심플
자이스토리 고등수학의 기본을 심플하게 완성!

SIMPLE Xi story

수학 Ⅱ

[해설편]

자이스토리 · 수경출판사

SIMPLE Xi story 빠른 정답 찾기

I 함수의 극한과 연속

A 함수의 극한

01 극한, 극한값 02 발산 03 존재한다 04 ×
05 ○ 06 × 07 2 08 2 09 3 10 -3
11 0 12 0 13 ∞ 14 $-\infty$ 15 ∞ 16 ∞
17 $-\infty$ 18 4 19 4 20 3 21 3 22 2
23 1 24 존재하지 않는다. 25 ⑤
26 ㄱ, ㄴ, ㄷ 27 ⑤ 28 ③ 29 ④ 30 ③
31 ④ 32 ⑤ 33 ⑤ 34 ② 35 ① 36 ①
37 ④ 38 ② 39 ③ 40 ③ 41 ③ 42 ②
43 ⑤ 44 ③ 45 ④

B 함수의 극한값의 계산

01 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ 02 인수분해 03 최고차항
04 ○ 05 ○ 06 × 07 0 08 -8
09 4 10 $-\frac{1}{4}$ 11 27 12 $-\frac{3}{2}$ 13 0 14 $\frac{1}{6}$
15 0 16 $\frac{3}{2}$ 17 0 18 $\frac{5}{2}$ 19 2 20 ∞
21 $\frac{1}{4}$ 22 -1 23 ② 24 ① 25 ③ 26 8
27 ② 28 ④ 29 ① 30 ⑤ 31 ② 32 ②
33 ① 34 ② 35 ① 36 ② 37 ① 38 ②
39 ② 40 ④ 41 ① 42 ② 43 ⑤ 44 ①
45 ① 46 ② 47 ② 48 ① 49 ③ 50 ②

C 함수의 극한의 활용

01 $\lim_{x\to a} f(x)=0$ 02 0이 아닌, $\lim_{x\to a} g(x)=0$
03 $\le$ 04 × 05 ○ 06 ○ 07 $a+b=-2$
08 $a+b=0$ 09 $4a-b=16$ 10 $2a-b=0$
11 $a=4$, $b=\frac{1}{4}$ 12 $a=2$, $b=-8$
13 1, 0, $x-1$, $x-1$, $x+a$, 1, $(x-1)(x+1)$, 3
14 3 15 2 16 $\frac{1}{3}$ 17 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t}$
18 $\mathrm{Q}(0, \sqrt{t^2+t})$ 19 $S(t)=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+t}$ 20 $\frac{1}{2}$
21 ⑤ 22 ① 23 ⑤ 24 ② 25 ④ 26 ③
27 ② 28 ④ 29 ⑤ 30 ⑤ 31 ② 32 ②
33 ③ 34 ③ 35 ② 36 ④ 37 ③ 38 ⑤
39 ③ 40 ② 41 ① 42 ② 43 1 44 ④

연습 [A–C]

01 ① 02 ⑤ 03 ⑤ 04 ② 05 ⑤ 06 ④
07 ② 08 ① 09 ⑤ 10 ⑤ 11 29 12 ①
13 14

D 함수의 연속

01 $\lim_{x\to a} f(x)$, $f(a)$ 02 불연속
03 닫힌구간 04 연속함수 05 ○ 06 ×
07 × 08 ○ 09 ㄴ 10 ㄱ 11 ㄷ
12 불연속 13 불연속 14 연속
15 $(-\infty, \infty)$ 16 $(-\infty, \infty)$
17 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ 18 $[1, \infty)$
19 불연속 20 불연속 21 연속 22 연속
23 불연속 24 연속 25 ④ 26 ② 27 ⑤
28 ⑤ 29 ② 30 ③ 31 ⑤ 32 ② 33 ④
34 ⑤ 35 ① 36 ② 37 ① 38 ④ 39 ⑤
40 ② 41 ① 42 6 43 ① 44 ⑤ 45 ②
46 29

E 연속함수의 성질

01 연속 02 최댓값, 최솟값 03 연속, $\ne$ 04 실근
05 ○ 06 × 07 ○ 08 ○
09 불연속인 x의 값은 없다. 10 불연속인 x의 값은 없다.
11 $x=3$ 12 $x=-2$, $x=1$ 13 불연속인 x의 값은 없다.
14 $(-\infty, \infty)$ 15 $(-\infty, \infty)$ 16 $(-\infty, \infty)$
17 $(-\infty, \infty)$ 18 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$
19 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ 20 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$
21 최댓값 : 2, 최솟값 : 0 22 최댓값 : 1, 최솟값 : 0
23 최댓값 : 7, 최솟값 : 3 24 최댓값 : 1, 최솟값 : $\frac{1}{3}$
25 (가) 연속 (나) -2 (다) 2 (라) 사잇값의 정리
26 × 27 ○ 28 ○ 29 ③ 30 ④ 31 ②
32 ⑤ 33 ④ 34 ⑤ 35 ④ 36 ③ 37 ①
38 ③ 39 ① 40 ② 41 ② 42 ⑤ 43 ①
44 ③ 45 ② 46 ② 47 ③ 48 ② 49 ②
50 ④

연습 [D–E]

01 ④ 02 ③ 03 ④ 04 ③ 05 ④ 06 2
07 ① 08 ② 09 ③ 10 25 11 $-\frac{8}{5}$

I 대단원 TEST [A–E]

01 ① 02 ④ 03 ② 04 4 05 ④ 06 ①
07 ⑤ 08 18 09 ⑤ 10 ② 11 ④ 12 ⑤
13 ② 14 ③ 15 6 16 ③ 17 ④ 18 ②
19 ② 20 -1 21 ④ 22 ⑤ 23 56 24 4
25 20 26 8

II 미분

F 미분계수

01 $f(a)$, $f(a+\Delta x)$ 02 $f(a+h)$, $f(a)$
03 접선 04 ○ 05 ○ 06 × 07 2 08 -1
09 7 10 7 11 $2a+\Delta x$ 12 1 13 1
14 -3 15 9 16 6 17 -4 18 2 19 -1
20 -7 21 3 22 (가) 0 (나) 1 (다) -1 23 ②
24 ④ 25 ① 26 ④ 27 ④ 28 ⑤ 29 ①
30 ② 31 ① 32 ② 33 ④ 34 ④ 35 ①
36 ① 37 ⑤ 38 ⑤ 39 ③ 40 ③ 41 ①
42 ① 43 ⑤ 44 ④ 45 -3 46 ① 47 ⑤
48 ④ 49 ② 50 ③
51 (가) 0 (나) 연속 (다) 2 (라) 0 (마) 미분가능하지 않다
52 ③ 53 미분가능하지 않다. 54 ③ 55 2
56 5 57 ⑤ 58 ⑤ 59 ⑤ 60 ②

G 도함수

01 $f(x+h)-f(x)$ 02 미분한다 03 nx^{n-1}
04 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 05 ○ 06 × 07 ○
08 × 09 $f'(x)=0$ 10 $f'(x)=-1$
11 $f'(x)=4$ 12 $f'(x)=2x+2$ 13 $f'(x)=3x^2$
14 $y'=4x^3$ 15 $y'=1$ 16 $y'=0$
17 $y'=2x^9$ 18 $y'=6$ 19 $y'=-6x+8$
20 $y'=-2x^2+5x-3$ 21 $y'=8x^3-3x^2+6x$
22 $y'=4x-1$ 23 $y'=6x+11$
24 $y'=-12x^2+2x+12$ 25 $y'=4x^3-3x^2+10x-2$
26 $y'=-4x^3+12x^2-4x+8$
27 $y'=-10x^4-8x^3+12x+6$
28 $y'=3x^2+12x+11$ 29 $y'=16x^3+21x^2+6x$
30 $y'=50x-30$ 31 $y'=3(x^2+3x+2)^2(2x+3)$
32 ② 33 ③ 34 ② 35 ② 36 ④ 37 ⑤
38 ② 39 ③ 40 ③ 41 ④ 42 ① 43 ③
44 ④ 45 ② 46 ⑤ 47 ⑤ 48 ② 49 ①
50 ③ 51 ③ 52 ③ 53 ① 54 ① 55 ⑤
56 ④ 57 ③ 58 ① 59 ② 60 ① 61 ⑤
62 ② 63 ③ 64 ② 65 ② 66 ① 67 3
68 ② 69 $\frac{4}{3}$

연습 [F–G]

01 ① 02 ③ 03 ② 04 ③ 05 ② 06 ②
07 ② 08 ④ 09 ④ 10 ② 11 ④ 12 ②
13 ① 14 3 15 6

H 접선의 방정식

01 $f'(a)$ 02 $f(1)$, $f'(1)$ 03 $f'(c)$ 04 ×
05 × 06 ○ 07 $y=5x-1$ 08 $y=5x+5$
09 $y=x-3$ 10 $y=\frac{1}{6}x-\frac{11}{2}$ 11 $y=-\frac{1}{4}x-1$
12 $y=3x-2$ 13 $y=-x+\frac{4}{3}$ 14 $y=-6x-5$
15 $y=3x-\frac{1}{2}$ 16 $y=-5x-2$ 또는 $y=3x-2$
17 $y=11x+8$ 또는 $y=3x$ 18 -1 19 $\frac{1}{2}$ 20 -1
21 ③ 22 ① 23 ④ 24 ⑤ 25 ① 26 ①
27 ④ 28 ② 29 ① 30 ⑤ 31 ③ 32 -2
33 ⑤ 34 ② 35 ① 36 4 37 $-\frac{1}{2}$ 38 ③
39 ② 40 ⑤ 41 ③ 42 ① 43 ② 44 ①
45 ② 46 ① 47 ⑤ 48 6 49 ② 50 ⑤
51 ① 52 ③ 53 ⑤ 54 ② 55 ② 56 -9
57 ③ 58 $a=4$, $c=1$
59 (가) $f'(c)$ (나) 0 (다) $f(a)$ 60 ② 61 ④

I 함수의 극대·극소와 그래프

01 증가 02 극대 03 극소 04 × 05 ○ 06 ×
07 증가 08 증가 09 감소 10 감소
11 구간 $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$에서 감소, 구간 $\left(-\frac{3}{4}, \infty\right)$에서 증가
12 구간 $(-\infty, -1)$에서 감소, 구간 $(-1, 1)$에서 증가, 구간 $(1, \infty)$에서 감소
13 구간 $(-\infty, 1)$에서 증가, 구간 $(1, 3)$에서 감소, 구간 $(3, \infty)$에서 증가

I 함수의 극대·극소와 그래프

14 구간 $(-\infty, -1)$에서 감소, 구간 $(-1, 0)$에서 증가, 구간 $(0, 1)$에서 감소, 구간 $(1, \infty)$에서 증가
15 극댓값 : 21, 극솟값 : -11
16 극댓값 : 0, 극솟값 : -4
17 극솟값 : -4, 극댓값은 없다.
18 극솟값 : $-\frac{27}{16}$, 극댓값은 없다.
19 극댓값 : 1, 극솟값은 없다. 20 해설 참조
21 해설 참조 22 ③ 23 ③ 24 ② 25 ⑤
26 7 27 ① 28 ② 29 ⑤ 30 ① 31 ④
32 ② 33 ② 34 ③ 35 ② 36 10 37 ④
38 ⑤ 39 ④ 40 ④ 41 $3<a<\frac{15}{4}$ 42 ⑤
43 2 44 ③ 45 ① 46 ⑤ 47 ③

J 도함수의 활용

01 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 02 x축
03 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ 04 ○ 05 × 06 ○
07 최댓값 : 7, 최솟값 : 3 08 최댓값 : 9, 최솟값 : 1
09 최댓값 : 7, 최솟값 : 3 10 최댓값 : 1, 최솟값 : -26
11 1 12 1 13 2 14 3
15 (가) $x-1$ (나) 1 (다) 0
16 속도 : 0, 가속도 : -12 17 속도 : -3, 가속도 : 2
18 ② 19 ④ 20 ④ 21 ⑤ 22 ② 23 ①
24 ④ 25 ② 26 ① 27 ③ 28 ② 29 ①
30 ③ 31 ① 32 ③ 33 ② 34 ③ 35 ①
36 ③ 37 ② 38 ③ 39 ⑤ 40 ④ 41 ④
42 ③ 43 ④ 44 ② 45 ④ 46 21 47 ④
48 ③ 49 ③ 50 ④ 51 ② 52 ③ 53 ④
54 (가) 0 (나) $\geq$ 55 ③ 56 ④ 57 ④ 58 ③
59 ④ 60 8 61 ③ 62 9 63 ② 64 ②
65 ③ 66 ① 67 ③ 68 18 69 ③ 70 ①
71 70 m 72 ④ 73 ③ 74 ⑤ 75 ② 76 ③

연습 [H–J]

01 ① 02 48 03 ② 04 ③ 05 ⑤ 06 ②
07 ④ 08 ② 09 ③ 10 ① 11 1 12 2
13 ③ 14 ⑤ 15 ③ 16 $y=-4x+3$

II 대단원 TEST [F–J]

01 ③ 02 ② 03 ④ 04 20 05 ③ 06 ①
07 56 08 181 09 ④ 10 ④ 11 ③ 12 ②
13 ⑤ 14 ① 15 ⑤ 16 ② 17 ② 18 ④
19 ⑤ 20 ① 21 ② 22 ⑤ 23 ③ 24 ⑤
25 ① 26 ③ 27 ② 28 ② 29 ⑤ 30 14
31 $y=-5x+6$

III 적분

K 부정적분

01 부정적분 02 피적분함수 03 적분상수
04 $f(x)+C$ 05 × 06 × 07 ○ 08 ×
09 ○ 10 ○ 11 × 12 ○
13 $\frac{1}{2}x^4+C$ (단, C는 적분상수) 14 $4x+C$ (단, C는 적분상수)
15 $-\frac{1}{3}x^9+C$ (단, C는 적분상수)
16 $\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수) 17 $f(x)=2x+3$
18 $f(x)=3x^2+2x$ 19 $f(x)=x^3-6x^2-1$
20 $4x$ 21 $5x^4$ 22 x^2+C (단, C는 적분상수)
23 x^9+C (단, C는 적분상수) 24 ① 25 ① 26 ③
27 ⑤ 28 ② 29 ④ 30 ② 31 ④ 32 ⑤
33 ③ 34 ② 35 ③ 36 ⑤

L 부정적분의 계산

01 $n+1$, $n+1$ 02 x 03 $\int x^3dx$
04 2, $\int 4\,dx$ 05 × 06 ○ 07 ○ 08 ×
09 $2x+C$ (단, C는 적분상수) 10 $\frac{1}{4}x^4+C$ (단, C는 적분상수)
11 $\frac{1}{8}x^8+C$ (단, C는 적분상수)
12 $\frac{1}{11}x^{11}+C$ (단, C는 적분상수)
13 x^4+C (단, C는 적분상수) 14 x^5+C (단, C는 적분상수)
15 $3x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)
16 $\frac{1}{3}x^3+x+C$ (단, C는 적분상수)
17 $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)
18 $-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$ (단, C는 적분상수)
19 $\frac{2}{5}x^5+\frac{7}{3}x^3-x+C$ (단, C는 적분상수)

L 부정적분의 계산

20 $\frac{2}{3}x^6+x^3+5x+C$ (단, C는 적분상수)

21 $-\frac{1}{4}x^8+x^6-\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

22 $2x^7-\frac{5}{2}x^4+2x+C$ (단, C는 적분상수)　23 ④

24 x^2y^3+C (단, C는 적분상수)　25 ②　26 ②

27 ⑤　28 ⑤

29 $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)　30 ④

31 ⑤　32 16　33 ⑤　34 ②　35 $-\frac{5}{27}$

36 ③　37 33　38 ③　39 9　40 ④　41 ②

42 $\frac{1}{6}$　43 ⑤　44 ④　45 ③　46 1　47 ②

48 ⑤　49 2

연습 [K-L]

01 ④　02 63　03 ②　04 ④　05 ③　06 ③

07 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+9$　08 ①　09 ③　10 ④

11 ③　12 ④　13 ③　14 ⑤　15 -1

M 정적분

01 $F(b)-F(a)$, 정적분　02 $f(x)$　03 $\int_c^b f(x)\,dx$

04 ×　05 ○　06 ×　07 1　08 $\frac{3}{2}$　09 $\frac{7}{3}$

10 0　11 x^2+4x　12 $-4x^3+x-1$

13 $f(x)=3x^2$　14 $f(x)=-8x^3+1$　15 $\frac{5}{2}$

16 2　17 $\frac{1}{2}$　18 $\frac{4}{3}$　19 $\frac{19}{4}$　20 10　21 -6

22 $\frac{27}{2}$　23 ②　24 ③　25 ③　26 ⑤　27 ③

28 ②　29 ③　30 ⑤　31 48　32 ②　33 ⑤

34 ⑤　35 ③　36 ③　37 ④　38 ②　39 ①

40 1　41 ①　42 ①　43 ①　44 ①　45 11

46 ③　47 ②　48 ①　49 ②　50 ①　51 ②

52 ②　53 ④　54 ④　55 ③　56 ④　57 ⑤

58 ③　59 ⑤　60 ①　61 ⑤　62 ③　63 $\frac{32}{3}$

64 3　65 ③　66 ④　67 ①　68 ③　69 2

70 ③　71 ①　72 ⑤　73 ④　74 ②　75 1

76 ⑤

연습 [M]

01 ④　02 ⑤　03 ②　04 ④　05 ④　06 9

07 ②　08 ①　09 ③　10 ⑤　11 ⑤　12 40

13 $\frac{4}{3}$

N 정적분의 활용

01 $\int_a^b |f(x)|\,dx$　02 $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

03 $\int_a^b v(t)\,dt$, $\int_a^b |v(t)|\,dt$　04 ×　05 ○　06 ×

07 $\frac{4}{3}$　08 $\frac{4}{3}$　09 $\frac{1}{6}$　10 $\frac{125}{6}$　11 $\frac{1}{6}$　12 $\frac{7}{3}$

13 2　14 $\frac{9}{2}$　15 $\frac{32}{3}$　16 $\frac{8}{3}$　17 9　18 $-\frac{4}{3}$

19 $\frac{2}{3}$　20 2　21 -2　22 -3　23 5　24 ②

25 ④　26 ④　27 ④　28 ③　29 ②　30 ④

31 3　32 ②　33 3　34 ③　35 ②　36 ①

37 ③　38 ①　39 ④　40 ④　41 ①　42 ①

43 ④　44 ②　45 ④　46 ③　47 ②　48 ①

49 ③　50 ①　51 ②　52 ④　53 ③　54 ③

55 ⑤　56 ③　57 ②　58 ④　59 ②　60 ①

61 ③　62 ①　63 ②　64 ①　65 ②　66 ③

67 ④　68 ①　69 ①　70 ③　71 ②　72 ①

73 ④

연습 [N]

01 ③　02 ②　03 ③　04 ①　05 ②　06 ④

07 12　08 ③　09 ④　10 ⑤　11 7　12 ③

13 3　14 64　15 $\frac{1}{6}$

Ⅲ 대단원 TEST [K-N]

01 ④　02 ③　03 ④　04 ⑤　05 ⑤　06 ④

07 132　08 ③　09 ③　10 ⑤　11 9　12 ②

13 ②　14 ③　15 ②　16 ③　17 14 m　18 ⑤

19 ②　20 ④　21 ④　22 $\frac{25}{12}$　23 ④　24 ②

25 ②　26 36　27 3

Ⅰ 함수의 극한과 연속

Simple A 함수의 극한

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 8~9

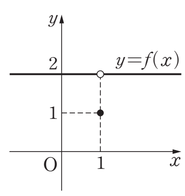
01 답 극한, 극한값

02 답 발산

03 답 존재한다

04 답 ×

그림에서 $x=1$에서의 극한값은 2이지만 함숫값은 1이다.



05 답 ○

06 답 ×

07 답 2

$\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)=1+1=2$

08 답 2

$\lim\limits_{x\to-1}(x+3)(x^2+x+1)=2\times1=2$

09 답 3

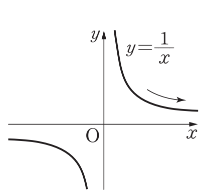
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+6}{x+2}=\dfrac{6}{2}=3$

10 답 -3

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{-8-1}{4-1}=\dfrac{-9}{3}=-3$

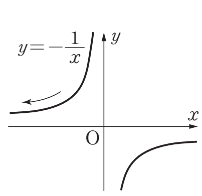
11 답 0

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$



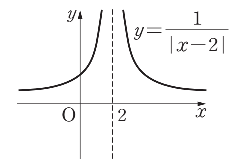
12 답 0

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$



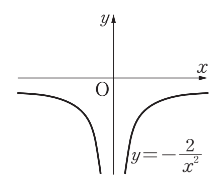
13 답 ∞

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{|x-2|}=\infty$



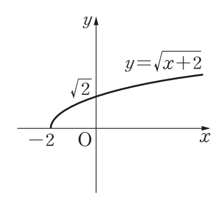
14 답 $-\infty$

$\lim\limits_{x\to0}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)=-\infty$



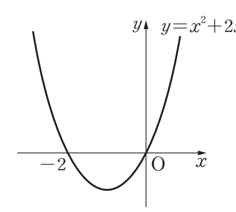
15 답 ∞

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+2}=\infty$



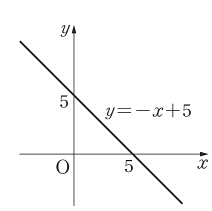
16 답 ∞

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+2x)=\infty$



17 답 $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}(-x+5)=-\infty$



18 답 4

19 답 4

20 답 3

21 답 3

22 답 2

23 답 1

24 답 존재하지 않는다.

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

유형 연습 [+ 내신 유형] 문제편 pp. 10~13

25 답 ⑤

ㄴ. 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $x \longrightarrow 0$일 때 함수 $g(x)$의 함숫값은 한없이 커지거나 한없이 작아지므로 $x=0$에서 수렴하지 않는다.

따라서 $x=0$에서 수렴하는 함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

26 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)=\lim\limits_{x \to 2}|x-2|=0$ (수렴)

ㄴ. $\lim\limits_{x \to 2} g(x)=\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{1}{2}$ (수렴)

ㄷ. $\lim\limits_{x \to 2} h(x)=\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{1}{x-3}+4\right)=\dfrac{1}{2-3}+4=3$ (수렴)

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

27 답 ⑤

ㄱ. $\lim\limits_{x \to \infty}(1+x)=\infty$ (발산)

ㄴ. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ (수렴)

ㄷ. $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x-1}{x+2}=\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{(x+2)-3}{x+2}$

$=\lim\limits_{x \to \infty}\left(-\dfrac{3}{x+2}+1\right)=1$ (수렴)

따라서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

28 답 ③

$\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{3x+1}{x-5}=\dfrac{3+1}{1-5}=\dfrac{4}{-4}=-1$

$\lim\limits_{x \to -3}\dfrac{x-1}{x+1}==\dfrac{-3-1}{-3+1}=\dfrac{-4}{-2}=2$

$\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x}{x^2-3}=\dfrac{2}{4-3}=2$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1}\dfrac{3x+1}{x-5}+\lim\limits_{x \to -3}\dfrac{x-1}{x+1}+\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x}{x^2-3}$

$=-1+2+2=3$

29 답 ④

$a=\lim\limits_{x \to -1}(x^3+4x^2-5)$

$=(-1)^3+4\times(-1)^2-5=-1+4-5=-2$

$b=\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{3+1}{\sqrt{3+1}}=\dfrac{4}{2}=2$

$c=\lim\limits_{x \to 2}(x+1)(x^2-1)=(2+1)\times(2^2-1)=3\times3=9$

$\therefore a+b+c=-2+2+9=9$

30 답 ③

① $\lim\limits_{x \to 3}(x+3)(x-3)=6\times0=0$ (참)

② $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=\dfrac{1-1-2}{1+1}=\dfrac{-2}{2}=-1$ (참)

③ $\lim\limits_{x \to 4}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\sqrt{4}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ (거짓)

④ $\lim\limits_{x \to -1}(x-1)(x^2+x+1)=(-1-1)\times(1-1+1)$

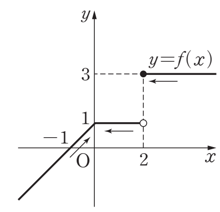
$=-2\times1=-2$ (참)

⑤ $\lim\limits_{x \to 0}5=5$ (참)

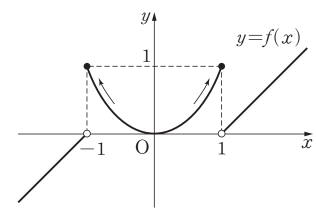
31 답 ④

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)+\lim\limits_{x \to 2+} f(x)$

$=1+3=4$

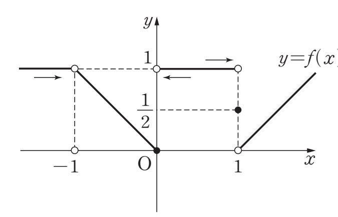


32 답 ⑤



$\lim\limits_{x \to -1+} f(x)+\lim\limits_{x \to 1-} f(x)=1+1=2$

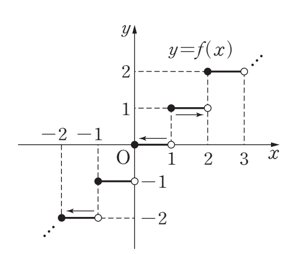
33 답 ⑤



$\lim\limits_{x \to -1-} f(x)+\lim\limits_{x \to 0+} f(x)+\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$

$=1+1+1=3$

34 답 ②



$\lim\limits_{x \to -2+} f(x)+\lim\limits_{x \to 0+} f(x)+\lim\limits_{x \to 2-} f(x)$

$=-2+0+1=-1$

35 답 ①

함수 $f(x)=\begin{cases}3-x^2 & (x<1)\\ x-5 & (x\geq1)\end{cases}$이므로

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x)+\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$

$=\lim\limits_{x \to 1-}(3-x^2)+\lim\limits_{x \to 1+}(x-5)$

$=2+(-4)=-2$

36 답 ①

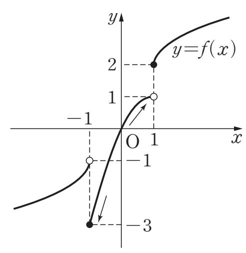
함수 $f(x)=\begin{cases} x^3-2 & (x<2) \\ -3x & (x\ge2) \end{cases}$이므로

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)-\lim\limits_{x\to2-}f(x)$

$=\lim\limits_{x\to2+}(-3x)-\lim\limits_{x\to2-}(x^3-2)$

$=-6-6=-12$

37 답 ④



ㄱ. $f(1)=2$ (거짓)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1$ (참)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=-3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

38 답 ②

ㄱ. $x>1$일 때, $|x-1|=x-1$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+}1=1$ (수렴)

ㄴ. $x<1$일 때, $|x-1|=-(x-1)$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{2x-2}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{2(x-1)}{-(x-1)}$

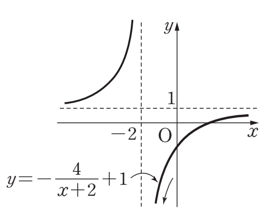
$=\lim\limits_{x\to1-}(-2)=-2$ (수렴)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to-2+}\dfrac{x-2}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to-2+}\dfrac{x+2-4}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to-2+}\left(-\dfrac{4}{x+2}+1\right)$

$=-\infty$ (발산)



따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

39 답 ③

주어진 $y=\dfrac{x}{|x|}$의 그래프에서

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{x}=\underbrace{1}_{\text{(가)}}$ 이고

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x}{-x}=\underbrace{-1}_{\text{(나)}}$ 이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|x|}$의 값은 $\underbrace{\text{존재하지 않는다}}_{\text{(다)}}$.

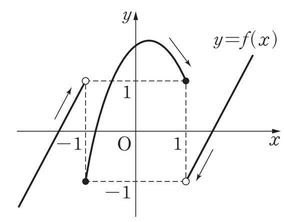
TIP

$\lim\limits_{x\to0+}$는 x가 0보다 크면서 한없이 0에 접근하는 것을 나타내는 기호이기 때문에 $x\neq0$이다. 즉, $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{x}$에서 x를 약분할 수 있는 것이다.

마찬가지로 $\lim\limits_{x\to0-}$는 x가 0보다 작으면서 한없이 0에 접근하는 것을 나타내는 기호이기 때문에 $x\neq0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x}{-x}$에서 x를 약분할 수 있는 것이다.

40 답 ③



ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1+(-1)=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $-1<k<1$인 모든 실수 k에 대하여 $\lim\limits_{x\to k}f(x)$의 값이 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

41 답 ③

$\lim\limits_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)$가 성립하여야 한다.

$f(x)=\begin{cases} 2x-4 & (x<2) \\ x^2+p & (x\ge2) \end{cases}$이므로

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}(2x-4)=0$

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}(x^2+p)=4+p$

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)$이어야 하므로

$0=4+p\quad\therefore p=-4$

42 답 ②

$\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)$가 성립하여야 한다.

$f(x)=\begin{cases} (x-1)^2+3 & (x<1) \\ -x+k & (x\ge1) \end{cases}$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}\{(x-1)^2+3\}=3$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(-x+k)=-1+k$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)$이어야 하므로

$-1+k=3\quad\therefore k=4$

43 답 ⑤

$\lim_{x\to-1} f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)$가 성립하여야 한다.

$f(x)=\begin{cases} x^3+1 & (x<-1) \\ 2x+k & (x\ge-1) \end{cases}$이므로

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-} (x^3+1)=0$

$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+} (2x+k)=-2+k$

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)$이어야 하므로

$-2+k=0 \quad \therefore k=2$

44 답 ③

$\lim_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)$가 성립하여야 한다.

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-} (kx-1)=k-1$

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+} (3x^2-k)=3-k$

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)$이어야 하므로

$k-1=3-k,\ 2k=4 \quad \therefore k=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 3x^2-2 & (x>1) \\ 2x-1 & (-1\le x\le1) \\ x^2+2 & (x<-1) \end{cases}$이므로

$\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to-1+} f(x)$

$=\lim_{x\to-1-} (x^2+2)+\lim_{x\to-1+} (2x-1)$

$=(1+2)+(-2-1)=0$

45 답 ④

$\lim_{x\to1-} f(x)=1,\ \lim_{x\to1+} f(x)=2$

$\lim_{x\to3-} f(x)=1,\ \lim_{x\to3+} f(x)=-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to4-} f(x)=-\frac{1}{2},\ \lim_{x\to4+} f(x)=0$

즉, 주어진 그래프에서 a의 값이 1, 3, 4일 때, 함수 $f(x)$의 좌극한값과 우극한값이 다르므로 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$1+3+4=8$

Simple B 함수의 극한값의 계산

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 14~15

01 답 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$

02 답 인수분해

03 답 최고차항

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ×

07 답 0

$\lim_{x\to a}\{2f(x)+g(x)\}=2\times2+(-4)=0$

08 답 -8

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=2\times(-4)=-8$

09 답 4

$\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2=2^2=4$

10 답 $-\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{2f(x)-g(x)}=\frac{2+(-4)}{2\times2-(-4)}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}$

11 답 27

$\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(x^2+3x+9)$

$=9+9+9=27$

12 답 $-\frac{3}{2}$

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)(x-2)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)(x-2)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-2)}{x+1}$

$=\frac{3\times(-1)}{2}=-\frac{3}{2}$

13 답 0

$\lim_{x\to4}\frac{(x-4)^2(x+1)}{x-4}$

$=\lim_{x\to4}(x-4)(x+1)$

$=0\times5=0$

14 답 $\frac{1}{6}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{9+x}-3)(\sqrt{9+x}+3)}{x(\sqrt{9+x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{9+x-9}{x(\sqrt{9+x}+3)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{9+x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{9+x}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

15 답 0

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

16 답 $\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+4}-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x+4}-x)(\sqrt{x^2+3x+4}+x)}{\sqrt{x^2+3x+4}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+4-x^2}{\sqrt{x^2+3x+4}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+3x+4}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

17 답 0

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$$

18 답 $\frac{5}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+1}{2x^2+3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{5}{2}$$

19 답 2

$x=-t$라 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때, $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x+3}{x^2-1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2\times(-t)^2+(-t)+3}{(-t)^2-1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2-t+3}{t^2-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}}{1-\frac{1}{t^2}}=2$$

20 답 ∞

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\frac{4}{x}}{2+\frac{3}{x}}=\infty$$

21 답 $\frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{(x+2)-2}{2(x+2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(x+2)}=\frac{1}{2\times2}=\frac{1}{4}$$

22 답 -1

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{(x+1)-(2x+1)}{(2x+1)(x+1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-x}{x(2x+1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{(2x+1)(x+1)}=-1$$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 16~19

23 답 ②

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x+1)=1$,

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}(x+3)=3$이므로

$$\lim_{x\to0}\{2f(x)-g(x)\}=2\lim_{x\to0}f(x)-\lim_{x\to0}g(x)$$
$$=2\times1-3=-1$$

24 답 ①

$$\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}\{2f(x)+g(x)-2f(x)\}$$
$$=\lim_{x\to2}\{2f(x)+g(x)\}-2\lim_{x\to2}f(x)$$
$$=3-2\times4=-5$$
$$\therefore \lim_{x\to2}\{f(x)+3g(x)\}=\lim_{x\to2}f(x)+3\lim_{x\to2}g(x)$$
$$=4+3\times(-5)=-11$$

25 답 ③

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=1$에서 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to1}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to1}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to1}g(x)$$
$$=\alpha+\beta=2 \cdots ㉠$$
$$\lim_{x\to1}\{2f(x)-g(x)\}=2\lim_{x\to1}f(x)-\lim_{x\to1}g(x)$$
$$=2\alpha-\beta=4 \cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$3\alpha=6 \quad \therefore \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉠에 대입하면

$2+\beta=2 \quad \therefore \beta=0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\{3f(x)-2g(x)\}=3\lim_{x\to1}f(x)-2\lim_{x\to1}g(x)$$
$$=3\alpha-2\beta=3\times2-2\times0=6$$

26 답 8

$x=3$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to3}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to3}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim_{x\to3}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to3}f(x)+\lim_{x\to3}g(x)=\alpha+\beta=4$

$\lim_{x\to3}f(x)g(x)=\lim_{x\to3}f(x)\times\lim_{x\to3}g(x)=\alpha\beta=2$

$\therefore \lim_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}^2$

$=\lim_{x\to3}[\{f(x)+g(x)\}^2-4f(x)g(x)]$

$=\lim_{x\to3}\{f(x)+g(x)\}^2-4\lim_{x\to3}f(x)g(x)$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\times2=8$

27 답 ②

ㄱ. 【반례】$f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{x}$일 때,

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x^2=0$,

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=\lim_{x\to0}\left(x^2\times\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}x=0$이지만

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$은 ∞ 또는 $-\infty$이므로 $\lim_{x\to0}g(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\times\frac{g(x)}{f(x)}\right\}$

$=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\alpha\beta$ (참)

ㄷ. 【반례】$f(x)=0$, $g(x)=\frac{1}{x}$일 때,

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}0=0$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}0=0$이지만

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

28 답 ④

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=\frac{4}{1+1+1}=\frac{4}{3}$$

29 답 ①

$$\lim_{x\to k}\frac{x^2-k^2}{x-k}=\lim_{x\to k}\frac{(x-k)(x+k)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k}(x+k)=2k=4$$

$\therefore k=2$

$$\therefore \lim_{x\to-k}\frac{x^3+k^3}{x^2-k^2}=\lim_{x\to-k}\frac{(x+k)(x^2-kx+k^2)}{(x+k)(x-k)}$$
$$=\lim_{x\to-k}\frac{x^2-kx+k^2}{x-k}$$
$$=\frac{3k^2}{-2k}=\frac{12}{-4}=-3$$

30 답 ⑤

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)(\sqrt{x+3}-2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}-2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+2)(\sqrt{x+3}+2)=3\times4=12$$

31 답 ②

$x\longrightarrow1$일 때, $x+3>0$이므로

$|x+3|=x+3$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{|x+3|-4}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)-4}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{2}$$

32 답 ②

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{1}{\sqrt{x+3}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$x\longrightarrow1-$일 때, $x-1<0$이므로

$|x-1|=-(x-1)$

$$\lim_{x\to1-}\frac{\sqrt{x+3}-2}{|x-1|}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{\sqrt{x+3}-2}{-(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{-(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{-(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=-\lim_{x\to1-}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=-\frac{1}{2+2}=-\frac{1}{4}$$

$\therefore$ (구하는 극한값)$=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

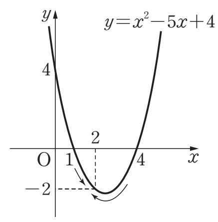
TIP

절댓값 기호가 있는 식은 절댓값 기호 안의 값이 0이 되는 값을 기준으로 나누어 절댓값을 없애서 푸는 것이 기본이다. $x\longrightarrow1-$는 x가 1보다 작은 값에서 한없이 1로 접근하는 값이므로 결국 $x<1$이 되어 $|x-1|=-(x-1)$로 나오게 되는 것이다.

33 답 ①

$x \longrightarrow 2$일 때, $x^2-5x+4<0$이므로

$|x^2-5x+4|=-(x^2-5x+4)$



$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{|x^2-5x+4|-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-(x^2-5x+4)-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-x^2+5x-6}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)(x-3)}{x-2}$$

$$=-\lim_{x\to2}(x-3)=1$$

34 답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+x}{2f(x)-3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}+1}{2\times\frac{f(x)}{x}-3}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}+1}{2\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-3}=\frac{3+1}{2\times3-3}=\frac{4}{3}$$

35 답 ①

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+4f(x)}{x^2-f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x+4\times\frac{f(x)}{x}}{x-\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to0}x+4\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}{\lim\limits_{x\to0}x-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{4k}{-k}=-4\ (\because k\neq0)$$

36 답 ②

$x-1=t$라 하면 $x=t+1$이고, $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t(t+2)}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\times\lim_{t\to0}\frac{1}{t+2}$$

$$=4\times\frac{1}{2}=2$$

37 답 ①

$x-1=t$라 하면 $x=t+1$이고, $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=1\ \cdots ㉠$$

$x-2=s$라 하면 $x=s+2$이고, $x\longrightarrow2$일 때 $s\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{s\to0}\frac{f(s)}{s}\times\lim_{s\to0}\frac{1}{s+4}=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\ (\because ㉠)$$

38 답 ②

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}{2-\frac{3}{x}}=\frac{1+1}{2}=1$$

39 답 ②

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

40 답 ④

$x=-t$라 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{\sqrt{2+x^2}-2}=\lim_{t\to\infty}\frac{-4t}{\sqrt{2+t^2}-2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{\frac{2}{t^2}+1}-\frac{2}{t}}=-4$$

41 답 ①

$x=-t$라 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+1}+\sqrt{t^2-1}}{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{-1}$$

$$=\frac{1+1}{-1}=-2$$

42 답 ②

$x=-t$라 하면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{-t-\sqrt{t^2-1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{-1-\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}=\frac{2}{-1-1}=-1$$

43 답 ⑤

분자, 분모를 각각 x^2으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+xf(x)}{x^2-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{f(x)}{x}}{1-\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{2+3}{1-3\times0}=5$$

다른 풀이

$f(x)=3x$라 하면 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x}=3$을 만족한다.

즉, 주어진 식에 $f(x)=3x$를 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+xf(x)}{x^2-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x\cdot3x}{x^2-3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{x^2-3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-\frac{3}{x}}=5$$

44 답 ①

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=0$$

(∵ (분자의 차수)<(분모의 차수))

$$\therefore \lim_{x\to3} f(x)+\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{4}$$

45 답 ①

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+5}-x)(\sqrt{x^2+4x+5}+x)}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{4}{1+1}=2$$

46 답 ②

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-2})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-2})(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2})}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x+2)-(x^2-2x-2)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\frac{4}{1+1}=2$$

47 답 ②

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2+6x-4}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+6x-4}}{(x-\sqrt{x^2+6x-4})(x+\sqrt{x^2+6x-4})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+6x-4}}{x^2-(x^2+6x-4)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+6x-4}}{-6x+4}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{4}{x^2}}}{-6+\frac{4}{x}}=\frac{1+1}{-6}=-\frac{1}{3}$$

48 답 ①

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}\times\frac{1-x^2}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{(1-x)(1+x)}{x^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left(-\frac{x+1}{x^2}\right)=-\frac{1+1}{1}=-2$$

49 답 ③

$$\lim_{x\to1}\frac{20}{x-1}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{20}{x-1}\times\frac{x-1}{5(x+4)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{4}{x+4}=\frac{4}{1+4}=\frac{4}{5}$$

50 답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-x-1}{x\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-x}{x\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$$
$$=\frac{-1}{1\times(1+1)}=-\frac{1}{2}$$

Simple C 함수의 극한의 활용

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 20～21

01 답 $\lim_{x\to a} f(x)=0$

02 답 0이 아닌, $\lim_{x\to a} g(x)=0$

03 답 ≤

04 답 ×

【반례】 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=0$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이지만

$\lim_{x\to1}(x+1)=2\neq0$이다.

05 답 ○

06 답 ○

07 답 $a+b=-2$

$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax+b}{x-1}=a$와 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(2x^2+ax+b)=0$

$2+a+b=0 \quad \therefore a+b=-2$

08 답 $a+b=0$

$\lim_{x\to-1}\frac{ax^2-bx}{x+1}=a$와 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로 $\lim_{x\to-1}(ax^2-bx)=0$

$\therefore a+b=0$

09 답 $4a-b=16$

$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{x^2-ax+b}=a$와 같이 0이 아닌 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to4}(x-4)=0$이므로 $\lim_{x\to4}(x^2-ax+b)=0$

$16-4a+b=0 \quad \therefore 4a-b=16$

10 답 $2a-b=0$

$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{a\sqrt{x+1}-b}=a$와 같이 0이 아닌 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로 $\lim_{x\to3}(a\sqrt{x+1}-b)=0$

$\therefore 2a-b=0$

11 답 $a=4,\ b=\frac{1}{4}$

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x}=b$와 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to0}x=0$이므로 $\lim_{x\to0}(\sqrt{x+a}-2)=0$

$\sqrt{a}-2=0 \quad \therefore a=4$

$a=4$를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}$

$\therefore b=\frac{1}{4}$

12 답 $a=2,\ b=-8$

$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2+ax+b}=\frac{1}{6}$과 같이 0이 아닌 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$

$4+2a+b=0 \quad \therefore b=-2a-4 \cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2+ax-2a-4}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2+a)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2+a}=\frac{1}{4+a}$

$\frac{1}{4+a}=\frac{1}{6} \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$b=-4-4=-8$

13 답 1, 0, $x-1$, $x-1$, $x+a$, 1, $(x-1)(x+1)$, 3

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+x+1}=1$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가

$\boxed{1}$인 이차식임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$와 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=\boxed{0}$이다.

즉, $f(x)=(\boxed{x-1})(x+a)$(a는 상수)라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{(\boxed{x-1})(x+a)}{x-1}=\lim_{x\to1}(\boxed{x+a})=2$

$1+a=2 \quad \therefore a=\boxed{1}$

따라서 $f(x)=\boxed{(x-1)(x+1)}$이므로

$f(2)=1\times3=\boxed{3}$이다.

14 답 3

$x>1$에서 $\frac{3x-1}{x-1}\le f(x)\le\frac{6x+7}{2x-2}$이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x-1}=3,\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x+7}{2x-2}=3$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=3$

15 답 2

$x>1$에서 $\dfrac{2x^2-5x+1}{x^2}\le f(x)\le\dfrac{4x^2-9x+6}{2x^2}$이고

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+1}{x^2}=2,\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-9x+6}{2x^2}=2$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

16 답 $\frac{1}{3}$

$x>1$에서 $\dfrac{x^2-2}{3x^2+1}\le f(x)\le\dfrac{2x+5}{6x}$이고

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{3x^2+1}=\frac{1}{3},\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{6x}=\frac{1}{3}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{3}$

17 답 $\overline{OP}=\sqrt{t^2+t}$

$\overline{OP}=\sqrt{(t-0)^2+(\sqrt{t}-0)^2}=\sqrt{t^2+t}$

18 답 $Q(0,\ \sqrt{t^2+t})$

$\overline{OP}=\overline{OQ}$를 만족하므로 $\overline{OQ}=\sqrt{t^2+t}$

즉, y축 위의 점 Q의 좌표는 $(0,\ \sqrt{t^2+t})$이다.

19 답 $S(t)=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+t}$

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{OQ}\times$(점 P의 x좌표)

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{t^2+t}\times t=\dfrac{1}{2}t\sqrt{t^2+t}$

20 답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+t}}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}{2}=\frac{1}{2}$$

유형 연습 [+내신 유형]

문제편 pp. 22~25

21 답 ⑤

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x^3-ax+b}{x}=-3$ … ㉠과 같이 극한값이 존재하고

$\displaystyle\lim_{x\to0}x=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0}(2x^3-ax+b)=0$ $\quad\therefore b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^3-ax+b}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3-ax}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(2x^2-a)=-a=-3$$

$\therefore a=3$

$\therefore a^2+b^2=9$

22 답 ①

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}=1$ … ㉠과 같이 극한값이 존재하고

$\displaystyle\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to-2}(x^2+ax+b)=0$

$4-2a+b=0\quad\therefore b=2a-4$ … ㉡

$b=2a-4$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+2a-4}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}(x+a-2)$$

$$=-2+a-2=1$$

$\therefore a=5$

$a=5$를 ㉡에 대입하면

$b=2\times5-4=6$

$\therefore a+b=5+6=11$

23 답 ⑤

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=3$ … ㉠과 같이 0이 아닌 극한값이

존재하고 $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$

$1+a+b=0\quad\therefore b=-a-1$ … ㉡

$b=-a-1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax-a-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+a+1}$$

$$=\frac{1}{a+2}=3$$

$a+2=\dfrac{1}{3}\quad\therefore a=-\dfrac{5}{3}$

$a=-\dfrac{5}{3}$를 ㉡에 대입하면

$b=-\left(-\dfrac{5}{3}\right)-1=\dfrac{2}{3}$

$\therefore ab=-\dfrac{5}{3}\times\dfrac{2}{3}=-\dfrac{10}{9}$

TIP

함수의 미정계수를 결정할 때, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 실수)이고

$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

하지만 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$이고 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$일 때,

$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$이 성립하려면 α는 0이 아닌 실수여야 한다.

만약 $\alpha=0$이라면 반드시 $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$일 필요가 없다.

왜냐하면 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$에서 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$이면

$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)$의 값은 0이 아닌 임의의 실수여도 되기 때문이다.

24 답 ②

$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=-2$ ⋯ ㉠와 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=0$

$a+b=0 \quad \therefore b=-a$ ⋯ ㉡

$b=-a$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}-a}{x-1}=a\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$
$$=a\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=a\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=a\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}=-2$$

$\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉡에 대입하면 $b=4$

$\therefore a-b=-4-4=-8$

TIP

극한값을 이용하여 다음과 같이 미정계수를 구하자.
(ⅰ) 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이면 (분자) $\longrightarrow 0$
또는 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이면
(분모) $\longrightarrow 0$임을 이용하여 두 상수 사이의 관계식을 구한다.
(ⅱ) (ⅰ)에서 얻은 관계식에서 한 문자를 다른 문자에 대해 나타낸 후 주어진 극한식에 대입하여 정리한다.
(ⅲ) 인수분해 또는 유리화를 이용하여 극한값을 구해본다.

25 답 ④

$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=4$ ⋯ ㉠와 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(a\sqrt{x-1}+b)=0$

$a+b=0 \quad \therefore b=-a$ ⋯ ㉡

$b=-a$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2}=a\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$$
$$=a\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$
$$=a\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$
$$=a\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{a}{2}=4$$

$\therefore a=8$

$a=8$을 ㉡에 대입하면 $b=-8$

$\therefore 3a+2b=24-16=8$

26 답 ③

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+1}+a}{\sqrt{x}-1}=b$ ⋯ ㉠와 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(\sqrt{x}-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(\sqrt{x^2+1}+a)=0$

$\sqrt{2}+a=0 \quad \therefore a=-\sqrt{2}$

$a=-\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+1}+a}{\sqrt{x}-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)(x^2+1-2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}=\frac{2\times2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$\therefore b=\sqrt{2}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$

27 답 ②

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x^2+x}+ax}{x-1}=b$ ⋯ ㉠와 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(\sqrt{3x^2+x}+ax)=0$

$2+a=0 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x^2+x}+ax}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x^2+x}-2x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3x^2+x}-2x)(\sqrt{3x^2+x}+2x)}{(x-1)(\sqrt{3x^2+x}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(3x^2+x)-(2x)^2}{(x-1)(\sqrt{3x^2+x}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-x^2+x}{(x-1)(\sqrt{3x^2+x}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x^2+x}+2x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-x}{\sqrt{3x^2+x}+2x}=\frac{-1}{2+2}=-\frac{1}{4}$$

$\therefore b=-\frac{1}{4}$

$\therefore ab=(-2)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

28 답 ④

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+x+1}=2$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 4인 이차함수이다.

또, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=4$와 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to2}(x^2-x-2)=0$이면 $\lim_{x\to2}f(x)=0$

즉, $f(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 가진다.

$f(x)=4(x-2)(x-k)$ (단, k는 상수)라 놓으면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{4(x-2)(x-k)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{4(x-k)}{x+1}=\frac{4(2-k)}{3}=-4$$

$8-4k=-12$ $\therefore k=5$

따라서 $f(x)=4(x-2)(x-5)$이므로

$f(0)=4\times(-2)\times(-5)=40$

29 답 ⑤

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x^2-2x+1}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차함수이다.

또, $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\frac{1}{3}$과 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to-1}(x^2-x-2)=0$이면 $\lim_{x\to-1}f(x)=0$

즉, $f(-1)=0$이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 가진다.

$f(x)=3(x+1)(x-k)$(단, k는 상수)라 놓으면

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{3(x+1)(x-k)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{3(x-k)}{x-2}=\frac{3(-1-k)}{-3}=\frac{1}{3}$$

$-3-3k=-1$ $\therefore k=-\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=3(x+1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$이므로

$f(1)=3\times2\times\frac{5}{3}=10$

30 답 ⑤

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2-1}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차함수이다.

또, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x^2-5x+6}=6$과 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to3}(x^2-5x+6)=0$이면 $\lim_{x\to3}f(x)=0$

즉, $f(3)=0$이므로 $f(x)$는 $x-3$을 인수로 가진다.

$f(x)=2(x-3)(x-k)$ (단, k는 상수)라 놓으면

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)(x-k)}{(x-3)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{2(x-k)}{x-2}=2(3-k)=6$$

$\therefore k=0$

따라서 $f(x)=2x(x-3)$이므로

$f(-1)=2\times(-1)\times(-4)=8$

31 답 ②

조건 (가)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$과 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to0}x=0$이면 $\lim_{x\to0}f(x)=0$ $\therefore f(0)=0$ ⋯ ㉠

또, 조건 (나)에서 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=-5$와 같이 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이면 $\lim_{x\to-1}f(x)=0$

$\therefore f(-1)=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x+1)(ax+b)$ (단, a, b는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+1)(ax+b)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x+1)(ax+b)=b=3$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)(ax+3)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}x(ax+3)=-(-a+3)$$

$-(-a+3)=-5$ $\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=x(x+1)(-2x+3)$이므로

$f(1)=1\times2\times1=2$

32 답 ②

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=2$에서 $f(x)=ax^2+bx$는 이차항의 계수가 2인 이차함수이다. $\therefore a=2$

또, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x^2+bx}{x^2-x-2}=c$와 같이 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to2}(x^2-x-2)=0$이면 $\lim_{x\to2}(2x^2+bx)=0$

$8+2b=0$ $\therefore b=-4$

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2-4x}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2x}{x+1}=\frac{4}{3}=c$$

$\therefore a+b+c=2+(-4)+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$

33 답 ③

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^2}{x+1}=-1$과 같이 수렴하면 분모와 분자의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비가 -1이어야 한다.

즉, $f(x)-2x^2$은 일차함수이어야 하고, 일차항의 계수는 -1이어야 하므로

$f(x)-2x^2=-x+k$ (단, k는 상수)

$\therefore f(x)=2x^2-x+k$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$이면

$\lim_{x\to2}f(x)=0$ $\therefore f(2)=0$

㉠에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=8-2+k=0$ $\therefore k=-6$

따라서 $f(x)=2x^2-x-6$이므로

$f(3)=18-3-6=9$

34 답 ③

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=2$와 같이 수렴하면 분모와 분자의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비가 2이어야 한다.

즉, $f(x)-x^3$은 이차함수이어야 하고, 이차항의 계수는 2이어야 하므로

$f(x)-x^3=2x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)

$\therefore f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=4$와 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이면 $\lim_{x\to1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1+2+a+b=0$ $\quad\therefore b=-a-3$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b=x^3+2x^2+ax-a-3$

$\quad=(x-1)(x^2+3x+a+3)$

이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+3x+a+3)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x^2+3x+a+3)=1+3+a+3=4$$

$\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $b=3-3=0$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-3x$이므로

$f(2)=8+8-6=10$

35 답 ②

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=2$와 같이 수렴하면 분모와 분자의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비가 2이어야 한다.

즉, $f(x)-2x^3$은 이차함수이어야 하고, 이차항의 계수는 2이어야 하므로

$f(x)-2x^3=2x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)

$\therefore f(x)=2x^3+2x^2+ax+b$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-3$과 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to0}x=0$이면 $\lim_{x\to0}f(x)=0$ $\quad\therefore f(0)=0$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=b=0$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $f(x)=2x^3+2x^2+ax$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3+2x^2+ax}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(2x^2+2x+a)=a=-3$$

따라서 $f(x)=2x^3+2x^2-3x$이므로

$f(-2)=-16+8+6=-2$

36 답 ④

함수 $f(x)$가 이차함수라 하므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 놓자.

$\frac{2x^2f(x)-f(x^2)}{\{f(x)\}^2}$에서 분자를 정리하면

$2x^2f(x)-f(x^2)$

$=2x^2(ax^2+bx+c)-(ax^4+bx^2+c)$

$=2ax^4+2bx^3+2cx^2-ax^4-bx^2-c$

$=ax^4+2bx^3+(2c-b)x^2-c$ ⋯ ㉠

또, 분모를 정리하면

$\{f(x)\}^2$

$=(ax^2+bx+c)^2$

$=a^2x^4+b^2x^2+c^2+2abx^3+2bcx+2acx^2$

$=a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2$ ⋯ ㉡

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2f(x)-f(x^2)}{\{f(x)\}^2}=3$과 같이 수렴하므로 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비가 3이다.

즉, ㉠, ㉡에 의하여

$\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}=3$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

조건 (나)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$과 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to0}x=0$이면 $\lim_{x\to0}f(x)=0$ $\quad\therefore f(0)=0$

$\therefore c=0$

즉, $f(x)=\frac{1}{3}x^2+bx$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^2+bx}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{3}x+b\right)=b=1$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+x$이므로

$f(3)=\frac{1}{3}\times9+3=6$

37 답 ③

모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{5x^2-1}{x^2+1}\leq f(x)\leq\frac{5x^2+7}{x^2+1}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-1}{x^2+1}=5$, $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+7}{x^2+1}=5$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=5$

심플 정리

[극한의 대소 관계]

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 a에 가까운 모든 x의 값에서
$f(x)\leq h(x)\leq g(x)$를 만족하고
$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$ (α는 실수)이면
$\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$이다.

38 답 ⑤

$x>0$에서 함수 $f(x)$가

$$\frac{2x-3}{x}<f(x)<\frac{2x^2+5x}{x^2}$$

를 만족시키고 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x}{x^2}=2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$$

39 답 ③

$x>0$일 때, $3x+1>0$, $3x+5>0$이고

$x>0$에서 함수 $f(x)$가 $3x+1<f(x)<3x+5$를 만족시키므로 부등식의 각 변을 제곱하면

$$(3x+1)^2<\{f(x)\}^2<(3x+5)^2$$

또, 모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1>0$이므로 부등식의 각 변을 x^2+x+1로 나누면

$$\frac{(3x+1)^2}{x^2+x+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+x+1}<\frac{(3x+5)^2}{x^2+x+1}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)^2}{x^2+x+1}=9$, $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+5)^2}{x^2+x+1}=9$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+x+1}=9$$

40 답 ②

두 점 Q, R의 좌표는 각각 $\mathrm{Q}(t,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ \sqrt{t})$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}^2=t^2$, $\overline{\mathrm{OR}}^2=t$

또한, $\overline{\mathrm{OP}}^2=t^2+t$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{5\overline{\mathrm{OP}}^2}{3\overline{\mathrm{OQ}}^2+2\overline{\mathrm{OR}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{5(t^2+t)}{3t^2+2t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{5t^2+5t}{3t^2+2t}=\frac{5}{3}$$

41 답 ①

이차함수 $y=x^2-1$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하면

$x^2-1=0$, $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

즉, 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(1,\ 0)$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(t-1)^2+(t^2-1)^2}=\sqrt{t^4-t^2-2t+2}$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^4-t^2-2t+2}}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t^3}+\frac{2}{t^4}}}{1}=1$$

42 답 ②

두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(t,\ \sqrt{t+4})$에 대하여 직선 AB의 기울기 $f(t)$를 구하면

$$f(t)=\frac{\sqrt{t+4}-2}{t-0}=\frac{\sqrt{t+4}-2}{t}$$

$$\therefore \lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t+4}-2}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(\sqrt{t+4}-2)(\sqrt{t+4}+2)}{t(\sqrt{t+4}+2)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(t+4)-4}{t(\sqrt{t+4}+2)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{t(\sqrt{t+4}+2)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\sqrt{t+4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

43 답 1

$$d_1=\sqrt{(t-0)^2+(\sqrt{2t-1}-0)^2}=\sqrt{t^2+2t-1}$$

$$d_2=\sqrt{(t-1)^2+(\sqrt{2t-1}-0)^2}=\sqrt{t^2}=t\ (\because t>0)$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)$$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+2t-1}-t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+2t-1}-t)(\sqrt{t^2+2t-1}+t)}{\sqrt{t^2+2t-1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+2t-1-t^2}{\sqrt{t^2+2t-1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-1}{\sqrt{t^2+2t-1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

44 답 ④

$\overline{\mathrm{OA}}=a$, $\overline{\mathrm{OB}}=1$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{a^2+1}$이므로

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}$$

$$=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{AB}})\times r$$

에서

$$\frac{1}{2}\times a\times1=\frac{1}{2}\times(a+1+\sqrt{a^2+1})\times r$$

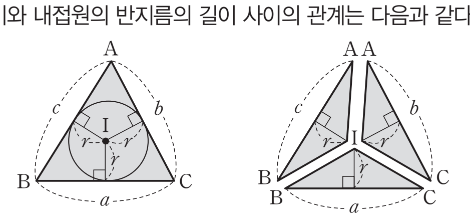
$$\therefore r=\frac{a}{a+1+\sqrt{a^2+1}}$$

$$\therefore \lim_{a\to0+}\frac{r}{a}=\lim_{a\to0+}\frac{a}{a(a+1+\sqrt{a^2+1})}$$

$$=\lim_{a\to0+}\frac{1}{a+1+\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

TIP

삼각형 ABC의 내접원의 중심을 I라 하면 삼각형의 세 변의 길이와 내접원의 반지름의 길이 사이의 관계는 다음과 같다.



$$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{IAB}+\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}$$

$$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

연습 문제 [A~C] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 26~27

01 답 ①

$\lim_{x\to2}f(x)=2,\ \lim_{x\to2}g(x)=3$이므로

$\lim_{x\to2}\{2f(x)-3g(x)\}$

$=2\lim_{x\to2}f(x)-3\lim_{x\to2}g(x)$

$=2\times2-3\times3=-5$

02 답 ⑤

$\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이어야 한다.

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2-ax-b)=1-a-b$ ⋯ ㉠

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(2x^2-abx+4)$

$=2-ab+4=6-ab$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$1-a-b=6-ab,\ ab-a-b=5$

$a(b-1)-(b-1)=6$

$\therefore (a-1)(b-1)=6$

이때, a, b가 정수이므로 위 식을 만족시키는 $a-1$, $b-1$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$a-1$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$b-1$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(-5,\ 0),\ (-2,\ -1),\ (-1,\ -2),\ (0,\ -5),\ (2,\ 7),$
$(3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (7,\ 2)$의 8개이다.

03 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1-}f(x)=-2,\ \lim_{x\to1+}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)=1$ (참)

ㄷ. 그래프에서 $-1<a<1$인 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 항상 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

04 답 ②

$\lim_{x\to1+}\dfrac{|x-1|^2-2|1-x|}{|x|-1}$의 값은?

절댓값 기호 안의 값이 양수인지 음수인지 판단해서 절댓값 기호를 없애야 해.

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

1st $x\to1+$일 때 $x-1$과 $1-x$의 부호를 파악하자.

$x\to1+$이면 $x>1$, 즉 $x-1>0$이므로

$\lim_{x\to1+}\dfrac{|x-1|^2-2|1-x|}{|x|-1}$

$=\lim_{x\to1+}\dfrac{(x-1)^2-2(x-1)}{x-1}$

$|a|=\begin{cases}a & (a\geq0)\\-a & (a<0)\end{cases}$
즉, $x-1>0$이므로
$|x-1|=x-1$
$|1-x|=-(1-x)=x-1$
이야.

$=\lim_{x\to1+}\dfrac{(x-1)(x-1-2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\dfrac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x-3)=-2$

05 답 ⑤

$\lim_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x^2+7}-5}{x-3}=\lim_{x\to3}\dfrac{(\sqrt{2x^2+7}-5)(\sqrt{2x^2+7}+5)}{(x-3)(\sqrt{2x^2+7}+5)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{2x^2+7-25}{(x-3)(\sqrt{2x^2+7}+5)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{2x^2-18}{(x-3)(\sqrt{2x^2+7}+5)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{2(x^2-9)}{(x-3)(\sqrt{2x^2+7}+5)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{2(x-3)(x+3)}{(x-3)(\sqrt{2x^2+7}+5)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{2x^2+7}+5}$

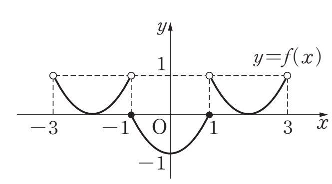
$=\dfrac{2\times6}{5+5}=\dfrac{12}{10}=\dfrac{6}{5}$

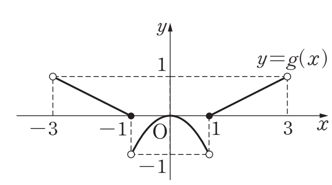
06 답 ④

그림은 $-3<x<3$에서 정의된 두 함수
$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다.

그림에서 $x=1$과 $x=-1$에서만 그래프가 끊겨져 있지? $x=1$과 $x=-1$에서 좌극한값과 우극한값을 각각 구해야 해.

옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?





[보기]

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)=-1$

ㄴ. $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=1$

ㄷ. $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st $x=a$에서 극한값이 존재한다는 것은 좌극한값과 우극한값이 같다는 거야.

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0-} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0} f(x)=-1$ (참)

2nd $x=1$, $x=-1$에서의 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 좌극한값과 우극한값을 구해.

ㄴ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=1+0=1$

$\lim_{x\to1+} f(x)+\lim_{x\to1+} g(x)=1+0=1$

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=0+(-1)=-1$

$\lim_{x\to1-} f(x)+\lim_{x\to1-} g(x)=0+(-1)=-1$

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to-1+} f(x)g(x)=0\times(-1)=0$

$\lim_{x\to-1+} f(x)\times\lim_{x\to-1+} g(x)=0\times(-1)=0$

$\lim_{x\to-1-} f(x)g(x)=1\times0=0$

$\lim_{x\to-1-} f(x)\times\lim_{x\to-1-} g(x)=1\times0=0$

$\therefore \lim_{x\to-1} f(x)g(x)=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

07 답 ②

$\lim_{x\to3}\frac{3x^2+ax-6}{x-3}=b$ … ㉠와 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to3}(x-3)=0$이면 $\lim_{x\to3}(3x^2+ax-6)=0$

$27+3a-6=0$, $3a=-21$ $\quad\therefore a=-7$

$a=-7$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{3x^2+ax-6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{3x^2-7x-6}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(3x+2)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}(3x+2)=11$$

$\therefore b=11$

$\therefore a+b=-7+11=4$

08 답 ①

함수 $f(x)=\begin{cases}-1 & (x\le-1)\\ x & (-1<x\le1)\\ -3x+2 & (x>1)\end{cases}$에 대하여

$f(-1)=-1$

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-} x=1$

$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}(-3x+2)=-6+2=-4$

$\therefore f(-1)+\lim_{x\to1-} f(x)+\lim_{x\to2} f(x)$

$=-1+1+(-4)=-4$

09 답 ⑤

$x>1$에서 함수 $f(x)$가 $4x+3<f(x)<4x+7$을 만족시키고, $x>1$에서 $4x+3>0$, $4x+7>0$이므로 부등식의 각 변을 제곱하면

$(4x+3)^2<\{f(x)\}^2<(4x+7)^2$

또, $x>1$일 때 $2x^2-1>0$이므로 부등식의 각 변을 $2x^2-1$로 나누면

$$\frac{(4x+3)^2}{2x^2-1}<\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-1}<\frac{(4x+7)^2}{2x^2-1}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+3)^2}{2x^2-1}=8$, $\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+7)^2}{2x^2-1}=8$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-1}=8$$

10 답 ⑤

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$일 때,

극한값이 존재하고 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 해.

$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$의 값은?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{24}$ ④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

1st 주어진 조건에서 극한값이 존재하고, 분모가 0으로 수렴하지? 즉, 분자도 0으로 수렴해야 해.

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$와 같이 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이면 $\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$이어야 하므로 $f(2)=3$

2nd 구하는 극한값을 변형해서 주어진 조건을 이용할 수 있게 만들자.

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)-3\}\{f(x)+3\}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-3}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{f(x)+3}$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3+3}=\frac{1}{30}$$

$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-3}$, $\lim_{x\to2}\frac{1}{f(x)+3}$이 모두 수렴하니까 극한의 성질을 쓸 수 있는 거야.

11 답 29

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=4$와 같이 수렴하면 분모와 분자의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비가 4이어야 한다.

즉, $f(x)-x^2$은 일차함수이어야 하고, 일차항의 계수는 4이어야 하므로

$f(x)-x^2=4x+k$ (단, k는 상수)

$\therefore f(x)=x^2+4x+k$

$f(x)=x^2+4x+k=(x+2)^2+k-4$에서

$f(x)$의 최솟값이 4이므로

$k-4=4$ $\quad\therefore k=8$

따라서 $f(x)=x^2+4x+8$이므로

$f(3)=9+12+8=29$

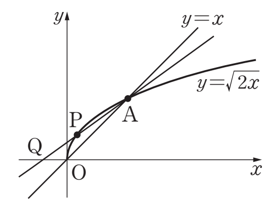
12 답 ①

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 직선 $y=x$가 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A라 하자. 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 원점이 아닌 점 $\mathrm{P}(t, \sqrt{2t})$에 대하여 두 점 A와 P를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 하자.

→ 점 Q의 x좌표를 알기 위해서 필요한 것이 무엇인지 생각해봐. 두 점 A, P를 지나는 직선의 방정식이 필요하지?

점 P가 곡선을 따라 점 A로 한없이 가까이 갈 때, $f(t)$의 극한값은?

→ $t \longrightarrow$ (점 A의 x좌표)라는 거야.



① -2 ② $-\frac{7}{4}$ ③ $-\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ -1

1st 직선 AP의 방정식을 t에 대한 식으로 나타내야 해.

곡선 $y=\sqrt{2x}$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는

$\sqrt{2x}=x$, $2x=x^2$

$x(x-2)=0$ ∴ $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(2, 2)$이므로

점 A와 점 $\mathrm{P}(t, \sqrt{2t})$를 지나는 직선의 방정식은

→ 점 A가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $x=2$일 때 $y=2$야.

$$y=\frac{\sqrt{2t}-2}{t-2}(x-2)+2$$

→ 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$임을 이용하면 돼.

이 직선의 x절편을 구하면

→ 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하여 정리해.

$$0=\frac{\sqrt{2t}-2}{t-2}(x-2)+2$$

$$\frac{\sqrt{2t}-2}{t-2}(x-2)=-2,\ x-2=\frac{-2(t-2)}{\sqrt{2t}-2}$$

$$x=\frac{-2t+4}{\sqrt{2t}-2}+2=\frac{-2t+4+2\sqrt{2t}-4}{\sqrt{2t}-2}=\frac{2(\sqrt{2t}-t)}{\sqrt{2t}-2}$$

$$\therefore f(t)=\frac{2(\sqrt{2t}-t)}{\sqrt{2t}-2}$$

2nd 유리화해서 극한값을 구해.

따라서 점 P가 곡선을 따라 점 A로 한없이 가까이 가면

$t \longrightarrow 2$이므로

$$\lim_{t\to2} f(t)=\lim_{t\to2}\frac{2(\sqrt{2t}-t)}{\sqrt{2t}-2}$$

$$=\lim_{t\to2}\frac{2(\sqrt{2t}-t)(\sqrt{2t}+t)(\sqrt{2t}+2)}{(\sqrt{2t}-2)(\sqrt{2t}+t)(\sqrt{2t}+2)}$$

→ 분모, 분자에 모두 근호가 있으니까 유리화를 두 번 해야 하는 거야.

$$=\lim_{t\to2}\frac{-2t(t-2)(\sqrt{2t}+2)}{2(t-2)(\sqrt{2t}+t)}$$

$$=\lim_{t\to2}\frac{-t(\sqrt{2t}+2)}{\sqrt{2t}+t}$$

$$=\frac{-2\times(2+2)}{2+2}=-2$$

13 답 14

함수 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-1}$에 대하여

$\lim_{x\to\infty} f(x)=3$과 같이 수렴하므로 분자와 분모의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비가 3이어야 한다.

∴ $a=0$, $b=3$ … Ⅰ

즉, $f(x)=\dfrac{3x^2+cx+d}{x^2-1}$에서

$\lim_{x\to1} f(x)=2$와 같이 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$이면 $\lim_{x\to1}(3x^2+cx+d)=0$

$3+c+d=0$ ∴ $d=-3-c$ ⋯ ㉠ … Ⅱ

㉠을 $\lim_{x\to1} f(x)=2$에 대입하면

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{3x^2+cx+(-3-c)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3x+3+c)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3x+3+c}{x+1}$$

$$=\frac{3+3+c}{1+1}=\frac{6+c}{2}=2$$

$6+c=4$ ∴ $c=-2$

$c=-2$를 ㉠에 대입하면

$d=-3-(-2)=-1$ … Ⅲ

∴ $a^2+b^2+c^2+d^2=0+9+4+1=14$ … Ⅳ

[채점 기준표]

Ⅰ	$\lim_{x\to\infty} f(x)=3$을 이용하여 a, b의 값을 구한다.	30%
Ⅱ	$\lim_{x\to1} f(x)=2$를 이용하여 c, d 사이의 관계식을 구한다.	30%
Ⅲ	$\lim_{x\to1} f(x)=2$를 이용하여 c, d의 값을 구한다.	30%
Ⅳ	$a^2+b^2+c^2+d^2$의 값을 구한다.	10%

Simple D 함수의 연속

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 28～29

01 답 $\lim_{x\to a} f(x)$, $f(a)$

02 답 불연속

03 답 닫힌구간

04 답 연속함수

05 답 ○

06 답 ×

07 답 ×

08 답 ○

09 답 ㄴ

10 답 ㄱ

11 답 ㄷ

12 답 불연속

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & (x\neq0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$에 대하여

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}\dfrac{x}{-x}=-1$, $\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}\dfrac{x}{x}=1$

이므로 $\lim_{x\to0} f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

13 답 불연속

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x\neq0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$에 대하여

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}\dfrac{1}{x}=\infty$

이므로 $\lim_{x\to0} f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

14 답 연속

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x} & (x\neq0) \\ 2 & (x=0) \end{cases}$에 대하여

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to0-}(x+2)=2$,

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to0+}(x+2)=2$

이므로 $\lim_{x\to0} f(x)=2$이다.

이때, $f(0)=2$이므로 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

15 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x)=3$은 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

16 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x)=x^3+2x$는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

17 답 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$은 $x\neq0$일 때, 즉 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$에서 연속이다.

18 답 $[1, \infty)$

함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$은 $x-1\geq0$에서 $x\geq1$일 때, 즉 구간 $[1, \infty)$ 구간에서 연속이다.

19 답 불연속

함수 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\geq0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$에 대하여

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}(-1)=-1$,

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}1=1$

이므로 $\lim_{x\to0} f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

20 답 불연속

함수 $g(x)=\begin{cases} x-1 & (x\neq2) \\ 0 & (x=2) \end{cases}$에 대하여

$\lim_{x\to2-} g(x)=\lim_{x\to2-}(x-1)=1$,

$\lim_{x\to2+} g(x)=\lim_{x\to2+}(x-1)=1$

이므로 $\lim_{x\to2} g(x)=1$이다.

그런데 $g(2)=0$이므로 $\lim_{x\to2} g(x)\neq g(2)$이다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

21 답 연속

함수 $h(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2+2x}{x} & (x\neq0) \\ 2 & (x=0) \end{cases}$에 대하여

$\lim_{x\to0-} h(x)=\lim_{x\to0-}\dfrac{-x^2+2x}{x}=\lim_{x\to0-}(-x+2)=2$,

$\lim_{x\to0+} h(x)=\lim_{x\to0+}\dfrac{-x^2+2x}{x}=\lim_{x\to0+}(-x+2)=2$

이므로 $\lim_{x\to0} h(x)=2$이다.

이때, $h(0)=2$이므로 $\lim_{x\to0} h(x)=h(0)$이다.

따라서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

22 답 연속

함수 $i(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}+3 & (x\ge1)\\ 3 & (x<1)\end{cases}$에 대하여

$\lim_{x\to1-} i(x)=\lim_{x\to1-} 3=3$,

$\lim_{x\to1+} i(x)=\lim_{x\to1+} (\sqrt{x-1}+3)=3$

이므로 $\lim_{x\to1} i(x)=3$이다.

이때, $i(1)=3$이므로 $\lim_{x\to1} i(x)=i(1)$이다.

따라서 함수 $i(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

23 답 불연속

함수 $j(x)=\frac{1}{x-1}$에 대하여 $j(1)$이 정의되지 않으므로

함수 $j(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

24 답 연속

함수 $k(x)=\frac{1}{x^2+1}$에 대하여

$\lim_{x\to3-} k(x)=\lim_{x\to3-} \frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{10}$,

$\lim_{x\to3+} k(x)=\lim_{x\to3+} \frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{10}$

이므로 $\lim_{x\to3} k(x)=\frac{1}{10}$이다.

이때, $k(3)=\frac{1}{10}$이므로 $\lim_{x\to3} k(x)=k(3)$

따라서 함수 $k(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 30~33

25 답 ④

Ⅰ은 $x=1$에서 극한값 $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재하고, 함숫값 $f(1)$도 존재하지만 $\lim_{x\to1} f(x)\ne f(1)$이므로 ㄷ에 해당된다.

Ⅱ는 $\lim_{x\to1-} f(x)\ne\lim_{x\to1+} f(x)$에서 극한값 $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재하지 않으므로 ㄴ에 해당된다.

26 답 ②

ㄱ. $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2+2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0-} (-x^2)=0$, $\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+} x^2=0$이고, $\lim_{x\to0} g(x)=g(0)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to0} h(x)=\lim_{x\to0} (x^2+1)=1$이지만 $h(0)=0$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

27 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1+} (x-1+|x-1|)=\lim_{x\to1+} (2x-2)=0$

$\lim_{x\to1-} (x-1+|x-1|)=\lim_{x\to1-} 0=0$

$f(1)=0$

즉, $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $g(1)$이 정의되지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이 아니다.

ㄷ. $\lim_{x\to1+} \sqrt{(x-1)^2}=\lim_{x\to1+} |x-1|=\lim_{x\to1+} (x-1)=0$

$\lim_{x\to1-} \sqrt{(x-1)^2}=\lim_{x\to1-} |x-1|=\lim_{x\to1-} (-x+1)=0$

$h(1)=0$

즉, $\lim_{x\to1} h(x)=h(1)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

28 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to-1+} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)=-1$ (참)

ㄷ. 주어진 그림에서 $x=-1$, $x=0$, $x=1$인 점에서 불연속이므로 불연속인 x의 값의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

29 답 ②

모든 다항함수(상수함수 포함)는 실수 전체의 집합에서 항상 연속이다.

30 답 ③

$f(x)=\frac{1}{x-\frac{4}{x}}=\frac{1}{\frac{x^2-4}{x}}=\frac{x}{x^2-4}$

이때, 분모가 0이 되는 x의 값, 즉 $x=0$, $x^2-4=0$인 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 불연속이 되는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-2$이다.

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은 0이다.

31 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1-} f(x)=2$, $\lim_{x\to1+} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)$

즉, $x=1$에서 $f(x)$의 극한값이 존재한다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to2-} f(x)=0$, $\lim_{x\to2+} f(x)=2$이므로

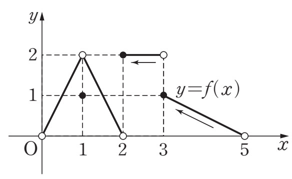
$\lim_{x\to2-} f(x)\ne\lim_{x\to2+} f(x)$

즉, $x=2$에서 $f(x)$는 불연속이다. (참)

ㄷ. $x=1$과 $x=2$인 점에서 $f(x)$는 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 2이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

32 답 ②



ㄱ. $\lim_{x\to3+}f(x)=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)=2$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=3$인 점에서 불연속이므로 불연속인 x의 값의 개수는 3이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

> **TIP**
> 함수의 그래프가 주어진 경우, 그래프가 끊어져 있는 부분에서 불연속이다. 이때, 끊어져 있는 부분에서 극한값이 없다고 착각하는 경우가 있다. 하지만 극한값은 그래프가 끊어져 있어도 존재할 수 있다. 이 문제의 그래프를 보면 $x=1$에서 불연속이지만 $\lim_{x\to1}f(x)=2$로 극한값이 존재한다.
> 즉, 연속이면 극한값이 존재한다는 것은 충분조건이지만 필요조건이 아니라는 것에 주의하자.

33 답 ④

ㄱ. $y=5x+1$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $y=\sqrt{x+2}$는 $x\ge-2$에서 연속이다.

ㄷ. $y=\dfrac{1}{x-2}$은 $x=2$에서 불연속이다.

ㄹ. $y=|x-3|$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㅁ. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1} & (x\ne1)\\ \dfrac{1}{2} & (x=1)\end{cases}$이라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}=f(1)$$

즉, $x=1$에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 $x>0$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ의 4개이다.

34 답 ⑤

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 함숫값과 극한값이 같아야 한다.

$f(2)=\lim_{x\to2}\dfrac{-x^3+2x+4}{x-2}$이므로

$$k=\lim_{x\to2}\frac{-x^3+2x+4}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)(x^2+2x+2)}{x-2}$$
$$=-\lim_{x\to2}(x^2+2x+2)=-10$$

35 답 ①

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로 함숫값과 극한값이 같아야 한다.

$f(-2)=\lim_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$이므로

$$k=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5-9}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$$

36 답 ②

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 함숫값과 극한값이 같아야 한다.

$\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+x+a}{x-1}=b$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+x+a)=0$이 되어야 한다.

$1+1+a=0 \qquad \therefore a=-2$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+2)=3=b$$

$\therefore a+b=-2+3=1$

37 답 ①

함수 $f(x)=\begin{cases}x^2-6x & (x\ge1)\\ ax^2+bx & (x<1)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이면 된다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to1-}(ax^2+bx)=\lim_{x\to1+}(x^2-6x)=f(1)$

$\therefore a+b=1-6=-5$

38 답 ④

함수 $f(x)=\begin{cases}px+1 & (x\le-1 \text{ 또는 } x\ge2)\\ x^2-2x+q & (-1<x<2)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$, $x=2$에서 연속이면 된다.

(i) $x=-1$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$에서

$-p+1=1+2+q$

$\therefore p+q=-2$ ⋯ ㉠

(ii) $x=2$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$에서

$4-4+q=2p+1$

$\therefore 2p-q=-1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $p=-1$, $q=-1$

$\therefore pq=(-1)\times(-1)=1$

I
D

39 답 ⑤

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+1 & \left(x<-2 \text{ 또는 } x>\dfrac{7}{2}\right) \\ x^2+b & \left(-2\le x\le\dfrac{7}{2}\right) \end{cases}$가

구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이 되도록 하려면

$x=-2$, $x=\dfrac{7}{2}$에서 연속이면 된다.

(i) $x=-2$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to-2-} f(x)=\lim_{x\to-2+} f(x)=f(-2)$

$-2a+1=4+b$

$\therefore 2a+b=-3$ ⋯ ㉠

(ii) $x=\dfrac{7}{2}$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to\frac{7}{2}-} f(x)=\lim_{x\to\frac{7}{2}+} f(x)=f\left(\dfrac{7}{2}\right)$

$\dfrac{49}{4}+b=\dfrac{7}{2}a+1$

$\therefore \dfrac{7}{2}a-b=\dfrac{45}{4}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-6$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}x+1 & \left(x<-2 \text{ 또는 } x>\dfrac{7}{2}\right) \\ x^2-6 & \left(-2\le x\le\dfrac{7}{2}\right) \end{cases}$이므로

$f(-1)\times f(4)=(1-6)\times\left(\dfrac{3}{2}\times4+1\right)=-35$

40 답 ②

$x\ne2$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+ax-12}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$이다.

즉, $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2+ax-12}{x-2}=f(2)$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^2+ax-12)=0$

$4+2a-12=0 \qquad \therefore a=4$

$\lim_{x\to2}\dfrac{x^2+4x-12}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+6)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+6)=8=f(2)$

$\therefore a+f(2)=4+8=12$

다른 풀이

$x=2$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$(x-2)f(x)=x^2+ax-12$를 만족시키므로

양변에 $x=2$를 대입하면

$0=4+2a-12$

$2a=8 \qquad \therefore a=4$

$(x-2)f(x)=x^2+4x-12=(x-2)(x+6)$

$x\ne2$일 때, $f(x)=x+6$이고 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}(x+6)=8$

$\therefore a+f(2)=4+8=12$

41 답 ①

$x\ne-3$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x+3}$

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-3} f(x)=f(-3)$

즉, $\lim_{x\to-3}\dfrac{x^2+ax+b}{x+3}=f(-3)$에서 $\lim_{x\to-3}(x+3)=0$이므로 $\lim_{x\to-3}(x^2+ax+b)=0$

$9-3a+b=0 \qquad \therefore b=3a-9$ ⋯ ㉠

$\lim_{x\to-3}\dfrac{x^2+ax+b}{x+3}=\lim_{x\to-3}\dfrac{x^2+ax+3a-9}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x-3+a)}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3}(x-3+a)=-6+a$

이때, $f(-3)=-4$이므로

$-6+a=-4 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$b=3\times2-9=-3$

$\therefore ab=2\times(-3)=-6$

42 답 6

$x\ne\pm1$일 때,

$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}=\dfrac{(x^2-1)(x+3)}{x^2-1}$

$f(x)$가 $x=\pm1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)(x+3)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+3)=4$

$f(-1)=\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\dfrac{(x^2-1)(x+3)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to-1}(x+3)=2$

$\therefore f(1)+f(-1)=4+2=6$

43 답 ①

$x\ne0$일 때, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{1+x-(1-x)}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$

44 답 ⑤

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+1 & (0\le x<2) \\ ax+b & (2\le x\le4) \end{cases}$

와 같이 정의되었으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 2-}\left(\frac{1}{2}x+1\right)=\lim_{x\to 2+}(ax+b)=f(2)$

$1+1=2a+b \qquad \therefore 2a+b=2 \cdots$ ㉠

이때, $f(x)$는 $x=0$과 $x=4$에서도 연속이고

$f(x)=f(x+4)$, 즉 주기가 4인 함수이므로 $f(0)=f(4)$

$\therefore 1=4a+b \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$

$\therefore a+b=\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{5}{2}$

45 답 ②

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ a(x-1)^2+b & (1\le x\le 3)\end{cases}$$

와 같이 정의되었으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1-}2x=\lim_{x\to 1+}\{a(x-1)^2+b\}=f(1)$

$2=a\times 0+b \qquad \therefore b=2 \cdots$ ㉠

이때, $f(x)$는 $x=0$과 $x=3$에서도 연속이고

$f(x)=f(x+3)$, 즉 주기가 3인 함수이므로 $f(0)=f(3)$

$0=a\times 2^2+b \qquad \therefore 0=4a+b \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4a+2=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ -\frac{1}{2}(x-1)^2+2 & (1\le x\le 3)\end{cases}$

이므로

$f(8)=f(5+3)=f(5)=f(2+3)=f(2)$

$\quad =-\frac{1}{2}\times(2-1)^2+2=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

46 답 29

닫힌구간 $[-4, 6]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4 & (1\le x<2) \\ x^3+2x+p & (2\le x\le 6)\end{cases}$$

와 같이 정의되었으므로 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 2-}(2x+4)=\lim_{x\to 2+}(x^3+2x+p)=f(2)$

$4+4=8+4+p \qquad \therefore p=-4$

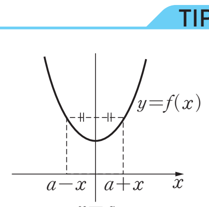
이때, 구하는 $f(-1)$의 값은 주어진 식에서 정의가 되지 않았으므로 $f(1+x)=f(1-x)$를 이용하여 값을 구하자.

즉, $f(1+x)=f(1-x)$에 $x=-2$를 대입하면

$f(-1)=f(3)=27+6-4=29$

TIP

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $f(a+x)=f(a-x)$를 만족시키면 함수 $f(x)$는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.



Simple E 연속함수의 성질

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 34~35

01 답 연속

02 답 최댓값, 최솟값

03 답 연속, $\neq$

04 답 실근

05 답 ○

두 연속함수의 곱도 연속함수이므로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $\{f(x)\}^2=f(x)f(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

06 답 ×

【반례】 $f(x)=|x|$, $g(x)=x$이면 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이지만 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{|x|}{x}$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

07 답 ○

08 답 ○

09 답 불연속인 x의 값은 없다.

두 함수 $f(x)=x-3$, $g(x)=x^2+1$은 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수이다.

따라서 함수 $f(x)+g(x)$도 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

10 답 불연속인 x의 값은 없다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 연속함수이고

$g(x)=x^2+1=0$이 되는 x의 값이 없으므로

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

11 답 $x=3$

$f(x)=x-3$이므로

$x-3=0$에서 $x=3$

따라서 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=3$에서 불연속이다.

12 답 $x=-2$, $x=1$

$f(x)+g(x)=x-3+x^2+1=x^2+x-2$이므로

$f(x)+g(x)=0$에서

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}$는 $x=-2$ 또는 $x=1$에서 불연속이다.

13 답 불연속인 x의 값은 없다.

$g(x)-f(x)=x^2+1-(x-3)=x^2-x+4$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$

이므로 $g(x)-f(x)$가 0이 되는 x의 값은 없다.

따라서 $\frac{g(x)}{g(x)-f(x)}$는 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

14 답 $(-\infty,\ \infty)$

두 함수 $f(x)=x-1$, $g(x)=x$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $3f(x)+g(x)$도 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

15 답 $(-\infty,\ \infty)$

16 답 $(-\infty,\ \infty)$

17 답 $(-\infty,\ \infty)$

18 답 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$에서

$g(x)=0$, $x=0$이다.

따라서 $x=0$에서 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 불연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$이다.

19 답 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$

함수 $\frac{1}{\{f(x)\}^2}$에서

$\{f(x)\}^2=0$, $(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=1$

따라서 $x=1$에서 함수 $\frac{1}{\{f(x)\}^2}$은 불연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$이다.

20 답 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ \infty)$

함수 $\frac{1}{f(x)g(x)}$에서

$f(x)g(x)=0$, $(x-1)x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 $x=0$ 또는 $x=1$에서 함수 $\frac{1}{f(x)g(x)}$은 불연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ \infty)$이다.

21 답 최댓값 : 2, 최솟값 : 0

22 답 최댓값 : 1, 최솟값 : 0

23 답 최댓값 : 7, 최솟값 : 3

함수 $f(x)=x^2-2x+4$는 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의해 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$f(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$

즉, $x=1$일 때 $f(x)$는 최솟값 $f(1)=3$을 갖는다.

또, $f(-1)=1+2+4=7$, $f(3)=9-6+4=7$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=3$에서 최댓값 7을 갖는다.

24 답 최댓값 : 1, 최솟값 : $\frac{1}{3}$

함수 $f(x)=\frac{1}{x-1}$은 구간 $[2,\ 4]$에서 연속이므로

최대·최소 정리에 의해 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$f(2)=\frac{1}{2-1}=1$, $f(4)=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 1, $x=4$에서 최솟값 $\frac{1}{3}$을 갖는다.

25 답 (가) 연속 (나) -2 (다) 2 (라) 사잇값의 정리

함수 $f(x)=x^3+x$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속(가)이다.

또, $f(-1)=-1-1=-2$(나), $f(1)=1+1=2$(다)이고

$-2<1<2$이므로 사잇값의 정리(라)에 의하여 $f(c)=1$을 만족시키는 c가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 반드시 존재한다.

26 답 ×

$f(x)=x^2-3x+1$로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[3,\ 4]$에서 연속이다.

이때, $f(3)=9-9+1=1>0$, $f(4)=16-12+1=5>0$

이므로 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(3,\ 4)$에 존재하지 않는다.

따라서 방정식 $x^2-3x+1=0$은 닫힌구간 $[3,\ 4]$에서 실근을 갖지 않는다.

27 답 ○

$f(x)=x^3-3$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이다.

이때, $f(0)=-3<0$, $f(2)=8-3=5>0$이므로

$f(0)f(2)<0$

즉, 사잇값의 정리에 의해 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-3=0$은 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

28 답 ○

$f(x)=x^4+2x-6$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이다.

이때, $f(-1)=1-2-6=-7<0$,

$f(2)=16+4-6=14>0$이므로 $f(-1)f(2)<0$

즉, 사잇값의 정리에 의해 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^4+2x-6=0$은 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

유형 연습 [+내신 유형]

문제편 pp. 36~39

29 답 ③

ㄱ, ㄹ. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 함수 $2f(x)+3g(x)$와 $-f(x)g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. $g(-4)=0$이므로 함수 $\dfrac{2}{g(x)}$는 $x=-4$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)+g(x)=x^2+x+5=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{19}{4}>0$이므로

함수 $\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㅁ. $f(x)-g(x)=0$에서 $x^2+1-(x+4)=0$

$x^2-x-3=0 \qquad \therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

즉, 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)-g(x)}$는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$에서 불연속이다.

ㅂ. $f(x)g(x)=0$에서 $(x^2+1)(x+4)=0 \qquad \therefore x=-4$

즉, 함수 $\dfrac{3x}{f(x)g(x)}$는 $x=-4$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ, ㄹ의 3개이다.

30 답 ④

ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $\dfrac{1}{g(x)}$은 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $3f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $\{g(x)\}^2$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$도 모든 실수 x에서 연속함수이다.

ㅁ. 함수 $\dfrac{1}{f(x)}$, 즉 $\dfrac{1}{x+1}$은 $x=-1$에서 불연속이다.

ㅂ. $g(x)-\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x-x^2}{(x^2+1)(x+1)}$에서

$(x^2+1)(x+1)=0 \qquad \therefore x=-1$

즉, 함수 $g(x)-\dfrac{1}{f(x)}$은 $x=-1$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ의 4개이다.

31 답 ②

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄱ. $g(x)=x^2$이라 할 때, 두 함수 $g(x)$와 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 함수 $x^2f(x)$도 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $f(1)\neq0$이므로 함수 $\dfrac{x}{f(x)}$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $x=1$일 때, (분모)$=2-1\cdot f(1)=2-2=0$이므로 함수 $\dfrac{1}{2-xf(x)}$은 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

32 답 ⑤

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)\times\lim\limits_{x\to1-}g(x)$

$=1\times(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)\times\lim\limits_{x\to1+}g(x)$

$=(-1)\times1=-1$

$f(1)g(1)=(-1)\times1=-1$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to1-}g(x)$

$=1+(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to1+}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}g(x)$

$=(-1)+1=0$

$f(1)+g(1)=(-1)+1=0$

즉, 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1-}\{g(x)\}^2=(-1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to1+}\{g(x)\}^2=1^2=1$

$\{g(1)\}^2=1^2=1$

즉, 함수 $\{g(x)\}^2$은 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

33 답 ④

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to0-}f(x)+\lim\limits_{x\to0-}g(x)$

$=1+0=1$

$\lim\limits_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to0+}f(x)+\lim\limits_{x\to0+}g(x)$

$=2+0=2$

즉, $x=0$에서 극한값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)\times\lim\limits_{x\to0-}g(x)$

$=1\times0=0$

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)\times\lim\limits_{x\to0+}g(x)$

$=2\times0=0$

$f(0)g(0)=2\times0=0$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0-}g(x)}{\lim\limits_{x\to0-}f(x)}=\dfrac{0}{1}=0$

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0+}g(x)}{\lim\limits_{x\to0+}f(x)}=\dfrac{0}{2}=0$

$\dfrac{g(0)}{f(0)}=\dfrac{0}{2}=0$

즉, 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

I E

34 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1-}g(x)$

$=0+(-2)=-2$

$\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1+}g(x)$

$=0+2=2$

즉, 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1-}\{g(x)\}^2=(-2)^2=4$

$\lim_{x\to1+}\{g(x)\}^2=2^2=4$

$\{g(1)\}^2=2^2=4$

즉, 함수 $\{g(x)\}^2$은 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to1-}g(x)$

$=0\times(-2)=0$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to1+}g(x)$

$=0\times2=0$

$f(1)g(1)=0\times2=0$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

35 답 ④

①, ② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

③ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x}{x^2+2}$에서 $x^2+2>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\neq0$이다.

즉, 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

④ $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2+2}{x}$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$, $\{g(x)\}^2$도 모든 실수 x에서 연속이다.

즉, 함수 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$도 모든 실수 x에서 연속이다.

36 답 ③

함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2kx+3k+4}$가 모든 실수 x에서 연속이 되려면 (분모)$\neq0$이어야 하므로

$x^2-2kx+3k+4\neq0$

즉, 이차방정식 $x^2-2kx+3k+4=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=k^2-(3k+4)<0$

$x^2-3k-4<0$, $(k+1)(k-4)<0$

$\therefore\ -1<k<4$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

37 답 ①

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{8}{x^2}}$은 (분모)$=0$인 점에서 불연속이므로

$x-\dfrac{8}{x^2}=0$ 또는 $x=0$

이때, $x-\dfrac{8}{x^2}=0$, 즉 $x^3=8$에서 $x=2$

따라서 $a=2$, $b=0$ ($\because a>b$)이므로 $10a+b=20$

38 답 ③

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{9}{x}}$은 (분모)$=0$인 점에서 불연속이므로

$x-\dfrac{9}{x}=0$ 또는 $x=0$

이때, $x-\dfrac{9}{x}=0$, 즉 $x^2=9$에서 $x=\pm3$

따라서 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 -3, 0, 3의 3개이다.

TIP

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{9}{x}}=\dfrac{x}{x^2-9}$로 변형한 후 $x^2-9=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$이 되어 불연속이 되는 x의 값의 개수를 2라고 답했다면 함정에 빠진 것이다. 처음에 주어진 함수에서 분모에 $\dfrac{9}{x}$가 있으므로 $x=0$일 때도 불연속임을 빠트리지 말자.

39 답 ①

ㄱ. 어떤 구간에서 연속함수인 $f(x)+g(x)$와 $f(x)-g(x)$의 합도 연속함수이므로

$f(x)=\dfrac{1}{2}\{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)\}$도 그 구간에서 연속함수이다. (참)

ㄴ. 【반례】 함수 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$은 $x=0$에서 불연속이지만 $\lim_{x\to0}\{f(x)\}^2=\{f(0)\}^2=1$이므로

함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 연속이다. (거짓)

ㄷ. 【반례】 $f(x)=x-1$, $g(x)=x$는 $x=0$에서 연속이지만 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

40 답 ②

ㄱ. 【반례】 $f(x)=x^2$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$이면 $f(x)$와 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄴ. $f(x)$와 $f(x)+g(x)$가 연속함수이면

$g(x)=\{f(x)+g(x)\}-f(x)$도 연속함수이므로

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$도 연속함수이다. (참)

ㄷ. 【반례】$f(x)=\frac{1}{x}$은 $x=0$에서 불연속이지만

$\frac{1}{f(x)}=x$는 모든 실수 x에서 연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

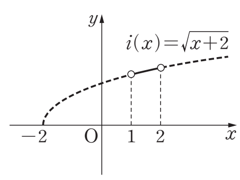
41 답 ②

ㄱ. 닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$은 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. 함수 $g(x)=\frac{1}{x-1}+1$은 $x=1$에서 점근선을 가지므로 구간 $[0, 2]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

ㄷ. 함수 $h(x)=x^3+x-3$은 실수 전체에서 연속이므로 닫힌구간 $[1, 3]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

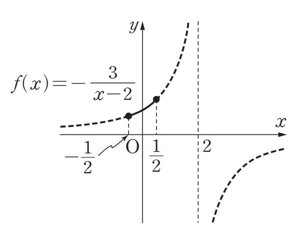
ㄹ. 함수 $i(x)=\sqrt{x+2}$는 $x\ge-2$에서 연속인 함수이지만 열린구간 $(1, 2)$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.



따라서 주어진 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

42 답 ⑤

유리함수 $f(x)=-\frac{3}{x-2}$은 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=0$이고, 닫힌구간 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$에서 증가하는 함수이므로



$$M=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{\frac{1}{2}-2}=2$$

$$m=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{-\frac{1}{2}-2}=\frac{6}{5}$$

$$\therefore M+m=2+\frac{6}{5}=\frac{16}{5}$$

43 답 ①

$f(x)=x^3-3x+7$이라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속함수이고

$f(-3)=-27+9+7=-11<0$

$f(-2)=-8+6+7=5>0$

$f(-1)=-1+3+7=9>0$

$f(0)=7>0$

$f(1)=1-3+7=5>0$

$f(2)=8-6+7=9>0$

이므로 사잇값의 정리에 의해 $f(x)$는 구간 $(-3, -2)$에서 실근을 갖는다.

44 답 ③

$f(x)=x^4-5x+2$라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속함수이고

$f(-2)=16+10+2=28>0$

$f(-1)=1+5+2=8>0$

$f(0)=2>0$

$f(1)=1-5+2=-2<0$

$f(2)=16-10+2=8>0$

$f(3)=81-15+2=68>0$

$f(4)=256-20+2=238>0$

$f(5)=625-25+2=602>0$

이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

45 답 ②

$f(x)=x^3-3x+k$라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의해 $f(1)f(2)<0$이면 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때, $f(1)=1-3+k=k-2$, $f(2)=8-6+k=k+2$ 이므로

$(k-2)(k+2)<0 \qquad \therefore -2<k<2$

46 답 ②

$f(x)=x^3+2x^2-5x+k$라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의해 $f(1)f(2)<0$이면 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때, $f(1)=1+2-5+k=k-2$,

$f(2)=8+8-10+k=k+6$이므로

$(k-2)(k+6)<0 \qquad \therefore -6<k<2$

따라서 정수 k의 값은 $-5, -4, \cdots, 0, 1$로 7개이다.

47 답 ③

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속함수이므로 함수 $h(x)$도 연속함수이다.

즉, 함수 $h(x)$에 대하여 $h(-1)h(1)<0$이면 방정식 $h(x)=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$$\begin{aligned}h(x)&=x^4+x^3-3x^2+k-(-x^3-5x^2+3)\\&=x^4+2x^3+2x^2+k-3\end{aligned}$$

에서

$h(-1)=1-2+2+k-3=k-2$,

$h(1)=1+2+2+k-3=k+2$

이므로

$(k-2)(k+2)<0 \qquad \therefore -2<k<2$

따라서 정수 k는 $-1, 0, 1$이므로 모든 정수 k의 값의 합은

$-1+0+1=0$

48 답 ②

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이다. 이때,

$f(-2)f(-1)>0,\ f(-1)f(0)<0,$

$f(0)f(1)>0,\ f(1)f(2)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1,\ 0)$과 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

49 답 ②

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로 $f(1)=f(-1)=2,\ f(-2)=f(2)=-2$

이때, $g(x)=f(x)-1$이라 하면

$g(-2)=f(-2)-1=-2-1=-3<0$

$g(-1)=f(-1)-1=2-1=1>0$

$g(0)=f(0)-1=3-1=2>0$

$g(1)=f(1)-1=2-1=1>0$

$g(2)=f(2)-1=-2-1=-3<0$

즉, $g(-2)g(-1)<0,\ g(1)g(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-2,\ -1),\ (1,\ 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=1$의 실근의 개수의 최솟값은 2이다.

50 답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다섯 개의 점 $(-2,\ 1),\ (-1,\ -3),\ (0,\ 4),\ (1,\ -2),\ (2,\ 5)$를 지난다고 하므로 $f(-2)=1,\ f(-1)=-3,\ f(0)=4,$ $f(1)=-2,\ f(2)=5$이다.

구하는 것은 방정식 $f(x)=x$의 실근의 개수이므로 방정식 $f(x)-x=0$의 실근의 개수와 같다.

이때, $g(x)=f(x)-x$라 두면

$g(-2)=f(-2)-(-2)=1+2=3>0$

$g(-1)=f(-1)-(-1)=-3+1=-2<0$

$g(0)=f(0)-0=4>0$

$g(1)=f(1)-1=-2-1=-3<0$

$g(2)=f(2)-2=5-2=3>0$

즉, $g(-2)g(-1)<0,\ g(-1)g(0)<0,\ g(0)g(1)<0,$ $g(1)g(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-2,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=x$의 실근의 개수의 최솟값은 4이다.

연습 문제 [D~E]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 40~41

01 답 ④

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=3$이므로 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-x}{x}=-1$

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{x}=1$

즉, $x=0$에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

ㄷ. $\sqrt{x^2}=|x|$이므로 $f(x)=\begin{cases}|x| & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}x=0,\ \lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}(-x)=0$

이고 $f(0)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

즉, $x=0$에서 연속이다.

따라서 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

심플 정리

[함수의 연속]

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속인지 알아보려면 다음 세 가지를 모두 확인해야 한다.

(i) $f(a)$가 존재하는지 확인

(ii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재하는지 확인

⇒ $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$와 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$가 같은지 확인

(iii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$인지 확인

02 답 ③

구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프를 보면 $x=-1,\ x=0,\ x=1$에서 불연속이므로 $a=3$

또, $x=0$에서 극한값이 존재하지 않으므로 $b=1$

$\therefore a+b=3+1=4$

03 답 ④

함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-12}{x-3} & (x\neq3)\\ a & (x=3)\end{cases}$$

→ 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=3$에서 연속이면 되지?

가 모든 실수 x에서 연속일 때, a의 값은?

① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

1st $x=3$에서 연속이려면 (극한값)=(함숫값)이어야 해.

$f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=3$에서 연속이면 된다.

즉, $\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+4)}{x-3}$$

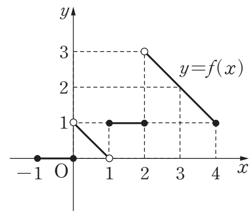
$$=\lim_{x\to3}(x+4)=7$$

$\dfrac{0}{0}$ 꼴이므로 분자를 인수분해하여 분모, 분자를 0으로 만드는 인수를 약분해.

$\therefore f(3)=a=7$

04 답 ③

닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



[보기]

ㄱ. $\lim_{x\to1-}f(x)<\lim_{x\to1+}f(x)$

ㄴ. $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{1}{t}\right)=1$ $\frac{1}{t}=s$로 치환해 봐. $t\to\infty$일 때, $s\to0+$야.

ㄷ. 함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$\lim_{x\to3+}f(f(x))=\lim_{x\to3-}f(f(x))=f(f(3))$ 이어야 해.

1st 그래프를 보고 $x=1$에서의 좌극한값과 우극한값을 비교하자.

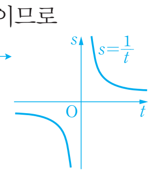
ㄱ. 그래프에서 $\lim_{x\to1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)<\lim_{x\to1+}f(x)$ (참)

2nd 그래프를 이용하려면 $f\left(\frac{1}{t}\right)$을 $f(x)$ 꼴로 바꾸어야 해.

ㄴ. $\frac{1}{t}=s$라 하면 $t\longrightarrow\infty$일 때 $s\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{s\to0+}f(s)=1$ (참)



ㄷ. $f(x)=a$라 하면

$\lim_{x\to3-}f(f(x))=\lim_{a\to2+}f(a)=3$

$\lim_{x\to3+}f(f(x))=\lim_{a\to2-}f(a)=1$

즉, 극한값이 존재하지 않으므로 $x=3$에서 불연속이다. (거짓)

$x\to3-$에서 $f(x)\to2+$이고, $x\to3+$에서 $f(x)\to2-$야.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

05 답 ④

ㄱ. $\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to1-}g(x)$
$=1\times0=0$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to1+}g(x)$
$=-1\times1=-1$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)g(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to-1-}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to-1-}f(x)-\lim_{x\to-1-}g(x)$
$=-1-(-1)=0$

$\lim_{x\to-1+}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to-1+}f(x)-\lim_{x\to-1+}g(x)$
$=1-1=0$

$f(-1)-g(-1)=1-1=0$

즉, 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to-1-}g(x)$
$=-1\times(-1)=1$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)\times\lim_{x\to-1+}g(x)$
$=1\times1=1$

$f(-1)g(-1)=1\times1=1$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

06 답 2

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x$의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=2x$, 즉 $f(x)-2x=0$의 실근의 개수와 같다.

$g(x)=f(x)-2x$라 하면 함수 $g(x)$는 실수 전체에서 연속이고

$g(-2)=f(-2)-2\times(-2)=3+4=7>0$

$g(-1)=f(-1)-2\times(-1)=-1+2=1>0$

$g(0)=f(0)-0=-4<0$

$g(1)=f(1)-2\times1=4-2=2>0$

$g(2)=f(2)-2\times2=5-4=1>0$

즉, $g(-1)g(0)<0$, $g(0)g(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 함수 $g(x)$는 열린구간 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x)=0$은 적어도 2개의 실근을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x$의 교점의 개수의 최솟값은 2이다.

07 답 ①

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? 반례가 있으면 반례를 하나 잡아서 거짓임을 밝히면 돼.

[보기]

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)$와 $\lim_{x\to0}g(x)$가 모두 존재하지 않으면 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}$도 존재하지 않는다.

ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $y=|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.

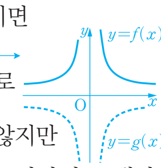
ㄷ. $y=|f(x)|$가 $x=0$에서 연속이면 $y=f(x)$도 $x=0$에서 연속이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

1st 분수함수를 예로 들어 생각해보자.

ㄱ. 【반례】 $f(x)=\left|\frac{1}{x}\right|$, $g(x)=-\left|\frac{1}{x}\right|$이면

$\lim_{x\to0}\left|\frac{1}{x}\right|=\infty$, $\lim_{x\to0}\left(-\left|\frac{1}{x}\right|\right)=-\infty$로



$x=0$에서의 극한값이 모두 존재하지 않지만 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0}0=0$으로 극한값이 존재한다. (거짓)

2nd 연속함수에 절댓값을 붙인 함수는 연속함수임을 확인해보자.

ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$을 만족한다.

(i) $f(0)=0$인 경우 ($f(0)>0$ 또는 $f(0)=0$ 또는 $f(0)<0$으로 나누어 확인해보자.)

$\lim_{x\to0+}|f(x)|=\lim_{x\to0-}|f(x)|=|f(0)|=0$

(ii) $f(0)=a\ (a>0)$인 경우

$\lim_{x\to0}|f(x)|=\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=a=|f(0)|$

(iii) $f(0)=b\ (b<0)$인 경우

$\lim_{x\to0}|f(x)|=\lim_{x\to0}\{-f(x)\}$

$=-f(0)=-b=|f(0)|$ ($\because b<0$)

(i)~(iii)에서 함수 $y=|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

(참)

ㄷ. 【반례】 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\-1 & (x<0)\end{cases}$ 이면

$|f(x)|=1$은 $x=0$에서 연속이지만 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

08 답 ②

(i) $a>0$일 때

$\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)=(-a+1)\times1=-a+1$

$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)=(-a+1)\times3=3(-a+1)$

$f(a)f(0)=3(-a+1)$

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이므로

$-a+1=3(-a+1)$, $-a+1=-3a+3$

$2a=2 \qquad \therefore a=1$

(ii) $a<0$일 때

$\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)=(2a+3)\times1=2a+3$

$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)=(2a+3)\times3=3(2a+3)$

$f(a)f(0)=3(2a+3)$

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이므로

$2a+3=3(2a+3)$, $2a+3=6a+9$

$4a=-6 \qquad \therefore a=-\frac{3}{2}$

(iii) $a=0$일 때,

$f(x)f(x-a)=\{f(x)\}^2$이므로

$\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to0-}\{f(x)\}^2=3^2=9$

즉, 극한값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 a의 값은

$a=1$ 또는 $a=-\frac{3}{2}$

따라서 모든 a의 값의 합은 $1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$이다.

TIP

a가 양수인지, 음수인지, 0인지 알 수 없으니까 경우를 나누어 생각해야 한다. $x=a$에서 연속이 되기 위한 조건을 알고 있어도 a의 값이 정해져 있지 않기 때문에 바로 구할 수 없는 것이다. 즉, 문제에서 a가 어떤 수인지 정해지지 않을 때는 a가 될 수 있는 경우를 적절히 나누어서 풀어야 한다.

09 답 ③

ㄱ. 그래프에서

$\lim_{x\to-1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to1-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=2+1=3$ (참)

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to-1-$이고,

$x\to1-$일 때 $t\to-1+$이다.

$\lim_{x\to1+}f(-x)=\lim_{t\to-1-}f(t)=2$

$\lim_{x\to1-}f(-x)=\lim_{t\to-1+}f(t)=-1$

이므로 극한값이 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. ㄴ을 이용해 극한값을 구하면

$\lim_{x\to1-}f(x)f(-x)=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to1-}f(-x)$

$=1\times(-1)=-1$

$\lim_{x\to1+}f(x)f(-x)=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to1+}f(-x)$

$=-2\times2=-4$

에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다. (거짓)

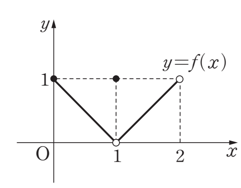
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10 답 25

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $0\le x<2$에서

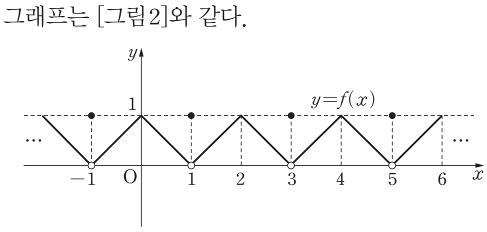
$f(x)=\begin{cases}|x-1| & (0\le x<1,\ 1<x<2)\\1 & (x=1)\end{cases}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 [그림1]과 같다.



[그림1]

조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$를 만족하므로 주기가 2인 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림2]와 같다.



[그림2]

따라서 함수 $y=f(x)$는 $x=1, 3, 5, \cdots$에서 불연속이므로 구간 $(0, 10)$에서 불연속인 모든 x의 값의 합은

$1+3+5+7+9=25$

11 답 $-\frac{8}{5}$

함수 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$이므로

$\frac{b}{2-a}=-2+1=-1$

$\therefore b=a-2$ ⋯ ㉠ ⋯ Ⅰ

또, 함수 $f(x)$는 $f(x)=f(x+3)$을 만족시키므로

$f(0)=f(3)$에서

$\frac{b}{-a}=-3+1=-2$

$\therefore b=2a$ ⋯ ㉡ ⋯ Ⅱ

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-2$, $b=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\frac{4}{x+2} & (0\le x<2)\\ -x+1 & (2\le x\le3)\end{cases}$ 이므로

$f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}+3\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{4}{\frac{1}{2}+2}=-\frac{8}{5}$ ⋯ Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	$x=2$에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 찾는다.	30%
Ⅱ	$f(0)=f(3)$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 찾는다.	30%
Ⅲ	$f\left(\frac{7}{2}\right)$의 값을 구한다.	40%

TIP

두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 닫힌구간 $[a, c]$에서

$f(x)=\begin{cases}g(x) & (a\le x<b)\\ h(x) & (b\le x\le c)\end{cases}$

로 정의되고 $p=c-a$에 대하여 $f(x)=f(x+p)$를 만족시키는 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 다음을 만족시킨다.

(1) $\lim_{x\to b-}g(x)=\lim_{x\to b+}h(x)$

(2) $g(a)=h(c)$

Ⅰ 대단원 TEST [A~E]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 42~45

01 답 ①

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+3)=4$

02 답 ④

ㄱ. $\lim_{x\to2+}\frac{x^2-2x}{|x-2|}=\lim_{x\to2+}\frac{x(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}x=2$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{-(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\{-(x+1)\}=-2$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to-3-}\frac{x^2+3x}{|x+3|}=\lim_{x\to-3-}\frac{x(x+3)}{-(x+3)}$

$=\lim_{x\to-3-}(-x)=3$ (참)

따라서 극한값을 바르게 구한 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

03 답 ②

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2-x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{-2x}{(2+x)(2-x)}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-2}{(2+x)(2-x)}=-\frac{1}{2}$

04 답 4

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+xf(x)}{x^2-f(x)}$의 값을 구하시오.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$을 이용할 수 있게 식을 변형하자.

1st 분모와 분자를 각각 x로 나눠봐.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+xf(x)}{x^2-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{f(x)}{x}}{1-\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x}}$

$=\frac{1+3}{1-3\times0}=4$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이지?

05 답 ④

주어진 그림에서

$\lim_{x\to-1+}f(x)=0$, $\lim_{x\to1-}f(x)=2$

$\therefore$ (구하는 값)$=0+2=2$

06 답 ①

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $2f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $\lim_{x\to\infty}h(x)=4$야.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-g(x)\}=4$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-3g(x)}{4f(x)+g(x)}$의 값은?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

주어진 식을 $f(x)$와 $h(x)$에 대한 식으로 변형해봐.

1st $2f(x)-g(x)=h(x)$라 놓고 주어진 극한식을 정리하자.

$2f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=2f(x)-h(x)$이고,

$\lim_{x\to\infty}h(x)=4$이다.

2nd 분자, 분모를 각각 $f(x)$로 나누어 극한값을 구하자.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-3g(x)}{4f(x)+g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-3\{2f(x)-h(x)\}}{4f(x)+2f(x)-h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4f(x)+3h(x)}{6f(x)-h(x)}$$

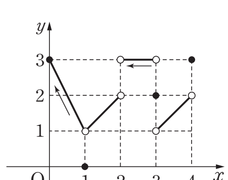
$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이니까 분모, 분자를 각각 $f(x)$로 나눠.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+\frac{3h(x)}{f(x)}}{6-\frac{h(x)}{f(x)}}$$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$이야.

$$=\frac{-4+0}{6-0}=-\frac{2}{3}$$

07 답 ⑤



$f(x)=s$라 하면 $x\longrightarrow 0+$일 때 $s\longrightarrow 3-$이므로

$\lim_{x\to 0+}f(f(x))=\lim_{s\to 3-}f(s)=3$

$\therefore \lim_{x\to 0+}f(f(x))+\lim_{x\to 2+}f(x)=3+3=6$

08 답 18

$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2+ax-6}{x-3}=b$와 같이 수렴하고

$\lim_{x\to 3}(x-3)=0$이면 $\lim_{x\to 3}(3x^2+ax-6)=0$

$27+3a-6=0$

$3a=-21$ $\therefore a=-7$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2+ax-6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-7x-6}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(3x+2)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}(3x+2)=11=b$$

$\therefore b-a=11-(-7)=18$

09 답 ⑤

함수 $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{ax^2+bx+c}$이 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 실수 a, b, c에 대하여, abc의 값은?

(가) $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$ — $f(x)$의 분자와 분모의 최고차항의 계수의 비가 $\frac{1}{2}$이야.

(나) $\lim_{x\to 1}|f(x)|=\infty$ — $f(x)$의 극한이 발산하는 경우는 $x\longrightarrow 1$일 때 $\frac{(상수)}{0}$ 꼴인 경우야.

(다) $\lim_{x\to -3}|f(x)|=\infty$

① -24 ② -30 ③ -36 ④ -42 ⑤ -48

1st 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$의 분모의 최고차항의 계수를 구하자.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴에서 (분모의 차수)=(분자의 차수)이면 극한값은 최고차항의 계수의 비야.

이때, 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$ $\therefore a=2$

2nd 분자가 일정한 수로 수렴할 때, 분모가 0으로 수렴하면 전체 극한값은 ∞ 또는 $-\infty$로 발산하지.

조건 (나)의

$\lim_{x\to 1}|f(x)|=\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2+2x+1}{ax^2+bx+c}\right|=\infty$

에서 $\lim_{x\to 1}(x^2+2x+1)=4$이므로 $\lim_{x\to 1}(ax^2+bx+c)=0$

이어야 $\lim_{x\to 1}|f(x)|=\infty$가 된다. — 양수 c에 대하여 $\frac{c}{0}$ 꼴은 ∞가 되기 때문이야.

즉, 분모인 ax^2+bx+c는 $x-1$을 인수로 가진다.

인수정리에 의해 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$라는 인수를 가지는 거야.

또, 조건 (다)의

$\lim_{x\to -3}|f(x)|=\lim_{x\to -3}\left|\frac{x^2+2x+1}{ax^2+bx+c}\right|=\infty$

에서 $\lim_{x\to -3}(x^2+2x+1)=4$이므로

$\lim_{x\to -3}(ax^2+bx+c)=0$이어야 $\lim_{x\to -3}|f(x)|=\infty$가 된다.

즉, 분모인 ax^2+bx+c는 $x+3$을 인수로 가진다.

$\therefore ax^2+bx+c=2(x-1)(x+3)=2x^2+4x-6$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=-6$이므로

$abc=2\times 4\times(-6)=-48$

심플 정리

[함수의 극한]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha\neq 0$인 실수)일 때, $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비가 α이다.

(2) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (β는 실수)일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

(3) $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\gamma$ ($\gamma\neq 0$인 실수)일 때, $\lim_{x\to b}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to b}g(x)=0$

10 답 ②

ㄱ. $xf(x)=g(x)$라 하고, $\lim_{x\to\infty} xf(x)=\alpha$ (α는 상수)라

하면 $x\neq0$일 때, $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$이므로

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}|f(x)|=0$이면

$f(x)\geq0$일 때, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$f(x)<0$일 때, $\lim_{x\to\infty}\{-f(x)\}=0$에서 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to\infty} f(x)=0$ (참)

ㄷ. $x\{1-f(x)\}=h(x)$라 하면 $f(x)=1-\dfrac{h(x)}{x}$

$\lim_{x\to\infty} x\{1-f(x)\}=\beta$ (β는 상수)라 하면

$\lim_{x\to\infty} h(x)=\beta$이므로

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{1-\dfrac{h(x)}{x}\right\}=1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11 답 ④

$$\lim_{x\to9}\frac{f(x)}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{f(x)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to9}\left\{\frac{f(x)}{x-9}\times(\sqrt{x}+3)\right\}=3\times6=18$$

12 답 ⑤

점 H의 좌표가 $(x,\ 0)$이므로 $\overline{OP}-\overline{OH}=\sqrt{x^2+ax}-x$

$$\lim_{x\to\infty}(\overline{OP}-\overline{OH})=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-x)(\sqrt{x^2+ax}+x)}{\sqrt{x^2+ax}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\dfrac{a}{x}}+1}=\frac{a}{2}=5$$

$\therefore a=10$

13 답 ②

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로 점 P에서 선분 OQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 OQ의 길이를 이등분한다. 이때, 점 H의 좌표는 $(t,\ 0)$이므로 점 Q의 좌표는 $(2t,\ 0)$이다.

즉, 삼각형 POQ의 넓이는 $S(t)=\dfrac{1}{2}\times2t\times t^2=t^3$

또한, 삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이 y축과 만나는 점이 R이다.

직선 OP의 기울기는 $\dfrac{t^2}{t}=t$이므로 직선 OP와 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{t}$이다.

즉, 선분 OP의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{2}\right)$이므로

직선 MR의 방정식은

$y-\dfrac{t^2}{2}=-\dfrac{1}{t}\left(x-\dfrac{t}{2}\right)\qquad\therefore y=-\dfrac{1}{t}x+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}$

따라서 직선 MR가 y축과 만나는 점 R의 좌표는

$\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$이므로 삼각형 PRO의 넓이는

$T(t)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\times t=\dfrac{1}{4}(t^3+t)$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{T(t)-S(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{4}(t^3+t)-t^3}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(-\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

다른 풀이

점 R의 좌표를 $(0,\ a)$(단, $a>0$)라 하면

$\overline{RP}=\sqrt{t^2+(a-t^2)^2}$

이때, $\overline{RO}=\overline{RP}$이므로

$a=\sqrt{t^2+(a-t^2)^2}$, $a^2=t^2+a^2-2at^2+t^4$

$2at^2=t^2(t^2+1)\qquad\therefore a=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$

(이하 동일)

14 답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to-2+}\{f(x)-g(x)\}$

$=\lim_{x\to-2+}f(x)-\lim_{x\to-2+}g(x)=0-0=0$

$\lim_{x\to2-}\{f(x)-g(x)\}$

$=\lim_{x\to2-}f(x)-\lim_{x\to2-}g(x)=1-1=0$

$\therefore \lim_{x\to-2+}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to2-}\{f(x)-g(x)\}$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0-}f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to0-}f(x)\times\lim_{x\to0-}g(x)$

$=0\times1=0$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to-1-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim_{x\to-1-}g(x)}{\lim_{x\to-1-}f(x)}=\dfrac{1}{-1}=-1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15 답 6

함수 $f(x)=\begin{cases}3x+6 & (x<2)\\ x^2+ax-4 & (x\geq2)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이면 되므로

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2-}(3x+6)=\lim_{x\to2+}(x^2+ax-4)=f(2)$에서

$6+6=4+2a-4\qquad\therefore a=6$

I
대단원

16 답 ③

$x \neq 3$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+ax-12}{x-3}$

모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $\lim\limits_{x\to3} f(x)=f(3)$이어야 한다.

이때, $\lim\limits_{x\to3}(x-3)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to3}(x^2+ax-12)=0$

$9+3a-12=0 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(3)=\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+4)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+4)=7$

17 답 ④

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+a}{x-3} & (x\neq3) \\ b & (x=3) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.

$f(3)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+a}{x-3}=b$

이때, $\lim\limits_{x\to3}(x-3)=0$이면 $\lim\limits_{x\to3}(x^2-5x+a)=0$

$9-15+a=0 \qquad \therefore a=6$

$b=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}(x-2)=1$

$\therefore a+b=6+1=7$

18 답 ②

두 함수

$f(x)=\begin{cases} -x^2+a & (x\le2) \\ x^2-4 & (x>2) \end{cases},$

$g(x)=\begin{cases} x-4 & (x\le2) \\ \dfrac{1}{x-2} & (x>2) \end{cases}$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되려면 $x=2$에 대하여 좌극한값과 우극한값이 같아야 하고 $x=2$에서의 극한값과 $f(2)g(2)$의 값이 같으면 되겠지?

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되는 조건을 구하자.

함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되려면

$\lim\limits_{x\to2} f(x)g(x)=f(2)g(2)$

즉, $\lim\limits_{x\to2-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to2+} f(x)g(x)=f(2)g(2)$

가 성립해야 한다.

함수 $F(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위해서는 다음을 모두 만족해야 해.
(i) $F(a)$의 값이 정의되어 있고
(ii) $\lim\limits_{x\to a} F(x)$가 존재하며
(iii) $\lim\limits_{x\to a} F(x)=F(a)$

2nd 연속이 되는 조건을 만족하는 상수 a의 값을 구하자.

$\lim\limits_{x\to2-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to2-}(-x^2+a)\times(x-4)$

$=(-4+a)\times(-2)=8-2a$

$\lim\limits_{x\to2+} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to2+}(x^2-4)\times\dfrac{1}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2+}(x+2)=4$

$\frac{0}{0}$ 꼴이므로 분자를 인수분해하여 분모, 분자의 공통인수를 약분해.

$f(2)g(2)=(-4+a)\times(-2)=8-2a$

$8-2a=4 \qquad \therefore a=2$

TIP

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\ge a) \\ h(x) & (x<a) \end{cases}$가 $x=a$에서 연속이면 $g(a)=h(a)$이다. (단, $g(x)$, $h(x)$는 다항함수이다.)

19 답 ②

$f(x)=x^3-2x^2+4$라 하면 $f(x)$는 연속함수이고

$f(-3)=-27-18+4=-41<0$

$f(-2)=-8-8+4=-12<0$

$f(-1)=-1-2+4=1>0$

$f(0)=4>0$

$f(1)=1-2+4=3>0$

$f(2)=8-8+4=4>0$

이므로 $f(-2)f(-1)<0$에서 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$의 실근은 구간 $(-2, -1)$에 존재한다.

20 답 -1

$f(x)=(x+1)(x-1)(x+2)+1$이라 놓자.

$f(-3)=(-2)\times(-4)\times(-1)+1=-7<0$

$f(-2)=1>0$

$f(-1)=1>0$

$f(0)=1\times(-1)\times2+1=-1<0$

$f(1)=1>0$

$f(2)=3\times1\times4+1=13>0$

즉, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 연속이고 $f(-3)f(-2)<0$, $f(-1)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$에서 각각 하나의 실근을 갖는다.

따라서 $-3<\alpha<-2$, $-1<\beta<0<\gamma<1$이므로 $k=-1$이다.

21 답 ④

$g(x)=f(x)-2x$라 하면 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 실근을 가지므로 사잇값의 정리에 의해 $g(0)g(3)<0$이어야 한다.

$\{f(0)-2\times0\}\{f(3)-2\times3\}<0$

$k(k-8)<0 \qquad \therefore 0<k<8$

따라서 정수 k는 $1, 2, \cdots, 7$의 7개이다.

22 답 ⑤

ㄱ. $g(x)=f(x)-x$로 놓으면 $g(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이다.

$g(-1)=f(-1)-(-1)=1+1=2>0$

$g(1)=f(1)-1=-1-1=-2<0$

즉, $g(-1)g(1)<0$이므로 방정식 $g(x)=0$, 즉 방정식 $f(x)=x$는 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $h(x)=x^2f(x)$로 놓으면 $h(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이다.

$h(-1)=(-1)^2\times f(-1)=1\times 1=1>0$

$h(1)=1^2\times f(1)=1\times(-1)=-1<0$

즉, $h(-1)h(1)<0$이므로 방정식 $h(x)=0$, 즉 방정식 $x^2f(x)=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $j(x)=\{f(x)\}^3$으로 놓으면 $j(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이다.

$j(-1)=\{f(-1)\}^3=1^3=1>0$

$j(1)=\{f(1)\}^3=(-1)^3=-1<0$

즉, $j(-1)j(1)<0$이므로 방정식 $j(x)=0$, 즉 방정식 $\{f(x)\}^3=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

> **TIP**
> 사잇값의 정리를 이용하면 방정식의 실근의 존재 여부를 판단할 수 있고, 그 실근이 어떤 구간에 존재하는지 알아볼 수 있다. 하지만 그 실근이 구체적으로 어떤 값을 갖는지는 알 수 없다.

23 답 56

> 함수 $f(x)=x^2-8x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를
> $$g(x)=\begin{cases} 2x+5a & (x\ge a) \\ f(x+4) & (x<a) \end{cases}$$
> 라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오.
>
> 열린구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 사잇값의 정리에 의해 $f(0)f(2)<0$이어야 해.
>
> (가) 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
>
> (나) 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
>
> 주어진 함수가 연속일 조건을 이용하여 실수 a의 값을 구하자.

1st 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(a)f(b)<0$이어야 하지?

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로

$f(0)f(2)=a(a-12)<0$

[사잇값의 정리의 응용] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 $f(\alpha)f(\beta)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (α, β)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$\therefore 0<a<12$ ⋯ ㉠

2nd 연속이 되는 조건을 만족하는 상수 a의 값을 구하자.

조건 (나)에서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)g(x)$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)g(x)$

$=\lim\limits_{x\to a-}(x^2-8x+a)f(x+4)$

함수 $f(x)$와 $f(x+4)$는 다항함수이므로 극한값은 각각 $f(a)$와 $f(a+4)$가 돼.

$=(a^2-8a+a)\{(a+4)^2-8(a+4)+a\}$

$=a(a-7)(a^2+a-16)$ ⋯ ㉡

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)g(x)$

$=\lim\limits_{x\to a+}(x^2-8x+a)(2x+5a)$

$=(a^2-8a+a)(2a+5a)$

$=7a^2(a-7)$ ⋯ ㉢

$f(a)g(a)=(a^2-8a+a)(2a+5a)=7a^2(a-7)$

㉡$=$㉢이어야 하므로

$a(a-7)(a^2+a-16)=7a^2(a-7)$

양변에서 $(a-7)$을 약분하지 말고 공통인수로 묶어야 해.

$a(a-7)(a^2+a-16)-7a^2(a-7)=0$

$a(a-7)(a^2+a-16-7a)=0$

$a(a-7)(a^2-6a-16)=0$

$a(a-7)(a-8)(a+2)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=0$ 또는 $a=7$ 또는 $a=8$

따라서 ㉠에 의해 $a=7$ 또는 $a=8$이므로 모든 실수 a의 값의 곱은 $7\times 8=56$이다.

24 답 4

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{f(x-2)}$에서 $x-2=t$라 하면

$x=t+2$이고, $x\longrightarrow 2$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{f(x-2)}=\lim_{t\to 0}\frac{(t+2)^3-8}{f(t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^3+6t^2+12t}{f(t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{(t^2+6t+12)\times\frac{t}{f(t)}\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}(t^2+6t+12)\times\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{f(t)}{t}}$$
$$=12\times\frac{1}{3}=4$$

25 답 20

조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=3$과 같이 수렴하려면 $\dfrac{f(x)}{x^2}$의 분모와 분자의 차수가 같아야 하고, 최고차항의 계수의 비가 3이어야 하므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차함수이다. ⋯ Ⅰ

조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$와 같이 수렴하고 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$이면 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, 즉 $f(0)=0$이어야 한다.

즉, 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$이므로 이차식 $f(x)$는 x를 인수로 가진다.

$f(x)=3x(x-k)$ (단, k는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x(x-k)}{x}=\lim_{x\to0}3(x-k)$$
$$=-3k=4$$

$\therefore k=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=3x\left(x+\frac{4}{3}\right)=3x^2+4x$이므로 … Ⅱ

$f(2)=12+8=20$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	$f(x)$가 이차함수인 것과 $f(x)$의 최고차항의 계수를 구한다.	40%
Ⅱ	$f(x)$의 식을 구한다.	40%
Ⅲ	$f(2)$의 값을 구한다.	20%

26 답 8

$f(x)=x-4$, $g(x)=\begin{cases}x^2-2 & (x\ge a)\\ 4x+10 & (x<a)\end{cases}$에 대하여

$$f(x)g(x)=\begin{cases}(x-4)(x^2-2) & (x\ge a)\\ (x-4)(4x+10) & (x<a)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=f(a)g(a)$

가 성립해야 한다. … Ⅰ

$\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}(x-4)(4x+10)=(a-4)(4a+10)$

$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}(x-4)(x^2-2)=(a-4)(a^2-2)$

$f(a)g(a)=(a-4)(a^2-2)$ … Ⅱ

즉, $(a-4)(a^2-2)=(a-4)(4a+10)$에서

$(a-4)(a^2-2)-(a-4)(4a+10)=0$

$(a-4)(a^2-4a-12)=0$

$(a-4)(a-6)(a+2)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=4$ 또는 $a=6$

따라서 모든 a의 값의 합은 $-2+4+6=8$이다. … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	$f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이 됨을 안다.	20%
Ⅱ	$f(x)g(x)$의 $x=a$에서의 좌극한, 우극한, 함숫값을 구한다.	40%
Ⅲ	a의 값을 모두 구하고 그 합을 계산한다.	40%

심플 정리

두 함수

$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & (x\ge a)\\ f_2(x) & (x<a)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}g_1(x) & (x\ge a)\\ g_2(x) & (x<a)\end{cases}$

에 대하여 $f(x)g(x)=\begin{cases}f_1(x)g_1(x) & (x\ge a)\\ f_2(x)g_2(x) & (x<a)\end{cases}$이다.

Ⅱ 미분

Simple F 미분계수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 48~49

01 답 $f(a)$, $f(a+\Delta x)$

02 답 $f(a+h)$, $f(a)$

03 답 접선

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ×

07 답 2

$$(\text{평균변화율})=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{7-3}{2}=2$$

08 답 -1

$$(\text{평균변화율})=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{-1-2}{3}=-1$$

09 답 7

$$(\text{평균변화율})=\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=\frac{-1-(-22)}{3}=7$$

10 답 7

$$(\text{평균변화율})=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{26-(-2)}{4}=7$$

11 답 $2a+\Delta x$

$$(\text{평균변화율})=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$$
$$=\frac{(a+\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}=\frac{a^2+2a\Delta x+(\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}$$
$$=2a+\Delta x$$

12 답 1

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)-5}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}=1$$

13 답 1

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(-x^2+3x)-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-x^2+3x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(-x+2)=1$$

14 답 -3

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times(-1)\right\}$$
$$=f'(a)\times(-1)=3\times(-1)=-3$$

15 답 9

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times3\right\}$$
$$=f'(a)\times3=3\times3=9$$

16 답 6

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times(-1)\right\}$$
$$=f'(a)+f'(a)=2f'(a)=2\times3=6$$

17 답 -4

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{-4x+2-2}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-4x}{x}=-4$$

18 답 2

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+1)-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

19 답 -1

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(-x^2+3x-2)-0}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{-x^2+3x-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{-(x-1)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(-x+1)=-1$$

20 답 -7

$$f'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(3x^2-x)-4}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{3x^2-x-4}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(3x-4)(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(3x-4)=-7$$

21 답 3

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3$$

22 답 (가) 0 (나) 1 (다) -1

$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\overset{(가)}{\boxed{0}}$ 이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h|}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=\overset{(나)}{\boxed{1}}\ \cdots\ ㉠$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h|}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}=\overset{(다)}{\boxed{-1}}\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 50~55

23 답 ②

$$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}$$
$$=\{(a+1)^2-3(a+1)\}-(a^2-3a)$$
$$=(a^2+2a+1-3a-3)-a^2+3a$$
$$=2a-2=2 \qquad \therefore a=2$$

24 답 ④

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(-3a^2+8a+2)-7}{a-1}=-1$$
$$-3a^2+8a-5=-a+1$$
$$-3a^2+9a-6=0,\ a^2-3a+2=0$$
$$(a-1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a\neq1)$$

25 답 ①

함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때,

평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{f(2)-f(-1)}{3}$$

이므로 $f(2)-f(-1)$의 값을 구하면 된다.

이때, $f(x)-f(-1)=x^3-2x+5$에 $x=2$를 대입하면

$f(2)-f(-1)=2^3-2\times2+5=9$이므로

$$(\text{평균변화율})=\frac{f(2)-f(-1)}{3}=\frac{9}{3}=3$$

26 답 ④

함수 $f(x)=2x^2+1$에 대하여 x의 값이 -3에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)}=\frac{3-19}{4}=-4 \cdots ㉠$$

또, x의 값이 k에서 0까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(0)-f(k)}{0-k}=\frac{1-(2k^2+1)}{-k}$$
$$=\frac{-2k^2}{-k}=2k\ (\because k\neq0) \cdots ㉡$$

㉠=㉡이므로

$2k=-4 \quad \therefore k=-2$

27 답 ④

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{(-4+2a+1)-1}{2}=\frac{2a-4}{2}=a-2=1$$

$\therefore a=3$

28 답 ⑤

함수 $f(x)=x^2+ax+2a-3$에 대하여

$f(0)=2a-3 \cdots ㉠$

함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 -1에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{(1+a+2a-3)-(1-a+2a-3)}{2}=a$$

이것이 ㉠과 같아야 하므로

$2a-3=a \quad \therefore a=3$

29 답 ①

$f(x+3)-f(3)=-2x^2+x$에서

$$f'(3)=\lim_{x\to0}\frac{f(x+3)-f(3)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-2x^2+x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(-2x+1)=1$$

30 답 ②

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times3\right\}$$
$$=f'(a)\times3=2$$

$\therefore f'(a)=\frac{2}{3}$

31 답 ①

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(3+2h)-f(3)\}-\{f(3-h)-f(3)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\times2\right\}$$
$$-\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\times(-1)\right\}$$
$$=2f'(3)+f'(3)=3f'(3)=3\times(-1)=-3$$

TIP

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{h}$ 꼴을 변형하면

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+kh)-f(a)}{kh}\times k\right\}$$
$$=f'(a)\times k=kf'(a)$$

이다. 그럼, $\lim_{h\to0}\frac{f(a+kh)-f(a+mh)}{h}$와 같이 복잡한 꼴은 어떻게 변형할까?

위의 과정에서

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{h}=kf'(a)$이고

같은 방법으로 하면

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{h}=mf'(a)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+kh)-f(a+mh)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{h}$$
$$=kf'(a)-mf'(a)=(k-m)f'(a)$$

32 답 ②

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)+1}{h}=-3$으로 극한값이 존재하고

$\lim_{h\to0}h=0$이므로 $\lim_{h\to0}\{f(2+h)+1\}=0$이어야 한다.

$\therefore f(2)=-1$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)+1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=f'(2)=-3$$

$\therefore f'(2)+f(2)=-3+(-1)=-4$

심플 정리

[함수의 극한의 미정계수의 결정]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 실수)이고
$\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

(2) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 0이 아닌 실수)이고
$\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$

33 답 ④

$\frac{1}{n}=h$라 하면 $n\longrightarrow\infty$일 때, $h\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{3}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-3h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$-\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\times(-3)\right\}$$
$$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)=4\times2=8$$

34 답 ④

$x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\frac{1}{x+3}\right\}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\lim_{x\to3}\frac{1}{x+3}$$
$$=f'(3)\times\frac{1}{6}=2$$

$\therefore f'(3)=12$

TIP

주어진 식을 인수분해하거나 주어진 식에 적절한 식을 곱하거나 나누어서 원하는 형태로 만든 다음

$$\lim_{■\to▲}\frac{f(■)-f(▲)}{■-▲}=f'(▲)$$

를 이용한다. 이때, ■는 ■끼리, ▲는 ▲끼리 서로 같도록 만들어주는 것이 핵심이다.

35 답 ①

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{3}$$
$$=6\times\frac{1}{3}=2$$

36 답 ①

$x^2=t$라 하면 $x\longrightarrow2$일 때, $t\longrightarrow4$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}=\lim_{t\to4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}=f'(4)$$

$f(x)=-x^2+5$에서

$$f'(4)=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(-x^2+5)-(-11)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{-x^2+16}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{-(x+4)(x-4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}(-x-4)=-8$$

37 답 ⑤

$$\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-2f(2)-xf(2)+2f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}-f(2)\times(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{f(2)\times(x-2)}{x-2}$$
$$=2f'(2)-f(2)$$
$$=2\times4-(-1)=9$$

38 답 ⑤

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x^2+2x-3}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+3)(x-1)}\ (\because f(1)=4)$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+3}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+3}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{4}$$
$$=-2\times\frac{1}{4}\ (\because f'(1)=-2)$$
$$=-\frac{1}{2}$$

39 답 ③

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(3x+4)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{\{f(x)-f(-2)\}-\{f(3x+4)-f(-2)\}}{x-(-2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}-\lim_{x\to-2}\left\{\frac{f(3x+4)-f(-2)}{(3x+4)-(-2)}\times3\right\}$$

이때, $\displaystyle\lim_{x\to-2}\left\{\frac{f(3x+4)-f(-2)}{(3x+4)-(-2)}\times3\right\}$에서

$3x+4=t$로 치환하면 $x\longrightarrow-2$일 때, $t\longrightarrow-2$이므로

(주어진 식)

$$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}-\lim_{t\to-2}\left\{\frac{f(t)-f(-2)}{t-(-2)}\times3\right\}$$
$$=f'(-2)-3f'(-2)$$
$$=-2f'(-2)$$

한편,

$$f'(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(2x^2-5x+1)-19}{x-(-2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2x^2-5x-18}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(2x-9)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}(2x-9)=-13$$

$$\therefore\ \lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(3x+4)}{x+2}=-2f'(-2)$$
$$=-2\times(-13)=26$$

40 답 ③

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-1+2h)-f(-1+3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{2h}\times2\right\}$$
$$-\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(-1+3h)-f(-1)}{3h}\times3\right\}$$
$$=2f'(-1)-3f'(-1)$$
$$=-f'(-1)=2$$

$\therefore f'(-1)=-2$ ⋯ ㉠

따라서 $f(-1)=1$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-f(x)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2f(-1)-f(x)}{x+1}\ (\because f(-1)=1)$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2f(-1)-f(x)+f(-1)-f(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(-1)\times(x^2-1)}{x+1}-\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(-1)\times(x-1)(x+1)}{x+1}-\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$=-2f(-1)-f'(-1)$$

$$=-2\times1-(-2)(\because ㉠,\ f(-1)=1)$$

$$=0$$

41 답 ①

x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{(4+2-3)-(1-1-3)}{3}=2\ \cdots\ ㉠$$

$x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x^2+x-3)-(a^2+a-3)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)+(x-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)+(x-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a+1)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x+a+1)=2a+1$$

이것이 ㉠과 같으므로

$2a+1=2 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

42 답 ①

x의 값이 k에서 $k+2$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(k+2)-f(k)}{(k+2)-k}=\frac{\{-(k+2)^2+3\}-(-k^2+3)}{2}$$

$$=\frac{(-k^2-4k-4+3)-(-k^2+3)}{2}$$

$$=\frac{-4k-4}{2}=-2k-2\ \cdots\ ㉠$$

$x=-2$에서의 미분계수 $f'(-2)$는

$$f'(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(-x^2+3)-(-1)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{-(x^2-4)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{-(x+2)(x-2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}(-x+2)=4$$

이것이 ㉠과 같으므로

$-2k-2=4 \qquad \therefore k=-3$

심플 정리

[평균변화율과 미분계수]

(1) 평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

(2) 미분계수

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

43 답 ⑤

함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율이 6이므로

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(9+3a+b)-(1+a+b)}{2}$$

$$=\frac{8+2a}{2}=4+a=6$$

$\therefore a=2$

$f(x)=x^2+2x+b$이므로

$$f'(3)=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x^2+2x+b)-(15+b)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+5)(x-3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}(x+5)=8$$

44 답 ④

(x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율)

$=$(직선 AB의 기울기)

$=\frac{7}{2}$

45 답 -3

이차함수 $f(x)=a(x-2)^2+b$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $f(0)=f(4)$

두 점 $\mathrm{A}(2,\ f(2))$, $\mathrm{B}(4,\ f(4))$에 대하여

(직선 AB의 기울기)$=\frac{f(4)-f(2)}{2}=3$

이므로

(x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율)

$$=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{f(2)-f(4)}{2}$$

$$=-\frac{f(4)-f(2)}{2}=-3$$

46 답 ①

점 $(2, f(2))$에서의 접선의 기울기가 $\frac{3}{2}$이므로

$f'(2)=\frac{3}{2}$ ⋯ ㉠

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\times(-1)\right\}$

$=f'(2)\times(-1)$

$=-\frac{3}{2}$ ($\because$ ㉠)

47 답 ⑤

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 9)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$이므로

$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x^3+1)-9}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)=12$

48 답 ④

직선 $y=-3x+1$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, 7)$에서의 접선이고 점 $(-2, 7)$에서의 접선의 기울기가 $f'(-2)$이므로

$f'(-2)=-3$ ⋯ ㉠

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(-2+4h)-f(-2)}{3h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(-2+4h)-f(-2)}{4h}\times\frac{4}{3}\right\}$

$=f'(-2)\times\frac{4}{3}=-3\times\frac{4}{3}$ ($\because$ ㉠)

$=-4$

49 답 ②

함수 $f(x)=-x^2+2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(a)=4$

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{(-x^2+2)-(-a^2+2)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{-(x^2-a^2)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{-(x-a)(x+a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}(-x-a)=-2a=4$

$\therefore a=-2$

$\therefore f(a)=f(-2)=-(-2)^2+2=-2$

50 답 ③

ㄱ. $f(x)=5x+3$은 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(5x+3)-8}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{5(x-1)}{x-1}=5$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(5x+3)-8}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{5(x-1)}{x-1}=5$

$\therefore \lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄴ. $g(x)=|x-1|$은 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{|x-1|}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{x-1}=1$

$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{|x-1|}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$

$\therefore \lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. 함수 $h(x)=-\frac{2}{x}$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{-\frac{2}{x}-(-2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{2(x-1)}{x(x-1)}=2$

$\lim_{x\to1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-\frac{2}{x}-(-2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{2(x-1)}{x(x-1)}=2$

$\therefore \lim_{x\to1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 $x=1$에서 미분가능한 것은 ㄱ, ㄷ이다.

51 답 (가) 0 (나) 연속 (다) 2 (라) 0 (마) 미분가능하지 않다

$f(0)=0$, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\{x+|x|\}=\boxed{0}$ (가)

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 $\boxed{\text{연속}}$ (나) 이다.

$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h+|h|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{2h}{h}=\boxed{2}$ (다)

$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h+|h|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{0}{h}=\boxed{0}$ (라)

즉, $\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 $\boxed{\text{미분가능하지 않다}}$ (마) .

52 답 ③

① $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=5$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5-5}{x}=0$

즉, 함수 $f(x)=5$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

② $\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$

즉, 함수 $f(x)=\frac{|x|}{x}$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

③ $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$이므로

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$

즉, 함수 $f(x)=\sqrt{x^2}$은 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

④ $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=0$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x^2}{x}=0$

즉, 함수 $f(x)=x|x|$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

⑤ $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=0$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2}{x}=0$

즉, 함수 $f(x)=x^2$은 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ③이다.

53 답 미분가능하지 않다.

$f(1)=1^2-2=-1$이고,

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-2)=-1$

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x^2-2)-(-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(x+1)=2$$

$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-1-(-1)}{x-1}=0$

$\therefore \lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

54 답 ③

ㄱ. $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} x=0$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$

$\therefore \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $g(0)=2$, $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}(3x-2)=-2$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $h(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0+} x^2=0$, $\lim_{x\to 0-} h(x)=\lim_{x\to 0-}(-x^2)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0-} h(x)=h(0)$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=0$

$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x^2}{x}=0$

$\therefore \lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 것은 ㄷ이다.

55 답 2

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이므로 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

또한, $x=1$에서 그래프가 꺾여 있으므로(뾰족점) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

따라서 구간 $(-2, 4)$에서 미분가능하지 않은 점은 2개이다.

> **TIP**
>
> 함수 $y=f(x)$의 그래프에서
>
> (1) 불연속인 경우 ⇒ 연결되어 있지 않고 끊어져 있을 때
>
> (2) 미분가능하지 않은 경우 ⇒ 불연속일 때, 뾰족점일 때

56 답 5

함수 $f(x)$는 구간 $(-2, 3)$에서 $x=-1$, $x=2$일 때 불연속이므로 $a=2$

또한, 함수 $f(x)$의 그래프가 $x=0$에서 꺾여 있으므로 $x=0$에서 미분가능하지 않고, $x=-1$, $x=2$에서 불연속이므로 $x=-1$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 $b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

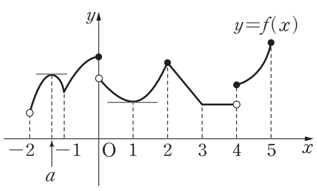
57 답 ⑤

① $x=\frac{3}{2}$에서의 접선의 기울기는 양수이므로

$f'\left(\frac{3}{2}\right)>0$

② $\lim_{x\to0-}f(x)\neq\lim_{x\to0+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$와 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는 0이고, 구간 $(3, 4)$에 속하는 곡선 $y=f(x)$ 위의 모든 점에서의 접선의 기울기는 0이다.



즉, $f'(x)=0$인 점은 무수히 많이 존재한다.

④ 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=4$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개이다.

⑤ 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=-1$, $x=2$, $x=3$에서 꺾여 있으므로 $x=-1$, $x=2$, $x=3$에서 미분가능하지 않고, $x=0$, $x=4$에서 불연속이므로 $x=0$, $x=4$에서 미분가능하지 않다.

즉, 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점은 5개이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

58 답 ⑤

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$f(1)=\lim_{x\to1+}(x^2+a)=\lim_{x\to1-}(bx-1)$

$\therefore 1+a=b-1$ ⋯ ㉠

또한, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2+a)-(1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x+1)=2 \cdots ㉡$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(bx-1)-(1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(bx-1)-(b-1)}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{b(x-1)}{x-1}=b \cdots ㉢$$

㉡=㉢이므로 $b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$1+a=2-1 \quad \therefore a=0$

$\therefore a+b=0+2=2$

59 답 ⑤

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하려면 $x=-1$에서 미분가능하기만 하면 된다.

먼저, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)=\lim_{x\to-1+}x^3=\lim_{x\to-1-}(ax+b)$

$-1=-a+b \quad \therefore b=a-1$ ⋯ ㉠

또한, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{x^3-(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{x^3+1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}(x^2-x+1)=3 \cdots ㉡$$

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\frac{(ax+b)-(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\frac{ax+a-1+1}{x+1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to-1-}\frac{a(x+1)}{x+1}=a \cdots ㉢$$

㉡=㉢이므로 $a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$b=3-1=2$

$\therefore ab=3\times2=6$

60 답 ②

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하려면 $x=0$에서 미분가능하기만 하면 된다.

먼저, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to0+}(-x^3+2x)=\lim_{x\to0-}(x^2+ax+b)$

$\therefore b=0$

또한, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{-x^3+2x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}(-x^2+2)=2 \cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2+ax}{x}\ (\because b=0)$$
$$=\lim_{x\to0-}(x+a)=a \cdots ㉡$$

㉠=㉡이므로 $a=2$

즉, $f(x)=\begin{cases}-x^3+2x & (x\geq0)\\ x^2+2x & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)=-1$

Simple G 도함수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 56～57

01 답 $f(x+h)-f(x)$

02 답 미분한다

03 답 nx^{n-1}

04 답 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

05 답 ○

06 답 ×

$f'(x)=\frac{1}{2}\times(x^4)'=\frac{1}{2}\times 4x^3=2x^3$

07 답 ○

08 답 ×

$y'=(x+2)'(x-4)+(x+2)(x-4)'$
$=x-4+x+2=2x-2$

09 답 $f'(x)=0$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{(-3)-(-3)}{h}=0$

10 답 $f'(x)=-1$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{(-x-h)-(-x)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1$

11 답 $f'(x)=4$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{\{4(x+h)+3\}-(4x+3)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{4h}{h}=4$

12 답 $f'(x)=2x+2$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2+2(x+h)\}-(x^2+2x)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+2h+h^2}{h}$
$=\lim_{h\to 0}(2x+2+h)=2x+2$

13 답 $f'(x)=3x^2$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$
$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$

14 답 $y'=4x^3$

15 답 $y'=1$

16 답 $y'=0$

17 답 $y'=2x^9$

18 답 $y'=6$

19 답 $y'=-6x+8$

$y'=-3\times 2x+8=-6x+8$

20 답 $y'=-2x^2+5x-3$

$y'=-\frac{2}{3}\times 3x^2+\frac{5}{2}\times 2x-3=-2x^2+5x-3$

21 답 $y'=8x^3-3x^2+6x$

$y'=2\times 4x^3-3x^2+3\times 2x=8x^3-3x^2+6x$

22 답 $y'=4x-1$

$y'=1\times(2x-1)+x\times 2$
$=2x-1+2x=4x-1$

23 답 $y'=6x+11$

$y'=1\times(3x+5)+(x+2)\times 3$
$=3x+5+3x+6=6x+11$

24 답 $y'=-12x^2+2x+12$

$y'=-2x\times(4x-1)+(-x^2+3)\times 4$
$=-8x^2+2x-4x^2+12$
$=-12x^2+2x+12$

25 답 $y'=4x^3-3x^2+10x-2$

$y'=(2x-1)\times(x^2+2)+(x^2-x+3)\times 2x$
$=2x^3+4x-x^2-2+2x^3-2x^2+6x$
$=4x^3-3x^2+10x-2$

26 답 $y'=-4x^3+12x^2-4x+8$

$y'=(3x^2+2)\times(-x+4)+(x^3+2x)\times(-1)$
$=-3x^3+12x^2-2x+8-x^3-2x$
$=-4x^3+12x^2-4x+8$

27 답 $y'=-10x^4-8x^3+12x+6$

$y'=-6x^2\times(x^2+x)+(-2x^3+6)\times(2x+1)$
$=-6x^4-6x^3-4x^4-2x^3+12x+6$
$=-10x^4-8x^3+12x+6$

28 답 $y'=3x^2+12x+11$

$y'=1\times(x+2)\times(x+3)+(x+1)\times1\times(x+3)$
$+(x+1)\times(x+2)\times1$
$=x^2+5x+6+x^2+4x+3+x^2+3x+2$
$=3x^2+12x+11$

29 답 $y'=16x^3+21x^2+6x$

$y'=1\times(4x+3)\times(x^2+x)+x\times4\times(x^2+x)$
$+x\times(4x+3)\times(2x+1)$
$=4x^3+7x^2+3x+4x^3+4x^2+8x^3+10x^2+3x$
$=16x^3+21x^2+6x$

30 답 $y'=50x-30$

$y'=2\times(-5x+3)\times(-5)$
$=50x-30$

31 답 $y'=3(x^2+3x+2)^2(2x+3)$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 58~63

32 답 ②

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{(t^3+t)-(x^3+x)}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{(t^3-x^3)+(\boxed{t-x})}{t-x} \quad \text{(가)}$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{(t-x)(t^2+tx+x^2)+(t-x)}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}(t^2+\boxed{tx+x^2+1}) \quad \text{(나)}$$
$$=x^2+x^2+x^2+1$$
$$=3x^2+1$$

33 답 ③

$f(x+h)-f(x)=2hx^2-4hx+3h^2+h$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2hx^2-4hx+3h^2+h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h(2x^2-4x+3h+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(2x^2-4x+3h+1)$$
$$=2x^2-4x+1$$

34 답 ②

$f(x)=x^8$에 대하여 $f'(x)=8x^7$이므로
$f'(-1)=-8$
또, $g(x)=-6$에 대하여 $g'(x)=0$이므로
$g'(9)=0$
$\therefore f'(-1)+g'(9)=-8$

35 답 ②

$f'(x)=10x^9$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{5h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\times\frac{3}{5}\right\}$$
$$=f'(x)\times\frac{3}{5}=10x^9\times\frac{3}{5}=6x^9$$

심플 정리

[도함수의 정의]

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=\lim_{☆\to0}\frac{f(x+☆)-f(x)}{☆}$$
$$=\lim_{■\to x}\frac{f(■)-f(x)}{■-x}$$

36 답 ④

$f(x)=-\frac{4}{3}x^3+5x-2$에 대하여
$f'(x)=-4x^2+5$이므로
$f'(-1)=-4\times(-1)^2+5=1$

37 답 ⑤

$f(x)=x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$에 대하여
$f(1)=1+1+1+1+1=5$
또, $f'(x)=12x^{11}+9x^8+6x^5+3x^2$이므로
$f'(1)=12+9+6+3=30$
$\therefore f(1)+f'(1)=5+30=35$

38 답 ②

$f(x)=2x^3+ax^2-x+4$에 대하여
$f'(x)=6x^2+2ax-1$이므로
$f'(1)=6+2a-1=2a+5$
이때, $f'(1)=a$이므로
$2a+5=a \quad \therefore a=-5$

39 답 ③

$f(x)=ax^3+3x^2+bx-4$에 대하여
$f'(x)=3ax^2+6x+b$
$f'(x)=6x^2+cx-2$라 하므로 계수끼리 같아야 한다.
즉, $3a=6$, $6=c$, $b=-2$에서
$a=2$, $b=-2$, $c=6$
$\therefore a+b+c=2+(-2)+6=6$

40 답 ③

$f(x)=\frac{1}{2}x(4x^2-2)$에 대하여

$f'(x)=\frac{1}{2}\times1\times(4x^2-2)+\frac{1}{2}x\times8x$

$=2x^2-1+4x^2=6x^2-1$

$\therefore f'(2)=6\times2^2-1=23$

41 답 ④

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$이다.

$f(x)=(3x^2-2)(x+1)$에 대하여

$f'(x)=6x\times(x+1)+(3x^2-2)\times1$

$=6x^2+6x+3x^2-2$

$=9x^2+6x-2$

$\therefore f'(-1)=9-6-2=1$

42 답 ①

$f(x)=(x-1)^3(2x+3)$에 대하여

$f(1)=0$이므로

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(0)$

$=(0-1)^3\times(0+3)=-3$

또한,

$f'(x)=3(x-1)^2\times(2x+3)+(x-1)^3\times2$

$=(x-1)^2(6x+9+2x-2)$

$=(x-1)^2(8x+7)$

$\therefore f'(2)=1\times(16+7)=23$

$\therefore f'(2)+(f\circ f)(1)=23+(-3)=20$

43 답 ③

$f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)$에 대하여

$f'(x)=1\times(x-3)\times(x-4)+(x-2)\times1\times(x-4)+(x-2)\times(x-3)\times1$

$=(x-3)(x-4)+(x-2)(x-4)+(x-2)(x-3)$

즉, $f'(2)=(-1)\times(-2)=2$, $f'(3)=1\times(-1)=-1$,

$f'(4)=2\times1=2$이므로

$f'(2)+f'(3)+f'(4)=2+(-1)+2=3$

44 답 ④

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2\right\}$

$=2f'(1)$

이때, $f(x)=-x^2+6x+4$에 대하여

$f'(x)=-2x+6$이므로

$f'(1)=-2+6=4$

$\therefore$ (구하는 값)$=2f'(1)=2\times4=8$

45 답 ②

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)\right\}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+2\times\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}$

$=f'(a)+2f'(a)=3f'(a)$

이때, $3f'(a)=9$이므로 $f'(a)=3$

한편, $f(x)=\frac{4}{3}x^3-ax+1$에 대하여 $f'(x)=4x^2-a$이고,

$f'(a)=4a^2-a=3$이므로

$4a^2-a-3=0$, $(4a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{4}$ 또는 $a=1$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 $-\frac{3}{4}$이다.

46 답 ⑤

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}$

$=f'(2)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}f'(2)$

한편, $f(x)=x^3-x^2+x-1$에 대하여

$f'(x)=3x^2-2x+1$이므로

$f'(2)=12-4+1=9$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{9}{4}$

47 답 ⑤

$f(x)=x^{12}+5x^2$으로 놓으면 $f(-1)=6$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{x^{12}+5x^2-6}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=f'(-1)$

$f'(x)=12x^{11}+10x$이므로

$f'(-1)=-12-10=-22$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{x^{12}+5x^2-6}{x+1}=-22$

48 답 ②

$f(x)=x^n+2x^2$으로 놓으면 $f(1)=3$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^n+2x^2-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=8$

이때, $f'(x)=nx^{n-1}+4x$이므로

$n+4=8\qquad\therefore n=4$

49 답 ①

$f(x)=x^2+ax+b$에 대하여

$f(2)=4+2a+b=5$이므로

$2a+b=1$ ⋯ ㉠

$f'(x)=2x+a$에서

$f'(-1)=-2+a=3$이므로 $a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$10+b=1 \quad \therefore b=-9$

따라서 $f(x)=x^2+5x-9$이므로

$f(-2)=4-10-9=-15$

50 답 ③

$f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여

$f(0)=c=-4$

이때, $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=2a+b=7$ ⋯ ㉠

$f'(-1)=-2a+b=-5$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2b=2 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$2a+1=7 \quad \therefore a=3$

$\therefore a+b+c=3+1+(-4)=0$

51 답 ③

$f(x)=ax^3+x^2+bx+c$에 대하여

$f(0)=c=-\frac{5}{2}$

이때, $f'(x)=3ax^2+2x+b$이므로

$f'(0)=b=3$ ⋯ ㉠

$f'(-2)=12a-4+b=5$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$12a=6 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^3+x^2+3x-\frac{5}{2}$이므로

$f(-1)=-\frac{1}{2}+1-3-\frac{5}{2}=-5$

52 답 ③

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$에서 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이어야 한다.

$\therefore f(1)=0$ ⋯ ㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \ (\because ㉠)$$
$$=f'(1)=2$$

$f(x)=x^3+ax+b$에서

$f(1)=1+a+b=0$이므로

$a+b=-1$ ⋯ ㉡

$f'(x)=3x^2+a$에서 $f'(1)=3+a=2$이므로

$a=-1$

$a=-1$을 ㉡에 대입하면 $b=0$

따라서 $f(x)=x^3-x$이므로

$f(-1)=-1-(-1)=0$

53 답 ①

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)로 놓으면

$f(0)=c=1$

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-7}{x+2}=1$에서 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이므로 $\lim_{x\to-2}\{f(x)-7\}=0$이어야 한다.

$\therefore f(-2)=7$ ⋯ ㉠

즉, $f(-2)=-8+4a-2b+1=7$에서 $2a-b=7$ ⋯ ㉡

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-7}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} \ (\because ㉠)$$
$$=f'(-2)=1$$

이때, $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(-2)=12-4a+b=1$에서

$4a-b=11$ ⋯ ㉢

㉢−㉡을 하면

$2a=4 \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$4-b=7 \quad \therefore b=-3$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-3x+1$이므로

$f(1)=1+2-3+1=1$

54 답 ①

함수 $f(x)=x^3+mx^2-x$의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(2)=3$

$f'(x)=3x^2+2mx-1$에서

$f'(2)=12+4m-1=3$

$\therefore m=-2$

55 답 ⑤

함수 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로 $f'(1)=-2$

$f'(x)=2x+a$에서

$f'(1)=2+a=-2$이므로 $a=-4$

또한, 점 $(1, 3)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=3$에서

$1+a+b=3 \quad \therefore a+b=2$ ⋯ ㉠

$a=-4$를 ㉠에 대입하면

$-4+b=2 \quad \therefore b=6$

$\therefore b-a=6-(-4)=10$

56 답 ④

함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$f(0)=c=3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 6)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f(1)=6$, $f'(1)=2$

$f(1)=a+b+c=a+b+3=6$에서

$a+b=3$ ⋯ ㉠

$f'(x)=2ax+b$에서

$f'(1)=2a+b=2$ ⋯ ㉡

㉡－㉠을 하면 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-1+b=3 \quad \therefore b=4$

따라서 $f(x)=-x^2+4x+3$이므로

$f(2)=-4+8+3=7$

57 답 ③

다항식 x^3+ax^2+bx+1이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3+ax^2+bx+1=(x-1)^2Q(x)$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b+1=0 \quad \therefore a+b=-2$ ⋯ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+2ax+b=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$ ⋯ ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3+2a+b=0 \quad \therefore 2a+b=-3$ ⋯ ㉣

㉣－㉡을 하면 $a=-1$

$a=-1$을 ㉡에 대입하면

$-1+b=-2 \quad \therefore b=-1$

$\therefore ab=(-1)\times(-1)=1$

58 답 ①

다항식 x^5+ax^3+b를 $(x-2)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^5+ax^3+b=(x-2)^2Q(x)-4x$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$32+8a+b=-8 \quad \therefore 8a+b=-40$ ⋯ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4+3ax^2=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)-4$ ⋯ ㉢

㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면

$80+12a=-4 \quad \therefore a=-7$

$a=-7$을 ㉡에 대입하면

$-56+b=-40 \quad \therefore b=16$

$\therefore a+b=-7+16=9$

59 답 ②

다항식 $x^{10}+x^5-3$을 $(x+1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)=ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하면

$x^{10}+x^5-3=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-1-3=-a+b \quad \therefore a-b=3$ ⋯ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+5x^4=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$ ⋯ ㉢

㉢의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-10+5=a \quad \therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉡에 대입하면

$-5-b=3 \quad \therefore b=-8$

따라서 $R(x)=-5x-8$이므로

$R(-2)=10-8=2$

심플 정리

[다항식의 나눗셈]

(1) 다항식의 나눗셈의 몫과 나머지

다항식 A를 다항식 B로 나눌 때 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$

(단, R는 상수이거나 (R의 차수)<(B의 차수))

(2) 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

60 답 ①

$g(x)=(x^2+x-6)f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(2x+1)\times f(x)+(x^2+x-6)\times f'(x)$

위 식에 $x=-1$을 대입하면

$g'(-1)=-f(-1)-6f'(-1)$

$=-4-6\times 2$ ($\because f(-1)=4$, $f'(-1)=2$)

$=-16$

심플 정리

[항등식]

(1) $ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식이면

$a=a'$, $b=b'$

(2) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면

$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

61 답 ⑤

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=-1$에서 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이다.

$\therefore f(1)=2$ ⋯ ㉠

즉,

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ($\because$ ㉠)

$=f'(1)=-1$ ⋯ ㉡

또한, $\lim_{x\to1}\frac{g(x)+2}{x-1}=3$에서 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}\{g(x)+2\}=0$이다.

$\therefore g(1)=-2$ ⋯ ㉢

즉,

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ ($\because$ ㉢)

$=g'(1)=3$ ⋯ ㉣

함수 $y=f(x)g(x)$를 x에 대하여 미분하면

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

따라서 $x=1$에서의 미분계수는

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=-1\times(-2)+2\times3$ ($\because$ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣)

$=8$

62 답 ②

점 $(3, -4)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(3)=-4$ ⋯ ㉠

$f(x)=a(x-3)^2-4$에 대하여 $f'(x)=2a(x-3)$이므로

$f'(3)=0$ ⋯ ㉡

$h(x)=f(x)g(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

여기에 $x=3$을 대입하면

$h'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)$

$=0\times g(3)+(-4)\times g'(3)$($\because$ ㉠, ㉡)

$=4$

$-4g'(3)=4 \quad \therefore g'(3)=-1$

63 답 ③

$f(x)=-x^3+4xf'(1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-3x^2+4f'(1)$

위 식에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=-3+4f'(1) \quad \therefore f'(1)=1$

따라서 $f(x)=-x^3+4x$이므로

$f(1)=-1+4=3$

64 답 ②

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2xf'(-1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-2x+2f'(-1)$

위 식에 $x=-1$을 대입하면

$f'(-1)=1+2+2f'(-1)$

$\therefore f'(-1)=-3$

따라서 $f'(x)=x^2-2x-6$이므로

$f'(0)=-6$

65 답 ②

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)라 하면

$f(0)=-2$이므로

$c=-2$

$f(x)=ax^2+bx-2$ ⋯ ㉠에서

$f'(x)=2ax+b$ ⋯ ㉡

$(x-1)f'(x)-2f(x)-2=0$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(x-1)(2ax+b)-2(ax^2+bx-2)-2=0$

$2ax^2+bx-2ax-b-2ax^2-2bx+4-2=0$

$(2a+b)x+b-2=0$ ⋯ ㉢

㉢이 x에 대한 항등식이므로

$2a+b=0$, $b=2$

$b=2$를 $2a+b=0$에 대입하면

$2a+2=0 \quad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+2x-2$이므로

$f(2)=-4+4-2=-2$

66 답 ①

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ⋯ ㉠에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ ⋯ ㉡

$xf'(x)-3f(x)=x^2+3x$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$x(3x^2+2ax+b)-3(x^3+ax^2+bx+c)=x^2+3x$

$3x^3+2ax^2+bx-3x^3-3ax^2-3bx-3c=x^2+3x$

$-ax^2-2bx-3c=x^2+3x$ ⋯ ㉢

㉢이 x에 대한 항등식이므로

$-a=1$, $-2b=3$, $-3c=0$

$\therefore a=-1$, $b=-\frac{3}{2}$, $c=0$

$\therefore a+b-c=-1+\left(-\frac{3}{2}\right)-0=-\frac{5}{2}$

67 답 3

다항함수 $f(x)$의 최고차항의 차수를 n (단, n은 자연수)이라 하면 $f'(x)$의 최고차항의 차수는 $n-1$이다.

$f(x)f'(x)$의 최고차항의 차수는 $n+(n-1)=2n-1$이고, 주어진 등식의 우변의 최고차항의 차수 3과 같아야 하므로

$2n-1=3 \quad \therefore n=2$

즉, $f(x)$는 이차함수이다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수) ⋯ ㉠라 하면

$f'(x)=2x+a$ ⋯ ㉡

$f(x)f'(x)=2x^3+6x^2-4x-8$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(x^2+ax+b)(2x+a)=2x^3+6x^2-4x-8$

$2x^3+ax^2+2ax^2+a^2x+2bx+ab=2x^3+6x^2-4x-8$

$2x^3+3ax^2+(a^2+2b)x+ab=2x^3+6x^2-4x-8$ ⋯ ㉢

Ⅱ G

㉢이 x에 대한 항등식이므로

$3a=6$, $a^2+2b=-4$, $ab=-8$

$3a=6$에서 $a=2$

$a=2$를 $a^2+2b=-4$에 대입하면

$4+2b=-4 \quad \therefore b=-4$

즉, $f(x)=x^2+2x-4$이므로

$f(1)=1+2-4=-1$

또, $f'(x)=2x+2$이므로

$f'(1)=2+2=4$

$\therefore f(1)+f'(1)=-1+4=3$

68 답 ②

조건 (가)에 의해 $f(x)$는 $(x+1)^2$을 인수로 갖는다.

즉, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x+1)^2(x+a)$ (단, a는 상수)

로 놓자.

조건 (나)에서 $f(2)=3$이므로

$f(2)=9(2+a)=3 \quad \therefore a=-\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=(x+1)^2\left(x-\frac{5}{3}\right)$이므로

$f(5)=36\times\frac{10}{3}=120$

69 답 $\frac{4}{3}$

조건 (가), (나)에서 $f(-2)=f'(-2)=0$이므로 $f(x)$는 $(x+2)^2$을 인수로 갖는다.

또한, 조건 (가)에서 $f(3)=0$이므로 $f(x)$는 $x-3$을 인수로 갖는다.

즉, $f(x)$가 삼차함수이므로

$f(x)=a(x+2)^2(x-3)$ (단, $a\neq0$인 상수)

으로 놓자.

$$\begin{aligned}f'(x)&=a\times2(x+2)(x-3)+a(x+2)^2\times1\\&=2a(x+2)(x-3)+a(x+2)^2\\&=a(x+2)\{2(x-3)+(x+2)\}\\&=a(x+2)(3x-4)\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $f'(k)=0$이므로

$f'(k)=a(k+2)(3k-4)=0$

여기서 $k\neq-2$, $a\neq0$이므로

$3k-4=0 \quad \therefore k=\frac{4}{3}$

연습 문제 [F~G] [기출＋기출 변형] 문제편 pp. 64~65

01 답 ①

x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{(16-2+1)-(-2+1+1)}{3}$$
$$=\frac{15-0}{3}=5 \cdots ㉠$$

함수 $f(x)=2x^3-x+1$에 대하여 $f'(x)=6x^2-1$

여기에 $x=k$를 대입하면

$f'(k)=6k^2-1 \cdots ㉡$

㉠=㉡이므로

$6k^2-1=5$, $k^2=1 \qquad \therefore k=1\ (\because k>0)$

> 심플 정리
>
> **[평균변화율과 미분계수]**
>
> (1) 평균변화율
> 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
> (2) 미분계수
> 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는
> $$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
> $$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

02 답 ③

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=1$

$f(x)=x^2-ax+3$에 대하여 $f'(x)=2x-a$이므로

$f'(2)=4-a=1 \quad \therefore a=3$

03 답 ②

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(-1+6h)-f(-1+2h)}{3h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+6h)-f(-1)+f(-1)-f(-1+2h)}{3h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{f(-1+6h)-f(-1)\}-\{f(-1+2h)\}-f(-1)\}}{3h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(-1+6h)-f(-1)}{6h}\times\frac{6}{3}\right\}\\&\qquad-\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{2h}\times\frac{2}{3}\right\}\\&=2f'(-1)-\frac{2}{3}f'(-1)=\frac{4}{3}f'(-1)\end{aligned}$$

한편, $f(x)=-\frac{4}{3}x^3+x^2-9x$에 대하여

$f'(x)=-4x^2+2x-9$이므로

$f'(-1)=-4-2-9=-15$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(-1+6h)-f(-1+2h)}{3h}$$
$$=\frac{4}{3}f'(-1)=\frac{4}{3}\times(-15)=-20$$

04 답 ③

함수 $f(x)=x^3-3x^2-2x+1$일 때,

$\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x-2}$의 값은?

$\lim_{■\to▲}\frac{f(■)-f(▲)}{■-▲}$ 꼴로 바꾸면 미분계수를 구할 수 있어.

① 84 ② 86 ③ 88 ④ 90 ⑤ 92

1st 분자의 꼴을 잘 살펴봐. $f(x^2)-f(4)$이니까 분모는 x^2-4가 되어야겠지?

$\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x^2)-f(4)}{(x-2)(x+2)}\times(x+2)\right\}$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times(x+2)\right\}$

$\lim_{■\to▲}\frac{f(■)-f(▲)}{■-▲}$ 꼴에 맞추기 위해 $x-2$를 x^2-4로 바꾼 거야.

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\lim_{x\to2}(x+2)$

$=4f'(4)$

2nd 이제 $f(x)$에서 $f'(x)$를 구해서 $f'(4)$의 값을 찾으면 돼.

$f(x)=x^3-3x^2-2x+1$에 대하여

$f'(x)=3x^2-6x-2$이므로 $f'(4)=48-24-2=22$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x-2}=4f'(4)=4\times22=88$

05 답 ②

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$ 조건 (가)에서 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 알 수 있어.

(나) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$ 조건 (나)에서는 $f(0)$, $f'(0)$의 값을 알려 주고 있어.

$f(2)$의 값은?

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

1st 조건 (가)에서 다항함수 $f(x)$의 차수가 2가 아닐 때, 수렴값 2가 나오는지 살펴보자.

조건 (가)에서 다항함수 $f(x)$의 최고차항의 차수가 2보다 크면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\infty$가 되고, 2보다 작으면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$이 된다.

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한에서 분자의 차수와 분모의 차수가 같으면 극한값은 최고차항의 계수의 비야.

즉, 다항함수 $f(x)$의 차수는 2로 분모와 같아야 하고, 최고차항의 계수는 2이어야 한다.

즉, $f(x)=2x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수) ⋯ ㉠

2nd 조건 (나)에서 미정계수의 결정에 의해 $f(0)$의 값을, 미분계수의 정의에 의해 $f'(0)$의 값을 알 수 있지?

조건 (나)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$이고

$\lim_{x\to0}x=0$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이어야 한다.

$\therefore f(0)=0$

즉, ㉠에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=b=0$

또, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$이므로

$f'(0)=3$

즉, $f(x)=2x^2+ax$에 대하여

$f'(x)=4x+a$이므로 $f'(0)=a=3$

따라서 $f(x)=2x^2+3x$이므로

$f(2)=8+6=14$

06 답 ②

함수 $f(x)=x^3+ax^2+b$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ -1)$을 지나므로 $f(2)=-1$

$8+4a+b=-1 \quad \therefore 4a+b=-9$ ⋯ ㉠

또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(2)=4$

$f(x)=x^3+ax^2+b$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$f'(2)=12+4a=4 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-8+b=-9 \quad \therefore b=-1$

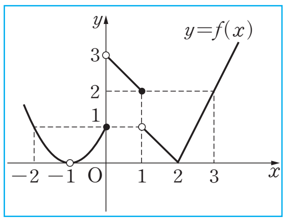
즉, $f(x)=x^3-2x^2-1$이고, $f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f(1)=1-2-1=-2$, $f'(1)=3-4=-1$

$\therefore f(1)+f'(1)=-2+(-1)=-3$

07 답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 [보기] 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



주어진 그림에서 그래프가 끊어진 부분과 뾰족한 부분이 불연속 또는 미분가능하지 않은 점을 나타내주고 있어.

[보기]

ㄱ. 구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 불연속인 점이 3개이다.

ㄴ. 구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 미분가능하지 않은 점이 4개이다.

ㄷ. 도함수 $f'(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 그래프에서 끊어진 부분은 불연속인 점을, 불연속인 점과 뾰족한 점은 미분가능하지 않은 점을 나타내고 있어.

ㄱ. 구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 불연속이므로 불연속인 점은 3개이다. (참)

Ⅱ F~G 연습

ㄴ. 불연속이면 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$는

$x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 미분가능하지 않다.

미분가능하면 연속이기 때문에 미분가능은 연속이기 위한 충분조건이야. 그리고 불연속은 미분가능하지 않기 위한 충분조건이지.

또한, $x=2$인 점에서 그래프가 꺾여 있으므로 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점은 4개이다. (참)

2nd 연속이 되기 위해서는 먼저 함숫값이 정의되어 있어야 해.

ㄷ. $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 $f'(x)$는 $x=2$에서 정의되지 않는다.

즉, $f'(x)$는 $x=2$에서 연속이 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

08

답 ④

$f(x)=x^3+2x^2+x$에 대하여

$f'(x)=3x^2+4x+1$이므로

$f'(1)=3+4+1=8$

09

답 ④

$f(1)=2-1+1=2$, $g(1)=1+1=2$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-g(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-2-g(1-h)+2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)-g(1-h)+g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\left\{\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\times(-1)\right\}$$
$$=f'(1)+g'(1)$$

한편, $f(x)=2x^2-x+1$에 대하여 $f'(x)=4x-1$이므로

$f'(1)=3$

$g(x)=x^3+x$에 대하여 $g'(x)=3x^2+1$이므로 $g'(1)=4$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-g(1-h)}{h}=f'(1)+g'(1)=3+4=7$

10

답 ②

$f(x)=3(x-2)^2(x+4)$에 대하여

$$\begin{aligned}f'(x)&=3\times2(x-2)(x+4)+3(x-2)^2\times1\\&=6(x-2)(x+4)+3(x-2)^2\\&=(x-2)(6x+24+3x-6)\\&=(x-2)(9x+18)\\&=9(x-2)(x+2)\end{aligned}$$

이므로

$f'(a)=9(a-2)(a+2)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=-2$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 -4이다.

11

답 ④

$(x^2+3)f(x)=x^6+2x^4+9$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+(x^2+3)f'(x)=6x^5+8x^3$

위 식에 $x=-1$을 대입하면

$-2f(-1)+4f'(-1)=-14$ … ㉠

한편, $(x^2+3)f(x)=x^6+2x^4+9$에 $x=-1$을 대입하면

$4f(-1)=12$ $\quad\therefore f(-1)=3$

따라서 $f(-1)=3$을 ㉠에 대입하면

$-2\times3+4f'(-1)=-14$ $\quad\therefore f'(-1)=-2$

12

답 ②

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=6$에서 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=0$

$\therefore f(2)=0$ … ㉠

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\ (\because ㉠)$$
$$=f'(2)=6 \cdots ㉡$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)-f(1-2h)+f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times(-2)\right\}$$
$$=f'(1)+2f'(1)=3f'(1)=3$$

$\therefore f'(1)=1$ … ㉢

이때, $f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$f'(2)=12+4a+b=6$ ($\because$ ㉡)

$\therefore 4a+b=-6$ … ㉣

$f'(1)=3+2a+b=1$ ($\because$ ㉢)

$\therefore 2a+b=-2$ … ㉤

㉣−㉤을 하면

$2a=-4$ $\quad\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉤에 대입하면

$-4+b=-2$ $\quad\therefore b=2$

따라서 $f'(x)=3x^2-4x+2$이므로

$f'(-2)=12+8+2=22$

13

답 ①

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$f(-2)=f(-1)=f(1)$을 만족시킬 때, $f'(0)$의 값은?

$f(-2)=f(-1)=f(1)=k$로 놓으면 $f(-2)-k=0$, $f(-1)-k=0$, $f(1)-k=0$이 성립하지? 이것으로 함수 $f(x)$의 식을 유도할 수 있어.

① -1 ② 0 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

1st 다항함수 $g(x)$에 대하여 $g(\alpha)=0$이면 $g(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가지지?

$f(-2)=f(-1)=f(1)=k$ (단, k는 상수)라 하면

$f(-2)-k=0$

$f(-1)-k=0$

$f(1)-k=0$

즉, 새로운 함수 $f(x)-k$는 $x+2$, $x+1$, $x-1$을 인수로 갖는 삼차함수이다.

$\therefore f(x)-k=(x+2)(x+1)(x-1)$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 상수 k를 뺀 새로운 함수 $f(x)-k$도 최고차항의 계수가 1인 삼차함수가 되는 거야.

2nd 미분가능한 함수 f, g, h에 대하여 $(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$이 성립해.

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x)&=1\times(x+1)\times(x-1)+(x+2)\times1\times(x-1)\\ &\qquad+(x+2)\times(x+1)\times1\\ &=(x+1)(x-1)+(x+2)(x-1)\\ &\qquad+(x+2)(x+1) \end{aligned}$$

$\therefore f'(0)=-1+(-2)+2=-1$

심플 정리

[인수정리]

x에 대한 다항식 $f(x)$에 대하여

(1) $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

(2) $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

즉, $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.

14 답 3

$f(x)=-2x^2+5x$ ⋯ ㉠를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-4x+5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 $(x+1)f'(x)+af(x)=-9x+b$에 대입하면

$(x+1)(-4x+5)+a(-2x^2+5x)=-9x+b$

$-4x^2+x+5-2ax^2+5ax=-9x+b$

$(-2a-4)x^2+(5a+1)x+5=-9x+b$

위 식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 x에 대한 항등식이다. 항등식의 성질에 의해

$-2a-4=0$, $5a+1=-9$, $5=b$

$\therefore a=-2$, $b=5$

$\therefore a+b=-2+5=3$

15 답 6

함수 $f(x)$는 $x=p$에서 미분가능하므로 $f(x)$는 $x=p$에서 연속이다.

$f(p)=\lim_{x\to p+}\left(-\frac{1}{3}x^3\right)=\lim_{x\to p-}(x^2-3x+q)$에서

$-\frac{1}{3}p^3=p^2-3p+q$

$\therefore q=-\frac{1}{3}p^3-p^2+3p$ ⋯ ㉠ ⋯ Ⅰ

한편,

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to p+}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\\ &=\lim_{x\to p+}\frac{-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}p^3}{x-p}\\ &=-\frac{1}{3}\lim_{x\to p+}\frac{x^3-p^3}{x-p}\\ &=-\frac{1}{3}\lim_{x\to p+}\frac{(x-p)(x^2+px+p^2)}{x-p}\\ &=-\frac{1}{3}\lim_{x\to p+}(x^2+px+p^2)\\ &=-p^2 \cdots ㉡ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to p-}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\\ &=\lim_{x\to p-}\frac{x^2-3x+q+\frac{1}{3}p^3}{x-p}\\ &=\lim_{x\to p-}\frac{x^2-3x-\frac{1}{3}p^3-p^2+3p+\frac{1}{3}p^3}{x-p}\ (\because ㉠)\\ &=\lim_{x\to p-}\frac{x^2-p^2-3(x-p)}{x-p}\\ &=\lim_{x\to p-}\frac{(x-p)(x+p)-3(x-p)}{x-p}\\ &=\lim_{x\to p-}\frac{(x-p)(x+p-3)}{x-p}\\ &=\lim_{x\to p-}(x+p-3)\\ &=2p-3 \cdots ㉢ \end{aligned}$$

함수 $f(x)$가 $x=p$에서 미분가능하므로 ㉡=㉢이 성립해야 한다.

$-p^2=2p-3$, $p^2+2p-3=0$

$(p-1)(p+3)=0$ $\quad\therefore p=1\ (\because p>0)$ ⋯ Ⅱ

$p=1$을 ㉠에 대입하면

$q=-\frac{1}{3}-1+3=\frac{5}{3}$

$\therefore p+3q=1+5=6$ ⋯ Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	$f(x)$는 $x=p$에서 연속임을 이용하여 p, q 사이의 관계식을 구한다.	30%
Ⅱ	$f(x)$가 $x=p$에서 미분가능함을 이용하여 p의 값을 구한다.	50%
Ⅲ	q의 값을 구하고, $p+3q$의 값을 구한다.	20%

Ⅱ F~G 연습

Simple H 접선의 방정식

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 66～67

01 답 $f'(a)$

02 답 $f(1)$, $f'(1)$

03 답 $f'(c)$

04 답 ×

05 답 ×

곡선 $y=x^2$에 대하여 $y'=2x$이므로 기울기가 1일 때의 x의 값을 구하면

$2x=1 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$

따라서 $x=\frac{1}{2}$인 점에서 접한다.

06 답 ○

07 답 $y=5x-1$

$f(x)=x^2+3x$로 놓으면 $f'(x)=2x+3$

$\therefore f'(1)=5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-4=5(x-1) \quad \therefore y=5x-1$

08 답 $y=5x+5$

$f(x)=x^3-x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2x$

$\therefore f'(-1)=5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=5(x+1) \quad \therefore y=5x+5$

09 답 $y=x-3$

$f(x)=-2x^3+x-3$으로 놓으면

$f'(x)=-6x^2+1$

$\therefore f'(0)=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-(-3)=1\times(x-0) \quad \therefore y=x-3$

10 답 $y=\frac{1}{6}x-\frac{11}{2}$

$f(x)=-x^2+4$로 놓으면 $f'(x)=-2x$

$\therefore f'(3)=-6$

점 $(3,\ -5)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y+5=\frac{1}{6}(x-3) \quad \therefore y=\frac{1}{6}x-\frac{11}{2}$

11 답 $y=-\frac{1}{4}x-1$

$f(x)=\frac{2}{3}x^3+4x-1$로 놓으면 $f'(x)=2x^2+4$

$\therefore f'(0)=4$

점 $(0,\ -1)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=-\frac{1}{4}(x-0) \quad \therefore y=-\frac{1}{4}x-1$

12 답 $y=3x-2$

$f(x)=2x^2-x$로 놓으면 $f'(x)=4x-1$

접점의 좌표를 $(a,\ 2a^2-a)$라 하자.

접선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=4a-1=3 \quad \therefore a=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-1=3(x-1) \quad \therefore y=3x-2$

13 답 $y=-x+\frac{4}{3}$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=x^2-2x$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{3}a^3-a^2+1\right)$이라 하자.

접선의 기울기가 -1이므로

$f'(a)=a^2-2a=-1$

$(a-1)^2=0 \quad \therefore a=1$

즉, 접점의 좌표는 $\left(1,\ \frac{1}{3}\right)$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-\frac{1}{3}=-(x-1) \quad \therefore y=-x+\frac{4}{3}$

14 답 $y=-6x-5$

$f(x)=3x^2-2$로 놓으면 $f'(x)=6x$

접점의 좌표를 $(a,\ 3a^2-2)$라 하자.

구하는 직선과 직선 $y=-6x+4$가 평행하므로 구하는 직선의 기울기는 -6이다.

$f'(a)=6a=-6 \quad \therefore a=-1$

즉, 접점의 좌표는 $(-1,\ 1)$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-6(x+1) \quad \therefore y=-6x-5$

15 답 $y=3x-\frac{1}{2}$

$f(x)=-2x^2+5x-1$로 놓으면 $f'(x)=-4x+5$

접점의 좌표를 $(a,\ -2a^2+5a-1)$이라 하자.

구하는 직선과 직선 $y=3x+2$가 평행하므로 구하는 직선의 기울기는 3이다.

$f'(a)=-4a+5=3 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

즉, 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-1=3\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore y=3x-\frac{1}{2}$

16 답 $y=-5x-2$ 또는 $y=3x-2$

$f(x)=x^2-x+2$로 놓으면 $f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 (a, a^2-a+2)라 하자.

$f'(a)=2a-1$이므로 점 (a, a^2-a+2)에서의 접선의 방정식은

$y=(2a-1)(x-a)+a^2-a+2$

이 접선이 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=-2a^2+a+a^2-a+2$

$a^2=4 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때,

기울기는 $f'(-2)=2\times(-2)-1=-5$이고

접점의 좌표는 $(-2, 8)$이므로

구하는 접선의 방정식은

$y-8=-5(x+2) \quad \therefore y=-5x-2$

(ii) $a=2$일 때,

기울기는 $f'(2)=2\times2-1=3$이고

접점의 좌표는 $(2, 4)$이므로

구하는 접선의 방정식은

$y-4=3(x-2) \quad \therefore y=3x-2$

17 답 $y=11x+8$ 또는 $y=3x$

$f(x)=-2x^2+3x$로 놓으면 $f'(x)=-4x+3$

접점의 좌표를 $(a, -2a^2+3a)$라 하자.

$f'(a)=-4a+3$이므로 점 $(a, -2a^2+3a)$에서의 접선의 방정식은

$y=(-4a+3)(x-a)-2a^2+3a$

이 접선이 점 $(-1, -3)$을 지나므로

$-3=(-4a+3)(-1-a)-2a^2+3a$

$-3=4a+4a^2-3-3a-2a^2+3a$

$2a^2+4a=0,\ 2a(a+2)=0 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=0$

(i) $a=-2$일 때,

기울기는 $f'(-2)=11$이고

접점의 좌표는 $(-2, -14)$이므로

구하는 접선의 방정식은

$y+14=11(x+2) \quad \therefore y=11x+8$

(ii) $a=0$일 때,

기울기는 $f'(0)=3$이고

접점의 좌표는 $(0, 0)$이므로

구하는 접선의 방정식은 $y=3x$

18 답 -1

함수 $f(x)=x^2+2x$는 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 0)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(0)=0$이므로 롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 -2와 0 사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f'(x)=2x+2$이므로

$f'(c)=2c+2=0 \quad \therefore c=-1$

19 답 $\frac{1}{2}$

함수 $f(x)=-x^2+3x+2$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해 $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$인 c가 0과 1 사이에 적어도 하나 존재한다.

이때, $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=4-2=2$이고

$f'(x)=-2x+3$에서 $f'(c)=-2c+3$이므로

$-2c+3=2 \quad \therefore c=\frac{1}{2}$

20 답 -1

함수 $f(x)=x^3$은 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해 $\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)$인 c가 -2와 1 사이에 적어도 하나 존재한다.

이때, $\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{1-(-8)}{3}=3$이고

$f'(x)=3x^2$에서 $f'(c)=3c^2$이므로

$3c^2=3,\ c^2=1$

$\therefore c=-1\ (\because -2<c<1)$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 68~73

21 답 ③

$f(x)=-2x^2+x-3$으로 놓으면

$f'(x)=-4x+1$

$\therefore f'(1)=-3$

점 $(1, -4)$에서의 접선의 방정식은

$y+4=-3(x-1)$

$\therefore y=-3x-1$

따라서 $a=-3$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=(-3)^2+(-1)^2=10$

Ⅱ H

22 답 ①

$f(x)=x^3-3x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$

$\therefore f'(-1)=9$

점 $(-1, -3)$에서의 접선의 방정식은

$y+3=9(x+1)$ $\quad\therefore y=9x+6$

따라서 구하는 접선의 y절편은 6이다.

23 답 ④

$f(x)=3x^2-5x+k+2$로 놓으면 $f'(x)=6x-5$

$\therefore f'(1)=1$

점 $(1, k)$에서의 접선의 방정식은

$y-k=1\times(x-1)$

$\therefore y=x+k-1$

이 접선이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$k-1=0$ $\quad\therefore k=1$

24 답 ⑤

점 $(2, -1)$이 곡선 $y=x^3+ax+b$ 위의 점이므로

$-1=8+2a+b$

$\therefore 2a+b=-9 \cdots ㉠$

$f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+a$

점 $(2, -1)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(2)=12+a=3$ $\quad\therefore a=-9$

$a=-9$를 ㉠에 대입하면

$-18+b=-9$ $\quad\therefore b=9$

$\therefore b-a=9-(-9)=18$

25 답 ①

$f(x)=-x^3+2x-6$으로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+2$

두 점 $(-1, -7)$, $(0, -6)$에서의 접선의 기울기를 각각 구하면

$f'(-1)=-1$, $f'(0)=2$

점 $(-1, -7)$에서의 접선 l의 방정식은

$y+7=-(x+1)$ $\quad\therefore y=-x-8 \cdots ㉠$

점 $(0, -6)$에서의 접선 m의 방정식은

$y+6=2x$ $\quad\therefore y=2x-6 \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하면

$-x-8=2x-6$, $3x=-2$ $\quad\therefore x=-\frac{2}{3}$

$x=-\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{2}{3}-8=-\frac{22}{3}$

따라서 두 직선 l, m의 교점의 y좌표는 $-\frac{22}{3}$이다.

26 답 ①

점 $(-2, 3)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-2)=3 \cdots ㉠$

점 $(-2, 3)$에서의 접선의 방정식이 $y=5x+13$이므로

점 $(-2, 3)$에서의 접선의 기울기가 5이다.

$\therefore f'(-2)=5 \cdots ㉡$

$g(x)=xf(x)$에 $x=-2$를 대입하면

$g(-2)=-2f(-2)$

$=-2\times3$ ($\because$ ㉠)

$=-6$

$g(x)=xf(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$

여기에 $x=-2$를 대입하면

$g'(-2)=f(-2)-2f'(-2)$

$=3-2\times5$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=-7$

따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 -7이고,

점 $(-2, -6)$을 지나므로

$y+6=-7(x+2)$

$\therefore y=-7x-20$

27 답 ④

$g(x)=-x^3+3x^2-4x$로 놓으면

$g'(x)=-3x^2+6x-4$

접점의 좌표를 $(a, g(a))$라 하자.

접선의 기울기가 -1이므로

$g'(a)=-3a^2+6a-4=-1$

$-3a^2+6a-3=0$

$-3(a-1)^2=0$ $\quad\therefore a=1$

즉, $g(a)=g(1)=-1+3-4=-2$이므로

접점의 좌표는 $(1, -2)$이다.

기울기가 -1이고 점 $(1, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x-1$

따라서 $f(x)=-x-1$이므로

$f(-1)=1-1=0$

28 답 ②

$f(x)=x^3-2x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t+1)이라 하자.

두 접선의 기울기가 모두 1이므로

$f'(t)=3t^2-2=1$

$t^2=1$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(-1, 2)$ 또는 $(1, 0)$이다.

(i) 기울기가 1이고 점 $(-1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=x+1 \quad \therefore y=x+3$

(ii) 기울기가 1이고, 점 $(1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=x-1$

따라서 $a=3$, $b=-1$ 또는 $a=-1$, $b=3$이므로

$a+b=3+(-1)=2$

29 답 ①

두 점 $A(1, 3)$, $B(2, 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{0-3}{2-1}=-3$

$f(x)=-x^2+3x$로 놓으면 $f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t)$라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+3$이므로

$-2t+3=-3 \quad \therefore t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3, 0)$이고, 접선의 기울기가 -3이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=-3(x-3) \quad \therefore y=-3x+9$

30 답 ⑤

$f(x)=2x^2+ax+b$로 놓으면 $f'(x)=4x+a$

이 곡선이 점 $(1, 3)$을 지나므로 $f(1)=3$

$2+a+b=3 \quad \therefore a+b=1$ ⋯ ㉠

또, 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(1)=-1$

$4+a=-1 \quad \therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면

$-5+b=1 \quad \therefore b=6$

$\therefore a-b=-5-6=-11$

31 답 ③

곡선 $y=-x^2+ax-1$에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식을 구하자.

$f(x)=-x^2+ax-1$로 놓으면 $f'(x)=-2x+a$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+at-1)$이라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+a$이므로 접선의 방정식은

$y+t^2-at+1=(-2t+a)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+a)x+t^2-1$ ⋯ ㉠

㉠이 직선 $y=3x+8$과 일치해야 하므로

$-2t+a=3$ ⋯ ㉡, $t^2-1=8$

$t^2-1=8$에서

$t^2=9 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=3$

$t=-3$을 ㉡에 대입하면 $a=-3$

$t=3$을 ㉡에 대입하면 $a=9$

따라서 양수 a의 값은 9이다.

32 답 -2

$f(x)=2x^3-4x$로 놓으면 $f'(x)=6x^2-4$

접점의 좌표를 $(a, 2a^3-4a)$라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=6a^2-4$이고, 접선의 기울기가 2이므로

$6a^2-4=2$

$a^2=1 \quad \therefore a=-1$ 또는 $a=1$

$a=-1$일 때, 접점의 좌표는 $(-1, 2)$

$a=1$일 때, 접점의 좌표는 $(1, -2)$

즉, 접점의 좌표는 $A(-1, 2)$, $B(1, -2)$ 또는 $A(1, -2)$, $B(-1, 2)$이므로

직선 AB의 기울기는 $\frac{-2-2}{1-(-1)}=-2$이다.

33 답 ⑤

$f(x)=-x^3+2$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2$

점 $(-2, 10)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=-12$

또, $g(x)=x^2+ax+b$로 놓으면

$g'(x)=2x+a$

점 $(-4, 34)$에서의 접선의 기울기는

$g'(-4)=-8+a$

이때, $f'(-2)=g'(-4)$이므로

$-8+a=-12 \quad \therefore a=-4$

점 $(-4, 34)$가 곡선 $y=x^2+ax+b$ 위의 점이므로

$g(-4)=34$

$16-4a+b=34 \quad \therefore -4a+b=18$

여기에 $a=-4$를 대입하면

$16+b=18 \quad \therefore b=2$

$\therefore a^2+b^2=16+4=20$

34 답 ②

$f(x)=x^3-2x+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t+2) $(t>0)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로

$3t^2-2=1$, $t^2=1 \quad \therefore t=1$ ($\because t>0$)

즉, 기울기가 1이고 점 $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=x-1 \quad \therefore y=x$

곡선 $y=x^3-2x+2$와 직선 $y=x$의 교점의 좌표를 구하기 위해 연립하면

$x=x^3-2x+2$, $x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=-2$

따라서 접점이 아닌 교점의 좌표는 $(-2, -2)$이므로

$a=-2$, $b=-2$이다.

$\therefore a+b=-2+(-2)=-4$

35 답 ①

$f(x)=x^2+3x$로 놓으면 $f'(x)=2x+3$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2+3a)$라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a+3$이므로 접선의 방정식은

$y-a^2-3a=(2a+3)(x-a)$

$\therefore\ y=(2a+3)x-a^2$

이 접선이 점 $(-1,\ -11)$을 지나므로

$-11=-(2a+3)-a^2$

$a^2+2a-8=0,\ (a+4)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-4$ 또는 $a=2$

$a=-4$일 때, 접선의 기울기는

$f'(-4)=-8+3=-5$

$a=2$일 때, 접선의 기울기는

$f'(2)=4+3=7$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은 $-5\times7=-35$이다.

36 답 4

$f(x)=x^2+4x-1$로 놓으면 $f'(x)=2x+4$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2+4a-1)$이라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a+4$이므로 접선의 방정식은

$y-a^2-4a+1=(2a+4)(x-a)$

$\therefore\ y=(2a+4)x-a^2-1$

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=2(2a+4)-a^2-1$

$\therefore\ a^2-4a-7=0$

따라서 두 접점의 x좌표의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\dfrac{-4}{1}=4$이다.

심플 정리

[근과 계수의 관계]

(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

(2) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

37 답 $-\dfrac{1}{2}$

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+k$로 놓으면 $f'(x)=x$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2+k\right)$라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=a$이므로

접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2}a^2-k=a(x-a)\qquad\therefore\ y=ax-\dfrac{1}{2}a^2+k$

이 직선이 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$-1=a-\dfrac{1}{2}a^2+k$

$\therefore\ a^2-2a-2k-2=0\ \cdots$ ㉠

㉠의 두 근을 $a=\alpha$ 또는 $a=\beta$라 하면

$f'(\alpha)=\alpha,\ f'(\beta)=\beta$

이때, 두 접선이 서로 수직으로 만나므로 기울기의 곱은 -1이다.

$\therefore\ \alpha\beta=-1$

따라서 a에 대한 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의해

$-2k-2=-1\qquad\therefore\ k=-\dfrac{1}{2}$

38 답 ③

$f(x)=x^3+x^2+x+3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2x+1$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3+a^2+a+3)$이라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2+2a+1$이므로 접선의 방정식은

$y-a^3-a^2-a-3=(3a^2+2a+1)(x-a)$

$\therefore\ y=(3a^2+2a+1)x-2a^3-a^2+3$

이 직선이 원점을 지나므로 $2a^3+a^2-3=0$

$(a-1)(2a^2+3a+3)=0\qquad\therefore\ a=1$

즉, 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 $y=6x$이다.

이때, 곡선 $y=x^3+x^2+x+3$과 접선 $y=6x$가 만나는 점의 좌표를 구하기 위해 두 식을 연립하면

$6x=x^3+x^2+x+3,\ x^3+x^2-5x+3=0$

$(x-1)^2(x+3)=0\qquad\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

$x=1$일 때, 교점의 좌표는 $(1,\ 6)$

$x=-3$일 때, 교점의 좌표는 $(-3,\ -18)$

따라서 $\mathrm{P}(1,\ 6),\ \mathrm{Q}(-3,\ -18)$ 또는 $\mathrm{P}(-3,\ -18)$, $\mathrm{Q}(1,\ 6)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-3-1)^2+(-18-6)^2}=4\sqrt{37}$

39 답 ②

$f(x)=3x^2+x-4$로 놓으면 $f'(x)=6x+1$

점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=7$이므로

점 $(1,\ 0)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{7}$이다.

구하는 직선의 방정식은 점 $(1,\ 0)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{7}$이므로

$y=-\dfrac{1}{7}(x-1)\qquad\therefore\ y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{1}{7}$

따라서 이 직선의 y절편은 $\dfrac{1}{7}$이다.

40 답 ⑤

$f(x)=-x^3+2x^2+x$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+4x+1$

점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-3$이므로

점 $(2, 2)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

구하는 직선의 방정식은 점 $(2, 2)$를 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$

이므로

$y-2=\frac{1}{3}(x-2)$, $3y-6=x-2$

$\therefore -x+3y-4=0$

이 식이 $ax+3y+b=0$과 일치해야 하므로

$a=-1$, $b=-4$

$\therefore ab=(-1)\times(-4)=4$

41 답 ③

$f(x)=x^3-x^2+x+a$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2x+1$

점 $(-1, a-3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=6$이므로 점 $(-1, a-3)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{6}$이다.

구하는 직선의 방정식은 점 $(-1, a-3)$을 지나고

기울기가 $-\frac{1}{6}$이므로

$y-a+3=-\frac{1}{6}(x+1)$

이때, 이 직선의 x절편이 2이므로 $x=2$, $y=0$을 대입하면

$-a+3=-\frac{1}{6}\times(2+1)$, $-a+3=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{7}{2}$

42 답 ①

$f(x)=2x^2-4x+1$ ⋯ ㉠이라 하면 $f'(x)=4x-4$

점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로

점 $(2, 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

구하는 직선의 방정식은 점 $(2, 1)$을 지나고 기울기가

$-\frac{1}{4}$이므로

$y-1=-\frac{1}{4}(x-2)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$ ⋯ ㉡

곡선과 직선의 교점의 좌표를 구하기 위해 ㉠, ㉡을 연립하면

$-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}=2x^2-4x+1$, $8x^2-15x-2=0$

$(x-2)(8x+1)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=-\frac{1}{8}$

따라서 구하는 점의 x좌표는 $-\frac{1}{8}$이다.

43 답 ②

$f(x)=x^2-2x+1$로 놓으면

$f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 (t, t^2-2t+1)이라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-2$이므로 접선의 방정식은

$y-t^2+2t-1=(2t-2)(x-t)$

$\therefore y=(2t-2)x-t^2+1$

이 직선이 점 $(0, -3)$을 지나므로

$-3=-t^2+1$, $t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

점 (t, t^2-2t+1)에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2t-2}(x-t)+t^2-2t+1$ ⋯ ㉠

㉠에 $t=-2$를 대입하여 정리하면

$y=\frac{1}{6}x+\frac{28}{3}$

또, ㉠에 $t=2$를 대입하여 정리하면

$y=-\frac{1}{2}x+2$

(i) $y=\frac{1}{6}x+\frac{28}{3}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{1}{6}x+\frac{28}{3}$ $\quad\therefore x=-56$

즉, 직선 $y=\frac{1}{6}x+\frac{28}{3}$의 x절편은 -56이다.

(ii) $y=-\frac{1}{2}x+2$에 $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{1}{2}x+2$ $\quad\therefore x=4$

즉, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$의 x절편은 4이다.

$\therefore a+b=-56+4=-52$

44 답 ①

$f(x)=-x^2-5x+3$으로 놓으면

$f'(x)=-2x-5$

접점의 좌표를 $(a, -a^2-5a+3)$이라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=-2a-5$이고

이 점에서의 접선이 직선 $y=-3x+7$과 평행하므로

$-2a-5=-3$

$-2a=2$ $\quad\therefore a=-1$

즉, 접점의 좌표는 $(-1, 7)$이다.

구하는 직선의 방정식은 점 $(-1, 7)$을 지나고 기울기가 -3이므로

$y-7=-3(x+1)$

$\therefore y=-3x+4$

따라서 $m=-3$, $n=4$이므로

$m+n=-3+4=1$

45 답 ②

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-1$이라 놓으면 $f'(x)=x^2$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{3}a^3-1\right)$이라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=a^2$

한편, 두 점 $(-2,\ -3)$, $(0,\ 5)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{5-(-3)}{0-(-2)}=4$

이고, 이 직선과 구하는 접선이 평행하므로

점 $\left(a,\ \frac{1}{3}a^3-1\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=a^2=4 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때, 접점의 좌표는 $\left(-2,\ -\frac{11}{3}\right)$이므로

접선의 방정식은

$y+\frac{11}{3}=4(x+2)$, $3y+11=12(x+2)$

$\therefore 12x-3y+13=0$

(ii) $a=2$일 때, 접점의 좌표는 $\left(2,\ \frac{5}{3}\right)$이므로

접선의 방정식은

$y-\frac{5}{3}=4(x-2)$, $3y-5=12(x-2)$

$\therefore 12x-3y-19=0$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $12x-3y+13=0$ 또는 $12x-3y-19=0$이다.

46 답 ①

$g(x)=-\frac{2}{3}x^3$으로 놓으면 $g'(x)=-2x^2$

점 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{12}\right)$에서의 접선 l의 기울기는

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

즉, 직선 l에 평행하고 곡선 $y=-x^2-\frac{1}{2}x-5$에 접하는

직선의 기울기도 $-\frac{1}{2}$이다.

$h(x)=-x^2-\frac{1}{2}x-5$로 놓으면 $h'(x)=-2x-\frac{1}{2}$

접점의 좌표를 $\left(a,\ -a^2-\frac{1}{2}a-5\right)$라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는

$h'(a)=-2a-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \quad \therefore a=0$

즉, 접점의 좌표는 $(0,\ -5)$이고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인

접선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x-5$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x-5$이므로

$f(2)=-\frac{1}{2}\times2-5=-6$

47 답 ⑤

$f(x)=x^3-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

곡선 밖의 점 $(k,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선에 대하여 접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a)$라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-a^3+2a=(3a^2-2)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2-2)x-2a^3$

이 직선이 점 $(k,\ 0)$을 지나므로

$2a^3=(3a^2-2)k$ ⋯ ㉠

한편, 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$

이 접선과 점 $(k,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선이 서로 평행하므로

$f'(a)=3a^2-2=1$

$a^2=1 \quad \therefore a=1$ 또는 $a=-1$

그런데 $a\neq1$이므로 $a=-1$

따라서 $a=-1$을 ㉠에 대입하면

$k=-2$

48 답 6

직선 $3x+y-8=0$을 평행이동시켜 곡선 $y=-x^2+3x-3$과 접하게 되는 접점을 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+3a-3)$이라 하자.

점 P에서 직선 $3x+y-8=0$에 이르는 거리가 곡선 위를 움직이는 점과 직선 사이의 거리의 최솟값이므로 주어진 곡선에 대하여 기울기가 -3인 접선의 방정식을 구하자.

$f(x)=-x^2+3x-3$으로 놓으면 $f'(x)=-2x+3$

점 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+3a-3)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(a)=-2a+3=-3 \quad \therefore a=3$

$-a^2+3a-3$에 $a=3$을 대입하면 $-9+9-3=-3$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(3,\ -3)$에서

$m=3$, $n=-3$이므로

$m-n=3-(-3)=6$

49 답 ②

직선 $y=4x-3$을 평행이동시켜 곡선 $y=2x^2+1$과 접하게 될 때의 접점을 $\mathrm{P}(a,\ 2a^2+1)$이라 하고, 주어진 곡선에 대하여 기울기가 4인 접선의 방정식을 구하자.

$f(x)=2x^2+1$로 놓으면 $f'(x)=4x$

점 $\mathrm{P}(a,\ 2a^2+1)$에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(a)=4a=4 \quad \therefore a=1$

즉, 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(1,\ 3)$이다.

따라서 주어진 곡선 위의 점에서 직선에 이르는 거리의 최솟값은 점 $\mathrm{P}(1,\ 3)$과 직선 $4x-y-3=0$ 사이의 거리이므로

$\frac{|4\times1-1\times3-3|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{17}}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$

심플 정리

[점과 직선 사이의 거리]

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

50 답 ⑤

$f(x)=2x^2-x+1$로 놓으면

$f'(x)=4x-1$

곡선 위의 점 $(-1, 4)$에서의 접선의 기울기는

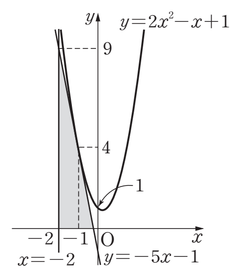
$f'(-1)=-5$

기울기가 -5이고 점 $(-1, 4)$를 지나는 접선의 방정식은

$y-4=-5(x+1)$

$\therefore y=-5x-1$

두 직선 $y=-5x-1$, $x=-2$ 및 x축으로 둘러싸인 도형은 그림과 같다.



직선 $x=-2$와 직선 $y=-5x-1$의 교점의 좌표를 구하자.

$x=-2$를 $y=-5x-1$에 대입하면

$y=10-1=9$

즉, 직선 $x=-2$와 직선 $y=-5x-1$의 교점의 좌표는 $(-2, 9)$이다.

또한, 직선 $y=-5x-1$이 x축과 만나는 점의 좌표를 구하자.

$y=-5x-1$에 $y=0$을 대입하면

$0=-5x-1 \quad \therefore x=-\frac{1}{5}$

즉, 직선 $y=-5x-1$이 x축과 만나는 점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)-(-2)\right\}\times 9=\frac{1}{2}\times\frac{9}{5}\times 9=\frac{81}{10}$

51 답 ①

$f(x)=-x^2+6x-3$으로 놓으면

$f'(x)=-2x+6$

접점의 좌표를 $(a, -a^2+6a-3)$이라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기가 -4이므로

$f'(a)=-2a+6=-4$

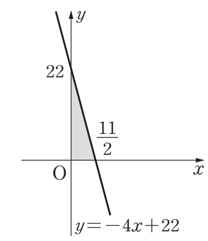
$\therefore a=5$

접점의 좌표는 $(5, 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-2=-4(x-5)$

$\therefore y=-4x+22$

따라서 직선 $y=-4x+22$의 x절편은 $\frac{11}{2}$, y절편은 22이므로 구하는 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times\frac{11}{2}\times 22=\frac{121}{2}$

52 답 ③

$f(x)=x^2-x+2$로 놓으면 $f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 (a, a^2-a+2)라 하자.

이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a-1$이므로 접선의 방정식은

$y-a^2+a-2=(2a-1)(x-a)$

$\therefore y=(2a-1)x-a^2+2$

이 직선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

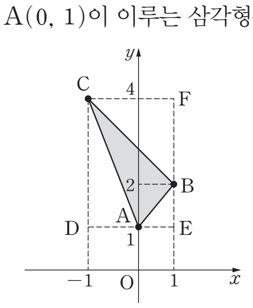
$1=-a^2+2$, $a^2=1$

$\therefore a=1$ 또는 $a=-1$

$a=-1$일 때, 접점의 좌표는 $(-1, 4)$

$a=1$일 때, 접점의 좌표는 $(1, 2)$

구하는 두 접점 B$(1, 2)$, C$(-1, 4)$(또는 B$(-1, 4)$, C$(1, 2)$)와 점 A$(0, 1)$이 이루는 삼각형은 그림과 같다.



$\therefore$ (삼각형 ABC의 넓이)

$=$(직사각형 CDEF의 넓이)$-$(삼각형 CDA의 넓이)

$-$(삼각형 AEB의 넓이)$-$(삼각형 BFC의 넓이)

$=2\times 3-\frac{1}{2}\times 1\times 3-\frac{1}{2}\times 1\times 1-\frac{1}{2}\times 2\times 2$

$=6-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-2=2$

53 답 ⑤

$f(x)=x^2+ax$에 대하여 $f'(x)=2x+a$

점 $(2, 2a+4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4+a$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-2a-4=(a+4)(x-2)$

$\therefore y=(a+4)x-4$

이때, 직선 $y=(a+4)x-4$의 x절편은 $\frac{4}{a+4}$, y절편은 -4이고 점 $(2,\ 2a+4)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times\left|\frac{4}{a+4}\right|\times4=8$, $|a+4|=1$

$a+4=\pm1$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=-5$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 $-3\times(-5)=15$이다.

54

답 ②

$f(x)=x^3-x^2$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x$

점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=5$

이 점에서의 접선 l의 방정식은

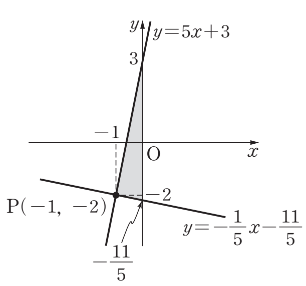
$y+2=5(x+1)\quad\therefore y=5x+3$

한편, 직선 m은 직선 l과 수직이므로 직선 m의 기울기는 $-\frac{1}{5}$이다.

기울기가 $-\frac{1}{5}$이고, 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 직선 m의 방정식은

$y+2=-\frac{1}{5}(x+1)\quad\therefore y=-\frac{1}{5}x-\frac{11}{5}$

즉, 두 직선 l, m 및 y축으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



따라서 두 직선 l, m의 y절편은 각각 3, $-\frac{11}{5}$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{3-\left(-\frac{11}{5}\right)\right\}\times1=\frac{13}{5}$

55

답 ②

$f(x)=-x^3$, $g(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2$, $g'(x)=3x$

두 곡선이 $x=a$에서 공통인 접선을 가지므로

(i) $f(a)=g(a)$에서

$-a^3=\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}$, $2a^3+3a^2-1=0$

$(a+1)^2(2a-1)=0\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

(ii) $f'(a)=g'(a)$에서

$-3a^2=3a$, $a(a+1)=0\quad\therefore a=0$ 또는 $a=-1$

(i), (ii)에 의해 $a=-1$일 때, 즉 점 $(-1,\ 1)$에서 공통인 접선을 갖는다.

이때, $f'(-1)=g'(-1)=-3$이므로 점 $(-1,\ 1)$을 지나고 기울기가 -3인 공통인 접선의 방정식은

$y-1=-3(x+1)\quad\therefore y=-3x-2$

따라서 직선 $y=-3x-2$의 y절편은 -2이다.

56

답 -9

$f(x)=x^3+ax$, $g(x)=-3x^2-5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=-6x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

(i) $f(t)=g(t)$에서

$t^3+at=-3t^2-5$ ⋯ ㉠

(ii) $f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2+a=-6t\quad\therefore a=-3t^2-6t$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $t^3+(-3t^2-6t)t=-3t^2-5$

$t^3-3t^3-6t^2=-3t^2-5$, $2t^3+3t^2-5=0$

$(t-1)(2t^2+5t+5)=0\quad\therefore t=1$

따라서 $t=1$을 ㉡에 대입하면

$a=-3-6=-9$

57

답 ③

$f(x)=x^3-ax$, $g(x)=bx^2+c$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-a$, $g'(x)=2bx$

두 곡선이 점 $(1,\ -3)$에서 공통인 접선을 가지므로

$f(1)=-3$에서

$1-a=-3\quad\therefore a=4$ ⋯ ㉠

$g(1)=-3$에서 $b+c=-3$ ⋯ ㉡

또, 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서

$3-a=2b$, $3-4=2b$ ($\because$ ㉠) $\quad\therefore b=-\frac{1}{2}$

$b=-\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면

$-\frac{1}{2}+c=-3\quad\therefore c=-\frac{5}{2}$

$\therefore abc=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)=5$

58

답 $a=4$, $c=1$

함수 $f(x)=-2x^2+ax$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하다.

이때, 롤의 정리를 만족시키면 $f(0)=f(2)$이므로

$0=-8+2a\quad\therefore a=4$

롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재하므로

$f'(x)=-4x+a$, 즉 $f'(x)=-4x+4$에서

$-4c+4=0\quad\therefore c=1$

59 답 (가) $f'(c)$　(나) 0　(다) $f(a)$

$a<x<b$인 임의의 실수 x에 대하여 닫힌구간 $[a, x]$에서 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\underbrace{f'(c)}_{(가)}$$

인 c가 a와 x 사이에 적어도 하나 존재한다.

그런데 조건에서 $f'(c)=0$이므로 $f(x)-f(a)=\underbrace{0}_{(나)}$

즉, $f(x)=\underbrace{f(a)}_{(다)}$

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수이다.

60 답 ②

함수 $f(x)=x^3-x^2+1$은 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 3)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의해 $\dfrac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=f'(c)$인 c가 -2와 3 사이에 적어도 하나 존재한다.

이때, $\dfrac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\dfrac{19-(-11)}{5}=6$이고

$f'(x)=3x^2-2x$에서 $f'(c)=3c^2-2c$이므로

$3c^2-2c=6$

$3c^2-2c-6=0$ ⋯ (＊)

$\therefore c=\dfrac{1+\sqrt{19}}{3}$ 또는 $c=\dfrac{1-\sqrt{19}}{3}$

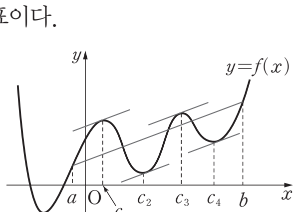
따라서 $-2<\dfrac{1+\sqrt{19}}{3}<3$, $-2<\dfrac{1-\sqrt{19}}{3}<3$이므로 구하는 모든 실수 c의 값의 합은 $\dfrac{1+\sqrt{19}}{3}+\dfrac{1-\sqrt{19}}{3}=\dfrac{2}{3}$이다.

> **TIP**
> (＊)에서 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 모든 실수 c의 값의 합을 $-\dfrac{-2}{3}=\dfrac{2}{3}$로 바로 구하는 것은 바르게 푼 것이 아니다.
> 그 이유는 c의 값의 범위가 $-2<c<3$으로 정해져 있기 때문이다.
> 서술형 문제에서 위의 풀이와 같은 과정으로 풀지 않을 경우 정확한 풀이가 아니어서 감점을 받을 수 있으므로 주의해야 한다.

61 답 ④

닫힌구간 $[a, b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

즉, 그림과 같이 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 상수 c의 개수는 4이다.



01 답 증가

02 답 극대

03 답 극소

04 답 ×

05 답 ○

06 답 ×

【반례】 $f(x)=c$ (단, c는 상수)이면 $f'(x)=0$에서 $f'(1)=0$이지만 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

07 답 증가

임의의 두 양수 x_1, x_2에 대하여

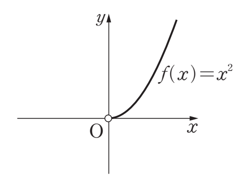
$x_1<x_2$일 때

$f(x_1)-f(x_2)$

$=x_1^2-x_2^2$

$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$



따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

08 답 증가

임의의 두 음수 x_1, x_2에 대하여

$x_1<x_2$일 때,

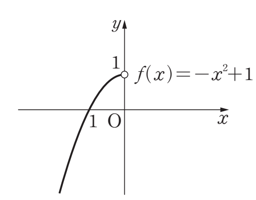
$f(x_1)-f(x_2)$

$=-x_1^2+1-(-x_2^2+1)$

$=-(x_1^2-x_2^2)$

$=-(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$



따라서 함수 $f(x)=-x^2+1$은 구간 $(-\infty, 0)$에서 증가한다.

09 답 감소

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

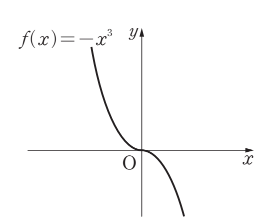
$x_1<x_2$일 때,

$f(x_1)-f(x_2)$

$=-x_1^3-(-x_2^3)$

$=-(x_1^3-x_2^3)$

$=-(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$



이때, $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\dfrac{x_2}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x_2^2>0$이므로

$f(x_1)-f(x_2)>0$　$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=-x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

10 답 감소

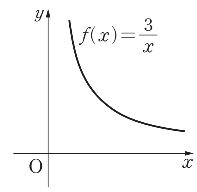
임의의 두 양수 x_1, x_2에 대하여

$x_1<x_2$일 때,

$f(x_1)-f(x_2)$

$=\frac{3}{x_1}-\frac{3}{x_2}=\frac{3(x_2-x_1)}{x_1x_2}>0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$



따라서 함수 $f(x)=\frac{3}{x}$은 구간 $(0, \infty)$에서 감소한다.

11 답 구간 $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$에서 감소, 구간 $\left(-\frac{3}{4}, \infty\right)$에서 증가

$f(x)=2x^2+3x-2$에서 $f'(x)=4x+3$

$f'(x)=0$에서 $4x+3=0 \quad \therefore x=-\frac{3}{4}$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$에서 감소하고,

구간 $\left(-\frac{3}{4}, \infty\right)$에서 증가한다.

12 답 구간 $(-\infty, -1)$에서 감소, 구간 $(-1, 1)$에서 증가,

구간 $(1, \infty)$에서 감소

$f(x)=-x^3+3x-1$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$-3(x+1)(x-1)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 감소, 구간 $(-1, 1)$에서 증가, 구간 $(1, \infty)$에서 감소한다.

13 답 구간 $(-\infty, 1)$에서 증가, 구간 $(1, 3)$에서 감소,

구간 $(3, \infty)$에서 증가

$f(x)=x^3-6x^2+9x+2$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$3(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1)$에서 증가, 구간 $(1, 3)$에서 감소, 구간 $(3, \infty)$에서 증가한다.

14 답 구간 $(-\infty, -1)$에서 감소, 구간 $(-1, 0)$에서 증가,

구간 $(0, 1)$에서 감소, 구간 $(1, \infty)$에서 증가

$f(x)=3x^4-6x^2-10$에서

$f'(x)=12x^3-12x=12x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$12x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 감소, 구간 $(-1, 0)$에서 증가, 구간 $(0, 1)$에서 감소, 구간 $(1, \infty)$에서 증가한다.

15 답 극댓값 : 21, 극솟값 : -11

$f(x)=x^3-12x+5$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$3(x+2)(x-2)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=2$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	21	↘	-11	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-2$에서 극대이고, 극댓값은

$f(-2)=-8+24+5=21$

$x=2$에서 극소이고 극솟값은

$f(2)=8-24+5=-11$

16 답 극댓값 : 0, 극솟값 : -4

$f(x)=-x^3+6x^2-9x$에서

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$-3(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	0	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고, 극솟값은

$f(1)=-1+6-9=-4$

$x=3$에서 극대이고, 극댓값은 $f(3)=-27+54-27=0$

17 답 극솟값 : -4, 극댓값은 없다.

$f(x)=x^4+3x^2-4$에서

$f'(x)=4x^3+6x=2x(2x^2+3)$

$f'(x)=0$에서 $2x(2x^2+3)=0$ $\quad\therefore x=0$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은

$f(0)=-4$

극댓값은 없다.

18 답 극솟값 : $-\frac{27}{16}$, 극댓값은 없다.

$f(x)=x^4-2x^3+2x-1$에서

$f'(x)=4x^3-6x^2+2=2(2x^3-3x^2+1)$

$\quad=2(x-1)^2(2x+1)$

$f'(x)=0$에서

$2(x-1)^2(2x+1)=0$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{27}{16}$	↗		↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극소이고 극솟값은

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1-1=-\frac{27}{16}$

극댓값은 없다.

19 답 극댓값 : 1, 극솟값은 없다.

$f(x)=-3x^4+4x^3$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$-12x^2(x-1)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	1	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$f(1)=-3+4=1$

극솟값은 없다.

20 답 해설 참조

$f(x)=x^3-3x^2+1$에서 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$3x(x-2)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

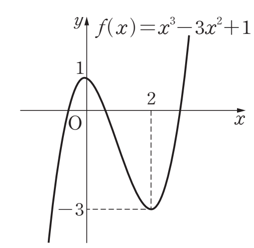
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=1$

또, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 극솟값은

$f(2)=8-12+1=-3$

따라서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+1$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



21 답 해설 참조

$f(x)=x^4+4x^3+4x^2+2$에서

$f'(x)=4x^3+12x^2+8x=4x(x^2+3x+2)$

$\quad=4x(x+1)(x+2)$

$f'(x)=0$에서

$4x(x+1)(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

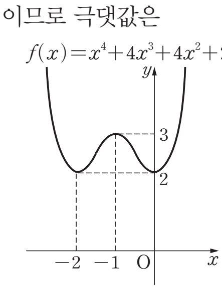
함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=0$에서 극소이고 극솟값은

$f(-2)=16-32+16+2=2$, $f(0)=2$

또, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-1)=1-4+4+2=3$

따라서 함수 $f(x)=x^4+4x^3+4x^2+2$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 76~79

22 답 ③

$f(x)=-x^3+6x^2+36x$에서

$f'(x)=-3x^2+12x+36=-3(x+2)(x-6)$

이때, $f'(x)>0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 증가하므로

$-3(x+2)(x-6)>0$, $(x+2)(x-6)<0$

$\therefore\ -2<x<6$

따라서 $a=-2$, $b=6$이므로

$b-a=6-(-2)=8$

23 답 ③

ㄱ. 구간 $(-3,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 구간 $(-3,\ 1)$에서 감소한다. (참)

ㄴ. 구간 $(-1,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 구간 $(-1,\ 1)$에서 감소하고, 구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 증가한다. (거짓)

ㄷ. $x<-3$ 또는 $1<x<3$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 $x<-3$ 또는 $1<x<3$에서 증가한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

> 심플 정리
>
> **[함수의 증가·감소]**
>
> (1) 함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고
> ① $f'(x)>0$이면 $y=f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
> ② $f'(x)<0$이면 $y=f(x)$는 그 구간에서 감소한다.
>
> (2) 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프에서
> ① x축의 윗부분 $\Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$가 증가
> ② x축의 아랫부분 $\Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$가 감소

24 답 ②

$f(x)=x^3-3x^2+4$에서 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)>0$인 구간에서 $f(x)$가 증가하므로

$3x(x-2)>0\quad \therefore\ x<0$ 또는 $x>2$

따라서 a의 최댓값 $M=0$, b의 최솟값 $m=2$이므로

$M+m=0+2=2$

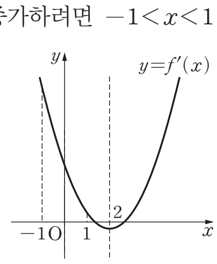
25 답 ⑤

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+ax+1$에서

$f'(x)=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ 1)$에서 증가하려면 $-1<x<1$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 그림과 같이 $f'(1)\geq 0$이어야 한다.

따라서 $f'(1)=-3+a\geq 0$에서 $a\geq 3$이므로 실수 a의 최솟값은 3이다.



26 답 7

$f(x)=x^3-ax^2+9x+2$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+9$

$f'(x)\leq 0$을 만족시키는 구간에서 $f(x)$는 감소한다.

그런데 함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 $[b,\ 3]$이므로 부등식 $3x^2-2ax+9\leq 0$의 해는 $b\leq x\leq 3$이다.

즉, 이차방정식 $3x^2-2ax+9=0$의 해가 $x=b$ 또는 $x=3$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b+3=\frac{2a}{3}$, $3b=\frac{9}{3}$

$3b=\frac{9}{3}=3$에서 $b=1$

$b=1$을 $b+3=\frac{2a}{3}$에 대입하면

$1+3=\frac{2a}{3}$, $2a=12\quad \therefore\ a=6$

$\therefore\ a+b=6+1=7$

27 답 ①

삼차함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2-2ax+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-2a$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이 성립하기 위해서는 $D\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2+6a\leq 0$에서

$a(a+6)\leq 0\quad \therefore\ -6\leq a\leq 0$

28 답 ②

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시키므로 함수 $f(x)$는 모든 구간에서 감소한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2+(3a-10)x-2$에서

$f'(x)=-x^2+2ax+(3a-10)$

$f'(x)\leq 0$에서

$-x^2+2ax+(3a-10)\leq 0$

$x^2-2ax-(3a-10)\geq 0$

모든 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립하므로 이차방정식 $x^2-2ax-(3a-10)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2+3a-10\leq 0$에서

$(a+5)(a-2)\leq 0\quad \therefore\ -5\leq a\leq 2$

따라서 이를 만족시키는 정수 a는 -5, -4, $\cdots$, 1, 2이므로 모든 정수 a의 값의 합은 -12이다.

29 답 ⑤

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하는 함수 또는 감소하는 함수이어야 한다.

그런데 삼차함수 $f(x)=x^3+kx^2+2x-3$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 증가하는 함수이어야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$f(x)=x^3+kx^2+2x-3$에서

$f'(x)=3x^2+2kx+2\ge 0$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-6\le 0 \quad \therefore -\sqrt{6}\le k\le \sqrt{6}$

따라서 $-3<-\sqrt{6}<-2$, $2<\sqrt{6}<3$이므로 구하는 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

30 답 ①

$f(x)=2x^3-15x^2+36x-20$에서

$f'(x)=6x^2-30x+36=6(x-2)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$6(x-2)(x-3)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=3$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8	↘	7	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$M=f(2)=16-60+72-20=8$

$x=3$에서 극솟값을 가지므로

$m=f(3)=54-135+108-20=7$

$\therefore M-m=8-7=1$

31 답 ④

$f(x)=-x^4-4x^3+8x^2-2$에서

$f'(x)=-4x^3-12x^2+16x$

$\quad=-4x(x^2+3x-4)$

$\quad=-4x(x+4)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$-4x(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	126	↘	-2	↗	1	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극댓값

$f(-4)=-256+256+128-2=126$

$x=1$에서 극댓값

$f(1)=-1-4+8-2=1$

을 가지므로 모든 극댓값의 합은 $126+1=127$이다.

32 답 ②

$f(x)=x^3-3ax^2-9a^2x$에서

$f'(x)=3x^2-6ax-9a^2$

$\quad=3(x^2-2ax-3a^2)$

$\quad=3(x+a)(x-3a)$

$f'(x)=0$에서

$3(x+a)(x-3a)=0$

$\therefore x=-a$ 또는 $x=3a$

$a>0$이므로 $f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$5a^3$	↘	$-27a^3$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극댓값

$f(-a)=-a^3-3a^3+9a^3=5a^3$

을 갖고, $x=3a$에서 극솟값

$f(3a)=27a^3-27a^3-27a^3=-27a^3$

을 갖는다.

이때, 극댓값과 극솟값의 합이 -176이므로

$5a^3+(-27a^3)=-176$

$-22a^3=-176$, $a^3=8 \quad \therefore a=2$

33 답 ②

$f(x)=-2x^3+6x+5$에서

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$-6(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1	↗	9	↘

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값

$f(1)=-2+6+5=9$

$x=-1$에서 극솟값

$f(-1)=2-6+5=1$

을 가지므로 두 점 P, Q의 좌표는 P$(1,\ 9)$, Q$(-1,\ 1)$이다.

$\therefore$ (선분 PQ의 길이)$=\sqrt{(-1-1)^2+(1-9)^2}=2\sqrt{17}$

34 답 ③

$f(x)=3x^4-24x^2+8$에서

$f'(x)=12x^3-48x=12x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $12x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

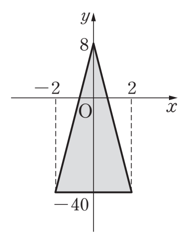
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-40	↗	8	↘	-40	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$ 또는 $x=2$일 때 극솟값

$f(-2)=f(2)=48-96+8=-40$

을 갖고, $x=0$일 때 극댓값 $f(0)=8$

을 갖는다.



따라서 세 점 $(-2,\ -40)$, $(2,\ -40)$, $(0,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times48=96$이다.

35 답 ②

$f(x)=x^3+3x^2-24x+k$에서

$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$3(x+4)(x-2)=0 \quad \therefore x=-4$ 또는 $x=2$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	81	↘		↗

함수 $f(x)$는 $x=-4$일 때 극댓값 81을 가지므로

$f(-4)=-64+48+96+k=81 \quad \therefore k=1$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-24x+1$이므로

$f(1)=1+3-24+1=-19$

36 답 10

$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2+ax-3$에서

$f'(x)=-2x^2+2x+a$

$x=3$에서 극댓값을 가지므로 $f'(3)=0$

$-18+6+a=0 \quad \therefore a=12$

$f'(x)=-2x^2+2x+12=-2(x-3)(x+2)$

$x=-2$에서 $f'(-2)=0$이고, $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore b=-2$

$\therefore a+b=12+(-2)=10$

37 답 ④

$f(x)=x^3+ax^2-6x+b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-6$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 6을 가지므로

$f(-1)=6$에서

$-1+a+6+b=6$

$\therefore a+b=1 \cdots$ ㉠

$f'(-1)=0$에서

$3-2a-6=0,\ -2a=3 \quad \therefore a=-\frac{3}{2}$

$a=-\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$-\frac{3}{2}+b=1 \quad \therefore b=\frac{5}{2}$

$\therefore b-a=\frac{5}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=4$

38 답 ⑤

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-2$ 또는 $x=1$에서 극값을 가지므로 방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 $x=-2$ 또는 $x=1$이다.

이차방정식 근과 계수의 관계에 의해

$-2+1=-\frac{2a}{3} \quad \therefore a=\frac{3}{2}$

$(-2)\times1=\frac{b}{3} \quad \therefore b=-6$

즉, $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+c$이다.

이때, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 -1을 가지므로

$f(-2)=-1$에서

$f(-2)=-8+\frac{3}{2}\times4-6\times(-2)+c=-1$

$\therefore c=-11$

$\therefore abc=\frac{3}{2}\times(-6)\times(-11)=99$

39 답 ④

$f(x)=-x^3+ax^2-3x+2$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-3$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $-3x^2+2ax-3=0$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-9>0$에서

$(a+3)(a-3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

40 답 ④

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(4a+12)x-1$로 놓으면

$f'(x)=x^2+2ax+(4a+12)$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+2ax+(4a+12)=0$의 판별식을 D라 할 때, $D\le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-(4a+12)\le 0$에서

$a^2-4a-12\le 0$, $(a+2)(a-6)\le 0$

$\therefore -2\le a\le 6$

따라서 구하는 정수 a는 -2, -1, $\cdots$, 5, 6의 9개이다.

41 답 $3<a<\frac{15}{4}$

$f(x)=x^3-ax^2+3x$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+3$

함수 $f(x)$가 $-1<x<2$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<2$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2-2ax+3=0$의 판별식을 D라 하자.

(i) $\frac{D}{4}=a^2-9>0$에서

$(a+3)(a-3)>0$ $\quad\therefore a<-3$ 또는 $a>3$ ⋯ ㉠

(ii) $f'(-1)=3+2a+3>0$에서

$2a>-6$ $\quad\therefore a>-3$ ⋯ ㉡

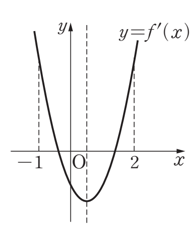
(iii) $f'(2)=12-4a+3>0$에서

$-4a>-15$ $\quad\therefore a<\frac{15}{4}$ ⋯ ㉢

(iv) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축은 $x=\frac{a}{3}$이므로

$-1<\frac{a}{3}<2$에서

$-3<a<6$ ⋯ ㉣



따라서 ㉠~㉣의 공통범위를 구하면

$3<a<\frac{15}{4}$

42 답 ⑤

$f(x)=-x^4+2x^3-ax^2-2$에서

$f'(x)=-4x^3+6x^2-2ax=-2x(2x^2-3x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2-3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=0$은 이차방정식 $2x^2-3x+a=0$의 해가 될 수 없으므로 $a\ne 0$

(ii) 이차방정식 $2x^2-3x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-8a>0$ $\quad\therefore a<\frac{9}{8}$

(i), (ii)에 의하여 $a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=\frac{9}{8}$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{9}{8}$

43 답 2

$f(x)=\frac{1}{2}x^4+2ax^3+9x^2$에서

$f'(x)=2x^3+6ax^2+18x=2x(x^2+3ax+9)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 다른 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) 방정식 $2x(x^2+3ax+9)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+3ax+9=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=9a^2-36<0$ $\quad\therefore -2<a<2$

(ii) 방정식 $2x(x^2+3ax+9)=0$이 한 실근과 다른 중근을 갖는 경우

$x=0$은 이차방정식 $x^2+3ax+9=0$의 해가 아니므로

$D=9a^2-36=0$ $\quad\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(iii) $x=0$은 이차방정식 $x^2+3ax+9=0$의 해가 아니므로 방정식 $2x(x^2+3ax+9)=0$은 삼중근을 갖지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 $-2\le a\le 2$이므로 a의 최댓값은 2이다.

44 답 ③

ㄱ. 구간 (b, c)에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 구간 (b, c)에서 증가한다. (참)

ㄴ. $f'(c)=0$이고, $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=c$에서 극대이다. (거짓)

ㄷ. $f'(b)=0$이지만 $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖지 않는다.

$f'(d)=0$이고, $x=d$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=d$에서 극소이다.

즉, $f(x)$는 $x=c$에서 극대, $x=d$에서 극소이므로 $f(x)$는 2개의 극값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

45 답 ①

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-2)=f'(2)=0$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 $x=-2$ 또는 $x=2$이다.

이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 근과 계수의 관계에 의해

$(-2)+2=-\frac{2a}{3}$ $\therefore a=0$

$(-2)\times 2=\frac{b}{3}$ $\therefore b=-12$

$\therefore f(x)=x^3-12x+c$

한편, $f'(2)=0$이고 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -12를 갖는다.

$f(2)=8-24+c=-12$ $\therefore c=4$

즉, $f(x)=x^3-12x+4$이고, $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-2)=-8+24+4=20$

46 답 ⑤

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$에서 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

ㄱ. $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$이므로

$3a>0$ $\therefore a>0$ (거짓)

ㄴ. α, β는 이차방정식 $3ax^2+2bx+c=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0$ ($\because \alpha+\beta>0$)

이때, ㄱ에서 $a>0$이므로 $b<0$ (참)

ㄷ. $y=f'(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에서 y축과 만나므로 $f'(0)=c<0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

47 답 ③

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$에서 $f'(\alpha)f'(\beta)=0$ (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 $a>0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고, α, β는 서로 다른 두 양수이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\frac{c}{3a}>0$

이때, $a>0$이므로 $b<0$, $c>0$

즉, $ab<0$, $c>0$이므로 $ab<c$이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에서 y축과 만나므로 $d<0$

즉, $a>0$, $b<0$, $c>0$, $d<0$이므로 $abcd>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

Simple J 도함수의 활용

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 80 ~ 81

01 답 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$

02 답 x축

03 답 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$

04 답 ○

05 답 ×

함수 $f(x)$의 최솟값이 0 이상임을 보이면 된다.

06 답 ○

07 답 최댓값 : 7, 최솟값 : 3

$f(x)=x^3-3x+5$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$3(x+1)(x-1)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	5	↘	극소(3)	↗	7

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 7, $x=1$에서 최솟값 3을 갖는다.

08 답 최댓값 : 9, 최솟값 : 1

$f(x)=-2x^3+6x^2+1$에서

$f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$-6x(x-2)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	9	↘	극소(1)	↗	5

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 9, $x=0$에서 최솟값 1을 갖는다.

09 답 최댓값 : 7, 최솟값 : 3

$f(x)=x^3-6x^2+9x+3$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$

$=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$3(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	3	↗	극대 (7)	↘	극소 (3)	↗	7

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$ 또는 $x=4$에서 최댓값 7을 갖고, $x=0$ 또는 $x=3$에서 최솟값 3을 갖는다.

10 답 최댓값 : 1, 최솟값 : -26

$f(x)=-3x^4+6x^2-2$에서

$f'(x)=-12x^3+12x$

$\quad =-12x(x^2-1)$

$\quad =-12x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$-12x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	1	↘	극소 (-2)	↗	극대 (1)	↘	-26

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최댓값 1, $x=2$에서 최솟값 -26을 갖는다.

11 답 1

$f(x)=x^3-3x+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

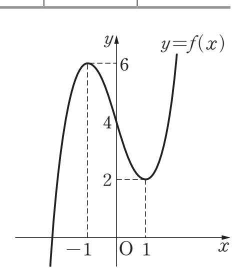
$3(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 그 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대(6)	↘	극소(2)	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



12 답 1

$f(x)=4x^3+6x^2-5$라 하면

$f'(x)=12x^2+12x=12x(x+1)$

$f'(x)=0$에서

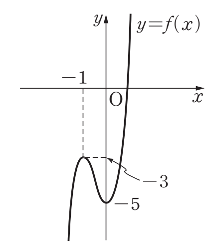
$12x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 그 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대 (-3)	↘	극소 (-5)	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



13 답 2

$f(x)=x^4-6x^2+9$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)$

$\quad =4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서

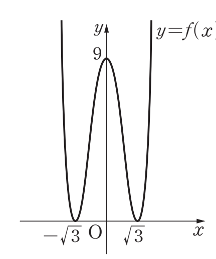
$4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 그 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소 (0)	↗	극대 (9)	↘	극소 (0)	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



14 답 3

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)$

$\quad =12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

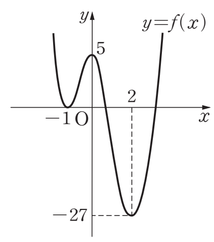
$12x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고, 그 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소 (0)	↗	극대 (5)	↘	극소 (-27)	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



15 답 (가) $x-1$ (나) 1 (다) 0

$f(x)=x^3+3-(-x^2+5x)=x^3+x^2-5x+3$

이라 하면

$f'(x)=3x^2+2x-5$

$=(3x+5)\times(\boxed{x-1})$이므로 (가)

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=\boxed{1}$ (나)

$x\geq0$일 때, $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	3	↘	극소$(\boxed{0})$ (다)	↗

$x\geq0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.
이때, 최솟값이 $f(1)=0$이므로 $x\geq0$인 모든 x에서 $f(x)\geq0$이다.
따라서 $x\geq0$일 때, 부등식 $x^3+3\geq-x^2+5x$가 성립한다.

16 답 속도 : 0, 가속도 : -12

t초 후의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-6t^2+6$, $a=\frac{dv}{dt}=-12t$

따라서 $t=1$에서의 속도와 가속도는

$v=-6+6=0$, $a=-12$

17 답 속도 : -3, 가속도 : 2

t초 후의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=t^2-4t$, $a=\frac{dv}{dt}=2t-4$

따라서 $t=3$에서의 속도와 가속도는

$v=9-12=-3$, $a=6-4=2$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 82~91

18 답 ②

$f(x)=x^2(x-3)=x^3-3x^2$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$3x(x-2)=0$ $\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-4	↗	극대(0)	↘	-2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 0을 갖는다.

19 답 ④

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-1$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)$

$=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$6(x-1)(x-2)=0$ $\therefore$ $x=1$ 또는 $x=2$

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-24	↗	극대(4)	↘	3

즉, $x=1$일 때 최댓값 $M=f(1)=4$,

$x=-1$일 때 최솟값 $m=f(-1)=-24$이므로

$M+m=4+(-24)=-20$

20 답 ④

$f(x)=x^3-12x+8$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)$

$=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$3(x+2)(x-2)=0$ $\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=2$

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	17	↗	극대 (24)	↘	극소 (-8)	↗	-1

즉, $x=-2$일 때 최댓값 $M=f(-2)=24$,

$x=2$일 때 최솟값 $m=f(2)=-8$이므로

$\frac{M}{m}=\frac{24}{-8}=-3$

21 답 ⑤

$f(x)=-3x^4+16x^3-18x^2+3$에서

$f'(x)=-12x^3+48x^2-36x=-12x(x^2-4x+3)$

$=-12x(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $-12x(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	3	↘	극소 (-2)	↗	극대 (30)	↘	-29

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 30을 갖는다.

22 답 ②

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$에서

$f'(x)=x^3+2x^2-x-2$

$=(x+2)(x+1)(x-1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ & & -1 & -2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$f'(x)=0$에서

$(x+2)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$\frac{5}{3}$	↗	극대 $\left(\frac{25}{12}\right)$	↘	1

즉, $x=-1$일 때 최댓값 $M=\frac{25}{12}$, $x=0$일 때 최솟값 $m=1$이므로 $Mm=\frac{25}{12}\times1=\frac{25}{12}$

23 답 ①

$f(x)=-x^4+6x^2-8x-1$에서

$f'(x)=-4x^3+12x-8$

$=-4(x-1)^2(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$f'(x)=0$에서

$-4(x-1)^2(x+2)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-4	↗	극대 (23)	↘	-1

즉, $x=-2$일 때 최댓값 $M=23$, $x=-3$일 때 최솟값 $m=-4$이므로 $M+m=23+(-4)=19$

24 답 ④

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$에서

$f'(x)=3x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(0)=2,\ f'(0)=0$

$f(0)=2$에서 $b=2$

$f'(0)=0$에서 $a=0$

즉, $f(x)=x^3+3x^2+2$이므로

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서

$3x(x+2)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=-2$

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	6	↘	극소(2)	↗	22

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 22를 갖는다.

25 답 ②

$f(x)=x^3-3x^2-9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$3(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$a-2$	↗	극대 $(a+5)$	↘	극소 $(a-27)$	↗	$a+5$

이때, $a-27<a-2<a+5$이므로 함수 $f(x)$는

$x=-1$ 또는 $x=5$일 때, (최댓값)$=a+5$

$x=3$일 때, (최솟값)$=a-27$

을 갖고, 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 6이므로

$(a+5)+(a-27)=6$

$2a-22=6 \quad \therefore a=14$

26 답 ①

$f(x)=2x^3-6x^2+k$에서

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$6x(x-2)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	k	↘	극소 $(-8+k)$	↗	$32+k$

이때, $-8+k<k<32+k$이므로 함수 $f(x)$는

$x=2$일 때, 최솟값 $-8+k$,

$x=4$일 때, 최댓값 $32+k$

를 갖고, 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 2이므로

$-8+k=2 \qquad \therefore k=10$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$32+k=32+10=42$

27 답 ③

$f(x)=x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

$f'(1)=15$라 하므로

$3+2a=15 \qquad \therefore a=6$

즉, $f(x)=x^3+6x^2+b$이고

$f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$이므로

$f'(x)=0$에서

$3x(x+4)=0 \qquad \therefore x=-4$ 또는 $x=0$

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$b+32$	↘	극소 (b)	↗	$b+32$

이때, $b<b+32$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 b를 갖는다.

따라서 $b=4$이므로 $ab=6\times4=24$

28 답 ②

$f(x)=-ax^4+4ax^3-4ax^2+b\ (a>0)$에서

$f'(x)=-4ax^3+12ax^2-8ax=-4ax(x^2-3x+2)$

$\qquad =-4ax(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$-4ax(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$-9a+b$	↗	극대 (b)	↘	극소 $(-a+b)$	↗	극대 (b)	↘	$-64a+b$

이때, $a>0$이므로

$-64a+b<-9a+b<-a+b<b$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은

$x=0$ 또는 $x=2$일 때, (최댓값)$=b$

$x=4$일 때, (최솟값)$=-64a+b$

를 갖고, 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 30, -34이므로

$b=30,\ -64a+b=-34$

이를 연립하여 풀면 $a=1,\ b=30$이므로

$a+b=1+30=31$

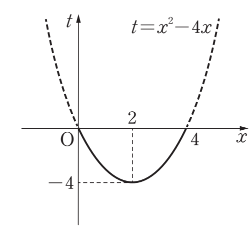
29 답 ①

$x^2-4x=t$로 놓으면

$x^2-4x=(x-2)^2-4$이므로

$0\le x\le4$에서 t의 값의 범위는

$-4\le t\le0$



$g(t)=t^3+3t^2+1$이라 하면

$g'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$

$g'(t)=0$에서

$3t(t+2)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=0$

$-4\le t\le0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$g'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$g(t)$	-15	↗	극대(5)	↘	1

따라서 함수 $g(t)$의 최댓값과 최솟값은

$t=-2$일 때, (최댓값)$=5$

$t=-4$일 때, (최솟값)$=-15$

$\therefore$ (최댓값)$+$(최솟값)$=5+(-15)=-10$

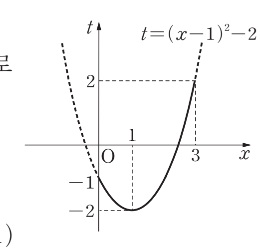
30 답 ③

$x^2-2x-1=t$로 놓으면

$x^2-2x-1=(x-1)^2-2$이므로

$0\le x\le3$에서 t의 값의 범위는

$-2\le t\le2$



$g(t)=t^3-3t$라 하면

$g'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$

$g'(t)=0$에서

$3(t+1)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$-2\le t\le2$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$g(t)$	-2	↗	극대 (2)	↘	극소 (-2)	↗	2

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-1$ 또는 $t=2$일 때 최댓값을 갖는다.

(ⅰ) $t=-1$일 때,

$x^2-2x-1=-1$을 만족시키는 x는

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$

(ⅱ) $t=2$일 때,

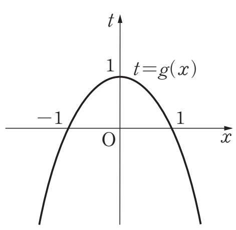
$x^2-2x-1=2$를 만족시키는 x는

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 구간 $[0, 3]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 최댓값을 가질 때의 실수 x의 개수는 0, 2, 3의 3이다.

31 답 ①



$g(x)=-x^2+1=t$로 놓으면

t의 값의 범위는 $t\le1$

$(f\circ g)(x)$에 $g(x)=t$를 대입하면

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)$

$=t^3-3t^2-2$

$f(t)=t^3-3t^2-2$에서

$f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$f'(t)=0$에서

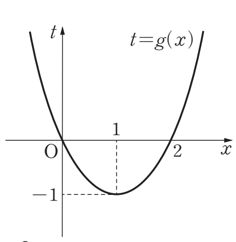
$3t(t-2)=0$ $\quad\therefore$ $t=0$ 또는 $t=2$

$t\le1$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(t)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(t)$	$\nearrow$	극대(-2)	$\searrow$	-4

따라서 함수 $f(t)$는 $t=0$일 때 최댓값을 가지므로 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은 -2이다.

32 답 ③



$g(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$

$g(x)=x^2-2x=t$로 놓으면

t의 값의 범위는 $t\ge-1$

$(f\circ g)(x)$에 $g(x)=t$를 대입하면

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-8$

$f(t)=t^3-8$에서 $f'(t)=3t^2$

$f'(t)=0$에서 $t=0$

$t\ge-1$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	$+$	0	$+$
$f(t)$	-9	$\nearrow$	-8	$\nearrow$

즉, 함수 $f(t)$는 $t=-1$일 때 최솟값 -9를 갖는다.

이때, $x^2-2x=-1$에서 $x=1$이므로 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -9를 갖는다.

따라서 $a=1$, $m=-9$이므로

$a+m=1+(-9)=-8$

33 답 ②

$x+3y=6$에서 $y=2-\frac{1}{3}x$

$x\ge0$, $y\ge0$이므로

$x\ge0$, $2-\frac{1}{3}x\ge0$

$\therefore$ $0\le x\le6$

$y=2-\frac{1}{3}x$를 x^2y에 대입하면

$x^2y=x^2\left(2-\frac{1}{3}x\right)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2$

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2$이라 하면

$f'(x)=-x^2+4x=-x(x-4)$

$f'(x)=0$에서

$-x(x-4)=0$ $\quad\therefore$ $x=0$ 또는 $x=4$

$0\le x\le6$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	극대 $\left(\frac{32}{3}\right)$	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $\frac{32}{3}$, $x=0$ 또는 $x=6$에서 최솟값 0을 가지므로

(최댓값)+(최솟값)$=\frac{32}{3}+0=\frac{32}{3}$

다른 풀이

$x+3y=6$에서 $x=6-3y$

$x\ge0$, $y\ge0$이므로

$6-3y\ge0$, $y\ge0$ $\quad\therefore$ $0\le y\le2$

$x=6-3y$를 x^2y에 대입하면

$x^2y=(6-3y)^2y=9y^3-36y^2+36y$

$g(y)=9y^3-36y^2+36y$라 하면

$g'(y)=27y^2-72y+36=9(3y-2)(y-2)$

$g'(y)=0$에서

$9(3y-2)(y-2)=0$ $\quad\therefore$ $y=\frac{2}{3}$ 또는 $y=2$

따라서 $g(0)=0$, $g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{3}$, $g(2)=0$

이므로 함수 $g(y)$의 최댓값은 $\frac{32}{3}$, 최솟값은 0이다.

$\therefore$ (최댓값)+(최솟값)$=\frac{32}{3}$

34 답 ③

$y=4-x^2$에서 $y\geq0$이므로 $4-x^2\geq0$

$(x-2)(x+2)\leq0 \quad \therefore -2\leq x\leq2$

$y=4-x^2$을 xy에 대입하면 $x(4-x^2)=-x^3+4x$

$f(x)=-x^3+4x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+4=-3\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$f'(x)=0$에서 $-3\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=0$

$\therefore x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$-2\leq x\leq2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	↘	극소 $\left(-\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$	↗	극대 $\left(\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$에서 최솟값 $-\frac{16\sqrt{3}}{9}$,

$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$에서 최댓값 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$을 가지므로

$a=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ b=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore a+b=0$

35 답 ①

$x^2+4y^2=4$에서 $y^2=\frac{4-x^2}{4}$

실수 y에 대하여 $y^2\geq0$이므로 $\frac{4-x^2}{4}\geq0$

$4-x^2\geq0,\ (x+2)(x-2)\leq0$

$\therefore -2\leq x\leq2$

$y^2=\frac{4-x^2}{4}$을 $2x^2+4xy^2$에 대입하면

$2x^2+4xy^2=2x^2+4x\times\left(\frac{4-x^2}{4}\right)$

$\qquad\qquad=-x^3+2x^2+4x$

$f(x)=-x^3+2x^2+4x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+4x+4=-(3x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$-(3x+2)(x-2)=0 \quad \therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

$-2\leq x\leq2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	8	↘	극소 $\left(-\frac{40}{27}\right)$	↗	8

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2}{3}$에서 최솟값 $-\frac{40}{27}$,

$x=-2$ 또는 $x=2$에서 최댓값 8을 갖는다.

$\therefore$ (최솟값)$\times$(최댓값)$=-\frac{320}{27}$

36 답 ③

곡선 $y=x^2$ 위의 점 P의 x좌표를 t라 하면 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(t-3)^2+(t^2-0)^2=t^4+t^2-6t+9$

이때, $\overline{\mathrm{AP}}^2$의 값이 최소일 때 $\overline{\mathrm{AP}}$의 값도 최소이다.

$f(t)=t^4+t^2-6t+9$라 하면

$f'(t)=4t^3+2t-6$

$\qquad=2(2t^3+t-3)$

$\qquad=2(t-1)(2t^2+2t+3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ & & 2 & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f'(t)=0$에서

$2(t-1)(2t^2+2t+3)=0 \quad \therefore t=1$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소(5)	↗

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

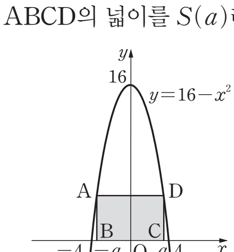
37 답 ②

그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 꼭짓점 D의 x좌표를 $a(0<a<4)$라 하면

$\mathrm{A}(-a,\ 16-a^2),\ \mathrm{B}(-a,\ 0)$

$\mathrm{C}(a,\ 0),\ \mathrm{D}(a,\ 16-a^2)$

이때, 직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라고 하면



$S(a)=2a(16-a^2)=-2a^3+32a$에서

$S'(a)=-6a^2+32=-6\left(a^2-\frac{16}{3}\right)$

$S'(a)=0$에서

$-6\left(a^2-\frac{16}{3}\right)=0$

$-6\left(a+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\left(a-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=0$

$\therefore a=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 또는 $a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$0<a<4$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(4)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

함수 $S(a)$는 $a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로

직사각형의 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=-2\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^3+32\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{256\sqrt{3}}{9}$

따라서 $p=9$, $q=256$이므로

$p+q=9+256=265$

38 답 ③

$9-x^2=0$에서

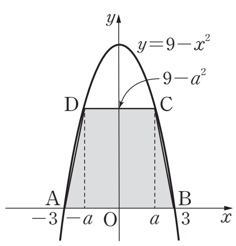
$(3+x)(3-x)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=-3$

즉, $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$이고,

점 C의 x좌표를

$a(0<a<3)$라 하면



$\mathrm{C}(a,\ 9-a^2)$, $\mathrm{D}(-a,\ 9-a^2)$

$\overline{\mathrm{AB}}=6$이고, $\overline{\mathrm{CD}}=2a$이므로 사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}(6+2a)(9-a^2)=-a^3-3a^2+9a+27$

$S'(a)=-3a^2-6a+9=-3(a+3)(a-1)$

$S'(a)=0$에서

$-3(a+3)(a-1)=0\quad\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

$0<a<3$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대(32)	$\searrow$	

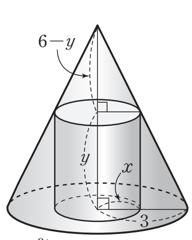
따라서 함수 $S(a)$는 $a=1$일 때 극대이면서 최대이므로

사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은

$S(1)=-1-3+9+27=32$

39 답 ⑤

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면



$3:6=x:(6-y)$

$\therefore y=6-2x\ (0<x<3)$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(6-2x)=2\pi(3x^2-x^3)$

$V'(x)=2\pi(6x-3x^2)=-6\pi x(x-2)$

$V'(x)=0$에서

$-6\pi x(x-2)=0\quad\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$0<x<3$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대(8π)	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로

원기둥의 부피의 최댓값은

$V(2)=2\pi\times(12-8)=8\pi$

40 답 ④

그림에서 $2y+x=12$, $2y+2z=12$이므로

$x=12-2y$, $z=6-y\ \cdots$ ㉠

$x>0$, $y>0$, $z>0$이므로

$x=12-2y>0$, $y>0$, $z=6-y>0$

$\therefore 0<y<6$

직육면체의 부피를 $V(y)$라 하면

$V(y)=xyz=(12-2y)\times y\times(6-y)$ ($\because$ ㉠)

$\quad=2y^3-24y^2+72y$

$V'(y)=6y^2-48y+72=6(y-2)(y-6)$

$V'(y)=0$에서

$6(y-2)(y-6)=0\quad\therefore y=2$ 또는 $y=6$

$0<y<6$에서 함수 $V(y)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

y	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$V'(y)$		$+$	0	$-$	
$V(y)$		$\nearrow$	극대(64)	$\searrow$	

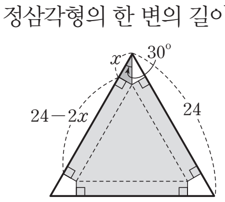
따라서 함수 $V(y)$는 $y=2$일 때 극대이면서 최대이므로

이 상자의 부피의 최댓값은

$V(2)=16-96+144=64$

41 답 ④

그림과 같이 잘라 낼 사각형에서 긴 변의 길이를 x라 하면 삼각기둥의 밑면인 정삼각형의 한 변의 길이는 $24-2x$이다.



즉, $x>0$, $24-2x>0$이므로 $0<x<12$

삼각기둥의 높이를 h라 하면

$h=x\tan 30^\circ=\frac{x}{\sqrt{3}}$

삼각기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(24-2x)^2h$

$\quad=\sqrt{3}(12-x)^2\times\frac{x}{\sqrt{3}}$

$\quad=x(x-12)^2$

$V'(x)=(x-12)^2+x\times 2(x-12)$

$\quad\quad =3(x-4)(x-12)$

$V'(x)=0$에서

$3(x-4)(x-12)=0 \quad \therefore x=4$ 또는 $x=12$

$0<x<12$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(12)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대(256)	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=4$일 때 극대이면서 최대이므로 이 상자의 부피의 최댓값은

$V(4)=4\times 8^2=256$

42 답 ③

$x^3-2x=x+a$에서 $x^3-3x-a=0$

$f(x)=x^3-3x-a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$3(x+1)(x-1)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 극댓값 또는 극솟값을 가지므로 극댓값 또는 극솟값은

$f(-1)=-1+3-a=2-a$

$f(1)=1-3-a=-2-a$

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 조건은

(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이므로

$(2-a)(-2-a)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합은 0이다.

다른 풀이

$x^3-2x=x+a$에서 $x^3-3x=a$

이때, 방정식 $x^3-3x=a$가 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 함수 $y=x^3-3x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 2개이어야 한다.

$g(x)=x^3-3x$로 놓으면

$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

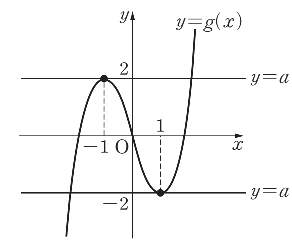
$g'(x)=0$에서

$3(x+1)(x-1)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	극대 (2)	$\searrow$	극소 (-2)	$\nearrow$

함수 $y=g(x)$의 그래프를 그린 후, $y=g(x)$의 그래프와의 교점이 2개가 되도록 직선 $y=a$를 그으면 다음 그림과 같다.



따라서 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 $a=-2$ 또는 $a=2$이므로 그 합은 0이다.

43 답 ④

$x^3-12x=a$에서

$x^3-12x-a=0$

$f(x)=x^3-12x-a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$3(x+2)(x-2)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대 $(16-a)$	$\searrow$	극소 $(-16-a)$	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-2)=16-a$, 극솟값은 $f(2)=-16-a$이고, 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로

$(16-a)(-16-a)<0 \quad \therefore -16<a<16$

따라서 정수 a는 $-15, -14, \cdots, 0, 1, 2, \cdots, 14, 15$로 31개이다.

44 답 ②

$2x^3-a+2=6x^2+18x$에서

$2x^3-6x^2-18x-a+2=0$

$f(x)=2x^3-6x^2-18x-a+2$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x^2-2x-3)$

$\quad\quad =6(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$6(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=3$에서 극댓값 또는 극솟값을 갖고 삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근, 즉 한 실근과 두 허근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)>0이어야 한다.

$f(-1)=-2-6+18-a+2=12-a$

$f(3)=54-54-54-a+2=-52-a$

이므로

$(12-a)(-52-a)>0 \quad \therefore a<-52$ 또는 $a>12$

따라서 자연수 a의 최솟값은 13이다.

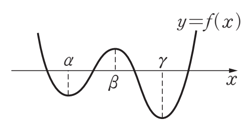
45 답 ④

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, β, γ이고 $\alpha<\beta<\gamma$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

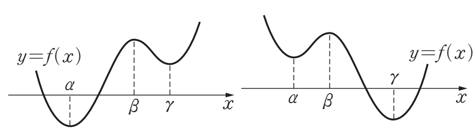
따라서 $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$의 값은 각각 극솟값, 극댓값, 극솟값이다.

조건 (가)에서 $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)<0$을 만족시키는 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같으므로 사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.



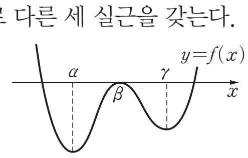
[그림 1]

조건 (나)에서 $f(\alpha)f(\gamma)<0$을 만족시키는 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같으므로 사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



[그림 2]

조건 (다)에서 $f(\beta)=0$을 만족시키는 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같으므로 사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



[그림 3]

따라서 서로 다른 실근의 개수가 작은 것부터 차례로 나열하면 (나), (다), (가)이다.

46 답 21

$3x^4-8x^3-6x^2+24x-k=0$에서

$3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$

$g(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$로 놓으면

$g'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

$=12(x^3-2x^2-x+2)$

$=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$g'(x)=0$에서

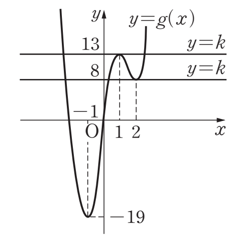
$12(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소 (-19)	↗	극대 (13)	↘	극소 (8)	↗

$f(k)=3$일 때, 즉 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $k=8$ 또는 $k=13$이다.



따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $8+13=21$이다.

47 답 ④

$2x^4+4x^3-k=-x^4+12x^2$에서 $3x^4+4x^3-12x^2=k$

이때, 방정식 $3x^4+4x^3-12x^2=k$가 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $y=3x^4+4x^3-12x^2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 4개이어야 한다.

$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2$으로 놓으면

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x^2+x-2)$

$=12x(x+2)(x-1)$

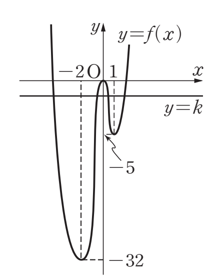
$f'(x)=0$에서 $12x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소 (-32)	↗	극대 (0)	↘	극소 (-5)	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 교점이 4개가 되도록 직선 $y=k$를 그으면 그림과 같다.



따라서 방정식 $2x^4+4x^3-k=-x^4+12x^2$이 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-5<k<0$이므로 정수 k는 -4, -3, -2, -1의 4개이다.

48 답 ③

$f(x)=x^3-3x^2+3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

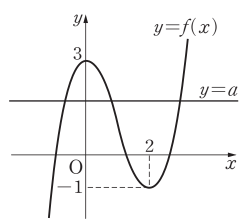
$f'(x)=0$에서

$3x(x-2)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대 (3)	↘	극소 (-1)	↗

방정식 $x^3-3x^2+3=a$가 한 개의 음수인 근과 서로 다른 두 개의 양수인 근을 갖도록 하려면 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수, 서로 다른 두 개는 양수가 되도록 하면 된다.



즉, 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는 $-1<a<3$이다.
따라서 정수 a는 0, 1, 2이므로 그 합은 $0+1+2=3$이다.

49 답 ③

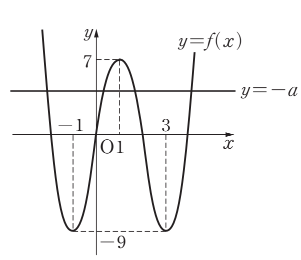
$x^4-4x^3-2x^2+12x+a=0$에서
$x^4-4x^3-2x^2+12x=-a$
$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$로 놓으면
$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$
$\quad=4(x^3-3x^2-x+3)$
$\quad=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ & & 1 & -2 & -3 \\ \hline -1 & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \\ & & -1 & 3 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f'(x)=0$에서
$4(x+1)(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소 (-9)	↗	극대 (7)	↘	극소 (-9)	↗

방정식 $x^4-4x^3-2x^2+12x+a=0$이 한 개의 음수인 근과 서로 다른 세 개의 양수인 근을 갖도록 하려면 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수, 서로 다른 세 개는 양수가 되도록 하면 된다.



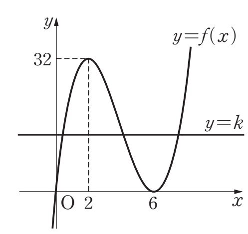
따라서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는 $0<-a<7$에서 $-7<a<0$이므로 정수 a는 $-1, -2, \cdots, -6$의 6개이다.

50 답 ④

$x^3-k=12x(x-3)$에서 $x^3-k=12x^2-36x$
$\therefore x^3-12x^2+36x=k$
$f(x)=x^3-12x^2+36x$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x^2-8x+12)$
$\quad=3(x-2)(x-6)$
$f'(x)=0$에서
$3(x-2)(x-6)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=6$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대 (32)	↘	극소 (0)	↗

방정식 $x^3-k=12x(x-3)$이 서로 다른 세 개의 양수인 근을 갖도록 하려면 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 세 개 모두 양수가 되도록 하면 된다.



따라서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는 $0<k<32$이므로 정수 k는 1, 2, $\cdots$, 31의 31개이다.

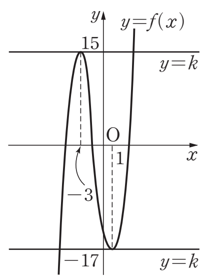
51 답 ②

두 곡선 $y=2x^2-9x-12$, $y=-x^3-x^2+k$가 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접하려면 방정식
$2x^2-9x-12=-x^3-x^2+k$, 즉 $x^3+3x^2-9x-12=k$가 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.
즉, 함수 $y=x^3+3x^2-9x-12$의 그래프와 직선 $y=k$의 서로 다른 교점의 개수가 2이어야 한다.
$f(x)=x^3+3x^2-9x-12$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)$
$\quad=3(x+3)(x-1)$
$f'(x)=0$에서
$3(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대 (15)	↘	극소 (-17)	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 서로 다른 교점의 개수가 2가 되도록 그리면 그림과 같다.

따라서 실수 k의 값은
$k=-17$ 또는 $k=15$이므로 그 합은 $-17+15=-2$이다.



다른 풀이

$g(x)=x^3+3x^2-9x-12-k$로 놓으면

$g'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

이때, 함수 $g(x)$는 $x=-3$, $x=1$에서 극값을 가지고, 삼차방정식 $g(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가지려면 (극댓값)×(극솟값)=0이어야 하므로

$g(-3)g(1)=(15-k)(-17-k)=0$

$\therefore k=-17$ 또는 $k=15$

따라서 구하는 k의 값의 합은 $-17+15=-2$이다.

52 답 ③

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x^3-3x^2-8x=4x+k$, 즉 $2x^3-3x^2-12x=k$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

즉, 함수 $y=2x^3-3x^2-12x$의 그래프와 직선 $y=k$의 서로 다른 교점의 개수가 3이어야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x+1)(x-2)$

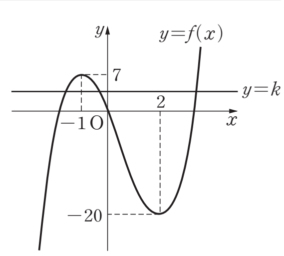
$f'(x)=0$에서

$6(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대 (7)	↘	극소 (-20)	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 서로 다른 교점의 개수가 3이 되도록 그리면 그림과 같다.



따라서 $-20<k<7$이므로 정수 k는 $-19, -18, \cdots, 5, 6$의 26개이다.

53 답 ④

곡선 $y=2x^4-4x^2+2x+1$과 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x^4-4x^2+2x+1=2x+k$, 즉 $2x^4-4x^2+1=k$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

즉, 함수 $y=2x^4-4x^2+1$의 그래프와 직선 $y=k$의 서로 다른 교점의 개수가 3이어야 한다.

$f(x)=2x^4-4x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x^2-1)$

$\qquad =8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

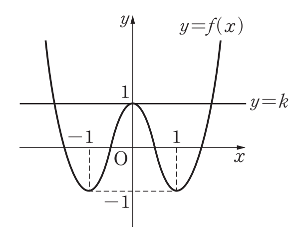
$8x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소 (-1)	↗	극대 (1)	↘	극소 (-1)	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 그림과 같이 $k=1$이어야 한다.



54 답 (가) 0 (나) ≥

$x^3+4\geq 3x^2$에서

$x^3-3x^2+4\geq 0$

$f(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$3x(x-2)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	극소(0)	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(2)=8-12+4=0$ (가)

즉, $x\geq 0$일 때 $f(x)\geq 0$이므로 (나)

$x^3-3x^2+4\geq 0$

$\therefore x^3+4\geq 3x^2$

따라서 $x\geq 0$일 때, 부등식 $x^3+4\geq 3x^2$이 성립한다.

55 답 ③

$2x^4-3x^2>x^2-2$에서 $2x^4-4x^2+2>0$

$f(x)=2x^4-4x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x^2-1)$

$\qquad =8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$8x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$x\ge1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	↗

$x\ge1$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 최솟값을 가지므로

$f(1)=2-4+2=\boxed{0}$ (가)

즉, $x>1$인 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\boxed{>}0$ (나)

따라서 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여

부등식 $2x^4-3x^2>x^2-2$가 성립한다.

56 답 ④

$f(x)=3x^4-4x^3+a$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$12x^2(x-1)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	+
$f(x)$	↘	a	↘	극소 $(a-1)$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$f(1)=3-4+a=a-1\ge0 \quad \therefore a\ge1$

따라서 실수 a의 최솟값은 1이다.

57 답 ④

$F(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$F(x)=(x^4+x^3-10x+a)-(x^3-3x^2)$

$\quad =x^4+3x^2-10x+a$

$F'(x)=4x^3+6x-10$

$\quad =2(2x^3+3x-5)$

$\quad =2(x-1)(2x^2+2x+5)$

1	2	0	3	-5
		2	2	5
	2	2	5	0

$F'(x)=0$에서

$2(x-1)(2x^2+2x+5)=0 \quad \therefore x=1$

함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	+
$F(x)$	↘	극소 $(a-6)$	↗

함수 $F(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$F(1)=1+3-10+a=a-6$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$가 성립하려면

($F(x)$의 최솟값)≥0이어야 하므로

$a-6\ge0 \quad \therefore a\ge6$

따라서 실수 a의 최솟값은 6이다.

58 답 ③

$4x^3-6x>3x^2-k$에서

$4x^3-3x^2-6x+k>0$

$f(x)=4x^3-3x^2-6x+k$로 놓으면

$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x^2-x-1)$

$\quad =6(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$6(2x+1)(x-1)=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$1<x<3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	(3)
$f'(x)$		+	
$f(x)$		↗	

즉, 함수 $f(x)$는 $1<x<3$에서 증가하므로 $1<x<3$에서 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(1)\ge0$이어야 한다.

$f(1)=4-3-6+k\ge0$

$\therefore k\ge5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 5이다.

59 답 ④

점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=t^3+at^2+2$이므로 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2at$ … ㉠

$t=2$일 때, $v=20$이라 하므로 ㉠에 $t=2$를 대입하면

$12+4a=20$

$4a=8 \quad \therefore a=2$

60 답 8

점 P의 시각 t에서의 위치가

$x=\frac{2}{3}t^3+kt^2+t+4$이므로 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=2t^2+2kt+1$

$t=3$일 때의 속도가 7이므로

$18+6k+1=7 \quad \therefore k=-2$

$\therefore v=2t^2-4t+1$

따라서 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=4t-4$

이므로 $t=3$일 때의 가속도는 $12-4=8$이다.

61 답 ③

점 P의 시각 t에서의 위치가

$x=-\frac{1}{3}t^3+t^2+6t$이므로 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-t^2+2t+6=-(t-1)^2+7$

따라서 $t\geq0$에서 점 P는 $t=1$일 때 속도가 최대이므로 속도의 최댓값은 7이다.

62 답 9

점 P의 시각 t에서의 위치가

$f(t)=t^3-3t^2-6t$이므로 속도를 v라 하면

$v=f'(t)=3t^2-6t-6=3(t-1)^2-9$

$t=1$일 때, 점 P의 속도의 최솟값은 -9이고

$f'(0)=-6$, $f'(3)=27-18-6=3$

즉, $0\leq t\leq3$에서 $-9\leq f'(t)\leq3$이므로

$0\leq|f'(t)|\leq9$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 9이다.

63 답 ②

점 P의 시각 t에서의 위치가

$x=t^4-4t+10$이므로 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=4t^3-4=4(t^3-1)$

$=4(t-1)(t^2+t+1)$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 $v=0$이므로

$4(t-1)(t^2+t+1)=0 \quad \therefore t=1$

따라서 운동 방향을 바꿀 때의 점 P의 위치는

$x=1-4+10=7$

64 답 ②

점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=t^3-6t^2+9t$이고, 점 P가 원점을 지날 때는 $x=0$이므로

$t^3-6t^2+9t=0$, $t(t^2-6t+9)=0$

$t(t-3)^2=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=3$

즉, 점 P가 출발한 후 다시 원점을 지날 때는 $t=3$일 때이다.

점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+9$

$a=\frac{dv}{dt}=6t-12$

따라서 $t=3$일 때의 점 P의 가속도는 $18-12=6$이다.

65 답 ③

점 P의 시각 t에서의 위치가

$x=2t^3-12t^2+18t+2$이므로 속도 v를 구하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-24t+18$

$=6(t^2-4t+3)=6(t-1)(t-3)$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 $v=0$이므로

$6(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

$t=1$일 때의 점 P의 위치 x_1은

$x_1=2-12+18+2=10$

$t=3$일 때의 점 P의 위치 x_2는

$x_2=54-108+54+2=2$

따라서 두 위치 x_1, x_2 사이의 거리는 $|10-2|=8$이다.

66 답 ①

$t=1$일 때의 점 P의 위치가 5이므로 $f(1)=5$에서

$-1+a+b=5$

$\therefore a+b=6$ ⋯ ㉠

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=-3t^2+2at+b$ ⋯ ㉡

$t=1$일 때, 점 P의 속도는 $v(1)=5$이므로

㉡에 $t=1$을 대입하면

$v(1)=f'(1)=-3+2a+b=5$

$\therefore 2a+b=8$ ⋯ ㉢

㉢−㉠을 하면 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$2+b=6 \quad \therefore b=4$

즉, $v(t)=-3t^2+4t+4=-(3t+2)(t-2)$이고 점 P가 시각 t에서 운동 방향을 바꾸면 속도 $v(t)=0$이므로

$-(3t+2)(t-2)=0 \quad \therefore t=2\ (\because t\geq0)$

67 답 ③

두 점 A, B의 시각 t에서의 속도를 각각 v_A, v_B라 하면

$v_A=t-3$, $v_B=2t-10$ ⋯ ㉠

이때, 두 점 A, B가 서로 반대 방향으로 움직이므로

$v_A v_B<0$

㉠을 위 식에 대입하면

$(t-3)(2t-10)<0$, $2(t-3)(t-5)<0$

$\therefore 3<t<5$

68 답 18

두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치가 각각 $x_P=t^4+12t^2$, $x_Q=6t^3+mt$이므로 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=4t^3+24t$, $v_Q=18t^2+m$

두 점 P, Q의 속도가 같게 되는 때가 두 번 있으려면 $t\geq0$에서 $v_P=v_Q$를 만족시키는 시각 t의 값이 두 개 존재해야 한다.

따라서 t에 대한 방정식 $4t^3+24t=18t^2+m$, 즉 $4t^3-18t^2+24t=m$이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 곡선 $y=4t^3-18t^2+24t$와 직선 $y=m$이 t좌표가 음이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

Ⅱ J

$f(t)=4t^3-18t^2+24t$로 놓으면

$f'(t)=12t^2-36t+24=12(t^2-3t+2)$

$\quad\;\;=12(t-1)(t-2)$

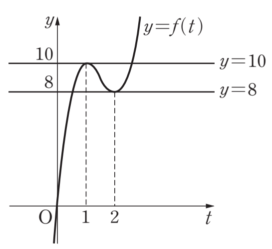
$f'(t)=0$에서

$12(t-1)(t-2)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

$t\geq0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	+	+	0	−	0	+
$f(t)$		↗	극대 (10)	↘	극소 (8)	↗

따라서 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=m$이 t좌표가 음이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나려면

$m=8$ 또는 $m=10$

따라서 모든 상수 m의 값의 합은 $8+10=18$이다.

69

답 ③

t초 후의 높이를 x m라 할 때, $x=30t-5t^2 \cdots$ ㉠인 관계가 있으므로 이 물체의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=30-10t$(m/s) $\cdots$ ㉡

위로 던진 물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도 $v=0$이므로 ㉡에서

$30-10t=0 \quad \therefore t=3$

따라서 ㉠에 $t=3$을 대입하면

$x=90-45=45$(m)

70

답 ①

t초 후의 높이를 x m라 할 때, $x=30+25t-5t^2$인 관계가 있으므로 이 공의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=25-10t \cdots$ ㉠

한편, 공이 땅에 떨어지면 높이는 0 m, 즉 $x=0$이므로

$30+25t-5t^2=0$

$t^2-5t-6=0$

$(t+1)(t-6)=0$

$\therefore t=6$ ($\because t\geq0$)

따라서 $t=6$을 ㉠에 대입하면

$v=25-60=-35$(m/s)

71

답 70 m

물로켓의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=a-10t$

이때, 최고 높이에 도달했을 때의 속도 $v=0$이고 그때까지 걸린 시간이 3초이므로

$a-30=0 \quad \therefore a=30$

따라서 $x=25+30t-5t^2$이므로 최고 높이에 도달했을 때의 높이는

$25+90-45=70$(m)

72

답 ④

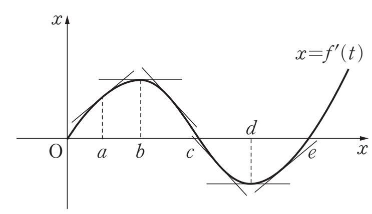
점 P가 출발한지 t초 후의 속도를 v라 하면

$v=f'(t)$

출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은 속도가 0이 되는 시각 좌우에서 속도의 부호가 바뀔 때이다.

즉, $t=c$, $t=e$에서 운동 방향이 바뀌므로 운동 방향이 바뀌는 횟수는 2회이다.

가속도가 0인 시각은 $x=f'(t)$의 그래프에서 접선의 기울기가 0이 되는 시각이다.



시각 $t=b$와 $t=d$에서 접선의 기울기가 0이므로 시각 $t=b$, $t=d$에서 가속도가 0이다.

즉, 가속도가 두 번째로 0인 시각은 $t=d$일 때이다.

따라서 구하는 것을 차례로 나열하면 2, d이다.

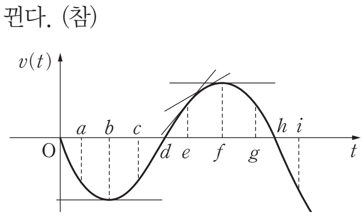
73

답 ③

ㄱ. $f<t<h$에서 함수 $v(t)$의 그래프가 감소하므로 속도는 감소한다. (거짓)

ㄴ. $t=d$와 $t=h$에서 $v(t)=0$이고, 그 점의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 달라지므로 점 P는 운동 방향이 2번 바뀐다. (참)

ㄷ.



$t=b$일 때, 접선의 기울기가 0이므로 가속도는 0이다. (참)

ㄹ. ㄷ의 그림을 보면 $d<t<f$에서 접선의 기울기가 작아지므로 가속도는 감소한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

74 답 ⑤

$l=t^2+2t+12$에서

$\frac{dl}{dt}=2t+2$

따라서 $t=3$일 때, 고무줄의 길이의 변화율은

$2\times3+2=8$(cm/s)

75 답 ②

한 변의 길이가 2 cm인 정삼각형에서 각 변의 길이가 매초 1 cm씩 길어지므로 t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(2+t)$ cm이다.

이때, t초 후의 정삼각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(2+t)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(t^2+4t+4)$

$\therefore \frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2t+4)=\frac{\sqrt{3}}{2}(t+2)$

한편, 정삼각형의 넓이가 $16\sqrt{3}$ cm^{2}가 될 때의 t의 값을 구하면

$\frac{\sqrt{3}}{4}(2+t)^2=16\sqrt{3}$, $(2+t)^2=64$

$2+t=\pm8 \quad \therefore t=6$ ($\because t\geq0$)

따라서 $t=6$일 때, 정삼각형의 넓이의 변화율은

$\frac{\sqrt{3}}{2}\times(6+2)=4\sqrt{3}$(cm^2/s)

76 답 ③

밑면은 가로의 길이가 3 cm, 세로의 길이가 4 cm인 직사각형이고 높이가 10 cm인 직육면체에서 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이는 매초 1 cm씩 길어지고 높이는 매초 1 cm씩 짧아지므로 t초 후의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이, 높이는 각각 $(3+t)$ cm, $(4+t)$ cm, $(10-t)$ cm이다.

이때, t초 후의 직육면체의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=(3+t)(4+t)(10-t)$

$\therefore \frac{dV}{dt}=(4+t)(10-t)+(3+t)(10-t)-(3+t)(4+t)$

$=-3t^2+6t+58$

따라서 $t=3$일 때, 직육면체의 부피의 변화율은

$-3\times9+6\times3+58=49$(cm^3/s)

연습 문제 [H~J] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 92~93

01 답 ①

$f(x)=-x^3+4x-4$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2+4$

점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-3+4=1$

즉, 점 $(1, -1)$에서의 접선의 방정식은

$y+1=1\times(x-1) \quad \therefore y=x-2$

이 접선과 곡선이 만나는 점의 x좌표를 구하기 위해 연립하면

$-x^3+4x-4=x-2$

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

즉, $x=-2$일 때, $y=-2-2=-4$

따라서 곡선과 접선이 다시 만나는 점의 좌표는 $(-2, -4)$이므로 $a=-2$, $b=-4$

$\therefore a+b=(-2)+(-4)=-6$

심플 정리

[인수정리와 조립제법]

(1) 인수정리

다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가진다.

(2) 조립제법

다항식 ax^3+bx^2+cx+d를 일차식 $x-\alpha$로 나눌 때,

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a & b & c & d \\ & & a\alpha & a\alpha^2+b\alpha & a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha \\ \hline & a & a\alpha+b & a\alpha^2+b\alpha+c & \boxed{a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d} \end{array}$$

$\therefore$ 몫 : $ax^2+(a\alpha+b)x+(a\alpha^2+b\alpha+c)$

나머지 : $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$

02 답 48

곡선 $y=f(x)$ 위의 접점의 좌표를 (t, t^3-at)라 하면

접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-a$

즉, 점 (t, t^3-at)에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-at)=(3t^2-a)(x-t)$

이 직선이 점 $(0, 16)$을 지나므로

$16-(t^3-at)=(3t^2-a)(0-t)$

$16-t^3+at=-3t^3+at$

$2t^3=-16$, $t^3=-8$

$\therefore t=-2$ ($\because t$는 실수)

$t=-2$일 때 접선의 기울기는 8이므로

$f'(-2)=12-a=8$

$\therefore a=4$

따라서 $f(x)=x^3-4x$이므로

$f(a)=f(4)=64-16=48$

Ⅱ H~J 연습

03 답 ②

곡선 $y=x^3-3x^2+x+1$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다.
접선이 서로 평행하다고 하니까 기울기가 같다는 거야. 즉, 미분계수가 같아야 해.
점 A의 x좌표가 3일 때, 점 B에서의 접선의 y절편의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

1st 먼저 도함수를 구하여 접선의 기울기를 구해야겠지?

$f(x)=x^3-3x^2+x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

점 A의 x좌표가 3이므로 점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=27-18+1=10$

2nd 점 B에서의 접선의 기울기가 점 A에서의 접선의 기울기와 같음을 이용하여 점 B의 좌표를 구하자.

이때, 점 B의 x좌표를 $a(a\neq3)$라 하면 점 B에서의 접선의 기울기와 점 A에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(a)=f'(3)=10$
두 점 A, B에서의 접선이 평행하므로 접선의 기울기, 즉 미분계수가 같아.

$f'(a)=3a^2-6a+1=10$

$3a^2-6a-9=0$, $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a\neq3$)

또, $f(-1)=-1-3-1+1=-4$이므로

점 B의 좌표는 $(-1, -4)$이다.

3rd 직선 $y=ax+b$의 y절편은 b야.

곡선 위의 점 B에서의 접선의 방정식은
미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$

$y+4=10(x+1)$ $\therefore y=10x+6$

따라서 구하는 접선의 y절편의 값은 6이다.

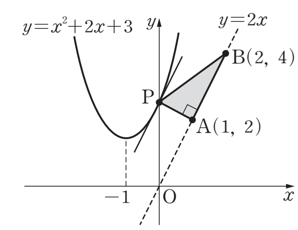
04 답 ③

곡선 $y=x^2+2x+3$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $y=2x$ 위의 두 점 A(1, 2), B(2, 4)에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은?
삼각형 ABP에서 두 점 A, B는 고정된 점이니까 점 P의 위치에 따라 넓이가 결정돼. 두 점 A, B를 지나는 직선과 점 P 사이의 거리가 최소일 때 삼각형 ABP의 넓이는 최소가 되겠지?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

1st 삼각형 ABP의 넓이가 최소가 되는 점 P의 위치를 구해.

삼각형 ABP의 넓이가 최소이려면 점 P와 두 점 A, B를 지나는 직선 사이의 거리가 최소이어야 하므로 점 P에서의 접선의 기울기가 두 점 A(1, 2), B(2, 4)를 지나는 직선의 기울기인 2와 같아야 한다.



2nd 점 P의 좌표를 구하자.

점 P의 x좌표를 a라 하자.

$f(x)=x^2+2x+3$으로 놓으면 $f'(x)=2x+2$이므로

$f'(a)=2a+2=2$ $\therefore a=0$
점 P에서의 접선과 직선 $y=2x$가 평행이야.

점 P의 좌표는 (0, 3)이고, 점 P와 직선 $y=2x$,

즉 $2x-y=0$ 사이의 거리는
△ABP에서 $\overline{AB}$를 밑변으로 하면 점 P와 직선 $y=2x$ 사이의 거리가 △ABP의 높이가 돼.

$\frac{|-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

(삼각형 ABP의 넓이의 최솟값)$=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{2}$

TIP

곡선 위의 점과 직선 사이의 최단 거리는
(i) 주어진 직선과 평행한 곡선의 접선의 접점의 좌표를 구한다.
(ii) 이 접점과 직선 사이의 거리가 구하는 최단 거리이다.

05 답 ⑤

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 (b, c)에서 접하므로

$f(b)=g(b)=c$, $f'(b)=g'(b)$

$f(x)=x^3-4x+1$에서 $f'(x)=3x^2-4$

$g(x)=3x^2-7x+a$에서 $g'(x)=6x-7$

$f'(b)=g'(b)$이므로

$3b^2-4=6b-7$, $3b^2-6b+3=0$

$3(b-1)^2=0$ $\therefore b=1$

또한, $f(b)=g(b)=c$이므로

$b^3-4b+1=3b^2-7b+a=c$ ⋯ ㉠

㉠에 $b=1$을 대입하면

$1-4+1=3-7+a=c$

$\therefore a=2, c=-2$

$\therefore a+b-c=2+1-(-2)=5$

06 답 ②

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+2$에서

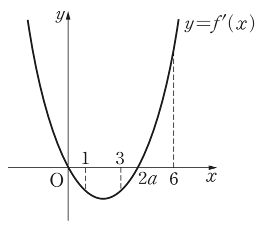
$f'(x)=x^2-2ax=x(x-2a)$

함수 $f(x)$가 열린구간 (1, 3)에서 감소하고, 열린구간 $(6, \infty)$에서 증가하므로

$1<x<3$일 때, $f'(x)\leq0$

$x>6$일 때, $f'(x)\geq0$

즉, $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



따라서 $3\le 2a\le 6$에서 $\frac{3}{2}\le a\le 3$이므로 정수 a는 2, 3의 2개이다.

07 답 ④

$f(x)=-x^3+12x+k$에서

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x^2-4)$

$\quad=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$-3(x+2)(x-2)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소 $(k-16)$	↗	극대 $(k+16)$	↘

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값이 1이므로

$k+16=1 \quad \therefore k=-15$

08 답 ②

$f(x)=x^3-(2k-3)x^2-8kx+4$에서

$f'(x)=3x^2-2(2k-3)x-8k$

$\quad=(x+2)(3x-4k)$

$f'(x)=0$에서

$(x+2)(3x-4k)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{4k}{3}$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같아야 한다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{4k}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $\frac{4k}{3}>-2$이므로 $k>-\frac{3}{2}$이다.

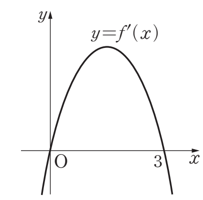
TIP

(1) 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에 대하여 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 가질 때
① $a>0$이면 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소
② $a<0$이면 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대

(2) 사차함수 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$에 대하여 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$를 가질 때
① $a>0$이면 $x=\alpha$, $x=\gamma$에서 극소, $x=\beta$에서 극대
② $a<0$이면 $x=\alpha$, $x=\gamma$에서 극대, $x=\beta$에서 극소

09 답 ③

삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다. $f(0)=-1$일 때, 다음 [보기] 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=f'(3)=0$)



그림은 도함수 $y=f'(x)$의 그래프야. 이 그래프에서 주의 깊게 봐야 하는 것은 $f'(x)$의 부호야. x축 위는 양, x축 아래는 음이지?

[보기]

ㄱ. $f(x)$의 극솟값은 -1이다.

ㄴ. $f(-1)<f(1)$ 삼차함수 $f(x)$가 $x=0$과 $x=3$에서 극값을 가질 때 그래프의 개형을 생각해야 해.

ㄷ. $f(x)$의 극댓값이 26이면 $f(1)=6$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st $f'(0)=f'(3)=0$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 0, 3이지? 이것으로 삼차함수 $f(x)$를 구해보자.

$y=f(x)$는 삼차함수이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$(단, a, b, c, d는 상수, $a\ne 0$)로 놓으면

$f(0)=-1$이므로 $d=-1$

즉, $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 0, 3이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면
(1) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ (2) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$0+3=-\frac{2b}{3a} \quad \therefore b=-\frac{9}{2}a$

$0\times 3=\frac{c}{3a} \quad \therefore c=0$

$\therefore f(x)=ax^3-\frac{9}{2}ax^2-1$

2nd 극솟값은 $f'(a)=0$인 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 어떻게 바뀌는지 생각해봐.

ㄱ. $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
즉, 극솟값은 $f(0)=-1$이다. (참)

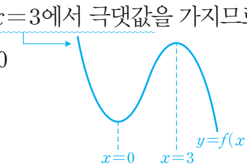
3rd 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 보고 함수 $y=f(x)$의 그래프를 유추해봐.

ㄴ. $f(-1)=-a-\frac{9}{2}a-1=-\frac{11}{2}a-1$

$f(1)=a-\frac{9}{2}a-1=-\frac{7}{2}a-1$

$f(x)$는 $x=0$에서 극솟값, $x=3$에서 극댓값을 가지므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$에서 $a<0$



$$f(-1)-f(1)=\left(-\frac{11}{2}a-1\right)-\left(-\frac{7}{2}a-1\right)$$
$$=-2a>0$$
$\therefore f(-1)>f(1)$ (거짓)

ㄷ. $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값 26을 가지면

$$f(3)=27a-\frac{81}{2}a-1=-\frac{27}{2}a-1=26$$

$$-\frac{27}{2}a=27 \quad \therefore a=-2$$

즉, $f(x)=-2x^3+9x^2-1$이므로

$f(1)=-2+9-1=6$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10 답 ①

$f(x)=x^3-3x^2+8$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$3x(x-2)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	6	↘	극소(4)	↗	24

따라서 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $m=4$, $x=4$에서 최댓값 $M=24$를 가지므로

$M+m=24+4=28$

11 답 1

주어진 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 닫힌구간 $[-3,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	↗	↗	극대(1)	↘	-4

따라서 닫힌구간 $[-3,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(-1)=1$이다.

12 답 2

주어진 방정식 $2x^3-3x^2+a=0$에서

$2x^3-3x^2=-a$

$f(x)=2x^3-3x^2$으로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

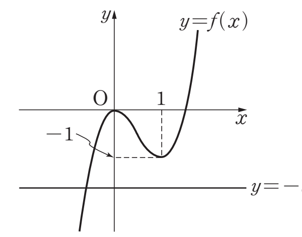
$f'(x)=0$에서

$6x(x-1)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대 (0)	↘	극소 (-1)	↗

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표의 값이 음수 1개만 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$-a<-1 \quad \therefore a>1$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.

13 답 ③

$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$3(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	↘	극소 $\left(a-\frac{7}{2}\right)$	↗

따라서 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=a-\frac{7}{2}$

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 (최솟값)≥ 0이어야 하므로

$a-\frac{7}{2}\geq 0 \quad \therefore a\geq\frac{7}{2}$

14 답 ⑤

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 x가

$x=t^3-9t^2+8t$

이다. 점 P가 처음으로 원점을 지날 때, 점 P의 속도는?

점 P가 원점을 지난다는 것은 위치가 0, 즉 $x=0$인 경우야.

① -15 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

1st 점 P가 원점을 지날 때는 $x=0$임을 이용하자.

점 P의 시각 $t\ (t>0)$에서의 위치 x가

$x=t^3-9t^2+8t=t(t^2-9t+8)$

$\quad=t(t-1)(t-8)$

이므로 $x=0$에서

$t(t-1)(t-8)=0$

$\therefore$ $t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=8$ 만약 $t\geq 0$이라면 $t=1$은 두 번째로 원점을 지날 때의 시각이야.

이때, $t>0$이므로 $t=1$에서 처음으로 원점을 지난다.

2nd 속도 $v=\dfrac{dx}{dt}$야. 여기에 $t=1$을 대입하면 돼.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

점 P의 시각 t에서의 위치를 x라 하면

속도 $v=\dfrac{dx}{dt}$, 가속도 $a=\dfrac{dv}{dt}$

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+8$

따라서 $t=1$에서의 속도는

$v=3-18+8=-7$

15

답 ③

t와 x 사이에는 $x=16t-0.8t^2$인 관계가 성립하므로 브레이크를 밟은 지 t초 후의 자동차 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=16-1.6t$

자동차가 정지할 때의 속도 $v=0$이므로

$16-1.6t=0$

$1.6t=16 \quad \therefore t=10$

따라서 제동 거리는 $x=16t-0.8t^2$에 $t=10$을 대입하면

$x=160-80=80(\text{m})$

16

답 $y=-4x+3$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -1을 가지므로

$f(2)=-1,\ f'(2)=0$ … ㉠ … Ⅰ

$g(x)=(x^2+1)f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는

$g'(2)=4f(2)+5f'(2)$

$\quad=4\times(-1)+5\times0$ ($\because$ ㉠)

$\quad=-4$

또, $g(2)=5f(2)=-5$ ($\because$ ㉠) … Ⅱ

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ -5)$에서의 접선의 방정식은

$y+5=-4(x-2) \quad \therefore y=-4x+3$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	$f(2)$, $f'(2)$의 값을 각각 구한다.	30%
Ⅱ	$g'(2)$, $g(2)$의 값을 각각 구한다.	40%
Ⅲ	곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식 구한다.	30%

Ⅱ 대단원 TEST [F~J]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 94~97

01

답 ③

x의 값이 -1에서 3까지 변할 때의 $f(x)$의 평균변화율이 4라고 하므로

$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{(9k+6-5)-(k-2-5)}{4}=4$$

$2k+2=4 \quad \therefore k=1$

따라서 $f(x)=x^2+2x-5$에서 $f'(x)=2x+2$이므로

$f'(k)=f'(1)=2+2=4$

02

답 ②

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)-f(-1-\Delta x)+f(-1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$$

$$\qquad-\lim_{\Delta x\to0}\left\{\frac{f(-1-\Delta x)-f(-1)}{-\Delta x}\times(-1)\right\}$$

$=f'(-1)+f'(-1)=2f'(-1)$

따라서 $f(x)=2x^2-3x+1$에서 $f'(x)=4x-3$이므로

구하는 값은

$2f'(-1)=2\times(-4-3)=-14$

03

답 ④

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{f(x+4)-5}{x^2+x-2}=1$에서

$\displaystyle\lim_{x\to-2}(x^2+x-2)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\{f(x+4)-5\}=0 \quad \therefore f(2)=5$ … ㉠

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x+4)-5}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x+4)-f(2)}{(x+2)(x-1)}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{x\to-2}\left\{\frac{f(x+4)-f(2)}{(x+4)-2}\times\frac{1}{x-1}\right\}$$

$=-\dfrac{1}{3}f'(2)=1$

$\therefore f'(2)=-3$

$\therefore f(2)-f'(2)=5-(-3)=8$

04

답 20

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$x=2$에서 연속이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2+}(5ax-12)=\lim_{x\to2-}(2x^2+ax+b)=10a-12$에서

$10a-12=8+2a+b$ … ㉠

$\therefore 8a-b=20$ … ㉡

또, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

미분계수 $f'(2)$의 값이 존재한다.

Ⅱ 대단원

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{5a(2+h)-12-(10a-12)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{5ah}{h}=5a$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{2(2+h)^2+a(2+h)+b-(10a-12)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{2h^2+8h+8+2a+ah+b-(8+2a+b)}{h}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{2h^2+(8+a)h}{h}=\lim_{h\to0-}(2h+8+a)=8+a$$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$이므로

$5a=8+a \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$16-a=20 \quad \therefore b=-4$

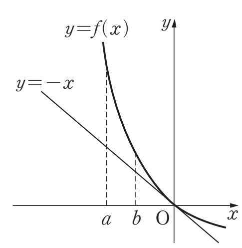
$\therefore a^2+b^2=2^2+(-4)^2=20$

05

답 ③

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 원점을 지나는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x$가 그림과 같다. $a<b<0$일 때, 다음 [보기] 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

$f(0)=0$임을 알 수 있어.



[보기]

ㄱ. $\frac{f(a)}{a}<\frac{f(b)}{b}$

ㄴ. $f(b)-f(a)>a-b$

ㄷ. $f'(a)<f'(b)$

$\frac{f(a)}{a}=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}$, $\frac{f(b)}{b}=\frac{f(b)-f(0)}{b-0}$ 으로 변형하여 생각해봐.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

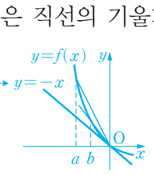
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 주어진 식을 평균변화율에 대한 식으로 바꿔서 생각하자.

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지나므로 $f(0)=0$이다.

즉, $\frac{f(a)}{a}=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}$은 원점과 점 $(a, f(a))$를 이은 직선의 기울기이고, $\frac{f(b)}{b}=\frac{f(b)-f(0)}{b-0}$은 원점과 점 $(b, f(b))$를 이은 직선의 기울기이므로 주어진 그림에서

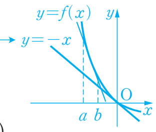
$\frac{f(a)}{a}<\frac{f(b)}{b}$ (참)



ㄴ. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 연결한 직선의 기울기이고, 이 값은 직선 $y=-x$의 기울기 -1보다 작으므로

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<-1$

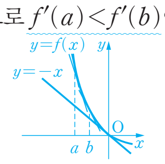
$\therefore f(b)-f(a)<a-b$ (거짓)



2nd $f'(a)$와 $f'(b)$는 각각 곡선 $y=f(x)$의 $x=a$, $x=b$에서의 접선의 기울기야.

$b-a>0$이므로 양변에 $b-a$를 곱해도 부등호의 방향은 변하지 않아.

ㄷ. $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기이므로 $f'(a)<f'(b)$이다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

06

답 ①

$f(x)=2x^3+ax+3$에서

$f'(x)=6x^2+a$

$f'(1)=6+a=7 \quad \therefore a=1$

07

답 56

곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 서로 다른 세 점의 x좌표가 $-2t$, 0, t이므로

$f(-2t)=0$, $f(0)=0$, $f(t)=0$

즉, $f(x)$는 $x+2t$, x, $x-t$를 인수로 가지고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x+2t)(x-t)$에서

$f'(x)=(x+2t)(x-t)+x(x-t)+x(x+2t)$

$=x^2+tx-2t^2+x^2-tx+x^2+2tx$

$=3x^2+2tx-2t^2$

$\therefore f'(4)=-2t^2+8t+48=-2(t-2)^2+56$

따라서 $f'(4)$의 최댓값은 $t=2$일 때 56이다.

08

답 181

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-4}{h}=3$에서 극한값이 존재하고

$\lim_{h\to0}h=0$이므로 $\lim_{h\to0}\{f(2+h)-4\}=0$이어야 한다.

$\therefore f(2)=4 \cdots ㉠$

즉, $f(x)=3x^2+ax+b$에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=12+2a+b=4 \quad \therefore 2a+b=-8 \cdots ㉡$

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-4}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\ (\because ㉠)$

$=f'(2)=3$

$f(x)=3x^2+ax+b$에서 $f'(x)=6x+a$이므로

$f'(2)=12+a=3 \quad \therefore a=-9$

$a=-9$를 ㉡에 대입하면

$-18+b=-8 \quad \therefore b=10$

$\therefore a^2+b^2=81+100=181$

09 답 ④

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면 $h(x)$는 미분가능한 함수이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$

$=h'(2)$

또한, $g(x)=x^3-x$에서 $g'(x)=3x^2-1$이므로

$g(2)=6$, $g'(2)=11$

따라서 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

(구하는 값)$=h'(2)$

$=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$=2\times6+1\times11=23$

10 답 ④

다항식 x^7-x^2+2를 $(x+1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)=ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$x^7-x^2+2=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ ⋯ ㉠

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$7x^6-2x=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$ ⋯ ㉡

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$-1-1+2=-a+b \quad \therefore -a+b=0$ ⋯ ㉢

㉡에 $x=-1$을 대입하면

$7+2=a \quad \therefore a=9$

$a=9$를 ㉢에 대입하면

$-9+b=0 \quad \therefore b=9$

따라서 나머지 $R(x)=9x+9$이다.

11 답 ③

$f(x)=-x^3+3x^2-4xf'(2)$에서

$f'(x)=-3x^2+6x-4f'(2)$

위 식에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=-12+12-4f'(2) \quad \therefore f'(2)=0$

따라서 $f'(x)=-3x^2+6x$에서

$a=-3$, $b=6$, $c=0$이므로

$a+b+c=(-3)+6+0=3$

12 답 ②

이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

(가) $f(0)=3$ 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓고 $f(x)$와 $f'(x)$의 식을 대입하여 정리해 봐.

(나) $2f(x)-(x+3)f'(x)=-2x-6$

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

1st 조건 (가)를 이용하여 함수 $f(x)$의 상수항을 구하자.

함수 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수, $a\neq0$)로 놓자.

조건 (가)에 의해 $f(0)=3$이므로 $c=3$

즉, $f(x)=ax^2+bx+3$이고 $f'(x)=2ax+b$이다.

2nd 조건 (나)에서 $f(x)$와 $f'(x)$를 대입한 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하니까 항등식이 떠오르지?

조건 (나)의

$2f(x)-(x+3)f'(x)=-2x-6$에서

$f(x)=ax^2+bx+3$, $f'(x)=2ax+b$를 각각 대입한 거야.

$2(ax^2+bx+3)-(x+3)(2ax+b)=-2x-6$

$2ax^2+2bx+6-2ax^2+(-b-6a)x-3b=-2x-6$

$(-6a+b)x+6-3b=-2x-6$

위의 식은 x에 대한 항등식이므로

$-6a+b=-2$, $6-3b=-6$

x의 계수끼리, 상수항끼리 같아야 해.

$6-3b=-6$에서 $b=4$

$b=4$를 $-6a+b=-2$에 대입하면

$-6a+4=-2 \quad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=x^2+4x+3$이므로

$f(3)=9+12+3=24$

13 답 ⑤

$f(x)=x^4+x^3+a$에서 $f'(x)=4x^3+3x^2$

점 $(-1, a)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-4+3=-1$

점 $(-1, a)$에서의 접선의 방정식은

$y-a=-(x+1) \quad \therefore y=-x+a-1$

이 접선이 점 $(2, -2)$를 지나므로 위 식에 $x=2$, $y=-2$를 대입하면

$-2=-2+a-1 \quad \therefore a=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a=1$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=f'(1)=4+3=7$이다.

14 답 ①

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선이 점 $(-1, 1)$에서 이 곡선과 만나므로 두 점 $(2, 4)$, $(-1, 1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$y-1=\frac{1-4}{-1-2}(x+1) \quad \therefore y=x+2$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+2$는 점 $(2, 4)$에서 접하고 점 $(-1, 1)$에서 만나므로 방정식 $f(x)=x+2$는 중근 $x=2$와 실근 $x=-1$을 갖는다.

즉, $f(x)$의 최고차항의 계수가 1에서

$f(x)-(x+2)=(x-2)^2(x+1)$이므로

$f(x)=(x-2)^2(x+1)+(x+2)=x^3-3x^2+x+6$

따라서 $f'(x)=3x^2-6x+1$이므로

$f'(3)=27-18+1=10$

15 답 ⑤

$f(x)=x^3+x^2+ax-2$에서

$f'(x)=3x^2+2x+a$

점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(-1)=3-2+a=-1$

$\therefore a=-2$

즉, $f(x)=x^3+x^2-2x-2$이므로

$f(-1)=-1+1+2-2=0$

직선 $y=-x+b$는 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=1+b \quad \therefore b=-1$

따라서 $a=-2$, $b=-1$이므로

$ab=(-2)\times(-1)=2$

16 답 ②

점 $(a, -a)$에서 곡선 $y=x^2$에 그은 두 개의 접선이 서로 수직일 때, 양수 a의 값은?

두 직선이 서로 수직이면 기울기의 곱은 -1이야.

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

1st 곡선 $y=x^2$ 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하자.

$f(x)=x^2$으로 놓으면 $f'(x)=2x$

점 $(a, -a)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선과 곡선의 접점의 좌표를 (t, t^2)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이고, 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2$

2nd 이 접선이 점 $(a, -a)$를 지남을 이용하여 t에 대한 방정식을 유도하자.

이 직선이 점 $(a, -a)$를 지나므로

$-a=2ta-t^2$

$\therefore t^2-2at-a=0$

t에 대한 이차방정식 $t^2-2at-a=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha\beta=-a$ ⋯ ㉠

$\alpha\beta$의 값을 구한 이유는 두 직선의 기울기의 곱을 이용하기 위해서야.

3rd 두 직선이 수직으로 만나면 기울기의 곱이 -1이지?

한편, 점 $(a, -a)$에서 곡선 $y=x^2$에 그은 두 개의 접선의 기울기는 각각

접점의 x좌표인 t의 값이 α, β의 2개지?

$f'(\alpha)=2\alpha$, $f'(\beta)=2\beta$

두 접선이 서로 수직이므로

$4\alpha\beta=-1$

두 직선이 서로 수직으로 만나면 두 직선의 기울기의 곱은 -1이야.

따라서 ㉠에 의해

$-4a=-1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

심플 정리

[근과 계수의 관계]

(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

(2) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

17 답 ②

$f(x)=-x^2+ax$에서

$f'(x)=-2x+a$

점 $(-1, b)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=2+a$

또한, $f(-1)=b$이므로

$-1-a=b$ ⋯ ㉠

점 $(-1, b)$, 즉 점 $(-1, -a-1)$에서의 접선의 방정식은

$y+a+1=(a+2)(x+1)$

$\therefore y=(a+2)x+1$

직선 $y=(a+2)x+1$의 x절편은 $-\frac{1}{a+2}$, y절편은 1이고

접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{6}$이므로

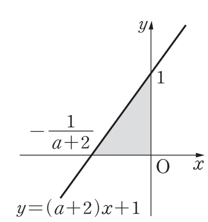
$\frac{1}{2}\times\frac{1}{a+2}\times 1=\frac{1}{6}$

$a+2=3 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$b=-1-1=-2$

$\therefore a-b=1-(-2)=3$

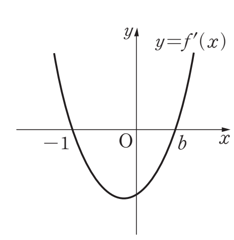


18 답 ④

$f(x)=x^3+ax^2-ax+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-a$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값은 $f'(x)\le 0$을 만족해야 하고, 이를 만족하는 x의 값의 범위가



$-1\le x\le b$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -1, b이다.

이차방정식 $3x^2+2ax-a=0$의 근과 계수의 관계에 의해

$-1+b=-\frac{2a}{3}$, $-1\times b=-\frac{a}{3}$

$-1\times b=-\frac{a}{3}$, 즉 $a=3b$를 $-1+b=-\frac{2a}{3}$에 대입하면

$-1+b=-2b \quad \therefore b=\frac{1}{3}$

$b=\frac{1}{3}$을 $a=3b$에 대입하면 $a=1$

$\therefore a+b=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

19 답 ⑤

$f(x)=-x^3+ax^2+3x+4+b$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+3$

함수 $f(x)$가 $x=-b$, $x=b$에서 극값을 가지므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 $-b$, b이다.

이차방정식 $f'(x)=-3x^2+2ax+3=0$의 근과 계수의 관계에 의해

$-b+b=-\dfrac{2a}{-3}=\dfrac{2a}{3}$, $-b\times b=\dfrac{3}{-3}=-1$

$-b+b=\dfrac{2a}{3}$에서 $a=0$

$-b\times b=-1$에서

$b^2=1 \quad \therefore b=1$ 또는 $b=-1$

즉, $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$이고,

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값을 갖고, $x=1$에서 극댓값을 가지므로 $b=1$

$\therefore f(x)=-x^3+3x+5$

따라서 함수 $f(x)$의

극솟값은 $f(-1)=1-3+5=3$,

극댓값은 $f(1)=-1+3+5=7$

이므로 모든 극값의 합은 $3+7=10$이다.

20 답 ①

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극값을 갖는다고 하므로 $f'(3)=0$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=-3$과 같이 극한값이 존재하고

$\lim\limits_{x\to0}x=0$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$이어야 한다.

$\therefore f(0)=0$ ⋯ ㉡

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ($\because$ ㉡)

$=f'(0)=-3$

$f(0)=0$이므로 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에 $x=0$을 대입하면 $c=0$

$f'(0)=-3$이므로 $f'(x)=3x^2+2ax+b$에 $x=0$을 대입하면 $b=-3$

㉠에 의해

$f'(3)=27+6a+b=0$ ⋯ ㉢

$b=-3$을 ㉢에 대입하면

$27+6a-3=0 \quad \therefore a=-4$

즉, $f(x)=x^3-4x^2-3x$이고

$f'(x)=3x^2-8x-3=(3x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$(3x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로 구하는 극솟값은

$f(3)=27-36-9=-18$이다.

21 답 ②

$f(x)=x^3+kx^2+3x$에서

$f'(x)=3x^2+2kx+3$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 양수인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 $3x^2+2kx+3=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이므로

$\dfrac{D}{4}=k^2-9>0$에서 $(k+3)(k-3)>0$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>3$ ⋯ ㉠

(ii) 두 근의 합이 양수이어야 하므로

$-\dfrac{2k}{3}>0 \quad \therefore k<0$ ⋯ ㉡

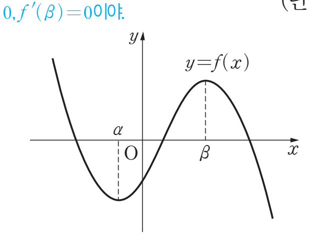
(iii) 두 근의 곱이 양수이어야 하므로 $\dfrac{3}{3}=1>0$

(i)~(iii)에서 ㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $k<-3$이므로 정수 k의 최댓값은 -4이다.

22 답 ⑤

삼차함수 $f(x)$는 그림과 같이 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고, $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다. 함수 $g(x)=f'(x)$라 할 때, [보기] 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha+\beta>0$)

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지므로 $f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$이야.



[보기]

ㄱ. $g(0)>0$

$y=g'(x)$의 그래프의 개형을 그려봐.

ㄴ. $g(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$에서 증가한다.

ㄷ. 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 $g'(c)=0$인 c가 α와 β 사이에 한 개 존재한다.

이 문장은 롤의 정리와 관계가 있겠네~.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Ⅱ
대단원

1st $g(x)=f'(x)$이므로 $g(0)=f'(0)>0$인지 따져주면 돼.

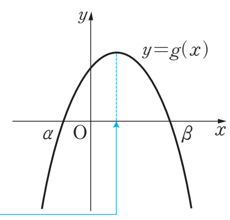
ㄱ. $g(x)=f'(x)$에서 $g(0)=f'(0)$

이때, $x=0$인 점에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프의 접선의 기울기 $f'(0)$은 양수이므로 $g(0)>0$ (참)

2nd $g(x)$의 그래프를 그려서 구간 $(-\infty, 0)$에서 증가하는지 알아보자.

ㄴ. $g(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$(단, $a<0$)의 그래프는 그림과 같다.

$y=f(x)$의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 점의 x좌표는 α, β야. 즉, $g(\alpha)=f'(\alpha)=0$, $g(\beta)=f'(\beta)=0$이니까 $g(x)$는 $x-\alpha$, $x-\beta$를 인수로 가져.



$\alpha+\beta>0$에서 이차함수 $g(x)$의 그래프의 축인 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$는 y축의 오른쪽에 그려져.

즉, 함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$에서 증가한다. (참)

3rd $g(\alpha)=g(\beta)=0$이니까 롤의 정리를 떠올려봐.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다.

이때, $g(\alpha)=g(\beta)=0$이므로 롤의 정리에 의해 $g'(c)=0$인 c가 α와 β 사이에 적어도 하나 존재한다.

그런데 함수 $g(x)$의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 점은 하나뿐이므로 $g'(c)=0$인 c는 α와 β 사이에 한 개만 존재한다. (참)

이차함수의 극값은 한 개만 존재하지?

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

23

답 ③

닫힌구간 $[0, 5]$에서 정의된 함수 $f(x)=x^3-9x^2+15x+a$의 최솟값이 -15일 때, 최댓값은? (단, a는 상수이다.)

닫힌구간에서 최솟값은 극솟값과 구간의 양 끝값에서의 함숫값 중 가장 작은 값이야.

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

1st 함수 $f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[0, 5]$에서 $f'(x)=0$인 x의 값을 구하자.

함수의 최대·최소를 구할 때에는 기본적으로 극값, 구간의 양 끝값에서의 함숫값을 구해봐야 해.

$f(x)=x^3-9x^2+15x+a$에서

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서

$3(x-1)(x-5)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=5$

2nd 닫힌구간 $[0, 5]$에서 최솟값을 구하고, a의 값을 구하자.

닫힌구간 $[0, 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	a	↗	극대 $(a+7)$	↘	$a-25$

즉, 닫힌구간 $[0, 5]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값 $a+7$, 최솟값 $a-25$를 갖는다.

주어진 구간에서 함수 $f(x)$가 극댓값을 가지면 (극댓값)=(최댓값)이야.

이때, 최솟값이 -15라 하므로

$a-25=-15$ $\therefore a=10$

따라서 최댓값은 $a+7=10+7=17$이다.

24

답 ⑤

점 P가 곡선 $y=-x^2$ 위를 움직이므로

점 P의 좌표를 $(a, -a^2)$으로 놓으면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(a-1)^2+a^4+(a-5)^2+a^4$

$=2a^4+2a^2-12a+26$

$f(a)=2a^4+2a^2-12a+26$이라 하면

1	2	0	1	-3
		2	2	3
	2	2	3	0

$f'(a)=8a^3+4a-12=4(2a^3+a-3)$

$=4(a-1)(2a^2+2a+3)$

$f'(a)=0$에서

$4(a-1)(2a^2+2a+3)=0$ $\therefore a=1$

함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(a)$는 $a=1$에서 극소이면서 최소이므로

함수 $f(a)$, 즉 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은

$f(1)=2+2-12+26=18$

25

답 ①

$y=5x+k$와 $y=x(x+1)(x-4)$를 연립하면

$x(x+1)(x-4)=5x+k$, $x(x+1)(x-4)-5x=k$

$\therefore x^3-3x^2-9x=k$

방정식 $x^3-3x^2-9x=k$가 서로 다른 두 실근을 가지면 직선 $y=5x+k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만난다.

즉, $h(x)=x^3-3x^2-9x$라 놓으면 방정식 $h(x)=k$를 만족시키는 서로 다른 두 실근이 존재하면 된다.

$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$

$=3(x+1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서

$3(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 극댓값

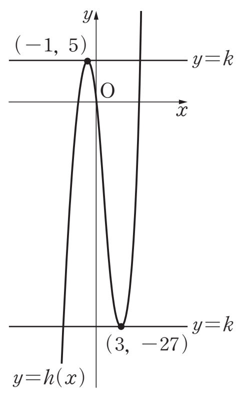
$h(-1)=-1-3+9=5$

를 갖고, $x=3$에서 극솟값

$h(3)=27-27-27=-27$

을 갖는다.

이때, 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 2개이려면 그림과 같이 직선 $y=k$가 함수 $h(x)$의 극대 또는 극소인 점에서 접하면 된다.



따라서 $k=5$ 또는 $k=-27$이므로 양수 k의 값은 5이다.

26 답 ③

삼차방정식 $x^3-12x-k=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. 세 실근 중 가장 작은 근을 α라 할 때, 정수 α의 값은? (단, k는 상수이다.)

$x^3-12x=k$에서 $y=x^3-12x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이라는 뜻이야.

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

1st 주어진 삼차방정식을 함수의 그래프로 바꾸어 생각하자.

삼차방정식 $x^3-12x-k=0$에서 $x^3-12x=k$

삼차방정식 $x^3-12x-k=0$의 실근의 개수는 함수 $y=x^3-12x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같아.

$f(x)=x^3-12x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12$
$=3(x^2-4)$
$=3(x+2)(x-2)$

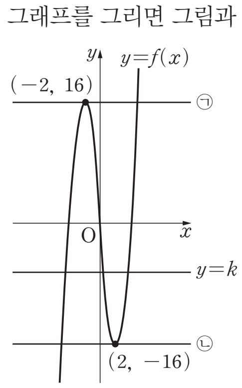
$f'(x)=0$에서

$3(x+2)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대 (16)	↘	극소 (-16)	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



2nd 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 해.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 그림에서

$-16<k<16$

3rd 방정식의 서로 다른 세 실근 중 가장 작은 근 α의 값의 범위를 구하자.

직선 $y=k$가 ㉠일 때의 삼차방정식의 근을 구하면

$x^3-12x=16$

$x^3-12x-16=0$

$(x+2)^2(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -12 & -16 \\ & & -2 & 4 & 16 \\ \hline -2 & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \\ & & -2 & 8 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & \end{array}$$

또, 직선 $y=k$가 ㉡일 때의 삼차방정식의 근을 구하면

$x^3-12x=-16$

$x^3-12x+16=0$

$(x-2)^2(x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-4$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -12 & 16 \\ & & 2 & 4 & -16 \\ \hline 2 & 1 & 2 & -8 & \boxed{0} \\ & & 2 & 8 & \\ \hline & 1 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만날 때, 주어진 방정식의 가장 작은 실근 α의 값의 범위는 $-4<\alpha<-2$이다.

따라서 정수 α의 값은 -3이다.

27 답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있기 위해서는

$f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 놓으면

$h(x)=x^4-3x^2+a-(-x^2+24x)$
$=x^4-2x^2-24x+a$

이므로

$h'(x)=4x^3-4x-24$
$=4(x^3-x-6)$
$=4(x-2)(x^2+2x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$h'(x)=0$에서

$4(x-2)(x^2+2x+3)=0$ $\quad\therefore x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소 $(a-40)$	↗

함수 $h(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 주어진 부등식이 항상 성립하려면

$h(2)=16-8-48+a=a-40>0$이어야 한다.

따라서 $a>40$이므로 정수 a의 최솟값은 41이다.

28 답 ②

속도 $v(t)$를 t에 대하여 미분하면 가속도이므로

$t=a$에서의 가속도는 $v'(a)$이다.

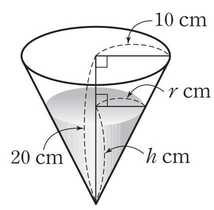
즉, $v(t)=-t^2+10t$에서 $v'(t)=-2t+10$이므로

$v'(a)=-2a+10=0$

$\therefore a=5$

29 답 ⑤

t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 수면의 높이를 h cm라 하면 그림에서



$10:20=r:h$

$\therefore r=\frac{1}{2}h$

이때, 수면의 높이가 매초 1.5 cm씩 올라가므로 t초 후의 수면의 높이는 $h=1.5t=\frac{3}{2}t(\text{cm})$이고, 수면의 반지름의 길이는 $r=\frac{1}{2}h=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}t=\frac{3}{4}t(\text{cm})$이다.

물의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{3}{4}t\right)^2\times\frac{3}{2}t=\frac{9}{32}\pi t^3$

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{27}{32}\pi t^2$

한편, 수면의 높이가 12 cm가 되는 시각은

$\frac{3}{2}t=12 \quad \therefore t=8$

따라서 $t=8$일 때의 물의 부피의 변화율은

$\frac{27}{32}\pi\times 8^2=\frac{27}{32}\pi\times 64=54\pi(\text{cm}^3/\text{s})$

30 답 14

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2+1}=2$와 같이 수렴하기 위해서는 분모와 분자의 차수가 같아야 하고 분자의 최고차항의 계수가 2이어야 한다.

즉, $f(x)-x^3=2x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)이므로

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ … Ⅰ

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=5$와 같이 수렴하고 $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$이어야 한다.

즉, $f(-1)=0$ … ㉠이므로

$f(-1)=-1+2-a+b=0$

$\therefore b=a-1$ … ㉡

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\ (\because ㉠)$$
$$=f'(-1)=5$$

$f'(x)=3x^2+4x+a$에서

$f'(-1)=3-4+a=5 \quad \therefore a=6$

$a=6$을 ㉡에 대입하면

$b=6-1=5$ … Ⅱ

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+6x+5$이므로

$f(1)=1+2+6+5=14$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2+1}=2$를 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.	40%
Ⅱ	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=5$를 이용하여 $f(-1)$, $f'(-1)$의 값을 찾아 a, b의 값을 각각 구한다.	40%
Ⅲ	$f(1)$의 값을 구한다.	20%

31 답 $y=-5x+6$

$f(x)=x^3-6x^2+7x-2$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+7=3(x-2)^2-5$

이차함수 $f'(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -5를 가지므로

$x=2$일 때 접선의 기울기가 -5로 최소가 된다. … Ⅰ

이때, $x=2$일 때 $f(2)=8-24+14-2=-4$이므로

접점의 좌표는 $(2, -4)$이다. … Ⅱ

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+4=-5(x-2) \quad \therefore y=-5x+6$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	도함수를 구하여 접선의 기울기가 최소인 x의 값과 그때의 최솟값을 구한다.	40%
Ⅱ	접선의 기울기가 최소일 때의 접점의 좌표를 구한다.	40%
Ⅲ	접선의 방정식을 구한다.	20%

Ⅲ 적분

Simple K 부정적분

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 100～101

01 답 부정적분

02 답 피적분함수

03 답 적분상수

04 답 $f(x)+C$

05 답 ×

$F'(x)=f(x)$일 때, 함수 $F(x)$는 $f(x)$의 부정적분이다.

06 답 ×

$\int f(x)\,dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)

07 답 ○

08 답 ×

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$

$\therefore \int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\neq\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}$

09 답 ○

10 답 ○

11 답 ×

12 답 ○

13 답 $\frac{1}{2}x^4+C$ (단, C는 적분상수)

14 답 $4x+C$ (단, C는 적분상수)

15 답 $-\frac{1}{3}x^9+C$ (단, C는 적분상수)

16 답 $\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

17 답 $f(x)=2x+3$

$f(x)=(x^2+3x+C)'$

$\therefore f(x)=2x+3$

18 답 $f(x)=3x^2+2x$

$f(x)=(x^3+x^2+C)'$

$\therefore f(x)=3x^2+2x$

19 답 $f(x)=x^3-6x^2-1$

$f(x)=\left(\frac{1}{4}x^4-2x^3-x+C\right)'$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2-1$

20 답 $4x$

$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\left\{\int 4x\,dx\right\}=4x$

21 답 $5x^4$

22 답 x^2+C (단, C는 적분상수)

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\int\left\{\frac{d}{dx}x^2\right\}dx=x^2+C$ (단, C는 적분상수)

23 답 x^9+C (단, C는 적분상수)

유형 연습 [+ 내신 유형] 문제편 pp. 102～103

24 답 ①

$f(x)=(x^3-2x+C)'=3x^2-2$

25 답 ①

$f(x)+1=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+C\right)'=x^3-3x$이므로

$f(x)=x^3-3x-1$

$\therefore f(1)=1-3-1=-3$

26 답 ③

$F(x)=2x^4+x^2-5$라 하면 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나가 $F(x)$이므로

$f(x)=F'(x)=8x^3+2x$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=8\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{2}=2$

27 답 ⑤

$h(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이때, $f(x)=3x^2$, $g(x)=4x-5$에서

$f'(x)=6x$, $g'(x)=4$

$\therefore h(x)=6x\times(4x-5)+3x^2\times4$

$=24x^2-30x+12x^2=36x^2-30x$

$\therefore h(1)=36-30=6$

28 답 ②

$f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int(x^4-2x^3+3x^2)\,dx\right\}$

$\quad=x^4-2x^3+3x^2$

$\therefore f(2)=16-16+12=12$

29 답 ④

$\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^3+3x^2+x-b)\,dx\right\}=2x^3+cx^2+x+9$에서

$ax^3+3x^2+x-b=2x^3+cx^2+x+9$

모든 실수 x에 대하여 위의 등식이 성립하므로 항등식의 성질에 의해

$a=2,\ b=-9,\ c=3$

$\therefore a-b+c=2-(-9)+3=14$

30 답 ②

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^3-x^2+5x)\right\}dx$

$\quad=2x^3-x^2+5x+C$ (단, C는 적분상수)

이고, $f(1)=5$이므로

$f(1)=2-1+5+C=5$

$\therefore C=-1$

즉, $f(x)=2x^3-x^2+5x-1$이므로

$f(0)=-1$

TIP

미분과 적분이 서로 역연산의 관계이기 때문에 미분과 적분이 만나면 당연히 원상태로 돌아온다. 이때, 순서가 중요하다. 즉,

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (C는 적분상수) ⋯ ㉠

$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$ ⋯ ㉡

에서 적분상수의 차이가 생긴다.

㉠은 미분을 먼저 하고 적분을 하기 때문에 적분상수가 생기는 것이고, ㉡은 적분을 먼저 하면 적분상수가 생기지만 뒤에 미분을 하기 때문에 상수의 미분이 0이므로 상수가 없어지게 되는 것이다.

미분과 적분이 같이 있을 때, 적분을 나중에 하면 적분상수가 생긴다는 사실을 기억하자.

'먼저 적분을 하고 나중에 미분을 하면

$\Rightarrow$ 원래의 식'

'먼저 미분을 하고 나중에 적분을 하면

$\Rightarrow$ (원래의 식)$+C$ (단, C는 적분상수)'

31 답 ④

주어진 등식의 좌변은

$\log_x\left(\frac{d}{dx}\int x^5\,dx\right)=\log_x x^5=5$

이므로 주어진 등식은

$5=x^2-3x+7,\ x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x\neq1)$

[로그의 기본 성질] 심플 정리

$a>0,\ a\neq1,\ x>0,\ y>0$일 때

(1) $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$

(2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

(4) $\log_a x^n=n\log_a x$ (단, n은 실수)

32 답 ⑤

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2$

$\quad=2f'(1)$

$f(x)=\int(x^2+4x+3)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+4x+3$

$\therefore 2f'(1)=2\times(1+4+3)=16$

33 답 ③

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$f(x)=\int(3x^2-5)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-5$

$\therefore f'(1)=3-5=-2$

34 답 ②

$F(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int(x-1)f(x)\,dx\right\}$

$\quad=(x-1)f(x)$

$\quad=(x-1)(-3x^3+4x)$

이므로

$F(-1)=(-2)\times(3-4)=2$

35 답 ③

$f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int(-2x^2+8x+a)\,dx\right\}$

$\quad=-2x^2+8x+a$

$\quad=-2(x-2)^2+8+a$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 9를 가지므로

$8+a=9\qquad\therefore a=1$

36 답 ⑤

$F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx$

$\quad=f(x)+C$

$\quad=10x^{10}-9x^9+\cdots+2x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $F(0)=10$이므로 $C=10$

따라서 $F(x)=10x^{10}-9x^9+\cdots+2x^2-x+10$이므로

$F(1)=10-9+\cdots+2-1+10$

$\quad=1+1+1+1+1+10=15$

Simple L 부정적분의 계산

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 104~105

01 답 $n+1$, $n+1$

02 답 x

03 답 $\int x^3dx$

04 답 2, $\int 4dx$

05 답 ×

$\int 3dx=3x+C$

06 답 ○

07 답 ○

$\int(x+2)dx+\int(x-2)dx$

$=\int\{(x+2)+(x-2)\}dx$

$=\int 2x dx$

08 답 ×

09 답 $2x+C$ (단, C는 적분상수)

10 답 $\frac{1}{4}x^4+C$ (단, C는 적분상수)

11 답 $\frac{1}{8}x^8+C$ (단, C는 적분상수)

12 답 $\frac{1}{11}x^{11}+C$ (단, C는 적분상수)

13 답 x^4+C (단, C는 적분상수)

14 답 x^5+C (단, C는 적분상수)

15 답 $3x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)

16 답 $\frac{1}{3}x^3+x+C$ (단, C는 적분상수)

17 답 $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

18 답 $-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$ (단, C는 적분상수)

19 답 $\frac{2}{5}x^5+\frac{7}{3}x^3-x+C$ (단, C는 적분상수)

20 답 $\frac{2}{3}x^6+x^3+5x+C$ (단, C는 적분상수)

21 답 $-\frac{1}{4}x^8+x^6-\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

22 답 $2x^7-\frac{5}{2}x^4+2x+C$ (단, C는 적분상수)

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 106~109

23 답 ④

C가 적분상수일 때,

① $\int 0\,dx=C$

② $\int dx=\int 1dx=x+C$

③ $\int\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+1}x^2+C=\frac{1}{4}x^2+C$

⑤ $\int\frac{1}{6}x^5\,dx=\frac{1}{6}\times\frac{1}{5+1}x^6+C=\frac{1}{36}x^6+C$

24 답 x^2y^3+C (단, C는 적분상수)

dy는 y에 대하여 적분한다는 뜻이므로 y 이외의 문자는 모두 상수로 생각한다.

$\therefore \int 3x^2y^2dy=3x^2\int y^2dy=3x^2\times\frac{1}{2+1}y^3+C$

$=x^2y^3+C$ (단, C는 적분상수)

25 답 ②

$\int(x+1)^2dx-\int(x-1)^2dx$

$=\int\{(x+1)^2-(x-1)^2\}dx$

$=\int\{(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)\}dx$

$=\int 4x\,dx=2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

26 답 ②

$\int\frac{x^3}{x+1}dx+\int\frac{1}{x+1}dx$

$=\int\left(\frac{x^3}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\int\frac{x^3+1}{x+1}dx$

$=\int\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx=\int(x^2-x+1)dx$

$=\int x^2dx-\int x\,dx+\int dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

TIP

$\int x^2dx-\int xdx+\int dx$에서 각각의 부정적분을 하면
$\frac{1}{3}x^3+C_1-\frac{1}{2}x^2+C_2+x+C_3$
으로 적분상수가 C_1, C_2, C_3의 세 개가 나온다.
그런데 상수끼리의 합은 상수이므로 $C=C_1+C_2+C_3$처럼 하나로 통합해서 표현하는 게 일반적이다.

27
답 ⑤

$\int \frac{1}{x}\,dx+\int \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}\,dx$
$=\int \frac{1}{x}\,dx+\int \frac{4x^2-1}{x}\,dx$
$=\int \frac{1+4x^2-1}{x}\,dx=\int \frac{4x^2}{x}\,dx$
$=\int 4x\,dx=2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

28
답 ⑤

$f'(x)=4x^3-2x+3$에서
$f(x)=\int f'(x)\,dx$
$=\int (4x^3-2x+3)\,dx$
$=x^4-x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)
이때, $f(0)=1$이므로 $C=1$
따라서 $f(x)=x^4-x^2+3x+1$이므로
$f(2)=16-4+6+1=19$

29
답 $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f'(x)=3x^2+2x-1$에서
$f(x)=\int (3x^2+2x-1)\,dx$
$=x^3+x^2-x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)
이때, $f(1)=1$이므로
$f(1)=1+1-1+C_1=1 \quad \therefore C_1=0$
따라서 $f(x)=x^3+x^2-x$이므로
$\int f(x)\,dx=\int (x^3+x^2-x)\,dx$
$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

30
답 ④

$f'(x)=\begin{cases} x-2 & (x\geq 1) \\ -1 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} \int (x-2)\,dx & (x\geq 1) \\ \int (-1)\,dx & (x<1) \end{cases}$

$=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-2x+C_1 & (x\geq 1) \\ -x+C_2 & (x<1) \end{cases}$ ⋯ ㉠

(단, C_1, C_2는 적분상수)

이때, $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로 ㉠에 의해
$C_2=1$
또, $y=f(x)$가 연속함수이므로 $x=1$에서의 극한값과 함숫값이 같아야 한다.
즉, $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$에서
$\frac{1}{2}-2+C_1=-1+1$ ($\because C_2=1$)
$\therefore C_1=\frac{3}{2}$
따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2} & (x\geq 1) \\ -x+1 & (x<1) \end{cases}$이므로
$f(2)=2-4+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$

31
답 ⑤

$f'(x)=ax(x-2)=ax^2-2ax$ $(a>0)$로 놓을 수 있으므로
$f(x)=\int f'(x)\,dx$
$=\int (ax^2-2ax)\,dx$
$=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+C$ (단, C는 적분상수) ⋯ ㉠
이때, $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로, $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4, $x=2$에서 극솟값 0을 갖는다.
즉, ㉠에 $x=0$, $x=2$를 각각 대입하면
$f(0)=C=4$, $f(2)=\frac{8}{3}a-4a+C=0$
$C=4$를 $\frac{8}{3}a-4a+C=0$에 대입하면
$-\frac{4}{3}a+4=0 \quad \therefore a=3$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+4$이므로
$f(1)=1-3+4=2$

32
답 16

$f'(x)=ax(x-4)=ax^2-4ax$ $(a<0)$로 놓을 수 있으므로
$f(x)=\int (ax^2-4ax)\,dx$
$=\frac{a}{3}x^3-2ax^2+C$ (단, C는 적분상수)
이때, $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=0$을 갖는다.
즉, $C=0$이므로
$f(x)=\frac{a}{3}x^3-2ax^2$
또, $f(2)=8$이므로
$f(2)=\frac{8}{3}a-8a=8$
$-\frac{16}{3}a=8 \quad \therefore a=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+3x^2$이고 $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $x=4$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore$ (극댓값)$=f(4)=-32+48=16$

33 답 ⑤

$f'(x)=6x^2+2x-1$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (6x^2+2x-1)\,dx$

$=2x^3+x^2-x+C$ (단, C는 적분상수) ⋯ ㉠

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 3)$을 지나므로 ㉠에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-2+1+1+C=3 \quad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2-x+3$이므로

$f(1)=2+1-1+3=5$

34 답 ②

$f'(x)=4x+1$이므로

$f(x)=\int (4x+1)\,dx$

$=2x^2+x+C$ (단, C는 적분상수) ⋯ ㉠

한편, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, -2)$를 지나므로

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=2-1+C=-2 \quad \therefore C=-3$

따라서 방정식 $2x^2+x-3=0$의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $-\frac{1}{2}$이다.

35 답 $-\frac{5}{27}$

$f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f(x)=\int (3x^2-4x)\,dx$

$=x^3-2x^2+C$ (단, C는 적분상수) ⋯ ㉠

이 곡선이 점 $(1, 0)$을 지나므로 ㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1-2+C=0 \quad \therefore C=1$

즉, $f(x)=x^3-2x^2+1$이다.

$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$

이때, $x=\frac{4}{3}$에서 $f'(x)=0$이고 $x=\frac{4}{3}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{4}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore$ (극솟값)$=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}-\frac{32}{9}+1=-\frac{5}{27}$

36 답 ③

$f'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int (4ax-3)\,dx\right\}=4ax-3$이고,

점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기가 5이므로

$f'(-1)=-4a-3=5 \quad \therefore a=-2$

즉, $f'(x)=-8x-3$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (-8x-3)\,dx$

$=-4x^2-3x+C$ (단, C는 적분상수) ⋯ ㉠

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-4+3+C=2 \quad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=-4x^2-3x+3$이므로 $f(0)=3$이다.

37 답 33

$f'(x)=\begin{cases} 4x-5 & (x\ge 3) \\ 7 & (x<3) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} \int (4x-5)\,dx & (x\ge 3) \\ \int 7\,dx & (x<3) \end{cases}$

$=\begin{cases} 2x^2-5x+C_1 & (x\ge 3) \\ 7x+C_2 & (x<3) \end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

이때, $f(0)=-10$이라 하므로 $C_2=-10$

한편, $f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하므로 $x=3$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 3+}(2x^2-5x+C_1)=\lim_{x\to 3-}(7x-10)$에서

$18-15+C_1=21-10 \quad \therefore C_1=8$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 2x^2-5x+8 & (x\ge 3) \\ 7x-10 & (x<3) \end{cases}$이므로

$f(5)=50-25+8=33$

> 심플 정리
>
> **[함수의 연속]**
>
> 함수 $f(x)$가 다음과 같은 세 조건
>
> (i) $f(a)$가 정의되어 있다.
>
> (ii) $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다. 즉, $\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)$
>
> (iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$
>
> 를 모두 만족시킬 때, $x=a$에서 연속이라고 한다.

38 답 ③

$f'(x)=\begin{cases} 3 & (x\ge 1) \\ 2x+1 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} \int 3\,dx & (x\ge 1) \\ \int (2x+1)\,dx & (x<1) \end{cases}$

$=\begin{cases} 3x+C_1 & (x\ge 1) \\ x^2+x+C_2 & (x<1) \end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(2)=3$이므로 $6+C_1=3 \quad \therefore C_1=-3$

한편, $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)$에서

$3-3=1+1+C_2 \quad \therefore C_2=-2$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 3x-3 & (x\ge 1) \\ x^2+x-2 & (x<1) \end{cases}$이므로 $f(0)=-2$이다.

Ⅲ L

39 답 9

$f'(x)=|x-1|+1$에 대하여

$x\geq1$일 때, $x-1\geq0$이므로

$f'(x)=|x-1|+1=x-1+1=x$

$x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$f'(x)=|x-1|+1=-x+1+1=-x+2$

즉, $f'(x)=\begin{cases} x & (x\geq1) \\ -x+2 & (x<1) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} \int x\,dx & (x\geq1) \\ \int(-x+2)\,dx & (x<1) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+C_1 & (x\geq1) \\ -\frac{1}{2}x^2+2x+C_2 & (x<1) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

이때, $f(0)=1$이므로 $C_2=1$

또, $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$에서

$\frac{1}{2}+C_1=-\frac{1}{2}+2+1 \qquad \therefore C_1=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+2 & (x\geq1) \\ -\frac{1}{2}x^2+2x+1 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(2)-f(-2)=(2+2)-(-2-4+1)=9$

40 답 ④

$f(x)$가 $x=-1$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=f'(2)=0$

즉, 인수정리에 의해 $f'(x)$는 $x+1$, $x-2$를 인수로 가진다.

또, $f'(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$f'(x)=3(x+1)(x-2)=3x^2-3x-6$ ⋯ ㉠

$\therefore f(x)=\int(3x^2-3x-6)\,dx$

$=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, ㉠에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-1	⋯	2	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -4를 가지므로

$f(2)=8-6-12+C=-4$

$\therefore C=6$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+6$이므로

$f(1)=1-\frac{3}{2}-6+6=-\frac{1}{2}$

41 답 ②

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-7x+2)\,dx$

$=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+C$ (단, C는 적분상수)

또, $f'(x)=3x^2-7x+2=(3x-1)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서

$(3x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$

즉, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	$\frac{1}{3}$	⋯	2	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극솟값 $-\frac{3}{2}$을 가지므로

$f(2)=8-14+4+C=-\frac{3}{2} \qquad \therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}-\frac{7}{18}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{22}{27}$

42 답 $\frac{1}{6}$

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(x^2-3x+2)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $F(x)=\int f(x)\,dx$이므로

$F'(x)=f(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$F'(x)=0$에서

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	1	⋯	2	⋯
$F'(x)$	+	0	−	0	+
$F(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$F(x)$는 $x=1$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 극댓값과 극솟값의 차는

$F(1)-F(2)=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2+C\right)-\left(\frac{8}{3}-6+4+C\right)$

$=\frac{1}{6}$

43 답 ⑤

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=4a^3-6a^2+3$에서

$f'(a)=4a^3-6a^2+3$

$\therefore f(a)=\int(4a^3-6a^2+3)da$

$=a^4-2a^3+3a+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(1)=0$이므로

$f(1)=1-2+3+C=0 \qquad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=x^4-2x^3+3x-2$이므로

$f(-1)=1+2-3-2=-2$

44 답 ④

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\times3+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=3f'(x)+f'(x)=4f'(x)$

즉, $4f'(x)=12x^2-8x+4$이므로

$f'(x)=3x^2-2x+1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-2x+1)\,dx$

$=x^3-x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(1)=5$이므로

$1-1+1+C=5 \qquad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+x+4$이므로

$f(3)=27-9+3+4=25$

45 답 ③

$\varDelta y=-4(\varDelta x)^2+(kx-1)\varDelta x$이므로

$f'(x)=\lim_{\varDelta x\to0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to0}\frac{-4(\varDelta x)^2+(kx-1)\varDelta x}{\varDelta x}$

$=\lim_{\varDelta x\to0}(-4\varDelta x+kx-1)$

$=kx-1$

$\therefore f(x)=\int(kx-1)\,dx$

$=\frac{k}{2}x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=1$, $f(1)=2$이므로

$f(0)=C=1$

$f(1)=\frac{k}{2}-1+C=\frac{k}{2}-1+1=2$

$\frac{k}{2}=2 \qquad \therefore k=4$

따라서 $f(x)=2x^2-x+1$이므로

$f(2)=8-2+1=7$

46 답 1

다항함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)=xf(x)-x^4+x^2+2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x^3+2x$

$xf'(x)=4x^3-2x$

$\therefore f'(x)=4x^2-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x^2-2)\,dx$

$=\frac{4}{3}x^3-2x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=\frac{5}{3}$이므로 $C=\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{4}{3}x^3-2x+\frac{5}{3}$이므로

$f(1)=\frac{4}{3}-2+\frac{5}{3}=1$

47 답 ②

다항함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$(x+4)f(x)-F(x)=x^2+8x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x+4)f'(x)-f(x)=2x+8$

$(x+4)f'(x)=2(x+4) \qquad \therefore f'(x)=2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int2\,dx$

$=2x+C$ (단, C는 적분상수)

따라서 $f(x)$가 될 수 있는 것은 ② $2x-1$이다.

48 답 ⑤

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(4x-3)\,dx$

$=2x^2-3x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, 모든 실수 x에 대하여 $F(x)>0$, 즉 이차부등식 $2x^2-3x+C>0$이 성립하려면 이차방정식 $2x^2-3x+C=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 하므로

$D=(-3)^2-8C<0 \qquad \therefore C>\frac{9}{8}$

따라서 $F(0)=C$이므로 선택지 중 $F(0)$의 값이 될 수 있는 것은 ⑤ $\frac{5}{4}$이다.

49 답 2

이차함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)=xf(x)+2x^3-3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2-6x$

$xf'(x)=-6x^2+6x \qquad \therefore f'(x)=-6x+6$

$\therefore f(x)=\int(-6x+6)\,dx$

$=-3x^2+6x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=3$이므로 $C=3$

$\therefore f(x)=-3x^2+6x+3$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $-\frac{6}{-3}=2$이다.

연습 문제 [K~L] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 110~111

01 답 ④

$F(x)=xf(x)-\frac{1}{3}x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-x^2$ ($\because F'(x)=f(x)$)

$xf'(x)=x^2 \qquad \therefore f'(x)=x$

이때, $f(x)=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)이고,

$f(0)=1$이라 하므로

$f(0)=C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$이므로

$f(3)=\frac{9}{2}+1=\frac{11}{2}$

02 답 63

$\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)\,dx\right\}=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x$에서

$xf(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x$

따라서 $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$이므로

$f(2)=2^5+2^4+2^3+2^2+2+1=63$

03 답 ②

$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}-\int\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}dx$

$=f(x)-\{g(x)+C_1\}=1$ (단, C_1은 적분상수)

이므로

$f(x)=g(x)+C_1+1=g(x)+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=0$이므로 $C=-g(0)$이다.

$\therefore f(x)=g(x)-g(0)$

ㄱ. $g(0)=0$이면 $f(x)=g(x)$이다. (참)

ㄴ. $f(x)=g(x)-g(0)$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=g'(x)$이므로 $f'(a)=g'(a)$인 a가 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. $f(x)=g(x)-g(0)$이므로 $g(0)$의 값을 1로 단정할 수는 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 답 ④

함수 $f(x)$가 함수의 합, 차의 부정적분의 성질을 이용하여 하나의 적분으로 묶자.

$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$

이고 $f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값은?

① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$

④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

1st $\int g(x)\,dx-\int h(x)\,dx=\int\{g(x)-h(x)\}\,dx$임을 이용해 식을 정리해.

$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$

$=\int\left\{\frac{1}{2}x^3+2x+1-\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)\right\}dx$

$=\int(x+1)\,dx$

n이 양의 정수일 때 $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

$=\frac{1}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=1$이라 하므로

$f(0)=C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$이므로

$f(4)=8+4+1=13$

05 답 ③

$f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})\,dx$

$=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$이므로

$f(1)=1+\underbrace{1+1^2+1^3+\cdots+1^n}_{n\text{개}}$

$=n+1$

06 답 ③

$f(x)+\int xf(x)\,dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+xf(x)=x^3-x^2+3x-1$ ⋯ ㉠

이때, $f(x)$를 n차함수 (단, n은 자연수)라고 하면 $xf(x)$는 $(n+1)$차함수이고, ㉠의 양변의 차수가 같아야 하므로

$n+1=3 \qquad \therefore n=2$

즉, $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=2ax+b$이므로

이것을 ㉠에 대입하면

$2ax+b+x(ax^2+bx+c)=x^3-x^2+3x-1$

$\therefore ax^3+bx^2+(2a+c)x+b=x^3-x^2+3x-1$

위의 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 항등식의 성질에 의해

$a=1$, $b=-1$, $2a+c=3$

$\therefore a=1$, $b=-1$, $c=1$

따라서 $f(x)=x^2-x+1$이므로

$f(-3)=9+3+1=13$

07 답 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+9$

$f'(x)=3x^2-3x-4$에서

$f(x)=\int(3x^2-3x-4)\,dx$

$=x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+C$ (단, C는 적분상수) $\cdots$ ㉠

이때, $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 접점의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$라 하면 접점에서의 접선의 기울기는 2이므로

$f'(\alpha)=2$

$3\alpha^2-3\alpha-4=2,\ 3\alpha^2-3\alpha-6=0$

$3(\alpha^2-\alpha-2)=0,\ 3(\alpha-2)(\alpha+1)=0$

이때, 접점이 제1사분면 위에 있으므로 $\alpha>0$

$\therefore\ \alpha=2$

점 $(\alpha,\ \beta)$가 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로 $\beta=2\alpha-1$

$\alpha=2$를 위 식에 대입하면

$\beta=4-1=3$

즉, 점 $(2,\ 3)$의 좌푯값을 ㉠에 대입하면

$f(2)=8-6-8+C=3\qquad\therefore\ C=9$

$\therefore\ f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+9$

08 답 ①

$F(x)=\int xf'(x)\,dx+\int f(x)\,dx$

$=\int\{xf'(x)+f(x)\}\,dx$

$=\int\left[\frac{d}{dx}\{xf(x)\}\right]dx$

$=xf(x)+C$ (단, C는 적분상수)

즉, $F(x)=x\times\frac{2x-1}{x}+C=2x-1+C$이고

$F(1)=2$이므로

$2=2-1+C\qquad\therefore\ C=1$

따라서 $F(x)=2x$이므로

$F(5)=2\times5=10$

09 답 ③

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $6(x-1)^2$이므로

$f(x)=\int6(x-1)^2dx=6\int(x^2-2x+1)dx$

$=6\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)+C$

$=2x^3-6x^2+6x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(2)=1$이므로

$f(2)=16-24+12+C=1$

$\therefore\ C=-3$

따라서 $f(x)=2x^3-6x^2+6x-3$이므로

$f(0)=-3$

10 답 ④

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=4$에서 양변을 적분하면

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int4\,dx$

$\therefore\ f(x)+g(x)=4x+C_1$ (단, C_1은 적분상수) $\cdots$ ㉠

또, $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=6x+5$에서 양변을 적분하면

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(6x+5)\,dx$

$\therefore\ f(x)g(x)=3x^2+5x+C_2$ (단, C_2는 적분상수) $\cdots$ ㉡

이때, $f(0)=2,\ g(0)=-1$이므로 ㉠, ㉡에 각각 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=1=C_1,\ f(0)g(0)=-2=C_2$

즉, $f(x)g(x)=3x^2+5x-2=(x+2)(3x-1)$이고

$f(x)+g(x)=4x+1=(x+2)+(3x-1)$이므로

$\begin{cases}f(x)=x+2\\g(x)=3x-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=3x-1\\g(x)=x+2\end{cases}$

그런데 $f(0)=2,\ g(0)=-1$이므로

$f(x)=x+2,\ g(x)=3x-1$

$\therefore\ f(1)-g(-1)=3-(-4)=7$

11 답 ③

$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy-8\ \cdots$ ㉠에

$x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-8\qquad\therefore\ f(0)=8\ \cdots$ ㉡

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh-8-f(x)}{h}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-8-xh}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}-\lim_{h\to0}\frac{xh}{h}$ ($\because$ ㉡)

$=f'(0)-x=-x+5$ ($\because f'(0)=5$)

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-x+5)\,dx$

$=-\frac{1}{2}x^2+5x+C$ (단, C는 적분상수)

㉡에 의해 $C=8$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5x+8$이므로

$f(4)=-8+20+8=20$

TIP

$f(x+y)=f(x)+f(y)+k$ 꼴의 식이 주어지면 함수 $f(x)$는 다음의 순서로 구한다.

(i) $x=0,\ y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한다.

(ii) 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

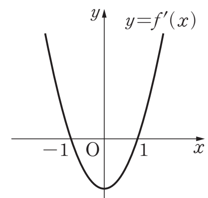
(iii) $f'(x)$의 부정적분을 구하고, $f(0)$의 값을 대입하여 적분상수를 구한다.

Ⅲ K~L 연습

12 답 ④

삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. $f'(-1)=f'(1)=0$이고 함수 $f(x)$의 극댓값이 4, 극솟값이 0일 때, $f(3)$의 값은?

삼차함수를 미분하면 이차함수이므로 그래프를 이용하여 $f'(x)$의 식부터 구해.



① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

1st 극대, 극소가 되는 x의 값부터 찾자.

삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 이차함수이고

$f'(-1)=f'(1)=0$이므로 → 이차함수 $f'(x)$의 그래프가 아래로 볼록이야.

$f'(x)=a(x+1)(x-1)\,(a>0)$이라 하자.

→ $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$이므로 $f'(x)$는 $x+1$과 $x-1$을 인수로 가져.

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 4, $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

2nd $f'(x)$를 적분하여 $f(x)$를 구한 후 조건을 적용해.

$$f(x)=\int a(x+1)(x-1)\,dx=\int a(x^2-1)\,dx$$
$$=a\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이므로

$$f(-1)=a\left(-\frac{1}{3}+1\right)+C=4 \qquad \therefore \frac{2}{3}a+C=4 \cdots ㉠$$

$$f(1)=a\left(\frac{1}{3}-1\right)+C=0 \qquad \therefore -\frac{2}{3}a+C=0 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면 $a=3$, $C=2$이므로

→ ㉠−㉡을 하면 $\frac{4}{3}a=4 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $2+C=4 \quad \therefore C=2$

$f(x)=x^3-3x+2$

$\therefore f(3)=27-9+2=20$

TIP

다항함수 $f(x)$의 극값은 $f'(x)=0$이 되는 x의 값을 구하면 대부분 알 수 있다. 하지만 $f'(x)=0$인 x의 값에서 반드시 극대, 극소를 갖는 것은 아니다. $f'(x)=0$이 되는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다. 그래서 극대, 극소는 증가와 감소를 나타내는 표를 그려서 확인해야 하는 것이다.

13 답 ③

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 3(x+2)(x-1)\,dx$$
$$=\int (3x^2+3x-6)\,dx$$
$$=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

한편, $f'(x)=0$에서

$3(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, 극댓값은

$f(-2)=-8+6+12+C=C+10$

또, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고, 극솟값은

$f(1)=1+\frac{3}{2}-6+C=C-\frac{7}{2}$

그런데 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 한다.

즉, $f(-2)f(1)=0$이므로

$(C+10)\left(C-\frac{7}{2}\right)=0 \qquad \therefore C=-10$ 또는 $C=\frac{7}{2}$

이때, $f(0)=C>0$이므로 $C=\frac{7}{2}$

따라서 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{7}{2}$이므로

$f(-1)=-1+\frac{3}{2}+6+\frac{7}{2}=10$

14 답 ⑤

주어진 $y=f'(x)$의 그래프에서

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & (x>2) \\ 2x & (-2<x\le 2) \\ 1 & (x\le -2) \end{cases}$$

이므로 $f(x)=\int f'(x)\,dx$를 적용하면

$$f(x)=\begin{cases} -x+C_1 & (x>2) \\ x^2+C_2 & (-2<x\le 2) \\ x+C_3 & (x\le -2) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2, C_3은 적분상수)

이때, $f(0)=0$이므로 $C_2=0$

한편, $f(x)$는 연속함수이므로 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$에서

$-2+C_1=4+C_2$, $-2+C_1=4 \ (\because C_2=0)$

$\therefore C_1=6$

또, $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이어야 하므로

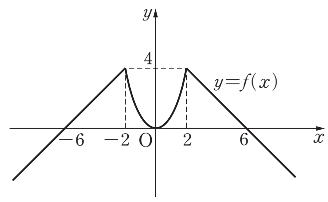
$\lim_{x\to -2} f(x)=f(-2)$에서

$-2+C_3=4+C_2$, $-2+C_3=4 \ (\because C_2=0)$

$\therefore C_3=6$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} -x+6 & (x>2) \\ x^2 & (-2<x\le 2) \\ x+6 & (x\le -2) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-2$와 $x=2$인 점에서 극댓값을 가지므로 극댓값이 2개 존재한다. (참)

ㄴ. $f(2)=2^2=4$ (참)

ㄷ. $f(6)=f(-6)=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

TIP

함수 $f(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여
(1) $f(a)\ge f(x)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대
(2) $f(a)\le f(x)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소
라고 한다.
대부분 극값을 찾을 때, $f'(a)=0$이 되는 $x=a$의 값을 찾으려고 하지만 $f'(a)=0$인 점 이외에도 극값을 가질 수 있다. 그 대표적인 예가 위의 그림에서 $x=-2$, $x=2$에서와 같은 뾰족점이다. 뾰족점에서는 미분불가능하나 극값을 가질 수 있으므로 극값의 정의를 반드시 정리해두도록 하자.

15 답 -1

조건 (가)에 의하여 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 2인 일차식이므로

$f'(x)=2x+a$ (단, a는 상수) ⋯ ㉠ ⋯ Ⅰ

한편, 조건 (나)에 의하여 $x\longrightarrow 3$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$이므로 $f(3)=0$ ⋯ ㉡

$$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=7$$

㉠에서 $f'(3)=6+a=7$이므로 $a=1$

$\therefore f'(x)=2x+1$ ⋯ Ⅱ

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x+1)\,dx$$
$$=x^2+x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이므로 ㉡에 의해

$f(3)=9+3+C=0$ $\quad\therefore C=-12$

$\therefore f(x)=x^2+x-12$ ⋯ Ⅲ

따라서 방정식 $x^2+x-12=0$의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -1이다. ⋯ Ⅳ

[채점 기준표]

Ⅰ	조건 (가)를 이용하여 $f'(x)$가 일차식임을 찾는다.	20%
Ⅱ	조건 (나)를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.	30%
Ⅲ	$f(x)$를 구한다.	30%
Ⅳ	근과 계수의 관계를 이용하여 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합을 구한다.	20%

Simple M 정적분

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 112~113

01 답 $F(b)-F(a)$, 정적분

02 답 $f(x)$

03 답 $\int_c^b f(x)\,dx$

04 답 ×

05 답 ○

$\int_a^x f(t)\,dt=x^2+2x$이므로

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\}=\frac{d}{dx}(x^2+2x)$$

$\therefore f(x)=2x+2$

06 답 ×

정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$에서 x 대신에 다른 문자를 사용하여 나타내어도 그 값은 변하지 않는다.

즉, $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(y)\,dy$이다.

07 답 1

$$\int_0^1 dx=\Big[x\Big]_0^1=1-0=1$$

08 답 $\frac{3}{2}$

$$\int_1^2 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

09 답 $\frac{7}{3}$

$$\int_1^2 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

10 답 0

11 답 x^2+4x

12 답 $-4x^3+x-1$

13 답 $f(x)=3x^2$

$\int_4^x f(t)\,dt=x^3+2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2$

14 답 $f(x)=-8x^3+1$

$\int_{-1}^x f(t)\,dt=-2x^4+x+5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-8x^3+1$

15 답 $\frac{5}{2}$

$\int_0^1 (-x+3)\,dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^1=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$

16 답 2

$\int_0^1 (3x^2+2x)\,dx=\left[x^3+x^2\right]_0^1=1+1=2$

17 답 $\frac{1}{2}$

$\int_{-1}^0 (4x^3-3x)\,dx=\left[x^4-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^0$

$=0-\left(1-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$

18 답 $\frac{4}{3}$

$\int_1^2 (x+1)(x-1)\,dx=\int_1^2 (x^2-1)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2$

$=\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4}{3}$

19 답 $\frac{19}{4}$

$\int_1^2 (x+1)(x^2-x+1)\,dx$

$=\int_1^2 (x^3+1)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_1^2$

$=(4+2)-\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{19}{4}$

20 답 10

$\int_2^0 (-6x+1)\,dx=\left[-3x^2+x\right]_2^0=0-(-12+2)=10$

다른 풀이

$\int_2^0 (-6x+1)\,dx=-\int_0^2 (-6x+1)\,dx$

$=\int_0^2 (6x-1)\,dx=\left[3x^2-x\right]_0^2$

$=12-2=10$

21 답 -6

$\int_1^0 (9x^2-4x+5)\,dx=\left[3x^3-2x^2+5x\right]_1^0$

$=0-(3-2+5)=-6$

다른 풀이

$\int_1^0 (9x^2-4x+5)\,dx=-\int_0^1 (9x^2-4x+5)\,dx$

$=\int_0^1 (-9x^2+4x-5)\,dx$

$=\left[-3x^3+2x^2-5x\right]_0^1$

$=-3+2-5=-6$

22 답 $\frac{27}{2}$

$\int_0^1 (x^2+x)\,dx+\int_1^3 (x^2+x)\,dx$

$=\int_0^3 (x^2+x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^3$

$=9+\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 114～121

23 답 ②

$\int_0^k (4x+1)\,dx=\left[2x^2+x\right]_0^k=2k^2+k$

즉, $2k^2+k=3$에서

$2k^2+k-3=0,\ (2k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

24 답 ③

$\int_a^a f(x)\,dx=0,\ \int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$이므로

$\int_1^1 (-x)\,dx-\int_1^0 (2x-1)\,dx$

$=0+\int_0^1 (2x-1)\,dx$

$=\left[x^2-x\right]_0^1=1-1=0$

25 답 ③

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (6x^2-4ax)\,dx$

$=\left[2x^3-2ax^2\right]_0^1$

$=2-2a$

이때, $f(-1)=6+4a$이므로

$\int_0^1 f(x)\,dx=f(-1)$에서

$2-2a=6+4a \qquad \therefore a=-\frac{2}{3}$

26 답 ⑤

$\int_{-1}^k (-2x+6)\,dx=\left[-x^2+6x\right]_{-1}^k$

$=-k^2+6k-(-1-6)$

$=-k^2+6k+7$

$=-(k-3)^2+16$

따라서 주어진 정적분의 값은 $k=3$일 때 최댓값 16을 가지므로

$\alpha=3,\ \beta=16$

$\therefore \alpha+\beta=3+16=19$

27 답 ③

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $f'(x)=6x^2-2x-1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (6x^2-2x-1)\,dx$$
$$=2x^3-x^2-x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때, $f(1)=3$이므로

$2-1-1+C=3 \qquad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=2x^3-x^2-x+3$이므로

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (2x^3-x^2-x+3)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+3=\frac{8}{3}$$

28 답 ②

$$\int_0^1 (4x^3+ax^2+2)\,dx=\left[x^4+\frac{a}{3}x^3+2x\right]_0^1$$
$$=3+\frac{a}{3}$$

따라서 $3+\frac{a}{3}=0$이므로

$\frac{a}{3}=-3 \qquad \therefore a=-9$

29 답 ③

$$\int_{-1}^1 (x+1)^2 dx-\int_{-1}^1 (x-1)^2 dx$$
$$=\int_{-1}^1 \{(x+1)^2-(x-1)^2\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 \{(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 4x\,dx=\left[2x^2\right]_{-1}^1=2-2=0$$

30 답 ⑤

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x-1}dx+\int_1^0 \frac{1}{t-1}dt$$
$$=\int_0^1 \frac{x^3}{x-1}dx+\int_1^0 \frac{1}{x-1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{x^3}{x-1}dx-\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$$
$$=\int_0^1 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx$$
$$=\int_0^1 (x^2+x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}$$

31 답 48

$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$를 이용하여 식을 간단히 하자.

$$\int_1^2 (3x^2-2x)\,dx+\int_2^3 (3x^2-2x)\,dx+\int_3^4 (3x^2-2x)\,dx$$
$$=\int_1^3 (3x^2-2x)\,dx+\int_3^4 (3x^2-2x)\,dx$$
$$=\int_1^4 (3x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[x^3-x^2\right]_1^4=(64-16)-(1-1)=48$$

32 답 ②

$$\int_1^3 \{2f'(x)+4x\}\,dx$$
$$=\left[2f(x)+2x^2\right]_1^3$$
$$=2f(3)+18-2f(1)-2$$
$$=-14+18-2f(1)-2 \ (\because f(3)=-7)$$
$$=4$$

$2f(1)=-2 \qquad \therefore f(1)=-1$

이때, $f(0)=0$인 이차함수 $f(x)$를

$f(x)=ax^2+bx$ (단, a, b는 상수, $a\neq0$)

라 하면 $f(3)=-7$이므로

$f(3)=9a+3b=-7$ … ㉠

$f(1)=a+b=-1$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x$이므로

$f(-1)=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

다른 풀이

$f(0)=0$인 이차함수 $f(x)$를

$f(x)=ax^2+bx$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라 하면

$f(3)=-7$이므로

$9a+3b=-7$ … ㉢

이때, $f'(x)=2ax+b$이므로

$$\int_1^3 \{2f'(x)+4x\}\,dx=\int_1^3 \{4(a+1)x+2b\}\,dx$$
$$=\left[2(a+1)x^2+2bx\right]_1^3$$
$$=18(a+1)+6b-2(a+1)-2b$$
$$=16a+4b+16=4$$

$\therefore 4a+b=-3$ … ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x$이므로

$f(-1)=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

Ⅲ M

33 답 ⑤

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (x\ge1) \\ x^2+4 & (x<1) \end{cases}$ 이므로

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 (x^2+4)\,dx+\int_1^2 (2x+3)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^1+\left[x^2+3x\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{1}{3}+4\right)+(4+6)-(1+3)$$
$$=\frac{31}{3}$$

34 답 ⑤

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (|x|>2) \\ x+2 & (|x|\le2) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} 0 & (x<-2 \text{ 또는 } x>2) \\ x+2 & (-2\le x\le2) \end{cases}$$

에서 x 대신 $x-1$을 대입하면

$f(x-1)=\begin{cases} 0 & (x<-1 \text{ 또는 } x>3) \\ x+1 & (-1\le x\le3) \end{cases}$ 이므로

$$\int_{-2}^1 f(x-1)\,dx=\int_{-2}^{-1} 0\,dx+\int_{-1}^1 (x+1)\,dx$$
$$=0+\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^1$$
$$=\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}-1\right)=2$$

TIP

$f(x)$가 주어지고 $f(x-1)$, $f(x+2)$의 식을 구할 때에는 x 대신에 각각 $x-1$, $x+2$를 대입하면 된다.
이때, 중요한 것은 x의 값의 범위 또한 똑같이 $x-1$, $x+2$를 대입하여 정리해야 한다는 것이다.

35 답 ③

주어진 그림에서 $f(x)=\begin{cases} 4 & (x\ge0) \\ 4x+4 & (x<0) \end{cases}$ 이므로

$$\int_{-2}^3 f(x)\,dx=\int_{-2}^0 (4x+4)\,dx+\int_0^3 4\,dx$$
$$=\left[2x^2+4x\right]_{-2}^0+\left[4x\right]_0^3$$
$$=-(8-8)+12=12$$

36 답 ③

주어진 그림에서 $f'(x)=\begin{cases} -x+2 & (x\ge1) \\ x & (x<1) \end{cases}$ 이고,

$f(2)-f(0)=\int_0^2 f'(x)\,dx$ 이므로

$$\int_0^2 f'(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 (-x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}+(-2+4)-\left(-\frac{1}{2}+2\right)$$
$$=1$$

37 답 ④

절댓값이 0이 되는 $x=1$을 기준으로 구간을 나누면

$$|x-1|=\begin{cases} 1-x & (x<1) \\ x-1 & (x\ge1) \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^3 |x-1|\,dx$$
$$=\int_0^1 (1-x)\,dx+\int_1^3 (x-1)\,dx$$
$$=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^3$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{5}{2}$$

38 답 ②

절댓값이 0이 되는 $x=0$을 기준으로 구간을 나누면

$$|x|=\begin{cases} -x & (x<0) \\ x & (x\ge0) \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-2}^1 4|x|\,dx=\int_{-2}^0 (-4x)\,dx+\int_0^1 4x\,dx$$
$$=\left[-2x^2\right]_{-2}^0+\left[2x^2\right]_0^1$$
$$=8+2=10$$

39 답 ①

절댓값이 0이 되는 $x=0$, $x=1$을 기준으로 구간을 나누면

$$|x(x-1)|=|x^2-x|=\begin{cases} x^2-x & (x<0) \\ x-x^2 & (0\le x<1) \\ x^2-x & (x\ge1) \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^1 |x(x-1)|\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 (x^2-x)\,dx+\int_0^1 (x-x^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1$$

40 답 1

$$|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & (x<-2) \\ -x^2+4 & (-2\le x<2) \\ x^2-4 & (x\ge2) \end{cases}$$

이므로

$$\int_1^3 \frac{|x^2-4|}{x+2}\,dx$$
$$=\int_1^2 \frac{-x^2+4}{x+2}\,dx+\int_2^3 \frac{x^2-4}{x+2}\,dx$$
$$=\int_1^2 \frac{-(x+2)(x-2)}{x+2}\,dx+\int_2^3 \frac{(x+2)(x-2)}{x+2}\,dx$$
$$=\int_1^2 (-x+2)\,dx+\int_2^3 (x-2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$$
$$=-2+4-\left(-\frac{1}{2}+2\right)+\frac{9}{2}-6-(2-4)$$
$$=1$$

41 답 ①

$$|2x-4|=\begin{cases}-2x+4 & (x<2)\\ 2x-4 & (x\geq 2)\end{cases}$$

이때, $a>2$이므로

$$\int_0^a |2x-4|\,dx=\int_0^2(-2x+4)\,dx+\int_2^a(2x-4)\,dx$$
$$=\Big[-x^2+4x\Big]_0^2+\Big[x^2-4x\Big]_2^a$$
$$=-4+8+a^2-4a-(4-8)$$
$$=a^2-4a+8$$

즉, $a^2-4a+8=5$이므로

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>2$)

42 답 ①

$f(x)=|x|+|x-1|$에서

(i) $x<0$일 때

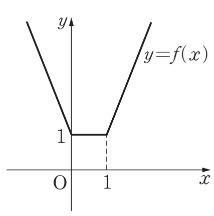
$f(x)=-x-(x-1)=-2x+1$

(ii) $0\leq x<1$일 때

$f(x)=x-(x-1)=1$

(iii) $x\geq 1$일 때

$f(x)=x+(x-1)=2x-1$



(i)~(iii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이다.

따라서 $m=1$이므로

$$\int_0^m f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 1\,dx=\Big[x\Big]_0^1=1$$

43 답 ①

$$\int_{-2}^2 (x-2)(x^2+2x+4)\,dx$$
$$=\int_{-2}^2 (x^3-8)\,dx$$
$$=\int_{-2}^2 x^3dx-\int_{-2}^2 8dx$$
$$=-2\int_0^2 8\,dx$$

($\because$ $y=x^3$은 원점에 대하여 대칭, $y=8$은 y축에 대하여 대칭)

$$=-2\Big[8x\Big]_0^2=-32$$

TIP

정적분의 성질 중 $\int_{-a}^a f(x)\,dx$는 피적분함수 $f(x)$가 원점에 대하여 대칭인 함수 (기함수) 또는 y축에 대하여 대칭인 함수 (우함수)인 경우 다음과 같이 계산하면 편리하다.

(1) $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$

(2) $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$

44 답 ①

$$\int_{-1}^1 x(1-x)^2dx$$
$$=\int_{-1}^1 (x^3-2x^2+x)\,dx$$
$$=2\int_0^1 (-2x^2)\,dx\left(\because \int_{-1}^1 (x^3+x)\,dx=0\right)$$
$$=2\Big[-\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1=-\frac{4}{3}$$

45 답 11

$f(x)$가 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$ (단, a, b는 상수, $a\neq 0$)라 놓자.

먼저 $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=4$이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 (ax+b)\,dx$$
$$=2\int_0^1 b\,dx=2\Big[bx\Big]_0^1=2b=4$$

$\therefore b=2$

또, $\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=6$이므로

$$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=\int_{-1}^1 x(ax+b)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 (ax^2+bx)\,dx$$
$$=2\int_0^1 ax^2dx=2\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}a=6$$

$\therefore a=9$

따라서 $f(x)=9x+2$이므로

$f(1)=9+2=11$

46 답 ③

$$\int_{-1}^1 (1+2x+3x^2+\cdots+20x^{19})\,dx$$
$$=2\int_0^1 (1+3x^2+5x^4+\cdots+19x^{18})\,dx$$
$$=2\Big[x+x^3+x^5+\cdots+x^{19}\Big]_0^1$$
$$=2\times\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{10\text{개}}=2\times 10=20$$

47 답 ②

$f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭인 함수 (기함수)이다. 즉,

$$\int_{-2}^2 (x^2+x+1)f(x)\,dx$$
$$=\int_{-2}^2 (x^2+1)f(x)\,dx+\int_{-2}^2 xf(x)\,dx$$
$$=0+2\int_0^2 xf(x)\,dx=8$$

($\because$ $(x^2+1)f(x)$는 기함수, $xf(x)$는 우함수)

$$\therefore \int_0^2 xf(x)\,dx=4$$

Ⅲ
M

48 답 ①

(기함수)×(기함수)=(우함수),
(우함수)×(기함수)=(기함수)이고

x^3은 기함수이므로 $\int_{-3}^{3} x^3 f(x)\,dx=0$을 만족시키려면

$f(x)$는 우함수이어야 한다.

따라서 [보기]의 함수 중 우함수인 것은 ㄱ이다.

> **TIP**
> ㄴ. 기함수끼리의 합은 기함수이다.
> ㄷ. 기함수와 우함수의 합은 우함수도 아니고 기함수도 아니다.

49 답 ②

$\int_0^2 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=2x+k$

$\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2 (2t+k)\,dt=\left[t^2+kt\right]_0^2=4+2k=k$

$\therefore k=-4$

따라서 $f(x)=2x-4$이므로

$f(1)=2-4=-2$

50 답 ①

$f(x)=4x^3+\int_0^1 xf(t)\,dt=4x^3+x\int_0^1 f(t)\,dt$

에서 $\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=4x^3+kx$

$\int_0^1 (4t^3+kt)\,dt=\left[t^4+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=1+\frac{k}{2}=k$

$\therefore k=2$

따라서 $f(x)=4x^3+2x$이므로

$f(-1)=-4-2=-6$

51 답 ②

$f(x)=6x^2-4x-\int_0^1 f(t)\,dt$에서

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=6x^2-4x-k$이므로

$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 (6t^2-4t-k)\,dt$

$\qquad=\left[2t^3-2t^2-kt\right]_0^1=2-2-k=k$

$2k=0 \qquad \therefore k=0$

$\therefore f(x)=6x^2-4x$

방정식 $f(x)=g(x)$의 해를 구하면

$6x^2-4x=3x^2-x+6$, $3(x^2-x-2)=0$

$3(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 양의 실근은 $x=2$이다.

52 답 ②

$f(x)=x^2-\int_0^1 xf(t)\,dt+\int_0^2 f(t)\,dt$를 만족시키는 이차

함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하므로

$a=-\int_0^1 f(t)\,dt$, $b=\int_0^2 f(t)\,dt$

$a=-\int_0^1 f(t)\,dt$

$\quad=-\int_0^1 (t^2+at+b)\,dt$

$\quad=-\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^1$

$\quad=-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}a+b\right)$

$a=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a-b \qquad \therefore \frac{3}{2}a+b=-\frac{1}{3}$ ⋯ ㉠

$b=\int_0^2 f(t)\,dt$

$\quad=\int_0^2 (t^2+at+b)\,dt$

$\quad=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^2$

$\quad=\frac{8}{3}+2a+2b$

$b=\frac{8}{3}+2a+2b \qquad \therefore 2a+b=-\frac{8}{3}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{14}{3}$, $b=\frac{20}{3}$

$\therefore a+b=-\frac{14}{3}+\frac{20}{3}=2$

53 답 ④

$\int_1^x f(t)\,dt=x^3-2ax^2+a$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4ax$

또, $\int_1^x f(t)\,dt=x^3-2ax^2+a$에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)\,dt=1-2a+a$

$1-a=0 \qquad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=3x^2-4x$이므로

$f(2)=12-8=4$

54 답 ④

$f(x)=\int_3^{x+1} 3t^2dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3(x+1)^2$

$\therefore \int_0^1 f'(x)\,dx=\int_0^1 3(x+1)^2dx$

$\qquad=3\int_0^1 (x^2+2x+1)\,dx$

$\qquad=3\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^1$

$\qquad=3\times\left(\frac{1}{3}+1+1\right)=7$

55 답 ③

$\int_a^x f(t)\,dt=x^2+ax-18$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+a$

또, $\int_a^x f(t)\,dt=x^2+ax-18$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)\,dt=a^2+a^2-18$

$2a^2-18=0,\ a^2=9 \quad \therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 $f(x)=2x+3$이므로

$f(3)=6+3=9$

56 답 ④

$xf(x)=\frac{2}{3}x^3+\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2x^2+f(x)$

$xf'(x)=2x^2 \quad \therefore f'(x)=2x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int 2x\,dx=x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=-1$이므로 $C=-1$에서 $f(x)=x^2-1$

$\therefore f(3)=9-1=8$

57 답 ⑤

$\int_1^x (x-t)f(t)\,dt=x^4-2x^2+1$에서

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=x^4-2x^2+1 \cdots$ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3-4x$

$\therefore \int_1^x f(t)\,dt=4x^3-4x \cdots$ ㉡

따라서 ㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2-4$

58 답 ③

$\int_2^x (x^2-t^2)f(t)\,dt=-x^4+ax^2-16$에서

$x^2\int_2^x f(t)\,dt-\int_2^x t^2f(t)\,dt=-x^4+ax^2-16 \cdots$ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x\int_2^x f(t)\,dt+x^2f(x)-x^2f(x)=-4x^3+2ax$

$2x\int_2^x f(t)\,dt=-4x^3+2ax$

$\therefore \int_2^x f(t)\,dt=-2x^2+a$

위 식에 $x=2$를 대입하면

$\int_2^2 f(t)\,dt=-8+a=0$

$\therefore a=8$

59 답 ⑤

$f(x)=\int_{-4}^x (kt^2-4t+1)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=kx^2-4x+1$

이때, $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f'(1)=0$

$f'(1)=k-4+1=0$

$\therefore k=3$

60 답 ①

$f(x)=\int_2^x (t^2-4t+3)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)$을 갖는다.

$f(1)=\int_2^1 (t^2-4t+3)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_2^1$

$=\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-\left(\frac{8}{3}-8+6\right)=\frac{2}{3}$

$\therefore b=\frac{2}{3}$

따라서 $a=1,\ b=\frac{2}{3}$이므로

$a+b=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

61 답 ⑤

$f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$(x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $x=1$일 때 극댓값, $x=2$일 때 극솟값을 가지므로 모든 극값의 합은

$f(1)+f(2)=\int_0^1 (t^2-3t+2)\,dt+\int_0^2 (t^2-3t+2)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^2$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)+\left(\frac{8}{3}-6+4\right)=\frac{3}{2}$

Ⅲ M

62 답 ③

$f(x)=\int_0^x (3t^2+at+b)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f'(2)=0$에서

$12+2a+b=0 \qquad \therefore 2a+b=-12 \cdots$ ㉠

한편, $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -10을 가지므로

$f(2)=\int_0^2 (3t^2+at+b)\,dt$

$=\left[t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^2$

$=8+2a+2b=-10$

$\therefore a+b=-9 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-6$

$\therefore a-b=-3-(-6)=3$

63 답 $\frac{32}{3}$

주어진 그래프로부터 이차함수 $f(x)$를

$f(x)=ax(x-4)$ ($a<0$인 상수)로 놓을 수 있다.

이때, $f(2)=4$이므로

$f(2)=2a\times(-2)=4 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-x(x-4)$

한편, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)=-x(x-4)$

이때, $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $F(x)$의 극댓값은 $F(4)$이므로

$F(4)=\int_0^4 f(t)\,dt$

$=\int_0^4 (-t^2+4t)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_0^4$

$=-\frac{64}{3}+32=\frac{32}{3}$

64 답 3

주어진 등식에서 $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=-3x^2+3kx$

즉, $\int_0^1 (-3t^2+3kt)dt=k$이므로

$\left[-t^3+\frac{3}{2}kt^2\right]_0^1=-1+\frac{3}{2}k=k$

$\therefore k=2$

$\therefore f(x)=-3x^2+6x=-3(x-1)^2+3$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 3이다.

65 답 ③

$f(x)=\int_0^x (|t|-2)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=|x|-2$

$1\le x\le 4$에서 $f'(x)=0$으로 하는 x의 값은 $x=2$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗	

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$f(2)=\int_0^2 (|t|-2)\,dt$

$=\int_0^2 (t-2)\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^2$

$=2-4=-2$

66 답 ④

절댓값이 0이 되는 $x=a$를 기준으로 구간을 나누면

$x|x-a|=\begin{cases} x(x-a) & (x\ge a) \\ x(a-x) & (x<a) \end{cases}$

$0\le a\le 1$이므로

$\int_0^1 x|x-a|\,dx$

$=\int_0^a x(a-x)\,dx+\int_a^1 x(x-a)\,dx$

$=\int_0^a (ax-x^2)\,dx+\int_a^1 (x^2-ax)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right]_a^1$

$=\left(\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{3}a^3\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right)$

$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$

이때, $f(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$로 놓으면

$f'(a)=a^2-\frac{1}{2}$

$f'(a)=0$에서

$a^2-\frac{1}{2}=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\because 0\le a\le 1)$

함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(a)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(a)$	$\frac{1}{3}$	↘	극소	↗	$\frac{1}{6}$

즉, 함수 $f(a)$는 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 극소이면서 최소이므로

$a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $\int_0^1 x|x-a|\,dx$의 값이 최소가 된다.

67 답 ①

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_0^x f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_0^x=F(x)-F(0)$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$$

$$=F'(0)=f(0)$$

즉, $f(x)=x^3-x^2+1$이므로

$f(0)=1$

68 답 ③

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_1^x f(t)dt=\Big[F(t)\Big]_1^x$$

$$=F(x)-F(1)$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$

$$=F'(1)=f(1)$$

즉, $f(x)=x^3-4x^2+5x-2$이므로

$f(1)=1-4+5-2=0$

69 답 2

$f(x)=x^2+3x-2$라 하고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x (t^2+3t-2)\,dt$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$

$$=\frac{1}{4}\times(4+6-2)=2$$

70 답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f'(t)\,dt=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

이때, $f(x)=\int_0^x (2t^2+t+3)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2x^2+x+3$

$\therefore f'(0)=3$

71 답 ①

$f(x)=2x^3+x^2-x-4$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_1^{x^2} f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_1^{x^2}=F(x^2)-F(1)$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2} f(t)\,dt$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$$

$$=2F'(1)=2f(1)$$

$$=2\times(2+1-1-4)=-4$$

72 답 ⑤

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$

$$=F'(0)=f(0)=3$$

이므로 $f(0)=b=3$

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^x f(t)\,dt=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}$$

$$=F'(-1)=f(-1)=4$$

이므로

$f(-1)=a-1+3=4$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x^2+x+3$이므로

$f(1)=2+1+3=6$

73 답 ④

$f(x)=x^3-2x+3$으로 놓고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+3h}(x^3-2x+3)\,dx$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+3h}f(x)\,dx$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+3h)-F(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+3h)-F(2)+F(2)-F(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(2+3h)-F(2)}{3h}\times3\right\}+\lim_{h\to0}\frac{F(2-h)-F(2)}{-h}$$

$$=3F'(2)+F'(2)$$

$$=4F'(2)=4f(2)$$

$$=4\times(8-4+3)=28$$

74 답 ②

먼저 $f(1-x)=f(1+x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

즉, $x=1$에서 $x=1+2=3$까지의 정적분의 값과 $x=1-2=-1$에서 $x=1$까지의 정적분의 값이 같다.

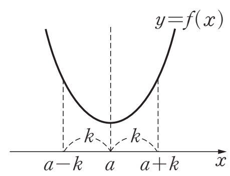
따라서 $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=2$이므로

$$\int_1^3 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(x)\,dx=2$$

Ⅲ M

TIP

함수 $f(x)$가 $x=a$에 대하여 대칭이면 실수 k에 대하여
$\int_{a-k}^{a} f(x)dx=\int_{a}^{a+k} f(x)dx$
가 성립한다.



75

답 1

조건 (나)에서 $\int_0^a tf(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{3}{2}kx^2$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3kx$ ⋯ ㉠

조건 (가)에서

$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 3kt\,dt=\left[\frac{3}{2}kt^2\right]_0^1=\frac{3}{2}k=1$

$\therefore k=\frac{2}{3}$

$k=\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면 $f(x)=2x$

$k=\int_0^a tf(t)\,dt=\int_0^a 2t^2dt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^a$

$=\frac{2}{3}a^3=\frac{2}{3}$

$a^3=1$　　$\therefore a=1$

76

답 ⑤

조건 (가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭인 함수이다.

즉, $\int_0^2 f(x)\,dx=16$이므로 $\int_{-2}^0 f(x)\,dx=16$이다.

또, 조건 (나)에서 $f(x)=f(x+4)$이므로

$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_{0-4}^{2-4} f(x)\,dx=\int_{-4}^{-2} f(x)\,dx=16$

$\therefore \int_{-4}^8 f(x)\,dx$

$=\int_{-4}^0 f(x)\,dx+\int_0^4 f(x)\,dx+\int_4^8 f(x)\,dx$

$=\int_{-4}^0 f(x)\,dx+\underbrace{\int_{-4}^0 f(x)\,dx}_{f(-x)=f(x)\text{ 이용}}+\underbrace{\int_{-4}^0 f(x)\,dx}_{f(x)=f(x+4)\text{ 이용}}$

$=3\int_{-4}^0 f(x)\,dx$

$=3\left(\int_{-4}^{-2} f(x)\,dx+\int_{-2}^0 f(x)\,dx\right)$

$=3\times(16+16)=96$

TIP

함수 $f(x)$에서 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+k)=f(x)$가 성립하면
① $\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+k}^{b+k} f(x)\,dx$
② $\int_a^{a+k} f(x)\,dx=\int_b^{b+k} f(x)\,dx$

연습 문제 [M]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 122～123

01

답 ④

함수 $f(x)=2x^3-6ax$에 대하여

$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (2x^3-6ax)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^4-3ax^2\right]_0^2=8-12a$

이때, $f(1)=2-6a$이므로

$8-12a=2-6a$

$6a=6$　　$\therefore a=1$

02

답 ⑤

$\int_0^7 f(x)\,dx=\int_0^4 f(x)\,dx+\int_4^3 f(x)\,dx+\int_3^7 f(x)\,dx$

$=2+1+4=7$

TIP

$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$를 적용할 때, c의 값은 a와 b의 값의 크기와 상관없다.
즉, $a\le c\le b$일 필요는 없다.
$\int_0^7 f(x)\,dx=\int_0^4 f(x)\,dx+\int_4^3 f(x)\,dx+\int_3^7 f(x)\,dx$
처럼 적분구간이 계속 이어지기만 하면 된다.

03

답 ②

함수 $f(x)=\int_1^x (t-2)(t-3)dt$에 대하여 $f'(4)$의 값은? 양변을 x에 대하여 미분해, $\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)dt\right\}=f(x)$임을 이용하는 거야.

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

1st $\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)dt\right\}=f(x)$를 이용하기 위해 양변을 미분하자.

$f(x)=\int_1^x (t-2)(t-3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-2)(x-3)$

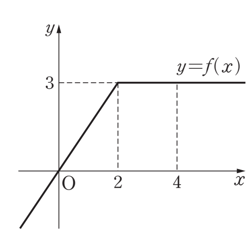
$\therefore f'(4)=2\times1=2$

'적분하고 미분하면 원상태가 돌아온다.'
$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)dt\right\}=f(x)$

04

답 ④

주어진 그림에서



$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & (x<2)\\ 3 & (x\ge2)\end{cases}$이므로

$\int_0^4 xf(x)\,dx$

$=\int_0^2 xf(x)\,dx+\int_2^4 xf(x)\,dx$

$=\int_0^2 \frac{3}{2}x^2dx+\int_2^4 3x\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^3\right]_0^2+\left[\frac{3}{2}x^2\right]_2^4=4+(24-6)=22$

05 답 ④

$$\int_{-2}^{1}(x^3+6x^2+2x-3)\,dx-\int_{2}^{1}(x^3+6x^2+2x-3)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(x^3+6x^2+2x-3)\,dx+\int_{1}^{2}(x^3+6x^2+2x-3)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(x^3+6x^2+2x-3)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(x^3+2x)\,dx+\int_{-2}^{2}(6x^2-3)\,dx$$

$$=0+2\int_{0}^{2}(6x^2-3)\,dx$$

$$=2\Big[2x^3-3x\Big]_0^2$$

$$=2\times(16-6)=20$$

06 답 9

> x에 대한 방정식 $\int_0^x |t-1|\,dt=x$의 양수인 실근이 $m+n\sqrt{2}$일 때, m^3+n^3의 값을 구하시오.
>
> $x<1$이면 $t-1<0$이지? 그리고 $x\geq 1$이면 적분구간을 0부터 1까지, 1부터 x까지로 나누어서 생각해야 해.
>
> (단, m, n은 유리수이다.)

1st $x=1$을 기준으로 구간을 나누어 적분하자.

(i) $x<1$일 때

$\int_0^x |t-1|\,dt=x$에서

$\int_0^x (-t+1)\,dt=x$이므로

$-\frac{1}{2}x^2+x=x$, $x^2=0$ $\quad\therefore x=0$

(ii) $x\geq 1$일 때

$\int_0^x |t-1|\,dt=x$에서

$\int_0^1(-t+1)\,dt+\int_1^x(t-1)\,dt=x$

$x>1$이면 구간 $[0, 1]$에서 $t-1<0$이고, 구간 $[1, x]$에서 $t-1>0$이므로 $\int_0^x|t-1|\,dt=\int_0^1\{-(t-1)\}\,dt+\int_1^x(t-1)\,dt$가 되는 거야.

$\left[-\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}t^2-t\right]_1^x=x$

$-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}x^2-x-\left(\frac{1}{2}-1\right)=x$

$\frac{1}{2}x^2-2x+1=0$, $x^2-4x+2=0$

이차방정식의 근의 공식을 이용해 구한 거야.

$\therefore x=2+\sqrt{2}$ ($\because x\geq 1$)

2nd 양수인 실근을 구하여 m, n을 구하면 되겠지?

(i), (ii)에 의해 양수인 실근은 $x=2+\sqrt{2}$이므로

$m=2$, $n=1$이다.

$\therefore m^3+n^3=2^3+1^3=9$

07 답 ②

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로

$x^3f(x)$, $xf(x)$는 모두 원점에 대하여 대칭이다.

$$\therefore \int_{-3}^{3}(x^3-4x+7)f(x)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{3}x^3f(x)\,dx-4\int_{-3}^{3}xf(x)\,dx+7\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$$

$$=0+7\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$$

$$=14\int_{0}^{3}f(x)\,dx=14\times 2=28$$

> **심플 정리**
>
> **[특수한 함수]**
>
> (1) $f(x)=f(x+a)$: 주기가 a인 주기함수
>
> (2) $f(a+x)=f(a-x)$: $x=a$에 대하여 대칭인 함수
>
> (3) $f(x)=f(-x)$: y축에 대하여 대칭인 함수 (우함수)
>
> (4) $f(x)=-f(-x)$: 원점에 대하여 대칭인 함수 (기함수)

08 답 ①

$xf(x)=3x^4-2x^3+\int_2^x f(t)\,dt$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(2)=48-16+\int_2^2 f(t)\,dt$

$2f(2)=32$ $\left(\because \int_a^a f(t)\,dt=0\right)$

$\therefore f(2)=16$ ⋯ ㉡

또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=12x^3-6x^2+f(x)$

$xf'(x)=12x^3-6x^2$

$\therefore f'(x)=12x^2-6x$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(12x^2-6x)\,dx$

$\quad=4x^3-3x^2+C$ (단, C는 적분상수)

여기에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=32-12+C=16$ ($\because$ ㉡)

$\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=4x^3-3x^2-4$이므로

$f(-1)=-4-3-4=-11$

09 답 ③

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2\right\}$$

$$=2f'(1)$$

한편, $f(x)=\int_1^x(3t^2-2t+1)\,dt$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\int_1^1(3t^2-2t+1)\,dt=0$ ⋯ ㉠

이므로

$$B=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ (\because ㉠)$$

$$=f'(1)$$

이때, $f(x)=\int_1^x (3t^2-2t+1)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-2x+1$

$\therefore f'(1)=3-2+1=2$

따라서 $A=2f'(1)=4$, $B=f'(1)=2$이므로

$A+B=4+2=6$

10

답 ⑤

$f(x)=\int_0^x (t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+ax+b$

이때, 함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값 9를 가지므로

$f'(-3)=0$, $f(-3)=9$

$f'(-3)=0$에서

$9-3a+b=0 \qquad \therefore 3a-b=9 \cdots$ ㉠

$f(-3)=9$에서

$$f(-3)=\int_0^{-3} (t^2+at+b)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^{-3}$$

$$=-9+\frac{9}{2}a-3b=9$$

$\therefore 3a-2b=12 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

즉, $f'(x)=0$에서

$(x+3)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$f(1)=\int_0^1 (t^2+2t-3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2-3t\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}+1-3=-\frac{5}{3}$$

11

답 ⑤

함수 $y=f(x+1)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이므로

$$\int_0^1 f(x+1)\,dx=\int_{0+1}^{1+1} f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx$$

또, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=f(x+3)$을 만족시키므로

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_{1+3}^{2+3} f(x)\,dx=\int_4^5 f(x)\,dx$$

12

답 40

> 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.
>
> $f(x)$가 우함수인지 기함수인지부터 파악하자. 그 다음, (우함수)×(우함수), (기함수)×(우함수)가 어떤 함수인지 결정하면 되는 거야.
>
> (가) $f(-x)=f(x)$
>
> (나) $f(x+2)=f(x)$ → 주기가 2인 주기함수임을 이용해.
>
> (다) $\int_{-1}^1 (2x+3)f(x)\,dx=15$
>
> → 이 식을 이용하여 $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$의 값을 찾을 수 있어.
>
> $\int_{-6}^{10} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

1st $f(x)$가 우함수인지 기함수인지 파악하자.

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 우함수이다.

이때, 조건 (다)에서 $2x$는 기함수, 3은 우함수이므로

$2xf(x)$는 기함수, $3f(x)$는 우함수이다.

→ (기함수)×(우함수)=(기함수), (우함수)×(우함수)=(우함수)임을 적용한 거야.

즉, $\int_{-1}^1 (2x+3)f(x)\,dx=15$에서

$$\int_{-1}^1 (2x+3)f(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 2xf(x)\,dx+\int_{-1}^1 3f(x)\,dx$$

$$=0+3\int_{-1}^1 f(x)\,dx=15$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(x)\,dx=5$$

2nd $f(x)$의 주기성을 이용하여 적분구간을 적절히 변형해보자.

한편, 조건 (나)에 의해 $f(x)$는 주기가 2인 함수이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+a)$가 성립하는 함수는 주기가 a인 주기함수를 의미해. 즉, 함수 $f(x)$의 값이 주기 2씩 계속 반복된다는 거야.

$$\int_{-5}^{-3} f(x)\,dx=\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_1^3 f(x)\,dx=\cdots=5$$

$$\therefore \int_{-6}^{10} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-6}^{-5} f(x)\,dx+\int_{-5}^{-3} f(x)\,dx$$

$$+\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx+\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{3} f(x)\,dx$$

$$+\int_{3}^{5} f(x)\,dx+\int_{5}^{7} f(x)\,dx+\int_{7}^{9} f(x)\,dx$$

$$+\int_{9}^{10} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-6}^{-5} f(x)\,dx+7\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{9}^{10} f(x)\,dx$$

$$=\int_{10}^{11} f(x)\,dx+7\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{9}^{10} f(x)\,dx$$

→ $\int_{-6}^{-5} f(x)\,dx=\int_{-6+2\times8}^{-5+2\times8} f(x)\,dx=\int_{10}^{11} f(x)\,dx$

$$=7\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{9}^{11} f(x)\,dx$$

$$=8\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=8\times5=40$$

→ $=\int_{9-2\times5}^{11-2\times5} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

> **[주기함수의 정적분]** 심플 정리
>
> 함수 $y=f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여
>
> $f(x+p)=f(x)$ (p는 0이 아닌 실수)
>
> 일 때, 정수 n에 대하여 다음이 성립한다.
>
> (1) $\displaystyle\int_{a+np}^{b+np} f(x)dx=\int_a^b f(x)\,dx$
>
> (2) $\displaystyle\int_a^{a+np} f(x)dx=n\int_0^p f(x)\,dx$

13 답 $\dfrac{4}{3}$

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하자.

$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)$$

이므로

$1+a+b=1 \qquad \therefore\ a+b=0 \cdots ㉠$ ⋯ Ⅰ

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x^2+ax+b)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}a+b=0$$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}a+b=-\dfrac{1}{3} \cdots ㉡$ ⋯ Ⅱ

㉠, ㉡을 연립하면

$a=\dfrac{2}{3},\ b=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ a-b=\dfrac{2}{3}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$ ⋯ Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	정적분과 미분계수의 정의를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.	40%
Ⅱ	정적분의 계산을 하여 a, b 사이의 또 다른 관계식을 구한다.	40%
Ⅲ	a, b의 값을 구해 $a-b$의 값을 구한다.	20%

Simple N 정적분의 활용

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 124～125

01 답 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$

02 답 $\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

03 답 $\displaystyle\int_a^b v(t)\,dt,\ \int_a^b |v(t)|\,dt$

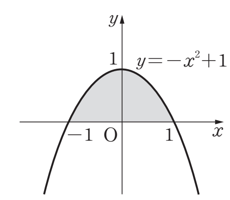
04 답 ×

05 답 ○

06 답 ×

07 답 $\dfrac{4}{3}$

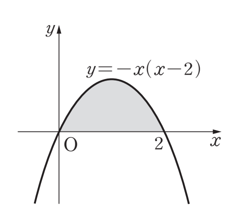
구하는 넓이는



$$\int_{-1}^1 |-x^2+1|\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 (-x^2+1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^1$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4}{3}$$

08 답 $\dfrac{4}{3}$

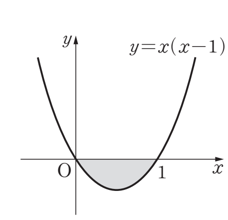
구하는 넓이는



$$\int_0^2 |-x(x-2)|\,dx$$
$$=\int_0^2 \{-x(x-2)\}\,dx$$
$$=\int_0^2 (-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

09 답 $\dfrac{1}{6}$

구하는 넓이는



$$\int_0^1 |x(x-1)|\,dx$$
$$=\int_0^1 \{-x(x-1)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 (-x^2+x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

10 답 $\frac{125}{6}$

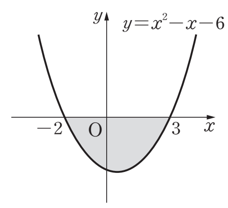
구하는 넓이는

$\int_{-2}^{3}|x^2-x-6|\,dx$

$=\int_{-2}^{3}(-x^2+x+6)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{3}$

$=\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)-\left(\frac{8}{3}+2-12\right)=\frac{125}{6}$



11 답 $\frac{1}{6}$

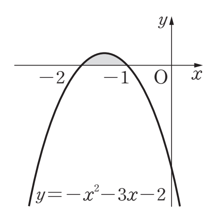
구하는 넓이는

$\int_{-2}^{-1}|-x^2-3x-2|\,dx$

$=\int_{-2}^{-1}(-x^2-3x-2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{-1}$

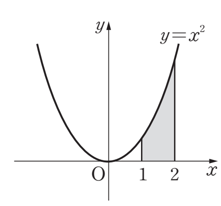
$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-6+4\right)=\frac{1}{6}$



12 답 $\frac{7}{3}$

구하는 넓이는

$\int_{1}^{2}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{2}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$



13 답 2

구하는 넓이는

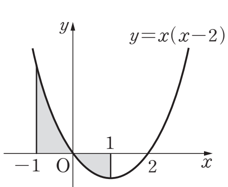
$\int_{-1}^{0}x(x-2)\,dx$

$\quad+\int_{0}^{1}\{-x(x-2)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^2+2x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$

$=-\left(-\frac{1}{3}-1\right)+\left(-\frac{1}{3}+1\right)=2$



14 답 $\frac{9}{2}$

곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2=x+2$, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

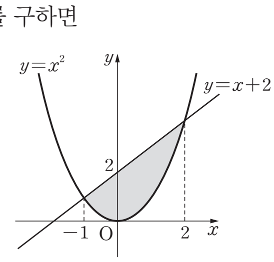
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이 S는

$S=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$

$=\left(2+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}$



15 답 $\frac{32}{3}$

곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-2=2x+1$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

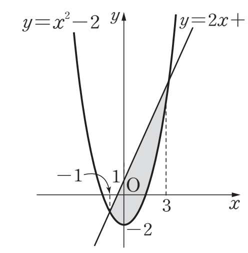
따라서 구하는 넓이 S는

$S=\int_{-1}^{3}(2x+1-x^2+2)\,dx$

$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}$

$=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{32}{3}$



16 답 $\frac{8}{3}$

두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2=x^2-2$, $2x^2=2$

$x^2=1\qquad\therefore x=\pm1$

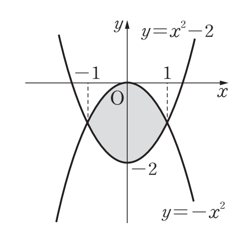
따라서 구하는 넓이 S는

$S=\int_{-1}^{1}(-x^2-x^2+2)\,dx$

$=2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}$

$=2\times\left\{\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}=\frac{8}{3}$



17 답 9

두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-x-1=-x^2-3x+3$

$2x^2+2x-4=0$

$2(x^2+x-2)=0$

$2(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

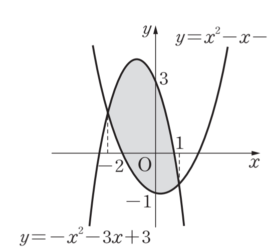
따라서 구하는 넓이 S는

$S=\int_{-2}^{1}(-x^2-3x+3-x^2+x+1)\,dx$

$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(-\frac{2}{3}-1+4\right)-\left(\frac{16}{3}-4-8\right)=9$



18 답 $-\frac{4}{3}$

$$0+\int_0^2 (t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^2=\frac{8}{3}-4=-\frac{4}{3}$$

19 답 $\frac{2}{3}$

$$\int_1^3 (t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_1^3=9-9-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}$$

20 답 2

$$\begin{aligned}\int_1^3 |t^2-2t|\,dt&=\int_1^2 (-t^2+2t)\,dt+\int_2^3 (t^2-2t)\,dt\\&=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3\\&=-\frac{8}{3}+4-\left(-\frac{1}{3}+1\right)+9-9-\left(\frac{8}{3}-4\right)\\&=2\end{aligned}$$

21 답 -2

$$2+\int_0^2 (2t-4)\,dt=2+\left[t^2-4t\right]_0^2=2+4-8=-2$$

22 답 -3

$$\int_0^3 (2t-4)\,dt=\left[t^2-4t\right]_0^3=9-12=-3$$

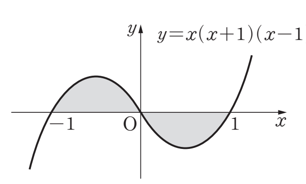
23 답 5

$$\begin{aligned}\int_0^3 |2t-4|\,dt&=\int_0^2 (-2t+4)\,dt+\int_2^3 (2t-4)\,dt\\&=\left[-t^2+4t\right]_0^2+\left[t^2-4t\right]_2^3\\&=-4+8+9-12-(4-8)=5\end{aligned}$$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 126~133

24 답 ②



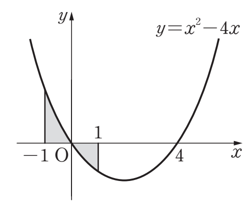
구하는 도형의 넓이 S는

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^1 |x(x+1)(x-1)|\,dx\\&=\int_{-1}^0 x(x+1)(x-1)\,dx+\int_0^1 \{-x(x+1)(x-1)\}\,dx\\&=\int_{-1}^0 (x^3-x)\,dx+\int_0^1 (x-x^3)\,dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1\\&=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

TIP

정적분을 넓이로 착각하기도 한다. 적분구간에서 함수의 그래프가 x축 위에 있을 때는 정적분과 넓이가 같지만 함수의 그래프가 x축 아래에 있을 경우는 정적분과 넓이가 같지 않다. 그래서 함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 때에는 먼저 좌표평면 위에 함수의 그래프를 그린 후 x축 아래에 있는 부분의 넓이는 함수식에 '$-$'를 붙여서 정적분을 해야 한다.

25 답 ④



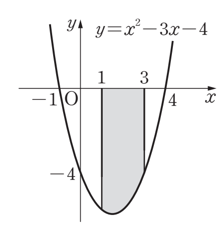
그림에서 구하는 도형의 넓이 S는

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^0 (x^2-4x)\,dx+\int_0^1 \{-(x^2-4x)\}\,dx\\&=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^1\\&=-\left(-\frac{1}{3}-2\right)+\left(-\frac{1}{3}+2\right)=4\end{aligned}$$

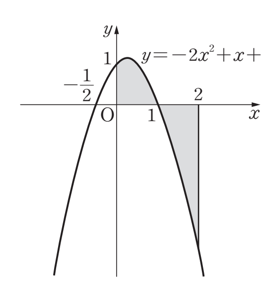
26 답 ④

그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_1^3 \{-(x^2-3x-4)\}\,dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_1^3\\&=\left(-9+\frac{27}{2}+12\right)\\&\quad-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+4\right)=\frac{34}{3}\end{aligned}$$



27 답 ④



그림에서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (-2x^2+x+1)\,dx+\int_1^2 \{-(-2x^2+x+1)\}\,dx\\&=\int_0^1 (-2x^2+x+1)\,dx+\int_1^2 (2x^2-x-1)\,dx\\&=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2\\&=\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1\right)+\left(\frac{16}{3}-2-2\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-1\right)\\&=3\end{aligned}$$

Ⅲ N

28 답 ③

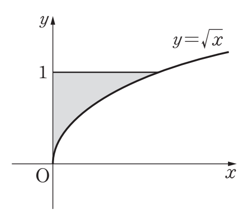
네 직선 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$로 둘러싸인 정사각형의 넓이는 1이다.

$S_2=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

따라서 $S_1=1-S_2=\frac{2}{3}$이므로

$S_1 : S_2=\frac{2}{3} : \frac{1}{3}=2 : 1$

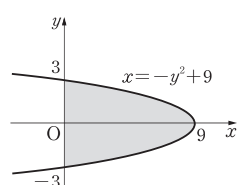
29 답 ②



$y=\sqrt{x}$에서 $x=y^2$이므로 구하는 도형의 넓이 S는

$S=\int_0^1 y^2dy=\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

30 답 ④



구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-3}^3 (-y^2+9)\,dy$

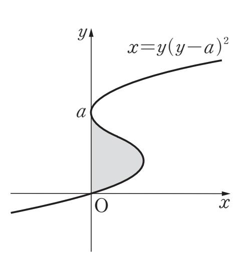
$=2\int_0^3 (-y^2+9)dy$

$=2\left[-\frac{1}{3}y^3+9y\right]_0^3$

$=2\times(-9+27)=36$

31 답 3

구하는 도형의 넓이는



$\int_0^a y(y-a)^2dy$

$=\int_0^a (y^3-2ay^2+a^2y)\,dy$

$=\left[\frac{1}{4}y^4-\frac{2}{3}ay^3+\frac{1}{2}a^2y^2\right]_0^a$

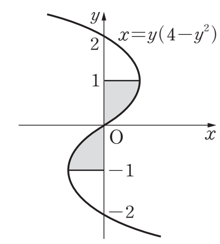
$=\frac{1}{4}a^4-\frac{2}{3}a^4+\frac{1}{2}a^4=\frac{1}{12}a^4$

이때, 주어진 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{27}{4}$이므로

$\frac{1}{12}a^4=\frac{27}{4}$, $a^4=81$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

32 답 ②



구하는 도형의 넓이는

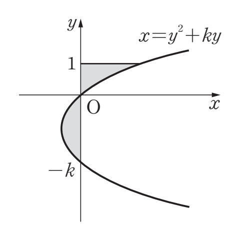
$\int_{-1}^0 (y^3-4y)\,dy+\int_0^1 (4y-y^3)\,dy$

$=2\int_0^1 (4y-y^3)dy=2\times\left[2y^2-\frac{1}{4}y^4\right]_0^1$

$=2\times\left(2-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{2}$

33 답 3

그림에서 구하는 도형의 넓이는



$\int_{-k}^0 \{-(y^2+ky)\}dy$

$+\int_0^1 (y^2+ky)dy$

$=\int_{-k}^0 (-y^2-ky)dy$

$+\int_0^1 (y^2+ky)dy$

$=\left[-\frac{1}{3}y^3-\frac{k}{2}y^2\right]_{-k}^0+\left[\frac{1}{3}y^3+\frac{k}{2}y^2\right]_0^1$

$=-\left(\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^3\right)+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}k$

$=\frac{1}{6}k^3+\frac{1}{2}k+\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$

$k^3+3k-36=0$

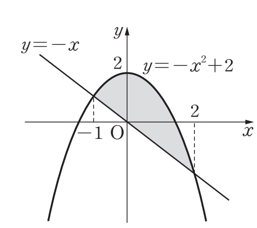
$(k-3)(k^2+3k+12)=0$

$\therefore k=3$

3	1	0	3	−36
		3	9	36
	1	3	12	0

34 답 ③

곡선 $y=-x^2+2$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표를 구하면



$-x^2+2=-x$

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$S=\int_{-1}^2 \{(-x^2+2)-(-x)\}\,dx$

$=\int_{-1}^2 (-x^2+x+2)\,dx$

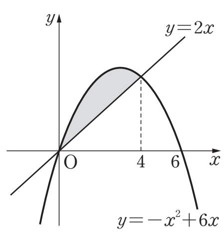
$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$

$=-\frac{8}{3}+2+4-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$

> **TIP**
> 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 때, 특수한 경우에서 넓이를 간단히 구할 수 있는 공식이 있다.
> 곡선 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표를 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라고 하면 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\dfrac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$으로 구해진다.
> 공식을 기억해서 써먹는 것도 중요하지만 해설과 같이 일반적으로 구하는 방법을 알고 있는 게 더 안전하다.

35 답 ②

곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표를 구하면



$-x^2+6x=2x$

$x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_0^4\{(-x^2+6x)-2x\}\,dx$$
$$=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4$$
$$=-\frac{64}{3}+32=\frac{32}{3}$$

다른 풀이

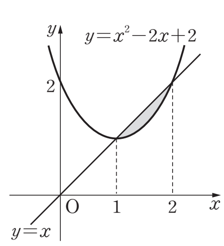
34번의 TIP에서 제시한 공식을 이용해 넓이를 구해보자.

주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표가 0, 4이므로

$$(\text{구하는 도형의 넓이})=\frac{|-1|\times(4-0)^3}{6}$$
$$=\frac{64}{6}=\frac{32}{3}$$

36 답 ①

곡선 $y=x^2-2x+2$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면



$x^2-2x+2=x$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

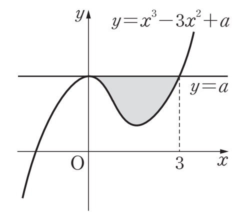
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_1^2\{x-(x^2-2x+2)\}\,dx$$
$$=\int_1^2(-x^2+3x-2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+6-4\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\right)$$
$$=\frac{1}{6}$$

37 답 ③

곡선 $y=x^3-3x^2+a$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표를 구하면



$x^3-3x^2+a=a$

$x^3-3x^2=0$

$x^2(x-3)=0$

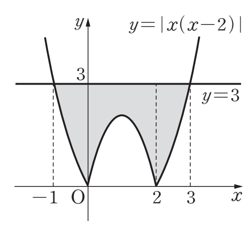
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_0^3\{a-(x^3-3x^2+a)\}\,dx$$
$$=\int_0^3(-x^3+3x^2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3=-\frac{81}{4}+27=\frac{27}{4}$$

38 답 ①

$$y=|x(x-2)|=\begin{cases}x(x-2) & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 2)\\ -x(x-2) & (0<x<2)\end{cases}$$

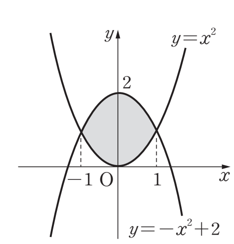


따라서 그림에서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^0(3-x^2+2x)\,dx+\int_0^2(3+x^2-2x)\,dx$$
$$+\int_2^3(3-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[3x-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-1}^0+\left[3x+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2$$
$$+\left[3x-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_2^3$$
$$=-\left(-3+\frac{1}{3}+1\right)+\left(6+\frac{8}{3}-4\right)+(9-9+9)$$
$$-\left(6-\frac{8}{3}+4\right)$$
$$=8$$

39 답 ④

두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+2$의 교점의 x좌표를 구하면



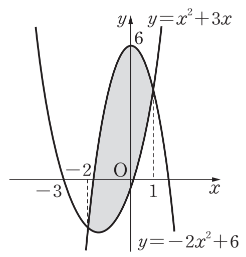
$x^2=-x^2+2$, $x^2=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^1\{(-x^2+2)-x^2\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^1(-2x^2+2)\,dx=2\int_0^1(-2x^2+2)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1=2\times\left(-\frac{2}{3}+2\right)=\frac{8}{3}$$

40 답 ④



두 곡선 $y=x^2+3x$, $y=-2x^2+6$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2+3x=-2x^2+6$

$3x^2+3x-6=0$

$3(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{(-2x^2+6)-(x^2+3x)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-3x^2-3x+6)\,dx$$

$$=\left[-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\left(-1-\frac{3}{2}+6\right)-(8-6-12)=\frac{27}{2}$$

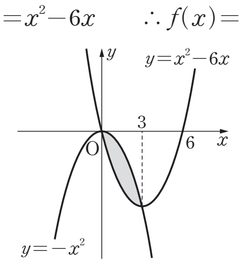
41 답 ①

곡선 $y=-x^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면

$y=x^2$

이 곡선을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -9만큼 평행이동하면

$y=(x-3)^2-9=x^2-6x \qquad \therefore f(x)=x^2-6x$



이때, 두 곡선 $y=-x^2$, $y=x^2-6x$의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2=x^2-6x$, $2x^2-6x=0$

$2x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{3}\{-x^2-(x^2-6x)\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{3}$$

$$=-18+27=9$$

> **심플 정리**
>
> **[평행이동]**
>
> (1) 점의 평행이동
>
> 점 (a, b)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점은 $(a+m, b+n)$
>
> (2) 도형의 평행이동
>
> 도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형은 $f(x-m, y-n)=0$

42 답 ①

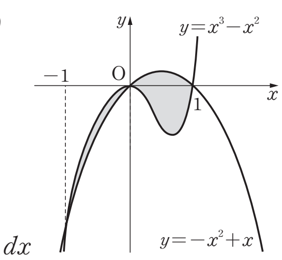
두 곡선 $y=x^3-x^2$, $y=-x^2+x$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-x^2=-x^2+x$, $x^3-x=0$

$x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

또는 $x=1$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(x^3-x^2)-(-x^2+x)\}\,dx$$

$$+\int_{0}^{1}\{(-x^2+x)-(x^3-x^2)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

43 답 ④

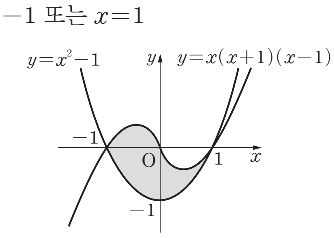
두 곡선 $y=x(x+1)(x-1)=x^3-x$,

$y=x^2-1=(x+1)(x-1)$의 교점의 x좌표를 구하면

$x(x+1)(x-1)=(x+1)(x-1)$

$(x-1)^2(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{(x^3-x)-(x^2-1)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x)\,dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx$$

$$=0+2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$$

$$=2\times\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4}{3}$$

TIP

정적분의 성질 중 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$는 피적분함수 $f(x)$가 원점에 대하여 대칭인 함수(기함수) 또는 y축에 대하여 대칭인 함수(우함수)인 경우 다음과 같이 계산하면 편리하다.

(1) $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

(2) $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

44 답 ②

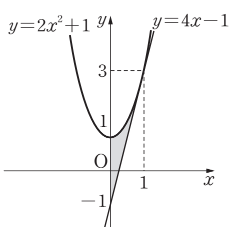
$y=2x^2+1$에서 $y'=4x$

이때, 곡선 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$4\times1=4$이므로 접선의 방정식은

$y-3=4(x-1)$

$\therefore\ y=4x-1$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{0}^{1} \{(2x^2+1)-(4x-1)\}\,dx$

$=\int_{0}^{1} (2x^2-4x+2)\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x\right]_0^1$

$=\frac{2}{3}-2+2=\frac{2}{3}$

TIP

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용하여 접선의 방정식을 구하자.

45 답 ④

$y=-x^3$에서 $y'=-3x^2$

이때, 곡선 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$-3\times1^2=-3$이므로 접선의 방정식은

$y+1=-3(x-1)$

$\therefore\ y=-3x+2$

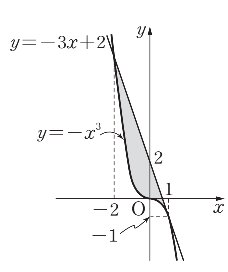
곡선 $y=-x^3$과 직선 $y=-3x+2$의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^3=-3x+2$

$x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-2}^{1} \{(-3x+2)-(-x^3)\}\,dx$

$=\int_{-2}^{1} (x^3-3x+2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-(4-6-4)=\frac{27}{4}$

46 답 ③

$y=x^2$에서 $y'=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2t$이므로 접선의 방정식은 $y-t^2=2t(x-t)$ ⋯ ㉠

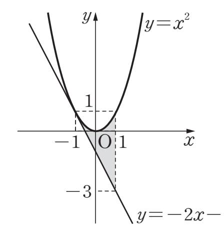
이 접선이 점 $(1,\ -3)$을 지나므로

$-3-t^2=2t(1-t)$

$t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=3$



(i) $t=-1$일 때

㉠에 의해 접선의 방정식은

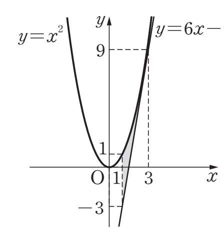
$y-1=-2(x+1)$ $\quad\therefore\ y=-2x-1$

(ii) $t=3$일 때

㉠에 의해 접선의 방정식은

$y-9=6(x-3)$

$\therefore\ y=6x-9$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-1}^{1} \{x^2-(-2x-1)\}\,dx$

$\quad+\int_{1}^{3} \{x^2-(6x-9)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{1} (x^2+2x+1)\,dx+\int_{1}^{3} (x^2-6x+9)\,dx$

$=2\int_{0}^{1} (x^2+1)\,dx+\int_{1}^{3} (x^2-6x+9)\,dx$

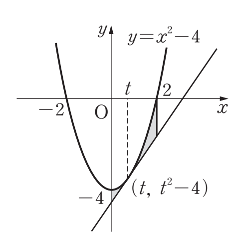
$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^3$

$=2\times\left(\frac{1}{3}+1\right)+(9-27+27)-\left(\frac{1}{3}-3+9\right)$

$=\frac{16}{3}$

47 답 ②

$y=x^2-4$에서 $y'=2x$



이때, 이 곡선 위의 점 $(t,\ t^2-4)$에서의 접선의 기울기는 $2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-4)=2t(x-t)$

$\therefore\ y=2tx-t^2-4$

즉, 구하는 도형의 넓이는

$\int_{0}^{2} \{(x^2-4)-(2tx-t^2-4)\}\,dx$

$=\int_{0}^{2} (x^2-2tx+t^2)\,dx$

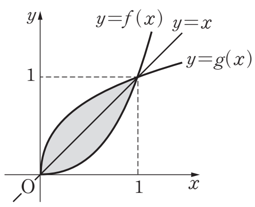
$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_0^2$

$=2t^2-4t+\frac{8}{3}=2(t-1)^2+\frac{2}{3}\ (0<t<2)$

따라서 $t=1$일 때 넓이의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다.

48 답 ①

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



이때, $x^2=x$에서

$x(x-1)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$2\int_0^1 (x-x^2)\,dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

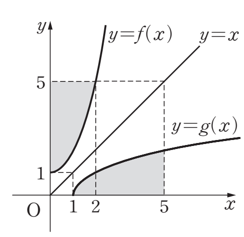
심플 정리

[역함수의 성질]

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일대응이면
(1) 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$가 존재한다.
(2) $y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$
(3) $(f^{-1}\circ f)(x)=x,\ (f\circ f^{-1})(y)=y$
(4) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

49 답 ③

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그림에서 어두운 두 부분의 넓이가 같다.



한편, $x^2+1=5$에서

$x^2=4 \qquad \therefore x=2\ (\because x\geq 0)$

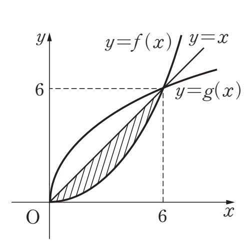
따라서 구하는 넓이는 두 직선 $x=2$, $y=5$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 직사각형의 넓이에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=2$, x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 빼면 되므로

$$\int_1^5 g(x)\,dx=2\times 5-\int_0^2 (x^2+1)\,dx$$

$$=10-\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^2=10-\left(\frac{8}{3}+2\right)=\frac{16}{3}$$

50 답 ①

그림과 같이 구하는 넓이는 직선 $y=x$에 의하여 이등분되고, 빗금친 부분의 넓이는



$$\frac{1}{2}\times 6\times 6-\int_0^6 f(x)\,dx$$

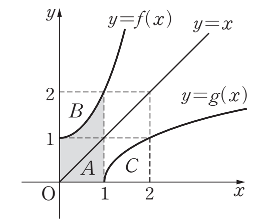
$=18-10=8$

따라서 구하는 넓이는 빗금친 부분의 넓이의 2배이므로

$2\times 8=16$이다.

51 답 ②

$f(x)=x^3+1\,(x\geq 0)$과 역함수 $g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그림에서 B 부분의 넓이와 C 부분의 넓이가 같다.



$$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 g(x)\,dx$$

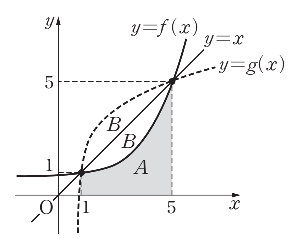
$=(A$ 부분의 넓이$)+(C$ 부분의 넓이$)$

$=(A$ 부분의 넓이$)+(B$ 부분의 넓이$)$

$=1\times 2=2$

52 답 ④

$f(1)=1$, $f(5)=5$인 연속함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$의 그래프 개형이 다음과 같다고 하자.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를

B라 하면 $\int_1^5 f(x)\,dx=A$이므로

$A+B=\frac{1}{2}\times(1+5)\times 4=12 \cdots$ ㉠

또, $\int_1^5 g(x)\,dx=A+2B$이고

조건에서 $\int_1^5 g(x)\,dx=k-A$라 하므로

$A+2B=k-A,\ 2(A+B)=k$

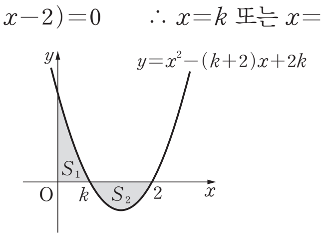
$\therefore k=24\ (\because$ ㉠$)$

53 답 ③

이차함수 $y=x^2-(k+2)x+2k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하자.

$x^2-(k+2)x+2k=0$

$(x-k)(x-2)=0 \qquad \therefore x=k$ 또는 $x=2$



이때, $S_1=S_2$, 즉 $S_1-S_2=0$이므로

$$\int_0^2 \{x^2-(k+2)x+2k\}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{k+2}{2}x^2+2kx\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{3}-2(k+2)+4k=0$$
$$2k-\frac{4}{3}=0 \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$$

54 답 ③

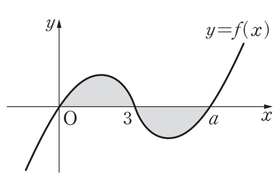
이차함수 $y=3x^2-6x$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하면

$3x^2-6x=0$, $3x(x-2)=0$ $\qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

두 부분 A, B의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^a (3x^2-6x)\,dx=\left[x^3-3x^2\right]_0^a=a^3-3a^2=0$$
$$a^2(a-3)=0 \qquad \therefore a=3\ (\because a>2)$$

55 답 ⑤



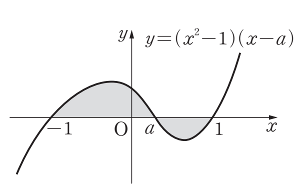
$a>3$이고, 함수 $f(x)=x(x-3)(x-a)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^a x(x-3)(x-a)\,dx$$
$$=\int_0^a \{x^3-(a+3)x^2+3ax\}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+3}{3}x^3+\frac{3}{2}ax^2\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{4}a^4-\frac{a+3}{3}a^3+\frac{3}{2}a^3$$
$$=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^3=-\frac{1}{12}a^3(a-6)=0$$
$$\therefore a=6\ (\because a>3)$$

따라서 $f(x)=x(x-3)(x-6)$이므로

$f(2)=2\times(-1)\times(-4)=8$

56 답 ③



곡선 $y=(x^2-1)(x-a)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이의 합을 $S(a)$라 하고 정적분을 이용하여 $S(a)$를 구하자.

$$S(a)=\int_{-1}^a (x^2-1)(x-a)\,dx+\int_a^1 \{-(x^2-1)(x-a)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^a (x^3-ax^2-x+a)\,dx-\int_a^1 (x^3-ax^2-x+a)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{-1}^a-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_a^1$$
$$=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}\right)$$
$$=-\frac{1}{6}a^4+a^2+\frac{1}{2}$$

$S(a)=-\frac{1}{6}a^4+a^2+\frac{1}{2}$에서

$S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a=-\frac{2}{3}a(a^2-3)$

$S'(a)=0$에서

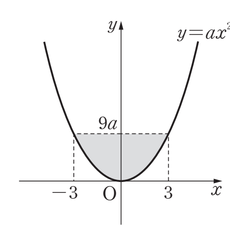
$-\frac{2}{3}a(a^2-3)=0 \qquad \therefore a=0\ (\because -1<a<1)$

함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=0$일 때 극소이면서 최소이므로 주어진 두 도형의 넓이의 합이 최소가 되도록 하는 a의 값은 0이다.

57 답 ②



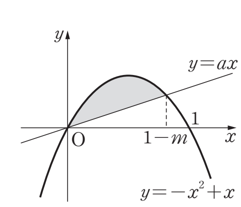
(색칠한 부분의 넓이)

$$=6\times 9a-\int_{-3}^3 ax^2dx$$
$$=54a-2\int_0^3 ax^2dx$$
$$=54a-2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^3$$
$$=54a-2\times 9a=36a$$

이 값이 54라 하므로

$36a=54 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

58 답 ④



곡선 $y=-x^2+x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표를 구하자.

$-x^2+x=mx$에서

$x^2+(m-1)x=0$

$x(x+m-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1-m$

Ⅲ N

따라서 그림의 어두운 부분의 넓이는

$$\int_0^{1-m}\{(-x^2+x)-mx\}\,dx$$

$$=\int_0^{1-m}\{-x^2+(1-m)x\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1-m}{2}x^2\right]_0^{1-m}$$

$$=-\frac{1}{3}(1-m)^3+\frac{1}{2}(1-m)^3=\frac{1}{6}(1-m)^3$$

한편, 곡선 $y=-x^2+x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1(-x^2+x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

곡선 $y=-x^2+x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $y=mx$에 의하여 이등분된다고 하므로

$$\frac{1}{6}(1-m)^3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\qquad\therefore\ (1-m)^3=\frac{1}{2}$$

59 답 ②

$$\int_0^5(12-2t)\,dt=\left[12t-t^2\right]_0^5=60-25=35$$

60 답 ①

$$\int_1^2(3t^2-4t+7)\,dt=\left[t^3-2t^2+7t\right]_1^2$$

$$=(8-8+14)-(1-2+7)$$

$$=8$$

61 답 ③

점 P가 다시 원점으로 돌아올 때의 위치는 0이고, 이때의 시각을 $t=a$라 하면

$$\int_0^a(t^2-6t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{3}a^3-3a^2=\frac{1}{3}a^2(a-9)=0$$

$\therefore\ a=9$ ($\because\ a>0$)

62 답 ①

물체를 쏘아 올린 후 t초가 지나는 순간의 지상으로부터의 물체의 높이를 $h(t)$ m라 하면

$$h(t)=h(0)+\int_0^t v(t)\,dt$$

지상으로부터 20 m의 높이에서 쏘아 올렸으므로 $t=0$일 때 물체의 높이는 $h(0)=20$이다.

$$\therefore\ h(t)=20+\int_0^t(49-9.8t)\,dt$$

$$=20+\left[49t-4.9t^2\right]_0^t$$

$$=20+49t-4.9t^2$$

$t=10$일 때의 지상으로부터의 물체의 높이는 $h(10)$이므로

$$h(10)=20+49\times10-4.9\times10^2$$

$$=20+490-490=20(\text{m})$$

63 답 ②

A 지점의 위치를 0이라 하면 x초 후의 이 물체의 위치는

$$\int_0^x(3+2t)\,dt=\left[3t+t^2\right]_0^x=3x+x^2$$

A 지점에서 B 지점까지의 거리가 28 m이므로

$x^2+3x=28,\ x^2+3x-28=0$

$(x+7)(x-4)=0\qquad\therefore\ x=4$ ($\because\ x\ge0$)

64 답 ①

두 점 P, Q가 t초 후 같은 위치에 있어야 하므로

$$\int_0^t 2t(3-t)(6-t)\,dt=\int_0^t 7t(4-t)\,dt$$

$$\int_0^t(2t^3-18t^2+36t)\,dt=\int_0^t(28t-7t^2)\,dt$$

$$\int_0^t(2t^3-18t^2+36t)\,dt-\int_0^t(28t-7t^2)\,dt=0$$

$$\int_0^t\{(2t^3-18t^2+36t)-(28t-7t^2)\}\,dt=0$$

$$\int_0^t(2t^3-11t^2+8t)\,dt=\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{11}{3}t^3+4t^2\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{2}t^4-\frac{11}{3}t^3+4t^2$$

$$=\frac{1}{6}t^2(3t^2-22t+24)$$

$$=\frac{1}{6}t^2(3t-4)(t-6)=0$$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=6$

따라서 움직이기 시작하여 두 점 P, Q가 두 번째로 만나는 것은 출발한 지 6초 후이다.

65 답 ②

$t=a$일 때 원점에 다시 돌아온다고 하면 이때의 위치는 0이므로

$$\int_0^a(-3t^2+6t)dt=\left[-t^3+3t^2\right]_0^a$$

$$=-a^3+3a^2=0$$

$a^2(a-3)=0\qquad\therefore\ a=3$

따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|-3t^2+6t|dt=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt$$

$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^3$$

$$=(-8+12)+(27-27)-(8-12)$$

$$=8$$

66 답 ③

시각 $t=4$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $v(4)=0$이다.

$v(4)=40-4a=0$

$4a=40\qquad\therefore\ a=10$

따라서 $v(t)=40-10t$이므로 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는

$$\int_0^6 |40-10t|\,dt$$
$$=\int_0^4 (40-10t)\,dt+\int_4^6 (10t-40)\,dt$$
$$=\Big[40t-5t^2\Big]_0^4+\Big[5t^2-40t\Big]_4^6$$
$$=(160-80)+(180-240)-(80-160)$$
$$=100$$

67 답 ④

$f(t)=t^3-3t^2-9t+2$로 놓으면

속도는 $f'(t)$이므로

$$f'(t)=3t^2-6t-9=3(t^2-2t-3)$$
$$=3(t+1)(t-3)$$

$f'(x)=0$에서 $t=3$ ($\because t\ge 0$)

즉, 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=3$이다.

따라서 $t=0$부터 $t=5$까지 움직인 거리는

$$\int_0^5 |3(t+1)(t-3)|\,dt$$
$$=-\int_0^3 3(t+1)(t-3)\,dt+\int_3^5 3(t+1)(t-3)\,dt$$
$$=-\int_0^3 (3t^2-6t-9)\,dt+\int_3^5 (3t^2-6t-9)\,dt$$
$$=-\Big[t^3-3t^2-9t\Big]_0^3+\Big[t^3-3t^2-9t\Big]_3^5$$
$$=-(27-27-27)+(125-75-45)-(27-27-27)$$
$$=59$$

68 답 ①

정지할 때의 속도가 0이므로 $v(t)=0$일 때의 시각 t를 구하면

$v(t)=60-6t=0 \qquad \therefore t=10$

따라서 기차가 10초 동안 움직인 거리는

$$\int_0^{10} |60-6t|\,dt=\int_0^{10} (60-6t)\,dt$$
$$=\Big[60t-3t^2\Big]_0^{10}$$
$$=600-300=300(\mathrm{m})$$

69 답 ①

점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 움직인 거리는 속도 $v(t)$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=0$, $t=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{3}{2}$$

다른 풀이

$v(t)=\begin{cases} t & (0\le t\le 1) \\ -t+2 & (1\le t\le 3)\end{cases}$이므로 출발한 후 3초 동안 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^3 \{-v(t)\}\,dt$$
$$=\int_0^1 t\,dt+\int_1^2 (-t+2)\,dt+\int_2^3 (t-2)\,dt$$
$$=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{2}t^2+2t\Big]_1^2+\Big[\frac{1}{2}t^2-2t\Big]_2^3$$
$$=\frac{1}{2}+(-2+4)-\left(-\frac{1}{2}+2\right)+\left(\frac{9}{2}-6\right)-(2-4)=\frac{3}{2}$$

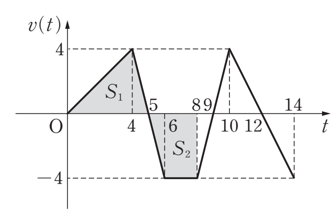
70 답 ③

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 움직인 거리는 속도 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times(1+3)\times1=3$$

71 답 ②

$t=t_1$일 때 원점을 첫 번째로 통과한다면 이때의 위치가 0이면 된다. 즉, $\int_0^{t_1} v(t)\,dt=0$이어야 한다.



그림에서 S_1, S_2의 넓이를 각각 구하면

$$S_1=\frac{1}{2}\times5\times4=10,\ S_2=\frac{1}{2}\times(3+2)\times4=10$$

즉, $t=8$일 때, $S_1=S_2$에서 $\int_0^8 v(t)=S_1-S_2=0$이므로

이때 첫 번째로 원점을 통과한다.

72 답 ①

이차함수의 그래프와 t축의 교점의 t좌표가 1, 2이므로

$v(t)=a(t-1)(t-2)\,(a>0)$라 하면 $v(0)=4$에서

$2a=4 \qquad \therefore a=2$

$\therefore v(t)=2(t-1)(t-2)=2t^2-6t+4$

이때, 점 P가 출발할 때의 운동 방향에 대하여 반대 방향으로 움직인 시간은 $t=1$부터 $t=2$까지이므로 점 P가 $t=1$부터 $t=2$까지 움직인 거리는

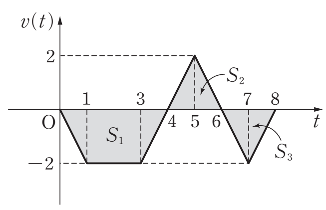
$$\int_1^2 \{-(2t^2-6t+4)\}\,dt$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}t^3+3t^2-4t\Big]_1^2$$
$$=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)=\frac{1}{3}$$

73 답 ④

ㄱ. 점 P가 처음으로 정지하는 시각 t는 $v(t)=0$이 되는 첫 번째 t의 값이므로 $t=4$이다.
즉, 출발 후 $t=4$일 때까지 움직인 거리는 $t=0$부터 $t=4$까지 속도 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로 $\frac{1}{2}\times(4+2)\times2=6$이다. (거짓)

ㄴ. $t=4$, $t=6$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 두 번 바꿨다. (참)

ㄷ.



그림에서 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times(4+2)\times2=6$

$S_2=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

$S_3=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

이때,

$\int_0^4 v(t)\,dt=-S_1=-6<0$

$\int_0^6 v(t)\,dt=-S_1+S_2=-6+2=-4<0$

$\int_0^8 v(t)\,dt=-S_1+S_2-S_3=-6+2-2=-6<0$

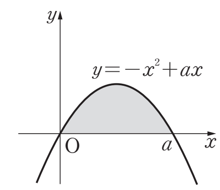
에서 $0\le t\le8$일 때 $\int_0^t v(t)\,dt=0$이 되도록 하는 t의 값이 없으므로 점 P는 출발하고 나서 다시 원점을 통과하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

연습 문제[N]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 134~135

01 답 ③



곡선 $y=-x^2+ax$가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하면

$-x^2+ax=0$

$-x(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$

곡선 $y=-x^2+ax$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

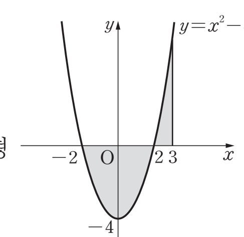
$$\int_0^a(-x^2+ax)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a$$
$$=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}=\frac{a^3}{6}$$

즉, $\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$이므로

$a^3=27$ $\quad\therefore a=3$

02 답 ②

곡선 $y=x^2-4$가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하면



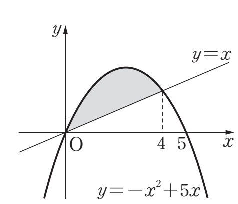
$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=x^2-4$와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 두 도형의 넓이의 합은

$$\int_{-2}^{2}\{-(x^2-4)\}dx+\int_2^3(x^2-4)dx$$
$$=2\int_0^2(4-x^2)dx+\int_2^3(x^2-4)dx$$
$$=2\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^3$$
$$=2\times\left(8-\frac{8}{3}\right)+(9-12)-\left(\frac{8}{3}-8\right)$$
$$=13$$

03 답 ③



곡선 $y=-x^2+5x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2+5x=x$

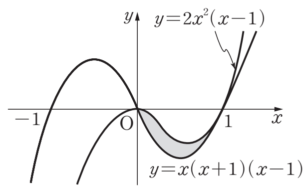
$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 곡선 $y=-x^2+5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^4\{(-x^2+5x)-x\}\,dx=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4$$
$$=-\frac{64}{3}+32=\frac{32}{3}$$

04 답 ①



곡선 $y=2x^2(x-1)$과 곡선 $y=x(x+1)(x-1)$의 교점의 x좌표를 구하면

$2x^2(x-1)=x(x+1)(x-1)$

$2x^2(x-1)-x(x+1)(x-1)=0$

$x(x-1)\{2x-(x+1)\}=0$

$x(x-1)^2=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 두 곡선 $y=2x^2(x-1)$과 $y=x(x+1)(x-1)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^1 \{2x^2(x-1)-x(x+1)(x-1)\}\,dx$

$=\int_0^1 (x^3-2x^2+x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

05 답 ②

(i) [그림 1]에서

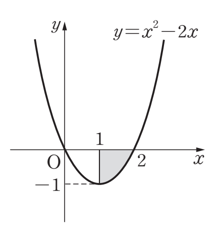
$S_1=\int_1^2 \{-(x^2-2x)\}\,dx$

$=\int_1^2 (-x^2+2x)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2$

$=-\frac{8}{3}+4-\left(-\frac{1}{3}+1\right)$

$=\frac{2}{3}$



[그림 1]

(ii) 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2=x+2,\ x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

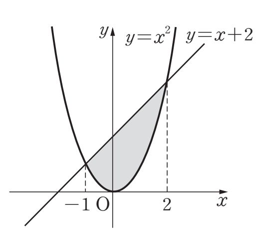
[그림 2]에서

$S_2=\int_{-1}^2 \{(x+2)-x^2\}\,dx$

$=\int_{-1}^2 (-x^2+x+2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$

$=-\frac{8}{3}+2+4-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$



[그림 2]

$\therefore S_1+S_2=\frac{2}{3}+\frac{9}{2}=\frac{31}{6}$

06 답 ④

곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 상수이다.)

그래프를 잘 그리기만 하면 문제를 거의 해결한 거야. 극대, 극소가 존재하는지를 파악한 후에 그래프를 그려.

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

1st 삼차함수의 그래프의 개형을 그리자.

$f(x)=x^3-2x^2+k$라 놓으면

$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$

$f'(x)=0$에서

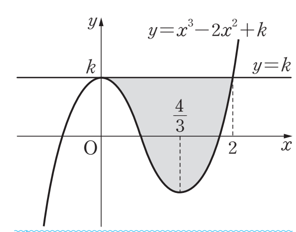
$f'(x)=0$이 되는 x의 값 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는지 확인해야 해.

$x(3x-4)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대 (k)	↘	극소 $\left(-\frac{32}{27}+k\right)$	↗

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$k>0$인 경우야. 곡선과 직선의 위치 관계에 집중하면 돼.

2nd 삼차함수의 그래프와 직선 $y=k$의 교점을 구하고, 구하는 넓이를 계산하자.

$x^3-2x^2+k=k$에서

$x^3-2x^2=0,\ x^2(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^2 (k-x^3+2x^2-k)\,dx$

그림에서 직선 $y=k$가 곡선 $y=x^3-2x^2+k$보다 위에 있으니까 피적분함수가 $k-(x^3-2x^2+k)$가 되는 거야.

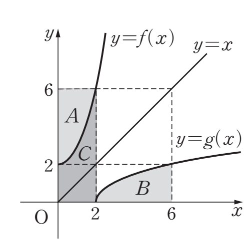
$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$

$=-4+\frac{16}{3}=\frac{4}{3}$

07 답 12

함수 $f(x)=x^2+2\ (x\geq 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 그림에서 $A=B$이므로



$\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^6 g(x)\,dx=C+B=C+A$

$=2\times 6=12$

Ⅲ N 연습

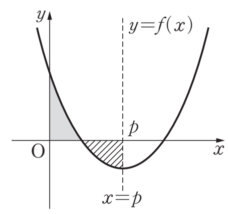
08 답 ③

$y=x^2-2px+p^2-p=(x-p)^2-p$

이므로 주어진 곡선은 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다.

즉, A 부분의 넓이와 B 부분의 넓이의 비가 $1:2$이므로

그림에서 빗금친 부분의 넓이는 A 부분의 넓이와 같다.



$\int_0^p (x^2-2px+p^2-p)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-px^2+(p^2-p)x\right]_0^p$

$=\frac{1}{3}p^3-p^3+p^3-p^2$

$=\frac{1}{3}p^2(p-3)=0$

$\therefore p=3\ (\because p>0)$

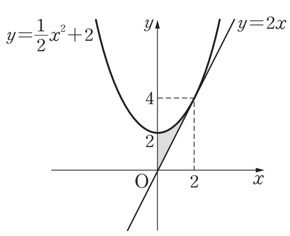
09 답 ④

$y=\frac{1}{2}x^2+2$에서 $y'=x$이고 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 접선의 방정식은

$y-4=2(x-2)\qquad \therefore y=2x$

따라서 구하는 도형의

넓이는



$\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2+2-2x\right)dx$

$=\left[\frac{1}{6}x^3+2x-x^2\right]_0^2$

$=\frac{4}{3}+4-4=\frac{4}{3}$

10 답 ⑤

출발 후 $t=4$일 때의 점 P의 위치는

$\int_0^4 (-3t+9)\,dt=\left[-\frac{3}{2}t^2+9t\right]_0^4=-24+36=12$

출발 후 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4 |-3t+9|\,dt=\int_0^3 (-3t+9)\,dt+\int_3^4 (3t-9)dt$

$=\left[-\frac{3}{2}t^2+9t\right]_0^3+\left[\frac{3}{2}t^2-9t\right]_3^4$

$=-\frac{27}{2}+27+(24-36)-\left(\frac{27}{2}-27\right)$

$=15$

따라서 $a=12$, $b=15$이므로 $a+b=12+15=27$

11 답 7

시각 $t=6$일 때 점 P의 위치가 원점이 되려면

$\int_0^6 v(t)\,dt=0$이어야 한다.

$\int_0^6 v(t)\,dt=\int_0^2 (-3t^2)\,dt+\int_2^6 \{a(t-2)-12\}\,dt$

$=\left[-t^3\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}at^2-2at-12t\right]_2^6$

$=-8+(18a-12a-72)-(2a-4a-24)$

$=8a-56=0\qquad \therefore a=7$

12 답 ③

3 km를 달릴 때까지 걸린 시간을 x분이라 하자.

$\int_0^x \left|\frac{1}{4}t+\frac{5}{4}\right|dt=3$에서

$t\geq 0$일 때, $\frac{1}{4}t+\frac{5}{4}>0$이므로

$\int_0^x \left(\frac{1}{4}t+\frac{5}{4}\right)dt=3$

$\left[\frac{1}{8}t^2+\frac{5}{4}t\right]_0^x=3$

$\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x=3,\ x^2+10x-24=0$

$(x-2)(x+12)=0\qquad \therefore x=2\ (\because x\geq 0)$

즉, 2분 후의 속도는

$v(2)=\frac{1}{4}\times 2+\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$(km/분)

로 일정하다.

따라서 출발 후 6분 동안 열차가 달린 거리는 2분 동안 달린 거리 3 km와 4분 동안 $\frac{7}{4}$ km/분의 속력으로 달린 거리의 합이고, 4분 동안 달린 거리는 $4\times\frac{7}{4}=7$(km)이므로

출발 후 6분 동안 열차가 달린 거리는 $3+7=10$(km)이다.

TIP

속도와 속력은 개념이 다르다. 방향성이 있는 속도는 '$-$'가 나올 수 있다. '$-$'는 진행 방향의 반대라고 생각하면 된다. 그에 비해 속력은 '$-$'가 나올 수 없다. 속력은 크기만을 나타내기 때문에 '$-$'가 나올 수 없는 것이다.

13 답 3

점 P가 이동한 거리는 $\int_0^5 |v(t)|\,dt$이므로 속도 $v(t)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$\therefore$ (이동한 거리)$=\frac{1}{2}\times(4+1)\times 1+\frac{1}{2}\times 1\times 1=3$

14 답 64

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(0\leq t\leq 8)$에서의 속도가 각각 $2t^2-8t$, t^3-10t^2+24t이다. 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

속도를 적분하면 위치가 됨을 이용하자. 이때, 거리를 구할 때는 절댓값으로 표현해야 해.

1st 속도를 적분하면 위치가 됨을 이용하자.

$f(t)=2t^2-8t$, $g(t)=t^3-10t^2+24t$라 하자.

x초 후의 두 점 P, Q 사이의 거리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\left|\int_0^x f(t)dt-\int_0^x g(t)dt\right|=\left|\int_0^x \{f(t)-g(t)\}\,dt\right|$

두 점 P, Q 중 어떤 것이 앞에 있는지 모르므로 거리를 구할 때는 절댓값으로 나타내야 해.

2nd 거리의 최댓값을 구하려면 절댓값 안의 함수를 정하고 미분하여 증가와 감소를 표로 나타내자.

$h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}\,dt$라 놓으면

$h'(x)=f(x)-g(x)$ $\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x F(x)dx\right\}=F(x)$

$=(2x^2-8x)-(x^3-10x^2+24x)$

$=-x^3+12x^2-32x$

$=-x(x^2-12x+32)$

$=-x(x-4)(x-8)$

$h'(x)=0$에서

$-x(x-4)(x-8)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=8$

$0\le x\le 8$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	8
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$	0	↘	극소 $h(4)$	↗	$h(8)$

$h(x)=\int_0^x \{(2t^2-8t)-(t^3-10t^2+24t)\}\,dt$

$=\int_0^x (-t^3+12t^2-32t)\,dt$

$h(x)=\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt$에 $f(t)=2t^2-8t$, $g(t)=t^3-10t^2+24t$를 대입한 거야.

$=-\frac{1}{4}x^4+4x^3-16x^2$

$x=4$일 때,

$|h(4)|=\left|-\frac{1}{4}\times 4^4+4\times 4^3-16\times 4^2\right|=64$

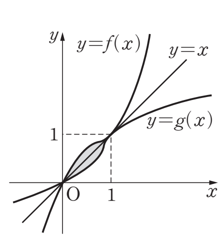
$x=8$일 때,

$|h(8)|=\left|-\frac{1}{4}\times 8^4+4\times 8^3-16\times 8^2\right|=0$

따라서 $|h(x)|$는 $x=4$에서 최댓값 64를 가지므로 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 64이다.

증가와 감소를 나타낸 표에서는 극소이면서 최소이지만, 구하는 것은 $|h(x)|$이므로 $x=4$에서 최댓값을 갖게 되는 거야.

15 답 $\frac{1}{6}$



함수 $f(x)=x^3-2x^2+2x$의 역함수를 $g(x)$라 하므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. … Ⅰ

따라서 구하는 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다. … Ⅱ

이때, $x^3-2x^2+2x=x$에서

$x^3-2x^2+x=0$

$x(x^2-2x+1)=0$

$x(x-1)^2=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=2\int_0^1 \{(x^3-2x^2+2x)-x\}\,dx$

$=2\int_0^1 (x^3-2x^2+x)\,dx$

$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=2\times\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{6}$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	역함수 관계에 있는 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 안다.	20%
Ⅱ	두 곡선으로 둘러싸인 부분은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같음을 안다.	30%
Ⅲ	도형의 넓이를 구한다.	50%

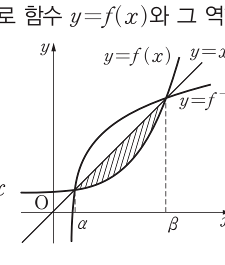
심플 정리

[역함수의 그래프와 넓이]

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 α, β일 때, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$S=\int_\alpha^\beta |f(x)-f^{-1}(x)|\,dx$

$=2\int_\alpha^\beta |x-f(x)|\,dx$



Ⅲ N 연습

Ⅲ 대단원 TEST [K~N] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 136~139

01 답 ④

$\int (x-1)f(x)\,dx=x^3-x^2-x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x-1)f(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

따라서 $f(x)=3x+1$이므로

$f(1)=3+1=4$

02 답 ③

$$f(x)=\int \left\{\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+3x)\right\}dx$$

$=x^3-2x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+3x+1$이므로

$f(2)=8-8+6+1=7$

03 답 ④

① $\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

② $\int_0^{\frac{1}{2}} dx=\left[x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

③ $-\int_1^0 t\,dt=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

④ $\int_{-1}^0 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0=-\frac{1}{2}$

⑤ $\int_2^3 (x-2)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$

$=\left(\frac{9}{2}-6\right)-(2-4)=\frac{1}{2}$

04 답 ⑤

$$f(x)=\int \frac{x^3-27}{x^2+3x+9}dx-\int \frac{x^3+27}{x^2-3x+9}dx$$

$$=\int \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2+3x+9}dx-\int \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x^2-3x+9}dx$$

$$=\int (x-3)\,dx-\int (x+3)\,dx$$

$$=\int \{(x-3)-(x+3)\}\,dx$$

$=\int (-6)\,dx=-6x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=6$이므로 $C=6$

따라서 $f(x)=-6x+6$이므로

$f(-2)=12+6=18$

05 답 ⑤

함수 $f(x)=|x|$에 대하여 $|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

$$\therefore \int_0^3 f(x)\,dx-\int_1^3 f(x)\,dx+\int_{-2}^0 f(x)\,dx$$

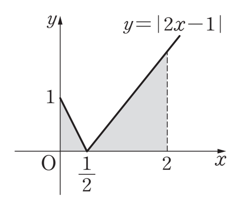
$$=\int_{-2}^0 f(x)\,dx+\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_{-2}^0 (-x)\,dx+\int_0^1 x\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

06 답 ④

$|2x-1|=\begin{cases} 2x-1 & \left(x\ge\frac{1}{2}\right) \\ 1-2x & \left(x<\frac{1}{2}\right) \end{cases}$



$$\therefore \int_0^2 |2x-1|\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)\,dx$$

$$=\left[x-x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^2$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+4-2-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

07 답 132

> 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.
>
> 식을 변형해보면 $\int_{12}^x f(t)\,dt=-x^3+x^2+x\int_0^1 f(t)\,dt$이지?
>
> 이제 x에 얼마를 대입하면 $\int_0^1 f(t)\,dt$의 값이 구해질지 결정해.
>
> $$\int_{12}^x f(t)dt=-x^3+x^2+\int_0^1 xf(t)dt$$
>
> $\int_0^1 f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

1st $\int_a^a f(t)dt=0$임을 이용해.

$\int_{12}^x f(t)dt=-x^3+x^2+\int_0^1 xf(t)dt$의 양변에 $x=12$를 대입하면 $\int_{12}^{12} f(t)dt=0$이므로

위끝과 아래끝이 같은 정적분의 값은 0이야.

$$-12^3+12^2+\int_0^1 12f(t)dt=0$$

$$-12^3+12^2+12\int_0^1 f(t)dt=0$$

$$-12^2+12+\int_0^1 f(t)dt=0$$

$$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(t)dt=144-12=132$$

다른 풀이

$$\int_{12}^x f(t)\,dt=-x^3+x^2+\int_0^1 xf(t)dt$$

$$=-x^3+x^2+x\int_0^1 f(t)dt$$

$\int_0^1 f(t)dt=A$라 하고 위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=-3x^2+2x+A$ $\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)dt\right\}=f(x)$

이것을 $\int_{12}^x f(t)dt=-x^3+x^2+Ax$에 대입하면

$$\int_{12}^x (-3t^2+2t+A)dt$$
$$=\Big[-t^3+t^2+At\Big]_{12}^x$$
$$=-x^3+x^2+Ax-(-12^3+12^2+12A)$$
$$=-x^3+x^2+Ax-12(-132+A)$$
$$=-x^3+x^2+Ax$$

$-(-12^3+12^2+12A)$
$=-12(-12^2+12+A)$
$=-12(-144+12+A)$
$=-12(-132+A)$

모든 실수 x에 대하여 위의 등식이 성립해야 하므로

$-132+A=0$ $\therefore A=132$

따라서 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(t)dt=132$이다.

08 답 ③

점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 $3a^2-4a$라 하므로

$f'(x)=3x^2-4x$이다.

$$f(x)=\int(3x^2-4x)dx$$
$$=x^3-2x^2+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수}) \cdots ㉠$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로 $f(1)=2$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1-2+C=2$ $\therefore C=3$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2+3$

① $f(-2)=-8-8+3=-13\neq 13$

② $f(-1)=-1-2+3=0\neq 2$

④ $f(2)=8-8+3=3\neq 7$

⑤ $f(3)=27-18+3=12\neq 11$

따라서 이 곡선 위의 점인 것은 ③ $(0, 3)$이다.

09 답 ③

함수 $f(x)=x^3-2x^2+6x-5$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

$\int_1^x f(t)dt=\Big[F(x)\Big]_1^x=F(x)-F(1)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)$$
$$=1-2+6-5=0$$

10 답 ⑤

$f(x)$가 연속함수이므로 $x=2$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$에서

$2+a=4-2\times2$ $\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x-2 & (x\geq2) \\ 4-2x & (x<2) \end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^3 f(x)\,dx=\int_{-2}^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-2}^2 (4-2x)\,dx+\int_2^3 (x-2)\,dx$$
$$=\Big[4x-x^2\Big]_{-2}^2+\Big[\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_2^3$$
$$=(8-4)-(-8-4)+\left(\frac{9}{2}-6\right)-(2-4)$$
$$=\frac{33}{2}$$

11 답 9

함수 $y=F(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-n=F(x)$임을 이용하여 $f(x)$의 식부터 구해.

함수 $y=4x^3-12x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. $\int_0^3 f(x)\,dx=0$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

1st $y=F(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은 $y-n=F(x-m)$임을 이용해.

함수 $y=4x^3-12x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수의 식은

$y-k=4x^3-12x^2$ $\therefore y=4x^3-12x^2+k$

[평행이동]

(1) 점의 평행이동

점 (x, y)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점은 $(x+m, y+n)$

(2) 도형의 평행이동

도형 $y=F(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형은 $y-n=F(x-m)$

즉, $f(x)=4x^3-12x^2+k$이므로

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 (4x^3-12x^2+k)\,dx$$
$$=\Big[x^4-4x^3+kx\Big]_0^3$$
$$=81-108+3k$$
$$=-27+3k=0$$

$\therefore k=9$

12 답 ②

두 부분 A, B의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^a (x^2-2x)\,dx=-S_1+S_2=0$$
$$\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2\Big]_0^a=0$$
$$\frac{1}{3}a^3-a^2=0,\ \frac{1}{3}a^2(a-3)=0$$

$\therefore a=3\ (\because a>2)$

Ⅲ 대단원

13 답 ②

$\int_0^6 f(x)\,dx$

$=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx+\cdots+\int_5^6 f(x)\,dx$

$=(2\cdot0+1)+(2\cdot1+1)+(2\cdot2+1)+\cdots+(2\cdot5+1)$

$=1+3+5+\cdots+11=36$

14 답 ③

$y=\sqrt{x-1}+1$에서

$\sqrt{x-1}=y-1,\ x-1=(y-1)^2$

$\therefore\ x=(y-1)^2+1=y^2-2y+2$

한편, $y=\sqrt{x-1}+1$에서

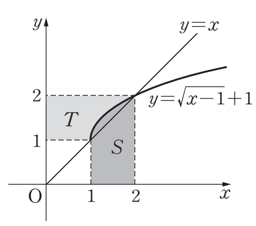
$x=1$일 때 $y=1$, $x=2$일 때

$y=2$이므로 그림에서 곡선

$x=y^2-2y+2$와 직선 $y=1$,

$y=2$ 및 y축으로 둘러싸인 도

형의 넓이 T는



$T=\int_1^2 (y^2-2y+2)\,dy=\left[\frac{1}{3}y^3-y^2+2y\right]_1^2$

$=\left(\frac{8}{3}-4+4\right)-\left(\frac{1}{3}-1+2\right)=\frac{4}{3}$

따라서 그림에서 구하는 도형의 넓이 S는

$S=2\times2-T-(1\times1)=4-\frac{4}{3}-1=\frac{5}{3}$

15 답 ②

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}2x+2 & (x<0)\\ -x^2+2x+2 & (x\geq0)\end{cases}$$

라 하자. 양의 실수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$의 최댓값은?

구간에 따라 함수가 다르니까 먼저 구간을 나누어 정적분 값을 계산하자.

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

1st 구간에 따라 함수가 다르므로 구간을 나누어 정적분 값을 계산하자.

$g(a)=\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$라 하자.

$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$

함수 $f(x)=\begin{cases}2x+2 & (x<0)\\ -x^2+2x+2 & (x\geq0)\end{cases}$라 하므로

$g(a)=\int_{-a}^{0} (2x+2)\,dx+\int_0^a (-x^2+2x+2)\,dx$

$=\left[x^2+2x\right]_{-a}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\right]_0^a$

$=-a^2+2a-\frac{1}{3}a^3+a^2+2a$

$=-\frac{1}{3}a^3+4a$

2nd $a>0$에서 함수 $g(a)$의 최댓값을 구하자.

$g'(a)=-a^2+4$

$=-(a+2)(a-2)$

$g'(a)=0$에서

$-(a+2)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=2$

a가 양의 실수이므로 $a>0$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		↗	극대	↘

따라서 $g(a)=\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$는 $a=2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

주어진 구간에서 극값이 하나 존재할 때, (극솟값)=(최솟값), (극댓값)=(최댓값)을 이용하면 구간의 양 끝값에서의 함숫값을 구하지 않아도 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있어.

$g(2)=-\frac{8}{3}+8=\frac{16}{3}$

16 답 ③

도함수 $f'(x)$는 이차함수이고, x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1이므로

$f'(x)=a(x+1)(x-1)$

$=ax^2-a\ (a>0)$

로 놓으면

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int (ax^2-a)\,dx$

$=\frac{a}{3}x^3-ax+C$ (단, C는 적분상수) $\cdots$ ㉠

이때, $f'(x)=0$에서 $x=-1$, 1이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합이 6이라 하므로

$f(-1)+f(1)=6$

$-\frac{a}{3}+a+C+\frac{a}{3}-a+C=6$ ($\because$ ㉠)

$2C=6 \qquad \therefore\ C=3$

또, $f(1)=\frac{5}{3}$이므로

$f(1)=\frac{a}{3}-a+3=\frac{5}{3} \qquad \therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x+3$이므로

$f(3)=18-6+3=15$

17 답 14 m

$$v(t)=\begin{cases} t & (0\le t<3) \\ 3 & (3\le t<8) \\ 12-t & (8\le t\le 12)\end{cases}$$

이고 마을버스가 정지할 때 $v=0$이므로

$12-t=0$에서 $t=12$

즉, 6초 후부터 12초까지 마을버스가 움직인 거리는

$\int_6^8 3\,dt+\int_8^{12}(12-t)\,dt$

$=\Big[3t\Big]_6^8+\Big[12t-\frac{1}{2}t^2\Big]_8^{12}$

$=(24-18)+(144-72)-(96-32)=14(\text{m})$

심플 정리

[속도와 움직인 거리]

(1) 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

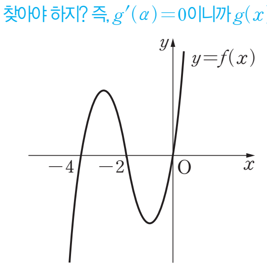
$\Rightarrow s=\int_a^b |v(t)|\,dt$

(2) 움직이는 물체가 정지하거나 운동 방향을 바꿀 때, (속도)$=0$이다.

18 답 ⑤

함수 $f(x)=x(x+2)(x+4)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_2^x f(t)dt$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. $g(a)$의 값은?

극댓값을 구하려면 먼저 어떤 점에서 함수가 극대가 되는지부터 찾아야 하지? 즉, $g'(a)=0$이니까 $g(x)$를 미분해야 해.



① -28　② -29　③ -30　④ -31　⑤ -32

1st $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$를 이용하자.

$g(x)=\int_2^x f(t)dt$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)dt\right\}=f(x)$임을 이용한 거야.

$g'(x)=f(x)=0$을 만족하는 x를 구하면

$x(x+2)(x+4)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=0$

주어진 $f(x)$의 그래프를 이용하여 $g(x)$의 증가, 감소를 파악할 수도 있어.

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $x=-2$에서 함수 $g(x)$는 극댓값을 가지므로

$a=-2$이다.

2nd $\int_{-a}^{a}$(기함수)$\,dx=0$, $\int_{-a}^{a}$(우함수)$\,dx=2\int_0^a$(우함수)$\,dx$임을 적용해.

$\therefore g(-2)=\int_2^{-2}f(t)dt=\int_2^{-2}t(t+2)(t+4)dt$

$=\int_2^{-2}(t^3+6t^2+8t)dt$

$=-\int_{-2}^{2}(t^3+6t^2+8t)dt$

$=-2\int_0^2 6t^2dt$

$=-2\Big[2t^3\Big]_0^2$

$=-2\times16=-32$

t^3, $8t$는 원점에 대하여 대칭이고, $6t^2$은 y축에 대하여 대칭이므로 $\int_{-2}^{2}(t^3+8t)dt=0$, $\int_{-2}^{2}6t^2dt=2\int_0^2 6t^2dt$가 되는 거야.

TIP

정적분의 성질 중 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx$는 피적분함수 $f(x)$가 원점에 대하여 대칭인 함수 (기함수) 또는 y축에 대하여 대칭인 함수 (우함수)인 경우 다음과 같이 계산하면 편리하다.

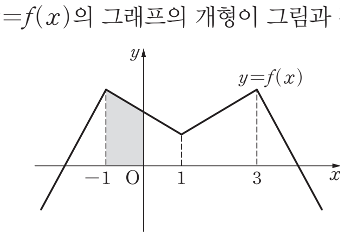
(1) $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$

(2) $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$

19 답 ②

조건 (가)에서 $f(1+x)=f(1-x)$이므로 $y=f(x)$는 $x=1$에 대하여 대칭이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 그림과 같다고 하자.



$\int_0^1 f(x)\,dx=k$라 하면 $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=1$이므로

$\int_1^3 f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx=1+k$

이때, 조건 (나)에서 $\int_0^3 f(x)\,dx=5$이므로

$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx$

$=k+1+k=2k+1$

즉, $2k+1=5$이므로

$2k=4$　$\therefore k=2$

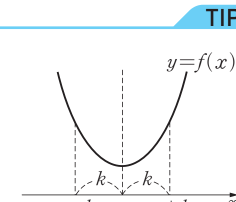
$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx=2$

TIP

함수 $f(x)$가 $x=a$에 대하여 대칭이면 실수 k에 대하여

$\int_{a-k}^{a}f(x)dx=\int_a^{a+k}f(x)dx$

가 성립한다.



Ⅲ 대단원

20 답 ④

$\int_1^x (x-t)f(t)dt=ax^3+6x+b$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=ax^3+6x+b$ ⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3ax+6$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=3ax+6$

위 식에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=3a+6=0 \qquad \therefore a=-2$

또, ㉠에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt-\int_1^1 tf(t)dt=a+6+b$

$-2+6+b=0 \qquad \therefore b=-4$

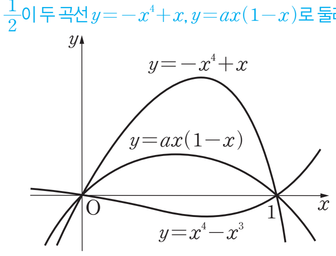
$\therefore ab=(-2)\times(-4)=8$

21 답 ④

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=ax(1-x)$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<1$)

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구해봐.

구한 넓이의 $\frac{1}{2}$이 두 곡선 $y=-x^4+x$, $y=ax(1-x)$로 둘러싸인 부분의 넓이야.



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

1st 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이부터 구해.

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^1 \{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$ ← 곡선 $y=-x^4+x$가 곡선 $y=x^4-x^3$보다 위쪽에 있어.

$=\int_0^1 (-2x^4+x^3+x)dx$

$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{20}$

2nd 두 곡선 $y=-x^4+x$, $y=ax(1-x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하자.

두 곡선 $y=-x^4+x$, $y=ax(1-x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 $\frac{1}{2}$, 즉 $\frac{1}{2}\times\frac{7}{20}=\frac{7}{40}$이다.

$\int_0^1 \{(-x^4+x)-ax(1-x)\}dx$

$=\int_0^1 \{-x^4+ax^2+(1-a)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{a}{3}x^3+\frac{1-a}{2}x^2\right]_0^1$

$=-\frac{1}{5}+\frac{a}{3}+\frac{1-a}{2}$

$=\frac{3}{10}-\frac{a}{6}=\frac{7}{40}$

$\frac{a}{6}=\frac{1}{8} \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$

22 답 $\frac{25}{12}$

그림에서 $f'(x)=2x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int 2x\,dx=x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=2$라 하므로 $C=2$

$\therefore f(x)=x^2+2$

$F(x)=\int_0^1 f(x-t)dt=\int_0^1 \{(x-t)^2+2\}dt$

$=\int_0^1 (x^2-2tx+t^2+2)dt$

$=\left[x^2t-t^2x+\frac{t^3}{3}+2t\right]_0^1$

$=x^2-x+\frac{7}{3}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{12}$

따라서 함수 $F(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 $\frac{25}{12}$를 갖는다.

23 답 ④

곡선 $y=4x-x^2$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$4x-x^2=x$, $x^2-3x=0$

$x(x-3)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=3$

즉, 그림의 A 부분의 넓이 S_1은

$S_1=\int_0^3 \{(4x-x^2)-x\}dx$

$=\int_0^3 (3x-x^2)dx$

$=\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3$

$=\frac{27}{2}-9=\frac{9}{2}$

또, 그림의 B 부분의 넓이 S_2는

$S_2=\int_3^4 \{x-(4x-x^2)\}dx$

$=\int_3^4 (x^2-3x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_3^4$

$=\left(\frac{64}{3}-24\right)-\left(9-\frac{27}{2}\right)=\frac{11}{6}$

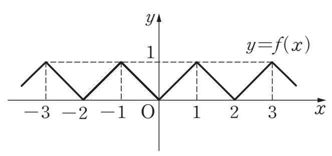
$\therefore S_1-S_2=\frac{9}{2}-\frac{11}{6}=\frac{8}{3}$

24 답 ②

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x+2)=f(x)$ $f(x+p)=f(x)$이면 $f(x)$는 주기가 p인 함수임을 적용해.
(나) $f(x)=|x|$ $(-1\le x<1)$

함수 $g(x)=\int_{-2}^{x} f(t)dt$라 할 때, 실수 a에 대하여 $g(a+4)-g(a)$의 값은? 함수 $g(x)$의 정의대로 x 대신에 $a+1$, a를 대입하여 식을 정리해 보자.



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st $\int_{a}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{b} f(x)\,dx=\int_{a}^{b} f(x)\,dx$를 적절히 이용하자.

$g(a+4)-g(a)$

$=\int_{-2}^{a+4} f(t)dt-\int_{-2}^{a} f(t)dt$

$=\int_{-2}^{a+4} f(t)dt+\int_{a}^{-2} f(t)dt$

$=\int_{a}^{-2} f(t)dt+\int_{-2}^{a+4} f(t)dt$

$=\int_{a}^{a+4} f(t)dt$

2nd 함수 $f(x)$가 주기함수임을 적용해.

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$\int_{a}^{a+4} f(t)dt=\int_{0}^{4} f(t)dt$

$\int_{a}^{a+4} f(t)dt$에서 a는 실수이므로 a 대신 정수가 들어가도 성립해야 해. 즉, $a=0$을 대입하면 $\int_{a}^{a+4} f(t)dt=\int_{0}^{4} f(t)dt$이 성립하게 되는 거지.

$=2\int_{0}^{2} f(t)dt$

주어진 그래프에 의해 $\int_{0}^{2} f(t)dt$는 밑변의 길이가 2이고 높이가 1인 삼각형의 넓이와 같아.

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)=2$

25 답 ②

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P는 점 A(5)를 출발하여 시각 t에서의 속도가 $3t^2-2$이고, 점 Q는 점 B(k)를 출발하여 시각 t에서의 속도가 1이다. 두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 2번 만나도록 하는 정수 k의 값은? (단, $k\ne5$)

두 점이 만날 때 움직인 거리가 같을까? 위치가 같을까? 이것부터 결정한 후 속도를 적분하여 해결해.

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

1st (위치)=(처음 위치)$+\int_{t_0}^{t}$(속도)dt임을 적용하자.

시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_P, x_Q라 하면

$x_P=5+\int_{0}^{t}(3t^2-2)dt=t^3-2t+5$

$x_Q=k+\int_{0}^{t}1dt=t+k$

이때, 두 점 P, Q가 출발한 후 만나려면 $t>0$에서

$x_P=x_Q$이어야 하므로

$t^3-2t+5=t+k$, 즉 $t^3-3t+5=k$이어야 한다.

2nd 두 번 만나려면 곡선 $y=t^3-3t+5$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 함을 이용해.

$f(t)=t^3-3t+5$라 하면

$f'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$이므로 $t>0$에서

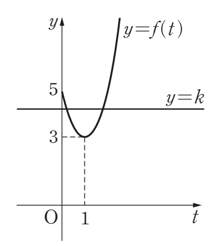
함수 $f(t)$의 그래프는 그림과 같다.

$f'(t)=0$에서 $t=-1, 1$이므로 $t>0$에서 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같아.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	극소	↗

따라서 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=1-3+5=3$을 갖고, 또 $f(0)=5$이므로 그래프를 그리면 그림과 같게 되는 거지.

따라서 직선 $y=k$와 곡선 $y=f(t)$가 $t>0$에서 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는 $3<k<5$이므로 정수 $k=4$이다.



26 답 36

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$ … Ⅰ

한편, $f(x)=\int(x+2)(x^2-x+6)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+2)(x^2-x+6)$ … Ⅱ

$\therefore f'(1)=3\times6=18$

따라서 구하는 값은 $2f'(1)=2\times18=36$이다. … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$를 미분계수에 대한 식으로 정리한다.	50%
Ⅱ	$\int(x+2)(x^2-x+6)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분한다.	30%
Ⅲ	답을 구한다.	20%

Ⅲ 대단원

27 답 3

조건 (나)에서 $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & (x<1) \\ -2 & (x\geq 1) \end{cases}$이므로

$x<1$일 때,

$f(x)=\int 3x^2\,dx=x^3+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$x\geq 1$일 때,

$f(x)=\int (-2)\,dx=-2x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

… Ⅰ

이때, 조건 (가)에서 $f(0)=1$이므로 $C_1=1$

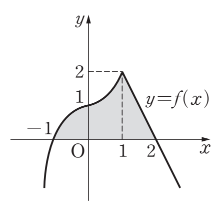
또한, 조건 (다)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to 1-} (x^3+1)=\lim_{x\to 1+} (-2x+C_2)=-2+C_2$

$1+1=-2+C_2 \quad \therefore C_2=4$

즉, $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x\geq 1) \end{cases}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다. … Ⅱ



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-1}^{1}(x^3+1)\,dx+\int_{1}^{2}(-2x+4)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_{-1}^{1}+\left[-x^2+4x\right]_{1}^{2}$

$=\frac{1}{4}+1-\left(\frac{1}{4}-1\right)+(-4+8)-(-1+4)$

$=3$ … Ⅲ

[채점 기준표]

Ⅰ	부정적분을 이용하여 $f(x)$의 식을 구한다.	30%
Ⅱ	주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 식을 완성하고 그래프를 그린다.	40%
Ⅲ	$y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.	30%