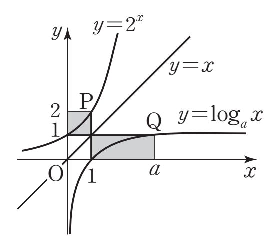
$0=\log_{\frac{1}{2}}(-a+b)$ … ㉠, $-2=\log_{\frac{1}{2}}(0+b)$ … ㉡

㉠에서 $-a+b=1$이고 ㉡에서 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$이므로

$a=3,\ b=4$이다.

$\therefore ab=3\times4=12$

36 답 ③



그림과 같이 점 P는 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표는 $(1,\ 2)$이다. 따라서 작은 직사각형은 한 변의 길이가 1인 정사각형이므로 넓이는 1이다.

한편, 점 Q는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이고 y좌표가 1이므로 $1=\log_a x$에서 $x=a \qquad \therefore \mathrm{Q}(a,\ 1)$

따라서 큰 직사각형의 가로의 길이가 $a-1$, 세로의 길이가 1이므로 넓이는 $a-1$이다.

이때, 두 직사각형의 넓이의 합이 4이므로

$1+(a-1)=4 \qquad \therefore a=4$

37 답 ②

점 B의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 점 A의 좌표는 $(a,\ 3)$이다.

이때, 점 A는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위에 있으므로

$3=\log_2 a$에서 $a=2^3=8$

즉, 점 B의 좌표는 $(8,\ 0)$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=3$이므로

점 C의 x좌표는 $a+3=8+3=11$이다.

38 답 ③

로그함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면 $y=\log_3(x-2)+5$이 그래프가 점 $(a,\ 9)$를 지나므로

$9=\log_3(a-2)+5$, $\log_3(a-2)=4$

$a-2=3^4=81 \qquad \therefore a=83$

TIP

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입하여 구한다.

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 y 대신 $-y$를, y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 x 대신 $-x$를, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하여 구한다.

39 답 4

$y=\log_2(2x+6)=\log_2 2(x+3)=\log_2(x+3)+1$

즉, 이 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향을 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=-3$, $b=1$이므로

$b-a=1-(-3)=4$

40 답 ②

ㄱ. $y=\log_3(-x)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄹ. $y=\log_3 3x=\log_3 x+1$이므로 이 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

41 답 ②

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\log_2 x$에서 $y=-\log_2 x=\log_2\frac{1}{x}$

이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y-1=\log_2\frac{1}{x}$에서

$y=\log_2\frac{1}{x}+1=\log_2\frac{1}{x}+\log_2 2=\log_2\frac{2}{x}$

$\therefore a=2$

42 답 ③

$y=\log_2(x-3)+1$에서 $y-1=\log_2(x-3)$

$x-3=2^{y-1}$ $\quad\therefore x=2^{y-1}+3$

이때, x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=2^{x-1}+3$에서 $g(x)=2^{x-1}+3$

$\therefore g(2)=2^{2-1}+3=5$

다른 풀이

$f(x)=\log_2(x-3)+1$이라 하면 $g(x)=f^{-1}(x)$

이때, $g(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$\log_2(k-3)+1=2$에서 $\log_2(k-3)=1$

$k-3=2$ $\quad\therefore k=5$

$\therefore g(2)=k=5$

심플 정리

[역함수 구하는 순서]

(i) $y=f(x)$를 정리하여 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 고친다.

(ii) x와 y를 서로 바꾼다. 이때 $y=f(x)$의 치역을 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역으로 한다.

43 답 ①

$y=3^x$에서 $x=\log_3 y$

이때, x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_3 x$

따라서 $f^{-1}(x)=\log_3 x=-\log_{\frac{1}{3}} x$이므로 $a=-1$

또, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$에서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^y$

이때, x와 y를 서로 바꾸면 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

따라서 $g^{-1}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$이므로 $b=-1$

$\therefore a+b=(-1)+(-1)=-2$

44 답 ⑤

$y=3^{x+2}$에서 $x+2=\log_3 y$ $\quad\therefore x=\log_3 y-2$

이때, x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=\log_3 x-2=\log_3 x-\log_3 3^2=\log_3\frac{x}{9}$

즉, $\log_3\frac{1}{9}x=\log_3 kx$에서 $k=\frac{1}{9}$

45 답 ②

$y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 그래프의 교점과 같으므로 교점의 좌표는 $(2, 2)$, $(4, 4)$이다.

(i) $f(2)=2$에서

$\log_a 1+n=2$, $0+n=2$ $\quad\therefore n=2$

(ii) $f(4)=4$에서

$\log_a 3+n=4$, $\log_a 3+2=4$, $\log_a 3=2$ $\quad\therefore a^2=3$

(i), (ii)에서 $a^2+n^2=3+4=7$

심플 정리

[함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점]

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 모두 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이다. 하지만 그 역은 성립하지 않는다.

46 답 ②

ㄱ. $\log_{\frac{1}{4}} 6=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 6=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{6}$

이때, $3>\sqrt{6}$이고, $0<(\text{밑})=\frac{1}{2}<1$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} 3<\log_{\frac{1}{4}} 6$ (거짓)

ㄴ. $\log_9 2=\frac{1}{2}\log_3 2=\log_3 2^{\frac{1}{2}}$이고, $\frac{1}{3}=\log_3 3^{\frac{1}{3}}$

이때, $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8$, $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$이므로

$2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$이고 $(\text{밑})=3>1$이므로 $\log_9 2<\frac{1}{3}$ (거짓)

ㄷ. $\frac{\log_5 3}{3}=\frac{\log_5 9}{6}$이고, $\frac{\log_5 4}{4}=\frac{\log_5 2}{2}=\frac{\log_5 8}{6}$

이때, $(\text{밑})=5>1$이므로 $\frac{\log_5 3}{3}>\frac{\log_5 4}{4}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

47 답 ⑤

$A=\frac{1}{2}\log_{0.1} 2=\log_{0.1}\sqrt{2}$, $B=\log_{0.1}\sqrt{3}$,

$C=\frac{1}{3}\log_{0.1} 8=\log_{0.1} 2$

이때, $\sqrt{2}<\sqrt{3}<2$이고 $0<(\text{밑})=0.1<1$이므로

$\frac{1}{3}\log_{0.1}8<\log_{0.1}\sqrt{3}<\frac{1}{2}\log_{0.1}2$

$\therefore C<B<A$

TIP

함수 $y=\log_a x$는 $a>1$이면 증가함수이고 $0<a<1$이면 감소함수이므로 밑의 범위에 주의하여 로그의 대소 비교를 해야 한다. 즉, $m>n>0$인 두 수 m, n에 대하여 $\log_a m$, $\log_a n$의 대소는

(1) $a>1$이면 $\log_a m>\log_a n$

(2) $0<a<1$이면 $\log_a m<\log_a n$

48 답 3

함수 $y=\log_3 x+1$에서 $(\text{밑})=3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 주어진 함수의

최댓값은 $x=3$일 때 $M=\log_3 3+1=2$이고

최솟값은 $x=1$일 때 $m=\log_3 1+1=1$이다.

$\therefore M+m=2+1=3$

49 답 ③

함수 $y=\log_3(x+a)+2$에서 $(\text{밑})=3>1$이므로

이 함수는 x의 값이 최대일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $x=4$일 때, 최댓값 4를 가지므로

$\log_3(4+a)+2=4$에서 $\log_3(4+a)=2$

$4+a=3^2=9$ $\therefore a=5$

50 답 ④

$f(x)=-x^2+2x+7=-(x-1)^2+8$이라 하면

$0\le x\le 3$일 때, $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $f(1)=8$을, $x=3$에서 최솟값 $f(3)=4$를 갖는다. 즉, $f(x)$가 갖는 값의 범위는 $4\le f(x)\le 8$이다.

한편, $y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$에서 $0<(\text{밑})=\frac{1}{2}<1$이므로 진수가 최대일 때 최솟값, 진수가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 주어진 함수는

$f(x)=4$일 때 최댓값 $y=\log_{\frac{1}{2}}4=-2$를,

$f(x)=8$일 때 최솟값 $y=\log_{\frac{1}{2}}8=-3$을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 $(-2)\times(-3)=6$이다.

51 답 ②

$f(x)=5x^2-10x+6=5(x-1)^2+1$이라 하면

$-1\le x\le 5$일 때, $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $f(1)=1$을, $x=5$에서 최댓값 $f(5)=81$을 갖는다. 즉, $f(x)$가 갖는 값의 범위는 $1\le f(x)\le 81$이다.

한편, $\log_a f(x)$에서 $0<(\text{밑})=a<1$이므로 진수가 최대일 때 최솟값, 진수가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 주어진 함수는 $f(x)=81$일 때 최솟값을 가지므로

$\log_a 81=-4$, $a^{-4}=81=3^4$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 함수 $y=\log_a f(x)=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$는 $f(x)=1$일 때 최댓값 $M=\log_{\frac{1}{3}}1=0$을 갖는다.

$\therefore a+M=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$

52 답 ④

$\log_2 x=t$라 하면

$y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x+3=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

이때, $1\le x\le 8$에서 $\log_2 1\le\log_2 x\le\log_2 8$이므로

t의 값의 범위는 $0\le t\le 3$이다.

따라서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최솟값 2를, $t=3$일 때 최댓값 6을 갖는다.

따라서 $M=6$, $m=2$이므로

$M+m=6+2=8$

53 답 ②

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$라 하면

$y=(\log_{\frac{1}{3}}x-1)^2+1=(t-1)^2+1$

이때, $\frac{1}{9}\le x\le 3$에서 $\log_{\frac{1}{3}}3\le\log_{\frac{1}{3}}x\le\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$이므로

t의 값의 범위는 $-1\le t\le 2$이다.

따라서 주어진 함수는 $t=-1$일 때 최댓값 5를 가지므로

$t=\log_{\frac{1}{3}}x=-1$에서

$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$

54 답 ①

$\log_3 x=t$라 하면

$y=(\log_3 x)^2+a\log_3 x+b=t^2+at+b$

이 함수가 $x=\frac{1}{9}$, 즉 $t=\log_3\frac{1}{9}=-2$일 때 최솟값 5를 가지므로 이차함수 $y=t^2+at+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 5)$이다.

즉, $y=t^2+at+b=(t+2)^2+5=t^2+4t+9$이므로

$a=4$, $b=9$이다.

$\therefore a+b=4+9=13$

심플 정리

[이차함수의 최대 · 최소]

이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$에 대하여

(1) $a>0$이면 $x=m$에서 최솟값 $f(m)=n$을 갖고 최댓값은 없다.

(2) $a<0$이면 $x=m$에서 최댓값 $f(m)=n$을 갖고 최솟값은 없다.

Ⅰ G

55 답 ①

$y=(\log_2 2x)\left(\log_2 \frac{8}{x}\right)=(1+\log_2 x)(3-\log_2 x)$

$=-(\log_2 x)^2+2\log_2 x+3$

이때, $\log_2 x=t$라 하면 주어진 함수는

$y=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4$이고

$\frac{1}{16}\le x\le 8$에서 $\log_2 \frac{1}{16}\le \log_2 x\le \log_2 8$이므로 t의 값의 범위는 $-4\le t\le 3$이다.

따라서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최댓값 4를, $t=-4$일 때 최솟값 -21을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 $4\times(-21)=-84$이다.

56 답 ③

$x>1$, $y>1$이므로 $\log_3 x>0$, $\log_3 y>0$이다.

이때, $\log_3 x\times\log_3 y=2$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_3 xy^2=\log_3 x+2\log_3 y$

$\ge 2\sqrt{\log_3 x\times 2\log_3 y}$

$=2\sqrt{2\times(\log_3 x\times\log_3 y)}=4$

(단, 등호는 $\log_3 x=2\log_3 y$일 때 성립)

따라서 $\log_3 xy^2$의 최솟값은 4이다.

57 답 ③

$y=\log_6(x+1)+\log_6\left(\frac{25}{x}+1\right)$

$=\log_6(x+1)\left(\frac{25}{x}+1\right)=\log_6\left(26+x+\frac{25}{x}\right)$

이때, (밑)$=6>1$이므로 주어진 함수는 $26+x+\frac{25}{x}$의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

한편, $x>0$에서 $\frac{25}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$26+x+\frac{25}{x}\ge 26+2\sqrt{x\times\frac{25}{x}}=26+2\times 5=36$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{25}{x}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $26+x+\frac{25}{x}$의 최솟값은 36이므로 주어진 함수의 최솟값은 $\log_6 36=\log_6 6^2=2$이다.

심플 정리

[산술평균과 기하평균의 관계]

$a>0$, $b>0$인 두 수 a, b에 대하여

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

Simple H 로그함수의 활용

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 56~57

01 답 $f(x)=a^b$

02 답 $f(x)=g(x)$

03 답 $g(x)=h(x)$

04 답 $0<f(x)<g(x)$, $0<g(x)<f(x)$

05 답 ○

06 답 ○

07 답 ×

08 답 ○

09 답 ×

10 답 $x=\frac{1}{9}$

진수의 조건에 의하여 $\frac{1}{x}>0$에서 $x>0$ ⋯ ㉠

$\log_3\frac{1}{x}=2$에서 $\frac{1}{x}=3^2$ $\therefore x=\frac{1}{9}$

따라서 ㉠에 의하여 $x=\frac{1}{9}$

11 답 $x=5$

진수의 조건에 의하여 $x-1>0$에서 $x>1$ ⋯ ㉠

$\log_2(x-1)=2$에서 $x-1=2^2$ $\therefore x=5$

따라서 ㉠에 의하여 $x=5$

12 답 $x=2$

진수의 조건에 의하여 $x+7>0$에서 $x>-7$ ⋯ ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x+7)=-2$에서

$x+7=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=(3^{-1})^{-2}=3^2=9$ $\therefore x=2$

따라서 ㉠에 의하여 $x=2$

13 답 $x=1$

진수의 조건에 의하여

$2x-1>0$, $2-x>0$에서 $\frac{1}{2}<x<2$ ⋯ ㉠

$\log_2(2x-1)=\log_2(2-x)$에서

$2x-1=2-x$, $3x=3$ $\therefore x=1$

따라서 ㉠에 의하여 $x=1$

14 답 $x=2$ 또는 $x=\frac{1}{4}$

$(\log_2 x)^2+\log_2 x-2=0$에서 $\log_2 x=t$라 하면

$t^2+t-2=0$, $(t-1)(t+2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=-2$

(i) $t=\log_2 x=1$에서 $x=2$

(ii) $t=\log_2 x=-2$에서 $x=2^{-2}=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는 $x=2$ 또는 $x=\frac{1}{4}$

15 답 $x=9$ 또는 $x=\frac{1}{81}$

$(\log_3 x)^2+2\log_3 x-8=0$에서 $\log_3 x=t$라 하면

$t^2+2t-8=0$, $(t-2)(t+4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=-4$

(i) $t=\log_3 x=2$에서 $x=3^2=9$

(ii) $t=\log_3 x=-4$에서 $x=3^{-4}=\frac{1}{81}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는 $x=9$ 또는 $x=\frac{1}{81}$

16 답 $x=2$ 또는 $x=16$

$\log_2 x+\log_x 16=5$에서 $\log_2 x+\frac{4}{\log_2 x}=5$

이때, $\log_2 x=t$라 하면 $t+\frac{4}{t}=5$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$t^2-5t+4=0$, $(t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=4$

(i) $t=\log_2 x=1$에서 $x=2$

(ii) $t=\log_2 x=4$에서 $x=2^4=16$

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는

$x=2$ 또는 $x=16$

17 답 $x=\frac{1}{64}$ 또는 $x=8$

$\log_2 2x=\log_2 2+\log_2 x=1+\log_2 x$이고

$\log_2 4x=\log_2 4+\log_2 x=2+\log_2 x$이므로

$(\log_2 2x)(\log_2 4x)=20$에서

$(1+\log_2 x)(2+\log_2 x)=20$

$(\log_2 x)^2+3\log_2 x-18=0$

이때, $\log_2 x=t$라 하면

$t^2+3t-18=0$, $(t+6)(t-3)=0$

$\therefore t=-6$ 또는 $t=3$

(i) $t=\log_2 x=-6$에서 $x=2^{-6}=\frac{1}{64}$

(ii) $t=\log_2 x=3$에서 $x=2^3=8$

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는

$x=\frac{1}{64}$ 또는 $x=8$

18 답 $0<x\le 2$

진수의 조건에 의하여 $x>0$ ⋯ ㉠

$\log_{\frac{1}{2}} x\ge\log_{\frac{1}{2}} 2$에서 밑이 1보다 작으므로 $x\le 2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 해는 $0<x\le 2$

19 답 $x>1$

진수의 조건에 의하여

$x+1>0 \quad \therefore x>-1$ ⋯ ㉠

$\log_5(x+1)>\log_5 2$에서 밑이 1보다 크므로

$x+1>2 \quad \therefore x>1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 해는 $x>1$

20 답 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

진수의 조건에 의하여

$2x-1>0 \quad \therefore x>\frac{1}{2}$ ⋯ ㉠

$\log_2(2x-1)<1=\log_2 2$에서 밑이 1보다 크므로

$2x-1<2 \quad \therefore x<\frac{3}{2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 해는 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

21 답 $0<x<1$

$3<5$이므로 양변에 $\log_x$를 취했을 때, 부등호의 방향이 바뀌려면 밑이 $0<x<1$이어야 한다.

따라서 주어진 부등식의 해는 $0<x<1$이다.

22 답 $2\le x<6$

진수의 조건에 의하여

$3x-2>0$, $6-x>0$

$\therefore \frac{2}{3}<x<6$ ⋯ ㉠

$\log(3x-2)\ge\log(6-x)$에서 밑이 1보다 크므로

$3x-2\ge 6-x \quad \therefore x\ge 2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 해는 $2\le x<6$

23 답 $3<x\le 4$

진수의 조건에 의하여

$x>0$, $x-3>0 \quad \therefore x>3$ ⋯ ㉠

$\log x+\log(x-3)\le\log 4$에서

$\log x(x-3)\le\log 4$이고 밑이 1보다 크므로

$x(x-3)\le 4$, $x^2-3x-4\le 0$, $(x+1)(x-4)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 해는 $3<x\le 4$

24 답 $-4<x<-3$ 또는 $0<x<1$

진수의 조건에 의하여

$x^2+3x>0$, $x(x+3)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>0$ ⋯ ㉠

$\log_3(x^2+3x)<\log_3 4$에서 밑이 1보다 크므로

$x^2+3x<4$, $x^2+3x-4<0$, $(x+4)(x-1)<0$

$\therefore -4<x<1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 해는

$-4<x<-3$ 또는 $0<x<1$

25 답 $0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>16$

진수의 조건에 의하여 $x>0$ ⋯ ㉠

$(\log_2 x)^2>4+3\log_2 x$에서 $(\log_2 x)^2-3\log_2 x-4>0$

이때, $\log_2 x=t$라 하면

$t^2-3t-4>0$, $(t+1)(t-4)>0$

$\therefore t<-1$ 또는 $t>4$

(i) $t<-1$에서 $\log_2 x<-1$, $\log_2 x<\log_2 2^{-1}$

$\therefore x<\frac{1}{2}$

(ii) $t>4$에서 $\log_2 x>4$, $\log_2 x>\log_2 2^4$

$\therefore x>16$

(i), (ii)에 의하여 $x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>16$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 해는 $0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>16$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 58~61

26 답 ⑤

진수의 조건에 의하여 $(x+1)^2>0$, $5x+1>0$

$\therefore x>-\frac{1}{5}$ ⋯ ㉠

$\log_2(x+1)^2=\log_2(5x+1)$에서

$(x+1)^2=5x+1$, $x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

이 값은 ㉠을 모두 만족하므로 주어진 방정식의 해는

$x=0$ 또는 $x=3$이다. 따라서 모든 x의 값의 합은 $0+3=3$

27 답 ③

진수의 조건에 의하여 $x-3>0$, $x-1>0$

$\therefore x>3$ ⋯ ㉠

$\log_2(x-3)=\log_4(x-1)$에서

$\log_2(x-3)=\frac{1}{2}\log_2(x-1)$

$2\log_2(x-3)=\log_2(x-1)$

$\log_2(x-3)^2=\log_2(x-1)$, $(x-3)^2=x-1$

$x^2-7x+10=0$, $(x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=5$ ($\because$ ㉠)

따라서 $\alpha=5$이므로 $2^\alpha=2^5=32$

28 답 ②

$\log_2 16x^3=\log_2 16+\log_2 x^3=4+3\log_2 x$이므로

$(\log_2 x)^2-\log_2 16x^3=0$에서

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x-4=0$

이때, $\log_2 x=t$라 하면

$t^2-3t-4=0$, $(t-4)(t+1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

(i) $t=\log_2 x=-1$에서 $x=2^{-1}=\frac{1}{2}$

(ii) $t=\log_2 x=4$에서 $x=2^4=16$

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=16$이므로

$\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=16$ ($\because \alpha<\beta$)

$\therefore 2\alpha+\beta=2\times\frac{1}{2}+16=17$

29 답 ④

$\log_3 9x=\log_3 9+\log_3 x=2+\log_3 x$이므로

$(\log_3 9x)^2-3\log_3 x=6$에서

$(2+\log_3 x)^2-3\log_3 x-6=0$

$(\log_3 x)^2+\log_3 x-2=0$

이때, $\log_3 x=t$라 하면

$t^2+t-2=0$, $(t-1)(t+2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=-2$

(i) $t=\log_3 x=1$에서 $x=3$

(ii) $t=\log_3 x=-2$에서 $x=3^{-2}=\frac{1}{9}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는 $x=3$ 또는 $x=\frac{1}{9}$이므로

모든 근의 합은 $3+\frac{1}{9}=\frac{28}{9}$

30 답 ①

밑과 진수의 조건에 의하여 $x>0$, $x\neq1$ ⋯ ㉠

한편, $\log_x 4=2\log_x 2=\frac{2}{\log_2 x}$이므로

$\log_x 4-\log_2 x=1$에서 $\frac{2}{\log_2 x}-\log_2 x=1$

이때, $\log_2 x=t$라 하면

$\frac{2}{t}-t=1$, $t^2+t-2=0$, $(t-1)(t+2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=-2$

(i) $t=\log_2 x=1$에서 $x=2$

(ii) $t=\log_2 x=-2$에서 $x=2^{-2}=\frac{1}{4}$

㉠과 (i), (ii)에 의하여 구하는 해는 $x=2$ 또는 $x=\frac{1}{4}$이므로 $\alpha=2$, $\beta=\frac{1}{4}$ ($\because \alpha>\beta$)

$\therefore \alpha+\beta=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

31 답 ②

$x^{\log 3}=3^{\log x}$이므로

$3^{\log x}\times x^{\log 3}-2(3^{\log x}+x^{\log 3})+3=0$에서

$3^{\log x}\times3^{\log x}-2(3^{\log x}+3^{\log x})+3=0$

$(3^{\log x})^2-4\times3^{\log x}+3=0$

이때, $3^{\log x}=t\ (t>0)$라 하면

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

답_040059_심플자이 수1(G~H)-삼.indd 46 2018. 5. 2. 오후 8:05

(i) $t=3^{\log x}=1$에서 $\log x=0$ $\therefore x=1$

(ii) $t=3^{\log x}=3$에서 $\log x=1$ $\therefore x=10$

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는 $x=1$ 또는 $x=10$이므로 모든 x의 값의 합은 $1+10=11$이다.

32 답 ②

밑의 조건에 의하여 $x^2-1>0$, $x^2-1\neq 1$, $x+11>0$, $x+11\neq 1$ ⋯ ㉠이어야 한다.

$\log_{x^2-1}5=\log_{x+11}5$에서 $x^2-1=x+11$

$x^2-x-12=0$, $(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=-3$ 또는 $x=4$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=4$ ($\because \alpha<\beta$)이므로

$\beta-\alpha=4-(-3)=7$

33 답 ①

밑과 진수의 조건에 의하여

$x^2>0$, $x^2\neq 1$, $x+6>0$, $x+6\neq 1$, $x-1>0$

$\therefore x>1$ ⋯ ㉠

(i) 밑이 같을 때, 즉 $x^2=x+6$에서

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 ㉠에 의하여 $x=3$

(ii) 진수가 1일 때, 즉 $x-1=1$에서 $x=2$

따라서 ㉠에 의하여 $x=2$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 모든 해의 곱은 $2\times 3=6$이다.

34 답 ②

진수의 조건에 의하여 $x+y>0$, $x>0$, $y>0$

$\therefore x>0$, $y>0$

(i) $\log_2(x+y)=3$에서 $x+y=2^3=8$

(ii) $\log_2 x+\log_2 y=1$에서 $\log_2 xy=1$이므로 $xy=2$

$\therefore (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=8^2-4\times 2=56$

TIP

실수 x, y에 대하여 $x+y=8$, $xy=2$를 만족하므로 이차방정식 $t^2-8t+2=0$의 두 근이 x, y가 된다. 즉, $t=4\pm\sqrt{16-2}=4\pm\sqrt{14}$이므로 두 근 모두 양수이다.

35 답 ②

$\log_3 x=X$, $\log_2 y=Y$라 하면

$\log_4 x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3 4}=\dfrac{X}{2\log_3 2}$, $\log_9 y=\dfrac{\log_2 y}{\log_2 9}=\dfrac{Y}{2\log_2 3}$

$\therefore \log_4 x\times\log_9 y=\dfrac{X}{2\log_3 2}\times\dfrac{Y}{2\log_2 3}=\dfrac{XY}{4}$

따라서 주어진 방정식은 $\begin{cases} X+Y=6 \\ \dfrac{XY}{4}=2 \end{cases}$ 에서

$\begin{cases} X+Y=6 \cdots ㉠ \\ XY=8 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $Y=6-X$를 ㉡에 대입하면

$X(6-X)=8$, $X^2-6X+8=0$

$(X-2)(X-4)=0$ $\therefore X=2$ 또는 $X=4$

$\therefore \begin{cases} X=2 \\ Y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} X=4 \\ Y=2 \end{cases}$

(i) $\log_3 x=2$, $\log_2 y=4$일 때, $x=9$, $y=16$

(ii) $\log_3 x=4$, $\log_2 y=2$일 때, $x=81$, $y=4$

한편, $x<y$이므로 $x=9$, $y=16$

$\therefore x+y=9+16=25$

36 답 ⑤

$(2x)^{\log 2}=(3x)^{\log 3}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 2(\log 2x)=\log 3(\log 3x)$에서

$\log 2(\log 2+\log x)=\log 3(\log 3+\log x)$

$(\log 2-\log 3)\log x=(\log 3)^2-(\log 2)^2$

$=(\log 3-\log 2)(\log 3+\log 2)$

$\log x=-(\log 3+\log 2)=-\log 6=\log\dfrac{1}{6}$

$\therefore x=\dfrac{1}{6}$

37 답 ②

$x^{\log x}=\dfrac{100}{x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log\dfrac{100}{x}$에서 $(\log x)^2=\log 100-\log x$

$(\log x)^2+\log x-2=0$

이때, $\log x=t$라 하면

$t^2+t-2=0$, $(t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

(i) $t=\log x=-2$에서 $x=10^{-2}=\dfrac{1}{100}$

(ii) $t=\log x=1$에서 $x=10$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=\dfrac{1}{100}$ 또는 $x=10$이므로 모든 근의 곱은

$\dfrac{1}{100}\times 10=\dfrac{1}{10}$

38 답 ⑤

$(\log_{\sqrt{2}}x)^2-k\log_{\sqrt{2}}x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=4$

이때, $\log_{\sqrt{2}}x=t$라 하면 $t^2-kt-2=0$의 두 근은 $\log_{\sqrt{2}}\alpha$, $\log_{\sqrt{2}}\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k=\log_{\sqrt{2}}\alpha+\log_{\sqrt{2}}\beta=\log_{\sqrt{2}}\alpha\beta=\log_{\sqrt{2}}4=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^4=4$

심플 정리

[이차방정식의 근과 계수의 관계]

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

I

H

39 답 ③

$(\log x)\left(\log \frac{x}{27}\right)=1$에서 $(\log x)(\log x-\log 27)=1$

$\therefore (\log x)^2-\log 27\times\log x-1=0$

이 방정식의 두 근이 α, β이므로 $\log x=t$라 하면

$t^2-(\log 27)t-1=0$의 두 근은 $\log\alpha$, $\log\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=\log\alpha\beta=\log 27 \qquad \therefore \alpha\beta=27$

40 답 ④

$x^2-x\log_5 a^2-\log_5 a+6=0$, 즉

$x^2-(2\log_5 a)x-\log_5 a+6=0$이 중근을 가지려면

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(\log_5 a)^2+\log_5 a-6=0$

이때, $\log_5 a=t$라 하면

$t^2+t-6=0$, $(t+3)(t-2)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=2$

(i) $t=\log_5 a=-3$에서 $a=5^{-3}=\frac{1}{125}$

(ii) $t=\log_5 a=2$에서 $a=5^2=25$

(i), (ii)에 의하여 주어진 이차방정식이 중근을 갖기 위한

a의 값은 $\frac{1}{125}$ 또는 25이므로 모든 상수 a의 값의 곱은

$\frac{1}{125}\times 25=\frac{1}{5}$이다.

41 답 12

방정식 $\log_3 x=kx$의 두 근의 비가 1 : 3이므로 $\alpha\neq 0$인

상수 α에 대하여 두 근을 각각 α, 3α라 하면

$\log_3\alpha=k\alpha$ ⋯ ㉠, $\log_3 3\alpha=3k\alpha$ ⋯ ㉡

㉡에서 $\log_3 3\alpha=1+\log_3\alpha=1+k\alpha=3k\alpha$ ($\because$ ㉠)

$2k\alpha=1 \qquad \therefore k\alpha=\frac{1}{2}$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $\log_3\alpha=\frac{1}{2}$에서 $\alpha=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ ⋯ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면 $\sqrt{3}k=\frac{1}{2}$에서 $k=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

따라서 $k^2=\frac{1}{12}$이므로 $\frac{1}{k^2}=12$

42 답 ⑤

진수의 조건에 의하여 $x+1>0$, $2x-5>0$

$\therefore x>\frac{5}{2}$ ⋯ ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(x+1)<\log_{\frac{1}{5}}(2x-5)$에서 밑이 1보다 작으므로

$x+1>2x-5 \qquad \therefore x<6$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식의 해는 $\frac{5}{2}<x<6$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 3, 4,

5이므로 모든 정수 x의 값의 합은 $3+4+5=12$이다.

43 답 ③

진수의 조건에 의하여 $x-1>0$, $2x+6>0$

$\therefore x>1$ ⋯ ㉠

$2\log_3(x-1)\leq\log_3(2x+6)$에서

$\log_3(x-1)^2\leq\log_3(2x+6)$

밑이 1보다 크므로 $(x-1)^2\leq 2x+6$

$x^2-4x-5\leq 0$, $(x+1)(x-5)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식의 해는 $1<x\leq 5$

따라서 정수 x의 최댓값은 5, 최솟값은 2이므로

$M=5$, $m=2$이다.

$\therefore M+m=5+2=7$

44 답 ⑤

진수의 조건에 의하여 $x-1>0$, $x+2>0$

$\therefore x>1$ ⋯ ㉠

$\log_2(x-1)+\log_2(x+2)<2$에서

$\log_2(x-1)(x+2)<2$, $\log_2(x^2+x-2)<\log_2 4$

밑이 1보다 크므로 $x^2+x-2<4$

$x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식의 해는 $1<x<2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로 $\alpha+\beta=1+2=3$

45 답 ②

$x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$이므로 진수의 조건에 의하여

모든 실수 x에 대하여 $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+4)$가 정의된다.

$\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+4)\geq -1$에서

$\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+4)\geq\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{4}}4$

밑이 1보다 작으므로 $x^2-2x+4\leq 4$, $x(x-2)\leq 0$

$\therefore 0\leq x\leq 2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 최댓값은 2이다.

46 답 ①

진수의 조건에 의하여 $x>0$ ⋯ ㉠

$(\log_2 x)^2+\log_2 x^3\leq 4$에서 $(\log_2 x)^2+3\log_2 x\leq 4$

$(\log_2 x)^2+3\log_2 x-4\leq 0$

이때, $\log_2 x=t$라 하면 $t^2+3t-4\leq 0$

$(t+4)(t-1)\leq 0 \qquad \therefore -4\leq t\leq 1$

즉, $-4\leq\log_2 x\leq 1$에서 $\log_2 2^{-4}\leq\log_2 x\leq\log_2 2$이고 밑

이 1보다 크므로 $\frac{1}{16}\leq x\leq 2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식의 해는 $\frac{1}{16}\leq x\leq 2$이다.

따라서 $\alpha=\frac{1}{16}$, $\beta=2$이므로 $\alpha\beta=\frac{1}{16}\times 2=\frac{1}{8}$

47 답 ②

진수의 조건에 의하여 $x>0$ ⋯ ㉠

$\log_{\frac{1}{5}} x=-\log_5 x$이므로 $(\log_5 x-1)(\log_{\frac{1}{5}} x+2)>0$에서

$(\log_5 x-1)(-\log_5 x+2)>0$

$(\log_5 x-1)(\log_5 x-2)<0$

이때, $\log_5 x=t$라 하면

$(t-1)(t-2)<0$ $\quad\therefore 1<t<2$

즉, $1<\log_5 x<2$에서 $\log_5 5<\log_5 x<\log_5 5^2$이고 밑이 1보다 크므로 $5<x<25$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식의 해는 $5<x<25$이다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수는 6, 7, ⋯, 24의 19이다.

> 심플 정리
>
> [부등식을 만족시키는 정수의 개수]
>
> 정수 α, β에 대하여 다음 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는
>
> (1) $\alpha<x<\beta \Rightarrow \beta-\alpha-1$ (개)
>
> (2) $\alpha\le x<\beta \Rightarrow \beta-\alpha$ (개)
>
> (3) $\alpha<x\le\beta \Rightarrow \beta-\alpha$ (개)
>
> (4) $\alpha\le x\le\beta \Rightarrow \beta-\alpha+1$ (개)

48 답 ②

진수의 조건에 의하여 $x>0$ ⋯ ㉠

$x^{\log_3 x}<9x$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}<\log_3 9x$, $(\log_3 x)^2<2+\log_3 x$

이때, $\log_3 x=t$라 하면 $t^2<2+t$

$t^2-t-2<0$, $(t+1)(t-2)<0$ $\quad\therefore -1<t<2$

즉, $-1<\log_3 x<2$에서 $\log_3 3^{-1}<\log_3 x<\log_3 3^2$이고 밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{3}<x<9$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식의 해는 $\frac{1}{3}<x<9$

따라서 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=9$이므로 $3\alpha\beta=3\times\frac{1}{3}\times 9=9$

49 답 ③

진수의 조건에 의하여 $x>0$ ⋯ ㉠

$x^{\log x}<100x$의 양변에 상용로그를 취하면

$(\log x)^2<\log 100x=2+\log x$에서

$(\log x)^2-\log x-2<0$

이때, $\log x=t$라 하면 $t^2-t-2<0$

$(t+1)(t-2)<0$ $\quad\therefore -1<t<2$

즉, $-1<\log x<2$에서 $\log 10^{-1}<\log x<\log 10^2$이고 밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{10}<x<100$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식의 해는 $\frac{1}{10}<x<100$이므로 자연수 x의 개수는 1, 2, 3, ⋯, 99의 99이다.

50 답 ④

진수의 조건에 의하여 $\log_3 x>0$, $x>0$

$\therefore x>1$ ⋯ ㉠

$\log_2(\log_3 x)\le 1$에서 $\log_2(\log_3 x)\le\log_2 2$

이때, (밑)$=2>1$이므로 $\log_3 x\le 2$에서 $\log_3 x\le\log_3 3^2$

또, (밑)$=3>1$이므로 $x\le 9$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식의 해는 $1<x\le 9$이므로 구하는 정수 x의 개수는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 8이다.

51 답 ②

진수의 조건에 의하여 $x>0$, $\log_3 x>0$, $\log_4(\log_3 x)>0$

이므로 $\log_3 x>0=\log_3 1$에서 $x>1$

$\log_4(\log_3 x)>0=\log_4 1$에서

$\log_3 x>1=\log_3 3$ $\quad\therefore x>3$

$\therefore x>3$ ⋯ ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}\{\log_4(\log_3 x)\}>0=\log_{\frac{1}{5}} 1$에서

$\log_4(\log_3 x)<1=\log_4 4$, $\log_3 x<4=\log_3 81$

$\therefore x<81$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$3<x<81$이므로 $\alpha=3$, $\beta=81$

$\therefore \alpha+\beta=3+81=84$

52 답 ②

진수의 조건에 의하여

$a>0$ ⋯ ㉠

주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+2x\log_2 a+4\log_2 a-3=0$의 해가 존재하지 않아야 한다. 즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(\log_2 a)^2-(4\log_2 a-3)<0$에서

$(\log_2 a)^2-4\log_2 a+3<0$

이때, $\log_2 a=t$라 하면

$t^2-4t+3<0$, $(t-1)(t-3)<0$

$\therefore 1<t<3$

즉, $1<\log_2 a<3$에서 $\log_2 2<\log_2 a<\log_2 2^3$이고 밑이 1보다 크므로

$2<a<8$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $2<a<8$이어야 한다.

따라서 자연수 a의 최댓값은 7이다.

> TIP
>
> x에 대한 이차부등식 $ax^2+bx+c>0\,(a>0)$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위한 조건은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 존재하지 않아야 한다. 즉, 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

I H

53 답 ①

진수의 조건에 의하여 $a>0$ ⋯ ㉠

(i) 이차방정식 $x^2-x\log_3 a+2-\log_3\sqrt{a}=0$의 두 근이 존재해야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(\log_3 a)^2-4(2-\log_3\sqrt{a})\ge0$에서

$(\log_3 a)^2+2\log_3 a-8\ge0$

$(\log_3 a+4)(\log_3 a-2)\ge0$

$\therefore \log_3 a\le-4$ 또는 $\log_3 a\ge2$

즉, $\log_3 a\le\log_3 3^{-4}$ 또는 $\log_3 a\ge\log_3 3^2$이므로 ㉠에 의하여 $0<a\le\frac{1}{81}$ 또는 $a\ge9$ ⋯ ㉡

(ii) 이차방정식 $x^2-x\log_3 a+2-\log_3\sqrt{a}=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\log_3 a>0$, $\alpha\beta=2-\log_3\sqrt{a}>0$이다.

$\alpha+\beta=\log_3 a>0$에서 $\log_3 a>\log_3 1$이므로 ㉠에 의하여 $a>1$ ⋯ ㉢

$\alpha\beta=2-\log_3\sqrt{a}>0$에서 $\frac{1}{2}\log_3 a<2$

$\log_3 a<4=\log_3 3^4$이므로 ㉠에 의하여 $0<a<81$ ⋯ ㉣

㉡, ㉢, ㉣에 의하여 $9\le a<81$

따라서 주어진 이차방정식의 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 자연수 a의 최댓값은 80이다.

TIP

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β가 모두 양수가 될 조건은 다음과 같다.

(i) 판별식 $D\ge0$

(ii) $\alpha+\beta>0$

(iii) $\alpha\beta>0$

54 답 ②

$x^{\log_3 x}>(27x)^k$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}>\log_3(27x)^k$에서 $(\log_3 x)^2>k(3+\log_3 x)$

$\therefore (\log_3 x)^2-k\log_3 x-3k>0$

이때, $\log_3 x=t$라 하면 $t^2-kt-3k>0$ ⋯ ㉠

즉, 모든 실수 t에 대하여 ㉠이 성립해야 한다.

이차방정식 $t^2-kt-3k=0$의 판별식을 D라 하면

$D<0$이어야 하므로

$D=k^2-4\times(-3k)=k(k+12)<0$

$\therefore -12<k<0$

따라서 정수 k의 개수는 -11, -10, ⋯, -1의 11이다.

TIP

x에 대한 이차부등식 $ax^2+bx+c>0\,(a>0)$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위한 조건은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 존재하지 않아야 한다. 즉, 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

55 답 ④

처음 연구비를 a라 하고 매년 $p\%$씩 증가시킨다고 하면 10년 후의 연구비는 $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$이다.

이때, 10년 후의 연구비가 처음 연구비의 2배가 되므로

$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}=2a$에서 $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}=2$

양변에 상용로그를 취하면

$10\log\left(1+\frac{p}{100}\right)=\log2$

$\log\left(1+\frac{p}{100}\right)=\frac{\log2}{10}=0.030=\log1.07$

$1+\frac{p}{100}=1.07\qquad\therefore p=7$

56 답 ②

처음 자외선의 양을 a, 자외선 차단 필름의 장수를 n장이라 하면 $a\left(1-\frac{6}{100}\right)^n\le\frac{1}{2}a$에서 $0.94^n\le\frac{1}{2}$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log0.94\le-\log2$

이때, $\log0.94<0$이므로

$n\ge\frac{-\log2}{\log0.94}=\frac{-\log2}{\log9.4-1}=\frac{-0.3010}{0.9731-1}=11.18\times\times\times$

따라서 자연수 n의 최솟값은 12이므로 최소한 12장의 자외선 차단 필름을 통과시켜야 한다.

연습 문제 [G~H] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 62~63

01 답 ⑤

$y=\log_2(16x-4)=\log_2 16\left(x-\frac{1}{4}\right)$

$\quad=\log_2 16+\log_2\left(x-\frac{1}{4}\right)=\log_2\left(x-\frac{1}{4}\right)+4$

즉, 함수 $y=\log_2(16x-4)$의 그래프는 $f(x)=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 그래프이다.

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=4$이므로 $a+b=\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$

> 심플 정리
>
> [그래프의 평행이동]
>
> 함수 $y=f(x)$에 대하여 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.
>
> 즉, 평행이동된 그래프의 식은 $y-n=f(x-m)$이다.

02 답 13

함수 $f(x)=\log_6(x-a)+b$의 그래프는 함수 $y=\log_6 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다. 이때, $y=\log_6 x$의 그래프의 점근선은 $x=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 $x=a$이다.

$\therefore a=5 \Rightarrow f(x)=\log_6(x-5)+b$

한편, $f(11)=9$에서

$\log_6(11-5)+b=\log_6 6+b=1+b=9$이므로 $b=8$

$\therefore a+b=5+8=13$

03 답 ③

주어진 그래프에서

$\log_2 a=1$이므로 $a=2$, $b=a$이므로 $b=2$

$\log_2 c=b=2$이므로 $c=2^2=4$, $d=c$이므로 $d=4$

$\log_2 e=d=4$이므로 $e=2^4=16$

ㄱ. $a+b=2+2=4$ (참)

ㄴ. $2^d=2^4=16$ (참)

ㄷ. $e-a=16-2=14$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 답 ①

$A=-\log_{\frac{1}{3}}2=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$, $B=1=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

$C=2\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}$

이때, $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}$

$\therefore A<B<C$

다른 풀이

$A=-\log_{\frac{1}{3}}2=\log_3 2$, $B=1=\log_3 3$

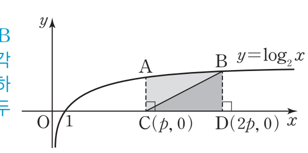
$C=2\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}=2\log_3 2=\log_3 2^2=\log_3 4$

이때, $2<3<4$이고 밑이 1보다 크므로

$\log_3 2<\log_3 3<\log_3 4$

$\therefore A<B<C$

05 답 ④

> 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C$(p,\ 0)$, D$(2p\ ,0)$이라 하자. 삼각형 BCD와 삼각형 ACB의 넓이의 차가 8일 때, 실수 p의 값은? (단, $p>1$)
>
> 두 삼각형 BCD와 ACB의 밑변을 각각 BD, AC라 하면 높이는 모두 CD야.
>
> 
>
>
> ① 4 ② 8 ③ 12
>
> ④ 16 ⑤ 20

1st 두 삼각형의 넓이를 각각 구하자.

두 점 A, B는 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이다.

이때, 점 A의 x좌표가 p이므로 A$(p,\ \log_2 p)$이고 점 B의 x좌표가 $2p$이므로 B$(2p,\ \log_2 2p)$이다.

따라서 두 삼각형 BCD, ACB의 넓이는

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CD}$

$\quad=\frac{1}{2}\times\log_2 2p\times(2p-p)$

$\quad=\frac{p}{2}\log_2 2p$

$\triangle ACB=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CD}$

$\quad=\frac{1}{2}\times\log_2 p\times(2p-p)$

$\quad=\frac{p}{2}\log_2 p$

2nd 넓이의 차가 8임을 이용하여 실수 p의 값을 구하자.

삼각형 BCD와 삼각형 ACB의 넓이의 차가 8이므로

$|\triangle BCD-\triangle ACB|=\left|\frac{p}{2}\log_2 2p-\frac{p}{2}\log_2 p\right|=8$

두 삼각형 중에서 어느 삼각형의 넓이가 더 넓은지 알 수 없으니까 절댓값을 취해야 해.

$\left|\frac{p}{2}(\log_2 2p-\log_2 p)\right|=8$, $\left|\frac{p}{2}\log_2\frac{2p}{p}\right|=8$

$\log_a m-\log_a n=\log_a\frac{m}{n}$

$\left|\frac{p}{2}\log_2 2\right|=8$, $\frac{p}{2}=8\ (\because p>1)$

$\therefore p=16$

I

G~H 연습

06 답 ③

함수 $y=\log_a(x^2-4x+12)$의 최댓값이 -3일 때, 양수 a의 값은? (단, $a\neq 1$)
밑 a의 값의 범위가 $0<a<1$이면 진수가 최소일 때 최댓값을 갖고, $a>1$이면 진수가 최대일 때 최댓값을 가져.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 2 ⑤ 3

1st 밑 a의 값의 범위를 구하자.

$f(x)=x^2-4x+12=(x-2)^2+8$이라 하면 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $f(2)=8$을 갖고, 최댓값은 존재하지 않는다.

이때, 주어진 함수의 밑 a의 값의 범위가 $a>1$이면 진수 $f(x)$가 최대일 때 최댓값을 갖는데 진수 $f(x)$의 최댓값이 존재하지 않으므로 함수 $y=\log_a f(x)$의 최댓값도 존재하지 않는다.

$\therefore 0<a<1$ 함수 $f(x)=\log_a x$에 대하여 $a>1$이면 함수 $f(x)$는 증가함수이고 $0<a<1$이면 감소함수야.

2nd 양수 a의 값을 구하자.

따라서 진수 $f(x)$가 최소일 때 주어진 함수가 최댓값 -3을 가지므로 $\log_a f(2)=-3$에서

$\log_a 8=-3,\ 8=a^{-3},\ a^3=\frac{1}{8}$
$y=\log_a x$에서 $x=a^y$

$\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because 0<a<1)$

07 답 ①

정의역이 $\{x\,|\,1\leq x\leq 25\}$인 함수 $y=|\log_5 x-1|(\log_5 x-3)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

$\log_5 x$가 반복되고 있으니까 $\log_5 x=t$로 치환하자. 이때, t의 값의 범위에 주의해.

1st $\log_5 x=t$라 하고 t에 대한 함수의 그래프를 그려서 최댓값, 최솟값을 구해.

$y=|\log_5 x-1|(\log_5 x-3)$에서 $\log_5 x=t$라 하면

$1\leq x\leq 25$에서 $0\leq t\leq 2$이고
각 변에 밑이 5인 로그를 취하면 $\log_5 1\leq\log_5 x\leq\log_5 5^2$에서 $0\leq t\leq 2$야.

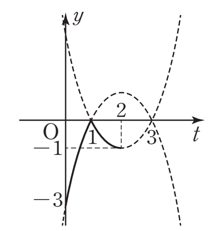
$y=|t-1|(t-3)$
절댓값 안이 0보다 작거나 같은 경우와 0보다 큰 경우로 나누어 생각해.

(i) $0\leq t\leq 1$일 때,

$y=-(t-1)(t-3)=-t^2+4t-3$
$=-(t-2)^2+1$
$0\leq t\leq 1$이면 $t-1\leq 0$이므로 $|t-1|=-(t-1)$

(ii) $1<t\leq 2$일 때,

$y=(t-1)(t-3)=t^2-4t+3$
$=(t-2)^2-1$
$1<t\leq 2$이면 $t-1>0$이므로 $|t-1|=t-1$



(i), (ii)에 의하여 $0\leq t\leq 2$에서 함수 $y=|t-1|(t-3)$의 그래프는 그림과 같으므로 주어진 함수는 $t=1$일 때 최댓값 0을, $t=0$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

따라서 $M=0,\ m=-3$이므로

$M+m=0+(-3)=-3$

08 답 2

$\log_5 x+\log_5 y=\log_5 xy$이고 밑이 1보다 크므로 xy가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

$x+y=10$에서 $y=10-x$이므로

$xy=x(-x+10)=-x^2+10x$
$=-(x-5)^2+25$

즉, xy는 $x=5$일 때, 최댓값 25를 가지므로

$\log_5 x+\log_5 y=\log_5 xy$의 최댓값은 $\log_5 25=2$

다른 풀이

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$10=x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$\sqrt{xy}\leq 5\qquad\therefore xy\leq 25$

(이하 동일)

09 답 ②

x에 대한 이차방정식
$x^2-2(1+\log a)x+1-(\log a)^2=0$이 중근을 가질 때, 모든 상수 a의 값의 합은? 이차방정식이 중근을 가지면 판별식을 D라 할 때 $D=0$이야.

① 1 ② $\frac{11}{10}$ ③ $\frac{101}{100}$
④ 2 ⑤ 3

1st 판별식을 이용하여 모든 a의 값을 구하자.

이차방정식 $x^2-2(1+\log a)x+1-(\log a)^2=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식은 $D=b^2-4ac$

즉, $\frac{D}{4}=(1+\log a)^2-\{1-(\log a)^2\}=0$에서

$(\log a)^2+\log a=0$

$(\log a)(\log a+1)=0$
$AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$

$\therefore \log a=0$ 또는 $\log a=-1$

(i) $\log a=0$에서 $a=1$

(ii) $\log a=-1$에서 $a=10^{-1}=\frac{1}{10}$

(i), (ii)에 의하여 $a=1$ 또는 $a=\frac{1}{10}$이므로 모든 a의 값의 합은 $1+\frac{1}{10}=\frac{11}{10}$이다.

10 답 ②

진수의 조건에 의하여 $4+x>0$, $4-x>0$이므로

$-4<x<4$ ⋯ ㉠

$\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3$에서

$\log_2(4+x)(4-x)=\log_2 2^3$, $\log_2(16-x^2)=\log_2 8$

$16-x^2=8$, $x^2=8$

$\therefore x=2\sqrt{2}$ 또는 $x=-2\sqrt{2}$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=2\sqrt{2}$ 또는 $x=-2\sqrt{2}$이므로 모든 실수 x의 값의 곱은

$2\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})=-8$

11 답 $\dfrac{1}{81}$

$(\log_9 x)^2+\log_3 x-3=0$에서 $\left(\dfrac{1}{2}\log_3 x\right)^2+\log_3 x-3=0$

$\dfrac{1}{4}(\log_3 x)^2+\log_3 x-3=0$ ⋯ Ⅰ

이때, $\log_3 x=t$라 하면

$\dfrac{1}{4}t^2+t-3=0$, $t^2+4t-12=0$, $(t+6)(t-2)=0$

$\therefore t=-6$ 또는 $t=2$ ⋯ Ⅱ

(i) $t=\log_3 x=-6$에서 $x=\dfrac{1}{3^6}$

(ii) $t=\log_3 x=2$에서 $x=3^2$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 실근은

$x=\dfrac{1}{3^6}$ 또는 $x=3^2$

따라서 모든 실근의 곱은 $\dfrac{1}{3^6}\times 3^2=\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{1}{81}$이다. ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 방정식을 정리한다.	20%
Ⅱ	$\log_3 x=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.	40%
Ⅲ	주어진 방정식의 해를 구하고 모든 실근의 곱을 구한다.	40%

12 답 ①

주어진 방정식의 양변에 3을 밑으로 하는 로그를 취하면

$x^{\log_3 4x}=9$에서 $\log_3 x^{\log_3 4x}=\log_3 9$

$(\log_3 x+\log_3 4)\log_3 x=2$

$(\log_3 x)^2+(\log_3 4)(\log_3 x)-2=0$ ⋯ ㉠

이때, $\log_3 x=t$라 하면

$t^2+t\log_3 4-2=0$ ⋯ ㉡

한편, ㉠의 두 실근이 α, β이므로 ㉡의 두 실근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

따라서 ㉡의 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=-\log_3 4$에서

$\log_3\alpha\beta=\log_3\dfrac{1}{4}$

$\therefore \alpha\beta=\dfrac{1}{4}$

13 답 ③

진수의 조건에 의하여 $x>0$ ⋯ ㉠, $\log_2 x-3>0$

이때, $\log_2 x-3>0$에서 $\log_2 x>3=\log_2 8$이므로

$x>8$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $x>8$ ⋯ ㉢

부등식 $\log_4(\log_2 x-3)\le\dfrac{1}{2}=\log_4 4^{\frac{1}{2}}=\log_4 2$에서

$\log_2 x-3\le 2$, $\log_2 x\le 5=\log_2 2^5=\log_2 32$

$\therefore x\le 32$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $8<x\le 32$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는

$32-8=24$이다.

심플 정리

[부등식을 만족시키는 정수의 개수]

정수 a, b에 대하여

(1) $a<x<b$를 만족시키는 정수 x의 개수는 $b-a-1$ (개)

(2) $a\le x<b$를 만족시키는 정수 x의 개수는 $b-a$ (개)

(3) $a<x\le b$를 만족시키는 정수 x의 개수는 $b-a$ (개)

(4) $a\le x\le b$를 만족시키는 정수 x의 개수는 $b-a+1$ (개)

14 답 ②

부등식 $2\log_2|x-1|\le 1-\log_2\dfrac{1}{2}$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? 진수의 조건에 주의하면서 부등식을 $\log_2 f(x)\le\log_2 g(x)$ 꼴로 변형하여 풀어.

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

1st 진수의 조건을 생각해.

진수의 조건에 의하여 $|x-1|>0$에서 $x\ne 1$ ⋯ ㉠

2nd 주어진 부등식을 풀자. $|x-1|\ge 0$이니까 $|x-1|>0$이려면 $x\ne 1$이기만 하면 돼.

$1-\log_2\dfrac{1}{2}=1+\log_2 2=2$이므로

$\log_2\dfrac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-\log_2 2$, $\log_2 2=1$

$2\log_2|x-1|\le 1-\log_2\dfrac{1}{2}$에서

$2\log_2|x-1|\le 2$, $\log_2|x-1|\le 1=\log_2 2$

$|x-1|\le 2$, $-2\le x-1\le 2$

$\therefore -1\le x\le 3$ ⋯ ㉡ 밑이 1보다 크므로 부등호의 방향이 바뀌지 않아.

㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식의 해는

$-1\le x<1$ 또는 $1<x\le 3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는

-1, 0, 2, 3의 4이다.

15 답 14

진수의 조건에 의하여 $4x>0$, $8x>0$ $\quad\therefore x>0 \cdots$ ㉠

$(\log_2 4x)(\log_2 8x)<2$에서

$(\log_2 4+\log_2 x)(\log_2 8+\log_2 x)<2$

$(2+\log_2 x)(3+\log_2 x)<2$

$(\log_2 x)^2+5\log_2 x+4<0$

이때, $\log_2 x=t$라 하면

$t^2+5t+4<0$, $(t+1)(t+4)<0$

$\therefore -4<t<-1$

즉, $-4<\log_2 x<-1$에서 $\log_2 2^{-4}<\log_2 x<\log_2 2^{-1}$이므로 $\frac{1}{16}<x<\frac{1}{2} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식의 해는 $\frac{1}{16}<x<\frac{1}{2}$

한편, 해가 $\frac{1}{16}<x<\frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $\left(x-\frac{1}{16}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$에서 $x^2-\frac{9}{16}x+\frac{1}{32}<0$이다.

이 부등식의 양변에 양수 a를 곱하면

$ax^2-\frac{9}{16}ax+\frac{1}{32}a<0$이고 이 부등식이

$ax^2+bx+1<0$과 같으므로

$-\frac{9}{16}a=b$, $\frac{1}{32}a=1$에서 $a=32$, $b=-18$

$\therefore a+b=32+(-18)=14$

16 답 ②

(i) $\log_5 x\ge\log_5 3$에서 $x\ge3$

이때, 진수의 조건에 의하여 $x>0$이므로 이 부등식의 해는 $x\ge3$이다.

(ii) $\log_{\frac{1}{2}} x^2\ge-5$에서 $\log_{\frac{1}{2}} x^2\ge\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

$\log_{\frac{1}{2}} x^2\ge\log_{\frac{1}{2}} 32$, $x^2\le32$

$\therefore -4\sqrt{2}\le x\le4\sqrt{2}$

그런데 진수의 조건에 의하여 $x\ne0$이므로 이 부등식의 해는 $-4\sqrt{2}\le x<0$ 또는 $0<x\le4\sqrt{2}$이다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립부등식의 해는

$3\le x\le4\sqrt{2}=5.\times\times\times$이므로 정수 x는 3, 4, 5이다.

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $3+4+5=12$이다.

Ⅰ 대단원 TEST [A~H] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 64~67

01 답 ①

$3^4\times(6^3)^3\div(12^2\times24)$

$=3^4\times(2^3\times3^3)^3\div(2^4\times3^2\times2^3\times3)$

$=3^4\times2^9\times3^9\div(2^7\times3^3)$

$=3^{13}\times2^9\div(2^7\times3^3)$

$=2^{9-7}\times3^{13-3}=2^2\times3^{10}$

이므로 $a=2$, $b=10$이다.

$\therefore a+b=2+10=12$

02 답 ④

$$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}=\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}}\times\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}}=\frac{\sqrt[12]{a^2}}{\sqrt[12]{a}}=\sqrt[12]{a}$$

03 답 ②

세 수 $A=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $B=\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{15}}}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 정리한 후에 거듭제곱근을 통일시켜 보자.

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

1st 제곱근의 성질을 이용하여 제곱근을 통일시키자.

거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 한 후 3, 4, 6의 최소공배수인 12로 거듭제곱근을 통일시켜야 수들의 대소를 비교할 수 있어.

$A=\underbrace{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\sqrt[12]{\left(\frac{1}{4}\right)^4}}_{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}}=\sqrt[12]{\frac{1}{4^4}}=\sqrt[12]{\frac{1}{256}}$

$B=\sqrt[4]{\frac{1}{6}}=\sqrt[12]{\left(\frac{1}{6}\right)^3}=\sqrt[12]{\frac{1}{6^3}}=\sqrt[12]{\frac{1}{216}}$

$C=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{15}}}=\sqrt[6]{\frac{1}{15}}=\sqrt[12]{\left(\frac{1}{15}\right)^2}=\sqrt[12]{\frac{1}{15^2}}=\sqrt[12]{\frac{1}{225}}$

2nd 제곱근 안에 있는 수들의 대소 관계를 비교하자.

이때, $216<225<256$이므로 $\frac{1}{256}<\frac{1}{225}<\frac{1}{216}$

즉, $\sqrt[12]{\frac{1}{256}}<\sqrt[12]{\frac{1}{225}}<\sqrt[12]{\frac{1}{216}}$에서 $A<C<B$이다.

04 답 ⑤

$a=(2^{3+\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=2^{3\sqrt{3}+3}$이고

$b=(2^{\sqrt{3}})^{3-\sqrt{3}}=2^{3\sqrt{3}-3}$이므로

$\frac{a}{b}=\frac{2^{3\sqrt{3}+3}}{2^{3\sqrt{3}-3}}=2^{\{(3\sqrt{3}+3)-(3\sqrt{3}-3)\}}=2^6=64$

05 답 ②

$a^x=b^y=c^z=125=5^3$에서 $a=5^{\frac{3}{x}}$, $b=5^{\frac{3}{y}}$, $c=5^{\frac{3}{z}}$

$\therefore abc=5^{\frac{3}{x}}\times5^{\frac{3}{y}}\times5^{\frac{3}{z}}=5^{\left(\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}\right)}$

한편, $abc=5$에서 $5^{\left(\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}\right)}=5^{3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=5^1$

$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$ $\qquad\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$

답_040059_심플자이 수1(G~H)-삼.indd 54 2018. 5. 2. 오후 8:05

06 답 ④

$f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$에서

$a^{2x}f(x)+f(x)=a^{2x}-1,\ 1+f(x)=a^{2x}-a^{2x}f(x)$

$1+f(x)=a^{2x}\{1-f(x)\}$ ⋯ ㉠

$\therefore\ a^{2x}=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$

이때, $f(\alpha)=\dfrac{1}{3}$이므로 $a^{2\alpha}=\dfrac{1+f(\alpha)}{1-f(\alpha)}=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$

또, $f(\beta)=\dfrac{1}{2}$이므로 $a^{2\beta}=\dfrac{1+f(\beta)}{1-f(\beta)}=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$

$\therefore\ f(\alpha+\beta)=\dfrac{a^{2(\alpha+\beta)}-1}{a^{2(\alpha+\beta)}+1}=\dfrac{a^{2\alpha+2\beta}-1}{a^{2\alpha+2\beta}+1}$

$=\dfrac{a^{2\alpha}\times a^{2\beta}-1}{a^{2\alpha}\times a^{2\beta}+1}=\dfrac{2\times3-1}{2\times3+1}=\dfrac{5}{7}$

TIP

주어진 $f(x)$에서 $f(x)=1$이라면 $\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=1$에서

$a^x-a^{-x}=a^x+a^{-x}$이므로 $a^{-x}=0$이다.

그런데 $a^{-x}>0$이므로 $f(x)=1$이 될 수 없다.

즉, ㉠에서 $1-f(x)\neq0$이므로 양변을 $1-f(x)$로 나눌 수 있다.

07 답 ③

올림픽에 참가한 어느 나라가 딴 금메달, 은메달, 동메달의 수를 각각 $a,\ b,\ c$라 할 때, $3a+2b+c$의 값을 그 나라의 메달 가치라 하자. 어떤 연구에 의하면 인구가 P만 명이고 국내총생산액이 G억 달러인 나라의 메달 가치 S는 부등식

$$S\le0.215\left(\frac{P}{100}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{G}{10}\right)^{\frac{2}{3}}\ \cdots\ (*)$$

부등식 $(*)$에 있는 미지수 $P,\ G,\ S$가 각각 무엇을 의미하는지 확인하여 주어진 부등식에 대입해야 해.

을 만족시킨다고 한다. 어느 해 올림픽에 참가한 A나라의 인구가 6400만 명이고, 국내총생산액이 5120억 달러라 하자. 부등식 $(*)$이 항상 성립한다고 할 때, A나라의 메달 가치의 최댓값은?

① 51 ② 53 ③ 55 ④ 57 ⑤ 59

1st 주어진 값을 부등식에 대입하자.

$P=6400,\ G=5120$이므로

문제에서 $P,\ G$는 각각 인구 수, 국내총생산액이므로 부등식$(*)$에 각각 대입해.

$S\le0.215\left(\dfrac{6400}{100}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{5120}{10}\right)^{\frac{2}{3}}$

지수법칙을 바로 이용하기 보다는 밑을 간단히 정리한 후에 적용하는 것이 계산을 더 간편히 할 수 있어.

$=0.215\times(2^6)^{\frac{1}{3}}\times(2^9)^{\frac{2}{3}}$

$=0.215\times2^2\times2^6=55.04$

따라서 메달 가치의 최댓값은 55이다.

메달 가치는 $3a+2b+c$에서 음이 아닌 정수이므로 답은 55.04가 아닌 55가 되어야 해.

08 답 ③

밑의 조건에 의하여 $x-2>0,\ x-2\neq1$에서

$x>2,\ x\neq3$ $\therefore\ 2<x<3$ 또는 $x>3$ ⋯ ㉠

진수의 조건에 의하여 $-x^2+4x+5>0$이므로

$x^2-4x-5<0,\ (x+1)(x-5)<0$

$\therefore\ -1<x<5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 로그가 정의되기 위한 x의 값의 범위는 $2<x<3$ 또는 $3<x<5$

따라서 구하는 정수 x의 값은 4이다.

09 답 ①

ㄱ. $a^0=1$이므로 $\log_a 1=0$이다. (참)

ㄴ. 로그의 성질에 의하여

$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$이다. (거짓)

ㄷ. 【반례】 $a=2,\ N=4$이면

$\log_a N^2=\log_2 4^2=\log_2 2^4=4,$

$(\log_a N)^2=(\log_2 4)^2=(\log_2 2^2)^2=2^2=4$이므로

$\log_a N^2=(\log_a N)^2$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

심플 정리

[로그의 기본 성질]

$a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0$일 때,

(1) $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 상수)

10 답 7

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 $\log_4 a,\ \log_4 b$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_4 a+\log_4 b=3,\ (\log_4 a)(\log_4 b)=1$ ⋯ Ⅰ

한편, 로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$\log_a b+\log_b a=\dfrac{\log_4 b}{\log_4 a}+\dfrac{\log_4 a}{\log_4 b}$ ⋯ Ⅱ

$=\dfrac{(\log_4 b)^2+(\log_4 a)^2}{(\log_4 a)(\log_4 b)}$

$=\dfrac{(\log_4 a+\log_4 b)^2-2(\log_4 a)(\log_4 b)}{(\log_4 a)(\log_4 b)}$

$=\dfrac{3^2-2\times1}{1}=7$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\log_4 a$와 $\log_4 b$의 합과 곱을 구한다.	30%
Ⅱ	$\log_a b+\log_b a$를 $\log_4 a$와 $\log_4 b$의 식으로 나타낸다.	30%
Ⅲ	$\log_a b+\log_b a$의 값을 구한다.	40%

11 답 ⑤

등식 $x^5y^3=5^{15}$을 만족시키는 양의 실수 x, y에 대하여 $m\log_5 x+15\log_5 y$가 일정한 값을 가질 때, 실수 m의 값은?
$x^5y^3=5^{15}$을 밑이 5인 로그로 나타내어 이 식을 하나의 문자에 대한 식으로 나타내.

① 3 ② 5 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

1st $x^5y^3=5^{15}$을 변형하자.

$x^5y^3=5^{15}$의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$\log_5 x^5y^3=\log_5 5^{15}$에서

$5\log_5 x+3\log_5 y=15$

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
$\log_a N^m=m\log_a N$

2nd 치환하여 한 문자에 대한 식으로 나타내자.

이때, $\log_5 x=X$, $\log_5 y=Y$라 하면

$5X+3Y=15$에서 $Y=-\frac{5}{3}X+5$

$$\therefore\ m\log_5 x+15\log_5 y=mX+15Y$$
$$=mX+15\left(-\frac{5}{3}X+5\right)$$
$$=(m-25)X+75$$
$$=(m-25)\log_5 x+75$$

이것이 x의 값에 관계없이 일정해야 하므로

$m-25=0$에서 $m=25$

$(m-25)\log_5 x+75=C$라 하면 어떤 x에 대해서도 이 식이 항상 성립해야 하니까 x에 대한 항등식이어야 해.

12 답 ①

$$\log 200+\log 0.02+\log\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$=\log(2\times10^2)+\log(2\times10^{-2})+\log 2^{-3}$$
$$=\log 2+2+\log 2-2+(-3\log 2)$$
$$=-\log 2=-0.3010$$

13 답 ③

정수 n과 $0\le\alpha<1$인 실수 α에 대하여 $\log x=n+\alpha$로 표현해 봐.

$5\le\log x<6$일 때, $\log x$와 $\log x^2$의 합이 정수가 되게 하는 모든 양수 x의 값의 곱은?

① 10^{14} ② 10^{15} ③ 10^{16}
④ 10^{17} ⑤ 10^{18}

1st $\log x$를 (정수)+(0 또는 양의 소수)의 꼴로 나타내자.

$5\le\log x<6$이므로 $\log x=5+\alpha\ (0\le\alpha<1)$라 하면

$\log x^2=2\log x=10+2\alpha$이므로

$\log x+\log x^2=(5+\alpha)+(10+2\alpha)=15+3\alpha$

2nd 정수가 되기 위한 α의 값을 찾아서 x의 값을 구하자.

$15+3\alpha$가 정수가 되기 위해서는

$\alpha=0$ 또는 $\alpha=\frac{1}{3}$ 또는 $\alpha=\frac{2}{3}$

15가 정수이므로 3α만 정수이면 되고, α는 0보다 크거나 같고 1보다 작은 값이므로 α의 범위에 해당하는 값만 찾아야 해.

즉, $\log x=5$ 또는 $\log x=5+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$ 또는

$\log x=5+\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$이므로

$x=10^5$ 또는 $x=10^{\frac{16}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{17}{3}}$이다.

따라서 모든 양수 x의 값의 곱은

$10^5\times10^{\frac{16}{3}}\times10^{\frac{17}{3}}=10^{5+\frac{16}{3}+\frac{17}{3}}=10^{16}$

14 답 ④

전체 인구가 500만 명인 A시는 저탄소 녹색성장 정책 추진에 힘입어 2010년 초 자전거 보유 인구가 전체 인구의 16 %를 차지하였다. 이 도시에서는 2010년 초에 5개년 계획을 세워 자전거 보유 인구를 전년도에 비해 28 %씩 증가시킨다고 한다. 계획대로 진행된다면 5년 후 자전거 보유 인구는 전체 인구의 약 몇 %인가? (단, 인구변동은 고려하지 않으며 $\log 1.28=0.108$, $\log 3.50=0.540$으로 계산한다.)

① 44 ② 48 ③ 52
④ 56 ⑤ 60

n년 후 자전거 보유 인구는 2010년의 자전거 보유 인구의 $(1+0.28)^n$배야.

1st 2010년 초 자전거 보유 인구를 계산하자.

2010년 초 자전거 보유 인구는 $500\times\frac{16}{100}$(만 명)이다.

2nd 5년 후 자전거 보유 인구의 비율을 구하자.

5년 후 자전거 보유 인구는

$500\times\frac{16}{100}\times(1+0.28)^5=500\times\frac{16}{100}\times1.28^5$(만 명)

1년 후 자전거 보유 인구는 처음의 $(1+0.28)$배이고, 2년 후 자전거 보유 인구는 $(1+0.28)^2$배야. 이 과정을 반복하면 n년 후 자전거 보유 인구는 $(1+0.28)^n$배가 돼.

이때, $1.28^5=x$라 하고 양변에 상용로그를 취하면

$\log x=5\log 1.28=0.54$에서 $x=3.50$

$\log_a m^k=k\log_a m$

따라서 5년 후 자전거 보유 인구는 $\left(500\times\frac{16}{100}\times3.50\right)$만 명이므로 5년 후 자전거 보유 인구는 전체 인구의 약

$$\frac{500\times\frac{16}{100}\times3.50}{500}\times100=56(\%)\text{이다.}$$

15 답 ⑤

① 치역은 $\{y\,|\,y>2\}$이다. (거짓)

② $x=1$을 대입하면 $y=3\times\frac{1}{3}+2=3$이므로 그래프는 점 $(1,\ 3)$을 지난다. (거짓)

③ 점근선은 $y=2$이다. (거짓)

④ 그래프는 제1, 2사분면을 지난다. (거짓)

⑤ $y=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^x+2=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+2$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. (참)

TIP

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 그래프의 식은 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입하면 된다. 즉, $y-n=f(x-m)$이다.

16 답 ①

$y=2^{x+2}-4^x=2^2\times2^x-(2^2)^x=-(2^x)^2+4\times2^x$

이때, $2^x=t$라 하면 $x\le3$이므로 $0<t=2^x\le8$이고

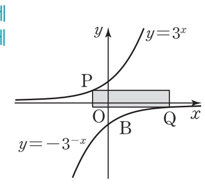
$y=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$이다.

즉, 주어진 함수는 $t=2$일 때 최댓값 4를 갖고, $t=8$일 때 최솟값 -32를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은 $4+(-32)=-28$이다.

17 답 ⑤

함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ 3^\alpha)$과 함수 $y=-3^{-x}$의 그래프 위의 점 $\mathrm{Q}(\beta,\ -3^{-\beta})$에 대하여 $\beta-\alpha=4$가 성립한다. 그림과 같이 두 점 P, Q를 지나고 x축, y축과 평행한 직선을 그려 만들어지는 직사각형의 넓이의 최솟값은?

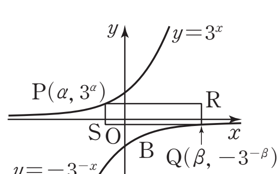
직사각형의 가로와 세로의 길이를 α, β에 대한 식으로 나타내.



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ ③ $\frac{4}{9}$

④ $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

1st 직사각형의 넓이를 구하자.



그림과 같이 두 점 P, Q가 아닌 두 점을 R, S라 하면 점 R의 x좌표와 y좌표는 각각 점 Q의 x좌표와 점 P의 y좌표와 같고, 점 S의 x좌표와 y좌표는 각각 점 P의 x좌표와 점 Q의 y좌표와 같으므로 두 점 R, S의 좌표는 각각 $\mathrm{R}(\beta,\ 3^\alpha)$, $\mathrm{S}(\alpha,\ -3^{-\beta})$이다.

따라서 직사각형 PSQR의 가로의 길이는 $\overline{\mathrm{RP}}=\beta-\alpha$,

세로의 길이는 $\overline{\mathrm{RQ}}=3^\alpha-(-3^{-\beta})=3^\alpha+3^{-\beta}$이므로

$\square\mathrm{PSQR}=(\beta-\alpha)(3^\alpha+3^{-\beta})$

$=4(3^\alpha+3^{-\alpha-4})$ $(\because\ \beta-\alpha=4)$

2nd 직사각형의 넓이의 최솟값을 구하자.

한편, $3^\alpha>0$, $3^{-\alpha-4}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

산술평균과 기하평균의 관계는 두 수가 양수일 때만 적용할 수 있으니 수의 범위를 꼭 확인하고 적용하자.

$4(3^\alpha+3^{-\alpha-4})\ge4\times2\sqrt{3^\alpha\times3^{-\alpha-4}}=\frac{8}{9}$

(단, 등호는 $\alpha=-2$일 때 성립)

$\alpha=-\alpha-4$에서 $2\alpha=-4$ $\therefore\ \alpha=-2$

따라서 직사각형의 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{9}$이다.

심플 정리

[산술평균과 기하평균의 관계]

$a>0$, $b>0$일 때 $a+b\ge2\sqrt{ab}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

18 답 ②

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+a}$의 밑이 1보다 작으므로 지수가 최소일 때, $f(x)$는 최댓값을 갖는다.

한편, $x^2-4x+a=(x-2)^2-4+a$이므로 지수는 $x=2$일 때 최솟값 $-4+a$를 갖는다.

이때, 함수 $f(x)$의 최댓값이 4이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4+a}=4$에서

$2^{4-a}=2^2$, $4-a=2$ $\therefore\ a=2$

19 답 ②

$\begin{cases}3^x+3^y=36\\3^{x+y}=243\end{cases}$에서 $3^x=X$, $3^y=Y$ $(X>0,\ Y>0)$라 하면

$\begin{cases}X+Y=36\\XY=243\end{cases}$이므로 X, Y는 이차방정식

$t^2-36t+243=(t-9)(t-27)=0$의 두 근이다.

즉, $t=9$ 또는 $t=27$이므로

$X=9$, $Y=27$ 또는 $X=27$, $Y=9$이다.

(i) $X=9$, $Y=27$, 즉 $3^x=9$, $3^y=27$일 때, $x=2$, $y=3$

(ii) $X=27$, $Y=9$, 즉 $3^x=27$, $3^y=9$일 때, $x=3$, $y=2$

따라서 $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$인데 $a>b$이므로 $a=3$, $b=2$이다.

$\therefore\ 2a+3b=2\times3+3\times2=12$

다른 풀이

$\begin{cases}X+Y=36 & \cdots\ ㉠\\XY=243 & \cdots\ ㉡\end{cases}$

㉠에서 $Y=36-X$이므로 ㉡에 대입하면

$X(36-X)=243$, $-X^2+36X=243$

$X^2-36X+243=0$, $(X-9)(X-27)=0$

따라서 $X=9$ 또는 $X=27$이므로

$\begin{cases}X=9\\Y=27\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}X=27\\Y=9\end{cases}$

(이하 동일)

I 대단원

20 답 ⑤

$9^{2x}-6\times9^x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 $9^x=t\,(t>0)$라 하면 $t^2-6t+4=0$의 두 근은 9^α, 9^β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$9^\alpha+9^\beta=6$이고 $9^\alpha\times9^\beta=4$이다.

이때, $9^\alpha\times9^\beta=4$에서 $(3^\alpha\times3^\beta)^2=2^2$이므로

$3^\alpha\times3^\beta=2\,(\because 3^\alpha>0,\ 3^\beta>0)$

$\therefore (3^\alpha\times3^\beta)^2=9^\alpha+2\times3^\alpha\times3^\beta+9^\beta$

$=(9^\alpha+9^\beta)+2\times3^\alpha\times3^\beta$

$=6+2\times2=10$

21 답 1

$4^x-a\times2^{x+2}\ge-4$에서

$(2^2)^x-a\times2^2\times2^x+4\ge0$, $(2^x)^2-4a\times2^x+4\ge0$

이때, $2^x=t\,(t>0)$라 하면 $t^2-4at+4\ge0$에서

$(t-2a)^2-4a^2+4\ge0$ … Ⅰ

이 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하기 위해서는

(i) $2a\ge0$, 즉 $a\ge0$이면

$t=2a$일 때 최솟값 $-4a^2+4$를 가지므로

$-4a^2+4\ge0$이어야 한다.

즉, $(a+1)(a-1)\le0$에서 $-1\le a\le1$

그런데 $a\ge0$이므로 $0\le a\le1$

(ii) $2a<0$, 즉 $a<0$이면

$t=0$일 때의 값이 0 또는 양수이어야 한다.

그런데 $t=0$이면 $(0-2a)^2-4a^2+4=4\ge0$이므로

$a<0$일 때 주어진 부등식은 항상 성립한다. … Ⅱ

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식을 항상 만족시키는 a의 값의 범위는 $a\le1$이므로 a의 최댓값은 1이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	치환하여 이차부등식으로 나타낸다.	30%
Ⅱ	이차함수의 꼭짓점의 위치에 따라 a의 값의 범위를 구한다.	50%
Ⅲ	a의 최댓값을 구한다.	20%

TIP

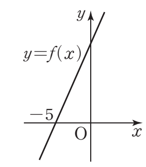
제한된 범위에서 이차함수의 최댓값, 최솟값을 구할 때 꼭짓점의 x좌표의 값이 제한된 범위에 포함되면 꼭짓점의 y좌표의 값이 최댓값 또는 최솟값이고, 포함이 안 되어 있는 경우 범위의 양끝에 있는 값을 대입하여 최댓값과 최솟값을 구해야 한다.

22 답 15

일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고 $f(-5)=0$이다. 부등식 $2^{f(x)}\le8$의 해가 $x\le-4$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

$f(x)$의 식을 부등식에 대입해서 $f(x)$의 식을 완성해.

이것을 이용하여 일차함수의 식을 나타내.



1st 일차함수 $y=f(x)$의 그래프를 보고 $y=f(x)$의 식을 세우자.

$f(-5)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-5,\ 0)$을 지나고 일차함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 양수이므로 기울기를 $a\,(a>0)$라 하면 $f(x)=a(x+5)$이다.

기울기가 m이고 점 $(a,\ b)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=m(x-a)+b$야.

2nd 밑이 2인 지수부등식을 풀자.

$f(x)=a(x+5)$를 $2^{f(x)}\le8$에 대입하면

$2^{a(x+5)}\le2^3$이고 밑이 1보다 크므로

문제에 주어진 부등식을 이용하면 미지수 a의 값을 구할 수 있어. 지수부등식이므로 밑의 범위를 잘 확인하여 부등식을 풀자.

$a(x+5)\le3$에서

$x+5\le\dfrac{3}{a}\,(\because a>0)$ $\quad\therefore x\le\dfrac{3}{a}-5$

이때, 주어진 부등식의 해가 $x\le-4$이므로

$\dfrac{3}{a}-5=-4$에서 $\dfrac{3}{a}=1$ $\quad\therefore a=3$

따라서 $f(x)=3(x+5)$이므로

$f(0)=3\times(0+5)=15$

23 답 ⑤

ㄱ. $y=\log_2 2x=\log_2 2+\log_2 x=1+\log_2 x$이므로

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (참)

ㄴ. $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)=-\log_2(-x)$이므로

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동 한 것이다. (참)

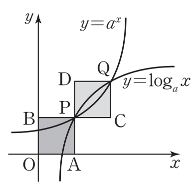
ㄷ. $y=\dfrac{2^x}{2}=2^{x-1}$이므로 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (참)

따라서 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

24 답 ①

$y=a^x$과 $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이고 서로 역함수 관계인 두 함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재해.

그림과 같이 지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$가 두 점 P, Q에서 만날 때, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. 점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 AP와 만나는 점을 D, 점 Q를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 BP와 만나는 점을 C라 할 때, 두 사각형 OAPB와 PCQD는 합동이다. a의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ 2

1st 두 점 P, Q를 좌표로 나타내자.

두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계에 있고,
두 점 P, Q는 $y=a^x$, $y=\log_a x$의 그래프의 교점이므로
직선 $y=x$ 위의 점이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 모두 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이야.
두 사각형 OAPB, PCQD가 서로 합동이므로
P(k, k), Q$(2k, 2k)$라 하자.

2nd a의 값을 구하자.

두 점 P, Q는 $y=a^x$의 그래프 위의 점이므로
$a^k=k$ ⋯ ㉠, $a^{2k}=2k$이다.
이때, $a^{2k}=2k$에서 $(a^k)^2=2k$, $k^2=2k$ ($\because$ ㉠)
$k^2-2k=0$, $k(k-2)=0$
$\therefore k=2$ ($\because k>0$)
이것을 ㉠에 대입하면 $a^2=2$
$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>1$)
지수함수 $y=a^x$이 증가함수이므로 $a>1$이야.

다른 풀이

두 점 P(k, k), Q$(2k, 2k)$가 $y=\log_a x$의 그래프 위의 점이므로 $\log_a k=k$ ⋯ ㉡, $\log_a 2k=2k$이다.
$\log_a 2k=2k$에서 $\log_a 2+\log_a k=2k$
$\log_a 2+\log_a k=2\log_a k$ ($\because$ ㉡), $\log_a 2=\log_a k$
$\therefore k=2$
이것을 ㉡에 대입하면 $\log_a 2=2=\log_a a^2$에서
$a^2=2$
$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>1$)

25 답 1

$\log_2 x=X$, $\log_3 y=Y$라 하면 $1<x<8$에서
$\log_2 1<\log_2 x<\log_2 8$ $\therefore 0<X<3$ ⋯ ㉠
이때, $\log_2 x+\log_3 y=4$이므로 $X+Y=4$ ⋯ ㉡

$$\therefore \log_x 2+\log_y 3=\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 y}=\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}=\frac{X+Y}{XY}=\frac{4}{XY}\ (\because ㉡)$$

한편, ㉡에서 $X=4-Y$이므로 ㉠에 의하여
$0<4-Y<3$ $\therefore 1<Y<4$
즉, $X>0$, $Y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$4=X+Y\ge 2\sqrt{XY}$ (단, 등호는 $X=Y=2$일 때 성립)
에서 $\sqrt{XY}\le 2$ $\therefore XY\le 4$
따라서 $\log_x 2+\log_y 3=\frac{4}{XY}$는 XY가 최댓값 4를 가질 때 최솟값 1을 갖는다.

26 답 12

진수의 조건에 의하여 $x-4>0$, $5x+4>0$
$\therefore x>4$ ⋯ ㉠
$\log_3(x-4)=\log_9(5x+4)$에서
$\log_3(x-4)=\frac{1}{2}\log_3(5x+4)$
$2\log_3(x-4)=\log_3(5x+4)$
$\log_3(x-4)^2=\log_3(5x+4)$
$(x-4)^2=5x+4$, $x^2-13x+12=0$
$(x-1)(x-12)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=12$
그런데 ㉠에 의하여 $x=12$이므로 $\alpha=12$

27 답 25

$(\log x+\log 2)(\log x+\log 4)=-(\log k)^2$에서
$\log x=t$라 하면
$(t+\log 2)(t+\log 4)=-(\log k)^2$
$t^2+(3\log 2)t+2(\log 2)^2+(\log k)^2=0$
이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때 $D>0$이어야 한다.
$D=(3\log 2)^2-4\{2(\log 2)^2+(\log k)^2\}>0$에서
$4(\log k)^2-(\log 2)^2<0$
$(2\log k+\log 2)(2\log k-\log 2)<0$
$-\frac{1}{2}\log 2<\log k<\frac{1}{2}\log 2$
$\therefore \log 2^{-\frac{1}{2}}<\log k<\log 2^{\frac{1}{2}}$
이때, 밑이 1보다 크므로 $2^{-\frac{1}{2}}<k<2^{\frac{1}{2}}$
따라서 $\alpha=2^{-\frac{1}{2}}$, $\beta=2^{\frac{1}{2}}$이므로
$10(\alpha^2+\beta^2)=10\times(2^{-1}+2)=25$

I 대단원

28 답 ②

진수의 조건에 의하여

$x>0$, $\log_2 x>0$, $\log_3(\log_2 x)>0$

이때, $\log_2 x>0=\log_2 1$에서 $x>1$이고

$\log_3(\log_2 x)>0=\log_3 1$에서

$\log_2 x>1=\log_2 2$이므로 $x>2$이다.

$\therefore x>2$ ⋯ ㉠

$\log_4\{\log_3(\log_2 x)\}\leq 0=\log_4 1$에서

$\log_3(\log_2 x)\leq 1=\log_3 3$, $\log_2 x\leq 3=\log_2 8$

$\therefore x\leq 8$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식의 해는 $2<x\leq 8$이므로 구하는 정수는 3, 4, 5, 6, 7, 8이다.

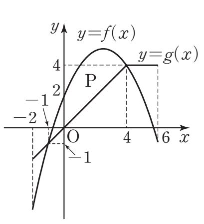
따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$3+4+5+6+7+8=33$

29 답 ④

정의역이 $\{x|-2\leq x\leq 6\}$인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $2-\log_{\frac{1}{2}} g(x)\leq\log_2\{4f(x)\}$를 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? (단, $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=2$, $g(0)=0$, $f(4)=g(4)=4$이다.)

로그의 성질을 이용하여 부등식을 간단히 정리하고 주어진 그래프에서 해를 구해.



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 부등식을 간단히 나타내보자.

$2-\log_{\frac{1}{2}} g(x)\leq\log_2\{4f(x)\}$에서

$2+\log_2 g(x)\leq\log_2 4+\log_2 f(x)$

$2+\log_2 g(x)\leq 2+\log_2 f(x)$ $\log_{\frac{1}{2}} g(x)=-\log_2 g(x)$, $\log_2\{4f(x)\}=\log_2 4+\log_2 f(x)$

$\log_2 g(x)\leq\log_2 f(x)$

$\therefore 0<g(x)\leq f(x)$ 진수의 조건에 의하여 $g(x)>0$, $f(x)>0$이고 밑이 1보다 크지?

2nd x의 값의 범위를 구하자.

$0<g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x\leq 6$ ⋯ ㉠ $y=g(x)$의 그래프가 x축의 윗부분에 존재하는 x의 값의 범위야.

$g(x)\leq f(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위는

$-1\leq x\leq 4$ ⋯ ㉡ $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 만나거나 윗부분에 존재하는 x의 값의 범위야.

㉠, ㉡에 의하여 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는 $0<x\leq 4$

따라서 정수 x의 개수는 1, 2, 3, 4로 4이다.

Ⅱ 삼각함수

Simple 1 일반각과 호도법

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 70～71

01 답 일반각

02 답 1라디안, 호도법

03 답 $r\theta$, $\frac{1}{2}r^2\theta$, $\frac{1}{2}rl$

04 답 ○

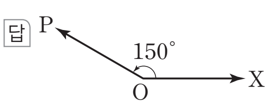
05 답 ×

06 답 ○

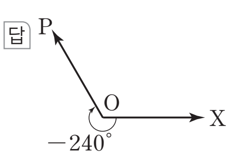
07 답 ○

08 답 ○

09 답



10 답



11 답 ㄱ과 ㄷ, ㄴ과 ㄹ

12 답 $360°\times n+120°$ (n은 정수)

13 답 $360°\times n+120°$ (n은 정수)

$-240°=360°\times(-1)+120°$이므로

각 $-240°$의 동경이 나타내는 일반각은

$360°\times n+120°$ (n은 정수)이다.

14 답 $360°\times n+30°$ (n은 정수)

$390°=360°\times 1+30°$이므로

각 $390°$의 동경이 나타내는 일반각은

$360°\times n+30°$ (n은 정수)이다.

15 답 $360°\times n+240°$ (n은 정수)

$-840°=360°\times(-3)+240°$이므로

각 $-840°$의 동경이 나타내는 일반각은

$360°\times n+240°$ (n은 정수)이다.

16 답 제3사분면의 각

17 답 제1사분면의 각

18 답 제4사분면의 각

19 답 제2사분면의 각

20 답 $\frac{\pi}{2}$

$90^\circ=90\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{2}$

21 답 $\frac{7}{12}\pi$

$105^\circ=105\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{12}\pi$

22 답 $-\frac{5}{6}\pi$

$-150^\circ=-150\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5}{6}\pi$

23 답 $-\frac{5}{4}\pi$

$-225^\circ=-225\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5}{4}\pi$

24 답 45°

$\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\times\frac{180^\circ}{\pi}=45^\circ$

25 답 72°

$\frac{2}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=72^\circ$

26 답 -210°

$-\frac{7}{6}\pi=-\frac{7}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-210^\circ$

27 답 -300°

$-\frac{5}{3}\pi=-\frac{5}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=-300^\circ$

28 답 $l=4\pi$, $S=12\pi$

$l=r\theta=6\times\frac{2}{3}\pi=4\pi$

$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{2}{3}\pi=12\pi$

29 답 5

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면

$3\pi=r\times\frac{3}{5}\pi$에서 $r=5$

30 답 $\frac{3}{4}$

부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$6=\frac{1}{2}\times4^2\times\theta$에서 $\theta=\frac{3}{4}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 72~75

31 답 ②

$72^\circ=72\times\frac{\pi}{180}=\frac{2}{5}\pi$

32 답 ①

$\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}\times\frac{180^\circ}{\pi}=18^\circ$

33 답 ①

① $60^\circ=60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$

② $225^\circ=225\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{4}\pi$

③ $300^\circ=300\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{3}\pi$

④ $\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=240^\circ$

⑤ $\frac{11}{6}\pi=\frac{11}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=330^\circ$

34 답 ④

ㄱ. $\frac{30^\circ}{\pi}=\frac{30}{\pi}\times\frac{\pi}{180}=\frac{1}{6}$ (참)

ㄴ. $150^\circ=150\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{6}\pi$ (거짓)

ㄷ. $\pi=\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=180^\circ$ (거짓)

ㄹ. $\frac{7}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=210^\circ$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

35 답 ④

ㄱ. $15\pi=2\pi\times7+\pi$이므로 일반각으로 나타내면
$2n\pi+\pi$이다. (참)

ㄴ. $\frac{9}{2}\pi=2\pi\times2+\frac{\pi}{2}$이므로 일반각으로 나타내면
$2n\pi+\frac{\pi}{2}$이다. (거짓)

ㄷ. $-\frac{5}{6}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{7}{6}\pi$이므로 일반각으로 나타내면
$2n\pi+\frac{7}{6}\pi$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

36 답 ③

$\theta=360^\circ\times n+70^\circ$ (n은 정수)이다.

① $n=2$일 때, $\theta=360^\circ\times2+70^\circ=790^\circ$

② $n=1$일 때, $\theta=360^\circ\times1+70^\circ=430^\circ$

④ $n=-2$일 때, $\theta=360^\circ\times(-2)+70^\circ=-650^\circ$

⑤ $n=-3$일 때, $\theta=360^\circ\times(-3)+70^\circ=-1010^\circ$

그런데 ③ $-300^\circ=360^\circ\times(-1)+60^\circ$이므로 θ가 될 수 없다.

37 답 ⑤

ㄱ. $120^\circ=360^\circ\times0+120^\circ$

ㄴ. $420^\circ=360^\circ\times1+60^\circ$

ㄷ. $-300^\circ=360^\circ\times(-1)+60^\circ$

따라서 $60^\circ=360^\circ\times0+60^\circ$와 동경이 일치하는 각은
ㄴ, ㄷ이다.

Ⅱ
I

38 답 ⑤

$\frac{5}{4}\pi=-\frac{3}{4}\pi+2\pi$이므로 $-\frac{3}{4}\pi$를 나타내는 동경을 반시계 방향으로 한 바퀴 회전하면 $\frac{5}{4}\pi$를 나타내는 동경과 일치한다. 즉, 각 $-\frac{3}{4}\pi$를 나타내는 동경과 $\frac{5}{4}\pi$를 나타내는 동경은 일치한다.

39 답 ②

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3}{4}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이다.

심플 정리

정수 n에 대하여 θ가

(1) 제1사분면의 각이면

$360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+90^\circ$

(2) 제2사분면의 각이면

$360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ$

(3) 제3사분면의 각이면

$360^\circ\times n+180^\circ<\theta<360^\circ\times n+270^\circ$

(4) 제4사분면의 각이면

$360^\circ\times n+270^\circ<\theta<360^\circ\times n+360^\circ$

40 답 ③

$-120^\circ=360^\circ\times(-1)+240^\circ$는 제3사분면의 각이다.

$640^\circ=360^\circ\times1+280^\circ$는 제4사분면의 각이다.

$1020^\circ=360^\circ\times2+300^\circ$는 제4사분면의 각이다.

$630^\circ=360^\circ\times1+270^\circ$는 어느 사분면에도 속하지 않은 각이다.

따라서 제4사분면의 각은 640°, 1020°의 2개이다.

41 답 ③

①, ② 제3사분면

③ $490^\circ=360^\circ\times1+130^\circ$이므로 제2사분면

④ $600^\circ=360^\circ\times1+240^\circ$이므로 제3사분면

⑤ $970^\circ=360^\circ\times2+250^\circ$이므로 제3사분면

42 답 ⑤

θ가 제3사분면의 각이므로 정수 n에 대하여

$360^\circ\times n+180^\circ<\theta<360^\circ\times n+270^\circ$

$\therefore\ 120^\circ\times n+60^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times n+90^\circ$

정수 k에 대하여

(i) $n=3k$일 때

$120^\circ\times3k+60^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times3k+90^\circ$

$360^\circ\times k+60^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+90^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$일 때

$120^\circ\times(3k+1)+60^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times(3k+1)+90^\circ$

$360^\circ\times k+180^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+210^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$일 때

$120^\circ\times(3k+2)+60^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times(3k+2)+90^\circ$

$360^\circ\times k+300^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+330^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iii)에 의하여 $\frac{\theta}{3}$의 동경이 존재하는 사분면은 제1, 3, 4분면이다.

43 답 ②

두 각 θ, 6θ를 나타내는 동경이 일치하면

$6\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)이므로 $5\theta=2n\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{2n}{5}\pi$

즉, $0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{5}\pi<\pi$ $\quad\therefore\ 0<n<\frac{5}{2}$

이때, n은 정수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$

따라서 $\theta=\frac{2}{5}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{5}\pi$이므로 구하는 합은

$\frac{2}{5}\pi+\frac{4}{5}\pi=\frac{6}{5}\pi$

44 답 ④

각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$6\theta-\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수), $5\theta=2n\pi+\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{2n+1}{5}\pi$

이때, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\frac{2n+1}{5}\pi<\frac{\pi}{2}$에서

$0<2n+1<\frac{5}{2}$, $-1<2n<\frac{3}{2}$ $\quad\therefore\ -\frac{1}{2}<n<\frac{3}{4}$

따라서 $n=0$이므로 $\theta=\frac{\pi}{5}$

즉, $\theta+\frac{2}{15}\pi=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{15}\pi=\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=60^\circ$이므로

$\sin\left(\theta+\frac{2}{15}\pi\right)=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

45 답 ②

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2n\pi$ (n은 정수), $6\theta=2n\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{n}{3}\pi$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\pi<\frac{n}{3}\pi<\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ 3<n<\frac{9}{2}$

따라서 $n=4$이므로 $\theta=\frac{4}{3}\pi$이다.

46 답 ①

각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수), $5\theta=2n\pi+\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{2n+1}{5}\pi$

이때, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{5}\pi<\pi$

$\frac{5}{2}<2n+1<5$, $\frac{3}{2}<2n<4$

$\therefore\ \frac{3}{4}<n<2$

따라서 $n=1$이므로 $\theta=\frac{3}{5}\pi$이다.

47 답 ③

부채꼴의 호의 길이 l은

$l=6\times\frac{5}{9}\pi=\frac{10}{3}\pi$

부채꼴의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{5}{9}\pi=10\pi$

48 답 ②

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 a인 부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면 $l=ra$이므로 $12=4a$에서 $a=3$

또, 부채꼴의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}rl$이므로

$S=\frac{1}{2}\times4\times12=24\qquad\therefore\ b=24$

$\therefore\ a+b=3+24=27$

49 답 ③

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}rl$이므로 $\frac{3}{2}\pi=\frac{1}{2}\times3\times l$에서 $l=\pi$

50 답 ④

반지름의 길이가 a, 중심각의 크기가 b인 부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면 $l=ab$이므로 $2\pi=ab$ ⋯ ㉠

또한, 부채꼴의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}al$이므로

$4\pi=\frac{1}{2}\times a\times2\pi\qquad\therefore\ a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \frac{a}{b}=4\times\frac{2}{\pi}=\frac{8}{\pi}$

51 답 ④

부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 반지름의 길이가 5이므로 호의 길이는 5θ이다.

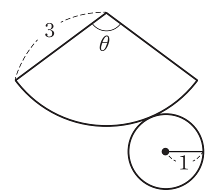
따라서 부채꼴의 둘레의 길이는 $5\theta+2\times5=5\theta+10$ ⋯ ㉠

또, 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times5^2\times\theta=\frac{25}{2}\theta$ ⋯ ㉡

㉠=㉡이므로 $5\theta+10=\frac{25}{2}\theta$에서 $\frac{15}{2}\theta=10$

$\therefore\ \theta=\frac{4}{3}$

52 답 ①



주어진 원뿔의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$3\theta=2\pi\times1$에서 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

따라서 원뿔의 옆면인 부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{2}{3}\pi=3\pi$

다른 풀이

옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이인 $2\pi\times1=2\pi$이다.

따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times2\pi=3\pi$

심플 정리

[부채꼴의 호의 길이와 넓이]

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 각각 l, S라 하면

$l=r\theta$, $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

53 답 ②

점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이므로 $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}$이고

직각삼각형 OAH에서 $\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{4-3}=1$

즉, 직각삼각형 OAH의 세 변의 길이의 비는

$\overline{OH}:\overline{AH}:\overline{OA}=1:\sqrt{3}:2$이므로 $\angle AOH=\frac{\pi}{3}$

따라서 $\angle AOB=2\angle AOH=\frac{2}{3}\pi$이므로 호 AB의 길이는

$2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$이다.

이때, 호 AB의 길이는 원 O'의 둘레의 길이와 같으므로

원 O'의 반지름의 길이를 r라 하면 $2\pi\times r=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore\ r=\frac{2}{3}$

답_060073_심플자이 수1(I~J)-삼.indd 63 2018. 5. 2. 오후 8:06

54 답 ②

호와 현으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

S=(부채꼴 OAB의 넓이)−(삼각형 OAB의 넓이)이다.

(ⅰ) 부채꼴 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

(ⅱ) 삼각형 OAB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로 꼭짓점 O에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 변 AB의 중점이다.

한편, 직각삼각형 OAH에서 세 내각의 크기가 각각 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{OH}:\overline{AH}:\overline{OA}=1:\sqrt{3}:2$이다.

즉, $\overline{OH}=1$이고 $\overline{AH}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{3}$이다.

$\therefore\ \triangle OAB=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $S=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

55 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 10이므로

$2r+l=10$에서 $l=10-2r$

이때, $r>0$, $l>0$이므로 $0<r<5$

한편, 부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(10-2r)=-r^2+5r$

$=-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\ (0<r<5)$

따라서 주어진 부채꼴의 넓이는 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$일 때,

최댓값 $\frac{25}{4}$를 갖는다.

TIP

반지름의 길이가 r, 둘레의 길이가 a인 부채꼴의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}r(a-2r)=-\left(r-\frac{1}{4}a\right)^2+\frac{1}{16}a^2$이다.

즉, 이 부채꼴의 넓이는 $r=\frac{1}{4}a$일 때, 최댓값 $\frac{1}{16}a^2$을 갖는다.

56 답 ①

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 16이므로

$2r+l=16$에서 $l=16-2r$

이때, $r>0$, $l>0$이므로 $0<r<8$

한편, 부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(16-2r)=8r-r^2$

$=-(r-4)^2+16\ (0<r<8)$

따라서 주어진 부채꼴의 넓이는 반지름의 길이가 4일 때, 최댓값 16을 갖는다.

57 답 ③

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 8이므로

$2r+l=8$에서 $l=8-2r$

이때, $r>0$, $l>0$이므로 $0<r<4$

한편, 부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(8-2r)=4r-r^2$

$=-(r-2)^2+4\ (0<r<4)$

따라서 주어진 부채꼴의 넓이는 반지름의 길이가 2일 때, 최댓값 4를 갖는다.

즉, 반지름의 길이가 2이고 넓이가 4인 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$\frac{1}{2}\times2^2\times\theta=4$, $2\theta=4$

$\therefore\ \theta=2$

심플 정리

[이차함수의 최대 · 최소]

이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$에 대하여

(1) $a>0$이면 $x=m$에서 최솟값 $f(m)=n$을 갖고 최댓값은 없다.

(2) $a<0$이면 $x=m$에서 최댓값 $f(m)=n$을 갖고 최솟값은 없다.

Simple J 삼각함수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 76~77

01 답 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$

02 답 $<$, $<$

03 답 $\sin\theta$

04 답 1, $\frac{1}{4}$

05 답 ○

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ×

09 답 ×

10 답 $\frac{12}{13}$

11 답 $-\frac{5}{13}$

12 답 $-\frac{12}{5}$

13 답 $\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

14 답 $\mathrm{P}(-1, -1)$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

15 답 $\mathrm{P}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

16 답 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{4}{3}$

17 답 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

18 답 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19 답 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

20 답 $\cos$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

21 답 $-\tan$, -1

22 답 $\tan$, 1

23 답 $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{1}{2}$

24 답 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}$

25 답 $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{1}{2}$

26 답 $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{1}{2}$

27 답 $-\tan$, -1

28 답 $\frac{\pi}{6}$, $\sqrt{3}$

29 답 $\cos$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 78~83

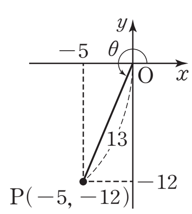
30 답 ②

원점 O를 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r=\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}=10$이므로 $\sin\theta=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}$이다.

31 답 ⑤

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=13$이므로 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 13인 원과 동경 OP가 만나는 점이 $\mathrm{P}(-5, -12)$이다. 따라서



$\sin\theta=\frac{(\text{점 P의 } y\text{좌표})}{(\text{반지름의 길이})}=-\frac{12}{13}$,

$\cos\theta=\frac{(\text{점 P의 } x\text{좌표})}{(\text{반지름의 길이})}=-\frac{5}{13}$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{17}{13}$

32 답 ④

$\sin\theta=\frac{3}{5}$이므로 삼각함수의 정의에 의하여 동경 OP는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원과 점 $\mathrm{P}(x, 3)$에서 만난다.

즉, $\sqrt{x^2+3^2}=5$에서 $x^2=16$ $\quad\therefore x=4$ 또는 $x=-4$

그런데 θ가 제2사분면의 각이므로 $x<0$이다.

따라서 $x=-4$이므로 점 P의 좌표는 $(-4, 3)$이다.

$\therefore \tan\theta=-\frac{3}{4}$

33 답 ⑤

$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1}{3}$에서 $3(1-\cos\theta)=1+\cos\theta$

$3-3\cos\theta=1+\cos\theta$, $4\cos\theta=2$ $\quad\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$

삼각함수의 정의에 의하여 동경 OP가 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원과 점 $\mathrm{P}(1, y)$에서 만난다.

즉, $\sqrt{1^2+y^2}=2$에서 $y^2=3$ $\quad\therefore y=\sqrt{3}$ 또는 $y=-\sqrt{3}$

그런데 θ가 제4사분면의 각이므로 $y<0$이다.

따라서 $y=-\sqrt{3}$이므로 점 P의 좌표는 $(1,\ -\sqrt{3})$이다.

따라서 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$이므로

$\sin\theta+\tan\theta=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(-\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

34 답 ⑤

① $\frac{6}{5}\pi$는 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

② $-\frac{\pi}{5}$는 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

③ $\frac{11}{6}\pi$는 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

④ $-\frac{7}{9}\pi$는 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

⑤ $\frac{5}{7}\pi$는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$

따라서 부호가 다른 것은 ⑤ $\frac{5}{7}\pi$이다.

35 답 ③

$\cos\theta<0$이면 θ는 제2사분면, 제3사분면에 존재하고,
$\tan\theta>0$이면 θ는 제1사분면, 제3사분면에 존재한다.
따라서 θ는 제3사분면의 각이다.

36 답 ③

$\sin\theta\cos\theta<0$이므로
$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이다.
$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$일 때 θ는 제2사분면의 각이고
$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$일 때 θ는 제4사분면의 각이므로
θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

37 답 ②

$\sin\theta\cos\theta<0$을 만족시키는 각 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\sin\theta\tan\theta>0$을 만족시키는 각 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.
따라서 두 부등식을 동시에 만족시키는 각 θ는 제4사분면의 각이다.

38 답 ①

θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

$\therefore \sqrt{\sin^2\theta}+\sqrt{\cos^2\theta}-|\sin\theta+\tan\theta|$
$=|\sin\theta|+|\cos\theta|-\{-(\sin\theta+\tan\theta)\}$
$=-\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta+\tan\theta$
$=\cos\theta+\tan\theta$

39 답 ⑤

θ는 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

$\therefore \sqrt{\sin^2\theta}+\sqrt{(\tan\theta-\sin\theta)^2}$
$=|\sin\theta|+|\tan\theta-\sin\theta|$
$=-\sin\theta+\tan\theta-\sin\theta$
$=\tan\theta-2\sin\theta$

40 답 ④

$\frac{\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}=-\sqrt{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$이면 $\cos\theta\geq0$, $\sin\theta<0$이다.
그런데 주어진 조건에서 $\sin\theta\cos\theta\neq0$이므로
$\cos\theta>0$, $\sin\theta<0$
따라서 θ는 제4사분면의 각이다.

심플 정리

[음수의 제곱근의 성질]

(1) $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
그 외에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(2) $a>0$, $b<0$이면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$
그 외에는 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

41 답 ③

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면
$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$
$1+2\sin\theta\cos\theta=2$ ($\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)
$2\sin\theta\cos\theta=1$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

42 답 ④

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ ($\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

또, $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 세제곱하면

$\sin^3\theta+3\sin^2\theta\cos\theta+3\sin\theta\cos^2\theta+\cos^3\theta=\frac{1}{8}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{1}{8}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta+3\times\left(-\frac{3}{8}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{11}{16}$

43 답 ⑤

$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$
$=(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$\quad+(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$ ($\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

44 답 ①

$\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta-\cos^3\theta}=\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta(1-\cos^2\theta)}$

$=\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta\sin^2\theta}$ ($\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

45 답 ③

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta-(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta-(1-\cos^2\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}\ (\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$
$$=0$$

46 답 ②

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta+1}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$
$$=\frac{2(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$
$$(\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$
$$=\frac{2}{\cos\theta}$$

47 답 ③

ㄱ. 이차방정식 $3x^2-2x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{3}$이다. (참)

ㄴ. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$, $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{9}$

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}$, $\frac{k}{3}=-\frac{5}{18}$

$\therefore k=-\frac{5}{6}$ (거짓)

ㄷ. $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^3-3\times\left(-\frac{5}{18}\right)\times\frac{2}{3}$

$=\frac{8}{27}+\frac{5}{9}=\frac{23}{27}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

심플 정리

[이차방정식의 근과 계수의 관계]

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

48 답 ④

이차방정식 $x^2-x+2a=0$의 두 근이 $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta-\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=1$ ⋯ ㉠

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=2a$ ⋯ ㉡

㉠에서 $2\sin\theta=1$ $\quad\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$

㉡에서 $\sin^2\theta-\cos^2\theta=2a$

$\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)=2a$, $2\sin^2\theta-1=2a$

$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=2a$, $-\frac{1}{2}=2a$

$\therefore a=-\frac{1}{4}$

49 답 ⑤

$\sin\theta+\cos\theta=1$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1$

$1+2\sin\theta\cos\theta=1$

$\sin\theta\cos\theta=0$

$\therefore \sin\theta=0$ 또는 $\cos\theta=0$

따라서 $\begin{cases}\sin\theta=0\\ \cos\theta=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\sin\theta=1\\ \cos\theta=0\end{cases}$ 이므로

$\sin^{2018}\theta+\cos^{2018}\theta=1$

50 답 ②

이차방정식 $x^2-ax+2a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=a$, $\sin\theta\cos\theta=2a$이다.

$\sin\theta+\cos\theta=a$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=a^2$

$1+2\sin\theta\cos\theta=a^2$, $1+2\times2a=a^2$

$a^2-4a-1=0$ ⋯ ㉠

$\therefore a=2\pm\sqrt{5}$

그런데 $a<0$이므로 $a=2-\sqrt{5}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=a(1-2a)=-2a^2+a$

$=-2(4a+1)+a$ ($\because$ ㉠에서 $a^2=4a+1$)

$=-7a-2=-7(2-\sqrt{5})-2$

$=-16+7\sqrt{5}$

따라서 $\alpha=-16$, $\beta=7$이므로 $\alpha+\beta=(-16)+7=-9$

51 답 ③

$\sin^2\frac{13}{6}\pi+\cos^2\frac{25}{6}\pi$

$=\sin^2\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(2\times2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}$

$=1$

Ⅱ J

답_060073_심플자이 수1(I~J)-삼.indd 67 2018. 5. 2. 오후 8:06

52 답 ②

$$\frac{\cos\frac{13}{3}\pi}{\sin\frac{7}{3}\pi}=\frac{\cos\left(2\times 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

53 답 ⑤

$$\sin\frac{25}{4}\pi\times\cos\frac{9}{4}\pi+\tan\frac{17}{4}\pi$$

$$=\sin\left(3\times 2\pi+\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(2\times 2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{3}{2}$$

54 답 ⑤

$\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$이므로

$$\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=-\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=2\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

55 답 0

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$이므로

$$\tan\left(-\frac{9}{10}\pi\right)+\tan\left(-\frac{8}{10}\pi\right)+\tan\left(-\frac{7}{10}\pi\right)+\cdots$$

$$+\tan\left(-\frac{1}{10}\pi\right)+\tan 0+\tan\frac{1}{10}\pi+\tan\frac{2}{10}\pi+\cdots$$

$$+\tan\frac{9}{10}\pi$$

$$=-\tan\frac{9}{10}\pi-\tan\frac{8}{10}\pi-\tan\frac{7}{10}\pi-\cdots-\tan\frac{1}{10}\pi$$

$$+\tan 0+\tan\frac{1}{10}\pi+\tan\frac{2}{10}\pi+\cdots+\tan\frac{9}{10}\pi$$

$$=\tan 0=0$$

56 답 1

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$이므로

$$\sin^2(\pi-\theta)+\cos^2(\pi+\theta)$$

$$=\{\sin(\pi-\theta)\}^2+\{\cos(\pi+\theta)\}^2$$

$$=\sin^2\theta+(-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

57 답 ④

$\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,

$\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)==-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$,

$\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$,

$\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이므로

$$\tan\frac{4}{3}\pi\cos\frac{4}{3}\pi-\tan\frac{2}{3}\pi\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$=\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-(-\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

58 답 ④

$\sin\theta=\frac{1}{3}$이므로 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 또는 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

그런데 θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

$\therefore\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

> **TIP**
>
> $\sin\theta=\frac{1}{3}$이므로 $\cos\theta$의 값은 빗변의 길이가 3이고 높이가 1인 직각삼각형에서 쉽게 구할 수 있다. 즉, 이 직각삼각형의 밑변의 길이는 $\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$이고 빗변과 밑변을 낀 각의 크기가 θ이므로 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.
>
> 그런데 θ가 제2사분면의 각이므로 앞에서 구한 값에 '$-$'만 붙여주면 된다. 즉, 구하는 값은 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

59 답 ①

$\cos\theta=-\frac{3}{5}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{4}{5}$ 또는 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$

그런데 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$이고

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4}{3}$이다.

즉, $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta=-\frac{4}{3}$,

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta=\frac{4}{3}$이므로

$$\tan(\pi-\theta)+\frac{1}{\tan(\pi+\theta)}=-\frac{4}{3}+\frac{1}{\frac{4}{3}}$$

$$=-\frac{4}{3}+\frac{3}{4}=-\frac{7}{12}$$

60 답 ③

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos\theta=\cos\theta-\cos\theta=0$

61 답 ③

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이므로

$\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta-\sin\theta=0$

답_060073_심플자이 수1(I~J)-삼.indd 68 2018. 5. 2. 오후 8:06

62 답 ②

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$\tan\theta\times\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\tan\theta\times\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)=-1$

63 답 ②

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$

이때, $\tan\theta=-\frac{1}{3}$이므로

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$\therefore \cos^2\theta=\frac{9}{10},\ \sin^2\theta=\frac{1}{10}$

즉, $\sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\theta=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$이다.

그런데 θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

한편, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$이고

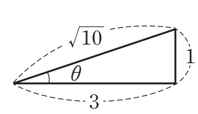
$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=-\sin\theta$$

이므로

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cos\theta-\sin\theta$$
$$=-\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$=-\frac{4}{\sqrt{10}}=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

다른 풀이

$\tan\theta=-\frac{1}{3}$에서 그림과 같은 직각삼각형을 생각하면



$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$이다.

그런데 θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

(이하 동일)

64 답 ①

$\cos\theta=\frac{4}{5}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$ 또는 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$

그런데 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$이므로

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{4}$이다.

한편, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta},\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}-\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)$$
$$=\frac{2}{\tan\theta}=-\frac{8}{3}$$

65 답 ③

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta,\ \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi+\theta)=\cos\theta-\cos\theta=0$

다른 풀이

삼각함수$\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)$를 $\pm$(삼각함수)θ로 바꾸는 방법을 활용해 보자.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\times1+\theta\right)$에서

(ⅰ) 1은 홀수이므로 sin은 cos으로 바뀐다.

(ⅱ) $\frac{\pi}{2}\times1+\theta$는 제2사분면의 각이므로 sin의 부호는 $+$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

$\cos(\pi+\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times2+\theta\right)$에서

(ⅲ) 2는 짝수이므로 cos은 바뀌지 않는다.

(ⅳ) $\frac{\pi}{2}\times2+\theta$는 제3사분면의 각이므로 cos의 부호는 $-$이다.

(ⅲ), (ⅳ)에 의하여 $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi+\theta)=\cos\theta-\cos\theta=0$

66 답 ②

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$
$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$$

이고 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$이므로

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)+\sin(-\theta)=-\sin\theta+(-\sin\theta)$$
$$=-2\sin\theta$$

다른 풀이

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times3-\theta\right)$에서

(ⅰ) 3은 홀수이므로 cos은 sin으로 바뀐다.

(ⅱ) $\frac{\pi}{2}\times3-\theta$는 제3사분면의 각이므로 cos의 부호는 $-$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$

Ⅱ J

$\sin(-\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 0-\theta\right)$에서

(iii) 0은 짝수이므로 sin은 바뀌지 않는다.

(iv) $\frac{\pi}{2}\times 0-\theta$는 제4사분면의 각이므로 sin의 부호는 $-$이다.

(iii), (iv)에 의하여 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\therefore \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)+\sin(-\theta)=-\sin\theta+(-\sin\theta)$

$=-2\sin\theta$

67 답 ①

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$,

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$,

$\cos(\theta-180^\circ)=\cos(-(180^\circ-\theta))$

$=\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

$\therefore \sin(-\theta)+\cos(90^\circ+\theta)$

$+\sin(180^\circ-\theta)+\cos(\theta-180^\circ)$

$=-\sin\theta-\sin\theta+\sin\theta-\cos\theta$

$=-\sin\theta-\cos\theta$

68 답 ⑤

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로

$$\frac{\cos(\pi+\theta)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)\cos^2(\pi-\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\cos\theta(-\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

69 답 ④

$\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right)+\tan\frac{14}{3}\pi$

$=\frac{1}{2}\cos\frac{9}{4}\pi+\tan\left(4\pi+\frac{2}{3}\pi\right)$

$=\frac{1}{2}\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\tan\frac{\pi}{3}$

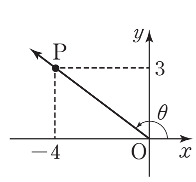
$=\frac{\sqrt{2}}{4}-\sqrt{3}$

70 답 ⑤

θ가 제2사분면의 각이고

$\tan\theta=-\frac{3}{4}$이므로 θ의 동경은

그림의 반직선 OP와 같다.



이때, 점 P의 좌표는 $(-4, 3)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이다.

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

이때, $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$이므로

$\sin(\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)=\sin\theta-\cos\theta$

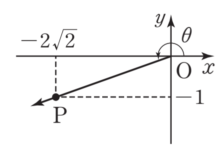
$=\frac{3}{5}-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{7}{5}$

71 답 ④

θ가 제3사분면의 각이고

$\sin\theta=-\frac{1}{3}$이므로 θ의 동경은

그림의 반직선 OP와 같다.



이때, 점 P의 좌표는 $(-2\sqrt{2}, -1)$이므로

$\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.

이때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$이고

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=-2\sqrt{2}$이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

72 답 ①

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+A\right)=\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+A\right)\right)$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=-\cos A$

또한, 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π이므로

$A+B+C=\pi$에서 $B+C=\pi-A$

$\therefore \cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$

이때, $\sin A=\frac{1}{3}$이므로

(i) $0<A<\frac{\pi}{2}$일 때, $\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(ii) $\frac{\pi}{2}<A<\pi$일 때, $\cos A=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 또는 $\cos A=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+A\right)+\cos(B+C)=-\cos A+(-\cos A)$

$=-2\cos A=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$

73 답 ②

$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$이므로

$\cos 0^\circ=\cos(90^\circ-90^\circ)=\sin 90^\circ$

$\cos 1^\circ=\cos(90^\circ-89^\circ)=\sin 89^\circ$

$\cos 2^\circ=\cos(90^\circ-88^\circ)=\sin 88^\circ$

$\vdots$

$\cos 44^\circ=\cos(90^\circ-46^\circ)=\sin 46^\circ$

$\therefore \cos^2 0° + \cos^2 1° + \cos^2 2° + \cdots + \cos^2 89° + \cos^2 90°$

$= \sin^2 90° + \sin^2 89° + \cdots + \sin^2 46° + \cos^2 45°$

$\quad + \cos^2 46° + \cos^2 47° + \cdots + \cos^2 90°$

$= (\sin^2 90° + \cos^2 90°) + (\sin^2 89° + \cos^2 89°) + \cdots$

$\quad + (\sin^2 46° + \cos^2 46°) + \cos^2 45°$

$= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{45\text{개}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \ (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= 1 \times 45 + \frac{1}{2} = \frac{91}{2}$

74 답 ③

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$이므로

$\sin 1° = \sin(90° - 89°) = \cos 89°$

$\sin 3° = \sin(90° - 87°) = \cos 87°$

$\sin 5° = \sin(90° - 85°) = \cos 85°$

$\vdots$

$\sin 43° = \sin(90° - 47°) = \cos 47°$

$\therefore \sin^2 1° + \sin^2 3° + \sin^2 5° + \cdots + \sin^2 87° + \sin^2 89°$

$= \cos^2 89° + \cos^2 87° + \cdots + \cos^2 47° + \sin^2 45°$

$\quad + \sin^2 47° + \sin^2 49° + \cdots + \sin^2 89°$

$= (\cos^2 89° + \sin^2 89°) + (\cos^2 87° + \sin^2 87°) + \cdots$

$\quad + (\cos^2 47° + \sin^2 47°) + \sin^2 45°$

$= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{22\text{개}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \ (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$= 22 \times 1 + \frac{1}{2} = \frac{45}{2}$

75 답 ①

$\tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$이므로

$\tan 1° = \tan(90° - 89°) = \frac{1}{\tan 89°}$

$\tan 2° = \tan(90° - 88°) = \frac{1}{\tan 88°}$

$\tan 3° = \tan(90° - 87°) = \frac{1}{\tan 87°}$

$\vdots$

$\tan 44° = \tan(90° - 46°) = \frac{1}{\tan 46°}$

$\therefore \tan 1° \times \tan 2° \times \tan 3° \times \cdots \times \tan 88° \times \tan 89°$

$= \frac{1}{\tan 89°} \times \frac{1}{\tan 88°} \times \cdots \times \frac{1}{\tan 46°}$

$\quad \times \tan 45° \times \tan 46° \times \cdots \times \tan 89°$

$= \left(\frac{1}{\tan 89°} \times \tan 89°\right) \times \left(\frac{1}{\tan 88°} \times \tan 88°\right) \times \cdots$

$\quad \times \left(\frac{1}{\tan 46°} \times \tan 46°\right) \times \tan 45°$

$= 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1$

연습 문제 [I~J]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 84~85

01 답 ④

각 θ를 7배한 각 7θ와 θ의 동경이 일치하므로

$7\theta - \theta = 6\theta = 360° \times n$ (단, n은 정수)에서 $\theta = 60° \times n$

이때, $0° < \theta < 90°$에서 $0° < 60° \times n < 90°$

$\therefore 0 < n < \frac{3}{2}$

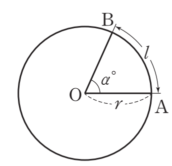
이때, n은 정수이므로 $n = 1$

$\theta = 60° \times n = 60° \times 1 = 60°$

02 답 ①

다음은 호도법에 대한 설명이다.

그림과 같이 반지름의 길이가 r, 중심이 O인 원에서 길이가 l인 호 AB에 대한 중심각 AOB의 크기를 $\alpha°$라 하면, 호 AB의 길이는 중심각의 크기 $\alpha°$에 비례한다.



호의 길이는 중심각의 크기에 비례함을 이용하여 비례식을 세워 정리해.

따라서 $\frac{l}{\boxed{(가)}} = \frac{\alpha°}{360°}$

여기서 $l = r$이면 $\alpha° = \boxed{(나)}$ 위에서 구한 식에 $l = r$를 대입해.

이 경우 중심각의 크기 $\alpha°$는 원의 반지름의 길이에 관계없이 항상 일정하다.

이 일정한 각의 크기를 1라디안이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라 한다.

위에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $2\pi r$, $\frac{180°}{\pi}$　② $2\pi r$, $\frac{\pi}{180°}$　③ $2\pi r$, $\frac{360°}{\pi}$

④ πr, $\frac{\pi}{180°}$　⑤ πr, $\frac{360°}{\pi}$

1st 호의 길이와 중심각의 크기의 비를 생각해.

호 AB의 길이는 중심각의 크기 $\alpha°$에 비례하므로

$l : \alpha° = 2\pi r : 360°$에서 $\underbrace{\frac{l}{2\pi r}}_{(가)} = \frac{\alpha°}{360°}$ 호의 길이와 부채꼴의 넓이는 중심각의 크기에 정비례 해.

반지름의 길이가 r인 원의 원주의 길이는 $2\pi r$야.

이때, $l = r$를 위의 식에 대입하면 $\frac{r}{2\pi r} = \frac{\alpha°}{360°}$에서

$\alpha° = \frac{360° r}{2\pi r} = \frac{180°}{\pi}$ ←(나)

03 답 ⑤

각 2θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$7\theta-2\theta=360^\circ\times n+180^\circ$ (단, n은 정수)에서

$5\theta=180^\circ\times(2n+1)$

$\therefore\ \theta=\dfrac{2n+1}{5}\times180^\circ$

이때, $90^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$90^\circ<\dfrac{2n+1}{5}\times180^\circ<180^\circ$, $\dfrac{5}{2}<2n+1<5$

$\dfrac{3}{2}<2n<4 \qquad \therefore\ \dfrac{3}{4}<n<2$

이때, n은 정수이므로 $n=1 \qquad \therefore\ \theta=108^\circ$

$\therefore\ \theta+72^\circ=108^\circ+72^\circ=180^\circ=\pi$

> 심플 정리
>
> **[두 동경의 위치 관계]**
>
> 두 각 α, β를 나타내는 동경이
>
> (1) 일치하면 $\alpha-\beta=360^\circ\times n$ (n은 정수)
>
> (2) 일직선 위에 있고 방향이 반대이면
> $\alpha-\beta=360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)
>
> (3) x축에 대하여 대칭이면
> $\alpha+\beta=360^\circ\times n$ (n은 정수)
>
> (4) y축에 대하여 대칭이면
> $\alpha+\beta=360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)
>
> (5) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이면
> $\alpha+\beta=360^\circ\times n+90^\circ$ (n은 정수)

04 답 ①

호의 길이를 l이라 하면 $l=r\theta=\pi$ ⋯ ㉠

또, 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times r\times l=\dfrac{1}{2}\times r\times\pi=2\pi \qquad \therefore\ r=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $4\theta=\pi \qquad \therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\ \dfrac{\theta}{r}=\dfrac{\frac{\pi}{4}}{4}=\dfrac{\pi}{16}$

05 답 $l=20$, $\theta=2$

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 40이므로

$2r+l=40$에서 $l=40-2r$ ⋯ Ⅰ

이때, $r>0$, $l>0$이므로 $0<r<20$

한편, 부채꼴의 넓이는

$\dfrac{1}{2}rl=\dfrac{1}{2}r(40-2r)=-(r-10)^2+100$에서

$r=10$일 때 최댓값 100을 갖는다. ⋯ Ⅱ

따라서 $l=40-2\times10=20$이므로

$l=r\theta=20$에서 $10\theta=20$

$\therefore\ \theta=2$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	l을 r에 대한 식으로 표현한다.	30%
Ⅱ	부채꼴의 넓이를 반지름의 길이 r에 대한 이차함수로 나타내어 넓이가 최대일 때의 r의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	l, θ의 값을 각각 구한다.	30%

06 답 ④

제3사분면의 각 θ에 대하여 $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$인 동경 위의 한 점은 $(-4,\ -3)$이므로

$\tan\theta=\dfrac{-3}{-4}=\dfrac{3}{4}$

$\sin\theta=\dfrac{-3}{5}=-\dfrac{3}{5}$

$$\therefore\ \frac{16\tan\theta-7}{5\sin\theta+8}=\frac{16\times\frac{3}{4}-7}{5\times\left(-\frac{3}{5}\right)+8}=\frac{12-7}{-3+8}=\frac{5}{5}=1$$

07 답 ①

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$의 양변을 제곱하면

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$, $2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

이때,

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$$

이므로

$$\tan^3\theta+\frac{1}{\tan^3\theta}=\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^3-3\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)=4^3-3\times4=52$$

> 심플 정리
>
> **[곱셈 공식의 변형]**
>
> (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
>
> (2) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
> $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
>
> (3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
> $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
>
> (4) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
>
> (5) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
> $=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

08 답 ④

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$에서

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

따라서 $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{8}{9}$이므로

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1-\left(-\frac{8}{9}\right)=\frac{17}{9}$$

한편, θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{3}$

$$\therefore \sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{3}=\frac{\sqrt{17}}{9}$$

09 답 ④

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin(\pi+\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(\pi+\theta)$$
$$=\cos\theta(-\sin\theta)-\sin\theta(-\cos\theta)$$
$$=-\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta=0$$

10 답 ①

직선 $y=-\frac{4}{3}x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)\ (a<0)$에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin(\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)$의 값은? (단, O는 원점이다.)

기울기가 m인 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $m=\tan\theta$가 성립해.

① $\frac{7}{5}$　② $\frac{1}{5}$　③ 0　④ $-\frac{1}{5}$　⑤ $-\frac{7}{5}$

1st 직선의 기울기와 $\tan\theta$ 사이의 관계를 이용해.

직선 $y=-\frac{4}{3}x$의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이고 이 직선 위에 있는 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이므로

$\tan\theta=-\frac{4}{3}$이다.

2nd $\sin(\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)$의 값을 구하자.

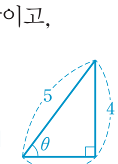
그런데 $a<0$이므로 직선 $y=-\frac{4}{3}x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 제2사분면에 존재한다. 즉, θ는 제2사분면의 각이고,

$\tan\theta=-\frac{4}{3}$이므로

삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

그림과 같이 $\tan\theta=\frac{4}{3}$를 만족시키는 직각삼각형에서 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$인데 θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$이야.



$$\therefore \sin(\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)=\sin\theta-\cos\theta$$
$$=\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5}$$

11 답 ③

반지름의 길이가 1인 원을 12등분하였으므로

부채꼴 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$($n$은 $1\le n\le 11$인 자연수)의 중심각의

크기는 $\theta=\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$이다.

즉, $6\theta=180^\circ$이므로

$$\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cdots+\cos12\theta$$
$$=\cos\theta+\cdots+\cos6\theta+\cos(180^\circ+\theta)+\cdots$$
$$+\cos(180^\circ+6\theta)$$
$$=\cos\theta+\cdots+\cos6\theta-\cos\theta-\cdots-\cos6\theta=0$$

심플 정리

[$\pi\pm x$의 삼각함수의 성질]

(1) $\sin(\pi+x)=-\sin x$
　$\sin(\pi-x)=\sin x$

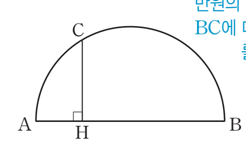
(2) $\cos(\pi+x)=-\cos x$
　$\cos(\pi-x)=-\cos x$

(3) $\tan(\pi+x)=\tan x$
　$\tan(\pi-x)=-\tan x$

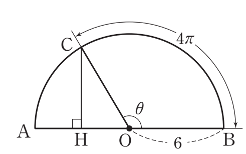
12 답 27

그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원 위에서 호 BC의 길이가 4π인 점 C를 잡고 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{CH}}^2$의 값을 구하시오.

호 BC의 길이를 구하려면 반원의 반지름의 길이와 호 BC에 대한 중심각의 크기를 알아야 해.



1st 반원의 중심과 점 C를 연결해.



반원의 중심을 O, $\angle\mathrm{BOC}=\theta$라 하면 $\overline{\mathrm{OB}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=12$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=6$

$6\theta=4\pi$에서 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

호 BC의 길이가 4π이므로 $\overline{\mathrm{OB}}\times\angle\mathrm{BOC}=4\pi$

2nd $\overline{\mathrm{CH}}^2$의 값을 구하자.

직각삼각형 OHC에서

$$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{OC}}\sin(\pi-\theta)=\overline{\mathrm{OC}}\sin\theta$$
$$=6\sin\frac{2}{3}\pi=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$
$$\therefore \overline{\mathrm{CH}}^2=(3\sqrt{3})^2=27$$

Ⅱ
I~J 연습

13 답 1

> 좌표평면 위의 점 A(0, 1)과 x축의 양의 방향 위의 점 P_1, P_2, $\cdots$, P_{89}에 대하여
> $\angle OAP_1 = \angle P_1AP_2 = \cdots = \angle P_{88}AP_{89} = 1^\circ$이다.
> $\overline{OP_1} \times \overline{OP_2} \times \cdots \times \overline{OP_{89}}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 P_n의 x좌표는 점 P_{n-1}의 x좌표보다 크다.)
> 선분 OP_n의 길이를 직각삼각형 AOP_n에서 구한 후 삼각함수의 성질을 이용해.

1st 선분 OP_1, OP_2, $\cdots$, OP_{89}의 길이를 구하자.

$\angle OAP_1 = \angle P_1AP_2 = \cdots = \angle P_{88}AP_{89} = 1^\circ$이므로

자연수 n에 대하여 $\angle OAP_n = n^\circ$이다.

$\therefore \overline{OP_n} = \overline{OA}\tan(\angle OAP_n) = \tan n^\circ$

직각삼각형 OAP_n에서 $\tan(\angle OAP_n) = \dfrac{\overline{OP_n}}{\overline{OA}}$

2nd $\overline{OP_1} \times \overline{OP_2} \times \cdots \times \overline{OP_{89}}$의 값을 구하자.

$\therefore \overline{OP_1} \times \overline{OP_2} \times \cdots \times \overline{OP_{89}}$

$= \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \cdots \times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ$

$= \dfrac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} \times \dfrac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \times \cdots \times \dfrac{\sin 88^\circ}{\cos 88^\circ} \times \dfrac{\sin 89^\circ}{\cos 89^\circ}$

$= \dfrac{\sin 1^\circ}{\sin 89^\circ} \times \dfrac{\sin 2^\circ}{\sin 88^\circ} \times \cdots \times \dfrac{\sin 88^\circ}{\sin 2^\circ} \times \dfrac{\sin 89^\circ}{\sin 1^\circ}$

$= 1$

$\cos 1^\circ = \cos(90^\circ - 89^\circ) = \sin 89^\circ$,
$\cos 2^\circ = \cos(90^\circ - 88^\circ) = \sin 88^\circ$, $\cdots$
$\cos 89^\circ = \cos(90^\circ - 1^\circ) = \sin 1^\circ$

다른 풀이

$\overline{OP_1} \times \overline{OP_2} \times \cdots \times \overline{OP_{89}}$

$= \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \cdots \times \tan 89^\circ$

$\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$= \tan(90^\circ - 89^\circ) \times \tan(90^\circ - 88^\circ) \times \cdots \times \tan(90^\circ - 46^\circ)$
$\times \tan 45^\circ \times \tan 46^\circ \times \cdots \times \tan 89^\circ$

$= \dfrac{1}{\tan 89^\circ} \times \dfrac{1}{\tan 88^\circ} \times \cdots \times \dfrac{1}{\tan 46^\circ}$
$\times \tan 45^\circ \times \tan 46^\circ \times \cdots \times \tan 89^\circ$

$= 1$

Simple K 삼각함수의 그래프

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 86~87

01 답 주기

02 답 2π, 원점

03 답 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$

04 답 $\theta = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ×

09 답 3

10 답 3

11 답 6

12 답 4

13 답 4

14 답 8

15 답 실수 전체의 집합

16 답 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$

17 답 2π

18 답 원점에 대하여 대칭

19 답 실수 전체의 집합

20 답 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$

21 답 2π

22 답 y축에 대하여 대칭

23 답 $\theta \ne n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)인 실수 전체의 집합

24 답 실수 전체의 집합

25 답 π

26 답 원점에 대하여 대칭

27 답 $\theta = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 88~89

28 답 ③

함수 $f(x)$의 주기가 2π이므로

$f(5\pi)=f(2\pi\times2+\pi)=f(\pi)$

한편, $x=\pi$일 때, $f(x)=\sin 2x$이므로

$f(5\pi)=f(\pi)=\sin 2\pi=0$

29 답 ③

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 주기가 4인 주기함수이다.

$\therefore f(21)=f(4\times5+1)=f(1)$

이때, 조건 (나)에 의하여 $-2\le x\le 2$에서 $f(x)=2-|x|$이므로 $f(21)=f(1)=2-|1|=1$

30 답 ④

ㄱ. 함수 $y=\sin x$는 주기가 2π인 주기함수이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭인 함수이다. (참)

ㄷ. 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

31 답 ⑤

ㄱ. 함수 $f(x)=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $f(-x)=-f(x)$이다. (참)

ㄴ. 삼각함수의 성질에 의하여 모든 실수 x에 대하여 $\sin(\pi+x)=-\sin x$이므로 $f(\pi+x)=-f(x)$이다. (참)

ㄷ. 삼각함수의 성질에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$이다.

즉, $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$이므로 함수 $f(x)=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

TIP

함수 $y=f(x)$의 그래프가 모든 실수 x에 대하여

(1) y축에 대하여 대칭이면

$f(x)=f(-x)$

(2) 원점에 대하여 대칭이면

$f(x)=-f(-x)$

(3) 직선 $x=a$에 대하여 대칭이면

$f(a+x)=f(a-x) \Longleftrightarrow f(x)=f(2a-x)$

32 답 ⑤

ㄱ. 함수 $y=\cos x$는 주기가 2π인 주기함수이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$이므로 서로 다른 정수의 개수는 -1, 0, 1로 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

33 답 ②

ㄱ. 함수 $f(x)=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $f(-x)=f(x)$이다. (거짓)

ㄴ. 삼각함수의 성질에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\ne f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (거짓)

ㄷ. 삼각함수의 성질에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$\cos(\pi-x)=-\cos x$, $\cos(\pi+x)=-\cos x$이므로

$f(\pi-x)=f(\pi+x)$이다.

따라서 함수 $f(x)=\cos x$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

TIP

함수 $y=\cos x$의 그래프는 직선 $x=n\pi$ (단, n은 정수)에 대하여 대칭이다.

34 답 ②

ㄱ. 정의역은 $x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)인 실수 전체의 집합이다. (거짓)

ㄴ. 치역은 실수 전체의 집합이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=\tan x$는 주기가 π인 주기함수이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

35 답 ④

ㄱ. 함수 $f(x)=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $f(-x)=-f(x)$이다. (거짓)

ㄴ. 삼각함수 성질에 의하여 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$,

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$이므로

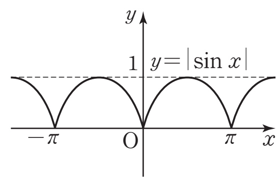
$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)=\tan x$의 그래프는 점 $(n\pi, 0)$ (n은 정수)에 대하여 대칭이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

36 답 ④

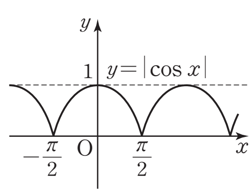
함수 $y=|\sin x|$의 그래프는 다음과 같다.

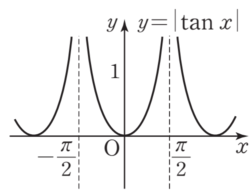


따라서 치역은 $\{y|0\le y\le 1\}$이다.

37 답 2π

두 함수 $y=|\cos x|$, $y=|\tan x|$의 그래프는 다음과 같다.



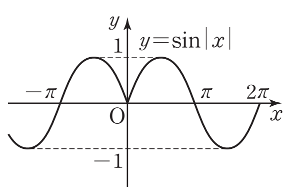


따라서 두 함수 $y=|\cos x|$, $y=|\tan x|$의 주기는 모두 π이므로 $a=\pi$, $b=\pi$

$\therefore a+b=\pi+\pi=2\pi$

38 답 ⑤

함수 $y=\sin|x|$의 그래프는 다음과 같다.



① 정의역은 실수 전체의 집합이다.

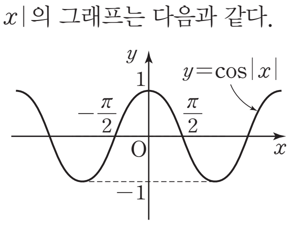
② 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$이다.

③ 주기함수가 아니다.

④ 최솟값은 -1이다.

39 답 ②

함수 $y=\cos|x|$의 그래프는 다음과 같다.



② 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$이다.

01 답 $\{y|-3\le y\le 3\}$, 3, -3, 2π

02 답 없고, $\frac{\pi}{2}$

03 답 2, 1

04 답 ○

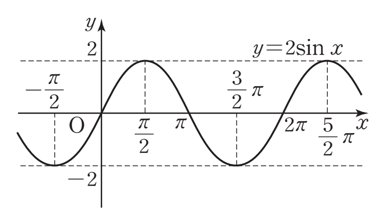
05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

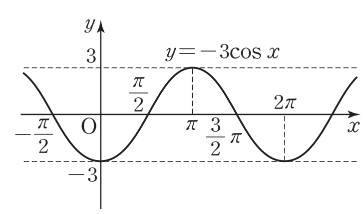
08 답 풀이 참조

함수 $y=2\sin x$의 그래프는 다음과 같고 치역은 $\{y|-2\le y\le 2\}$이다.



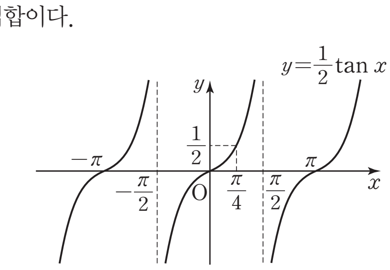
09 답 풀이 참조

함수 $y=-3\cos x$의 그래프는 그림과 같고 치역은 $\{y|-3\le y\le 3\}$이다.



10 답 풀이 참조

함수 $y=\frac{1}{2}\tan x$의 그래프는 그림과 같고 치역은 실수 전체의 집합이다.



11 답 최댓값 : $\frac{1}{4}$, 최솟값 : $-\frac{1}{4}$

$y=\sin 4x$의 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$이므로

$y=\frac{1}{4}\sin 4x$의 치역은 $\left\{y\middle|-\frac{1}{4}\le y\le \frac{1}{4}\right\}$이다.

따라서 최댓값과 최솟값은 각각 $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$이다.

12 답 최댓값 : 5, 최솟값 : -5

$y=\cos\frac{1}{2}x$의 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이므로

$y=5\cos\frac{1}{2}x$의 치역은 $\{y\,|\,-5\le y\le 5\}$이다.

따라서 최댓값과 최솟값은 각각 5, -5이다.

13 답 최댓값 : 없다, 최솟값 : 없다

$y=\tan 2x$의 치역은 실수 전체의 집합이므로

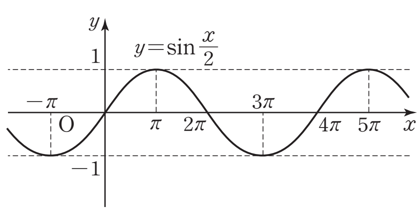
$y=-\tan 2x$의 치역은 실수 전체의 집합이다.

따라서 최댓값과 최솟값은 없다.

14 답 풀이 참조

함수 $y=\sin\frac{x}{2}$의 그래프는 그림과 같고 주기는

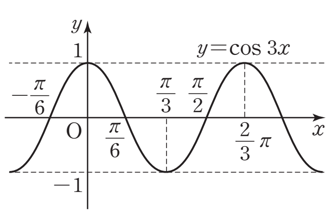
$\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.



15 답 풀이 참조

함수 $y=\cos 3x$의 그래프는 그림과 같고 주기는

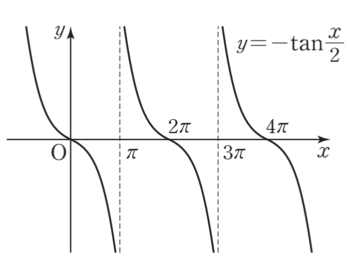
$\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이다.



16 답 풀이 참조

함수 $y=-\tan\frac{x}{2}$의 그래프는 그림과 같고 주기는

$\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$이다.



17 답 π, 1, 2π

18 답 $\frac{\pi}{2}$, 1, π

19 답 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$

20 답 최댓값 : 4, 최솟값 : -2, 주기 : 4π

21 답 최댓값 : -1, 최솟값 : -3, 주기 : π

22 답 최댓값 : 없다, 최솟값 : 없다, 주기 : $\frac{\pi}{3}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 92~95

23 답 ①

$y=2\sin 2x-1$의 그래프는 $y=2\sin 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때, $y=2\sin 2x$의 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$이므로

$y=2\sin 2x-1$의 치역은 $\{y\,|\,-3\le y\le 1\}$이다.

따라서 주어진 함수의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이므로 최댓값과 최솟값의 합은 -2이다.

TIP

두 함수 $y=a\sin(bx+c)+d$, $y=a\cos(bx+c)+d$에서 최댓값과 최솟값은 a, d에 의해서 결정된다. 즉, b, c는 최댓값과 최솟값에 영향을 주지 않는다.

24 답 ④

함수 $y=a\sin\frac{1}{2}x$의 최댓값이 $\frac{3}{4}$이므로

$|a|=\frac{3}{4}$에서 $a=\frac{3}{4}$ ($\because a>0$)

또, 함수 $y=b\cos 2x+2$의 최솟값이 -2이므로

$-|b|+2=-2$에서 $|b|=4$　　$\therefore b=4$ ($\because b>0$)

$\therefore 4a+b=4\times\frac{3}{4}+4=7$

25 답 ①

ㄱ. $-1\le\sin x\le 1$에서 $-3\le 3\sin x\le 3$이므로

$y=3\sin x$의 최댓값은 3이다.

ㄴ. $-1\le\sin\pi x\le 1$에서 $-2\le 2\sin\pi x\le 2$이므로

$y=2\sin\pi x$의 최댓값은 2이다.

ㄷ. $-1\le\cos 3x\le 1$에서 $-1\le 2\cos 3x+1\le 3$이므로

$y=2\cos 3x+1$의 최댓값은 3이다.

ㄹ. $-1\le\cos\frac{x}{2}\le 1$에서 $3\le -3\cos\frac{x}{2}+6\le 9$이므로

$y=-3\cos\frac{x}{2}+6$의 최댓값은 9이다.

따라서 ㄱ, ㄷ의 최댓값은 3으로 같다.

26 답 ④

함수 $y=\frac{1}{2}\sin 3x$의 주기는 $\frac{2\pi}{|3|}=\frac{2}{3}\pi$이다.

TIP

함수 $y=a\sin(bx+c)+d$, $y=a\cos(bx+c)+d$, $y=a\tan(bx+c)+d$에서 주기는 오직 b에 의해서 결정된다. 즉, a, c, d는 주기에 영향을 주지 않는다.

27 답 ②

함수 $f(x)=a\tan bx+3$의 주기가 2π이므로

$\dfrac{\pi}{|b|}=2\pi$에서 $|b|=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore b=\dfrac{1}{2}\,(\because b>0)$

즉, $f(x)=a\tan\dfrac{1}{2}x+3$이므로 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=6$에서

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\tan\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)+3=a\tan\frac{\pi}{4}+3$$
$$=a+3=6$$

$\therefore a=3$

$\therefore a+2b=3+2\times\dfrac{1}{2}=4$

28 답 ⑤

조건 (가)의 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

조건 (나)의 $f(x+\pi)=f(x)$를 만족시키는 함수 $f(x)$는 주기가 π인 함수이다. 이때, 원점에 대하여 대칭인 함수는 $y=-2\sin x$, $y=\tan\dfrac{1}{2}x$, $y=\sin 2x$이고, 이 함수의 주기는 각각 2π, 2π, π이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ⑤ $f(x)=\sin 2x$이다.

심플 정리

[주기함수]

(1) 함수 $f(x)$의 주기가 p이면
$f(x+np)=f(x)$ (단, n은 정수)가 성립한다.

(2) 모든 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$이면 함수 $f(x)$는 주기가 p인 주기함수이다.

29 답 ②

$f(x)=f(x-\pi)$의 양변에 $x=x+\pi$를 대입하면
$f(x+\pi)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 주기가 π인 함수이다.

ㄱ. $y=3\sin\dfrac{x}{2}$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

ㄴ. $y=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$이다.

ㄷ. $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 주기는 π이다.

ㄹ. $y=-\cos\dfrac{x}{4}+2$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$이다.

따라서 $f(x)=f(x-\pi)$, 즉 주기가 π인 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

30 답 $\dfrac{\pi}{3}$

$y=\dfrac{1}{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{3}\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $p=\dfrac{\pi}{6}$, $q=2$이므로 $pq=\dfrac{\pi}{6}\times 2=\dfrac{\pi}{3}$

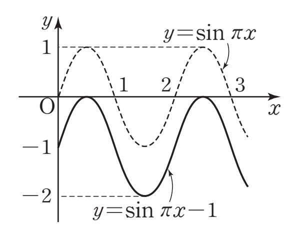
31 답 ⑤

① $-1\le\sin\pi x\le 1$에서 $-2\le\sin\pi x-1\le 0$이므로
함수 $f(x)$의 최댓값은 0, 최솟값은 -2이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 -2이다. (거짓)

② $f(x)=\sin\pi x-1$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$이고
$y=\tan 2x$의 주기는 $\dfrac{\pi}{2}$이므로 주기가 서로 다르다.
(거짓)

③ $f(-x)=\sin\pi(-x)-1=-\sin\pi x-1\ne -f(x)$
즉, 원점에 대하여 대칭이 아니다. (거짓)

④ $f(x)=\sin\pi x-1$의 그래프는 $y=\sin\pi x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 그림과 같다.



따라서 $x>0$에서 그래프가 x축과 두 번째로 만나는 점은 $\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$이다. (거짓)

⑤ 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로
$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}+2\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$이다. (참)

32 답 ①

$y=-2\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)-1=-2\cos\dfrac{1}{3}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-1$의 그래프는 $y=-2\cos\dfrac{x}{3}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $p=\dfrac{\pi}{2}$, $q=-1$이므로 $pq=\dfrac{\pi}{2}\times(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$

33 답 ③

$y=f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

즉, $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 그래프는 $y=-\sin x$이다.

TIP

삼각함수의 성질에 의하여 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$
즉, 함수 $f(x)=\cos x$에 대하여
$f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이다.

34 답 ③

① 주기는 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$이다. (참)

② 최댓값은 $2+1=3$이다. (참)

③ 최솟값은 $-2+1=-1$이다. (거짓)

④ $x=0$을 대입하면

$y=-2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1=-2\times\frac{1}{2}+1=0$

따라서 그래프는 원점을 지난다. (참)

⑤ $y=2\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=2\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=2\cos\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)+1$

$=2\cos\left(\pi+\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$

이므로 두 그래프는 평행이동에 의해 일치한다. (참)

> 심플 정리
>
> [코사인함수의 최댓값과 최솟값]
>
> 함수 $y=a\cos(bx+c)+d$의 최댓값과 최솟값은 각각 $|a|+d$, $-|a|+d$이다.

35 답 ④

$f(x)=-\tan(\pi x-\pi)=-\tan(-(\pi-\pi x))$

$=\tan(\pi-\pi x)=-\tan\pi x$

① 함수 $f(x)$의 정의역은 $x\neq n+\frac{1}{2}$ (단, n은 정수)인 실수 전체 집합이다. (참)

② 치역은 실수 전체의 집합이다. (참)

③ $f(-x)=-\tan(-\pi x)=\tan\pi x=-f(x)$이므로 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

④ 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2\pi)=f(x)$가 성립하는 것은 아니다. (거짓)

⑤ 점근선의 방정식은 $x=n+\frac{1}{2}$(n은 정수)이다. (참)

> 심플 정리
>
> [$y=a\tan bx$의 정의역과 점근선]
>
> $y=a\tan bx$의 정의역은 $x\neq\frac{1}{b}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$(단, n은 정수)인 실수 전체의 집합이고 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{b}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$(단, n은 정수)이다.

36 답 ③

ㄱ. $y=3\sin x-1$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2}{3}\pi$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=3\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)-1+1=3\sin\left(\frac{\pi}{2}+x+\frac{\pi}{6}\right)$

$=3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

따라서 두 함수 $y=3\sin x-1$, $y=3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 평행이동에 의해 겹친다.

ㄴ. $y=\sin(3x-\pi)$, $y=\cos(1-x)+\pi$의 주기는 각각 $\frac{2\pi}{3}$, 2π이므로 평행이동에 의해 겹치지 않는다.

ㄷ. $y=2\tan 3x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면

$y=2\tan 3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1=2\tan\left(3x-\frac{3}{2}\pi\right)+1$

$=2\tan\left(-2\pi+3x+\frac{\pi}{2}\right)+1=2\tan\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

따라서 두 함수 $y=2\tan 3x+1$,

$y=2\tan\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는 평행이동에 의해 겹친다.

따라서 평행이동에 의해 겹치는 두 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

> TIP
>
> $y=\sin x$와 $y=\cos x$의 그래프는 평행이동에 의해 일치하므로 $y=a\sin bx$, $y=a\cos bx$의 그래프도 평행이동에 의해 일치한다.
>
> 한편, 주기가 다른 그래프는 평행이동하여도 일치하지 않는다.

37 답 41

함수 $y=\frac{1}{2}\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y=\frac{1}{2}\tan 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1=\frac{1}{2}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1$이다.

$\therefore a=-\frac{\pi}{3}$, $b=-1$

한편, $y=\frac{1}{2}\tan 2x$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (단, n은 정수)이므로

$y=\frac{1}{2}\tan 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\left(\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}=\frac{n}{2}\pi+\frac{5}{12}\pi$ (단, n은 정수)이다.

이때, $0<c<\frac{\pi}{2}$이므로 $c=\frac{5}{12}\pi$이다.

$\therefore abc=\left(-\frac{\pi}{3}\right)\times(-1)\times\frac{5}{12}\pi=\frac{5}{36}\pi^2$

따라서 $p=36$, $q=5$이므로 $p+q=36+5=41$

38 답 ③

함수 $y=a\sin bx+c$의 최댓값은 5, 최솟값은 -1이므로

$|a|+c=5$, $-|a|+c=-1$

두 식을 연립하면 $|a|=3$, $c=2$

그런데 $a>0$이므로 $a=3$, $c=2$이다.

또한, 함수 $y=a\sin bx+c$의 주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\pi$에서 $|b|=2$

그런데 $b<0$이므로 $b=-2$이다.

$\therefore a+b+c=3+(-2)+2=3$

39 답 2

함수 $y=a\cos bx+c$의 최댓값은 5, 최솟값은 -3이므로

$|a|+c=5, -|a|+c=-3$

두 식을 연립하면 $|a|=4$, $c=1$

그런데 $a>0$이므로 $a=4$, $c=1$이다.

또한, 함수 $y=a\cos bx+c$의 주기가 4π이므로

$\dfrac{2\pi}{|b|}=4\pi$에서 $|b|=\dfrac{1}{2}$

그런데 $b>0$이므로 $b=\dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore abc=4\times\dfrac{1}{2}\times1=2$

40 답 ⑤

그래프에서 함수 $y=a\sin(bx-c)$의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이므로 $|a|=2$

그런데 $a>0$이므로 $a=2$이다.

또한, 주기가 $\dfrac{5}{6}\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\pi$이므로 $\dfrac{2\pi}{|b|}=\pi$에서 $|b|=2$

그런데 $b>0$이므로 $b=2$이다.

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\sin(2x-c)$이고, 이 함수의 그래프는 $y=2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{c}{2}$만큼 평행이동한 그래프이므로 점 $\left(\dfrac{c}{2}, 0\right)$을 지난다.

$0<c<\pi$일 때 $0<\dfrac{c}{2}<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\dfrac{c}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ $\quad\therefore c=\dfrac{2}{3}\pi$

$\therefore abc=2\times2\times\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{8}{3}\pi$

41 답 ②

그래프에서 함수 $y=a\cos(x-b)+c$의 최댓값이 3, 최솟값이 -2이므로

$|a|+c=3, -|a|+c=-2$

두 식을 연립하면 $|a|=\dfrac{5}{2}$, $c=\dfrac{1}{2}$

그런데 $a>0$이므로 $a=\dfrac{5}{2}$, $c=\dfrac{1}{2}$이다.

또한, $y=\dfrac{5}{2}\cos(x-b)+\dfrac{1}{2}$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{\pi}{5}, 3\right)$을 지나므로 대입하면 $3=\dfrac{5}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{5}-b\right)+\dfrac{1}{2}$에서

$\dfrac{5}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{5}-b\right)=\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore \cos\left(\dfrac{\pi}{5}-b\right)=1$

이때, $0<b<2\pi$에서 $-\dfrac{9}{5}\pi<\dfrac{\pi}{5}-b<\dfrac{\pi}{5}$이므로

$\dfrac{\pi}{5}-b=0$ $\quad\therefore b=\dfrac{\pi}{5}$

$\therefore abc=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\pi}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

42 답 ⑤

그래프에서 $y=a\tan(bx-c\pi)+d$의 주기는

$\dfrac{5}{4}\pi-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{2}\pi$이므로 $\dfrac{\pi}{|b|}=\dfrac{3}{2}\pi$에서 $|b|=\dfrac{2}{3}$

그런데 $b>0$이므로 $b=\dfrac{2}{3}$이다.

따라서 주어진 함수는

$y=a\tan\left(\dfrac{2}{3}x-c\pi\right)+d=a\tan\dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}c\pi\right)+d$

한편, 이 함수의 그래프는 $y=a\tan\dfrac{2}{3}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{3}{2}c\pi$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것인데 주어진 그래프에서 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것을 알 수 있다.

따라서 $\dfrac{3}{2}c\pi=\dfrac{\pi}{4}$에서 $c=\dfrac{1}{6}$, $d=2$이다.

이때, 주어진 그래프가 점 $\left(\dfrac{5}{4}\pi, 0\right)$을 지나므로 대입하면

$0=a\tan\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{5}{4}\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)+2$, $a\tan\dfrac{2}{3}\pi=-2$

$-\sqrt{3}a=-2$ $\quad\therefore a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore abcd=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{6}\times2=\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$

43 답 ③

$y=\dfrac{\sin^2 x+1}{\sin x}$에서 $\sin x=t$라 하면

$y=\dfrac{t^2+1}{t}=t+\dfrac{1}{t}$ $\cdots$ ㉠

한편, $0<x<\pi$에서 $0<\sin x\le1$이므로 $0<t\le1$

즉, $t>0$, $\dfrac{1}{t}>0$이므로 ㉠에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=\dfrac{\sin^2 x+1}{\sin x}=t+\dfrac{1}{t}\ge2\sqrt{t\times\dfrac{1}{t}}=2$

(단, 등호는 $t=1$일 때 성립)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 2이다.

44 답 ①

$y=\sin^2 x+4\cos x+a$

$=(1-\cos^2 x)+4\cos x+a$ ($\because \sin^2 x+\cos^2 x=1$)

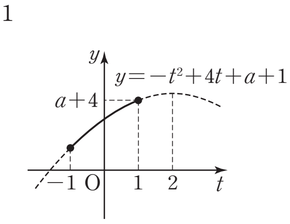
$=-\cos^2 x+4\cos x+a+1$

이때, $\cos x=t$라 하면

$-1\le t\le1$이고

$y=-t^2+4t+a+1$

$=-(t-2)^2+a+5$



따라서 최댓값은 $t=1$일 때

$a+4$이므로 $a+4=5$에서 $a=1$

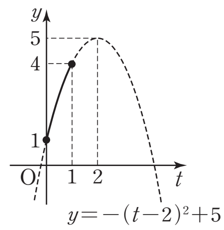
45 답 ②

$y=4\sin x+\cos^2 x$

$=4\sin x+(1-\sin^2 x)$ ($\because \sin^2 x+\cos^2 x=1$)

$=-\sin^2 x+4\sin x+1$

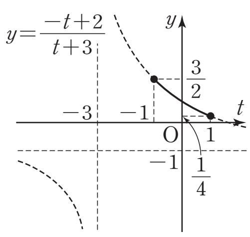
이때, $\sin x=t$라 하면 $0\le x\le\pi$에서 $0\le t\le 1$이고
$y=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$
따라서 주어진 함수는 $t=1$일 때 최댓값 4를, $t=0$일 때 최솟값 1을 가지므로 $M=4$, $m=1$
$\therefore Mm=4\times1=4$



46 답 ④

$y=\dfrac{-\sin x+2}{\sin x+3}$에서 $\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=\dfrac{-t+2}{t+3}=\dfrac{-(t+3)+5}{t+3}=\dfrac{5}{t+3}-1$



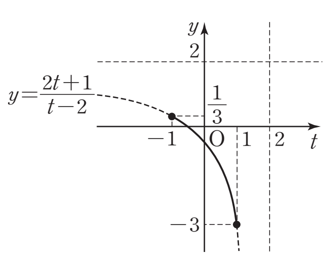
따라서 주어진 함수는 $t=-1$일 때 최댓값 $\dfrac{3}{2}$을, $t=1$일 때 최솟값 $\dfrac{1}{4}$을 가지므로 $M=\dfrac{3}{2}$, $m=\dfrac{1}{4}$

$\therefore M+m=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$

47 답 ⑤

$y=\dfrac{2\cos x+1}{\cos x-2}$에서 $\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=\dfrac{2t+1}{t-2}=\dfrac{2(t-2)+5}{t-2}=\dfrac{5}{t-2}+2$



따라서 주어진 함수는 $t=-1$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{3}$을, $t=1$일 때 최솟값 -3을 가지므로 $M=\dfrac{1}{3}$, $m=-3$

$\therefore M-m=\dfrac{1}{3}-(-3)=\dfrac{10}{3}$

심플 정리

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\ne0)$의 그래프

(1) 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
(2) 점 (p, q)와 직선 $y=\pm(x-p)+q$에 대하여 대칭이다.
(3) 점근선은 직선 $x=p$, $y=q$이다.

Simple M 삼각방정식과 삼각부등식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 96~97

01 답 삼각방정식

02 답 $y=a$, x

03 답 삼각부등식

04 답 $y=a$, 아래

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ○

09 답 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}\pi$

10 답 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

11 답 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{7}{6}\pi$

12 답 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

13 답 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$

14 답 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\dfrac{7}{4}\pi$

15 답 $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$

16 답 $0\le x<\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{11}{6}\pi<x<2\pi$

17 답 $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{4}{3}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

18 답 $0\le x\le\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $\dfrac{11}{6}\pi\le x<2\pi$

19 답 $\dfrac{5}{6}\pi\le x\le\dfrac{7}{6}\pi$

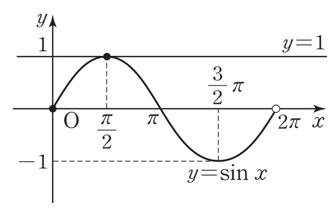
20 답 $\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $\dfrac{3}{2}\pi<x\le\dfrac{5}{3}\pi$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 98 ~ 101

21 답 ④

그림과 같이 $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{2}$이다.



따라서 방정식 $\sin x=1$의 해는 $x=\frac{\pi}{2}$

심플 정리

[방정식과 함수의 그래프]

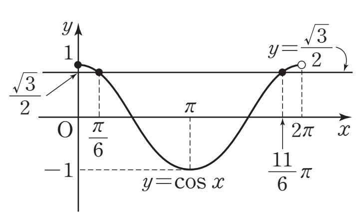
(1) 방정식 $f(x)=0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축(직선 $y=0$)의 교점의 x좌표와 같다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

22 답 ⑤

$2\cos x-\sqrt{3}=0$에서 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

그림과 같이 $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{6}\pi$이다.

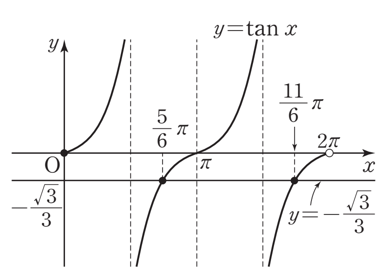


따라서 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$이므로 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{6}+\frac{11}{6}\pi=2\pi$이다.

23 답 ④

$3\tan x+\sqrt{3}=0$에서 $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

그림과 같이 $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표는 $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이다.

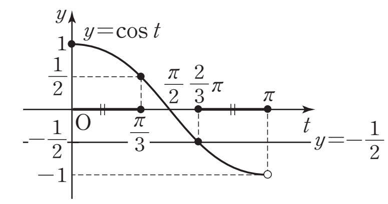


따라서 구하는 해는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$이다.

24 답 ②

$\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$에서 $\frac{x}{2}=t$로 치환하면 $0 \le x < 2\pi$에서

$0 \le \frac{x}{2} < \pi$이므로 $0 \le t < \pi$이고 $\cos t=-\frac{1}{2}$ … ㉠



이때, 그림과 같이 $0 \le t < \pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표는 $t=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이므로 방정식 ㉠의 해는 $t=\frac{2}{3}\pi$이다.

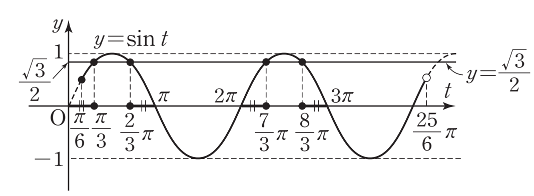
그런데 $t=\frac{x}{2}$이므로 구하는 해는 $\frac{x}{2}=\frac{2}{3}\pi$에서 $x=\frac{4}{3}\pi$

25 답 ③

$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$에서 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x+\frac{\pi}{6}=t$로 치환하면 $0 \le x < 2\pi$에서

$\frac{\pi}{6} \le t=2x+\frac{\pi}{6} < \frac{25}{6}\pi$이고 $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ … ㉠



이때, 그림과 같이 $\frac{\pi}{6} \le t < \frac{25}{6}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 t좌표는

$t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $t=2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7}{3}\pi$

또는 $t=3\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$이므로 방정식 ㉠의 해는

$t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{7}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{8}{3}\pi$이다.

그런데 $t=2x+\frac{\pi}{6}$이므로

$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$에서 $x=\frac{\pi}{12}$

$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$에서 $x=\frac{\pi}{4}$

$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{3}\pi$에서 $x=\frac{13}{12}\pi$

$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{8}{3}\pi$에서 $x=\frac{5}{4}\pi$

따라서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

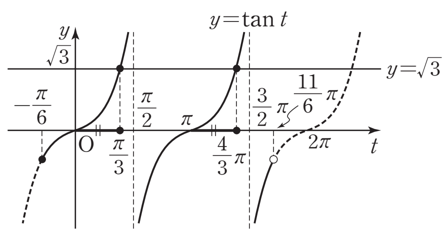
$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\frac{13}{12}\pi+\frac{5}{4}\pi=\frac{8}{3}\pi$이다.

26 답 ⑤

$\sqrt{3}\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=3$에서 $\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

$x-\frac{\pi}{6}=t$로 치환하면 $0\le x<2\pi$에서

$-\frac{\pi}{6}\le t=x-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$이고 $\tan t=\sqrt{3}$ ⋯ ㉠



이때, 그림과 같이 $-\frac{\pi}{6}\le t<\frac{11}{6}\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 t좌표는

$t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$이므로 방정식 ㉠의 해는

$t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{4}{3}\pi$이다.

그런데 $t=x-\frac{\pi}{6}$이므로

$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$에서 $x=\frac{\pi}{2}$, $x-\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$에서 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$ $(\because\ \alpha<\beta)$이므로

$\beta-\alpha=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=\pi$

27 답 ①

$\pi\sin x=t$로 치환하면 $0\le x<\pi$에서

$0\le\sin x\le1$이므로 $0\le t=\pi\sin x\le\pi$

즉, $\cos(\pi\sin x)=0$에서 $\cos t=0$ $\quad\therefore\ t=\frac{\pi}{2}$

그런데 $t=\pi\sin x$이므로 $\pi\sin x=\frac{\pi}{2}$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$

28 답 ①

$2\sin^2x-\sin x-1=0$에서

$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

$\therefore\ \sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

$0\le x<2\pi$에서

$\sin x=-\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

$\sin x=1$일 때, $x=\frac{\pi}{2}$

따라서 구하는 해는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

29 답 ②

$\cos x=-\sqrt{3}\sin x$에서

$\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $0\le x<2\pi$에서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

30 답 ③

$\tan x=2\sin x$에서 $\frac{\sin x}{\cos x}=2\sin x$

$\sin x=2\sin x\cos x$

$2\sin x\cos x-\sin x=0$

$\sin x(2\cos x-1)=0$

$\therefore\ \sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서

$\sin x=0$일 때, $x=0$ 또는 $x=\pi$

$\cos x=\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 해의 합은

$0+\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi+\pi=3\pi$

31 답 ②

$\sin^2x+\cos^2x=1$, 즉 $\sin^2x=1-\cos^2x$를 주어진 방정식 $2\sin^2x-5\cos x+1=0$에 대입하면

$2(1-\cos^2x)-5\cos x+1=0$

$2\cos^2x+5\cos x-3=0$

$(2\cos x-1)(\cos x+3)=0$

$\therefore\ \cos x=\frac{1}{2}$ $(\because\ -1\le\cos x\le1)$

따라서 $0\le x<2\pi$에서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

32 답 ①

$\sin^2x+\cos^2x=1$, 즉 $\sin^2x=1-\cos^2x$를 주어진 방정식 $2\sin^2x+3\cos x=0$에 대입하면

$2(1-\cos^2x)+3\cos x=0$

$2\cos^2x-3\cos x-2=0$

$(2\cos x+1)(\cos x-2)=0$

$\therefore\ \cos x=-\frac{1}{2}$ $(\because\ -1\le\cos x\le1)$

따라서 $0\le x<2\pi$에서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=2\pi$

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin2\pi=0$

답_074089_심플자이 수1(K~M)-삼.indd 83 2018. 5. 2. 오후 8:07

33 답 ③

$\sin x+1=2\cos x$에서 $\sin x=2\cos x-1$

이것을 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ⋯ ㉠에 대입하면

$(2\cos x-1)^2+\cos^2 x=1$, $5\cos^2 x-4\cos x=0$

$\cos x(5\cos x-4)=0$

$\therefore \cos x=0$ 또는 $\cos x=\frac{4}{5}$

그런데 $0<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos x=\frac{4}{5}$이다.

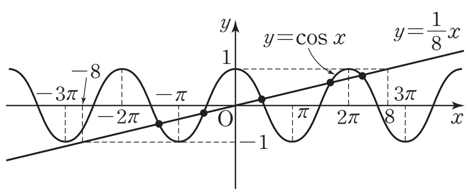
이것을 ㉠에 대입하면 $\sin^2 x+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$에서

$\sin^2 x=\frac{9}{25}$ $\qquad \therefore \sin x=\frac{3}{5}\ \left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

34 답 ⑤

방정식 $\cos x=\frac{1}{8}x$의 실근의 개수는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}x$의 교점의 개수와 같다.

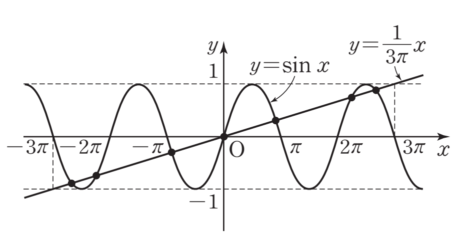


이때, 직선 $y=\frac{1}{8}x$는 두 점 $(-8,\ -1)$, $(8,\ 1)$을 지나므로 그림과 같이 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}x$의 교점의 개수는 5이다.

따라서 주어진 방정식의 실근의 개수는 5이다.

35 답 ⑤

방정식 $\sin x=\frac{1}{3\pi}x$의 실근의 개수는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3\pi}x$의 교점의 개수와 같다.

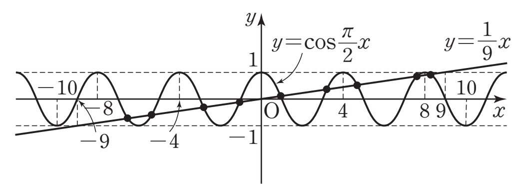


이때, 직선 $y=\frac{1}{3\pi}x$는 두 점 $(-3\pi,\ -1)$, $(3\pi,\ 1)$을 지나므로 그림과 같이 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3\pi}x$의 교점의 개수는 7이다.

따라서 주어진 방정식의 실근의 개수는 7이다.

36 답 ④

방정식 $\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{9}x$의 실근의 개수는 함수 $y=\cos\frac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{9}x$의 교점의 개수와 같다.

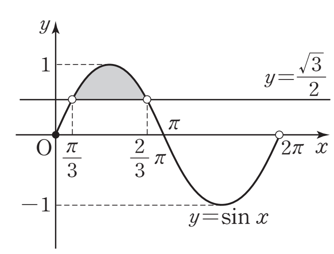


이때, $y=\cos\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이고 직선 $y=\frac{1}{9}x$는 두 점 $(-9,\ -1)$, $(9,\ 1)$을 지나므로 그림과 같이 함수 $y=\cos\frac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{9}x$의 교점의 개수는 9이다.

따라서 주어진 방정식의 실근의 개수는 9이다.

37 답 ②

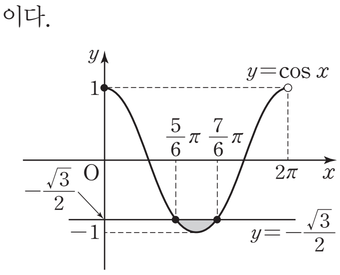
부등식 $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 위쪽(경계선 제외)에 있는 x의 값의 범위이다.



이때, 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$이므로 주어진 부등식의 해는 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{3}\pi$이다.

38 답 ②

부등식 $\cos x\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 아래쪽(경계선 포함)에 있는 x의 값의 범위이다.



이때, 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$이므로

주어진 부등식의 해는 $\frac{5}{6}\pi\le x\le\frac{7}{6}\pi$이다.

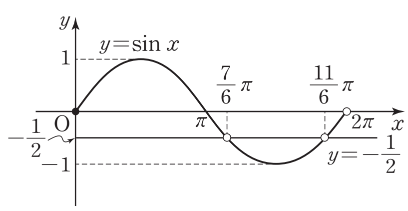
따라서 $\alpha=\frac{5}{6}\pi$, $\beta=\frac{7}{6}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{7}{6}\pi-\frac{5}{6}\pi=\frac{\pi}{3}$

39 답 ④

$2\sin x+1<0$에서 $\sin x<-\frac{1}{2}$

즉, 주어진 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 아래쪽(경계선 제외)에 있는 x의 값의 범위이다.



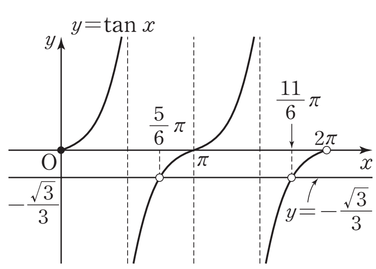
이때, 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이므로

주어진 부등식의 해는 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$이다.

40 답 ⑤

$\sqrt{3}\tan x<-1$에서 $\tan x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$

즉, 주어진 부등식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$보다 아래쪽(경계선 제외)에 있는 x의 값의 범위이다.



이때, 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표가 $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이므로

주어진 부등식의 해는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$이다.

따라서 $\alpha=\frac{5}{6}\pi$, $\beta=\frac{11}{6}\pi$이므로

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi\right)=\sin\frac{8}{3}\pi=\sin\frac{2}{3}\pi$

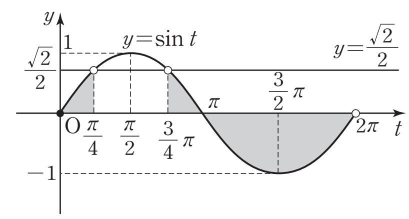
$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

41 답 ④

$\sin 2x<\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $2x=t$로 치환하면

$0\le x<\pi$에서 $0\le t=2x<2\pi$이고 $\sin t<\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⋯ ㉠

부등식 ㉠의 해는 함수 $y=\sin t$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽(경계선 제외)에 있는 t의 값의 범위이다.



이때, 그림과 같이 $0\le t<2\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 t좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$이므로 부등식 ㉠의 해는 $0\le t<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi<t<2\pi$이다.

그런데 $t=2x$이므로

$0\le t<\frac{\pi}{4}$에서 $0\le 2x<\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore 0\le x<\frac{\pi}{8}$

$\frac{3}{4}\pi<t<2\pi$에서 $\frac{3}{4}\pi<2x<2\pi$ $\quad\therefore \frac{3}{8}\pi<x<\pi$

따라서 주어진 부등식의 해는 $0\le x<\frac{\pi}{8}$ 또는 $\frac{3}{8}\pi<x<\pi$이다.

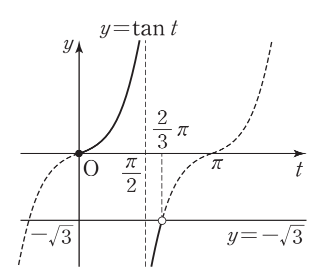
Ⅱ M

42 답 ①

$\tan\frac{x}{3}>-\sqrt{3}$에서 $\frac{x}{3}=t$로 치환하면

$0\le x<2\pi$에서 $0\le t=\frac{x}{3}<\frac{2}{3}\pi$이고 $\tan t>-\sqrt{3}$ ⋯ ㉠

부등식 ㉠의 해는 함수 $y=\tan t$의 그래프가 직선 $y=-\sqrt{3}$보다 위쪽(경계선 제외)에 있는 t의 값의 범위이다.



따라서 그림에 의하여 부등식 ㉠의 해는 $0\le t<\frac{\pi}{2}$이다.

그런데 $t=\frac{x}{3}$이므로 주어진 부등식의 해는 $0\le t<\frac{\pi}{2}$에서

$0\le\frac{x}{3}<\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore 0\le x<\frac{3}{2}\pi$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로

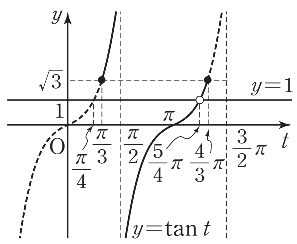
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(0+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$

43 답 ④

$\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<1$에서 $x+\frac{\pi}{3}=t$로 치환하면

$0\le x\le\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le t=x+\frac{\pi}{3}\le\frac{4}{3}\pi$이고 $\tan t<1$ … ㉠

부등식 ㉠의 해는 함수 $y=\tan t$의 그래프가 직선 $y=1$보다 아래쪽(경계선 제외)에 있는 t의 값의 범위이다.



이때, 그림과 같이 $\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{4}{3}\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 t좌표는 $\frac{5}{4}\pi$이므로 부등식 ㉠의 해는 $\frac{\pi}{2}<t<\frac{5}{4}\pi$이다.

그런데 $t=x+\frac{\pi}{3}$이므로 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{2}<t<\frac{5}{4}\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{3}<\frac{5}{4}\pi$　　$\therefore\ \frac{\pi}{6}<x<\frac{11}{12}\pi$

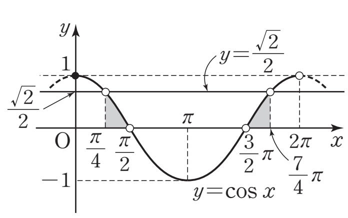
따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{11}{12}\pi$이므로 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}+\frac{11}{12}\pi=\frac{13}{12}\pi$

44 답 ②

$\sqrt{2}\cos^2x<\cos x$에서 $\sqrt{2}\cos^2x-\cos x<0$

$\cos x(\sqrt{2}\cos x-1)<0$　　$\therefore\ 0<\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ … ㉠

부등식 ㉠의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=0$보다 위쪽(경계선 제외)에 있고 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽(경계선 제외)에 있는 x의 값의 범위이다.



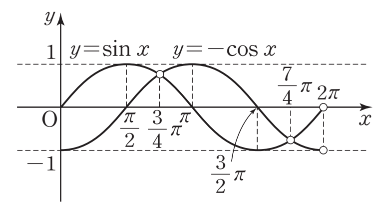
이때, 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이므로 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

45 답 ③

$\sin x+\cos x<0$에서 $\sin x<-\cos x$

즉, 주어진 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 함수 $y=-\cos x$의 그래프의 아래쪽(경계선 제외)에 있는 x의 값의 범위이다.



이때, 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=-\cos x$의 그래프의 교점의 x좌표는 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이므로 주어진 부등식의 해는 $\frac{3}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$이다.

따라서 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$, $\beta=\frac{7}{4}\pi$이므로

$\tan(\beta-\alpha)=\tan\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=\tan\pi=0$

46 답 ②

$\sin^2x+\cos^2x=1$, 즉 $\cos^2x=1-\sin^2x$를 주어진 부등식 $2\cos^2x-3\sin x<0$에 대입하면

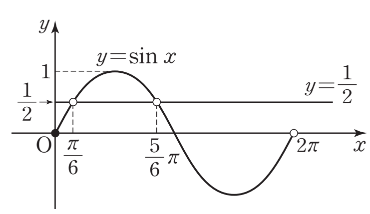
$2(1-\sin^2x)-3\sin x<0$

$2\sin^2x+3\sin x-2>0$, $(2\sin x-1)(\sin x+2)>0$

그런데 $\sin x+2>0$이므로 $2\sin x-1>0$에서

$\sin x>\frac{1}{2}$ … ㉠

부등식 ㉠의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽(경계선 제외)에 있는 x의 값의 범위이다.



이때, 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로 주어진 부등식의 해는 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$이다.

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

47 답 ②

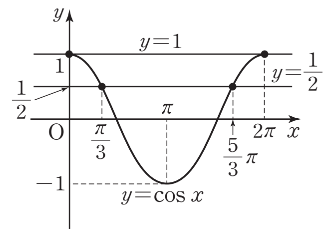
$\sin^2x+\cos^2x=1$, 즉 $\sin^2x=1-\cos^2x$를 주어진 부등식 $2\sin^2x+3\cos x-3\ge0$에 대입하면

$2(1-\cos^2x)+3\cos x-3\ge0$

$2\cos^2x-3\cos x+1\le0$, $(2\cos x-1)(\cos x-1)\le0$

$\therefore\ \frac{1}{2}\le\cos x\le1$ … ㉠

부등식 ㉠의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽(경계선 포함)에 있고 직선 $y=1$보다 아래쪽(경계선 포함)에 있는 x의 값의 범위이다.



이때, 그림과 같이 $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 두 직선 $y=\frac{1}{2}$, $y=1$의 교점의 x좌표는 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$, 2π이므로 주어진 부등식의 해는

$0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x\le 2\pi$이다.

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

48 답 ⑤

주어진 부등식이 항상 성립하려면 방정식

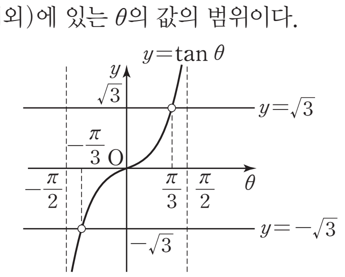
$3x^2-2x\tan\theta+1=0$이 허근을 가져야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로 $\frac{D}{4}=\tan^2\theta-3<0$에서

$(\tan\theta+\sqrt{3})(\tan\theta-\sqrt{3})<0$

$\therefore\ -\sqrt{3}<\tan\theta<\sqrt{3}$ ⋯ ㉠

부등식 ㉠의 해는 함수 $y=\tan\theta$의 그래프가 직선 $y=-\sqrt{3}$보다 위쪽(경계선 제외)에 있고 직선 $y=\sqrt{3}$보다 아래쪽(경계선 제외)에 있는 θ의 값의 범위이다.



이때, 그림과 같이 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\tan\theta$의 그래프와 두 직선 $y=-\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$의 교점의 θ좌표는 $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$이므로 부등식 ㉠의 해는 $-\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{3}$이다.

심플 정리

[이차부등식이 항상 성립할 조건]

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0\,(a>0)$이 성립하려면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나지 않아야 한다. 즉, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 존재하지 않아야 하므로 $b^2-4ac<0$을 만족시켜야 한다.

연습 문제[K~M] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 102~103

01 답 ⑤

ㄱ. 함수 $y=\tan x$는 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$(n은 정수)일 때는 정의되지 않으며 함수 $y=\tan x$의 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$(n은 정수)이다. (참)

ㄴ. $\sin(-x)=-\sin x$이므로 $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $\cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$
$=\sin x$

이므로 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)$는 서로 같은 함수이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

02 답 A 또는 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$이고 $y=\cos x$의 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$이므로 $A=\{y\mid -1\le y\le 1\}$

또, $y=2\tan x$의 치역은 $y=\tan x$의 치역과 일치하므로 $B=\{y\mid y$는 모든 실수$\}$

따라서 $A\subset B$이므로 $A\cap B=A=\{y\mid -1\le y\le 1\}$

03 답 ⑤

> 다음 함수 중 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$을 만족시키는 것은?
>
> ① $f(x)=\sin 2x$ ② $f(x)=\cos\sqrt{3}x$
>
> ③ $f(x)=\sin\pi x$ ④ $f(x)=\tan\sqrt{3}x$
>
> ⑤ $f(x)=\cos\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi x$
>
> $f(x)=f(x+p)$를 만족시키는 함수는 주기가 p인 주기함수야.

1st 주어진 조건식이 의미하는 것을 찾아.

$f(x)=f(x+\sqrt{3})$은 주기가 $\sqrt{3}$인 주기함수를 의미한다.

2nd 각 함수의 주기를 구하자.

① $f(x)=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

$y=a\sin(bx+c)+d$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$

② $f(x)=\cos\sqrt{3}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

$y=a\cos(bx+c)+d$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$

③ $f(x)=\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

④ $f(x)=\tan\sqrt{3}x$의 주기는 $\frac{\pi}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

$y=a\tan(bx+c)+d$의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$

⑤ $f(x)=\cos\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}=\sqrt{3}$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$을 만족시키는 함수는 ⑤이다.

04 답 ③

① 함수 $y=\sin|x|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 그런데 함수 $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프는 일치하지 않는다.

② $y=\sin|x|$의 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$이고, $y=|\sin x|$의 치역은 $\{y|0\le y\le 1\}$이므로 두 함수의 그래프는 일치하지 않는다.

③ $x\ge 0$일 때, $y=\cos|x|=\cos x$이고,
$x<0$일 때, $y=\cos|x|=\cos(-x)=\cos x$이므로
두 함수의 그래프는 일치한다.

④ $y=|\cos x|$의 치역은 $\{y|0\le y\le 1\}$이고, $y=\cos x$의 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$이므로 두 함수의 그래프는 일치하지 않는다.

⑤ $y=\tan x$의 치역은 실수 전체 집합이고, $y=|\tan x|$의 치역은 $\{y|y\ge 0\}$이므로 두 함수의 그래프는 일치하지 않는다.

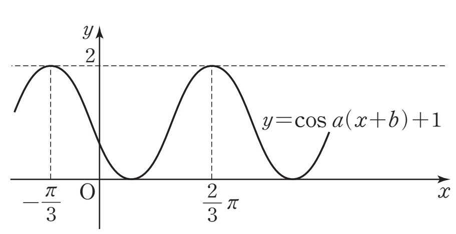
05 답 9

$f(x)=a\sin bx+c\,(a>0,\ b>0)$의 최댓값은 5, 최솟값은 -1이므로 $a+c=5,\ -a+c=-1$이다.
두 식을 연립하면 $a=3,\ c=2$
또한, 함수 $f(x)$의 주기가 π이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$에서 $b=2$
$\therefore\ a+b+2c=3+2+2\times 2=9$

TIP
함수 $y=a\sin(bx+c)+d$의 최댓값은 $|a|+d$,
최솟값은 $-|a|+d$이고 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이다.
즉, 최댓값과 최솟값은 a, d에 의하여 결정되고, 주기는 b에 의하여 결정된다.

06 답 ①

그림은 함수 $y=\cos a(x+b)+1$의 그래프이다. 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?
(단, $a>0$, $0<b<\pi$이고, O는 원점이다.)



① $\frac{2}{3}\pi$ ② π ③ $\frac{4}{3}\pi$
④ $\frac{5}{3}\pi$ ⑤ 2π

주어진 함수의 그래프는 $y=\cos ax$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 거야.

1st 주어진 그래프의 주기를 이용하여 a의 값을 구하자.

주어진 그래프에서 주기가 $\frac{2}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$이다.
이때, 양수 a에 대하여 $y=\cos ax$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$이고
$y=\cos a(x+b)+1$의 그래프는 $y=\cos ax$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이므로 $y=\cos a(x+b)+1$의 주기도 $\frac{2\pi}{a}$이다.
즉, $\frac{2\pi}{a}=\pi$에서 $a=2$

2nd 평행이동을 이용하여 b의 값을 구하자.

또한, 주어진 그래프는 $y=\cos 2x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로 주어진 그래프의 식은 $y=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$이다.

$y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=f(x-m)+n$이야.

즉, $b=\frac{\pi}{3}$이므로 $ab=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

07 답 9

$y=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-3\cos^2 x+4\sin(\pi-x)$
$=\sin^2 x-3\cos^2 x+4\sin x$
$=\sin^2 x-3(1-\sin^2 x)+4\sin x$
$=4\sin^2 x+4\sin x-3$ ⋯ Ⅰ
이때, $\sin x=t\,(-1\le t\le 1)$이라 하면
$y=4t^2+4t-3=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-4$
따라서 주어진 함수는 $t=1$에서 최댓값 5, $t=-\frac{1}{2}$에서 최솟값 -4를 갖는다. ⋯ Ⅱ
따라서 $M=5$, $m=-4$이므로
$M-m=5-(-4)=9$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 함수를 $\sin x$에 대한 식으로 나타낸다.	40%
Ⅱ	$\sin x=t$로 치환하여 이차함수로 나타낸 다음 제한된 범위에서의 최댓값과 최솟값을 구한다.	40%
Ⅲ	$M-m$의 값을 구한다.	20%

08 답 ⑤

$2\cos^2 x+3\sin x=0$에서
$2(1-\sin^2 x)+3\sin x=0\ (\because\ \sin^2 x+\cos^2 x=1)$
$2\sin^2 x-3\sin x-2=0$
$(2\sin x+1)(\sin x-2)=0$
$\therefore\ \sin x=-\frac{1}{2}\ (\because\ -1\le\sin x\le 1)$
따라서 $0\le x<2\pi$에서 주어진 방정식의 해는
$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

09 답 ②

어떤 건물의 난방기에는 자동 온도 조절 장치가 있어서 실내 온도가 2시간 주기로 변한다. 이 난방기의 온도를 B(℃)로 설정하였을 때, 가동한 지 t분 후의 실내 온도는 T(℃)가 되어 다음 식이 성립한다고 한다.

$$T=B-\frac{k}{6}\cos\frac{\pi}{60}t \text{ (단, } B, k\text{는 양의 상수이다.)}$$

이 난방기를 가동한 지 20분 후의 실내 온도가 18 ℃이었고, 40분 후의 실내 온도가 20 ℃이었다. k의 값은? 시간을 나타내는 문자는 t이고 온도를 나타내는 문자는 T임을 기억해.

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

1st $t=20$, $T=18$, $t=40$, $T=20$을 대입하여 k의 값을 구해.

20분 후의 실내 온도가 18 ℃이므로

$t=20$, $T=18$을 조건식에 대입하면

$$B-\frac{k}{6}\cos\left(\frac{\pi}{60}\times20\right)=B-\frac{k}{6}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=B-\frac{k}{12}=18$$

시간은 소문자 t이고, 온도는 대문자 T에 해당하므로 정확히 확인하고 대입해야 해.

40분 후의 실내 온도가 20 ℃이므로

$t=40$, $T=20$을 조건식에 대입하면

$$B-\frac{k}{6}\cos\left(\frac{\pi}{60}\times40\right)=B-\frac{k}{6}\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$=B+\frac{k}{12}=20$$

$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

두 식을 연립하면 $k=12$

10 답 ②

방정식 $\sin^2x+\cos x-2a=0$이 실근을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위는? 방정식 $f(x)=0$이 실근을 가지면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나.

① $-1\le a\le\frac{3}{8}$　② $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{5}{8}$

③ $0\le a\le\frac{2}{3}$　④ $0\le a\le\frac{7}{8}$

⑤ $\frac{1}{2}\le a\le\frac{9}{8}$

1st 함수의 그래프와 방정식 사이의 관계를 생각해.

$\sin^2x+\cos x-2a=0$에서

$1-\cos^2x+\cos x-2a=0$ ($\because$ $\sin^2x+\cos^2x=1$)

$-\cos^2x+\cos x-2a+1=0$

이때, $\cos x=t$ $(-1\le t\le1)$라 하면

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=\cos x$의 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le1\}$이야.

$-t^2+t-2a+1=0$이고

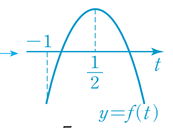
$f(t)=-t^2+t-2a+1$

$$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-2a+\frac{5}{4}$$

함수 $y=f(t)$의 그래프는 점 $\left(\frac{1}{2}, -2a+\frac{5}{4}\right)$를 꼭짓점으로 하고 위로 볼록한 곡선이야.

라 하면 방정식 $f(t)=0$은 $-1\le t\le1$에서 실근을 가지므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)\ge0$, $f(-1)\le0$ 또는 $f\left(\frac{1}{2}\right)\ge0$, $f(1)\le0$이어야 한다.

(ⅰ) $f\left(\frac{1}{2}\right)\ge0$, $f(-1)\le0$일 때,

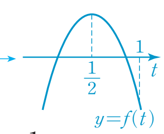


$f\left(\frac{1}{2}\right)\ge0$에서 $-2a+\frac{5}{4}\ge0$　$\therefore$ $a\le\frac{5}{8}$

$f(-1)\le0$에서 $-2a-1\le0$　$\therefore$ $a\ge-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{5}{8}$

(ⅱ) $f\left(\frac{1}{2}\right)\ge0$, $f(1)\le0$일 때,



$f\left(\frac{1}{2}\right)\ge0$에서 $a\le\frac{5}{8}$

$f(1)\le0$에서 $-2a+1\le0$　$\therefore$ $a\ge\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\frac{1}{2}\le a\le\frac{5}{8}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{5}{8}$

11 답 ②

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\cos x<1$이므로 주어진 부등식의 양변을 $\sqrt{3}\cos x$로 나누면 $\sqrt{3}\sin x>\cos x$에서

$\frac{\sin x}{\cos x}>\frac{1}{\sqrt{3}}$　$\therefore$ $\tan x>\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 주어진 부등식의 해는 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$이므로

$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore\ 2(\sin\alpha+\cos\beta)=2\left(\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}+0\right)=1$$

12 답 ①

(ⅰ) $2\sin x+\sqrt{2}<0$에서 $\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⋯ ㉠

이때, $0\le x<2\pi$에서 부등식 ㉠의 해는

$\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

(ⅱ) $2\cos x\ge1$에서 $\cos x\ge\frac{1}{2}$ ⋯ ㉡

이때, $0\le x<2\pi$에서 부등식 ㉡의 해는

$0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$

(ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$\frac{5}{3}\pi\le x<\frac{7}{4}\pi$이므로

$\alpha=\frac{5}{3}\pi$, $\beta=\frac{7}{4}\pi$

$$\therefore\ 12(\beta-\alpha)=12\times\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{5}{3}\pi\right)=\pi$$

답_074089_심플자이 수1(K~M)-삼.indd 89　2018. 5. 2. 오후 8:07

13 답 ⑤

부등식 $2\cos^2 x-3\sin x+7-k\le 0$에서

$2(1-\sin^2 x)-3\sin x+7-k\le 0$ ($\because \sin^2 x+\cos^2 x=1$)

$2\sin^2 x+3\sin x-9+k\ge 0$

이때, $\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$2t^2+3t-9+k\ge 0$

또, $f(t)=2t^2+3t-9+k=2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{81}{8}+k$라 하면

모든 실수 x에 대하여 부등식

$2\cos^2 x-3\sin x+7-k\le 0$이 성립하기 위해서는

$-1\le t\le 1$에서 $f(t)$의 최솟값인

$f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{81}{8}+k$가 0보다 크거나 같아야 한다.

즉, $-\frac{81}{8}+k\ge 0$에서 $k\ge\frac{81}{8}=10.125$

따라서 자연수 k의 최솟값은 11이다.

14 답 ⑤

함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+\pi)=f(x)$이다.
주기가 π인 주기함수야.

(나) $0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때, $f(x)=\sin 4x$

(다) $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$일 때, $f(x)=-\sin 4x$

이때, 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수는?

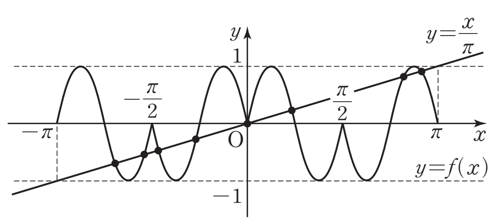
이 직선이 두 직선 $y=1$, $y=-1$과 만나는 두 점을 파악해야 해.

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

1st 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수를 구하자.

주기가 p인 함수 $f(x)$는 $f(x+p)=f(x)$를 만족해.

함수 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이고 직선 $y=\frac{x}{\pi}$는 두 점 $(\pi,\ 1)$, $(-\pi,\ -1)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$는 그림과 같다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수는 8이다.

제1사분면에서 세 점, 제3사분면에서 네 점, 그리고 원점에서 만나지?

Simple N 사인법칙과 코사인법칙

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 104~105

01 답 내접, a, $\sin B$, c, 사인법칙

02 답 사인법칙, 일정

03 답 코사인법칙, $\cos A$, c^2+a^2, c^2

04 답 ○

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 답 $R=3$, $a=3\sqrt{2}$

$B=30°$, $\overline{AC}=3$이므로 $2R=\frac{3}{\sin 30°}=6$ $\quad\therefore R=3$

즉, $\frac{a}{\sin 45°}=6$이므로 $a=3\sqrt{2}$

09 답 $R=4$, $a=4\sqrt{3}$

$C=\frac{\pi}{4}$, $\overline{AB}=4\sqrt{2}$이므로 $2R=\frac{4\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}=8$ $\quad\therefore R=4$

즉, $\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}=8$이므로 $a=4\sqrt{3}$

10 답 $A=30°$, $B=60°$, $C=90°$

11 답 $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

12 답 $1:\sqrt{3}:2$

13 답 $\sqrt{13}$

14 답 $\sqrt{10}$

15 답 13

16 답 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos C=-\frac{1}{2}$

17 답 $\cos A=\frac{9}{16}$, $\cos B=\frac{1}{8}$, $\cos C=\frac{3}{4}$

18 답 $\cos A=-\frac{1}{2}$, $\cos B=\frac{23}{26}$, $\cos C=\frac{11}{13}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 106~109

19 답 ⑤

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}$에서

$\frac{5}{\sin A}=\frac{4}{\sin 30°}$, $\frac{5}{\sin A}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$

$\therefore \sin A=\frac{5}{8}$

20 답 ③

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$에서

$\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=2R$, $\dfrac{4}{\frac{1}{2}}=2R$, $8=2R$

$\therefore R=4$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 4이다.

21 답 ②

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$에서

$\dfrac{1}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}=2R$이므로

$2R=\dfrac{1}{\sin 30^\circ}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore R=1$

즉, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}=2$이므로 $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때, $C>90^\circ$이므로 $C=120^\circ$이고

$A=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$

따라서 삼각형 ABC는 $A=B$인 이등변삼각형이므로

$a=\overline{BC}=\overline{AC}=1$

$\therefore a+R=1+1=2$

22 답 ③

사인법칙에 의하여 $\dfrac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{a}{\sin 60^\circ}$에서

$\dfrac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore a=6\sqrt{3}$

23 답 ③

사인법칙에 의하여 $\dfrac{3}{\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{6}{\sin B}=2R$에서

$\dfrac{3}{\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=6$이므로 $\sin B=1$, $R=3$이다.

즉, $B=\dfrac{\pi}{2}$이고 $A+B+C=\pi$이므로

$C=\pi-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{3}$

따라서 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\frac{\pi}{3}}=6$이므로

$\overline{AB}=6\times\sin\dfrac{\pi}{3}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{R}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

24 답 ③

정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면 정삼각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{\pi}{3}$이고 $R=3$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times3$에서 $a=6\times\sin\dfrac{\pi}{3}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

25 답 ④

사인법칙에 의하여 $\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}$에서

$\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}$ $\quad\therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore B=60^\circ$ 또는 $B=120^\circ$

26 답 ②

$\angle$ADC는 삼각형 ABD의 한 외각이므로

$\angle ABD+\angle BAD=\angle ADC$에서

$30^\circ+\angle BAD=45^\circ$ $\quad\therefore \angle BAD=15^\circ$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{20}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin 30^\circ}$이므로 $\overline{AD}=\dfrac{20\times\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ}=\dfrac{10}{\sin 15^\circ}$

이때, 직각삼각형 ADC에서 $\overline{AC}=\overline{AD}\sin 45^\circ$이므로

$\overline{AC}=\dfrac{10}{\sin 15^\circ}\times\sin 45^\circ=\dfrac{10}{\sin 15^\circ}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}$

다른 풀이

삼각형 ADC는 $\overline{AC}=\overline{CD}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AC}=\overline{CD}=a$라 하면 $\overline{AD}=\sqrt{2}a$

이때, 삼각형 ABD에서 $\angle BAD=15^\circ$이므로 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\sqrt{2}a}{\sin 30^\circ}=\dfrac{20}{\sin 15^\circ}$에서 $\sqrt{2}a=\dfrac{10}{\sin 15^\circ}$

$\therefore a=\dfrac{10}{\sin 15^\circ}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}$

따라서 선분 AC의 길이는 $\dfrac{5\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}$이다.

27 답 ⑤

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$이다.

이때, $a:b:c=2:3:4$이므로

$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4=1:\alpha:\beta$

따라서 $\alpha=\dfrac{3}{2}$, $\beta=2$이므로 $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}\times2=3$

28 답 ③

$(a+b):(b+c):(c+a)=4:5:6$이므로 양수 k에 대하여 $a+b=4k$, $b+c=5k$, $c+a=6k$라 하고 세 식을 연립하면

$a=\dfrac{5}{2}k$, $b=\dfrac{3}{2}k$, $c=\dfrac{7}{2}k$

따라서 사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=5:3:7$

Ⅱ N

29 답 ④

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 a, b, c라 하면

$a+b+c=16$

이때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로

사인법칙에 의하여

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2\times4}+\frac{b}{2\times4}+\frac{c}{2\times4}$$
$$=\frac{a+b+c}{8}=\frac{16}{8}=2$$

30 답 ①

$A+B+C=\pi$이고 $A:B:C=1:1:2$이므로

$A=\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$, $B=\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$, $C=\pi\times\frac{2}{4}=\frac{\pi}{2}$

따라서 사인법칙에 의하여

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$
$$=\sin\frac{\pi}{4}:\sin\frac{\pi}{4}:\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}:1=1:1:\sqrt{2}$$

31 답 ①

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이것을 주어진 등식 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$에 대입하면

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2$에서 $a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

32 답 ⑤

$\frac{\sin A}{3}=\frac{\sin B}{4}=\frac{\sin C}{5}$에서

$\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$

즉, 사인법칙에 의하여 삼각형 ABC의 세 변 a, b, c의 길이의 비는 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$이다.

따라서 $c^2=a^2+b^2$이 성립하므로 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

33 답 ①

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$

이것을 주어진 등식 $a\sin A=b\sin B$에 대입하면

$a\times\frac{a}{2R}=b\times\frac{b}{2R}$에서 $a^2=b^2$

이때, $a>0$, $b>0$이므로 $a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

34 답 ②

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$$
$$=(5\sqrt{2})^2+6^2-2\times5\sqrt{2}\times6\times\cos45^\circ$$
$$=50+36-60=26$$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{26}$ ($\because \overline{BC}>0$)

35 답 ①

코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\cos C$$
$$=3^2+(2\sqrt{2})^2-2\times3\times2\sqrt{2}\times\cos45^\circ$$
$$=9+8-12=5$$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{5}$ ($\because \overline{AB}>0$)

36 답 ③

코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$$
$$=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=9+16-12=13$$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{13}$ ($\because \overline{AC}>0$)

37 답 ⑤

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$$
$$=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=25+9+15=49$$

$\therefore \overline{BC}=7$ ($\because \overline{BC}>0$)

이때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{7}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{14}{\sqrt{3}}$ $\quad\therefore R=\frac{7}{\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\pi\times\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{49}{3}\pi$

38 답 ④

코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=\frac{8^2+7^2-13^2}{2\times8\times7}=-\frac{1}{2}$$

이때, A는 삼각형 ABC의 한 내각이므로

$0<A<\pi$ $\quad\therefore A=\frac{2}{3}\pi$

39 답 ⑤

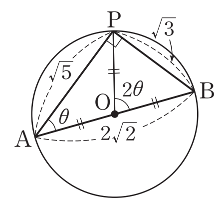
삼각형의 내각의 크기가 가장 작은 각의 대변의 길이는 최소인 3이다.

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\alpha=\frac{5^2+7^2-3^2}{2\times5\times7}=\frac{65}{70}=\frac{13}{14}$$

40 답 ③

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 APB에서 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{BP}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AP}^2}$

$=\sqrt{8-5}=\sqrt{3}$

이때, 선분 AB의 중점을 O라 하면 $\angle PAB=\theta$이므로 $\angle POB=\angle PAB+\angle APO=2\theta$이고 $\overline{OB}=\overline{OP}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 OBP에서 코사인법칙에 의하여

$\cos 2\theta=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{4}$

심플 정리

[원주각과 중심각의 관계]

(1) 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.

(2) 반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$이다. 즉, 원 위의 한 점과 지름의 양 끝점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 직각삼각형이다.

41 답 ⑤

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $3a\,(a>0)$라 하면

$\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{QC}=a$

삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AP}^2=\overline{AB}^2+\overline{BP}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BP}\times\cos B$

$=(3a)^2+a^2-2\times3a\times a\times\cos 60°=7a^2$

이때, $\overline{AP}>0$이고 두 삼각형 ABP, ACQ는 서로 합동이므로 $\overline{AP}=\overline{AQ}=\sqrt{7}a$이다.

따라서 삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-\overline{PQ}^2}{2\times\overline{AP}\times\overline{AQ}}$

$=\frac{(\sqrt{7}a)^2+(\sqrt{7}a)^2-a^2}{2\times\sqrt{7}a\times\sqrt{7}a}=\frac{13}{14}$

42 답 ③

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $3a\,(a>0)$라 하면

$\overline{BE}=\overline{DF}=a$, $\overline{CE}=\overline{CF}=2a$

직각삼각형 ABE에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AE}=\overline{AF}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$

또, 직각삼각형 ECF에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{EF}=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{2}a$

따라서 삼각형 AEF에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{\overline{AE}^2+\overline{AF}^2-\overline{EF}^2}{2\times\overline{AE}\times\overline{AF}}$

$=\frac{(\sqrt{10}a)^2+(\sqrt{10}a)^2-(2\sqrt{2}a)^2}{2\times\sqrt{10}a\times\sqrt{10}a}=\frac{3}{5}$

43 답 ③

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $2a\,(a>0)$라 하면

$\overline{BM}=\overline{CM}=\overline{CN}=\overline{DN}=a$

즉, 두 직각삼각형 ABM, ADN에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AM}=\overline{AN}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$

또, 직각삼각형 MCN에서 $\overline{MN}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

따라서 삼각형 AMN에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{\overline{AM}^2+\overline{AN}^2-\overline{MN}^2}{2\times\overline{AM}\times\overline{AN}}$

$=\frac{(\sqrt{5}a)^2+(\sqrt{5}a)^2-(\sqrt{2}a)^2}{2\times\sqrt{5}a\times\sqrt{5}a}=\frac{4}{5}$

한편, $0<\theta<90°$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$이다.

44 답 ④

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$을 주어진 등식 $a\cos C=c\cos A$에 대입하면

$a\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$에서 $2a^2=2c^2$

이때, $a>0$, $c>0$이므로 $a=c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

45 답 ④

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$을 주어진 등식 $a\cos A=b\cos B$에 대입하면

$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$에서

$a^2\times(b^2+c^2-a^2)=b^2\times(c^2+a^2-b^2)$

$a^2c^2-a^4=b^2c^2-b^4$, $c^2(a^2-b^2)-(a^4-b^4)=0$

$c^2(a^2-b^2)-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$

$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$

$(a+b)(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

$\therefore a=b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

46 답 ⑤

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이고

코사인법칙에 의하여 $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이다.

이것을 $\sin A=2\cos B\sin C$에 대입하면

$\frac{a}{2R}=2\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\times\frac{c}{2R}$, $a^2=c^2+a^2-b^2$

$\therefore b^2=c^2$

이때, $b>0$, $c>0$이므로 $b=c$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답_090107_심플자이 수1(N~O)-삼.indd 93 2018. 5. 2. 오후 8:08

Simple O 삼각함수의 삼각형에의 활용

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 110~111

01 답 h, $b\sin A$, $\sin A$

02 답 a, $\sin A$, $4R$

03 답 2, 2, $\sin\theta$

04 답 ×

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

09 답 3

10 답 20

11 답 $6\sqrt{3}$

12 답 $9\sqrt{3}$

13 답 $12\sqrt{5}$

14 답 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

15 답 $24\sqrt{3}$

16 답 3

17 답 $48\sqrt{3}$

유형 연습 [+ 내신 유형] 문제편 pp. 112~115

18 답 ③

삼각형의 두 변의 길이가 3, 2이고 그 끼인각의 크기가 $120°$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin120°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

19 답 ②

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $A+B+C=180°$이므로 $A=180°-60°-75°=45°$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\times5\times4\times\sin45°=5\sqrt{2}$$

20 답 ②

삼각형 ABC의 넓이가 $5\sqrt{2}$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C$$
$$=\frac{1}{2}\times5\times4\times\sin C=5\sqrt{2}$$
$$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때, $90°<C<180°$이므로 $C=135°$이다.

21 답 ④

C는 삼각형 ABC의 한 내각의 크기이므로

$0<C<\pi$에서 $\sin C>0$이다.

따라서 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C$$
$$=\frac{1}{2}\times3\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

22 답 ①

A는 삼각형 ABC의 한 내각의 크기이므로

$0<A<\pi$에서 $0<\sin A\le1$이다.

이때, $\sin^2 A+\cos^2 A=1$의 양변을 $\sin^2 A$로 나누면

$1+\frac{1}{\tan^2 A}=\frac{1}{\sin^2 A}$에서

$2=\frac{1}{\sin^2 A}$ ($\because \tan A=1$), $\sin^2 A=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

23 답 ③

두 선분 BC, CA의 길이를 각각 a, b라 하면

$\overline{BC}+\overline{CA}=10$에서 $a+b=10$ $\quad\therefore b=10-a$ ⋯ ㉠

이때, 삼각형 ABC의 넓이는

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C$$
$$=\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin C$$
$$=\frac{1}{2}\times a\times(10-a)\times\frac{1}{2}\ (\because ㉠)$$
$$=-\frac{1}{4}a^2+\frac{5}{2}a$$
$$=-\frac{1}{4}(a-5)^2+\frac{25}{4}\ (0<a<10)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $a=5$일 때, $\frac{25}{4}$이다.

> **[이차함수의 최대 · 최소]** 심플 정리
> 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$에 대하여
> (1) $a>0$이면 함수 $f(x)$는 $x=m$에서 최솟값 n을 갖고 최댓값은 없다.
> (2) $a<0$이면 함수 $f(x)$는 $x=m$에서 최댓값 n을 갖고 최솟값은 없다.

24 답 ①

반지름의 길이가 2인 원의 중심을 O라 하면 이 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CA}=3:4:5$이므로

$\angle AOB=2\pi\times\dfrac{3}{3+4+5}=\dfrac{\pi}{2}$

$\angle BOC=2\pi\times\dfrac{4}{3+4+5}=\dfrac{2}{3}\pi$

$\angle COA=2\pi\times\dfrac{5}{3+4+5}=\dfrac{5}{6}\pi$

이때, 삼각형 ABC의 넓이는 세 삼각형 AOB, BOC, COA의 넓이의 합과 같으므로

$$\begin{aligned}\triangle ABC&=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA\\&=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{2}{3}\pi\\&\qquad+\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{5}{6}\pi\\&=\frac{1}{2}\times2\times2\times\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{2}{3}\pi+\sin\frac{5}{6}\pi\right)\\&=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=3+\sqrt{3}\end{aligned}$$

> **[호의 길이와 중심각의 크기의 관계]** 심플 정리
> (1) 한 원 또는 합동인 원에서 호의 길이가 같은 두 호에 대한 중심각의 크기는 서로 같다.
> (2) 호의 길이와 중심각의 크기는 정비례한다.

25 답 ④

선분 AD의 길이를 x라 하면 삼각형 ABC의 넓이는 두 삼각형 ABD, ADC의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times4\times x\times\sin30^\circ+\frac{1}{2}\times x\times3\times\sin30^\circ$$

에서 $3\sqrt{3}=x+\dfrac{3}{4}x$, $3\sqrt{3}=\dfrac{7}{4}x$ $\quad\therefore x=\dfrac{12\sqrt{3}}{7}$

따라서 삼각형 ABD의 넓이는

$\triangle ABD=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{12\sqrt{3}}{7}\times\sin30^\circ=\dfrac{12\sqrt{3}}{7}$

26 답 ②

삼각형 ABC에서 사인법칙 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin45^\circ}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sin C}$ $\quad\therefore \overline{BC}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sin C}\times\sin45^\circ=\dfrac{4}{\sin C}$

이때, $0<C<\pi$에서 $0<\sin C\le1$이므로 $\sin C=1$일 때 선분 BC의 길이는 최솟값 4를 갖는다.

즉, 이때의 $C=90^\circ$이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형이고 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=4$

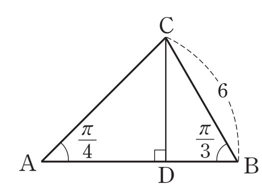
$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC&=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A\\&=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\times\sin45^\circ=8\end{aligned}$$

27 답 ⑤

삼각형 ABC에서 사인법칙 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}$에 의하여

$\dfrac{6}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\frac{\pi}{3}}$ $\quad\therefore \overline{AC}=3\sqrt{6}$

이때, 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 D라 하면 직각삼각형 BCD에서



$\overline{CD}=\overline{BC}\sin B$
$\quad=6\times\sin\dfrac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$

$\overline{BD}=\overline{BC}\cos B$
$\quad=6\times\cos\dfrac{\pi}{3}=3$

이때, $\angle CAD=\dfrac{\pi}{4}$이므로 삼각형 ADC는 직각이등변삼각형이다. 즉, $\overline{AD}=\overline{CD}=3\sqrt{3}$이므로

$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=3\sqrt{3}+3$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC&=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times(3\sqrt{3}+3)\times3\sqrt{3}\\&=\frac{27+9\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

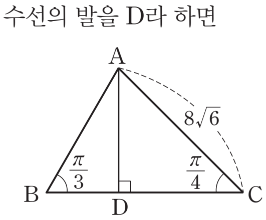
따라서 $\alpha=\dfrac{27}{2}$, $\beta=\dfrac{9}{2}$이므로 $\alpha-\beta=\dfrac{27}{2}-\dfrac{9}{2}=\dfrac{18}{2}=9$

28 답 ①

삼각형 ABC에서 사인법칙 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$에 의하여

$\dfrac{8\sqrt{6}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\frac{\pi}{4}}$ $\quad\therefore \overline{AB}=16$

이때, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면 직각삼각형 ADC에서



$\overline{AD}=\overline{CD}=\overline{AC}\cos C$
$\quad=8\sqrt{6}\times\cos\dfrac{\pi}{4}=8\sqrt{3}$

또, 직각삼각형 ABD에서

$\overline{BD}=\overline{AB}\cos B=16\times\cos\dfrac{\pi}{3}=8$

따라서 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=8+8\sqrt{3}$이므로

$$\begin{aligned}\triangle ABC&=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AD}\\&=\frac{1}{2}\times(8+8\sqrt{3})\times8\sqrt{3}=96+32\sqrt{3}\end{aligned}$$

29 답 ④

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=\dfrac{7^2+4^2-9^2}{2\times7\times4}=-\dfrac{2}{7}$

이때, $0<A<\pi$에서 $0<\sin A\leq1$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{2}{7}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

$\therefore\ \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times7\times4\times\dfrac{3\sqrt{5}}{7}=6\sqrt{5}$

30 답 ③

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=\dfrac{9^2+8^2-7^2}{2\times9\times8}=\dfrac{2}{3}$

이때, $0<A<\pi$에서 $0<\sin A\leq1$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore\ \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times9\times8\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=12\sqrt{5}$

31 답 ①

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=\dfrac{7^2+6^2-5^2}{2\times7\times6}=\dfrac{5}{7}$

이때, $0<A<\pi$에서 $0<\sin A\leq1$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{7}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

$\therefore\ \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times7\times6\times\dfrac{2\sqrt{6}}{7}=6\sqrt{6}$

32 답 80

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 2이고 넓이가 10이므로 $\triangle ABC=\dfrac{abc}{4R}$에서

$10=\dfrac{abc}{4\times2}\qquad\therefore\ abc=80$

33 답 ②

$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$

이므로

$\triangle ABC=2R^2\sin A\sin B\sin C$

$=2\times4^2\times\sin60^\circ\times\sin30^\circ\times\sin90^\circ$

$=8\sqrt{3}$

34 답 ①

$\triangle ABC=\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{2\sqrt{5}\times2\sqrt{2}\times6}{4\times\sqrt{10}}=6$

다른 풀이

사인법칙 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$이므로

$\sin A=\dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin C=\dfrac{6}{2\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore\ \triangle ABC=2R^2\sin A\sin B\sin C$

$=2\times(\sqrt{10})^2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=6$

35 답 ①

$\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}=3:4:5$이므로 양수 k에 대하여

$\overline{BC}=3k$, $\overline{CA}=4k$, $\overline{AB}=5k$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\dfrac{(3k)^2+(4k)^2-(5k)^2}{2\times3k\times4k}=0$이므로 $C=90^\circ$

한편, 사인법칙에 의하여

$\overline{AB}=2R\sin C=2\times5\times\sin90^\circ=10$에서 $5k=10$이므로

$k=2$

따라서 $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=8$, $\overline{AB}=10$이므로

$\triangle ABC=\dfrac{6\times8\times10}{4\times5}=24$

36 답 ①

평행사변형에서 $A+B=\pi$이므로 $B=\dfrac{\pi}{3}$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=2\times2\sqrt{2}\times\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{6}$

다른 풀이

$\overline{AD}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$이므로 평행사변형 ABCD의 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin A=2\times2\sqrt{2}\times\sin\dfrac{2}{3}\pi=2\sqrt{6}$

37 답 ②

평행사변형 ABCD의 넓이가 10이고 $\overline{BC}=\overline{AD}$이므로

평행사변형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=4\times5\times\sin B=20\sin B=10$

따라서 $\sin B=\dfrac{1}{2}$이므로 $B=30^\circ$ ($\because\ 0^\circ<B<90^\circ$)

38 답 ④

사각형 ABCD의 두 대각선의 길이는 각각 $3\sqrt{3}$, 6이고 두 대각선이 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{4}$이므로 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{9\sqrt{6}}{2}$

답_090107_심플자이 수1(N~O)-삼.indd 96 2018. 5. 2. 오후 8:08

39 답 ③

사각형 ABCD의 두 대각선의 길이는 각각 5, 6이고 두 대각선이 이루는 예각의 크기는 θ이므로 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin\theta=10$

이므로 $\sin\theta=\frac{2}{3}$

이때, θ는 예각이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

40 답 ④

사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C를 잇는 보조선을 그으면 사각형 ABCD의 넓이는 두 삼각형 ABC, ACD의 넓이의 합이다. 이때,

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$이고

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times3\times1\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이므로

사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{15\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

41 답 ⑤

사각형 ABCD의 두 꼭짓점 B, D를 잇는 보조선을 그으면 사각형 ABCD의 넓이는 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합이다. 이때,

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{15\sqrt{3}}{4}$이고

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times8\times3\times\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$이므로

사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{15\sqrt{3}}{4}+6\sqrt{3}=\frac{39\sqrt{3}}{4}$

42 답 ③

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin120^\circ=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos(\angle BAD)$

$=3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos120^\circ$

$=9+9-18\times\left(-\frac{1}{2}\right)=27$

즉, $\overline{BD}=3\sqrt{3}$ ($\because$ $\overline{BD}>0$)이므로

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times4\times\sin60^\circ=9$

따라서 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{9\sqrt{3}}{4}+9$이므로 $a=9$, $b=\frac{9}{4}$

이다.

$\therefore\ a+4b=9+4\times\frac{9}{4}=18$

43 답 ②

사각형 ABCD는 원에 내접하므로 $B+D=\pi$에서

$D=\pi-B=\frac{2}{3}\pi$

이때, 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\cos D$

$=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos\frac{2}{3}\pi=49$

$\therefore\ \overline{AC}=7$ ($\because$ $\overline{AC}>0$)

즉, $\overline{AB}=\overline{AC}=7$이고 $B=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 7인 정삼각형이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{\sqrt{3}}{4}\times7^2+\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin\frac{2}{3}\pi$

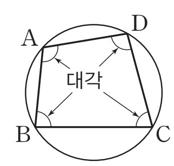
$=\frac{49\sqrt{3}}{4}+\frac{15\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}$

심플 정리

[원에 내접하는 사각형의 성질]

원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다. 즉,

$A+C=B+D=180^\circ$



Ⅱ O

연습 문제 [N~O] [기출 + 기출 변형] 문제편 pp. 116~117

01 답 ⑤

$C=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{3}{\sin 120^\circ}=\dfrac{b}{\sin 30^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}$에서

$b=c=\dfrac{3\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ}=\dfrac{3\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$

$\therefore\ b+c=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

02 답 ③

$C=180^\circ-(30^\circ+15^\circ)=135^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 135^\circ}=\dfrac{20}{\sin 15^\circ}$

$\therefore\ \overline{AB}=\dfrac{20\sin 135^\circ}{\sin 15^\circ}=\dfrac{20\sin(180^\circ-45^\circ)}{\sin 15^\circ}$

$=\dfrac{20\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}=\dfrac{20\times 0.71}{0.26}\fallingdotseq 54.6$

03 답 ④

$A+B+C=180^\circ$이므로 $B+C=180^\circ-A$

$4\cos(B+C)\cos A=-1$에서

$4\cos(180^\circ-A)\cos A=-1,\ -4\cos^2 A=-1$

$\therefore\ \cos^2 A=\dfrac{1}{4}$

$0^\circ<A<180^\circ$이고, $0<\sin A\le 1$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin A}=2\times 3=6$이므로

$a=6\times\sin A=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

04 답 ②

> x에 대한 이차방정식
> $x^2\sin^2 A+2x\times\sin A\sin B+\sin^2 A+\sin^2 C=0$
> 이 중근을 가질 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?
> 이차방정식이 중근을 가지면 판별식을 D라 할 때, $D=0$이야.
>
> ① $A=90^\circ$인 직각삼각형
> ② $B=90^\circ$인 직각삼각형
> ③ $C=90^\circ$인 직각삼각형
> ④ $a=b$인 이등변삼각형
> ⑤ $a=b=c$인 정삼각형

1st 이차방정식이 중근을 가질 조건을 이용해.

이차방정식

$x^2\sin^2 A+2x\times\sin A\sin B+\sin^2 A+\sin^2 C=0$의

판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 A(\sin^2 A+\sin^2 C)=0$

2nd 사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC의 모양을 결정해.

이 식의 양변을 $\sin^2 A$로 나누면 — A는 삼각형 ABC의 한 내각의 크기이므로 $0^\circ<A<180^\circ$지? 즉, $0<\sin A\le 1$이니까 양변을 $\sin^2 A$로 나눌 수 있어.

$\sin^2 B-\sin^2 A-\sin^2 C=0$ ⋯ ㉠

한편, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R}$

이므로 이것을 ㉠에 대입하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$가 성립해.

$\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2-\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2=0$

$\therefore\ b^2=a^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

05 답 ③

> 세 변의 길이가 7, 8, 13인 삼각형 ABC에서 세 내각 중 가장 큰 각의 크기는?
> 삼각형에서 어떤 한 내각의 크기가 커지면 그 각의 대변의 길이도 길어져.
>
> ① 60° ② 90° ③ 120°
> ④ 135° ⑤ 150°

1st 삼각형 ABC에서 가장 큰 각을 찾자.

삼각형 ABC에서 $a=13,\ b=8,\ c=7$이라 하면 가장 큰 내각은 길이가 가장 긴 변인 a의 대각이므로 A이다.

2nd A의 크기를 구하자.

삼각형 ABC의 세 내각 A, B, C의 대변의 길이를 각각 a, b, c라 하면 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$가 성립해.

따라서 코사인법칙에 의해

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{8^2+7^2-13^2}{2\times 8\times 7}=-\dfrac{1}{2}$이다.

이때, $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=120^\circ$

삼각형 ABC의 세 내각 A, B, C의 대변의 길이를 각각 a, b, c라 하면 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$가 성립해.

06 답 ①

사각형 ABCD가 평행사변형이므로

$\overline{AD}=\overline{BC}=5$이고 $\angle BAD=120^\circ$이므로

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos(\angle BAD)$

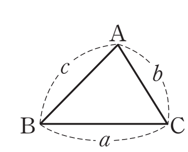
$=3^2+5^2-2\times 3\times 5\times\cos 120^\circ=49$

$\therefore\ \overline{BD}=7\ (\because\ \overline{BD}>0)$

심플 정리

[코사인법칙]

그림과 같은 삼각형 ABC에서 다음이 성립하고 이를 코사인법칙이라 한다.



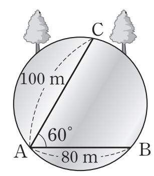
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

07 답 ⑤

원 모양의 호수의 넓이를 구하기 위해 호수의 가장자리의 세 지점 A, B, C에서 거리와 각을 측정한 결과가 다음과 같았다.



$\overline{AB}=80\text{ m}$, $\overline{AC}=100\text{ m}$, $\angle CAB=60^\circ$

이때, 이 호수의 넓이는? 호수가 원 모양이니까 넓이를 구하려면 반지름의 길이만 알면 돼.

① $2400\pi\text{ m}^2$ ② $2500\pi\text{ m}^2$ ③ $2600\pi\text{ m}^2$
④ $2700\pi\text{ m}^2$ ⑤ $2800\pi\text{ m}^2$

1st 코사인법칙을 이용하여 선분 BC의 길이를 구해.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
삼각형에서 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어졌으니까 코사인법칙을 떠올려야 해.

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos 60^\circ$$
$$=80^2+100^2-2\times 80\times 100\times\frac{1}{2}=8400$$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{8400}\text{ (m)}\ (\because \overline{BC}>0)$

2nd 사인법칙을 이용하여 호수의 반지름의 길이를 구하고 넓이를 구해.

이때, 호수의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}=2R$이므로 호수는 삼각형 CAB의 외접원이므로 외접원의 반지름의 길이 R를 구하기 위해 사인법칙을 적용해.

$$R=\frac{\sqrt{8400}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{8400}{3}}=\sqrt{2800}\text{ (m)}$$

따라서 호수의 넓이는 $\pi R^2=2800\pi\text{ (m}^2)$

08 답 ③

두 꼭짓점 A, C를 잇는 보조선을 긋자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$$
$$=5^2+3^2-2\times 5\times 3\times\cos 60^\circ$$
$$=25+9-15=19\ \cdots\ ㉠$$

이때, $\overline{AD}=x\,(x>0)$라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\cos(\angle ADC)$$
$$=x^2+2^2-2\times x\times 2\times\cos 120^\circ$$
$$=x^2+2x+4\ \cdots\ ㉡$$

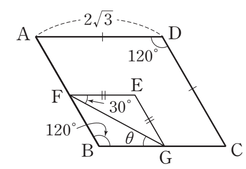
㉠=㉡에서 $x^2+2x+4=19$, $x^2+2x-15=0$

$(x-3)(x+5)=0 \qquad \therefore x=3\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{AD}=3$

09 답 ⑤

그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$이고 $\angle B=120^\circ$인 마름모 ABCD의 내부에 $\overline{EF}=\overline{EG}=2$이고 $\angle EFG=30^\circ$인 이등변삼각형 EFG가 있다. 점 F는 선분 AB 위에, 점 G는 선분 BC 위에 있도록 삼각형 EFG를 움직일 때, $\angle BGF=\theta$라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $0<\theta<60^\circ$)



[보기]

ㄱ. $\angle BFE=90^\circ-\theta$

ㄴ. $\overline{BF}=4\sin\theta$ → 삼각형 BGF에서 사인법칙을 이용해.

ㄷ. 선분 BE의 길이는 항상 일정하다.
→ 삼각형 EFB에서 코사인법칙을 이용해.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°야.

ㄱ. $\angle BGF=\theta$이고, 삼각형 FBG의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$$\angle BFG=180^\circ-(\angle FBG+\angle BGF)$$
$$=180^\circ-(120^\circ+\theta)=60^\circ-\theta$$

$\therefore \angle BFE=\angle BFG+\angle GFE$
$=(60^\circ-\theta)+30^\circ=90^\circ-\theta$ (참)

2nd 사인법칙을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 따지자.

ㄴ. 삼각형 EFG는 이등변삼각형이므로

$\overline{FG}=2\overline{EF}\cos 30^\circ=2\sqrt{3}$

따라서 삼각형 BGF에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{FG}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{\overline{BF}}{\sin\theta}$에서 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\overline{BF}}{\sin\theta}$

점 E에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 FG의 중점이므로 $\overline{FG}=2\overline{FH}=2\overline{EF}\cos 30^\circ$

$\therefore \overline{BF}=4\sin\theta$ (참)

3rd 코사인법칙을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 따지자.

ㄷ. 삼각형 EFB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BE}^2=\overline{BF}^2+\overline{EF}^2-2\times\overline{BF}\times\overline{EF}\times\cos(90^\circ-\theta)$$
$$=(4\sin\theta)^2+2^2-2\times 4\sin\theta\times 2\times\sin\theta=4$$

따라서 $\overline{BE}=2$이므로 선분 BE의 길이는 항상 일정하다.
선분 BE는 θ의 크기에 따라 길이가 달라지지 않고 상수 2로 고정되어 있으므로 선분 BE의 길이는 항상 일정한 거야. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

Ⅱ N~O 연습

10 답 6

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times 8\times 3\times\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$

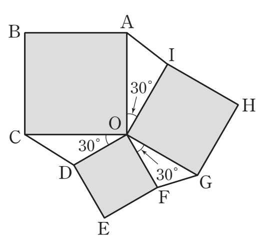
$\triangle APQ=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}xy$

이때, 삼각형 APQ의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로 $\triangle APQ=\frac{1}{4}\triangle ABC$에서 $\frac{\sqrt{3}}{4}xy=\frac{1}{4}\times 6\sqrt{3}$

$\therefore\ xy=6$

11 답 116

> 그림과 같이 세 정사각형 OABC, ODEF, OGHI와 세 삼각형 OCD, OFG, OIA는 한 점 O에서 만나고, $\angle COD=\angle FOG=\angle IOA=30^\circ$이다. 세 삼각형 넓이의 합이 26이고, 세 정사각형 둘레 길이의 합이 72일 때, 세 정사각형 넓이의 합을 구하시오.
>
> 정사각형과 삼각형은 변을 공유하니까 세 정사각형의 변의 길이를 미지수로 두고 식을 세워.
>
> 
>

1st 주어진 조건으로 세 정사각형의 변의 길이에 대한 식을 세우자.

세 정사각형 OABC, ODEF, OGHI의 한 변의 길이를 각각 a, b, c라 하면 세 정사각형의 둘레의 길이의 합이 72이므로 $4a+4b+4c=4(a+b+c)=72$에서

$a+b+c=18$ ⋯ ㉠

한편, 세 삼각형 OCD, OFG, OIA의 넓이는

두 변의 길이가 a, b이고 이 두 변의 끼인 각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$\triangle OCD=\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{OD}\times\sin 30^\circ=\frac{1}{4}ab$

$\triangle OFG=\frac{1}{2}\times\overline{OF}\times\overline{OG}\times\sin 30^\circ=\frac{1}{4}bc$

$\triangle OIA=\frac{1}{2}\times\overline{OI}\times\overline{OA}\times\sin 30^\circ=\frac{1}{4}ca$

이때, 세 삼각형의 넓이의 합이 26이므로

$\frac{1}{4}(ab+bc+ca)=26$에서 $ab+bc+ca=104$ ⋯ ㉡

2nd 세 정사각형의 넓이의 합을 구하자.

따라서 세 정사각형의 넓이의 합은 $a^2+b^2+c^2$이므로

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=18^2-2\times 104=116$

곱셈공식 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$를 변형하여 이용하자.

12 답 ②

등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 같으므로 대각선의 길이를 x라 하면 등변사다리꼴의 넓이가 $\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times x\times x\times\sin 120^\circ=\sqrt{3}$에서 $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\sqrt{3}$, $x^2=4$

$\therefore\ x=2\ (\because\ x>0)$

따라서 구하는 대각선의 길이는 2이다.

> **심플 정리**
>
> [사인함수를 이용한 사각형의 넓이]
>
> 두 대각선의 길이가 a, b이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형의 넓이를 S라 하면
>
> $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

13 답 199

$\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$라 하자.

선분 AB의 길이를 10 % 줄이면

$\overline{A'B}=\left(1-\frac{10}{100}\right)x=\frac{9}{10}x$

선분 BC의 길이를 10 % 늘이면

$\overline{BC'}=\left(1+\frac{10}{100}\right)y=\frac{11}{10}y$ ⋯ Ⅰ

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=\frac{1}{2}xy\sin B$

$\triangle A'BC'=\frac{1}{2}\times\overline{A'B}\times\overline{BC'}\times\sin B$

$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}x\times\frac{11}{10}y\times\sin B$

$=\frac{99}{200}xy\sin B$ ⋯ Ⅱ

이때, $\triangle A'BC'=\frac{q}{p}\triangle ABC$에서

$\frac{99}{200}xy\sin B=\frac{q}{p}\times\frac{1}{2}xy\sin B$ $\quad\therefore\ \frac{q}{p}=\frac{99}{100}$

$\therefore\ p+q=100+99=199$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	두 선분 A′B, BC′의 길이를 두 선분 AB, BC의 길이를 이용하여 나타낸다.	40%
Ⅱ	두 삼각형 ABC, A′BC′의 넓이를 구한다.	40%
Ⅲ	$p+q$의 값을 구한다.	20%

Ⅱ 대단원 TEST [I~O]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 118~121

01 답 ②

① -30°의 동경은 330°의 동경과 일치하므로 두 각 300°, -30°의 동경은 서로 일치하지 않는다.

② 750°의 동경은 30°의 동경과 일치하고, $\frac{\pi}{6}=30^\circ$이므로 두 각 750°, $\frac{\pi}{6}$의 동경은 서로 일치한다.

③ -320°의 동경은 40°의 동경과 일치하고, $\frac{\pi}{3}=60^\circ$이므로 두 각 -320°, $\frac{\pi}{3}$의 동경은 서로 일치하지 않는다.

④ 1190°의 동경은 110°의 동경과 일치하고, $\frac{2}{3}\pi=120^\circ$이므로 두 각 1190°, $\frac{2}{3}\pi$의 동경은 서로 일치하지 않는다.

⑤ 20π의 동경은 2π의 동경과 일치하고, 3π의 동경은 π의 동경과 일치하므로 두 각 3π, 20π의 동경은 서로 일치하지 않는다.

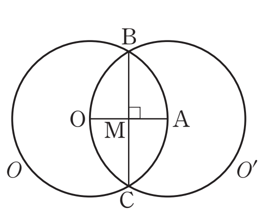
02 답 ④

직선 $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 45°이고, 각 α의 동경이 직선 $y=x$와 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\alpha=360^\circ n_1+45^\circ+\theta$ (n_1은 정수) ⋯ ㉠,
$\beta=360^\circ n_2+45^\circ-\theta$ (n_2는 정수) ⋯ ㉡이다.
㉠+㉡을 하면 $\alpha+\beta=360^\circ(n_1+n_2)+90^\circ$
이때, n_1+n_2는 정수이므로 $n_1+n_2=n$이라 하면
정수 n에 대하여 $\alpha+\beta=360^\circ n+90^\circ$이다.

심플 정리

[두 동경의 위치 관계]
두 각 α, β를 나타내는 동경의 위치에 따라 다음 관계식이 성립한다. (단, n은 정수)
(1) 일치한다. $\Longleftrightarrow \alpha-\beta=2n\pi$
(2) 일직선 위에 있고 방향이 반대이다.
$\Longleftrightarrow \alpha-\beta=2n\pi+\pi$
(3) x축에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow \alpha+\beta=2n\pi$
(4) y축에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow \alpha+\beta=2n\pi+\pi$
(5) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow \alpha+\beta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$

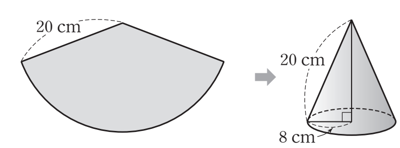
03 답 ③



그림과 같이 두 원 O, O'의 두 교점을 B, C라 하고 두 선분 OA, BC의 교점을 M이라 하면
$\overline{OB}=4$, $\overline{OM}=\frac{1}{2}\times\overline{OA}=\frac{1}{2}\times4=2$이므로 직각삼각형 OMB에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{BM}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$
따라서 $\overline{BC}=2\times\overline{BM}=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$이므로
$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OM}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$
한편, 두 삼각형 OAB, OCA는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로 $\angle BOA=\angle AOC=\frac{\pi}{3}$이다.
따라서 $\angle BOC=\angle BOA+\angle AOC=\frac{2}{3}\pi$이므로 부채꼴 OBC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{OB}^2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi$
이때, 삼각형 OBC의 넓이를 S_1, 부채꼴 OBC의 넓이를 S_2라 하면 두 원 O, O'의 공통부분의 넓이는
$2(S_2-S_1)=2\times\left(\frac{16}{3}\pi-4\sqrt{3}\right)=\frac{32}{3}\pi-8\sqrt{3}$

04 답 ①

부채꼴 모양의 종이의 호의 길이와 고깔모자의 밑면의 둘레의 길이는 같아.
그림과 같이 부채꼴 모양의 종이로 고깔모자를 만들었더니, 밑면의 반지름의 길이가 8 cm이고, 모선의 길이가 20 cm인 원뿔 모양이 되었다. 이 종이의 넓이는? (단, 종이는 겹치지 않도록 한다.)



① $160\pi\text{ cm}^2$ ② $170\pi\text{ cm}^2$ ③ $180\pi\text{ cm}^2$
④ $190\pi\text{ cm}^2$ ⑤ $200\pi\text{ cm}^2$

1st 부채꼴 모양의 호의 길이를 구하자.
부채꼴 모양의 종이의 호의 길이와 고깔모자의 밑면의 둘레의 길이가 같고, 고깔모자의 밑면의 둘레의 길이는 $2\pi\times8=16\pi$(cm)이므로 부채꼴의 호의 길이는 16π cm이다.

2nd 부채꼴 모양의 종이의 넓이를 구하자.
이때, 부채꼴 모양의 종이의 반지름의 길이는 20 cm이고, 호의 길이는 16π cm이므로 구하는 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}\times20\times16\pi=160\pi(\text{cm}^2)$
반지름의 길이가 r이고, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}rl$

다른 풀이

부채꼴 모양의 종이의 중심각의 크기를 θ라 하면 호의 길이는 20θ cm이다.
반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면 $l=r\theta$
또, 원뿔의 밑면의 둘레의 길이는 $2\pi\times8=16\pi$(cm)이다.
즉, $20\theta=16\pi$에서 $\theta=\frac{4}{5}\pi$
따라서 부채꼴 모양의 종이의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}\times20^2\times\frac{4}{5}\pi=160\pi(\text{cm}^2)$
반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$

Ⅱ 대단원

05 답 ①

① $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로 θ는 제4사분면의 각이다.

② $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

③ $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

④ $\sin\theta\cos\theta>0$이면 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이다. 그런데 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이면 θ는 제1사분면의 각이고 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이면 θ는 제3사분면의 각이다.

⑤ $\sin\theta\tan\theta<0$이면 $\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이다. 그런데 $\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$이면 θ는 제2사분면의 각이고 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이면 θ는 제3사분면의 각이다.

06 답 ②

$\tan\theta=\frac{1}{3}$이므로

$\cos(\pi+\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(-\theta)$

$=-\cos\theta+\cos\theta-\tan\theta=-\tan\theta=-\frac{1}{3}$

07 답 4

한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 원소로 가지는 집합 A에 대하여 집합 X를

$$X=\left\{x \middle| x=\sin\frac{a}{6}\pi,\ a\in A\right\}$$

집합 X는 $\sin\frac{a}{6}\pi$를 원소로 갖는 집합이야.

라 하자. 집합 X의 원소의 개수를 구하시오.

1st 집합 X가 가질 수 있는 원소를 구하자.

a는 주사위의 눈의 수이므로 집합 A는 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이다.

이때, $\sin\frac{a}{6}\pi$에 $a=1, 2, \cdots, 6$을 대입하면

$\sin\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2}{6}\pi=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{3}{6}\pi=\sin\frac{\pi}{2}=1$

$\sin\frac{4}{6}\pi=\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\sin\frac{6}{6}\pi=\sin\pi=0$

2nd 집합 X의 원소의 개수를 구해.

따라서 $X=\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$이므로 집합 X의 원소의 개수는 4이다.

집합 $X=\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$과 같이 써서 답을 6개로 풀지 않도록 주의하자. 집합에서 중복되는 원소는 한 번만 써야 해.

08 답 ③

$\theta=15^\circ$일 때, $\log_3\tan\theta+\log_3\tan 3\theta+\log_3\tan 5\theta$를 간단히 하면?

로그의 합은 진수의 곱으로 바꿀 수 있지?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

1st 로그의 성질을 이용하여 식을 정리해.

$\log_3\tan\theta+\log_3\tan 3\theta+\log_3\tan 5\theta$

$=\log_3\tan 15^\circ+\log_3\tan 45^\circ+\log_3\tan 75^\circ$

$=\log_3(\tan 15^\circ\times\tan 45^\circ\times\tan 75^\circ)$ ⋯ ㉠

$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

2nd 삼각함수의 성질을 이용하자.

이때, $\tan 45^\circ=1$이고,

$\tan 75^\circ=\tan(90^\circ-15^\circ)=\frac{1}{\tan 15^\circ}$이므로

㉠에서 $\tan(90^\circ\pm\theta)=\mp\frac{1}{\tan\theta}$ (복호동순)

$\log_3\left(\tan 15^\circ\times\tan 45^\circ\times\frac{1}{\tan 15^\circ}\right)=\log_3 1=0$

심플 정리

[로그의 성질]

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

(3) $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

09 답 23

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-a$, $\sin\theta\cos\theta=2a$ ⋯ Ⅰ

이때, $\sin\theta+\cos\theta=-a$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=a^2$에서

$1+4a=a^2$, $a^2-4a-1=0$ ⋯ ㉠

$\therefore a=2+\sqrt{5}$ ($\because a>0$) ⋯ Ⅱ

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=-a(1-2a)=2a^2-a=2(4a+1)-a$ ($\because$ ㉠)

$=7a+2=7(2+\sqrt{5})+2$

$=16+7\sqrt{5}$

따라서 $\alpha=16$, $\beta=7$이므로 $\alpha+\beta=16+7=23$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\sin\theta$와 $\cos\theta$의 합과 곱을 a에 대한 식으로 나타낸다.	20%
Ⅱ	a의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	$\sin^3\theta+\cos^3\theta$의 값을 구하고 $\alpha+\beta$를 계산한다.	40%

10 답 ④

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$이므로

$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ)+\cdots$

$\qquad+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 45^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)+\cdots$

$\qquad+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\sin^2 45^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=1+1+\cdots+1+\frac{1}{2}+1$

$=44+\frac{3}{2}=\frac{91}{2}$

11 답 ④

함수 $f(x)$는 주기가 3인 함수이므로

$f\left(\frac{82}{3}\right)=f\left(27+\frac{1}{3}\right)=f\left(24+\frac{1}{3}\right)=f\left(21+\frac{1}{3}\right)=\cdots$

$\quad=f\left(\frac{1}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

12 답 ⑤

$-1\le\cos b\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le 1$에서

$-|a|+c\le a\cos b\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+c\le|a|+c$이므로

함수 $y=a\cos b\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+c$의 최댓값과 최솟값은 각각

$|a|+c,\ -|a|+c$이다.

이때, 함수 $y=a\cos b\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+c$의 그래프에서 이 함수의 최댓값과 최솟값이 각각 $5,\ -1$이므로

$|a|+c=5,\ -|a|+c=-1$

이 두 식을 연립하여 풀면

$|a|=3,\ c=2$

$\therefore a=3\ (\because a>0),\ c=2$

또, 이 함수의 주기가 $\frac{7}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\pi$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\pi$에서 $|b|=2 \qquad \therefore b=2\ (\because b>0)$

$\therefore ab+c=3\times2+2=8$

심플 정리

[삼각함수의 최댓값, 최솟값과 주기]

(1) 함수 $y=a\sin(bx+c)+d$의 최댓값과 최솟값은 각각 $|a|+d,\ -|a|+d$이고, 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이다.

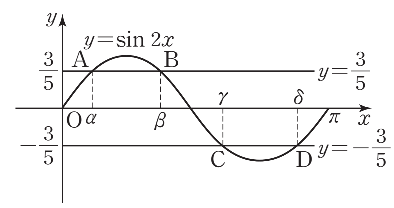
(2) 함수 $y=a\cos(bx+c)+d$의 최댓값과 최솟값은 각각 $|a|+d,\ -|a|+d$이고, 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이다.

(3) 함수 $y=a\tan(bx+c)+d$의 최댓값과 최솟값은 존재하지 않고, 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$이다.

13 답 ③

사인함수의 성질, 대칭성을 이용하여 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$의 관계를 식으로 나타내.

그림과 같이 함수 $y=\sin 2x\ (0\le x\le\pi)$의 그래프가 직선 $y=\frac{3}{5}$과 두 점 A, B에서 만나고, 직선 $y=-\frac{3}{5}$과 두 점 C, D에서 만난다. 네 점 A, B, C, D의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$라 할 때, $\alpha+2\beta+2\gamma+\delta$의 값은?



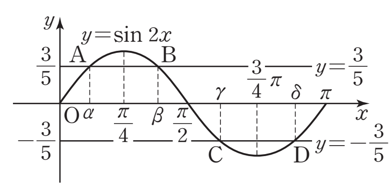
① $\frac{9}{4}\pi$ ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π

④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

1st 주어진 함수의 주기를 구하자.

함수 $y=\sin 2x\ (0\le x\le\pi)$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

2nd 주기를 알면 삼각함수의 그래프가 대칭이 되는 점의 좌표를 구할 수 있어.



두 점 A, D는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이라는 것은 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 중심으로 구간 $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$에 존재하는 그래프를 회전하면 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에 존재하는 그래프와 일치한다는 거야.

$\frac{\alpha+\delta}{2}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \alpha+\delta=\pi\ \cdots$ ㉠

한편, 두 점 B, C도 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \beta+\gamma=\pi\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\delta)+2(\beta+\gamma)=\pi+2\pi=3\pi$

다른 풀이

주기가 π인 사인함수의 성질에 의해

$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha,\ \gamma=\frac{\pi}{2}+\alpha,\ \delta=\pi-\alpha$이므로

$\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=\alpha+2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+(\pi-\alpha)=3\pi$

Ⅱ 대단원

14 답 ②

두 함수 $y=\sqrt{3}\sin x$, $y=-\tan x$의 그래프는 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$에서 만나므로 $\sqrt{3}\sin\alpha=-\tan\alpha$, 즉

$\sqrt{3}\sin\alpha=-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ … ㉠이 성립한다.

이때, $0<\alpha<\pi$에서 $\sin\alpha>0$이므로 ㉠에서

$\sqrt{3}=-\dfrac{1}{\cos\alpha}$ $\quad\therefore \cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

한편, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이고

점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$는 함수 $y=\sqrt{3}\sin x$의 그래프 위의 점이므로

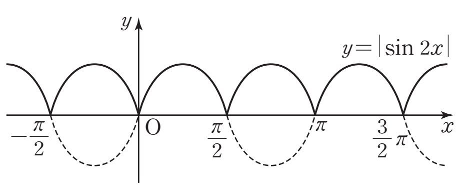
$\beta=\sqrt{3}\sin\alpha=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{\cos\alpha}{\beta}=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

15 답 ②

함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$이므로

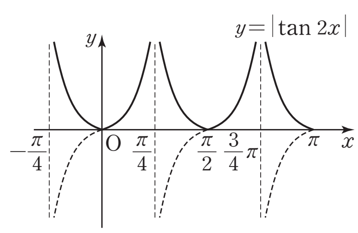
함수 $y=|\sin 2x|$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $y=|\sin 2x|$의 주기는 $\dfrac{\pi}{2}$이므로 $p=\dfrac{\pi}{2}$

함수 $y=\tan 2x$의 주기는 $\dfrac{\pi}{2}$이므로

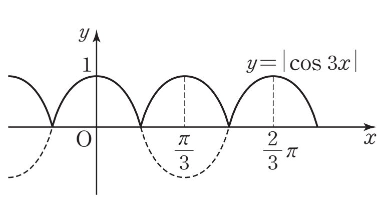
함수 $y=|\tan 2x|$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $y=|\tan 2x|$의 주기는 $\dfrac{\pi}{2}$이므로 $q=\dfrac{\pi}{2}$

함수 $y=\cos 3x$의 주기는 $\dfrac{2}{3}\pi$이므로

함수 $y=|\cos 3x|$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $y=|\cos 3x|$의 최댓값과 최솟값은 각각 1, 0이므로

$M=1,\ m=0$

$\therefore p+q+M+m=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}+1+0=\pi+1$

16 답 ①

a가 양수이고 $-1\le\sin bx\le1$이므로

$-a+c\le a\sin bx+c\le a+c$

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $a+c$, 최솟값은 $-a+c$이므로

조건 (가)에 의하여 $a+c=6,\ -a+c=0$

이 두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ c=3$

또, 양수 b에 대하여 함수 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{b}$이므로

조건 (나)에 의하여 $\dfrac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore 2a+b+c=2\times3+2+3=11$

17 답 ④

함수 $y=a\cos b(x-m)+n$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|b|}$이고, 최댓값과 최솟값은 각각 $|a|+n,\ -|a|+n$이야.

삼각함수 $f(x)=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. $-1\le f(x)\le3$이다.

ㄴ. 임의의 실수 x에 대하여 $f\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=f(x)$이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{\pi}{9}$에 대하여 대칭이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 함수 $f(x)$의 범위를 구하자.

ㄱ. $-1\le\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)\le1$이므로

$g(x)=\cos a(x+b)$가 갖는 값의 범위는 $-1\le\cos a(x+b)\le1$이야.

$-2\le2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)\le2$

$-1\le2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1\le3$

$\therefore -1\le f(x)\le3$ (참)

2nd 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+a)=f(x)$가 성립하면 함수 $f(x)$는 주기가 a인 함수를 의미해.

ㄴ. $f(x)=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1=2\cos3\left(x-\dfrac{\pi}{9}\right)+1$의 주기는 $\dfrac{2}{3}\pi$이므로 임의의 실수 x에 대하여

$f\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=f(x)$ (거짓)

3rd 함수 $y=f(x)$의 그래프가 대칭이 되는 직선을 구하기 위해 함수 $y=2\cos3x$를 생각해.

ㄷ. 함수 $y=2\cos3x$의 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이고, $y=f(x)$의 그래프는 $y=2\cos3x$의 그래프를

x축의 방향으로 $\frac{\pi}{9}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=0$을 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{9}$만큼 평행이동한 직선 $x=\frac{\pi}{9}$에 대하여 대칭이다. (참)

함수 $y=2\cos 3x$의 그래프는 직선 $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{2}{3}\pi$, …에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $x=\frac{\pi}{9}$, $x=\frac{4}{9}\pi$, $x=\frac{7}{9}\pi$, …에 대하여 대칭이야.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18 답 ②

$y=-2\cos^2 x+4\sin x+3$

$=-2(1-\sin^2 x)+4\sin x+3\ (\because \sin^2 x+\cos^2 x=1)$

$=2\sin^2 x+4\sin x+1$

이때, $\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$라 하면

$f(t)=2t^2+4t+1=2(t+1)^2-1$

따라서 주어진 함수는 $t=-1$일 때 최솟값 $f(-1)=-1$을 갖고 $t=1$일 때 최댓값 $f(1)=7$을 가지므로

$M=7$, $m=-1$

$\therefore M+m=7+(-1)=6$

19 답 ②

$2\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}=0$에서 $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때, $0\le x<2\pi$에서 $0\le\frac{x}{2}<\pi$이므로

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{x}{2}=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=2\pi$이다.

20 답 ③

$y=x^2-2x\sin\theta+\cos^2\theta$

$=(x-\sin\theta)^2-\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=(x-\sin\theta)^2-\sin^2\theta+(1-\sin^2\theta)$

$(\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$

$=(x-\sin\theta)^2+1-2\sin^2\theta$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(\sin\theta,\ 1-2\sin^2\theta)$이고 이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로 $1-2\sin^2\theta=-\sin\theta$에서

$2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$, $(\sin\theta-1)(2\sin\theta+1)=0$

$\therefore \sin\theta=1$ 또는 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$

이때, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

(i) $\sin\theta=1$을 만족하는 θ는 존재하지 않는다.

(ii) $\sin\theta=-\frac{1}{2}$일 때, $\theta=-\frac{\pi}{6}$

(i), (ii)에 의하여 $\theta=-\frac{\pi}{6}$이다.

21 답 4

방정식 $\sin^2 x-\sin x=1-k$가 실근을 갖도록 하는 상수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $4M+m$의 값을 구하시오.

방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 가지려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이 존재해야 해.

1st $\sin x=t$로 치환하여 생각하자.

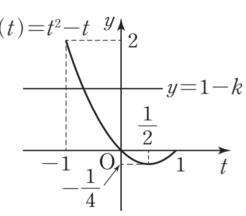
$-1\le\sin x\le 1$

$\sin^2 x-\sin x=1-k$에서 $\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$라 하면

$t^2-t=1-k$이고 $f(t)=t^2-t\ (-1\le t\le 1)$라 하면

$y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.

$f(t)=t^2-t=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 점 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$을 꼭짓점으로 하는 포물선이야.



2nd 실근이 존재하도록 실수 k의 값의 범위를 정해.

이때, $-1\le t\le 1$에서 방정식 $t^2-t=1-k$가 실근을 가지려면 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=1-k$의 교점이 $-1\le t\le 1$에 존재해야 한다.

즉, $-\frac{1}{4}\le 1-k\le 2$에서 $-\frac{5}{4}\le -k\le 1$ $\quad\therefore -1\le k\le\frac{5}{4}$

따라서 $M=\frac{5}{4}$, $m=-1$이므로

$4M+m=4\times\frac{5}{4}+(-1)=4$

22 답 ⑤

이차방정식 $2x^2+3x\sin\theta-2\cos^2\theta+1=0$의 두 근 사이에 1이 있도록 하는 θ의 값의 범위가 $\alpha<\theta<\beta$ 또는 $\beta<\theta<\gamma$일 때, $\alpha+2\beta+\gamma$의 값은?

두 근 사이에 1이 있도록 하는 조건을 생각해.

(단, $0<\theta<2\pi$)

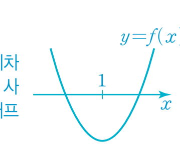
① 2π ② 3π ③ 4π

④ 5π ⑤ 6π

1st 주어진 방정식의 두 근 사이에 1이 존재하도록 하는 조건을 찾자.

이차방정식 $2x^2+3x\sin\theta-2\cos^2\theta+1=0$의 두 근 사이에 1이 있기 위해서는 $f(x)=2x^2+3x\sin\theta-2\cos^2\theta+1$이라 할 때, $f(1)<0$이어야 한다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 존재하려면 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 해.



2nd $f(1)<0$을 만족시키는 θ의 값의 범위를 구하자.

즉, $f(1)=2+3\sin\theta-2\cos^2\theta+1<0$에서

$3\sin\theta-2(1-\sin^2\theta)+3<0\ (\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta+1<0$, $(2\sin\theta+1)(\sin\theta+1)<0$

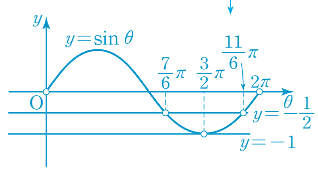
$\therefore\ -1<\sin\theta<-\frac{1}{2}$

이때, $0<\theta<2\pi$이므로 $\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{7}{6}\pi,\ \beta=\frac{3}{2}\pi,\ \gamma=\frac{11}{6}\pi$이므로

$\alpha+2\beta+\gamma=\frac{7}{6}\pi+2\times\frac{3}{2}\pi+\frac{11}{6}\pi=6\pi$

$0<\theta<2\pi$에서 함수 $y=\sin\theta$의 그래프와 두 직선 $y=-1,\ y=-\frac{1}{2}$을 그리면 그림과 같아.



23 답 ⑤

x에 대한 이차방정식 $x^2+2x+\tan\theta=0$의 실근이 존재하지 않으므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-\tan\theta<0$, 즉 $\tan\theta>1$이어야 한다.

$0<\theta<2\pi$에서 방정식 $\tan\theta=1$의 해는

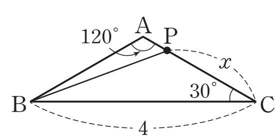
$\theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\frac{5}{4}\pi$이므로 $\tan\theta>1$의 해는

$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이다.

따라서 $a=\frac{\pi}{4},\ b=\frac{\pi}{2},\ c=\frac{5}{4}\pi,\ d=\frac{3}{2}\pi$이므로

$2a+b+2c+d=2\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+2\times\frac{5}{4}\pi+\frac{3}{2}\pi=5\pi$

24 답 ③



삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이고 $\angle A=120°$이므로 $\angle B=\angle C=30°$이다.

이때, 삼각형 BCP에서 $\overline{CP}=x$라 하고 코사인법칙을 적용하면

$\overline{BP}^2=\overline{BC}^2+\overline{CP}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CP}\times\cos 30°$

$=4^2+x^2-2\times4\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}=x^2-4\sqrt{3}x+16$

$\therefore\ \overline{BP}^2+\overline{CP}^2=(x^2-4\sqrt{3}x+16)+x^2$

$=2(x-\sqrt{3})^2+10$

즉, $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 $\overline{CP}=x=\sqrt{3}$일 때, 최솟값 10을 가지므로 $\alpha=\sqrt{3},\ \beta=10$이다.

$\therefore\ \alpha^2+\beta=(\sqrt{3})^2+10=13$

25 답 32

원주각의 성질에 의하여 $\angle BDA=\angle BCA=30°$이므로

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin D}=\frac{\overline{AD}}{\sin B}$에서 $\frac{16\sqrt{2}}{\sin 30°}=\frac{\overline{AD}}{\sin 45°}$

$\therefore\ \overline{AD}=\frac{16\sqrt{2}}{\sin 30°}\times\sin 45°=\frac{16\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=32$

26 답 $b=c$인 이등변삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$이고

코사인법칙에 의하여 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$이다.

이것을 $\sin A+\sin B-\sin C=2\sin B\cos C$에 대입하면

$\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}-\frac{c}{2R}=2\times\frac{b}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ … Ⅰ

이 식의 양변에 $2Ra$를 곱하면

$a^2+ab-ca=a^2+b^2-c^2,\ b^2-c^2-ab+ca=0$

$(b+c)(b-c)-a(b-c)=0$

$\therefore\ (b-c)(b+c-a)=0$

이때, 삼각형의 결정 조건에 의하여 $a<b+c$이므로

$a\neq b+c$, 즉 $b+c-a\neq0$이다. $\quad\therefore\ b=c$ … Ⅱ

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 주어진 식에 대입한다.	40%
Ⅱ	주어진 식을 정리하여 b, c 사이의 관계식을 구한다.	40%
Ⅲ	삼각형 ABC의 모양을 결정한다.	20%

27 답 ⑤

코사인법칙에 의하여 $\cos A=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\times8\times5}=\frac{1}{2}$

이때, $\sin^2 A+\cos^2 A=1$이고 $0<A<\pi$에서

$0<\sin A\le1$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times8\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

28 답 ②

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin 120°$

$=\frac{1}{2}\times8\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$이고

$\triangle ABD+\triangle ADC$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin 60°+\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\sin 60°$

$=\frac{1}{2}\times8\times\overline{AD}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

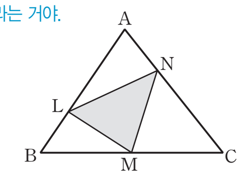
$=2\sqrt{3}\times\overline{AD}+\sqrt{3}\times\overline{AD}=3\sqrt{3}\times\overline{AD}$

이므로 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$에서

$8\sqrt{3}=3\sqrt{3}\times\overline{AD}$

$\therefore\ \overline{AD}=\frac{8}{3}$

29 답 5

> 그림과 같이 넓이가 18인 삼각형 ABC가 있다. 각 변 위의 점 L, M, N은 $\overline{AL}=2\overline{BL}$, $\overline{BM}=\overline{CM}$, $\overline{CN}=2\overline{AN}$을 만족할 때, 삼각형 LMN의 넓이를 구하시오.
>
> 삼각형 ABC의 넓이가 주어졌지만 각 변의 길이는 주어지지 않고 길이의 비로 주어졌지? 이는 삼각형의 넓이의 비를 이용하라는 거야.
>
> 
>

1st 세 삼각형 ALN, LBM, MCN의 넓이를 삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 각각 구하자.

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times\overline{BA}\times\overline{BC}\times\sin B$

$=\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times\overline{CB}\times\sin C=18$

이므로

두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$\triangle ALN=\frac{1}{2}\times\overline{AL}\times\overline{AN}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\overline{AB}\times\frac{1}{3}\overline{AC}\times\sin A$

$=\frac{2}{9}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A\right)$

$=\frac{2}{9}\times18=4$

$\overline{AL}=2\overline{BL}$에서 $\overline{AB}:\overline{AL}=3:2$이므로 $\overline{AL}=\frac{2}{3}\overline{AB}$이고 $\overline{CN}=2\overline{AN}$에서 $\overline{AC}:\overline{AN}=3:1$이므로 $\overline{AN}=\frac{1}{3}\overline{AC}$

$\triangle LBM=\frac{1}{2}\times\overline{BL}\times\overline{BM}\times\sin B$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\overline{BA}\times\frac{1}{2}\overline{BC}\times\sin B$

$=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{BA}\times\overline{BC}\times\sin B\right)$

$=\frac{1}{6}\times18=3$

$\overline{AL}=2\overline{BL}$에서 $\overline{AB}:\overline{BL}=3:1$이므로 $\overline{BL}=\frac{1}{3}\overline{AB}$이고 $\overline{BM}=\overline{CM}$에서 $\overline{BC}:\overline{BM}=2:1$이므로 $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

$\triangle MCN=\frac{1}{2}\times\overline{CM}\times\overline{CN}\times\sin C$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overline{CB}\times\frac{2}{3}\overline{CA}\times\sin C$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{CA}\times\sin C\right)$

$=\frac{1}{3}\times18=6$

$\overline{BM}=\overline{CM}$에서 $\overline{BC}:\overline{CM}=2:1$이므로 $\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$이고 $\overline{CN}=2\overline{AN}$에서 $\overline{AC}:\overline{CN}=3:2$이므로 $\overline{CN}=\frac{2}{3}\overline{AC}$

2nd 삼각형 LMN의 넓이를 구하자.

$\therefore \triangle LMN=\triangle ABC-\triangle ALN-\triangle LBM-\triangle MCN$

$=18-4-3-6=5$

Ⅲ 수열

Simple P 등차수열

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 124～125

01 답 수열, 항

02 답 등차수열, 공차

03 답 $a+(n-1)d$

04 답 등차중항

05 답 $\frac{n(a+l)}{2}$

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ×

09 답 ○

10 답 ○

11 답 제2항 : 5, 제4항 : 9

$a_n=2n+1$에서 n 대신 2, 4를 각각 대입하면 제2항은 5이고 제4항은 9이다.

12 답 제2항 : 2, 제4항 : 12

$a_n=n^2-n$에서 n 대신 2, 4를 각각 대입하면 제2항은 2이고 제4항은 12이다.

13 답 제2항 : 5, 제4항 : 17

$a_n=2^n+1$에서 n 대신 2, 4를 각각 대입하면 제2항은 5이고 제4항은 17이다.

14 답 3

공차를 d라 하면 $a_7=22$에서

$4+6d=22$, $6d=18$ $\quad\therefore d=3$

15 답 -2

공차를 d라 하면 $a_{10}=-6$에서

$12+9d=-6$, $9d=-18$ $\quad\therefore d=-2$

16 답 $a_n=5n-3$

$a_n=2+(n-1)\times5=5n-3$

17 답 $a_n=-8n+12$

첫째항이 4, 공차가 -8인 등차수열이므로

$a_n=4+(n-1)\times(-8)=-8n+12$

18 답 $a_n=4n-15$

첫째항이 -11, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_n=-11+(n-1)\times4=4n-15$

19 답 $a=7,\ b=23$

$a=\frac{(-1)+15}{2}=7,\ b=\frac{15+31}{2}=23$

20 답 $a=12,\ b=4$

$a=\frac{16+8}{2}=12,\ b=\frac{8+0}{2}=4$

21 답 100

$S_{10}=\frac{10\times(3+17)}{2}=100$

22 답 -40

$S_{10}=\frac{10\times\{14+(-22)\}}{2}=-40$

23 답 200

주어진 등차수열의 첫째항은 2, 공차는 4이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$S_{10}=\frac{10\times\{2\times2+(10-1)\times4\}}{2}=200$

24 답 -85

주어진 등차수열의 첫째항은 5, 공차는 -3이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$S_{10}=\frac{10\times\{2\times5+(10-1)\times(-3)\}}{2}=-85$

25 답 $a_n=2n+1$

(i) $n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}\\&=2n+1\end{aligned}$$

(ii) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3$

이때, (i)에서 $a_1=3$이므로 $a_n=2n+1(n\geq1)$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 126~131

26 답 ③

주어진 수열은 $1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \cdots$이므로 제8항은 $a_8=8^2=64$이다.

27 답 ②

나열된 수열의 규칙을 찾아보면 분자는 1부터 1씩 증가하고, 분모는 2부터 1씩 증가하므로

$a=\frac{4}{5},\ b=\frac{7}{8}$

$\therefore ab=\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{10}$

28 답 ④

$a_n=n^2+3n$이므로

$a_2=2^2+3\times2=10,\ a_5=5^2+3\times5=40$

$\therefore a_2+a_5=10+40=50$

29 답 ②

$a_1=11=10+1,\ a_2=101=10^2+1,$

$a_3=1001=10^3+1,\ \cdots$

$\therefore a_n=10^n+1$

30 답 ①

주어진 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -7이고, 공차는 3이다.

$\therefore (-7)\times3=-21$

31 답 ④

주어진 수열의 일반항에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$를 각각 대입하여 확인하면

ㄱ. 2, 8, 18, 32, …이므로 등차수열이 아니다.

ㄴ. 5, 3, 1, -1, …이므로 첫째항이 5, 공차가 -2인 등차수열이다.

ㄷ. 1, 3, 9, 27, …이므로 등차수열이 아니다.

ㄹ. 4, 7, 10, 13, …이므로 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열이다.

따라서 등차수열은 ㄴ, ㄹ이다.

다른 풀이

n에 대한 일차식이 등차수열이므로 ㄴ, ㄹ이다.

32 답 ③

주어진 수열은 첫째항이 2이고, 공차가 5인 등차수열이므로

$$\begin{aligned}a_n&=2+(n-1)\times5\\&=5n-3\end{aligned}$$

따라서 $A=5,\ B=-3$이므로

$A+B=5+(-3)=2$

다른 풀이

$a_1=A+B$이므로 $A+B=2$

33 답 ⑤

주어진 수열은 첫째항이 1, 공차가 $-\frac{3}{2}$이므로

$$\begin{aligned}a_n&=1+(n-1)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\\&=-\frac{3}{2}n+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

34 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 20, 공차가 -7이므로

$$\begin{aligned}a_n&=20+(n-1)\times(-7)\\&=-7n+27\end{aligned}$$

$\therefore a_{10}=(-7)\times10+27=-43$

35 답 ③

첫째항이 -4, 공차가 3인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=-4+(n-1)\times3=3n-7$

이때, $3n-7=35$에서 $3n=42$

$\therefore n=14$

따라서 35는 등차수열 $\{a_n\}$의 제14항이다.

36 답 ④

$a_{n+1}-a_n=-4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -4인 등차수열이다.

따라서 $x=13-4=9$, $y=5-4=1$이므로

$x+y=9+1=10$

다른 풀이

등차중항을 이용하면

$x=\frac{13+5}{2}=9$, $y=\frac{5+(-3)}{2}=1$

$\therefore x+y=10$

37 답 ②

$a_n=-57+(n-1)\times 5=5n-62$

$5n-62>0$에서

$n>12.4$

이때, n은 자연수이므로 처음으로 양수가 나오는 항은 제13항이다.

38 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{12}=-2+(12-1)\times d=-35$

$11d=-33$

$\therefore d=-3$

39 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=a+3d=10$ ⋯ ㉠

$a_7=a+6d=19$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $d=3$

따라서 $a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$이므로

$a_{15}=3\times 15-2=43$

40 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=4$ ⋯ ㉠

$a_5=a+4d=25$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $d=7$

따라서 $a_n=-3+(n-1)\times 7=7n-10$이므로

$a_7=7\times 7-10=39$

41 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_7=a+(7-1)\times 3=12$

$\therefore a=-6$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -6, 공차가 3이므로

$a_n=-6+(n-1)\times 3=3n-9$

$a_k=3k-9=42$에서 $3k=51$

$\therefore k=17$

42 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=a+4d=1$ ⋯ ㉠

$a_3+a_9=a+2d+a+8d=-4$에서

$a+5d=-2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=13$, $d=-3$

$\therefore a_n=13+(n-1)\times(-3)=-3n+16$

-53을 제k항이라 하면

$-3k+16=-53$에서 $3k=69$ $\therefore k=23$

따라서 -53은 제23항이다.

43 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 일반항은

$a_n=a+(n-1)\times 4$이므로 $a_5=a+16$, $a_{11}=a+40$

이때, $a_5:a_{11}=1:3$에서

$(a+16):(a+40)=1:3$

$a+40=3\times(a+16)$, $2a=-8$ $\therefore a=-4$

$\therefore a_{25}=(-4)+(25-1)\times 4=92$

44 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_7=24$에서 $(a+2d)+(a+6d)=24$

$2a+8d=24$ $\therefore a+4d=12$ ⋯ ㉠

또, $a_{14}+a_{18}=68$에서 $(a+13d)+(a+17d)=68$

$2a+30d=68$ $\therefore a+15d=34$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=2$

$\therefore a_{11}=a+10d=4+10\times 2=24$

45 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{16}=a+15d=47$ ⋯ ㉠

$a_{28}=a+27d=11$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=92$, $d=-3$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=92+(n-1)\times(-3)=-3n+95$

$a_n<0$에서 $-3n+95<0$

$\therefore n>\frac{95}{3}=31.\times\times\times$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음이 되는 항은 제32항이다.

46 답 ①

x는 -1과 5의 등차중항이므로

$x=\frac{-1+5}{2}=2$

y는 5와 11의 등차중항이므로

$y=\frac{5+11}{2}=8$

$\therefore y-x=8-2=6$

47 답 ④

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 세 수 a_1, a_2, a_3은 이 순서대로 등차수열을 이루고, a_2는 a_1과 a_3의 등차중항이다.

즉, $a_1+a_3=2a_2$이므로 $a_1+a_2+a_3=21$에 대입하면

$2a_2+a_2=21$, $3a_2=21$ $\quad \therefore a_2=7$

48 답 ①

a는 7과 13의 등차중항이므로 $a=\dfrac{7+13}{2}=10$

6은 a와 b의 등차중항이므로

$6=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{10+b}{2}$, $12=10+b$ $\quad \therefore b=2$

$\therefore a-b=10-2=8$

49 답 ②

b는 4와 64의 등차중항이므로

$b=\dfrac{4+64}{2}=34$

또, a는 4와 b의 등차중항이므로

$a=\dfrac{4+b}{2}=\dfrac{4+34}{2}=19$

또, c는 b와 64의 등차중항이므로

$c=\dfrac{b+64}{2}=\dfrac{34+64}{2}=49$

$\therefore a+b+c=19+34+49=102$

다른 풀이

b는 a와 c의 등차중항이므로 $a+c=2b$

이때, b는 4와 64의 등차중항이므로 $b=\dfrac{4+64}{2}=34$

$\therefore a+b+c=3b=3\times34=102$

50 답 ②

구하는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하면

$(a-d)+a+(a+d)=21$ ⋯ ㉠

$(a-d)\times a\times(a+d)=315$ ⋯ ㉡

㉠에서 $3a=21$이므로 $a=7$

$a=7$을 ㉡에 대입하면

$(7-d)\times7\times(7+d)=315$, $49-d^2=45$, $d^2=4$

$\therefore d=2$ 또는 $d=-2$

(i) $d=2$일 때, 구하는 세 수는 5, 7, 9이다.

(ii) $d=-2$일 때, 구하는 세 수는 9, 7, 5이다.

따라서 구하는 세 수의 제곱의 합은

$5^2+7^2+9^2=25+49+81=155$

다른 풀이

㉠에서 $a=7$이고 ㉡에서 $d^2=4$이므로 구하는 세 수의 제곱의 합은

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2$

$=(a^2-2ad+d^2)+a^2+(a^2+2ad+d^2)$

$=3a^2+2d^2=3\times7^2+2\times4=155$

51 답 ③

구하는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하면

$(a-d)+a+(a+d)=3a=3$ $\quad \therefore a=1$

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2$

$=(a^2-2ad+d^2)+a^2+(a^2+2ad+d^2)$

$=3a^2+2d^2=11$

그런데 $a=1$이므로 $2d^2=8$, $d^2=4$

$\therefore d=2$ 또는 $d=-2$

(i) $d=2$일 때, 구하는 세 수는 -1, 1, 3이다.

(ii) $d=-2$일 때, 구하는 세 수는 3, 1, -1이다.

따라서 구하는 세 수의 세제곱의 합은

$(-1)^3+1^3+3^3=27$

52 답 ②

구하는 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$라 하면

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=4a=20$

$\therefore a=5$

$(a-d)(a+d)=(a-3d)(a+3d)+32$

$a^2-d^2=a^2-9d^2+32$, $8d^2=32$, $d^2=4$

$\therefore d=2$ 또는 $d=-2$

(i) $d=2$일 때, 구하는 네 수는 -1, 3, 7, 11이다.

(ii) $d=-2$일 때, 구하는 네 수는 11, 7, 3, -1이다.

따라서 네 수의 곱은 $(-1)\times3\times7\times11=-231$이다.

53 답 ④

주어진 방정식의 세 근을 $a-d$, a, $a+d$라 하면

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=3a=-3$ $\quad \therefore a=-1$

$f(x)=x^3+3x^2-kx-6$이라 하면 방정식

$f(x)=0$의 한 근이 -1이므로

$f(-1)=-1+3+k-6=0$ $\quad \therefore k=4$

TIP

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 다음이 성립한다.

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$

(3) $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

54 답 ②

$S_{10}=\dfrac{10\times\{-7+29\}}{2}=110$

55 답 ⑤

첫째항이 -5이고 공차가 3인 등차수열에서 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$S_{20}=\dfrac{20\times\{2\times(-5)+(20-1)\times3\}}{2}=470$

56 답 ③

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$6=a+d$, $22=a+9d$

$\therefore a=4$, $d=2$

따라서 주어진 등차수열의 첫째항과 공차가 각각 4, 2이므로 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$S_{15}=\frac{15\times\{2\times4+(15-1)\times2\}}{2}=270$$

57 답 ②

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=a+4d=36$ ⋯ ㉠

$a_{13}=a+12d=84$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=12$, $d=6$

따라서 첫째항부터 제k항까지의 합이 324이므로

$$S_k=\frac{k\{2\times12+(k-1)\times6\}}{2}=324$$

$k(3k+9)=324$, $k^2+3k-108=0$

$(k-9)(k+12)=0$

$\therefore k=9$ 또는 $k=-12$

이때, k는 자연수이므로 $k=9$

58 답 ②

첫째항이 -8, 제20항이 38, 항의 수가 20인 등차수열의 합이므로

$$S_{20}=\frac{20\times(-8+38)}{2}=300$$

59 답 ⑤

첫째항이 -10, 제$(n+2)$항이 5, 항수가 $(n+2)$인 등차수열의 합이므로

$$S_{n+2}=\frac{(n+2)(-10+5)}{2}=-60$$

$\frac{n+2}{2}=12$, $n+2=24$

$\therefore n=22$

60 답 ③

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=\frac{10(2a+9d)}{2}=100$$

$\therefore 2a+9d=20$ ⋯ ㉠

$$S_{20}=\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=\frac{20(2a+19d)}{2}=500$$

$\therefore 2a+19d=50$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{7}{2}$, $d=3$

$$\therefore S_{30}=\frac{30\{2a+(30-1)d\}}{2}=\frac{30(2a+29d)}{2}$$

$$=\frac{30\left\{2\times\left(-\frac{7}{2}\right)+29\times3\right\}}{2}=1200$$

61 답 ③

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=\frac{10(2a+9d)}{2}=155$ $\quad\therefore 2a+9d=31$ ⋯ ㉠

$$S_{20}-S_{10}=\frac{20(2a+19d)}{2}-155=455$$

$\therefore 2a+19d=61$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

따라서 제21항부터 제30항까지의 합은

$$S_{30}-S_{20}=\frac{30\times(4+29\times3)}{2}-610=755$$

62 답 ③

50 이하의 자연수 중에서 2로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면 1, 3, 5, 7, ⋯, 49이므로 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이다.

이 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$

이때, $2n-1=49$에서 $n=25$이므로 49는 제25항이다.

따라서 구하는 합은 $\frac{25\times(1+49)}{2}=625$

63 답 ②

100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누어 떨어지는 수를 차례대로 나열하면 3, 6, 9, 12, ⋯, 99이므로 첫째항이 3, 공차가 3인 등차수열이다.

이 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=3+(n-1)\times3=3n$

이때, $3n=99$에서 $n=33$이므로 99는 제33항이다.

따라서 구하는 합은 $\frac{33\times(3+99)}{2}=1683$

64 답 ⑤

두 자리의 자연수 중에서 4의 배수를 차례대로 나열하면 12, 16, 20, ⋯, 96이므로 첫째항이 12, 공차가 4인 등차수열이다.

이 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=12+(n-1)\times4=4n+8$

이때, $4n+8=96$에서 $n=22$이므로 96은 제22항이다.

따라서 구하는 합은 $\frac{22\times(12+96)}{2}=1188$

65 답 ④

주어진 등차수열은 첫째항이 23, 공차가 -4이므로 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2\times23+(n-1)\times(-4)\}}{2}=n(25-2n)$$

$n(25-2n)<0$에서 $n>\frac{25}{2}=12.5$ $(\because n>0)$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 음수가 되는 n의 최솟값은 13이다.

Ⅲ P

66 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$d=a_5-a_4=-23-(-26)=3$

$a_4=a+3d=a+9=-26$에서 $a=-35$

$\therefore a_n=-35+(n-1)\times3=3n-38$

이때, 수열 $\{a_n\}$에서 양수인 항을 제k항이라 하면

$3k-38>0$에서 $3k>38$ $\quad\therefore k>\frac{38}{3}=12.\times\times\times$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제13항부터 양수이므로 첫째항부터 제12항까지의 합 S_{12}가 S_n의 최솟값이다.

$\therefore n=12$

67 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=a+3d=12$ ⋯ ㉠

$a_9=a+8d=-38$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=42$, $d=-10$

$\therefore a_n=42+(n-1)\times(-10)=-10n+52$

이때, 수열 $\{a_n\}$에서 양수인 항을 제k항이라 하면

$-10k+52>0$에서 $10k<52$ $\quad\therefore n<5.2$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제5항까지 양수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합 S_5가 S_n의 최댓값이다.

$\therefore S_5=\frac{5\times\{2\times42+(5-1)\times(-10)\}}{2}=110$

68 답 ②

제14항이 0보다 크거나 같고, 제15항이 0보다 작으면 첫째항부터 제14항까지의 합이 최대가 되므로

$a_{14}=80+13d\geq0$에서 $d\geq-\frac{80}{13}$ ⋯ ㉠

$a_{15}=80+14d<0$에서 $d<-\frac{40}{7}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 d의 범위는

$-6.\times\times\times=-\frac{80}{13}\leq d<-\frac{40}{7}=-5.\times\times\times$

이때, d는 정수이므로 $d=-6$

69 답 ①

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=n^2+3n-(n^2-2n+1+3n-3)$

$=2n+2$

(ii) $n=1$일 때, $a_1=S_1=4$

이때, (i)에서 $a_1=4$이므로 $a_n=2n+2(n\geq1)$

따라서 $a_{n+1}-a_n=\{2(n+1)+2\}-(2n+2)=2$이므로

수열$\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이다.

70 답 ④

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=\{(-2)\times10^2+10\}-\{(-2)\times9^2+9\}$

$=-190-(-153)=-37$

다른 풀이

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(-2n^2+n)-\{-2(n-1)^2+(n-1)\}$

$=-2n^2+n-(-2n^2+4n-2+n-1)$

$=-4n+3$

$\therefore a_{10}=-4\times10+3=-37$

71 답 ④

$a_1=S_1=3$이므로 $S_1=1^2+p\times1=3$에서 $p=2$

$\therefore S_n=n^2+2n$

$\therefore a_{10}=S_{10}-S_9=(10^2+2\times10)-(9^2+2\times9)$

$=120-99=21$

다른 풀이

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=n^2+2n-(n^2-2n+1+2n-2)$

$=2n+1$

$\therefore a_{10}=2\times10+1=21$

72 답 ②

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+4n-5)-\{(n-1)^2+4(n-1)-5\}$

$=n^2+4n-5-(n^2-2n+1+4n-4-5)$

$=2n+3$

(ii) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2+4\times1-5=0$

(i), (ii)에 의하여 $a_n=\begin{cases}0 & (n=1)\\ 2n+3 & (n\geq2)\end{cases}$

따라서 $a_k=185$에서 $k\neq1$이므로

$a_k=2k+3=185$에서 $2k=182$

$\therefore k=91$

Simple Q 등비수열

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 132~133

01 답 등비수열, 공비

02 답 1, 2

03 답 ar^{n-1}

04 답 등비중항

05 답 $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

06 답 ○

07 답 ×

08 답 ×

09 답 ○

10 답 ○

11 답 -2

12 답 $\frac{1}{2}$

13 답 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

14 답 $a_n=(-3)^n$

$a_n=(-3)\times(-3)^{n-1}=(-3)^n$

15 답 $a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로 $a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

16 답 $a_n=-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2}$

첫째항이 $\sqrt{3}$, 공비가 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$a_n=\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

$=(-1)\times(-\sqrt{3})\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}=-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2}$

17 답 $x=15$ 또는 $x=-15$

$x^2=3\times75=225$ $\quad\therefore x=15$ 또는 $x=-15$

18 답 $x=6$ 또는 $x=-6$

$x^2=2\times18=36$ $\quad\therefore x=6$ 또는 $x=-6$

19 답 1023

$S_5=\frac{3\times(4^5-1)}{4-1}=4^5-1=1023$

20 답 -15

$S_5=5\times(-3)=-15$

21 답 $\frac{11}{4}$

첫째항이 4, 공비가 $-\frac{1}{2}$이므로 첫째항부터 제5항까지의 합은

$$S_5=\frac{4\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{8}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right\}=\frac{11}{4}$$

22 답 45

첫째항이 9, 공비가 1이므로 첫째항부터 제5항까지의 합은

$S_5=5\times9=45$

23 답 $a_n=2\times3^{n-3}$

첫째항이 $2\times\frac{1}{3^2}$, 공비가 3이므로 일반항 a_n은

$a_n=\left(2\times\frac{1}{3^2}\right)\times3^{n-1}=2\times3^{n-3}$

24 답 10

$a_k=2\times3^{k-3}=2\times3^7$이므로 $k-3=7$

$\therefore k=10$

25 답 $\frac{1}{9}\times(3^{10}-1)$

첫째항이 $2\times\frac{1}{3^2}$, 공비가 3, 항의 수가 10이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$S_{10}=\frac{2\times\frac{1}{3^2}\times(3^{10}-1)}{3-1}=\frac{1}{9}\times(3^{10}-1)$$

26 답 $1000000\times(1.05)^{10}$원

$1000000\times(1+0.05)^{10}=1000000\times(1.05)^{10}$

27 답 $51a\times(1.02^{10}-1)$원

$$\frac{a(1+0.02)\times\{(1+0.02)^{10}-1\}}{(1+0.02)-1}=51a\times(1.02^{10}-1)$$

유형 연습 [+내신 유형]

문제편 pp. 134~137

28 답 ④

첫째항이 4이고, 공비가 3이므로

$4+3=7$

29 답 ④

ㄱ. 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 1인 등비수열이다.

ㄷ. 첫째항이 2, 공비가 0인 등비수열이다.

ㄹ. 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

ㅁ. 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열이다.

따라서 등비수열인 것의 개수는 4이다.

30 답 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$

첫째항이 9이고 공비가 $\frac{1}{3}$이므로

$a_n=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$

31 답 ②

주어진 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1=-\frac{3}{2}$, $a_2=-2$에서 $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-2}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$

$\therefore a_n=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

32 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2이고 공비가 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 일반항은 $a_n=2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

$\therefore a_9=2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{9-1}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$

33 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 공비가 $\frac{1}{3}$이므로 일반항은 $a_n=a\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$a_4=4$에서 $a\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=4$

$\therefore a=27\times4=108$

34 답 ①

첫째항이 16, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=16\times2^{n-1}=2^{n+3}$

이때, 1024를 제k항이라 하면

$2^{k+3}=1024=2^{10}$에서 $k+3=10$ $\quad\therefore k=7$

따라서 1024는 제7항이다.

35 답 ②

첫째항이 $\frac{1}{81}$, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=\frac{1}{81}\times3^{n-1}=3^{n-5}$

이때, $3^4=81$, $3^5=243$이므로 $3^{n-5}>100$에서

$n-5\geq5$ $\quad\therefore n\geq10$

따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제10항이다.

36 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=24$ ⋯ ㉠, $a_6=ar^5=-192$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠에서 $r^3=-8$ $\quad\therefore r=-2$($\because$ r는 실수)

이것을 ㉠에 대입하면 $a=6$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=6\times(-2)^{n-1}$이므로 $a_5=6\times(-2)^{5-1}=96$

37 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{a_9}{a_6}=\frac{ar^8}{ar^5}=r^3=4$

$\therefore \log_2 a_{25}-\log_2 a_{16}=\log_2\frac{a_{25}}{a_{16}}=\log_2\frac{ar^{24}}{ar^{15}}=\log_2 r^9$

$=\log_2(r^3)^3=\log_2 4^3$

$=\log_2 2^6=6$

38 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=10$ ⋯ ㉠, $a_5=ar^4=80$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\quad\therefore r=2$ ($\because$ r는 실수)

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=5$ $\quad\therefore a_n=5\times2^{n-1}$

$a_k=5\times2^{k-1}=640$에서 $2^{k-1}=128=2^7$이므로

$k-1=7$ $\quad\therefore k=8$

39 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_5:a_6=2:1$에서 $r=\frac{a_6}{a_5}=\frac{1}{2}$

또, $a_3+a_4=27$에서 $ar^2+ar^3=a(r^2+r^3)=27$

$r=\frac{1}{2}$을 대입하면

$a\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=27$, $\frac{3}{8}a=27$ $\quad\therefore a=72$

$\therefore a_1+a_2=a+ar=72+36=108$

40 답 ③

$\sqrt{5}$가 a와 b의 등비중항이므로 $ab=(\sqrt{5})^2=5$

41 답 ③

x, $x+6$, $4x$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $x+6$은 x와 $4x$의 등비중항이다.

즉, $(x+6)^2=x\times4x$에서

$3x^2-12x-36=0$, $x^2-4x-12=0$

$(x-6)(x+2)=0$ $\quad\therefore x=6$ ($\because x>0$)

42 답 ②

등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2이라 하면

$a+ar+ar^2=7$ ⋯ ㉠, $a\times ar\times ar^2=(ar)^3=-27$ ⋯ ㉡

㉡에서 $ar=-3$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{r}$

$a=-\frac{3}{r}$을 ㉠에 대입하면 $-\frac{3}{r}-3-3r=7$

위 식의 양변에 r를 곱하여 정리하면

$3r^2+10r+3=0$, $(3r+1)(r+3)=0$

$\therefore r=-\frac{1}{3}$ 또는 $r=-3$

(i) $a=9$, $r=-\frac{1}{3}$이면 $a=9$, $ar=-3$, $ar^2=1$

(ii) $a=1$, $r=-3$이면 $a=1$, $ar=-3$, $ar^2=9$

따라서 구하는 세 수는 1, -3, 9이므로 가장 작은 수는 -3이다.

43 답 ③

주어진 방정식의 세 근을 a, ar, ar^2이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=3$에서 $a(1+r+r^2)=3$ ⋯ ㉠

$a\times ar+a\times ar^2+ar\times ar^2=-6$에서

$a^2r(1+r+r^2)=-6$ ⋯ ㉡

$a\times ar\times ar^2=-k$에서 $a^3r^3=-k$ ⋯ ㉢

㉡÷㉠을 하면 $ar=-2$

따라서 ㉢에서 $k=-(ar)^3=8$

44 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{3}$이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$S_{10}=\frac{2\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{\frac{2}{3}}$$

$$=3\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}=3-\left(\frac{1}{3}\right)^9$$

45 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=6$ ⋯ ㉠

$a_5=ar^4=48$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\quad\therefore r=2(\because r$는 실수)

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=3$

따라서 첫째항부터 제6항까지의 합은

$$S_6=\frac{3\times(2^6-1)}{2-1}=189$$

46 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공비가 2이므로 일반항은

$a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$

이때, 512를 제k항이라 하면

$2^{k-1}=512=2^9$에서 $k-1=9$ $\quad\therefore k=10$

따라서 끝항이 제10항이므로 구하는 합은

$$S_{10}=\frac{1\times(2^{10}-1)}{2-1}=1023$$

47 답 ④

$3+3\times(-2)+3\times(-2)^2+3\times(-2)^3+\cdots+3\times(-2)^8$은 첫째항이 3, 공비가 -2인 등비수열의 첫째항부터 제9항까지의 합이므로

$$S_9=\frac{3\times\{1-(-2)^9\}}{1-(-2)}=\frac{3\times(1+512)}{3}=513$$

48 답 511

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_4=a+ar^3=a(1+r^3)=3$ ⋯ ㉠

$a_4+a_7=ar^3+ar^6=ar^3(1+r^3)=24$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\quad\therefore r=2(\because r$는 실수)

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $9a=3$에서 $a=\frac{1}{3}$

따라서 $S=\dfrac{\frac{1}{3}\times(2^9-1)}{2-1}=\dfrac{511}{3}$이므로 $3S=511$

49 답 ②

첫째항부터 제6항까지의 합이 2이므로

$S_6=\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=2$ ⋯ ㉠

첫째항부터 제12항까지의 합이 8이므로

$S_{12}=\dfrac{a(r^{12}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^6+1)(r^6-1)}{r-1}=8$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2(r^6+1)=8$, $r^6+1=4$ $\quad\therefore r^6=3$ ⋯ ㉢

$\therefore S_{18}=\dfrac{a(r^{18}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^6-1)(r^{12}+r^6+1)}{r-1}$

$=2(r^{12}+r^6+1)(\because$ ㉠)

$=2\{(r^6)^2+r^6+1\}=2\times(3^2+3+1)(\because$ ㉢)

$=26$

50 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=6$ ⋯ ㉠

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}+a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$

$=\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^{10}+1)(r^{10}-1)}{r-1}=6+30=36$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $6(r^{10}+1)=36$ $\quad\therefore r^{10}=5$ ⋯ ㉢

$a_1+a_2+\cdots+a_{20}+a_{21}+\cdots+a_{40}$

$=\dfrac{a(r^{40}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^{20}+1)(r^{20}-1)}{r-1}$

$=36\times(5^2+1)(\because$ ㉡, ㉢)

$=936$

$\therefore a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{40}=936-36=900$

다른 풀이

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^9=6$ ⋯ ㉠

$30=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}=a_1r^{10}+a_1r^{11}+\cdots+a_1r^{19}$

$=r^{10}(a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^9)$

$=r^{10}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})=6r^{10}(\because$ ㉠)

따라서 $r^{10}=5$이므로

$a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{40}=a_1r^{20}+a_1r^{21}+\cdots+a_1r^{39}$

$=r^{20}(a_1+a_1r+\cdots+a_1r^{19})$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{20})r^{20}$

$=(6+30)\times5^2=900$

Ⅲ Q

51 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=4$ ⋯ ㉠

$a_6=ar^5=-32$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-8$ $\quad \therefore r=-2(\because r$는 실수)

$r=-2$를 ㉠에 대입하면 $a=1$

따라서 $a_n=1\times(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$이므로

$a_{2n}=(-2)^{2n-1}=\{(-2)^2\}^n\times(-2)^{-1}=-\frac{1}{2}\times4^n$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $-\frac{1}{2}\times4=-2$, 공비가 4인 등비수열이므로 첫째항부터 제9항까지의 합은

$$S_9=\frac{(-2)\times(4^9-1)}{4-1}=-\frac{2}{3}\times(4^9-1)$$

TIP

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열이면
$a_1=a,\ a_2=ar,\ a_3=ar^2,\ \cdots,\ a_n=ar^{n-1}$이다.
이때, 수열 $\{a_{2n}\}$은 $ar,\ ar^3,\ ar^5, \cdots$이고
수열 $\{a_{2n-1}\}$은 $a,\ ar^2,\ ar^4,\ \cdots$이다.
즉, 두 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$은 공비가 r^2인 등비수열이다.

52 답 ④

$a_{10}=S_{10}-S_9=(5^{10}-3)-(5^9-3)$

$=5^{10}-5^9=4\times5^9$

다른 풀이

(i) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n-3)-(5^{n-1}-3)$

$=5^n-5^{n-1}=5^{n-1}(5-1)=4\times5^{n-1}$

(ii) $n=1$일 때, $a_1=S_1=5^1-3=2$

따라서 $a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ 4\times5^{n-1} & (n\ge2)\end{cases}$이므로

$a_{10}=4\times5^9$

53 답 ②

$a_1=S_1=3^2-2=7$

$a_5=S_5-S_4=(3^6-2)-(3^5-2)$

$=3^6-3^5=3^5\times(3-1)=486$

$\therefore a_1+a_5=7+486=493$

다른 풀이

(i) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^{n+1}-2)-(3^n-2)$

$=3^{n+1}-3^n=3^n(3-1)=2\times3^n$

(ii) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3^2-2=7$

따라서 $a_n=\begin{cases}7 & (n=1)\\ 2\times3^n & (n\ge2)\end{cases}$이므로

$a_1+a_5=7+2\times3^5=493$

54 답 ④

(i) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3\times2^n-3)-(3\times2^{n-1}-3)$

$=3\times2^n-3\times2^{n-1}=3\times2^{n-1}$

(ii) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3\times2-3=3$

이때, (i)에서 $a_1=3\times2^0=3$이므로 $a_n=3\times2^{n-1}(n\ge1)$

55 답 ②

(i) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n-1}+k)-(2^{n-2}+k)$

$=2^{n-1}-2^{n-2}=2^{n-2}(2-1)=2^{n-2}$

(ii) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2^0+k=k+1$

이때, (i)에서 $a_1=2^{-1}=\frac{1}{2}$이므로 첫째항부터 등비수열이 되기 위해서는 $k+1=\frac{1}{2}$ $\quad \therefore k=-\frac{1}{2}$

56 답 ④

현재 물탱크에 들어 있는 물의 양은 20톤이고, 매달 전 달보다 10 %씩 감소하므로 12개월 후의 물탱크의 물의 양은

$20\times\left(1-\frac{10}{100}\right)^{12}=20\times0.9^{12}=20\times0.3=6$(톤)

57 답 ③

100만 원을 월이율 1.5 %의 복리로 계산한 12개월 후의 원리합계는

$100\times(1+0.015)^{12}=100\times1.015^{12}=100\times1.2=120$(만 원)

58 답 ③

10년 후의 원리합계를 S라 하면

$S=30000\times(1+0.06)+30000\times(1+0.06)^2+$

$\cdots+30000\times(1+0.06)^{10}$

$=30000\times1.06+30000\times1.06^2+\cdots+30000\times1.06^{10}$

이므로 S는 첫째항이 30000×1.06, 공비가 1.06, 항의 수가 10인 등비수열의 합이다.

$\therefore S=\frac{30000\times1.06\times(1.06^{10}-1)}{1.06-1}$

$=\frac{3\times10^4\times1.06\times(1.8-1)}{0.06}=424000$(원)

59 답 ②

예금할 일정한 금액이 a만 원이고 2021년 말의 원리합계를 S라 하면

$S=a+a(1+0.05)+a(1+0.05)^2+a(1+0.05)^3$

$=a+a\times1.05+a\times1.05^2+a\times1.05^3$

이므로 S는 첫째항이 a, 공비가 1.05, 항의 수가 4인 등비수열의 합이다. 이때, $S=550$이어야 하므로

$\frac{a(1.05^4-1)}{1.05-1}=\frac{a(1.22-1)}{0.05}=550$

$\therefore a=\frac{550\times0.05}{0.22}=125$

연습 문제 [P~Q] [기출 + 기출 변형]

문제편 pp. 138~139

01 답 14

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5-a_3=6$에서

$(a+4d)-(a+2d)=2d=6$

$\therefore d=3$

또, $a_2=2$에서

$a+d=a+3=2$

$\therefore a=-1$

따라서 $\{a_n\}=-1+(n-1)\times3=3n-4$이므로

$a_6=3\times6-4=14$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $d=3$이므로

$a_6=a_5+d=a_4+2d=a_3+3d=a_2+4d$

$=2+4\times3=14$

02 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_2=5$, $a_7:a_{11}=5:8$일 때, 처음으로 80 이상이 되는 항은?

등차수열의 일반항은 첫째항과 공차만 알면 구할 수 있어.

80 이상인 항을 제k항이라 하고 k의 최솟값을 구하는 거야.

① 제24항 ② 제25항 ③ 제26항

④ 제27항 ⑤ 제28항

1st 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하자.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=5$ ⋯ ㉠

첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$

$a_7:a_{11}=(a+6d):(a+10d)=5:8$에서

$5(a+10d)=8(a+6d)$, $5a+50d=8a+48d$

$\therefore 3a-2d=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

㉠$\times2+$㉡에서 $a=2$, 이것을 ㉠에 대입하면 $d=3$

$\therefore a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$

2nd 수열 $\{a_n\}$이 처음으로 80 이상이 되는 항을 구하자.

이때, 80 이상이 되는 항을 제k항이라 하면

$3k-1\geq80$에서 $k\geq27$

따라서 처음으로 80 이상이 되는 항은 제27항이다.

03 답 ③

$a_{2n}=8n+3$에서

$a_2=8\times1+3=11$, $a_4=8\times2+3=19$이므로

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=11$ ⋯ ㉠

$a_4=a+3d=19$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=7$, $d=4$

$\therefore a_{11}=a+10d=7+10\times4=47$

다른 풀이

$a_{2n}=8n+3=4(2n-1)+4+3=4(2n-1)+7$

$2n$ 대신 n을 대입하면 $a_n=4(n-1)+7$

$\therefore a_{11}=4\times10+7=47$

TIP

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 수열 $\{a_{2n}\}$도 등차수열이고 공차는 $2d$이다.

또, 등차수열의 일반항은 n에 대한 일차식이고 공차는 n의 계수이다. 즉, 이 문제에서 $a_{2n}=8n+3$이므로 수열 $\{a_{2n}\}$의 공차는 8이고 수열 $\{a_n\}$의 공차는 4이다.

04 답 ②

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면 다항식 $f(x)$를

$x-1$, $x-3$, $x-4$로 나눈 나머지는 각각 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$이다.

이때, $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2f(3)=f(1)+f(4)$에서

$2(9+3a+b)=(1+a+b)+(16+4a+b)$

$18+6a+2b=17+5a+2b$

$\therefore a=-1$

심플 정리

[나머지정리]

x에 대한 다항식 $f(x)$를

(1) $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$이다.

(2) $ax-b$로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$이다.

05 답 ③

주어진 수열은 두 수 -2, 34 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등차수열이야.

수열 -2, a_1, a_2, ⋯, a_n, 34가 등차수열을 이루고, 그 합이 160일 때, 공차 d와 n의 값의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12

④ 13 ⑤ 14

1st n의 값을 구하자.

수열 -2, a_1, a_2, ⋯, a_n, 34는 등차수열이고 항의 수가 $n+2$이다.

이때, 이 수열의 첫째항부터 제$(n+2)$항까지의 합이 160이므로 $\dfrac{(n+2)(-2+34)}{2}=160$에서

첫째항이 a, 공차가 d, 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $S=\dfrac{n(a+l)}{2}=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

$16(n+2)=160$, $n+2=10$

$\therefore n=8$

2nd 공차 d의 값을 구하자.

즉, 34는 제10항이므로 $a_{10}=34$에서

$-2+(10-1)d=34$

$9d=36$ $\therefore d=4$

$\therefore n+d=8+4=12$

Ⅲ P~Q 연습

06

답 1290

6으로 나누면 3이 남는 수는

3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, ⋯

⋯ Ⅰ

8로 나누면 5가 남는 수는

5, 13, 21, 29, 37, 45, 53, 61, 69, 77, ⋯ ⋯ Ⅱ

이들의 공통인 수로 이루어진 수열은

21, 45, 69, ⋯

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 21, 공차가 24인 등차수열이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\dfrac{10\times\{2\times21+(10-1)\times24\}}{2}$

$=1290$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	6으로 나누면 3이 남는 수를 찾는다.	30%
Ⅱ	8로 나누면 5가 남는 수를 찾는다.	30%
Ⅲ	$a_1+a_2+\cdots+a_{10}$의 값을 구한다.	40%

TIP

자연수 d로 나누었을 때의 나머지가 a인 자연수를 작은 것부터 나열하면 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열이다.
즉, 6으로 나누면 3이 남는 수를 작은 수부터 차례로 나열하면 첫째항이 3, 공차가 6인 등차수열이다.

07

답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=23$ ⋯ ㉠

$a_8=a+7d=8$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=29$, $d=-3$

$\therefore a_n=29+(n-1)\times(-3)$

$=-3n+32$

이때, 수열 $\{a_n\}$에서 양수인 항을 제k항이라 하면

$a_k=-3k+32>0$에서 $3k<32$

$\therefore k<\dfrac{32}{3}=10.\times\times\times$

수열 $\{a_n\}$은 제10항까지 양수이므로 첫째항부터 제10항까지 합 S_{10}이 S_n의 최댓값이다.

$\therefore n=10$

08

답 99

$a_{50}=S_{50}-S_{49}=50^2-49^2$

$=(50-49)(50+49)=99$

다른 풀이

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1\,(n\geq2)$

$\therefore a_{50}=2\times50-1=99$

09

답 ③

주어진 등비수열의 첫째항은 2, 공비는 $\dfrac{1}{2}$이므로

$a_n=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

따라서 제10항은 $a_{10}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{1}{256}$

10

답 32

첫째항이 a, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=a\times2^{n-1}$이므로

$a_3=a\times2^2=4a=8$ $\therefore a=2$

따라서 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$이므로

$a_5=2^5=32$

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_5=a_4\times r=a_3\times r^2$

이때, $a_3=8$, $r=2$이므로 $a_5=8\times2^2=32$

11

답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2+a_3=ar+ar^2=ar(1+r)=5$ ⋯ ㉠

$a_2a_3+a_2a_4=a^2r^3+a^2r^4=a^2r^3(1+r)=20$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $ar^2=4$

$\therefore a_1a_3a_5=a\times ar^2\times ar^4=a^3r^6=(ar^2)^3=4^3=64$

12

답 ②

세 수 a_l, a_m, a_n이 이 순서대로 등차수열을 이루면 $m=\dfrac{l+n}{2}$이야.

공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 항 a_2, a_k, a_8은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 항 a_1, a_2, a_k는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $k+a_1$의 값은?

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면 $b^2=ac$야.

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

1st 등차중항을 이용하여 k의 값을 구하자.

a_2, a_k, a_8이 순서대로 등차수열을 이루므로

$k=\dfrac{2+8}{2}=5$

a_k가 a_2, a_8의 등차중항이므로 k는 두 수 2, 8의 평균값이어야 해.

2nd 등비중항을 이용하여 a_1의 값을 구하자.

$a_2=a_1+6$, $a_5=a_1+24$이고

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1, 공차가 6인 등차수열이야.

이때, a_1, a_2, a_5가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_2{}^2=a_1\times a_5$에서

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면 b를 a, b의 등비중항이라 하고 $b^2=ac$가 성립해.

$(a_1+6)^2=a_1\times(a_1+24)$

$a_1{}^2+12a_1+36=a_1{}^2+24a_1$

$12a_1=36$ $\therefore a_1=3$

$\therefore k+a_1=5+3=8$

13

답 ①

등비수열 2, x_1, x_2, $\cdots$, 32의 첫째항은 2이고 제n항이 32이므로 공비를 r라 하면

$a_n=2r^{n-1}=32$

$\therefore r^{n-1}=16 \cdots$ ㉠

$S_n=\dfrac{2(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{2(1-r\times r^{n-1})}{1-r}$

$=\dfrac{2(1-16r)}{1-r}(\because$ ㉠$)=22$

이므로 $1-16r=11(1-r)$

$5r=-10 \qquad \therefore r=-2$

14

답 96

$\log_2(S_n-3)=n$에서 $S_n=2^n+3$

$a_6+a_7=S_7-S_5=(2^7+3)-(2^5+3)=2^7-2^5=96$

다른 풀이

(ⅰ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n+3-(2^{n-1}+3)$

$=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$

(ⅱ) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2^1+3=5$

따라서 $a_n=\begin{cases} 5 & (n=1) \\ 2^{n-1} & (n\geq 2) \end{cases}$이므로

$a_6=2^5=32$, $a_7=2^6=64$

$\therefore a_6+a_7=96$

심플 정리

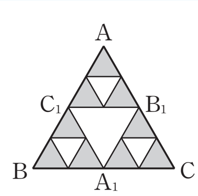
[로그의 정의]

임의의 양수 b에 대하여 $a^x=b(a>0, a\neq 1)$인 실수 x는 오직 하나 존재한다. 이때, $x=\log_a b$로 나타내고 $\log_a b$에서 a를 밑, b를 진수라 한다.

15

답 ①

한 변의 길이가 4인 정삼각형 모양의 종이 ABC의 세 변의 중점을 연결하여 만든 정삼각형 $A_1B_1C_1$을 오려내고 남은 부분의 넓이를 a_1이라 하자.



오려내고 남은 부분이 전체에서 얼마나 차지하고 있는지 알아야 해.

정삼각형 $A_1B_1C_1$을 오려내고 남은 세 정삼각형 AC_1B_1, C_1BA_1, B_1A_1C에서 각각 세 변의 중점을 연결하여 만든 정삼각형을 오려내고 남은 부분의 넓이를 a_2라 하자.

이와 같은 방법으로 10회 반복한 후 남은 정삼각형의 넓이 a_{10}의 값은?

일정한 비율의 정삼각형을 오려내니까 각 시행마다 남게 되는 종이의 넓이는 등비수열을 이뤄.

① $\sqrt{3}\times\dfrac{3^{10}}{4^9}$ ② $\sqrt{3}\times\dfrac{3^9}{4^9}$ ③ $\dfrac{3^{10}}{4^9}$

④ $\dfrac{3^9}{4^9}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{3^{10}}{4^{10}}$

1st 한 번의 시행으로 남게 되는 종이의 넓이와 시행하기 전의 넓이를 비교하자.

한 번의 시행으로 남아 있는 종이의 넓이는 시행하기 전의 정삼각형의 넓이의 $\dfrac{3}{4}$이다.

2nd n회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이를 구하고 a_{10}의 값을 구하자.

이때, 정삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=4\sqrt{3}$이므로

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 그 전의 넓이의 $\dfrac{3}{4}$이므로 $a_1=\dfrac{3}{4}\times 4\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는 그 전의 넓이의 $\dfrac{3}{4}$이므로 $a_2=\dfrac{3}{4}\times 3\sqrt{3}=\dfrac{9}{4}\sqrt{3}$

$\vdots$

따라서 n회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\times 4\sqrt{3}$이므로 10회 시행 후 남아 있는 종이의

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $3\sqrt{3}$이고 공비가 $\dfrac{3}{4}$인 등비수열이야.

넓이 a_{10}은 $a_{10}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}\times 4\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\dfrac{3^{10}}{4^9}$

16

답 ④

$10\times(1+0.01)+10\times(1+0.01)^2$

$+\cdots+10\times(1+0.01)^{12}$

$=10\times 1.01+10\times 1.01^2+\cdots+10\times 1.01^{12}$

$=\dfrac{10\times 1.01\times(1.01^{12}-1)}{1.01-1}=1010\times(1.13-1)$

$=1010\times 0.13=131.3$(만 원)

Ⅲ

P~Q 연습

Simple R 합의 기호 Σ

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 140 ~ 141

01 답 10, k

02 답 30, 11

03 답 6

04 답 $3k$

05 답 190

06 답 ○

07 답 ×

08 답 ○

09 답 ×

10 답 ○

11 답 $\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k}$

12 답 $\sum_{k=1}^{5} 2$

13 답 $\sum_{k=1}^{10} (2k+1)^2$

14 답 $\sum_{k=1}^{n} 2^k$

15 답 $2+3+4+\cdots+11$

16 답 $1+3+3^2+\cdots+3^9$

17 답 $2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$

18 답 $2\times3+3\times4+4\times5+\cdots+10\times11$

19 답 55

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=35+20=55$

20 답 15

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=35-20=15$

21 답 30

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-3b_k+2)$

$=2\sum_{k=1}^{10}a_k-3\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}2$

$=2\times35-3\times20+2\times10=30$

22 답 57

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+4a_k+4\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4$

$=5+4\times3+4\times10=57$

23 답 9

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2-2a_k+1\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=5-2\times3+1\times10=9$

24 답 74

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-3)^2=\sum_{k=1}^{10}\{4(a_k)^2-12a_k+9\}$

$=4\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2-12\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}9$

$=4\times5-12\times3+9\times10=74$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 142 ~ 143

25 답 ④

$\sum_{k=1}^{15}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_{14}+a_{15}$이고

$\sum_{k=1}^{14}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_{14}$이므로

$a_{15}=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{14}a_k=7$

26 답 ②

$\sum_{k=2}^{10}a_k=a_2+a_3+\cdots+a_9+a_{10}$이고

$\sum_{k=1}^{9}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_9$이므로

$a_{10}-a_1=\sum_{k=2}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{9}a_k$

$=4-5=-1$

27 답 ③

③ $1+5+5^2+\cdots+5^n=\sum_{k=1}^{n+1}5^{k-1}$

28 답 ①

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=n^2$에서

$(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})=n^2$

즉, $\sum_{k=1}^{2n}a_k=n^2$이므로 양변에 $n=5$를 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}a_k=5^2=25$

29 답 ④

$\sum_{k=1}^{n}(k+3)^2-\sum_{k=1}^{n}(k^2+6k)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+6k+9)-\sum_{k=1}^{n}(k^2+6k)$

$=\sum_{k=1}^{n}\{k^2+6k+9-(k^2+6k)\}$

$=\sum_{k=1}^{n}9=9n$

30 답 ③

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+2a_k+1\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\times(-10)+1\times10$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2-10=35$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=45$$

31 답 ④

$$\sum_{k=1}^{n}\{(a_k)^2+(b_k)^2\}=\sum_{k=1}^{n}\{(a_k+b_k)^2-2a_kb_k\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2-2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$
$$=30-2\times5=20$$

32 답 ①

$$\sum_{k=3}^{n}(k^2+4)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+4)-\sum_{k=1}^{2}(k^2+4)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+4)-\{(1^2+4)+(2^2+4)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+4)-13$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-\sum_{k=3}^{n}(k^2+4)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2+4)-13\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{(k^2+2k+1)-(k^2+4)\}+13$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-3)+13$$

따라서 $a=2$, $b=-3$, $c=13$이므로

$a+b+c=2+(-3)+13=12$

33 답 ①

첫째항이 -3이고 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=-3+(n-1)\times4=4n-7$

이때, $\sum_{k=5}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{4}a_k$이므로 구하는 값은 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합에서 첫째항부터 제4항까지의 합을 뺀 것과 같다.

$$\therefore \sum_{k=5}^{10}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{4}a_k$$
$$=\frac{10\times\{2\times(-3)+9\times4\}}{2}-\frac{4\times\{2\times(-3)+3\times4\}}{2}$$
$$=150-12=138$$

다른 풀이

$a_n=-3+(n-1)\times4=4n-7$이므로

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$임을 이용하면

$$\sum_{k=5}^{10}(4k-7)=\sum_{k=1}^{10}(4k-7)-\sum_{k=1}^{4}(4k-7)$$
$$=4\times\frac{10\times11}{2}-7\times10-\left(4\times\frac{4\times5}{2}-7\times4\right)$$
$$=138$$

34 답 ②

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$\sum_{k=1}^{20}a_k$는 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의

합이므로 $\sum_{k=1}^{20}a_k=\frac{20(2a+19\times2)}{2}=20a+380=480$에서

$20a=100 \qquad \therefore a=5$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 5, 공차가 2이므로

$a_n=5+(n-1)\times2=2n+3$

$\therefore a_5=2\times5+3=13$

다른 풀이

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 상수 p에 대하여

$a_n=2n+p$라 하면

$$\sum_{k=1}^{20}(2k+p)=2\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}p$$
$$=2\times\frac{20\times21}{2}+p\times20$$
$$=420+20p=480$$

따라서 $p=3$이므로 $a_n=2n+3$

$\therefore a_5=2\times5+3=13$

35 답 ②

$$\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k$$
$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10})$$
$$=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}+\frac{10(b_1+b_{10})}{2}$$
$$=5(a_1+a_{10})+5(b_1+b_{10})$$
$$=5\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}$$
$$=5\times(20+50)=350$$

다른 풀이

$$\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)$$
$$=\frac{10\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}}{2}$$
$$=\frac{10\times(20+50)}{2}=350$$

TIP

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d_1$, $b_n=b_1+(n-1)d_2$이므로

$a_n+b_n=\{a_1+(n-1)d_1\}+\{b_1+(n-1)d_2\}$

$=(a_1+b_1)+(n-1)(d_1+d_2)$

즉, 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 a_1+b_1이고 공차가 d_1+d_2인 등차수열이다.

Ⅲ R

36 답 ④

첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5=1+4d=13$에서 $4d=12$ $\quad\therefore d=3$

즉, $a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$이므로

$a_{2n}=3\times2n-2=6n-2$ ⋯ ㉠

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=6\times1-2=4$이고 공차가 6인 등차수열이다. 이때, $\sum_{k=1}^{2n}a_{2k}$는 등차수열 $\{a_{2n}\}$의 첫째항부터 제$2n$항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{2n}a_{2k}=\frac{2n\{2\times4+(2n-1)\times6\}}{2}=12n^2+2n$$

다른 풀이

㉠에서 $a_{2k}=6k-2$이므로

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$임을 이용하면

$$\sum_{k=1}^{2n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{2n}(6k-2)=6\times\frac{2n(2n+1)}{2}-2\times2n$$
$$=12n^2+2n$$

37 답 ③

$\sum_{k=1}^{6}2^k$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{6}2^k=\frac{2\times(2^6-1)}{2-1}=126$$

38 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=3$ ⋯ ㉠

$a_4=ar^3=27$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠에서 $r^2=9$ $\quad\therefore r=3(\because r>0)$

㉠에서 $a=1$

즉, $a_n=1\times3^{n-1}=3^{n-1}$이므로

$a_{2n}=3^{2n-1}=3\times3^{2(n-1)}=3\times9^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $3\times9^0=3$이고 공비가 9인 등비수열이다. 이때, $\sum_{k=1}^{10}a_{2k}$는 등비수열 $\{a_{2n}\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=\frac{3\times(9^{10}-1)}{9-1}=\frac{3\times(9^{10}-1)}{8}$$

39 답 ②

$\log_2 a_n=2n-1$이므로

$a_n=2^{2n-1}=2\times2^{2(n-1)}=2\times4^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $2\times4^0=2$, 공비가 4인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{2\times(4^{10}-1)}{4-1}=\frac{2\times(2^{20}-1)}{3}$$
$$=\frac{2^{21}-2}{3}$$

$\therefore p=21$

40 답 ③

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a이고 공비가 r^2인 등비수열이고 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 ar이고 공비가 r^2인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20}a_{2k-1}=\frac{a\{1-(r^2)^{20}\}}{1-r^2}=\frac{a(1-r^{40})}{1-r^2}=80 \cdots ㉠$$

$$\sum_{k=1}^{20}a_{2k}=\frac{ar\{1-(r^2)^{20}\}}{1-r^2}=\frac{ar(1-r^{40})}{1-r^2}=40 \cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면 $r=\frac{1}{2}$

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\sum_{k=1}^{20}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{20}a_{2k}=80+40=120$에서

$$\sum_{k=1}^{20}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{20}a_{2k}=\sum_{k=1}^{20}(a_{2k-1}+a_{2k})$$
$$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{39}+a_{40})$$
$$=\sum_{k=1}^{40}a_k=\frac{a(1-r^{40})}{1-r}$$
$$=120 \cdots ㉢$$

한편, 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a이고 공비가 r^2인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20}a_{2k-1}=\frac{a\{1-(r^2)^{20}\}}{1-r^2}=\frac{a(1-r^{40})}{1-r^2}$$
$$=\frac{a(1-r^{40})}{(1+r)(1-r)}=80 \cdots ㉣$$

㉢을 ㉣에 대입하면 $120\times\frac{1}{1+r}=80$에서

$\frac{1}{1+r}=\frac{2}{3}$, $2+2r=3$ $\quad\therefore r=\frac{1}{2}$

TIP

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$이므로

$a_{2n-1}=ar^{(2n-1)-1}=a(r^2)^{n-1}$이고

$a_{2n}=ar^{2n-1}=ar\times r^{2(n-1)}=ar\times(r^2)^{n-1}$이다.

즉, 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a이고 공비가 r^2인 등비수열이고, 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 ar이고 공비가 r^2인 등비수열이다.

Simple S 여러 가지 수열의 합

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 144 ~ 145

01 답 5, 5, 15

02 답 5, 5, 5, 2, 55

03 답 k^3, 5, 5, 225

04 답 2

05 답 k, $k+1$

06 답 ×

07 답 ×

08 답 ×

09 답 ○

10 답 ×

11 답 210

$$1+2+3+\cdots+20=\sum_{k=1}^{20}k=\frac{20\times(20+1)}{2}=210$$

12 답 385

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\sum_{k=1}^{10}k^2$$
$$=\frac{10\times(10+1)(2\times10+1)}{6}=385$$

13 답 3025

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3=\left\{\frac{10\times(10+1)}{2}\right\}^2$$
$$=3025$$

14 답 65

$$\sum_{k=1}^{10}(k+1)=\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1=\frac{10\times(10+1)}{2}+1\times10=65$$

15 답 80

$$\sum_{k=1}^{10}(2k-3)=2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=2\times\frac{10\times(10+1)}{2}-3\times10=80$$

16 답 70

$$\sum_{k=1}^{5}k(k+1)=\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{5}k^2+\sum_{k=1}^{5}k$$
$$=\frac{5\times(5+1)(2\times5+1)}{6}+\frac{5\times(5+1)}{2}$$
$$=70$$

17 답 35

$$\sum_{k=1}^{5}(k-2)(k+2)=\sum_{k=1}^{5}(k^2-4)=\sum_{k=1}^{5}k^2-\sum_{k=1}^{5}4$$
$$=\frac{5\times(5+1)(2\times5+1)}{6}-4\times5=35$$

18 답 $\frac{2}{5}$

$$\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}$$
$$=\frac{2}{5}$$

19 답 $\frac{5}{6}$

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$$
$$=1-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{5}{6}$$

20 답 $\frac{7}{15}$

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{13\times15}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{5\times7}+\cdots+\frac{2}{13\times15}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{15}\right)$$
$$=\frac{7}{15}$$

21 답 2

$$\sum_{k=1}^{8}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})$$
$$=\sqrt{9}-\sqrt{1}$$
$$=2$$

22 답 2

$$\sum_{k=3}^{14}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$$
$$=\sum_{k=3}^{14}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$$
$$=\sum_{k=3}^{14}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$$
$$=\sqrt{16}-\sqrt{4}=2$$

23 답 9

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$
$$=\sqrt{100}-1=9$$

24 답 6

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{49}+\sqrt{47}}$$
$$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{47})$$
$$=\sqrt{49}-1=6$$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 146~147

25 답 ④

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-3)=2\times\frac{n(n+1)}{2}-3\times n$$
$$=n^2-2n=224$$

$n^2-2n-224=0$, $(n+14)(n-16)=0$

$\therefore$ $n=-14$ 또는 $n=16$

이때, n은 자연수이므로 $n=16$

26 답 ④

$$\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2-\sum_{k=1}^{10}(k^2+3)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2+4k+4)-\sum_{k=1}^{10}(k^2+3)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+4k+4)-(k^2+3)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(4k+1)=4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=4\times\frac{10\times11}{2}+1\times10=230$$

27 답 ④

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2-k+1)+\sum_{i=1}^{10}(i^2+i-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-k+1)+\sum_{k=1}^{10}(k^2+k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2-k+1)+(k^2+k-1)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}2k^2=2\sum_{k=1}^{10}k^2$$
$$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}=770$$

28 답 ⑤

$$\sum_{k=1}^{10}(k^3+3k)=\sum_{k=1}^{10}k^3+3\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+3\times\frac{10\times11}{2}=3190$$

29 답 ⑤

$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+4n$이므로

$$a_{25}=\sum_{k=1}^{25}a_k-\sum_{k=1}^{24}a_k=(25^2+4\times25)-(24^2+4\times24)$$
$$=725-672=53$$

다른 풀이

$n\geq2$일 때,

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=(n^2+4n)-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$$
$$=2n+3$$

$\therefore$ $a_{25}=2\times25+3=53$

TIP

다른 풀이에서 $n\geq2$일 때, $a_n=2n+3$이고

$a_1=\sum_{k=1}^{1}a_k=1^2+4\times1=5$이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=2n+3(n\geq1)$이다.

30 답 200

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n(n+1)=n^2+n$이라 하면

(i) $n=1$일 때 $a_1=S_1=2$

(ii) $n\geq2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}=2n \cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $n=1$을 대입하면 $a_1=2$

$\therefore$ $a_n=2n(n\geq1)$

따라서 $a_{2k-1}=2(2k-1)=4k-2$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}(4k-2)=4\times\frac{10\times11}{2}-2\times10$$
$$=220-20=200$$

31 답 ①

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n(n-2)=n^2-2n$이라 하면

(i) $n=1$일 때 $a_1=S_1=-1$

(ii) $n\geq2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(n^2-2n)-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$$
$$=2n-3 \cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $n=1$을 대입하면 $a_1=-1$

$\therefore$ $a_n=2n-3(n\geq1)$

따라서 $a_{3k}=6k-3$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}ka_{3k}=\sum_{k=1}^{10}k(6k-3)=\sum_{k=1}^{10}(6k^2-3k)$$
$$=6\times\frac{10\times11\times21}{6}-3\times\frac{10\times11}{2}$$
$$=2310-165=2145$$

32 답 ③

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n}{n+1}$이라 하면

(i) $n=1$일 때 $a_1=S_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(ii) $n\geq2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}$$
$$=\frac{n^2-(n-1)(n+1)}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)} \cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $n=1$을 대입하면 $a_1=\frac{1}{2}$

따라서 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}(n\ge1)$이므로 $\frac{1}{a_n}=n(n+1)$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{20}k(k+1)=\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=1}^{20}k$

$=\frac{20\times21\times41}{6}+\frac{20\times21}{2}=3080$

33 답 201

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{100\times101}$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$

$=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$

따라서 $a=101$, $b=100$이므로 $a+b=101+100=201$

심플 정리

[부분분수]

(1) $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

(2) $\frac{1}{ABC}=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)$

34 답 ②

$\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{(k-1)(k+1)}$

$=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{36}{55}$

35 답 ①

$\frac{2}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}}=\frac{2(\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1})}{k-1-(k+1)}$

$=\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{80}\frac{2}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})$

$=(\sqrt{2}-0)+(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{80}-\sqrt{78})+(\sqrt{81}-\sqrt{79})$

$=0-1+\sqrt{80}+\sqrt{81}=4\sqrt{5}+8$

따라서 $a=4$, $b=8$이므로 $a+b=4+8=12$

36 답 ③

$a_n=\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{2n-1-(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제k항까지의 합을 S_k라 하면

$S_k=\sum_{n=1}^{k}a_n=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-1)$

즉, $\frac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-1)=5$에서 $\sqrt{2k+1}-1=10$

$\sqrt{2k+1}=11$, $2k+1=121$, $2k=120$

$\therefore k=60$

37 답 ②

$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+20}$에서

n번째 항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

따라서 주어진 식의 값은

$\sum_{n=1}^{20}a_n=2\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$

38 답 ③

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{2}{(2n+1)^2-1}=\frac{2}{4n^2+4n}=\frac{1}{2n(n+1)}$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$\sum_{n=1}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{n(n+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{15}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{15}{32}$

39 답 ①

$3+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\cdots+\frac{21}{1^2+2^2+\cdots+10^2}$에서

n번째 항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{3+(n-1)\times2}{\sum_{k=1}^{n}k^2}=\frac{2n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

$=\frac{6}{n(n+1)}=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

따라서 주어진 식의 값은

$\sum_{n=1}^{10}a_n=6\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=6\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=6\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{60}{11}$

40 답 ④

$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{8\times9\times10}$에서

n번째 항을 a_n이라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 값은

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8}a_n&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}\\&\quad-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{8}{9}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{11}{45}\end{aligned}$$

TIP

$\frac{1}{ABC}=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)$을 유도하는 과정을 살펴보자.

$$\begin{aligned}\frac{1}{ABC}&=\frac{1}{B}\times\frac{1}{AC}=\frac{1}{B}\times\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)\\&=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)\end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$을 이용하여 유도할 수 있다.

연습 문제 [R~S] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 148~149

01 답 ③

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{9}a_{k+1}-\sum_{k=2}^{10}a_{k-1}\\&=(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{10})-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9)\\&=a_{10}-a_1=35-2=33\end{aligned}$$

02 답 ④

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_k&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}\\&=(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})\\&=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}a_{2k}\end{aligned}$$

에서 $25=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+8$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}=25-8=17$

03 답 ④

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}(3a_n+b_n-2)&=3\sum_{n=1}^{10}a_n+\sum_{n=1}^{10}b_n-\sum_{n=1}^{10}2\\&=3\times9+7-2\times10=14\end{aligned}$$

심플 정리

[$\sum$의 기본 성질]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

04 답 ②

$\sum_{k=1}^{100}(a_k+1)^2=500$에서

$\sum_{k=1}^{100}(a_k^2+2a_k+1)=500$ ⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{100}(a_k+2)^2=1000$에서

$\sum_{k=1}^{100}(a_k^2+4a_k+4)=1000$ ⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면

$\sum_{k=1}^{100}(a_k^2+4a_k+4)-\sum_{k=1}^{100}(a_k^2+2a_k+1)=1000-500$

$\sum_{k=1}^{100}(2a_k+3)=500,\ 2\sum_{k=1}^{100}a_k+3\times100=500$

$2\sum_{k=1}^{100}a_k=200$

$\therefore \sum_{k=1}^{100}a_k=100$

05 답 ③

> 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_3+a_5=20$,
>
> $a_4+a_6+a_8=56$이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_{k+1}-a_k)$의 값은?
>
> $a_{k+1}-a_k$의 값이 의미하는 것이 무엇인지 생각해.
>
> ① 36 ② 38 ③ 40
>
> ④ 42 ⑤ 44

1st 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 구하자.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_4+a_6+a_8)-(a_1+a_3+a_5)$

$=(a_4-a_1)+(a_6-a_3)+(a_8-a_5)$

$=3d+3d+3d=9d$ $\quad a_{k+3}-a_k=(a_k+3d)-a_k=3d$

$9d=56-20=36 \qquad \therefore d=4$

2nd $\sum_{k=1}^{10}(a_{k+1}-a_k)$의 값을 구하자.

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\underbrace{(a_{k+1}-a_k)}_{a_{k+1}=a_k+d\text{에서 } a_{k+1}-a_k=d}=\sum_{k=1}^{10}d=\sum_{k=1}^{10}4=40$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_3+a_5=20$에서 $a+(a+2d)+(a+4d)=20$

$\therefore 3a+6d=20$ ⋯ ㉠

$a_4+a_6+a_8=56$에서 $(a+3d)+(a+5d)+(a+7d)=56$

$\therefore 3a+15d=56$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{4}{3}$, $d=4$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$

$a_n=-\dfrac{4}{3}+(n-1)\times 4=4n-\dfrac{16}{3}$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{11}-a_{10})$

$=a_{11}-a_1=\left(44-\dfrac{16}{3}\right)-\left(4-\dfrac{16}{3}\right)=40$

06 답 120

> 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여
>
> $\sum_{n=1}^{10}(a_{5n}-a_n)=440$일 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값을 구하시오.
>
> 공차를 d라 하고 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 이용하여 a_{5n}, a_n의 차를 구해야 해.

1st $a_{5n}-a_n$을 n에 대한 식으로 나타내어보자.

첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 일반항은

$a_n=3+(n-1)d$이므로

$a_{5n}-a_n=\{3+(5n-1)d\}-\{3+(n-1)d\}=4dn$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}(a_{5n}-a_n)=440$에서

$\underbrace{\sum_{n=1}^{10}4dn=4d\sum_{n=1}^{10}n}_{4d\text{는 상수지?}}=4d\times\dfrac{10\times 11}{2}=220d=440$ $\quad \sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\therefore d=2 \Rightarrow a_n=3+(n-1)\times 2=2n+1$

2nd Σ 꼴로 나타내어진 등차수열의 합을 구하자.

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n+1)=2\sum_{n=1}^{10}n+\sum_{n=1}^{10}1$ $\quad \sum_{k=1}^{n}c=cn$(단, c는 상수)

$=2\times\dfrac{10\times 11}{2}+1\times 10=120$

다른 풀이

$\sum_{n=1}^{10}a_n$은 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이고

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 각각 3, 2이므로

$\sum_{n=1}^{10}a_n=\dfrac{10\{2\times 3+(10-1)\times 2\}}{2}=120$

첫째항이 a, 공차가 d, 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S라 하면

$S=\dfrac{n(a+l)}{2}=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

07 답 2035

2^n의 모든 양의 약수는 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^n$이다. ⋯ Ⅰ

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열의

첫째항부터 제$(n+1)$항까지의 합이므로 일반항은

$a_n=1+2+2^2\cdots+2^n=\dfrac{1\times(2^{n+1}-1)}{2-1}$

$=2^{n+1}-1$ ⋯ Ⅱ

$\therefore \sum_{n=1}^{9}a_n=\sum_{n=1}^{9}(2^{n+1}-1)=\sum_{n=1}^{9}2^{n+1}-\sum_{n=1}^{9}1$

$=\dfrac{2^2\times(2^9-1)}{2-1}-1\times 9=2^{11}-4-9$

$=2035$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	2^n의 모든 양의 약수를 구한다.	30%
Ⅱ	일반항 a_n을 구한다.	30%
Ⅲ	$\sum_{n=1}^{9}a_n$의 값을 구한다.	40%

08 답 ①

$\sum_{k=1}^{20}(2k+a)=2\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}a$

$=2\times\dfrac{20\times 21}{2}+a\times 20$

$=420+20a=600$

$20a=180$

$\therefore a=9$

09 답 ③

$\sum_{k=1}^{5}\left(3^{k+1}-\dfrac{1}{11}k^2\right)=\sum_{k=1}^{5}3^{k+1}-\dfrac{1}{11}\sum_{k=1}^{5}k^2$

$=\dfrac{9(3^5-1)}{3-1}-\dfrac{1}{11}\times\dfrac{5\times 6\times 11}{6}$

$=1089-5=1084$

심플 정리!

[자연수의 거듭제곱의 합]

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

Ⅲ R~S 연습

답_108144_심플자이고등(P~U).indd 127 2018. 5. 2. 오후 8:06

10 답 ②

$\sum_{k=1}^{m} k=\frac{m(m+1)}{2}$이므로 $\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} k\right)=20$에서

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} k\right)=\sum_{m=1}^{n}\frac{m(m+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n} m^2+\sum_{m=1}^{n} m\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)=20$$

$n(n+1)(n+2)=120=4\times5\times6$ $\quad\therefore n=4$

11 답 ④

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=n^2+3$이라 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=4$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+3-\{(n-1)^2+3\}$$

$$=2n-1$$

(i), (ii)에 의하여 $a_n=\begin{cases}4 & (n=1)\\ 2n-1 & (n\geq2)\end{cases}$

따라서 $a_{2k}=2\times2k-1=4k-1\,(k\geq1)$이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_{2k}=\sum_{k=1}^{10}(4k-1)=4\times\frac{10\times11}{2}-1\times10$$

$$=220-10=210$$

12 답 4

> 수열 $\{a_n\}$에 대하여
>
> $\sum_{k=1}^{n} a_k=\log_2(n^2+n)$
>
> 일 때, $\sum_{n=1}^{15} a_{2n+1}$의 값을 구하시오.
>
> $\sum_{k=1}^{n} a_k$는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로
> $a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k$임을 이용해.

1st $\sum_{k=1}^{n} a_k$와 a_n 사이의 관계로 일반항 a_n을 구하자.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq2)$이므로

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\log_2(n^2+n)$이므로 $a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k(n\geq2)$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$=\log_2(n^2+n)-\log_2\{(n-1)^2+(n-1)\}$$

$$=\log_2(n^2+n)-\log_2(n^2-n)$$

$$=\log_2\frac{n^2+n}{n^2-n}=\log_2\frac{n+1}{n-1}\,(n\geq2)$$

2nd 로그의 성질을 이용하여 $\sum_{n=1}^{15} a_{2n+1}$의 값을 구하자.

따라서 $a_{2n+1}=\log_2\frac{(2n+1)+1}{(2n+1)-1}=\log_2\frac{n+1}{n}\,(n\geq1)$

이므로

$$\sum_{n=1}^{15} a_{2n+1}=\sum_{n=1}^{15}\log_2\frac{n+1}{n}$$

$$=\log_2 2+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{16}{15}$$

$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

$$=\log_2\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{16}{15}\right)$$

$$=\log_2 16=\log_2 2^4=4$$

13 답 ②

> 이차방정식 $x^2-2x+2k(k+1)=0$의 두 근을 α_k, β_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\beta_k}\right)$의 값은?
>
> 이차방정식의 두 근이라고 주어지면 이차방정식의 근과 계수의 관계가 떠올라야 해.
>
> ① $\frac{99}{100}$ ② $\frac{100}{101}$ ③ $\frac{102}{101}$
>
> ④ $\frac{101}{100}$ ⑤ $\frac{103}{100}$

1st 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하자.

이차방정식 $x^2-2x+2k(k+1)=0$의 두 근이 α_k, β_k이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha_k+\beta_k=2$, $\alpha_k\beta_k=2k(k+1)$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

2nd $\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\beta_k}\right)$의 값을 구하자.

$$\therefore\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\beta_k}\right)=\sum_{k=1}^{100}\frac{\alpha_k+\beta_k}{\alpha_k\beta_k}=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$$

$$=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$$

14 답 ②

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}$$

$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$

이때, 첫째항이 4이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=4+(n-1)\times1=n+3$이므로

$a_{k+1}-a_k=\{(k+1)+3\}-(k+3)=1$

$$\therefore\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})$$

$$=(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+\cdots+(\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_{12}})$$

$$=\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_1}=\sqrt{16}-\sqrt{4}=4-2=2$$

15 답 ②

$$\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{59\times62}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{59}-\frac{1}{62}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{59}-\frac{1}{62}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{62}\right)=\frac{5}{31}$$

따라서 $p=31$, $q=5$이므로 $p-q=31-5=26$

답_108144_심플자이고등(P~U).indd 128 2018. 5. 2. 오후 8:06

16 답 ④

$\sum_{k=1}^{n}\log_3\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{k+1}{k}$

$=\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\cdots+\log_3\frac{n+1}{n}$

$=\log_3\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$

$=\log_3(n+1)=5$

$n+1=3^5=243 \quad \therefore n=242$

Simple T 수열의 귀납적 정의

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 150 ~ 151

01 답 귀납적 정의

02 답 d

03 답 r

04 답 등차

05 답 등비

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ×

09 답 ○

10 답 ○

11 답 ○

12 답 7

$a_1=1$이므로 $a_{n+1}=a_n+n$에서

$a_2=a_1+1=2$

$a_3=a_2+2=4$

$a_4=a_3+3=7$

13 답 14

$a_1=-1$이므로 $a_{n+1}=na_n+2$에서

$a_2=1\times a_1+2=1$

$a_3=2\times a_2+2=4$

$a_4=3\times a_3+2=14$

14 답 3

$a_1=1$, $a_2=1$이므로 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서

$a_3=a_2+a_1=2$

$a_4=a_3+a_2=3$

15 답 -2

16 답 3

$a_{n+1}-a_n=3$에서 $a_{n+1}=a_n+3$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 3이다.

17 답 $a_n=2n-1$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$

18 답 $a_n=-2n+9$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 7, 공차가 -2인 등차수열이므로

$a_n=7+(n-1)\times(-2)=-2n+9$

19 답 $a_n=7n-10$

$a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때, $a_1=-3$, $a_2-a_1=7$이므로 첫째항은 -3이고 공차는 7이다. $\quad\therefore a_n=(-3)+(n-1)\times7=7n-10$

20 답 $a_n=-3n+4$

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때, $a_1=1$, $a_2-a_1=-3$이므로 첫째항은 1이고 공차는 -3이다. $\quad\therefore a_n=1+(n-1)\times(-3)=-3n+4$

21 답 3

22 답 -4

$a_{n+1}\div a_n=-4$에서 $a_{n+1}=-4a_n$이므로 공비는 -4이다.

23 답 $\frac{1}{2}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$이므로 공비는 $\frac{1}{2}$이다.

24 답 $a_n=2^{2n-1}$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열이므로

$a_n=2\times4^{n-1}=2\times2^{2n-2}=2^{2n-1}$

25 답 $a_n=-24\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, $a_1=-24$, $a_2\div a_1=12\div(-24)=-\frac{1}{2}$이므로

첫째항은 24이고 공비는 $-\frac{1}{2}$이다.

$\therefore a_n=-24\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

26 답 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, $a_1=1$, $a_2\div a_1=\frac{1}{3}\div1=\frac{1}{3}$이므로 첫째항은 1이고

공비는 $\frac{1}{3}$이다. $\quad\therefore a_n=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

답_108144_심플자이고등(P~U).indd 129 2018. 5. 2. 오후 8:06

유형 연습 [+ 내신 유형] 문제편 pp. 152 ~ 153

27 답 ④

$a_1=1$이므로 $a_{n+1}=2n-a_n$에서

$a_2=2\times1-a_1=1$

$a_3=2\times2-a_2=3$

$a_4=2\times3-a_3=3$

$a_5=2\times4-a_4=5$

$a_6=2\times5-a_5=5$

$a_7=2\times6-a_6=7$

28 답 ⑤

$a_1=-1$이므로 $a_n+a_{n+1}=(-1)^{n+1}$에서

$a_1+a_2=(-1)^2=1$이므로 $a_2=2$

$a_2+a_3=(-1)^3=-1$이므로 $a_3=-3$

$a_3+a_4=(-1)^4=1$이므로 $a_4=4$

따라서 $a_n=(-1)^n\times n$이므로

$a_{30}=(-1)^{30}\times30=30$, $a_{35}=(-1)^{35}\times35=-35$

$\therefore a_{30}-a_{35}=30-(-35)=65$

29 답 ①

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 -2인 등차수열이므로 일반항은

$a_n=3+(n-1)\times(-2)=-2n+5$

$\therefore a_{10}=-2\times10+5=-15$

30 답 ④

$a_{n+1}-6=a_n$에서 $a_{n+1}=a_n+6$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -2, 공차가 6인 등차수열이므로 일반항은

$a_n=(-2)+(n-1)\times6=6n-8$

$a_k=94$에서 $6k-8=94$, $6k=102$

$\therefore k=17$

31 답 ②

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=a+4d=32$ ⋯ ㉠

$a_{10}=a+9d=57$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=12$, $d=5$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=12+(n-1)\times5=5n+7$

$\therefore a_{18}=5\times18+7=97$

32 답 ⑤

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때, $a_1=3$, $a_2=6$에서 $a_2-a_1=3$이므로 첫째항이 3, 공차가 3이다.

따라서 $a_n=3+(n-1)\times3=3n$이므로

$$\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{3k\times3(k+1)}$$
$$=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{9}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}$$

33 답 ①

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5, 공비가 2인 등비수열이므로 일반항은 $a_n=5\times2^{n-1}$

$\therefore a_5=5\times2^4=80$

34 답 ②

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $4^5=2^{10}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서 일반항은

$a_n=2^{10}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-10}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-11}$이므로

$a_k=\frac{1}{2^5}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-11}=\frac{1}{2^5}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$, $k-11=5$

$\therefore k=16$

35 답 768

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_5=ar^4=6$ ⋯ ㉠

$a_7=ar^6=24$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$ $\quad\therefore r=2(\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{8}$

따라서 $a_n=\frac{3}{8}\times2^{n-1}$이므로

$a_{12}=\frac{3}{8}\times2^{11}=3\times2^8=768$

36 답 ①

$a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, $a_1=4$, $a_2=6$에서 $a_2\div a_1=6\div4=\frac{3}{2}$이므로 첫째항은 4이고 공비는 $\frac{3}{2}$이다.

따라서 $a_n=4\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{7}4\times\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\frac{4\times\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^7-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}=8\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^7-1\right\}$$

37 답 ②

$a_{n+1}=a_n+3n-2$에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=a_1+3\times1-2 \\ & a_3=a_2+3\times2-2 \\ & a_4=a_3+3\times3-2 \\ & \quad\vdots \\ +\big) & \underline{a_n=a_{n-1}+3\times(n-1)-2} \end{array}$$

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$$

$$=(-2)+3\times\frac{n(n-1)}{2}-2(n-1)$$

$$=\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{2}n$$

$\therefore\ a_{10}=\frac{3}{2}\times10^2-\frac{7}{2}\times10=115$

38 답 4

$a_{n+1}=a_n+3^n$에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=a_1+3^1 \\ & a_3=a_2+3^2 \\ & a_4=a_3+3^3 \\ & \quad\vdots \\ +\big) & \underline{a_n=a_{n-1}+3^{n-1}} \end{array}$$

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=2+\frac{3\times(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$=\frac{3^n+1}{2}$$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=3+1=4$

39 답 ③

$a_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}a_n$에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=\frac{3}{2}a_1 \\ & a_3=\frac{4}{3}a_2 \\ & a_4=\frac{5}{4}a_3 \\ & \quad\vdots \\ \times\big) & \underline{a_n=\frac{n+1}{n}a_{n-1}} \end{array}$$

$$a_n=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}a_1$$

$$=\frac{n+1}{2}$$

$\therefore\ a_{20}=\frac{21}{2}$

40 답 10

$a_{n+1}=2^na_n$에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=2^1a_1 \\ & a_3=2^2a_2 \\ & a_4=2^3a_3 \\ & \quad\vdots \\ \times\big) & \underline{a_n=2^{n-1}a_{n-1}} \end{array}$$

$$a_n=2^1\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^{n-1}\times a_1$$

$$=2^{1+2+\cdots+(n-1)}=2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

이때, $a_k=2^{45}$에서

$2^{\frac{(k-1)k}{2}}=2^{45}$, $\frac{(k-1)k}{2}=45$

$k^2-k-90=0$, $(k+9)(k-10)=0$

$\therefore\ k=10$ ($\because$ k는 자연수)

41 답 ②

$a_{n+1}=2a_n-3$에서 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$의 꼴로 변형하면

$a_{n+1}=2a_n-\alpha$ $\quad\therefore\ \alpha=3$

즉, 주어진 식을 $a_{n+1}-3=2(a_n-3)$으로 변형하고

$b_n=a_n-3$이라 하면 $b_{n+1}=2b_n$이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=a_1-3=2$이고 공비가 2인 등비수열이다.

따라서 $b_n=2\times2^{n-1}=2^n$에서 $a_n-3=2^n$이므로

$a_n=2^n+3$

$\therefore\ a_{30}=2^{30}+3 \Rightarrow a_{30}-3=2^{30}$

42 답 $\frac{5}{2}$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$에서 $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$의 꼴로 변형하면

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\alpha$ $\quad\therefore\ \alpha=2$

즉, 주어진 식을 $a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$로 변형하고

$b_n=a_n-2$라 하면 $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=a_1-2=1$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서 $b_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$에서

$a_n-2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $q=2$이므로

$p+q=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

Simple U 수학적 귀납법

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 154 ~ 155

01 답 $n=1$, $n=k+1$

02 답 $n=m$

03 답 $n=3$, $k\geq 3$, $n=k+1$

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ○

09 답 $p(1)$

자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 성립하면 명제 $p(n+1)$이 성립하므로

$p(1)$이 성립하면 $p(2)$가 성립

$p(2)$가 성립하면 $p(3)$이 성립

$p(3)$이 성립하면 $p(4)$가 성립

이와 같이 계속 반복하면 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 성립함을 알 수 있다.

따라서 $p(1)$이 성립함을 반드시 보여야 한다.

10 답 $p(2)$

임의의 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 성립하면 명제 $p(n+2)$가 성립하므로

$p(2)$가 성립하면 $p(4)$가 성립

$p(4)$가 성립하면 $p(6)$이 성립

$p(6)$이 성립하면 $p(8)$이 성립

이와 같이 계속 반복하면 모든 짝수 n에 대하여 $p(n)$이 성립함을 알 수 있다.

따라서 $p(2)$가 성립함을 반드시 보여야 한다.

11 답 (가) $k+1$ (나) $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=\dfrac{1\times(1+1)}{2}=1$

따라서 $n=1$일 때, ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ ⋯ ㉡

㉡의 양변에 $\overset{\text{(가)}}{k+1}$을 더하면

$1+2+3+\cdots+k+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ ← (나)

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

12 답 (가) k (나) $2k+1$ (다) $(k+1)^2$ (라) $k+1$

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$

따라서 $n=1$일 때, ㉠이 성립한다.

(ii) $n=\overset{\text{(가)}}{k}$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ ⋯ ㉡

㉡의 양변에 $\overset{\text{(나)}}{2k+1}$을 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$

$=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$ ← (다)

따라서 $n=\underset{\text{(라)}}{k+1}$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

13 답 (가) 2 (나) $k+1$ (다) $(k+1)^2$ (라) $k+1$

(i) $n=5$일 때, (좌변)$=2^5=32$, (우변)$=5^2=25$

따라서 $n=5$일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 5)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2$

이것의 양변에 $\overset{\text{(가)}}{2}$를 곱하면

$2^k\times 2>k^2\times 2$에서 $2^{\overset{\text{(나)}}{k+1}}>2k^2$ ⋯ ㉡

한편,

$2k^2-(k+1)^2=2k^2-(k^2+2k+1)$

$=k^2-2k-1$

$=(k-1)^2-2>0(\because k\geq 5)$

이므로 $2k^2>(k+1)^2$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에서 $2^{k+1}>(k+1)^2$ ← (다)

따라서 $n=\underset{\text{(라)}}{k+1}$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 ㉠은 $n\geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 156~157

14 답 ④

ㄱ. $p(2)$의 참, 거짓은 알 수 없다.

ㄴ. 조건 (가)에 의하여 $p(1)$이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(1+2)=p(3)$이 참이다. 또, $p(3)$이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(3+2)=p(5)$가 참이다.

ㄷ. ㄴ에서 $p(5)$가 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(5+2)=p(7)$이 참이다.
또, $p(7)=p(6+1)$이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(6+2)=p(8)$이 참이다.

따라서 참인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15 답 121

$p(1)$이 참이면 $p(3)$이 참이다.
$p(3)$이 참이면 $p(3^2)$도 참이다.
$p(3^2)$이 참이면 $p(3^3)$도 참이다.
즉, $n=3^k(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$일 때, $p(n)$이 참이다.
따라서 $n\le 100$일 때 명제 $p(n)$이 반드시 참이 되는 자연수 n의 값은 1, 3, 9, 27, 81이므로 이들의 합은 121이다.

다른 풀이

$1+3+9+27+81$의 값은 첫째항이 1이고 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합이므로

$1+3+9+27+81=\dfrac{1\times(3^5-1)}{3-1}=121$

16 답 ③

(i) $n=\overset{(가)}{2}$일 때, $p(n)$이 성립함을 보인다.
(ii) $n=k$일 때, $p(n)$이 성립한다고 가정하면
$n=\underset{(나)}{k+4}$일 때도 $p(n)$이 성립함을 보인다.

17 답 ③

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\dfrac{1\times2\times3}{6}=\overset{(가)}{1}$이므로
주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
이 식의 양변에 $\overset{(나)}{(k+1)^2}$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$
$=\dfrac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$
$=\dfrac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$
$=\dfrac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$
$=\dfrac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$
따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.
따라서 $a=1$, $f(k)=(k+1)^2$이므로
$f(a+1)=f(2)=(2+1)^2=9$

18 답 풀이 참조

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=\dfrac{1}{1\times2}=\dfrac{1}{2}$, (우변)$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$이므로
$n=1$일 때, 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k}{k+1}$
이 식의 양변에 $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면
$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$
$=\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k+1}{k+2}$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

19 답 ②

(i) $n=2$일 때,
(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$,
(우변)$=1+2h$
이때, $h>0$에서 $h^2>0$이므로 $n=2$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n=k(k\ge2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $(1+h)^k>1+kh$
이 식의 양변에 $\overset{(가)}{1+h}$를 곱하면 $h^2>0$이므로
$(1+h)^{k+1}>(1+kh)(1+h)$
$=1+\overset{(나)}{(k+1)}h+kh^2$
$>1+(k+1)h$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 $n\ge2$인 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.
따라서 $f(h)=1+h$, $g(k)=k+1$이므로
$f(2)g(3)=(1+2)(3+1)=12$

20 답 풀이 참조

(i) $n=3$일 때,
(좌변)$=2^3=8$, (우변)$=2\times3+1=7$이므로
주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n=k(k\ge3)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k>2k+1$
이 식의 양변에 2를 곱하면
$2^{k+1}>2(2k+1)>2(k+1)+1$
$\therefore 2^{k+1}>2(k+1)+1$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 $n\ge3$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

21 답 ③

(i) $n=1$일 때,

$3^2-2=7$이므로 7의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, $3^{2k}-2^k$이 7의 배수라 가정하면

자연수 N에 대하여 $3^{2k}-2^k=7N$이다.

이때, $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}3^{2(k+1)}-2^{k+1}&=9\times3^{2k}-2\times2^k\\&=7\times3^{2k}+2(3^{2k}-2^k)\\&=\overset{\text{(가)}}{7}\times3^{2k}+\overset{\text{(나)}}{14N}\\&=7(3^{2k}+2N)\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 7의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$3^{2n}-2^n$은 7의 배수이다.

따라서 $p=7$, $q=14$이므로 $pq=7\times14=98$이다.

22 답 풀이 참조

(i) $n=1$일 때, $7-6-1=0$이고 0은 모든 수의 배수이므로 $n=1$일 때, 7^n-6n-1은 36의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, 7^k-6k-1이 36의 배수라고 가정하면 자연수 N에 대하여 $7^k-6k-1=36N$이다.

이때, $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}7^{k+1}-6(k+1)-1&=7(7^k-6k-1)+36k\\&=7\times36N+36k\\&=36(7N+k)\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 36의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

7^n-6n-1은 36의 배수이다.

연습 문제 [T~U] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 158~159

01 답 92

$a_{n+1}=2(a_n+2)$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_1=2$이므로

$a_2=2(a_1+2)=2\times(2+2)=8$

$a_3=2(a_2+2)=2\times(8+2)=20$

$a_4=2(a_3+2)=2\times(20+2)=44$

$a_5=2(a_4+2)=2\times(44+2)=92$

02 답 33

$a_1=3$

$a_2=3a_1=3\times3=9$ ($\because$ $a_1\le4$)

$a_3=a_2-3=9-3=6$ ($\because$ $a_2>4$)

$a_4=a_3-3=6-3=3$ ($\because$ $a_3>4$)

$a_5=3a_4=3\times3=9$ ($\because$ $a_4\le4$)

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 나열하면 다음과 같다.

$\{a_n\}$: 3, 9, 6, 3, 9, ⋯ ⋯ Ⅰ

따라서 $a_n>7$을 만족시키는 자연수 n의 값을 차례로 나열하면 2, 5, 8, 11, 14, ⋯로 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열이 된다.

이 등차수열을 $\{b_n\}$이라 하면 일반항은

$b_n=2+(n-1)\times3=3n-1$ ⋯ Ⅱ

즉, $b_n\le100$에서 $3n-1\le100$, $3n\le101$

$\therefore$ $n\le\dfrac{101}{3}=33.\times\times\times$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 33이다.

⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	수열 $\{a_n\}$을 구한다.	30%
Ⅱ	$a_n>7$을 만족시키는 자연수 n의 값의 수열을 구한다.	40%
Ⅲ	$a_n>7$을 만족시키는 자연수 n의 개수를 구한다.	30%

03 답 ②

수열 $\{a_n\}$이 두 항 a_{n+1}, a_n 사이의 관계식으로 수열 $\{a_n\}$이 어떤 수열인지 파악해.

$a_1=30$, $a_{n+1}+5=a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

으로 정의될 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은?

① 70 ② 75 ③ 80 ④ 85 ⑤ 90

1st 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하자. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$

$a_{n+1}+5=a_n$에서 $a_{n+1}-a_n=-5$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -5인 등차수열이고 첫째항이 30이므로 일반항은

$a_n=30+(n-1)\times(-5)=-5n+35$

2nd $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구해.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k \pm \sum_{k=1}^{n}b_k$(복호동순)

$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$(단, c는 상수)

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(-5k+35)=-5\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}35$$

$$=(-5)\times\frac{10\times11}{2}+35\times10=75$$

04 답 ②

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공차가

$a_2-a_1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$이므로 일반항은

$$a_n=1+(n-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$$

$$\therefore a_{13}=-\frac{1}{2}\times13+\frac{3}{2}=-5$$

05 답 ⑤

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=3a_n$, 즉

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

이때, $a_2=2$이므로 $a_4=a_3\times3=(a_2\times3)\times3=18$

06 답 ①

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$에서 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은

첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$인 등비수열이다.

따라서 $a_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$\frac{a_{18}}{a_{15}}=\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{17}}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{14}}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 일반항은

$a_n=ar^{n-1}$이므로 $\frac{a_{18}}{a_{15}}=\frac{ar^{17}}{ar^{14}}=r^3$

한편, $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{3}$이므로 구하는 값은

$$r^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

07 답 ②

$a_{n+1}=a_n+2n$의 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+2\times1$$
$$a_3=a_2+2\times2$$
$$a_4=a_3+2\times3$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_n=a_{n-1}+2\times(n-1)$$

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=12+2\times\frac{n(n-1)}{2}=n^2-n+12$$

$$\therefore a_8=8^2-8+12=68$$

08 답 ③

> 수열 $\{a_n\}$이
>
> a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식이 주어지면 n 대신 1, 2, 3, …을 차례로 대입해 봐.
>
> $$a_1=\sqrt{7},\ \sqrt{n+2}a_{n+1}=\sqrt{n}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
>
> 으로 정의될 때, $\frac{\sqrt{2}}{a_{63}}$의 값은?
>
> ① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

1st 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하자.

$\sqrt{n+2}a_{n+1}=\sqrt{n}a_n$, 즉 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+2}}a_n$의 n 대신

1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$a_{n+1}=f(n)a_n$ 꼴로 주어진 관계식에서 일반항을 구할 때는 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 대입하여 변끼리 곱해.

$$a_2=\sqrt{\frac{1}{3}}a_1$$
$$a_3=\sqrt{\frac{2}{4}}a_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1}=\sqrt{\frac{n-2}{n}}a_{n-2}$$
$$\times)\ a_n=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}a_{n-1}$$

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{\frac{2}{4}}\times\sqrt{\frac{3}{5}}\times\cdots\times\sqrt{\frac{n-2}{n}}\times\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\times a_1$$

$$=\frac{\sqrt{1}\times\sqrt{2}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n+1}}\times\sqrt{7}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

2nd $\frac{\sqrt{2}}{a_{63}}$의 값을 구하자.

따라서 $a_{63}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{63}\times\sqrt{64}}=\frac{\sqrt{2}}{24}$이므로 $\frac{\sqrt{2}}{a_{63}}=24$

09 답 ①

> 수열 $\{a_n\}$이
>
> $a_{n+1}=pa_n+q$의 꼴로 주어진 수열 $\{a_n\}$에서는 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$꼴로 변형하여 등비수열을 이용해.
>
> $$a_1=1,\ a_{n+1}=-3a_n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
>
> 으로 정의될 때, a_6의 값은?
>
> ① -121 ② -118 ③ -115 ④ -112 ⑤ -109

1st 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하자.

$a_{n+1}=-3a_n+2$에서 $a_{n+1}-\alpha=-3(a_n-\alpha)$의 꼴로 변형

하면 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=-3\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$

$a_{n+1}=-3a_n+2$에서
$a_{n+1}-\alpha=-3(a_n-\alpha)$라 하면
$a_{n+1}=-3a_n+4\alpha$이므로
$4\alpha=2$에서 $\alpha=\frac{1}{2}$

이때, $a_n-\frac{1}{2}=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=-3b_n$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=a_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, 공비가 -3인

등비수열이므로 $b_n=\frac{1}{2}\times(-3)^{n-1}$

즉, $a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(-3)^{n-1}$에서

$$a_n=\frac{1}{2}\times(-3)^{n-1}+\frac{1}{2}$$

2nd a_6의 값을 구하자.

$$\therefore a_6=\frac{1}{2}\times(-3)^5+\frac{1}{2}=-121$$

Ⅲ

T~U 연습

10 답 ⑤

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4n}{3^n}=3-\frac{2n+3}{3^n}\ \cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{4}{3}$, (우변)$=3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4k}{3^k}=3-\frac{2k+3}{3^k}$이다.

위 등식의 양변에 $\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$을 더하여 정리하면

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4k}{3^k}+\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$$
$$=3-\frac{1}{3^k}\{(2k+3)-(\boxed{(가)})\}$$
$$=3-\frac{\boxed{(나)}}{3^{k+1}}$$

수학적 귀납법으로 문제를 풀 때, 꼭 알아야 할 부분은 이 부분인데, $n=k+1$일 때도 성립한다고 하므로 주어진 식의 $n=k+1$일 때의 값이 나오면 되겠지?

따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(3)\times g(2)$의 값은?

① 36 ② 39 ③ 42
④ 45 ⑤ 48

1st 문제에 주어진 과정을 따라가며 빈칸을 채워.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{4}{3}$, (우변)$=3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4k}{3^k}=3-\frac{2k+3}{3^k}$이다.

위 등식의 양변에 $\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$을 더하여 정리하면

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4k}{3^k}+\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$$
$$=3-\frac{1}{3^k}\left\{(2k+3)-\underbrace{\frac{4k+4}{3}}_{(가)}\right\}$$

식 $\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$을 $\frac{1}{3^k}\times$(가)로 나타내.

$$=3-\frac{1}{3^k}\left(\frac{2}{3}k+\frac{5}{3}\right)$$
$$=3-\frac{\overbrace{2(k+1)+3}^{(나)}}{3^{k+1}}$$

주어진 식의 n에 $k+1$을 대입하면 구할 수 있어.

따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

2nd $f(3)\times g(2)$의 값을 구하자.

따라서 $f(k)=\frac{4k+4}{3}$, $g(k)=2(k+1)+3$이므로

$f(3)\times g(2)=\frac{16}{3}\times 9=48$

11 답 ⑤

$p(1)$이 참이므로 조건 (나)에 의하여

$p(2)$, $p(3)$, $p(4)$, $p(6)$, $p(8)$, $p(9)$, $\cdots$가 참이다.

즉, $n=2^a3^b(a,\ b=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 꼴이면 $p(n)$은 참이다.

① $100=2^2\times5^2$ ② $120=2^3\times3\times5$
③ $147=3\times7^2$ ④ $169=13^2$
⑤ $216=2^3\times3^3$

따라서 참인 명제는 $p(216)$이다.

12 답 ④

다음은 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}\ \cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{2\times2}{2+1}=\frac{4}{3}$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k(k\ge2)$일 때 $(*)$이 성립한다고

가정하면 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$이다.

위 등식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\boxed{(가)}\ \cdots ㉠$$

$n=k+1$일 때 성립함을 보이기 위해 $(*)$의 좌변을 변형해.

이때,

$$\boxed{(가)}-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}=\frac{\boxed{(나)}}{(k+1)(k+2)}>0$$

이므로 ㉠으로부터

(가)의 식보다 $(*)$의 우변에 $n=k+1$을 대입한 식이 작아야 해.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(8)\times g(9)$의 값은?

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

1st 주어진 과정의 앞뒤 변화에 주의하여 빈칸을 채워 나가자.

(i) $n=2$일 때 $n\geq2$인 모든 자연수에 대하여 성립해야 하므로 $n=1$이 아니라 $n=2$야.

$(\text{좌변})=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $(\text{우변})=\frac{2\times2}{2+1}=\frac{4}{3}$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq2)$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$이다.

위 부등식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면 $n=k+1$일 때 성립함을 보이기 위해 양변에 더하는 거야.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}$$

$$=\underbrace{\frac{2k+1}{k+1}}_{(\text{가})}\cdots ㉠$$

이때,

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{2k^2+5k+2-2(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{\overset{(\text{나})}{k}}{(k+1)(k+2)}>0$$

k는 자연수이므로 이 식은 0보다 커.

에서 $\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}>0$, 즉

$\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$이므로 ㉠으로부터

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$이다.

따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

2nd $f(8)\times g(9)$의 값을 구하자.

따라서 $f(k)=\frac{2k+1}{k+1}$, $g(k)=k$이므로

$f(8)\times g(9)=\frac{2\times8+1}{8+1}\times9=17$

Ⅲ 대단원 TEST [P~U]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 160~163

01 답 ④

주어진 수열을 다시 쓰면

$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\left(=\frac{2}{4}\right), \frac{3}{5}, \frac{2}{3}\left(=\frac{4}{6}\right), \frac{5}{7}, \cdots$

즉, 주어진 수열의 제n항의 분모는 $n+2$, 분자는 n이므로

일반항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{n}{n+2}$

$\therefore a_{50}=\frac{50}{52}=\frac{25}{26}$

02 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_2=10$에서 $a+(a+d)=10$

$\therefore 2a+d=10 \cdots ㉠$

$a_3+a_4+a_5=45$에서

$(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=45$

$\therefore 3a+9d=45 \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3, d=4$

따라서 $a_n=3+(n-1)\times4=4n-1$이므로

$a_{10}=4\times10-1=39$

다른 풀이

a_4는 a_3, a_5의 등차중항이므로 $a_3+a_5=2a_4$

즉, $a_3+a_4+a_5=45$에서 $3a_4=45$, $3(a+3d)=45$

$\therefore 3a+9d=45$

(이하 동일)

03 답 ④

> 삼차방정식 $x^3-3x^2-2kx+8=0$의 세 근이 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은? 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 생각해.
>
> ① -1 ② 1 ③ 2
>
> ④ 3 ⑤ 4

1st 주어진 방정식의 한 근을 구하자. 등차수열을 이루는 세 수는 $a-d$, a, $a+d$로 놓는 연습을 해 봐.

삼차방정식 $x^3-3x^2-2kx+8=0$의 세 근이 등차수열을 이루므로 세 근을 $a-d$, a, $a+d$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면 $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

$(a-d)+a+(a+d)=3a=3$

$\therefore a=1$

따라서 주어진 방정식의 한 실근은 1이다.

2nd k의 값을 구하자.

이때, $f(x)=x^3-3x^2-2kx+8$로 놓으면 방정식

$f(x)=0$의 한 근이 1이므로

$f(1)=1-3-2k+8=0$

$\therefore k=3$

04 답 ①

c는 b, d의 등차중항이면서 a, e의 등차중항이다. 즉,
$2c=b+d$, $2c=a+e$이다.
이때, $a+c+e=6$에서 $(a+e)+c=6$
$2c+c=6$, $3c=6$ $\quad\therefore c=2$
$\therefore a+b+c+d+e=(a+e)+(b+d)+c$
$\qquad=2c+2c+c=5c=10$

05 답 ②

> 첫째항이 17, 공차가 -2인 등차수열 $\{a_n\}$에서
> $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$의 값은?
> 각 항에 절댓값을 취한 수의 합을 구하기 위해서는 음수가 되는 항부터 찾아야 해.
> ① 520 ② 522 ③ 524
> ④ 526 ⑤ 528

1st 수열 $\{a_n\}$이 음수인 항을 구하자.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 17, 공차가 -2이므로 일반항은
$a_n=17+(n-1)\times(-2)=-2n+19$ 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d$
한편, 수열 $\{a_n\}$이 음수인 항을 a_k라 하면
$a_k=-2k+19<0$에서 $k>9.5$
즉, 수열 $\{a_n\}$은 제10항부터 음수이다.

2nd $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{30}|$의 값을 구하자.

따라서 $a_1=17$, $a_2=15$, $\cdots$, $a_9=1$이고
$a_{10}=-1$, $a_{12}=-3$, $\cdots$, $a_{30}=-41$이므로
$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{30}|$
$=\underbrace{(17+15+\cdots+1)}_{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|}+\underbrace{(1+3+\cdots+41)}_{|a_{10}|+|a_{11}|+\cdots+|a_{30}|}$
$=\dfrac{9(1+17)}{2}+\dfrac{21(1+41)}{2}$ 첫째항이 a이고 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$
$=81+441=522$

06 답 ⑤

> 네 수 1, a, b, c는 이 순서대로 공비가 r인 등비수열
> 등비중항을 이용하기보다는 a, b, c를 r에 대한 식으로 나타내.
> 을 이루고 $\log_8 c=\log_a b$를 만족시킨다. 공비 r의
> 값은? (단, $r>1$)
> ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

1st 첫째항이 1, 공비가 r인 등비수열임을 이용하여 a, b, c를 r에 대한 식으로 나타내자.

첫째항이 1, 공비가 r이므로 첫째항이 1, 공비가 r인 등비수열의 일반항은 $a_n=1\times r^{n-1}=r^{n-1}$
$a=r$, $b=r^2$, $c=r^3$이다.

2nd 로그의 성질을 이용하여 r의 값을 구하자.

$\log_8 c=\log_{2^3} r^3=\log_2 r$이고 $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$
$\log_a b=\log_r r^2=2$이므로 $\log_8 c=\log_a b$에서 $\log_a a^n=n\log_a a=n$
$\log_2 r=2$ $\quad\therefore r=2^2=4$

07 답 ⑤

ㄱ. $a_1=S_1=1^2+1=2$ (참)
ㄴ. $n\ge2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+1-\{(n-1)^2+1\}=2n-1$ (참)
ㄷ. ㄴ에 의하여 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 공차가 $d=2$인 등차수열이므로 수열 $\{a_{2n}\}$의 공차는 $a_4-a_2=2d=4$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

> **TIP**
> 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은
> $a_n=a+(n-1)d$이므로 수열 $\{a_{2n}\}$의 일반항은
> $a_{2n}=a+(2n-1)d=a+d+(n-1)\times2d$이다.
> 즉, 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a+d$이고 공차가 $2d$인 등차수열이다.

08 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(r>0)$라 하면
$a_1+a_2=a+ar=1$에서 $a(1+r)=1$ ⋯ ㉠
$a_3+a_4=ar^2+ar^3=3$에서 $ar^2(1+r)=3$ ⋯ ㉡
㉡÷㉠을 하면 $r^2=3$
$\therefore a_7+a_8=ar^6+ar^7=ar^6(1+r)$
$\qquad=a(1+r)(r^2)^3=1\times3^3=27$

다른 풀이

$r=\sqrt{3}$ ($\because r>0$)이므로
$a_7+a_8=ar^6+ar^7=ar^6(1+r)$
$\qquad=a(1+r)r^6=1\times(\sqrt{3})^6=27$

09 답 ④

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 $a_4{}^2=a_2\times a_6$에서
$8^2=4a_6$ $\quad\therefore a_6=16$

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 수열 $\{a_{2n}\}$도 등비수열이다.
이때, 수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 수열 $\{a_{2n}\}$의 공비는
r^2이다. 즉, $r^2=\dfrac{a_4}{a_2}=\dfrac{8}{4}=2$이므로 $a_6=a_4r^2=8\times2=16$

10 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 항의 수를 k라 하면
$a_k=4\times(-3)^{k-1}=324$에서
$(-3)^{k-1}=81=(-3)^4$, $k-1=4$ $\quad\therefore k=5$
따라서 첫째항부터 끝항인 제5항까지의 합을 S_5라 하면
$S_5=\dfrac{4\{1-(-3)^5\}}{1-(-3)}=1+243=244$

11 답 6

등비수열 3, a_1, a_2, $\cdots$, a_n, -1536에서 3은 첫째항이고
-1536은 제$(n+2)$항이다.

이때, 이 등비수열의 공비를 r라 하면

$3\times r^{n+1}=-1536$ ⋯ ㉠ ⋯ Ⅰ

한편, 첫째항부터 제$(n+2)$항까지의 합을 S_{n+2}라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=510$이므로

$S_{n+2}=3+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+(-1536)=-1023$에서

$\dfrac{3(r^{n+2}-1)}{r-1}=-1023,\ \dfrac{3r^{n+2}-3}{r-1}=-1023$

$\dfrac{3r^{n+1}\times r-3}{r-1}=-1023,\ \dfrac{-1536r-3}{r-1}=-1023\ (\because ㉠)$

$-1536r-3=-1023r+1023,\ -513r=1026$

$\therefore r=-2$ ⋯ Ⅱ

이것을 ㉠에 대입하면

$3\times(-2)^{n+1}=-1536,\ (-2)^{n+1}=-512=(-2)^9$

$n+1=9 \quad \therefore n=8$

$\therefore r+n=(-2)+8=6$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	-1536이 제$(n+2)$항임을 파악하고 공비에 대한 식으로 나타낸다.	30%
Ⅱ	공비 r의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	항의 수 n의 값을 구하고 $r+n$의 값을 계산한다.	30%

12 답 ①

모든 자연수 n에 대하여 $a_n+b_n=10$을 만족시키므로

$a_k+b_k=10$이다.

이때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=160$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k+b_k)+b_k\}=\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)+\sum_{k=1}^{10}b_k$$
$$=\sum_{k=1}^{10}10+\sum_{k=1}^{10}b_k=10\times10+\sum_{k=1}^{10}b_k=160$$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}b_k=60$

13 답 ⑤

$\sum_{k=1}^{10}a_k=24,\ \sum_{k=1}^{20}a_k=48,\ \sum_{k=1}^{10}b_k=16,\ \sum_{k=1}^{20}b_k=36$이므로

$$\sum_{k=11}^{20}(3a_k+b_k)=\sum_{k=11}^{20}3a_k+\sum_{k=11}^{20}b_k$$
$$=3\left(\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{20}b_k-\sum_{k=1}^{10}b_k\right)$$
$$=3\times(48-24)+(36-16)$$
$$=72+20=92$$

14 답 ②

$$\sum_{k=1}^{10}(2^{k-1}+3k)=\sum_{k=1}^{10}2^{k-1}+3\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=\frac{1\times(2^{10}-1)}{2-1}+3\times\frac{10\times11}{2}$$
$$=1023+165=1188$$

15 답 ④

수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=2n-3$일 때, $\sum_{k=2}^{m}a_{k+1}=48$을 만족시키는 m의 값은? $\sum_{k=2}^{m}$은 제2항부터 제m항까지의 합을 나타내는 거야. $k=1$부터가 아님에 주의해.

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

1st $\sum_{k=2}^{m}a_{k+1}$의 값을 m에 대한 식으로 나타내자.

$a_n=2n-3$에서 $a_{k+1}=2(k+1)-3=2k-1$이므로

$$\sum_{k=2}^{m}a_{k+1}=\sum_{k=2}^{m}(2k-1)=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)-(2\times1-1)$$
$$=2\times\frac{m(m+1)}{2}-m-1=m^2-1$$

$\sum_{k=2}^{m}b_k=\sum_{k=1}^{m}b_k-b_1$

2nd m의 값을 구하자. $\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{m}k-1\times m$

이때, $\sum_{k=2}^{m}a_{k+1}=48$이므로 $m^2-1=48,\ m^2=49$

$\therefore m=7\ (\because m>0)$ m은 항의 수이므로 자연수야.

16 답 ③

$\sum_{k=1}^{9}(k-a)^2$의 값은 $a=p$일 때, 최솟값 q를 갖는다. 주어진 식을 정리하여 a에 대한 식으로 나타내야 해.
상수 $p,\ q$에 대하여 $p+q$의 값은?

① 55 ② 60 ③ 65 ④ 70 ⑤ 75

1st Σ를 풀어서 a에 대한 식으로 나타내자.

$$\sum_{k=1}^{9}(k-a)^2=\sum_{k=1}^{9}(k^2-2ak+a^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{9}k^2-2a\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}a^2$$
$$=\frac{9\times10\times19}{6}-2a\times\frac{9\times10}{2}+9a^2$$
$$=9a^2-90a+285=9(a-5)^2+60$$

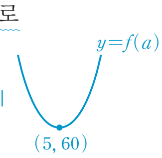
2nd 주어진 식의 값이 최소가 되는 a의 값과 최솟값을 구하자.

따라서 주어진 값은 $a=5$일 때 최솟값 60을 가지므로

$p=5,\ q=60$

$\therefore p+q=5+60=65$

$f(a)=9(a-5)^2+60$이라 하면 함수 $y=f(a)$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(5,\ 60)$이고 아래로 볼록해. 즉, $a=5$에서 최솟값 60을 가져.



17 답 ④

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$
$$=(n^2-n)-\{(n-1)^2-(n-1)\}$$
$$=2n-2\ (n\ge2)$$

이때, $a_1=\sum_{k=1}^{1}a_k=1^2-1=0$이므로

$a_n=2n-2\ (n\ge1)$

즉, $a_{4k+1}=2(4k+1)-2=8k$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}ka_{4k+1}=\sum_{k=1}^{10}8k^2=8\sum_{k=1}^{10}k^2$$
$$=8\times\frac{10\times11\times21}{6}=3080$$

18 답 ③

$a_n=\dfrac{1}{2n-1}$에서 $a_k=\dfrac{1}{2k-1}$이고

$a_{k+1}=\dfrac{1}{2(k+1)-1}=\dfrac{1}{2k+1}$이므로

$a_ka_{k+1}=\dfrac{1}{2k-1}\times\dfrac{1}{2k+1}=\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{40}a_ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{79}-\frac{1}{81}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{81}\right)=\frac{40}{81}$$

19 답 ④

$$\frac{2\sqrt{k+3}}{\sqrt{k+4}+\sqrt{k+2}}=\frac{2\sqrt{k+3}(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+2})}{(k+4)-(k+2)}$$
$$=\sqrt{(k+3)(k+4)}-\sqrt{(k+2)(k+3)}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{45}\frac{2\sqrt{k+3}}{\sqrt{k+4}+\sqrt{k+2}}$$
$$=\sum_{k=1}^{45}\{\sqrt{(k+3)(k+4)}-\sqrt{(k+2)(k+3)}\}$$
$$=(\sqrt{4\times5}-\sqrt{3\times4})+(\sqrt{5\times6}-\sqrt{4\times5})+\cdots+(\sqrt{48\times49}-\sqrt{47\times48})$$
$$=\sqrt{48\times49}-\sqrt{3\times4}=28\sqrt{3}-2\sqrt{3}=26\sqrt{3}$$

20 답 ③

$a_{n+1}=\dfrac{k}{a_n+2}$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $n=1$을 대입하면

$a_2=\dfrac{k}{a_1+2}=\dfrac{k}{3}$

또, ㉠의 양변에 $n=2$를 대입하면

$$a_3=\frac{k}{a_2+2}=\frac{k}{\frac{k}{3}+2}=\frac{k}{\frac{k+6}{3}}=\frac{3k}{k+6}$$

이때, $a_3=\dfrac{3}{2}$이므로 $\dfrac{3k}{k+6}=\dfrac{3}{2}$에서

$6k=3k+18$, $3k=18$

$\therefore k=6$

21 답 28

$a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가

$a_2-a_1=4-1=3$인 등차수열이므로 일반항은

$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

$\therefore a_{10}=3\times10-2=28$

22 답 ①

$a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고 공비는

$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{3}{\frac{1}{3}}=9$이므로 일반항은 $a_n=\dfrac{1}{3}\times9^{n-1}=3^{2n-3}$

따라서 $a_{20}=3^{2\times20-3}=3^{37}$이므로 $\log_3 a_{20}=\log_3 3^{37}=37$

23 답 ④

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=-\dfrac{3}{2}$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{n(n+2)}$를 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

주어진 식의 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 대입하여 변끼리 더해.

① $-\dfrac{9}{55}$ ② $-\dfrac{19}{110}$ ③ $-\dfrac{2}{11}$ ④ $-\dfrac{21}{110}$ ⑤ $-\dfrac{1}{5}$

1st 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여 a_{10}의 값을 구하자.

$a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{n(n+2)}$의 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입한 다음 각 등식의 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+\frac{2}{1\times3}$$
$$a_3=a_2+\frac{2}{2\times4}$$
$$\vdots$$
$$+\underline{)\,a_n=a_{n-1}+\frac{2}{(n-1)(n+1)}}$$
$$a_n=a_1+\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{2\times4}+\frac{2}{3\times5}+\cdots+\frac{2}{(n-1)(n+1)}$$
$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{k(k+2)}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=-\frac{3}{2}+\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=-\frac{3}{2}+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$=-\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$\dfrac{2}{k(k+2)}=\dfrac{2}{(k+2)-k}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}$

$\therefore a_{10}=-\dfrac{21}{110}$

24 답 10

$2a_{n+1}=a_n+6$, 즉 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+3$에서

$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{2}(a_n-\alpha)$라 하면

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}\alpha$이므로 $\dfrac{1}{2}\alpha=3$에서 $\alpha=6$

즉, 주어진 식을 $a_{n+1}-6=\dfrac{1}{2}(a_n-6)$으로 변형하고

$a_n-6=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n$에서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이

$b_1=a_1-6=-5$이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서 $b_n=(-5)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$$a_n-6=(-5)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=(-5)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+6 \quad \cdots\ \text{Ⅰ}$$

$$a_{k+1}-a_k=\left\{(-5)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}+6\right\}-\left\{(-5)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+6\right\}$$

$$=5\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-5\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

$$=5\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{2}\right)=5\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

한편, $a_{k+1}-a_k<\frac{1}{200}$에서 $5\left(\frac{1}{2}\right)^{k}<\frac{1}{200}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{k}<\frac{1}{1000}$

$\therefore\ 2^k>1000$ $\cdots$ Ⅱ

이때, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 구하는 자연수 k의 최솟값은 10이다. $\cdots$ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	일반항 a_n을 구한다.	40%
Ⅱ	$a_{k+1}-a_k<\frac{1}{200}$을 만족시키는 k의 값의 범위를 구한다.	40%
Ⅲ	자연수 k의 최솟값을 구한다.	20%

25 답 ③

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}\quad\cdots\ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=(-1)^2\times1^2=1$

(우변)$=(-1)^2\times\frac{1\times2}{2}=1$

따라서 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+\boxed{(가)}$$

$$=\boxed{(나)}+\boxed{(가)}$$

$$=(-1)^{m+2}\times\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

이다. 좌변은 제$(m+1)$항까지의 합이고 우변은 제m항까지의 합이니까 (가)를 유추할 수 있어. 이때, (나)는 $(*)$에서 채울 수 있어.

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{f(5)}{g(2)}$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

1st $\sum_{k=1}^{m}$과 $\sum_{k=1}^{m+1}$을 비교해 보면 $\sum_{k=1}^{m+1}$은 $\sum_{k=1}^{m}$에 제$(m+1)$항이 더해진 거야.

$a_k=(-1)^{k+1}k^2$이라 하면

$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+\boxed{(가)}$에서

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+\boxed{(가)}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{m+1}a_k-\sum_{k=1}^{m}a_k}_{a_1+a_2+\cdots+a_m+a_{m+1}-(a_1+a_2+\cdots+a_m)}=a_{m+1}=(-1)^{m+2}(m+1)^2$$ (가)

2nd $(*)$을 이용하여 (가) 앞의 식을 변형한 후 (나)를 찾자.

또, 등식

$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}+\boxed{(가)}$에서

$(*)$에 의하여 등식을 보면 $a+b=\square+b$이니까 $\square=a$야.

$$\boxed{(나)}=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{m+1}\times\frac{m(m+1)}{2}$$ (나)

3rd $\frac{f(5)}{g(2)}$의 값을 구하자.

$f(m)=(-1)^{m+2}(m+1)^2$,

$g(m)=(-1)^{m+1}\times\frac{m(m+1)}{2}$이므로

$f(5)=(-1)^{5+2}(5+1)^2=-36$,

$g(2)=(-1)^{2+1}\times\frac{2(2+1)}{2}=-3$이다.

$$\therefore\ \frac{f(5)}{g(2)}=\frac{-36}{-3}=12$$

26 답 ③

(i) 홀수 중 가장 작은 수가 1이므로 $n=1$일 때, 즉 $p(1)$이 참임을 보인다.

(ii) 홀수는 $2n-1$(n은 자연수) 꼴로 나타내어지고, $2n-1$ 다음 홀수가 $2n+1$이므로 $p(2n-1)$이 참이면 $p(2n+1)$이 참임을 보인다.

따라서 반드시 증명해야 하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

27 답 ②

다음은 1보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2m(2m-1)}<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{n}\right)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

증명

(i) $n=2$일 때,

1보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 성립하는지를 보이는 거니까 $n=2$일 때에 성립하는지부터 확인해.

(좌변)$=\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{4\times3}=\frac{7}{12}$,

(우변)$=\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2m(2m-1)}<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)$$

이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$을 더하면

$n=k+1$일 때로 만들어주기 위해 (가)를 더해야 해.

$$\sum_{m=1}^{k+1}\frac{1}{2m(2m-1)}<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(가)}$$

한편, $2(2k+1)>4k$이므로

$$\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(가)}<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(나)}$$

(나)에 들어갈 식을 유추할 수 있어.

$$=\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k+1}\right)$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 1보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\frac{f(10)}{g(21)}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

1st $n=2$일 때 주어진 부등식이 성립함을 보이자.

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{4\times3}=\frac{7}{12}$,

(우변)$=\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

$\frac{7}{12}-\frac{5}{8}=-\frac{1}{24}<0$이므로 $\frac{7}{12}<\frac{5}{8}$

2nd $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

(ii) $n=k(k\geq2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2m(2m-1)}<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)$$

이 식의 양변에

$$\frac{1}{2(k+1)\{2(k+1)-1\}}=\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$$을 (가)

더하면 $\sum_{m=1}^{k+1}\frac{1}{2m(2m-1)}=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2m(2m-1)}+\frac{1}{2(k+1)\{2(k+1)-1\}}$ 이지?

$$\sum_{m=1}^{k+1}\frac{1}{2m(2m-1)}<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$$

한편, $2(2k+1)>4k$이므로

$2(2k+1)>4k$에서 $\frac{1}{2(2k+1)}<\frac{1}{4k}$이야.

$$\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$$

$$<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{4k(k+1)} \quad (나)$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4(k+1)}=\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k+1}\right)$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 1보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

3rd $\frac{f(10)}{g(21)}$의 값을 구하자.

따라서 $f(k)=\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$, $g(k)=\frac{1}{4k(k+1)}$

이므로 $f(10)=\frac{1}{2\times21\times11}$, $g(21)=\frac{1}{4\times21\times22}$

$$\therefore \frac{f(10)}{g(21)}=\frac{\frac{1}{2\times21\times11}}{\frac{1}{4\times21\times22}}=\frac{4\times21\times22}{2\times21\times11}=4$$

쉬어가기

비교하면 행복은 멀어집니다

가난해도 마음이 풍요로운 사람은
아무 것도 소유하지 않고 있는 것처럼 보이지만
실제로는 모든 것을 소유하는 사람입니다.

남이 보기 부러워할 정도의 여유있는 사람은
모든 것이 행복해 보일듯하지만
실제로는 마음이 추울지도 모르겠습니다.

어려움을 아는 사람은 행복의 조건을 알지만
모든 것이 갖추어진 사람은 만족을 모를 터이니
마음은 추운 겨울일지도 모릅니다.

몸이 추운 것은 옷으로 감쌀 수 있지만
마음이 추운 것은 어떻게 해결할 수 있을까요?
사는 기준이 다 같을 수는 없는 것처럼
행복의 조건이 하나일 수는 없답니다.

생긴 모양새가 다르면 성격도 다른 법
가진 것이 작지만 행복을 아는 당신이면 좋겠습니다.
그것이 행복의 조건이기 때문이지요.

남과 비교할 때 행복은 멀어집니다.
그저 감사한 마음 하나만으로도
당신은 행복의 주인공이 되실 것입니다.

– 좋은생각 중에서 –

수능 1등급을 위한 절대평가 키워드 시리즈

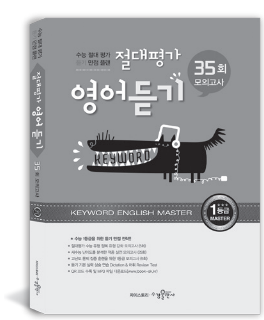
절대평가 키워드 독해 – 절대평가, 1등급을 완성한다!

구문독해(20일 완성)
- 기본 구문 유형 마스터
- 쉽고 빠른 문장 해석 비법
- 학습한 구문이 적용된 독해 필수 유형 문제

유형독해(20일 완성)
- 독해 유형 전략 마스터
- 독해 원리와 해법 적용
- 정답과 오답을 가려내는 단서 찾기 훈련

1등급 독해(24일 완성)
- 고난도 3점 유형 마스터
- 고난도 유형만의 풀이전략과 실전 연습문제
- 매력적인 오답의 원리 이해와 해결 전략

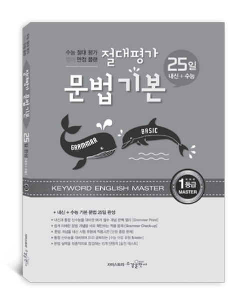
절대평가 키워드 듣기 35회 모의고사 – 연습을 실전처럼!!



| 절대평가 듣기 실전 모의고사 35회 |

- Step 1 절대평가 수능 유형 정복 – 유형 강화 모의고사 5회
- Step 2 새수능 난이도 분석 – 적중 실전 모의고사 25회
- Step 3 고난도 문제 집중 훈련 – 1등급 모의고사 5회
- Step 4 기본 실력 상승 연습 – Dictation / 어휘 Review Test

절대평가 문법 기본 – 내신 + 수능 기본 문법 25일 완성



| 절대평가 문법 기본 |

- Step 1 고등 필수 영문법 개념 단계별 정리
- Step 2 문법 이해와 적용 – 유형별 적용 훈련 코스
(Grammar Check-up, 단원 종합 문제, 수능 어법 유형 Master, 실전 테스트)
- Step 3 문법 학습을 바탕으로 한 1등급 독해 실력 상승

＊독해의 기본 문법을 단계별로 정리해서 완벽한 독해력을 완성한다.