심플
자이스토리 고등수학의 기본을 심플하게 완성!

SIMPLE Xi story

확률과 통계

[해설편]

자이스토리 • 수경출판사

SIMPLE Xi story 빠른 정답 찾기

I 경우의 수

A 원순열

01 n, n, $(n-1)!$ 02 원순열의 수, 순열의 수
03 4, 5, 3, 3, 20 04 ○ 05 × 06 × 07 2
08 6 09 24 10 6 11 90 12 12 13 2
14 240 15 6 16 12 17 ② 18 ④ 19 ③
20 ① 21 ③ 22 ④ 23 ④ 24 ② 25 ③
26 ② 27 ④ 28 ③ 29 45 30 13 31 ①
32 ② 33 ③ 34 ③ 35 ② 36 ⑤ 37 ③
38 ① 39 ② 40 ③ 41 ④ 42 ⑤

B 중복순열과 같은 것이 있는 순열

01 중복순열, ${}_{n}\Pi_{r}$ 02 n, r, n^{r}
03 2, 4, 2, 4, 16 04 5, 3, 2, 10
05 × 06 ○ 07 ○ 08 ○ 09 243 10 125
11 1 12 6 13 27 14 18 15 81 16 3
17 4 18 60 19 6 20 10 21 30 22 9
23 ④ 24 ③ 25 ① 26 ② 27 ④ 28 ②
29 ③ 30 ② 31 ③ 32 ③ 33 ③ 34 ①
35 ② 36 ① 37 ③ 38 ③ 39 ③ 40 ①
41 ④ 42 ② 43 ② 44 ① 45 ② 46 ①
47 ① 48 180 49 ③ 50 30 51 ④ 52 ①
53 ④ 54 60

연습 [A–B]

01 ④ 02 ④ 03 ④ 04 12 05 ② 06 ②
07 ⑤ 08 ② 09 ④ 10 ④ 11 340 12 ③
13 ⑤ 14 ① 15 ② 16 630

C 중복조합

01 중복조합, ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$ 02 n, r, $n+r-1$, r
03 3, n, $2+n$, n 04 ${}_{n}\mathrm{H}_{m}$ 05 ○
06 × 07 × 08 ○ 09 4 10 6 11 1
12 35 13 6 14 10 15 15 16 5 17 4
18 15 19 6 20 3 21 6 22 ③ 23 5
24 ② 25 ② 26 ④ 27 ③ 28 ② 29 ④
30 ② 31 ⑤ 32 ④ 33 ⑤ 34 ③ 35 ③
36 210

D 이항정리

01 ${}_{3}\mathrm{C}_{1}$, 2, 3, 3, 3, 2, 3
02 ${}_{3}\mathrm{C}_{1}$, 2, ${}_{3}\mathrm{C}_{3}$, 3, 3, 2, 3, 3
03 2, 3, 1, 4, 6, 4, $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
04 × 05 ○ 06 ○ 07 ○ 08 $a^2+2ab+b^2$
09 $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$
10 $x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$
11 $81x^4-108x^3y+54x^2y^2-12xy^3+y^4$
12 $x^2+2+\frac{1}{x^2}$ 13 $x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$
14 $16x^4+32x^2+24+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^4}$
15 $x^4-\frac{4x^2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{27x^2}+\frac{1}{81x^4}$
16 10 17 135 18 216 19 ${}_{6}\mathrm{C}_{4}$ 20 ${}_{6}\mathrm{C}_{2}$ 21 8
22 15 23 0 24 32 25 ② 26 ⑤ 27 ④
28 ② 29 ③ 30 ② 31 ② 32 ④ 33 ③
34 ② 35 ④ 36 ⑤ 37 ④ 38 ④

연습 [C–D]

01 126 02 ③ 03 ③ 04 ② 05 ④ 06 12
07 ② 08 ② 09 ② 10 ③ 11 ③ 12 ②
13 ① 14 ⑤ 15 ③ 16 9

I 대단원 TEST [A–D]

01 ② 02 ④ 03 ② 04 ② 05 ⑤ 06 ③
07 ③ 08 ③ 09 ③ 10 ③ 11 ④ 12 136
13 ② 14 ② 15 6 16 ③ 17 ⑤ 18 ②
19 ② 20 ④ 21 ② 22 ③ 23 36 24 ②
25 ④ 26 ⑤ 27 ② 28 102 29 ⑤ 30 ④
31 30 32 84

Ⅱ 확률

E 확률의 뜻과 활용

01 시행　02 합사건, $A\cup B$

03 곱사건, $A\cap B$　04 여사건, A^C

05 ×　06 ○　07 ×　08 ○

09 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

10 $\{1, 3, 5\}$　11 $\{2, 4, 6\}$

12 $\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$　13 $\{2, 10\}$

14 $A\cap B=\{2, 3\}$, 배반사건이 아니다.

15 $\{4, 5\}$　16 $\{1, 4, 6\}$　17 $\frac{2}{3}$　18 $\frac{2}{3}$

19 $\frac{1}{3}$　20 $\frac{1}{4}$　21 $\frac{1}{2}$　22 $\frac{7}{15}$　23 $\frac{23}{30}$　24 ④

25 ②　26 ⑤　27 ③　28 ②　29 ④　30 ④

31 ①　32 ②　33 ⑤　34 ②　35 $\frac{3}{10}$　36 ①

37 ④　38 ①　39 $\frac{1}{4}$　40 ④　41 ②　42 ③

43 ④　44 ②　45 ④　46 ①　47 ⑤　48 ⑤

49 4　50 ②　51 ⑤　52 ②　53 ③　54 ②

55 ②　56 ③　57 ④　58 ⑤　59 ④　60 ②

61 ③　62 $\frac{1}{8}$

F 확률의 덧셈정리

01 0, 1　02 1, 0　03 $\mathrm{P}(A\cap B)$　04 여사건

05 ○　06 ×　07 ○　08 ○　09 $\frac{1}{6}$　10 1

11 $\frac{1}{2}$　12 0　13 $\frac{7}{10}$　14 $\frac{3}{5}$　15 $\frac{3}{5}$　16 $\frac{7}{12}$

17 $\frac{5}{6}$　18 $\frac{15}{16}$　19 $\frac{11}{16}$　20 0.7　21 0.4　22 0.8

23 ⑤　24 ⑤　25 ④　26 ①　27 ②　28 ③

29 ③　30 ④　31 ①　32 ④　33 ⑤　34 ⑤

35 ③　36 ⑤　37 ⑤　38 ③　39 ⑤　40 ①

41 ④　42 ④　43 ①　44 ④　45 ③　46 ①

47 ②　48 ⑤　49 ③　50 ③　51 ④　52 ⑤

53 ②　54 ③　55 ⑤　56 ④　57 ④　58 ①

59 ③　60 ①　61 ⑤　62 ④　63 ④

연습 [E–F]

01 ④　02 ②　03 ③　04 ②　05 ①　06 ④

07 ①　08 ⑤　09 ②　10 ①　11 ①　12 ③

13 ⑤　14 ⑤　15 ④　16 14

G 조건부확률

01 조건부확률, $\mathrm{P}(B|A)$　02 $\mathrm{P}(A\cap B)$

03 곱셈정리　04 $\mathrm{P}(B|A)$, $\mathrm{P}(A|B)$

05 ○　06 ○　07 ×　08 ×　09 $\frac{1}{2}$　10 $\frac{2}{3}$

11 $\frac{3}{4}$　12 $\frac{5}{8}$　13 (가) : $\frac{1}{2}$, (나) : $\frac{1}{6}$, (다) : $\frac{1}{3}$

14 $\frac{1}{9}$　15 $\frac{4}{9}$　16 $\frac{3}{8}$

17 (가) : $\frac{3}{7}$, (나) : $\frac{1}{3}$, (다) : $\frac{1}{7}$

18 ⑤　19 ②　20 ③　21 ②　22 ⑤　23 ①

24 ③　25 ④　26 ③　27 ②　28 ③

29 ②　30 ④　31 ③　32 ③　33 ③

34 ②　35 ④　36 ②　37 ②　38 ④　39 ④

40 ③　41 ⑤　42 ④

H 독립시행의 확률

01 독립, $\mathrm{P}(B)$　02 독립사건　03 종속, 종속사건

04 독립시행　05 ○　06 ○　07 ×　08 ×

09 $\frac{1}{2}$　10 $\frac{1}{3}$　11 $\frac{1}{6}$　12 독립　13 독립　14 독립

15 독립　16 독립　17 $\frac{1}{3}$　18 $\frac{5}{6}$　19 $\frac{1}{2}$　20 $\frac{1}{3}$

21 $\frac{2}{9}$　22 $\frac{27}{4}$　23 ⑤　24 ③　25 ①　26 ②

27 ③　28 ⑤　29 ④　30 ⑤　31 ⑤　32 ①

33 ④　34 ②　35 ④　36 ④　37 ③　38 ①

39 ⑤　40 ⑤　41 ②　42 ①　43 ②　44 ③

45 ①　46 ④　47 ②　48 ⑤　49 ⑤　50 ④

51 ③　52 ②　53 ③　54 ④　55 ⑤　56 ②

57 ①

연습 [G–H]

01 ③　02 ⑤　03 ④　04 ⑤　05 ⑤　06 ②

07 ③　08 ③　09 ④　10 ⑤　11 ②　12 ①

13 ②　14 2

Ⅱ 대단원 TEST [E–H]

01 ④　02 ③　03 ④　04 ②　05 ③　06 ③

07 16　08 ④　09 ⑤　10 ②　11 ②　12 ①

13 ③　14 ④　15 ④　16 ⑤　17 80　18 ②

19 ③　20 ②　21 ①　22 ④　23 ③　24 ④

25 ④　26 ⑤　27 ③　28 ⑤　29 23　30 60

Ⅲ 확률

I 확률변수와 확률분포

01 확률변수, $P(X=x)$ 02 이산확률변수
03 확률분포 04 0, 1, 1
05 × 06 × 07 ○ 08 ㄱ, ㄴ, ㄹ
09 $X=0, 1, 2, 3, 4$ 10 $X=0, 1, 2$
11 $X=0, 1, 2, 3, 4, 5$ 12 $X=1, 2, 3, 4, 5, 6$
13 $X=0, 1, 2$ 14 x, 4, 6
15 해설 참조 16 $\frac{14}{15}$ 17 $\frac{3}{8}$
18 $\frac{3}{4}$ 19 $\frac{5}{8}$ 20 ④ 21 ⑤ 22 $X=0, 1, 2$
23 11 24 ① 25 ② 26 해설 참조
27 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$
28 $P(X=x)=\frac{{}_3C_x \cdot {}_7C_{3-x}}{{}_{10}C_3}$ $(x=0, 1, 2, 3)$
29 ④ 30 ③ 31 ⑤ 32 ② 33 ⑤ 34 ①
35 ① 36 ② 37 ④ 38 ③ 39 ③ 40 ⑤
41 ⑤ 42 ③ 43 ④ 44 ③ 45 1 46 ②

J 이산확률변수의 기댓값, 분산, 표준편차

01 $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n$
02 $X-m$, $E(X^2)$ 03 $V(X)$
04 a, b 05 $|a|$ 06 ○ 07 × 08 × 09 ○
10 5 11 6 12 $\sqrt{6}$ 13 해설 참조 14 $\frac{2}{3}$
15 $\frac{16}{45}$ 16 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$ 17 7 18 16 19 6
20 $E(X)=1$, $V(X)=\frac{1}{2}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
21 1 22 2 23 $\sqrt{2}$ 24 ① 25 ① 26 ④
27 ① 28 ③ 29 ④ 30 ③ 31 ⑤ 32 ①
33 ① 34 ④ 35 ② 36 ④ 37 ④ 38 ⑤

K 이항분포

01 ${}_nC_xp^xq^{n-x}$ 02 np, npq, $\sqrt{npq}$
03 $\frac{X}{n}$, p 04 ○ 05 × 06 ○
07 $B(4, 0.2)$ 08 $B(100, 0.2)$ 09 $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$
10 $B\left(600, \frac{1}{6}\right)$ 11 $n=5$, $p=\frac{3}{4}$
12 $P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}$ $(x=0, 1, \cdots, 5)$
13 $\frac{135}{512}$ 14 60 15 40 16 $2\sqrt{10}$ 17 50 18 25

19 5 20 $\frac{1}{3}$ 21 $\frac{1}{2}$ 22 ④ 23 ① 24 ②
25 ④ 26 ④ 27 ② 28 ③ 29 ⑤ 30 ④
31 ③ 32 ② 33 ② 34 ④ 35 ③ 36 ②
37 ③ 38 ⑤ 39 ⑤ 40 ③ 41 ④ 42 ②
43 ⑤ 44 ③ 45 ② 46 ③ 47 ④
48 ㄱ, ㄷ, ㄴ, ㄹ

연습 [I-K]

01 ⑤ 02 ④ 03 ⑤ 04 ⑤ 05 ③ 06 ③
07 ② 08 ③ 09 ③ 10 ② 11 ⑤ 12 ⑤
13 ⑤ 14 7 15 300 16 4

L 연속확률변수와 정규분포

01 연속확률변수 02 1 03 $N(m, \sigma^2)$ 04 ○
05 ○ 06 × 07 $\frac{1}{10}$ 08 $\frac{1}{5}$ 09 1 10 $\frac{1}{2}$
11 $\frac{1}{8}$ 12 1 13 $\frac{1}{4}$ 14 $\frac{3}{4}$
15 $N(5, 4)$ 또는 $N(5, 2^2)$
16 $N(3, 2)$ 또는 $N(3, (\sqrt{2})^2)$ 17 $N(0, 1)$
18 $E(X_1)<E(X_2)<E(X_3)$
19 $V(X_1)=V(X_2)=V(X_3)$
20 $E(X_4)=E(X_5)<E(X_6)$
21 $\sigma(X_5)=\sigma(X_6)<\sigma(X_4)$ 22 ⑤
23 ㄴ, ㄷ 24 ① 25 ② 26 ⑤ 27 ④
28 ④ 29 ④ 30 ④ 31 ① 32 ④ 33 ①
34 ③

M 표준정규분포

01 표준정규분포 02 $z=0$ 03 $\frac{X-m}{\sigma}$
04 $N(np, npq)$ 05 × 06 ○ 07 × 08 1.23
09 0.4099 10 $P(-1\le Z\le 0)$
11 $P(-2\le Z\le 2)$ 12 $P(1\le Z\le 2)$
13 0.6826 14 0.1359 15 0.8413
16 0.0228 17 $E(X)=5$, $\sigma(X)=2$
18 $N(5, 2^2)$ 19 ① 20 ④ 21 ④ 22 ④
23 ④ 24 ③ 25 ④ 26 ③ 27 ③ 28 ①
29 ① 30 ⑤ 31 ③ 32 ② 33 ② 34 ③
35 ③ 36 ⑤ 37 ① 38 ② 39 ② 40 ①
41 ① 42 ③ 43 ① 44 ④ 45 ④

연습 [L-M]

01 ④ 02 ① 03 ③ 04 ③ 05 ① 06 ①
07 ④ 08 ④ 09 ② 10 ④ 11 155 12 ③
13 55

연습 [N]

01 ① 02 ① 03 ④ 04 ⑤ 05 ② 06 ③
07 ③ 08 ② 09 ① 10 25 11 25 12 2

N 통계적 추정

01 표본조사 02 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 03 $2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

04 ○ 05 × 06 ○

07 전수조사 08 표본조사

09 모집단 : 유권자 전체, 표본: 성인남녀 2000명

10 모집단 : 어느 공장에서 생산하는 전구 전체,
표본 : 전구 200개

11 $\mathrm{E}(\overline{X})=30$, $\sigma(\overline{X})=2$

12 $\mathrm{E}(\overline{X})=10$, $\sigma(\overline{X})=\frac{1}{2}$

13 $\mathrm{E}(\overline{X})=20$, $\sigma(\overline{X})=1$

14 $\mathrm{E}(\overline{X})=40$, $\sigma(\overline{X})=\frac{3}{5}$

15 거짓 16 참

17 $19.608\le m\le 20.392$

18 $49.484\le m\le 50.516$ 19 $49.02\le m\le 50.98$

20 $48.71\le m\le 51.29$ 21 0.196

22 0.258 23 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ 24 ⑤ 25 ⑤
26 ③ 27 ③ 28 ② 29 ① 30 ④ 31 ②
32 ② 33 ④ 34 ② 35 ⑤ 36 ③ 37 ③
38 ③ 39 ② 40 ④ 41 ③ 42 ⑤ 43 ④
44 ② 45 ①

Ⅲ 대단원 TEST [Ⅰ-N]

01 ② 02 ③ 03 ① 04 ④ 05 ④ 06 ④
07 ① 08 ② 09 ③ 10 ④ 11 ② 12 ③
13 ② 14 8 15 ⑤ 16 ⑤ 17 ③ 18 ④
19 ⑤ 20 ③ 21 ② 22 ② 23 ③ 24 ③
25 ② 26 ⑤ 27 2 28 0.84

I 경우의 수

Simple A 원순열

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 08~09

01 답 n, n, $(n-1)!$

02 답 원순열의 수, 순열의 수

03 답 4, 5, 3, 3, 20

04 답 ○

05 답 ×

06 답 ×

07 답 2

$(3-1)!=2!=2$(가지)

08 답 6

$(4-1)!=3!=6$(가지)

09 답 24

모두 5명의 학생이 원탁에 둘러앉는 방법의 수이므로

$(5-1)!=4!=24$(가지)

10 답 6

2쌍의 커플 수는 4이므로 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$(가지)

11 답 90

$\dfrac{{}_6\mathrm{P}_4}{4}=\dfrac{6\times5\times4\times3}{4}=90$(가지)

12 답 12

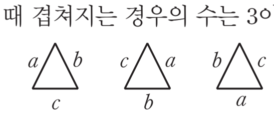
여학생 2명을 하나로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 것과 같으므로 방법의 수는 $3!$가지

이때 여학생 2명은 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 구하는 경우의 수는 $3!\times2=12$(가지)이다.

13 답 2

3명을 일렬로 배열하는 방법의 수는 $3!$이다.

이때 회전시켰을 때 겹쳐지는 경우의 수는 3이다.



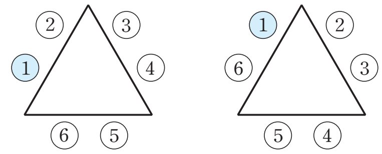
따라서 구하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{3}=2$(가지)

14 답 240

6명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$(가지)

이때, 정삼각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 그림과 같이 서로 다른 경우는 2가지가 존재한다.

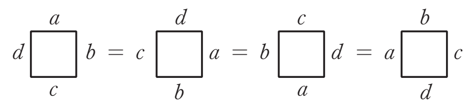


따라서 구하는 방법의 수는

$120\times2=240$(가지)이다.

15 답 6

4명을 일렬로 줄세우는 방법의 수는 $4!$이다. 이때 회전시켰을 때 겹쳐지는 경우의 수는 4이다.



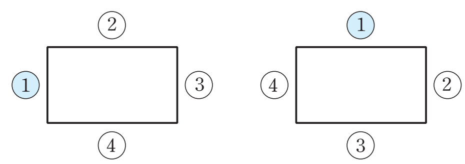
따라서 구하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{4}=3!=6$(가지)

16 답 12

4명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$(가지)

이때 직사각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 그림과 같이 서로 다른 경우는 2가지가 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는

$6\times2=12$(가지)

심플 정리

[원순열의 풀이 방법]

(1) 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 방법
순열의 개수에서 원형으로 배열되는 수 n만큼 나눈다.
$\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$

(2) 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 원형으로 배열하는 방법
순열의 개수에서 원형으로 배열되는 수 r만큼 나눈다.
$\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 10～13

17 답 ②

6명의 회원이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$(가지)

18 답 ④

부모와 자녀 3명 총 5명이 원형의 식탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$(가지)

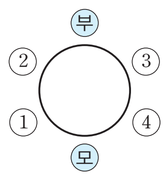
19 답 ③

6명의 가족이 원형의 식탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$(가지)

$\therefore a=120$

부모가 원형의 식탁에 마주 보고 앉으면 나머지 4명은 부모를 기준으로 한 줄로 배열하면 된다. 즉, 아버지 (또는 어머니) 자리가 고정되면 어머니 (또는 아버지) 자리가 고정된다.



따라서 부모가 먼저 원형의 식탁에 마주 보고 앉고 4명의 자녀가 앉으면 되므로 구하는 방법의 수는 $4!=24$(가지)

$\therefore b=24$

$\therefore a+b=120+24=144$

TIP

원형으로 둘러앉을 때, 특별한 조건이 있는 경우는 먼저 특별한 조건을 만족하도록 할 때의 경우의 수를 구한 후 나머지 경우의 수를 구하도록 하자.
이 문제에서 부모가 마주 보는 조건이 있으므로 부모를 마주 보고 앉는 경우를 먼저 생각하고, 나머지 4명의 가족이 앉는 경우를 따져 준다.

20 답 ①

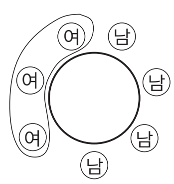
이웃하는 여학생 3명을 묶어서 한 사람으로 생각하면 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수이므로

$(5-1)!=4!$(가지)

이때 묶음 속의 여학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$3!\times4!$(가지)



21 답 ③

부부 2명을 한 사람으로 생각하면 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$(가지)

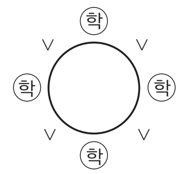
이때 부부끼리 자리를 바꾸는 방법의 수가 각각 $2!$이므로 구하는 방법의 수는

$2\times2!\times2!\times2!=16$(가지)

22 답 ④

먼저 학생 4명이 원 모양으로 둘러앉는 방법의 수는 $(4-1)!=3!=6$(가지)

학생들 사이의 네 곳 중 교사가 앉는 방법의 수는 $4!=24$(가지)



따라서 학생과 교사가 교대로 앉는 방법의 수는

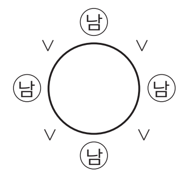
$6\times24=144$(가지)

23 답 ④

남학생 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$(가지)

남학생들 사이의 네 곳 중 두 곳에 여학생이 앉는 방법의 수는



${}_4P_2=4\times3=12$(가지)

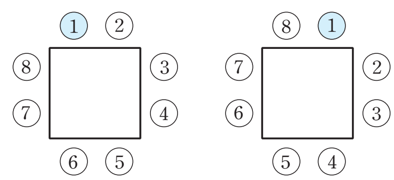
따라서 구하는 방법의 수는

$6\times12=72$(가지)

24 답 ②

8명이 원형 탁자에 둘러앉는 방법의 수는

$(8-1)!=7!$(가지)이고, 그림과 같이 그 각각의 경우에 대하여 회전해도 겹쳐지지 않는 경우가 2가지 있다.



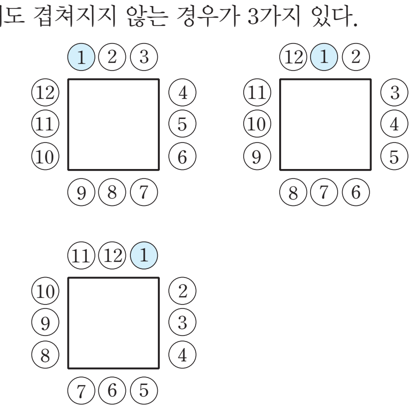
따라서 구하는 경우의 수는

$7!\times2$(가지)

25 답 ③

12명이 원형으로 둘러앉는 방법의 수는

$(12-1)!=11!$(가지)이고, 그림과 같이 그 각각의 경우에 대하여 회전해도 겹쳐지지 않는 경우가 3가지 있다.



따라서 구하는 방법의 수는 $11!\times3$

26 답 ②

3쌍을 3묶음으로 생각하면 이 3묶음을 원형으로 배열하는 방법의 수는 $(3-1)!=2!$(가지)이고, 각 묶음마다 부부가 서로 바꾸는 방법의 수는 $2!$가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

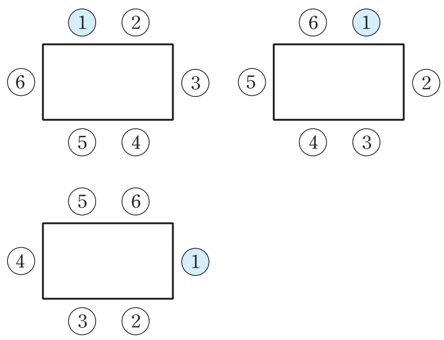
$2!\times2!\times2!\times2!=16$(가지)

27 답 ④

6명이 원형 탁자에 둘러앉는 방법의 수는

$(6-1)!=5!$(가지)이다.

이때, 직사각형 모양의 식탁에서는 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 다음 그림과 같이 회전해도 겹쳐지지 않는 경우가 3가지 있다.



따라서 구하는 방법의 수는

$5!\times3=120\times3=360$(가지)

TIP

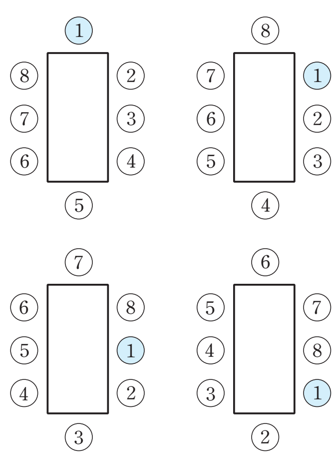
둘러앉는 방법의 수를 구하는 경우 원순열을 이용하게 된다.
원순열은 회전하여 일치하는 배열을 같은 것으로 보기 때문에 일렬로 배열하는 순열의 수에서 겹쳐지는 수만큼 나누어 주어야 한다.
다각형의 경우는 다각형의 모양에 따라 회전해도 겹쳐지지 않을 수 있음을 기억하자.

28 답 ③

8명이 원형 탁자에 둘러앉는 방법의 수는

$(8-1)!=7!$(가지)

이때, 직사각형 모양의 식탁에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 회전해도 겹쳐지지 않는 경우가 4가지 있다.



따라서 구하는 방법의 수는 $7!\times4$이므로

$a=7$, $b=4$

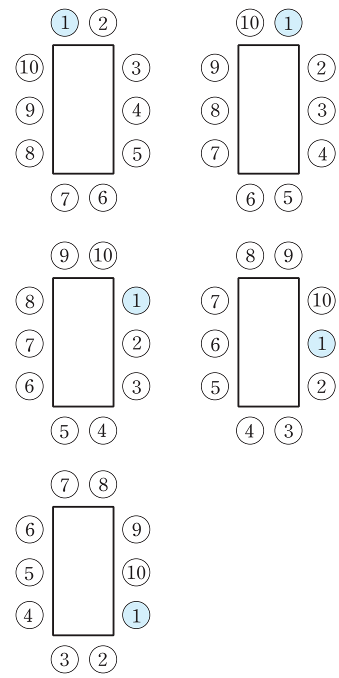
$\therefore a+b=7+4=11$

29 답 45

10명이 원형 탁자에 둘러앉는 방법의 수는

$(10-1)!=9!$(가지)

이때, 직사각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 회전해도 겹쳐지지 않는 경우가 5가지 있다.



따라서 구하는 방법의 수는 $9!\times5$(가지)이므로

$m=9$, $n=5$

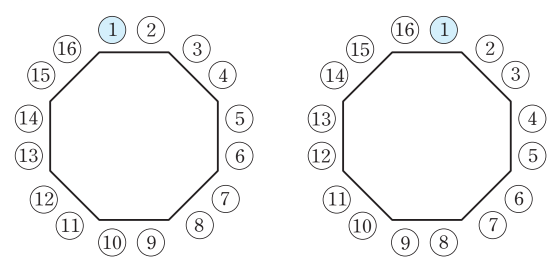
$\therefore mn=45$

30 답 13

16명이 원형 탁자에 둘러앉는 방법의 수는

$(16-1)!=15!$(가지)

이때, 정팔각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 다음 그림과 같이 회전해도 겹쳐지지 않는 경우가 2가지 있다.



따라서 구하는 방법의 수는 $15!\times2$(가지)이므로

$x=15$, $y=2$

$\therefore x-y=15-2=13$

31 답 ①

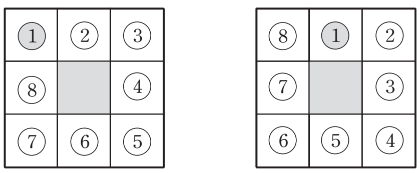
4개의 영역에 색을 칠하는 방법의 수는 서로 다른 4개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(4-1)!=3!=6$(가지)이다.

32 답 ②

가운데 정육각형에 색을 칠하는 방법은 7가지이고, 나머지 6가지의 색을 6등분한 칸에 칠하는 방법의 수는 6개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$7\times(6-1)!=7\times5!=7\times120=840$ (가지)

33 답 ③

한 가운데 정사각형에 칠하는 방법의 수는 9가지이고, 나머지 8가지의 색을 칠하는 방법의 수는 8개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로 $(8-1)!$가지이다.
또, 그림과 같이 회전하여 겹치지 않는 경우는 2가지이다.



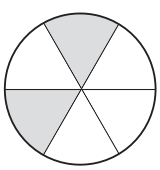
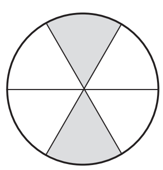
따라서 구하는 방법의 수는
$9\times7!\times2=\dfrac{9\times8\times7!}{4}=\dfrac{9!}{4}$(가지)

34 답 ③

가운데에 놓을 타일을 정하는 경우는 5가지이고, 나머지 4가지 색의 타일을 이어 붙이는 방법은 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로 $(4-1)!=3!=6$(가지)
따라서 구하는 방법의 수는 $5\times6=30$(가지)

35 답 ②

6영역에 5가지 색을 칠하려면 어느 두 군데는 같은 색을 칠해야 하므로 칠하는 방법은 다음과 같이 2가지가 있다.

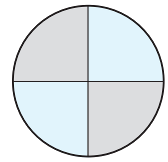
(i)

(ii)


5가지 색 중 두 군데에 칠할 색을 선택하는 방법의 수는
${}_5C_1=5$(가지)
(i) 나머지 4개의 영역에 4가지 색을 칠하는 방법의 수는
$4!=24$(가지)
(ii) 나머지 4개의 영역에 4가지 색을 칠하는 방법의 수는
$4!=24$(가지)이고, 회전하면 겹쳐지는 경우는 2가지가 생기므로 $\dfrac{4!}{2}=12$(가지)
따라서 구하는 방법의 수는 $5\times(24+12)=180$(가지)

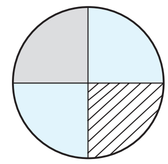
TIP
같은 색을 칠하는 위치에 따라 칠하는 방법이 달라지고 있다.
서로 마주 보는 위치에 같은 색을 칠하는 경우에는 회전하면 겹치는 경우가 생기니까 주의하면서 경우의 수를 구해야 한다.

36 답 ⑤

(i) 2가지 색을 사용하는 경우
4가지 색에서 2가지 색을 선택하면 다음과 같이 한 가지 방법으로 칠할 수 있다.



$\therefore {}_4C_2=6$(가지)
(ii) 3가지 색을 사용하는 경우
4가지 색에서 3가지 색을 선택하는 방법의 수는 ${}_4C_3$, 선택한 3가지 색 중에서 다음과 같이 두 군데에 칠할 색을 한 개 선택하는 방법의 수는 ${}_3C_1$, 남은 색으로 나머지 영역을 칠하면 된다.



$\therefore {}_4C_3\times{}_3C_1=4\times3=12$(가지)
(iii) 4가지 색을 사용하는 경우
4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(4-1)!=3!=6$(가지)
(i)~(iii)에 의해 구하는 방법의 수는 $6+12+6=24$(가지)

37 답 ③

정사각뿔의 밑면을 칠하는 방법의 수는 5가지이고, 나머지 4가지 색을 옆면에 칠하는 방법의 수는 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로 $(4-1)!=3!=6$(가지)
따라서 구하는 방법의 수는
$5\times6=30$(가지)

38 답 ①

정사면체의 밑면을 빨간 색으로 칠하면 나머지 3가지 색을 옆면에 칠하는 방법의 수는 3개를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로 $(3-1)!=2!=2$(가지)
이때, 정사면체는 모든 면이 합동이므로 이렇게 색칠한 정사면체를 굴리면 밑면이 다른 색인 경우도 포함된다.
따라서 구하는 방법의 수는 2이다.

39 답 ②

정육면체의 밑면에 $\boxed{\cdot}$을 붙이면, 마주 보는 면에 붙일 수 있는 스티커의 종류는 5가지이고, 나머지 네 종류의 스티커를 옆면에 붙이는 방법의 수는 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로 $(4-1)!=3!=6$(가지)
이때, 정육면체는 모든 면이 합동이므로 이렇게 스티커를 붙인 정육면체를 굴리면 밑면에 다른 스티커가 붙여진 경우도 포함된다.
따라서 구하는 방법의 수는 $5\times6=30$(가지)

40 답 ③

정삼각뿔대의 밑면을 칠하는 방법의 수는 5가지, 마주 보는 면을 칠하는 방법의 수는 4가지, 나머지 3가지 색을 옆면에 칠하는 방법의 수는 3개를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$(3-1)!=2!=2$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$5\times4\times2=40$(가지)

> **TIP**
>
> 38번의 정사면체와 정삼각뿔대를 칠하는 경우를 비교해보자.
> 정사면체의 면에 색을 칠하는 경우 모든 면이 합동이기 때문에 밑면을 고정시킬 수 없지만 정삼각뿔대는 면이 다르기 때문에 면을 고정시켜서 경우의 수를 구하는 것이 다르다.

41 답 ④

정사각뿔대의 밑면을 칠하는 방법의 수는 6가지, 마주 보는 면을 칠하는 방법의 수는 5가지, 나머지 4가지 색을 옆면에 칠하는 방법의 수는 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$(가지)

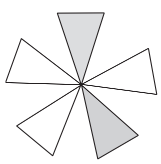
따라서 구하는 방법의 수는

$6\times5\times6=180$(가지)

42 답 ⑤

정오각뿔의 밑면을 칠하는 방법의 수는 5가지이다.

옆면 5개를 칠할 수 있는 색은 밑면의 색을 제외한 4가지이므로 다음과 같이 옆면의 전개도를 펼쳤을 때 어느 두 면에는 같은 색을 칠해야 한다.



4가지 색 중 두 면에 칠할 색을 선택하는 방법의 수는 ${}_4C_1=4$(가지), 나머지 세 면에 3가지 색을 칠하는 방법의 수는 $3!=6$(가지)

따라서 칠하는 방법의 수는 $5\times4\times6=120$(가지)

Simple B 중복순열과 같은 것이 있는 순열

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 14~15

01 답 중복순열, ${}_n\Pi_r$

02 답 n, r, n^r

03 답 2, 4, 2, 4, 16

04 답 5, 3, 2, 10

05 답 ×

중복순열의 수 ${}_n\Pi_r$에서는 중복하여 택할 수 있기 때문에 $n<r$일 수도 있다.

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ○

09 답 243

${}_3\Pi_5=3^5=243$

10 답 125

${}_5\Pi_3=5^3=125$

11 답 1

${}_4\Pi_0=4^0=1$

12 답 6

${}_6\Pi_1=6^1=6$

13 답 27

서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 뽑아 나열하는 중복순열의 수이므로 ${}_3\Pi_3=3^3=27$(가지)이다.

14 답 18

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 2가지,

십의 자리와 일의 자리에는 0, 1, 2 중 어느 하나가 올 수 있으므로 ${}_3\Pi_2=3^2=9$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times9=18$(가지)이다.

15 답 81

네 명의 학생은 각각 3개의 악기 중에 선택할 수 있으므로 서로 다른 3개를 중복을 허락하여 4개를 뽑아 나열하는 경우의 수와 같다.

${}_3\Pi_4=3^4=81$(가지)

심플(고등확통)해006-031_ok.indd 10 18. 9. 4. 오후 1:53

16 답 3
3개의 문자 a, a, b 중 a가 2개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$(가지)

17 답 4
4개의 문자 1, 2, 2, 2 중 2가 3개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$(가지)

18 답 60
5개의 문자 a, b, b, c, d 중 b가 2개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$(가지)

19 답 6
4개의 숫자 1, 1, 2, 2 중 1이 2개, 2가 2개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$(가지)

20 답 10
5개의 문자 a, a, b, b, b 중 a가 2개, b가 3개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!3!}=10$(가지)

21 답 30
5개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3 중 2가 2개, 3이 2개 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$(개)

22 답 9
첫째 자리에 0이 올 수 없으므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.

(i) 첫째 자리에 1이 오는 경우
　나머지 자리에 0, 2, 2를 나열하는 방법의 수는, 3개의 숫자 중 같은 숫자가 2개 있으므로
　$\frac{3!}{2!}=3$(개)

(ii) 첫째 자리에 2가 오는 경우
　나머지 자리에 0, 1, 2를 나열하는 방법의 수는
　$3!=6$(개)

따라서 구하는 자연수의 개수는 $3+6=9$(개)이다.

다른 풀이

0, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 방법의 수에서 맨 앞 자리의 수가 0이고 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 방법의 수를 빼면 되므로

$\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=12-3=9$(개)

유형 연습 [+ 내신 유형]
문제편 pp. 16~19

23 답 ④
${}_2\Pi_5=2^5=32$

24 답 ③
${}_n\Pi_3=n^3=125=5^3$　　$\therefore n=5$

25 답 ①
${}_4\Pi_r=4^r=64=4^3$

$\therefore r=3$

26 답 ②
${}_1\Pi_2+{}_2\Pi_2+{}_3\Pi_2+{}_4\Pi_2+{}_5\Pi_2$

$=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=1+4+9+16+25=55$

27 답 ④
한 명이 낼 수 있는 방법의 수는 3이므로 세 명이 낼 수 있는 방법의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$(가지)

28 답 ②
구하는 방법의 수는 서로 다른 3개의 우체통에서 중복을 허락하여 2개를 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$(가지)

TIP

무엇을 중복해서 나열하는지 생각해보자.
그냥 생각해보면 우체통은 움직이지 않기 때문에 편지를 중복해서 뽑는 것이라 착각할 수 있다. 하지만 편지를 고정시키고 A, B, C 세 우체통을 중복해서 뽑아서 나열하면 편지가 들어갈 우체통이 구해지는 것이다.

29 답 ③
5명의 유권자 각각은 3명의 입후보자 중 1명을 택할 수 있으므로, 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore {}_3\Pi_5=3^5=243$(가지)

30 답 ②
깃발을 한 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_1=2$(가지)

깃발을 두 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$(가지)

깃발을 세 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$(가지)

깃발을 네 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$(가지)

따라서 구하는 신호의 개수는 $2+4+8+16=30$(가지)이다.

31 답 ③

세 개의 숫자 1, 2, 3을 중복을 허락하여 4개를 나열하는 방법의 수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$(개)

32 답 ③

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 2, 4, 6의 3가지이고, 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 순열이므로 그 경우는 ${}_4\Pi_2=4^2=16$(개)이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\times16=48$(개)

> **TIP**
> r자리의 자연수를 만드는 문제에서는 최고 자리의 숫자가 0이 되는 경우가 생기지 않도록 주의한다.

33 답 ③

2200보다 큰 수는

$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{\ }\boxed{\ }$ 꼴 : ${}_4\Pi_2=4^2=16$(개)

$\boxed{2}\boxed{3}\boxed{\ }\boxed{\ }$ 꼴 : ${}_4\Pi_2=4^2=16$(개)

$\boxed{2}\boxed{4}\boxed{\ }\boxed{\ }$ 꼴 : ${}_4\Pi_2=4^2=16$(개)

$\boxed{3}\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$ 꼴 : ${}_4\Pi_3=4^3=64$(개)

$\boxed{4}\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$ 꼴 : ${}_4\Pi_3=4^3=64$(개)

따라서 2200보다 큰 수의 개수는

$16+16+16+64+64=176$(개)

다른 풀이

네 개의 자연수로 중복을 허락하여 만들 수 있는 2200보다 작은 네 자리의 자연수의 개수는

$\boxed{1}\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$ 꼴 : ${}_4\Pi_3=4^3=64$(개)

$\boxed{2}\boxed{1}\boxed{\ }\boxed{\ }$ 꼴 : ${}_4\Pi_2=4^2=16$(개)

따라서 구하는 자연수의 개수는

$256-64-16=176$(개)

> **TIP**
> 구해야 하는 경우의 수보다 아닌 경우의 수를 세는 게 편할 때에는
> (전체의 경우의 수) $-$ (아닌 경우의 수)
> 로 계산하자.

34 답 ①

세 개의 숫자 1, 3, 5를 중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$(개)

(i) 1이 포함되지 않은 네 자리 자연수의 개수는 3과 5를 중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수이므로
${}_2\Pi_4=2^4=16$(개)

(ii) 3이 포함되지 않은 네 자리 자연수의 개수는 1과 5를 중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수이므로
${}_2\Pi_4=2^4=16$(개)

(iii) 1과 3이 모두 포함되지 않은 자연수의 개수는 5555로 1개뿐이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$81-(16+16-1)=50$(개)

다른 풀이

1, 3, 5를 중복을 허락하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 1과 3을 모두 포함하는 경우는

(i) 1, 1, 1, 3으로 만드는 네 자리의 자연수
4개의 숫자 중 같은 숫자가 3개 있으므로
$\dfrac{4!}{3!}=4$(개)

(ii) 1, 1, 3, 3으로 만드는 네 자리의 자연수
4개의 숫자 중 같은 숫자가 2개씩 2개 있으므로
$\dfrac{4!}{2!2!}=6$(개)

(iii) 1, 1, 3, 5로 만드는 네 자리의 자연수
4개의 숫자 중 같은 숫자가 2개 있으므로
$\dfrac{4!}{2!}=12$(개)

(iv) 1, 3, 3, 3으로 만드는 네 자리의 자연수
$\dfrac{4!}{3!}=4$(개)

(v) 1, 3, 3, 5로 만드는 네 자리의 자연수
$\dfrac{4!}{2!}=12$(개)

(vi) 1, 3, 5, 5로 만드는 네 자리의 자연수
$\dfrac{4!}{2!}=12$(개)

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4+6+12+4+12+12=50$(개)

35 답 ②

집합 Y의 3개의 원소들을 집합 X의 원소의 개수만큼 나열하여 순서대로 집합 X의 원소들과 대응하는 것으로 생각할 수 있다.

따라서 구하는 함수의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$(개)

> **TIP**
> 집합 X의 각각의 원소에 대응하는 집합 Y의 원소를 순서대로 배열하는 경우의 수는 Y의 원소들을 중복을 허락하여 X의 원소의 개수만큼 배열하는 경우의 수와 같다.

36 답 ①

$f(3)=5$인 경우, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$의 함숫값으로 집합 Y의 원소 3개를 중복을 허락하여 3개를 나열하는 경우의 수이므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$(개)

$f(3)=7$인 경우도 $f(3)=5$인 경우와 마찬가지이므로 27개이다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $27+27=54$(개)

37 답 ③

$f(1)+f(2)=3$인 경우는

$f(1)=1$, $f(2)=2$ 또는 $f(1)=2$, $f(2)=1$의 두 가지 경우이다.

함숫값 $f(3)$, $f(4)$를 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4의 원소 4개 중에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$(개)

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $16\times2=32$(개)

38 답 ③

X에서 Y로의 함수의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$(개)

X에서 Y로의 함수 중 치역과 공역이 일치하는 함수의 개수는 전체 함수의 개수에서 치역의 원소가 1개인 함수의 개수를 빼면 된다.

즉, 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$인 함수의 개수는 2이다.

따라서 구하는 함수의 개수는 $16-2=14$(개)

다른 풀이

같은 것이 있는 순열로 구할 수도 있다.

1, 2를 중복을 허락하여 4개 나열하여 그 순서대로 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$의 함숫값이라고 하면 되므로

(i) 1, 1, 1, 2를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$(개)

(ii) 1, 1, 2, 2를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$(개)

(iii) 1, 2, 2, 2를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$(개)

따라서 구하는 함수의 개수는 $4+6+4=14$(개)

39 답 ③

7개의 문자 s, u, c, c, e, s, s 중 s가 3개, c가 2개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\frac{7!}{3!2!}=420$(가지)

40 답 ①

7개의 문자 M, E, S, S, A, G, E에서 양 끝에 S가 오도록 하면 나머지 M, E, A, G, E의 5개 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구하면 된다.

5개의 문자 중 E가 2개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$(가지)이다.

41 답 ④

6개의 문자 s, e, t, t, l, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!2!}=180$(가지)

이때, 같은 문자끼리 이웃하지 않게 배열하는 방법의 수는 전체 경우의 수에서 같은 문자끼리 이웃하는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) e, e가 이웃하는 경우의 수

ee를 한 문자로 보면 다섯 개의 문자 ee, s, t, t, l을 나열하는 방법의 수이므로

$\frac{5!}{2!}=60$(가지)

(ii) t, t가 이웃하는 경우의 수

tt를 한 문자로 보면 다섯 개의 문자 tt, s, e, e, l을 나열하는 방법의 수이므로

$\frac{5!}{2!}=60$(가지)

(iii) e, e와 t, t가 각각 이웃하는 경우의 수

ee와 tt를 한 문자로 보면 네 개의 문자 ee, tt, s, l을 나열하는 방법의 수이므로

$4!=24$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$180-(60+60-24)=84$(가지)

TIP

같은 문자끼리 이웃하는 경우의 수는 위의 풀이에서 (i)과 (ii)의 개수의 합에서 (iii)의 개수를 뺀 것이다.
(i)에서 e, e가 이웃하는 경우의 수 중 t, t가 이웃하는 경우가 포함되어 있고, (ii)에서는 t, t가 이웃하는 경우의 수 중 e, e가 이웃하는 경우가 포함되어 있으니까 (i)과 (ii)의 결과의 합에는 e, e와 t, t가 동시에 이웃하는 경우가 중복해서 더해져 있다.
즉, (i)과 (ii)의 개수의 합에서 중복으로 포함된 (iii)의 개수를 빼야 한다.

42 답 ②

BALLAD가 나오기 전까지 나열된 문자의 개수를 구하자.

(i) A□□□□□인 경우의 수

BLLAD를 나열하는 방법의 수이므로

$\frac{5!}{2!}=60$(가지)

(ii) BAA□□□인 경우의 수

LLD를 나열하는 방법의 수이므로

$\frac{3!}{2!}=3$(가지)

(iii) BAD□□□인 경우의 수

LLA를 나열하는 방법의 수이므로

$\frac{3!}{2!}=3$(가지)

(iv) BALA□□인 경우의 수

LD를 나열하는 방법의 수이므로

$2!=2$(가지)

(v) BALD□□인 경우의 수

LA를 나열하는 방법의 수이므로

$2!=2$(가지)

따라서 BALLAD는

$60+3+3+2+2+1=71$(번째)에 나온다.

43 답 ②

다섯 개의 숫자 1, 3, 3, 3, 5 중 같은 숫자가 3개 있으므로 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$(개)

44 답 ①

다섯 장의 숫자 카드 $\boxed{4}$, $\boxed{4}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{6}$에서 4개의 숫자를 택하는 방법은

$\boxed{4}$, $\boxed{4}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ 또는 $\boxed{4}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{6}$의 두 가지이다.

(i) $\boxed{4}$, $\boxed{4}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$을 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$(개)

(ii) $\boxed{4}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{6}$을 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$(개)

(i), (ii)에 의해 구하는 자연수의 개수는

$4+6=10$(개)

45 답 ②

20000보다 큰 다섯 자리의 자연수가 되려면 첫째 자리에 올 수 있는 숫자는 4 또는 5이다.

(i) 첫째 자리에 4가 오는 경우

나머지 숫자 1, 1, 4, 5를 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$(개)

(ii) 첫째 자리에 5가 오는 경우

나머지 숫자 1, 1, 4, 4를 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$(개)

(i), (ii)에 의해 구하는 자연수의 개수는

$6+12=18$(개)

다른 풀이

다섯 개의 숫자 1, 1, 4, 4, 5를 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$(개)

이때, 20000보다 작은 다섯 자리의 자연수는 첫째 자리의 숫자가 1인 다섯 자리의 자연수일 때이다.

첫째 자리에 1이 오는 경우 나머지 숫자 1, 4, 4, 5를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$(개)

따라서 구하는 자연수의 개수는

$30-12=18$(개)

46 답 ①

여섯 자리의 자연수 중 짝수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 2이면 된다.

(i) 일의 자리에 0이 오는 경우

2, 2, 2, 5, 5를 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{3!2!}=10$(개)

(ii) 일의 자리에 2가 오는 경우

0, 2, 2, 5, 5를 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$(개)

이 중 첫째 자리에 숫자 0이 오는 경우를 빼주면 된다. 즉, 첫째 자리에 숫자 0이 오고 일의 자리의 숫자 2인 여섯 자리의 자연수는 가운데 네 자리에 2, 2, 5, 5를 나열하는 경우이므로

$\frac{4!}{2!2!}=6$(개)

즉, 일의 자리에 2가 오는 여섯 자리의 짝수는

$30-6=24$(개)

따라서 구하는 방법의 수는

$10+24=34$(개)

다른 풀이

0, 2, 2, 2, 5, 5를 모두 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리의 짝수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 2이면 된다.

(i) $\boxed{2}\square\square\square\square\boxed{0}$인 경우의 수

가운데 자리에 2, 2, 5, 5를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$(개)

(ii) $\boxed{2}\square\square\square\square\boxed{2}$인 경우의 수

가운데 자리에 0, 2, 5, 5를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$(개)

(iii) $\boxed{5}\square\square\square\square\boxed{0}$인 경우의 수

가운데 자리에 2, 2, 2, 5를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$(개)

(iv) $\boxed{5}\square\square\square\square\boxed{2}$인 경우의 수

가운데 자리에 0, 2, 2, 5를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$(개)

따라서 구하는 짝수의 개수는

$6+12+4+12=34$(개)

47 답 ①

3, 4, 5를 □로 바꾸어 생각하여 □, □, □, 9, 9의 5개를 일렬로 배열한 후 첫 번째, 두 번째, 세 번째 □를 각각 5, 4, 3으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{5!}{3!2!}=10$(가지)

48 답 180

b, c를 □로, e, f를 △로 바꾸어 생각하여

a, d, □, □, △, △의 6개를 일렬로 나열한 후 첫 번째, 두 번째 □를 각각 c, b로 바꾸고, 첫 번째, 두 번째 △를 각각 f, e로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!2!}=180$(가지)

49 답 ③

A지점에서 B지점까지 최단거리로 가려면 오른쪽으로 4칸, 위쪽으로 3칸 움직이면 된다.

즉, 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 R, 위로 한 칸 가는 것을 U라고 하면 7개의 문자 RRRRUUU를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\dfrac{7!}{4!3!}=35$(가지)

50 답 30

A지점에서 C지점까지 최단거리로 가는 경우는 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 2칸 움직이면 되므로

$\dfrac{5!}{3!2!}=10$(가지)

C지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 1칸 움직이면 되므로

$\dfrac{3!}{2!}=3$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times3=30$(가지)

51 답 ④

A지점에서 P지점까지 최단거리로 가는 경우는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 움직이면 되므로

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$(가지)

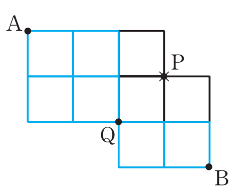
도로 PQ를 지나서 Q지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 움직이면 되므로

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times1\times6=36$(가지)

52 답 ①

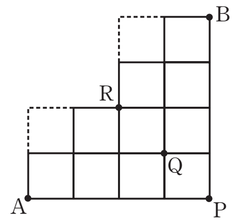


그림과 같이 Q지점을 잡으면 A지점에서 P지점을 거치지 않고 B지점으로 가는 최단거리이므로

$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{1!2!}=6\times3=18$

53 답 ④

그림에서 세 점 P, Q, R를 잡으면



(i) A → P → B로 가는 최단거리로 가는 수는

$1\times1=1$(가지)

(ii) A → Q → B로 가는 최단거리로 가는 수는

$\dfrac{4!}{3!1!}\times\dfrac{4!}{1!3!}=4\times4=16$(가지)

(iii) A → R → B로 가는 최단거리로 가는 수는

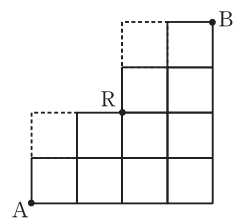
$\left(\dfrac{4!}{2!2!}-1\right)\times\left(\dfrac{4!}{2!2!}-1\right)=5\times5=25$(가지)

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

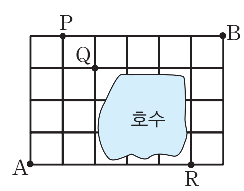
$1+16+25=42$(가지)

TIP

주어진 도로망에 아래와 같은 점선길이 있다고 생각하면 (iii)에서 A → R 또는 R → B로 가는 최단거리로 가는 방법의 수는 각각 $\dfrac{4}{2!2!}$가지이다. 그런데 점선으로 가는 경우는 1가지이므로 A → R 또는 R → B로 가는 최단거리로 가는 방법의 수는 $\dfrac{4}{2!2!}$에서 점선으로 가는 한 가지 경우의 수를 뺀 것이다.



54 답 60



(i) A → P → B로 가는 최단거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{5!}{4!}\times1=5$(가지)

(ii) A → Q → B로 가는 최단거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{5!}{2!3!}\times\dfrac{5!}{4!}=10\times5=50$(가지)

(iii) A → R → B로 가는 최단거리로 가는 방법의 수는

$1\times\dfrac{5!}{1!4!}=5$(가지)

(i), (ii), (iii)에서 구하는 최단거리로 가는 방법의 수는

$5+50+5=60$(가지)

심플 정리

[같은 것이 있는 순열]

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 모두 일렬로 나열하는 순열의 수는

$\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$(단, $p+q+\cdots+r=n$)

연습 문제 [A~B] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 20~21

01 답 ④

$(5-1)!=4!=24$

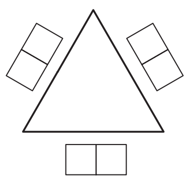
02 답 ④

각 부부를 한 사람으로 생각하면 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(5-1)!$가지이고, 각 부부가 서로 자리를 바꾸는 방법이 두 가지씩이므로

$(5-1)!\times2\times2\times2\times2\times2=4!\times2^5$(가지)

03 답 ④

어느 대학교 수시 모집에 지원한 남학생 3명과 여학생 3명을 토론식 면접을 하기 위하여 오른쪽 그림과 같은 정삼각형 모양의 탁자에 앉히려고 한다. 붙어있는 의자에는 반드시 남녀가 1명씩 앉도록 할 때, 이들 6명이 앉을 수 있는 방법의 수는?



먼저 남학생을 각 변에 앉힐 방법을 생각하고 남는 자리에 여학생을 앉히면 돼.

① 72 ② 80 ③ 88 ④ 96 ⑤ 108

1st 남학생을 정삼각형 모양의 탁자에 앉히는 방법의 수를 구하자.

남학생 3명을 정삼각형 모양의 탁자에 앉히는 방법의 수는

$(3-1)!$(가지)

이때, 각각 오른쪽 또는 왼쪽 좌석을 선택하여 앉힐 수 있으므로

$(3-1)!\times2\times2\times2=16$(가지)

정삼각형의 모양의 탁자에 앉힐 때, 원순열의 수 $(3-1)!$와 각 변(세 변)에 위치한 두 개의 의자 중 왼쪽 또는 오른쪽에 앉는 방법의 수 $2\times2\times2$를 곱한 거야.

2nd 남은 자리에 여학생을 앉히는 방법의 수를 곱해야겠지?

남은 3개의 의자에 여학생 3명을 앉히는 경우의 수는

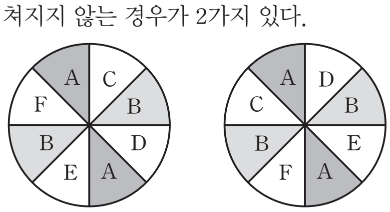
$3!=6$(가지) → 남학생들의 자리를 정하면서 회전하여 겹치는 경우를 고려했으니, 여학생들의 자리를 정할 때에는 회전하는 걸 고려하지 않아도 돼.

따라서 구하는 방법의 수는

$16\times6=96$(가지)

04 답 12

칠해져 있지 않은 4개의 영역 C, D, E, F에 4가지 색을 칠하는 방법의 수는 원순열의 수이므로 $(4-1)!$가지이고, 그림과 같이 회전해도 겹쳐지지 않는 경우가 2가지 있다.



따라서 구하는 방법의 수는

$3!\times2=12$(가지)

05 답 ②

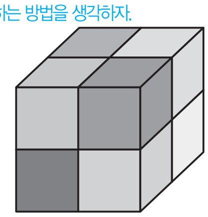
한 가운데 칠할 색을 고르는 방법의 수는 4가지이고, 그 각각에 대하여 나머지 세 군데를 칠하는 방법의 수는 원순열의 수와 같으므로 $(3-1)!=2$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는 $4\times2=8$(가지)

06 답 ②

정육면체의 윗부분 4개와 아랫부분 4개를 나눠서 색을 칠하는 방법을 생각하자.

그림과 같이 크기가 같은 8개의 정육면체를 붙여서 만든 큰 정육면체가 있다. 이때, 서로 다른 8가지 색을 모두 사용하여 정육면체의 면에 색을 칠하는 방법의 수는? (단, 하나의 정육면체에는 한 가지 색깔만 사용할 수 있고, 굴리거나 회전하여 겹쳐지는 것들은 같은 것으로 한다.)



큰 정육면체에서 밑면이 될 수 있는 게 몇 개인지 생각해봐.

① 1610 ② 1680 ③ 1750 ④ 1820 ⑤ 1890

1st 정육면체의 윗부분 4개의 영역을 칠하는 방법의 수를 구하자.

서로 다른 8가지 색 중 4개의 색을 골라 윗부분 4개의 영역을 먼저 칠하는 방법의 수는 원순열의 수와 같으므로

${}_8C_4\times(4-1)!$(가지)

서로 다른 8가지 색 중에서 순서에 관계없이 4가지 색을 구하는 방법의 수는 ${}_8C_4$야.

2nd 정육면체의 아랫부분 4개의 영역을 칠하는 방법의 수를 구하자.

이때 아랫부분은 나머지 4가지 색을 이용하여 칠하므로 순열의 수와 같다.

윗부분에서 원순열로 계산하면서 회전하여 겹치는 경우를 고려했으므로, 아랫부분은 원순열이 아닌 순열의 수를 구해.

${}_4C_4\times4!$(가지)

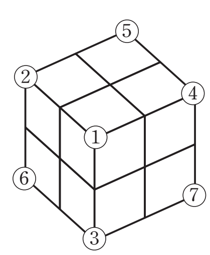
3rd 회전하여 같은 경우가 나오는 총 가짓수를 이용하여 답을 구하자.

윗부분 4개의 영역을 큰 정육면체에서 밑면이라 하면 윗부분이 각 밑면의 위치에 있을 때마다 겹쳐지므로 6가지의 경우로 나누어야 한다. 총 가짓수의 $\frac{1}{6}$배를 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_8C_4\times(4-1)!\times{}_4C_4\times4!\times\frac{1}{6}=\frac{8\times7\times6\times5}{4!}\times3!\times4!\times\frac{1}{6}$$
$$=1680\text{(가지)}$$

다른 풀이



하나의 정육면체에는 한 가지 색만 칠할 수 있으므로 그림과 같이 각 정육면체에 ①~⑧의 번호를 붙여서 색을 칠하는 방법의 수를 구해보자. (보이지 않는 곳은 ⑧)

①에 칠할 수 있는 색은 ${}_8C_1=8$(가지)

②, ③, ④에 칠할 색을 고르는 것은 색칠하는 원순열로 볼 수 있으므로 ${}_7C_3\times(3-1)!$(가지)

⑤, ⑥, ⑦, ⑧에 색칠하는 것은 원순열이 아닌 순열이므로 $4!$(가지)

이때, 기준이 되는 꼭짓점에 올 수 있는 색은 8가지이므로 8로 나누어야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$8\times({}_7C_3\times2!)\times4!\times\frac{1}{8}=8\times7\times6\times5=1680$(가지)

07 답 ⑤

4개의 접시에 과일을 1개씩 담으려면 과일 4개가 필요하므로 3종류의 과일에서 중복을 허락하여 4개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_4=3^4=81$(가지)

08 답 ②

두 가지 부호 —, •를 나열하여 신호를 만들려고 한다. 50가지의 신호를 만들려면 이 두 가지 부호를 최소한 몇 개 사용해야 하는가?

사용하는 부호의 개수가 늘어남에 따라 신호의 개수가 늘어나는 규칙을 먼저 찾자.

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

1st 부호의 개수가 늘어남에 따라 만들 수 있는 신호의 가짓수의 규칙을 구하자.

부호 1개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 가짓수는

${}_2\Pi_1=2^1$(가지)

두 가지 부호의 중복을 허락하고 나열하는 것이므로 중복순열의 수를 생각해.

부호 2개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 가짓수는

${}_2\Pi_2=2^2$(가지)

이와 같은 과정을 반복할 때, 부호를 n개 사용하여 만들 수 있는 신호의 가짓수는 ${}_2\Pi_n=2^n$(가지)

2nd 50가지의 신호를 만들기 위한 n의 값을 구하자.

신호의 총 개수가 50개 이상이어야 하므로

$2^1+2^2+2^3+2^4=2+4+8+16=30$

$2^1+2^2+2^3+2^4+2^5=2+4+8+16+32=62$

즉, 최소의 자연수 n은 5이다.

09 답 ④

세 자리의 자연수가 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 홀수이어야 한다. 즉, 일의 자리의 숫자로 1, 3, 5 중 1개를 선택해야 하므로 ${}_3C_1$가지

백의 자리와 십의 자리의 숫자는 5개의 숫자를 중복을 허락하여 2개를 나열하는 경우이므로 ${}_5\Pi_2$가지

따라서 세 자리의 자연수가 홀수인 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_5\Pi_2=3\times5^2=75$(가지)

10 답 ④

전체 함수의 개수에서 조건을 만족하지 않는 함수의 개수를 빼자.

전체 함수의 개수는 집합 Y의 원소 5개 중에서 중복을 허락하여 집합 X의 원소의 함숫값이 될 3개를 나열하는 경우의 수이므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$(개)

조건을 만족하지 않으려면

$\{f(1)-f(2)\}\times\{f(2)-f(3)\}\neq0$이어야 한다. 즉,

$f(1)\neq f(2)$이고 $f(2)\neq f(3)$이다.

$f(1)$의 값이 될 수 있는 경우는 집합 Y의 원소 5개 중 어느 하나이므로 5개, $f(2)$의 값이 될 수 있는 경우는 $f(1)$의 값을 제외한 4개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 경우는 $f(2)$의 값을 제외한 4개이므로 이 조건을 만족하는 함수의 개수는 $5\times4\times4=80$(개)

따라서 구하는 함수의 개수는

${}_5\Pi_3-80=5^3-80=125-80=45$(개)

다른 풀이

$\{f(1)-f(2)\}\times\{f(2)-f(3)\}=0$에서

$f(1)=f(2)$ 또는 $f(2)=f(3)$

(i) $f(1)=f(2)\neq f(3)$인 경우

$f(1)=f(2)$의 값은 집합 Y의 원소 5개 중 어느 하나일 수 있고, $f(3)$의 값은 앞의 함숫값을 제외한 4가지이므로 이 조건을 만족하는 함수의 개수는 $5\times4=20$(개)

(ii) $f(2)=f(3)\neq f(1)$인 경우

앞에서와 마찬가지 방법으로 $5\times4=20$(개)

(iii) $f(1)=f(2)=f(3)$인 경우

함숫값으로 집합 Y의 원소 5개 중 어느 하나를 선택하면 되므로 5개이다.

따라서 구하는 함수의 개수는 $20+20+5=45$(개)이다.

심플 정리

[여러 가지 함수]

(1) 일대일함수
함수 $f:X\longrightarrow Y$에서 X의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$를 만족하는 함수를 일대일함수라고 한다.

(2) 일대일대응
함수 $f:X\longrightarrow Y$에 대하여
(i) $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$
(ii) $\{f(x)|x\in X\}=Y$
를 모두 만족할 때, 즉 치역과 공역이 같은 일대일함수를 일대일대응이라고 한다.

(3) 항등함수
함수 $f:X\longrightarrow X$에서 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x)=x$를 만족하는 함수

(4) 상수함수
함수 $f:X\longrightarrow Y$에서 집합 X의 모든 원소에 대하여 집합 Y의 오직 하나의 원소만 대응하는 함수

11 답 340

7개의 문자 a, b, b, c, c, c, d를 일렬로 나열할 때, 양쪽 끝에는 서로 다른 문자가 오는 경우의 수를 구하시오.
전체의 경우의 수에서 양쪽 끝에 같은 문자가 오는 경우의 수를 빼면 되겠지?

1st 먼저 7개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구하자.

7개의 문자 중 b가 2개, c가 3개이므로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!3!}=7\times6\times5\times2=420$(가지)

2nd 양쪽 끝에 모두 b가 오는 경우의 수를 구하자.

(i) 양쪽 끝에 모두 b가 오는 경우

b□□□□□b에서 □에 5개의 문자 a, c, c, c, d가 들어가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=5\times4=20$(가지)

3rd 양쪽 끝에 모두 c가 오는 경우의 수를 구한다.

(ii) 양쪽 끝에 모두 c 가 오는 경우

c□□□□□c에서 □에 5개의 문자 a, b, b, c, d가 들어가는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=5\times4\times3=60$(가지)

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$420-20-60=340$(가지)

12 답 ③

빨간색 구슬 2개, 초록색 구슬 3개, 파란색 구슬 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{10!}{2!3!5!}=2520$(가지)

13 답 ⑤

6개의 문자 중에서 자음인 R, N, G가 알파벳 순서인 G, N, R로 나열되어야 하므로 G, N, R를 모두 문자 □로 보고 O, A, E, □, □, □를 한 줄로 나열한 후, 첫 번째 □에는 G, 두 번째 □에는 N, 세 번째 □에는 R를 대입하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!}=6\times5\times4=120$(가지)

14 답 ①

1계단을 a회, 2계단을 b회 오른다면

$a+2b=7$ (단, a, b는 음이 아닌 정수)의 해는 다음과 같다.

a	7	5	3	1
b	0	1	2	3

(i) $a=7$, $b=0$인 경우

1계단 7개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 1가지

(ii) $a=5$, $b=1$인 경우

1계단 5개, 2계단 1개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{6!}{5!1!}=6$(가지)

(iii) $a=3$, $b=2$인 경우

1계단 3개, 2계단 2개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{3!2!}=10$(가지)

(iv) $a=1$, $b=3$인 경우

1계단 1개, 2계단 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{1!3!}=4$(가지)

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $1+6+10+4=21$(가지)

15 답 ②

구하는 방법의 수는

A → C → B로 가는 최단거리의 수에서 A → C → D → B로 가는 최단거리의 수를 빼면 된다.

(i) A → C → B인 최단거리의 수

$\frac{5!}{3!2!}\times\frac{5!}{3!2!}=10\times10=100$(가지)

(ii) A → C → D → B인 최단거리의 수

$\frac{5!}{3!2!}\times2\times\frac{3!}{2!}=60$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $100-60=40$(가지)

16 답 630

0부터 9까지의 10개의 숫자 중 두 종류의 숫자를 선택하는 방법의 수는

${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2}=45$(가지) … Ⅰ

두 종류의 수 □과 △로 만들 수 있는 수를 생각하면

(i) □△△△로 비밀번호를 만드는 경우

먼저, 두 숫자 중에서 △에 들어갈 숫자를 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1$이고, 이렇게 선택한 네 개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$(가지)이므로 구하는 경우의 수는

${}_{10}C_2\times2\times4=45\times8=360$(가지)

(ii) □□△△로 비밀번호를 만드는 경우

${}_{10}C_2\times\frac{4!}{2!2!}=45\times6=270$(가지) … Ⅱ

(i), (ii)에서 만들 수 있는 비밀번호의 개수는

$360+270=630$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	10개의 숫자 중 두 종류의 숫자를 선택하는 방법의 수를 구한다.	20%
Ⅱ	경우를 나누어 두 종류의 수로 만들 수 있는 네 자리 비밀번호의 개수를 구한다.	60%
Ⅲ	만들 수 있는 모든 비밀번호의 개수를 구한다.	20%

Simple C 중복조합

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 22~23

01 답 중복조합, ${}_{n}H_{r}$

02 답 n, r, $n+r-1$, r

03 답 3, n, $2+n$, n

04 답 ${}_{n}H_{m}$

05 답 ○

06 답 ×
방정식 $x+y+z=4$에서 x, y, z가 모두 자연수(양의 정수)인 해의 개수는 ${}_{3}H_{4-3}={}_{3}H_{1}$이다.

07 답 ×
$x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수는 ${}_{3}C_{2}$이다.

08 답 ○

09 답 4
${}_{2}H_{3}={}_{2+3-1}C_{3}={}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

10 답 6
${}_{3}H_{2}={}_{3+2-1}C_{2}={}_{4}C_{2}=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

11 답 1
${}_{5}H_{0}={}_{5+0-1}C_{0}={}_{4}C_{0}=1$

12 답 35
${}_{4}H_{4}={}_{4+4-1}C_{4}={}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

13 답 6
서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수이므로
${}_{3}H_{2}={}_{3+2-1}C_{2}={}_{4}C_{2}=6$(가지)

14 답 10
서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수이므로
${}_{3}H_{3}={}_{3+3-1}C_{3}={}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$(가지)

15 답 15
서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$(가지)

16 답 5
2개의 문자 x, y 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{2}H_{4}={}_{2+4-1}C_{4}={}_{5}C_{4}={}_{5}C_{1}=5$(개)

17 답 4
$x-1=x'$, $y-1=y'$으로 놓으면
$x+y=5$를 만족하는 양의 정수해의 개수는 $x'+y'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 (x', y')의 개수와 같다.
${}_{2}H_{3}={}_{2+3-1}C_{3}={}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$(개)

18 답 15
3개의 문자 x, y, z 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$(개)

19 답 6
$x-1=x'$, $y-1=y'$, $z-1=z'$으로 놓으면
$x+y+z=5$를 만족하는 양의 정수해의 개수는
$x'+y'+z'=2$를 만족하는 음이 아닌 정수해 (x', y', z')의 개수와 같다.
${}_{3}H_{2}={}_{3+2-1}C_{2}={}_{4}C_{2}=6$(개)

20 답 3
구하는 항의 개수는 2개의 문자 a, b 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{2}H_{2}={}_{2+2-1}C_{2}={}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$(개)

21 답 6
구하는 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{3}H_{2}={}_{3+2-1}C_{2}={}_{4}C_{2}=6$(개)

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 24~25

22 답 ③
${}_{n}H_{2}={}_{n+2-1}C_{2}={}_{n+1}C_{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}=36$에서
$n(n+1)=72=8\times9 \qquad \therefore n=8$

23 답 5
${}_{3}H_{n}={}_{3+n-1}C_{n}={}_{2+n}C_{n}={}_{n+2}C_{2}=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}=21$
에서
$(n+2)(n+1)=42=7\times6 \qquad \therefore n=5$

24 답 ②

${}_{5}H_{3}={}_{5+3-1}C_{3}={}_{7}C_{3}={}_{7}C_{4}={}_{n}C_{4}$이므로

$n=7$

25 답 ②

${}_{11-r}H_{r}={}_{11-r+r-1}C_{r}={}_{10}C_{r}$이고,

${}_{15-r}H_{r-4}={}_{15-r+r-4-1}C_{r-4}={}_{10}C_{r-4}$이므로

${}_{10}C_{r}={}_{10}C_{r-4}$에서

$r+(r-4)=10$

$2r=14 \qquad \therefore r=7$

26 답 ④

서로 다른 4개의 우체통을 각각 A, B, C, D라 하면 구하는 방법의 수는 A, B, C, D의 4개에서 중복을 허락하여 7개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 방법의 수는

$${}_{4}H_{7}={}_{4+7-1}C_{7}={}_{10}C_{7}={}_{10}C_{3}=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120(\text{가지})$$

27 답 ③

모든 학생이 적어도 한 개 이상의 사과를 받아야 하므로 먼저 3명의 학생에게 사과를 한 개씩 나누어 주고 나머지 사과 5개를 중복을 허락하여 3명의 학생에게 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$${}_{3}H_{5}={}_{3+5-1}C_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=\frac{7\times6}{2\times1}=21(\text{가지})$$

다른 풀이

3명의 학생에게 나누어 주는 사과의 개수를 각각 x, y, z라 하면 구하는 방법의 수는 방정식 $x+y+z=8$의 양의 정수해의 개수와 같다.

$x-1=x'$, $y-1=y'$, $z-1=z'$으로 놓으면, $x+y+z=8$을 만족하는 양의 정수해의 개수는 $x'+y'+z'=5$를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_{3}H_{5}={}_{3+5-1}C_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21(\text{가지})$

28 답 ②

먼저, 딸기 맛, 초콜릿 맛, 바나나 맛 우유를 각각 2개씩 선택하고 나머지 4개를 중복을 허락하여 선택하는 경우의 수를 구하면 된다.

3종류의 우유 중 중복을 허락하여 4개를 선택하는 경우의 수는

${}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15(\text{가지})$

29 답 ④

15개의 인형 중에서 상자 A에 3개, 상자 B에 2개를 미리 넣어두고 나머지 10개의 인형을 중복을 허락하여 4개의 상자 A, B, C, D에 넣는 경우의 수를 구하자.

$${}_{4}H_{10}={}_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_{3}=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286(\text{가지})$$

다른 풀이

4개의 상자 A, B, C, D에 넣는 인형의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면

$a\ge3$, $b\ge2$, $c\ge0$, $d\ge0$

$a'=a-3$, $b'=b-2$로 놓으면

$a'\ge0$, $b'\ge0$

$a+b+c+d=(a'+3)+(b'+2)+c+d=15$

즉, $a'+b'+c+d=10$

$\therefore {}_{4}H_{10}={}_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_{3}=286(\text{가지})$

30 답 ②

방정식 $x+y+z+w=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 네 문자 x, y, z, w 중에서 중복을 허락하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}H_{8}={}_{4+8-1}C_{8}={}_{11}C_{8}={}_{11}C_{3}=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$$

31 답 ⑤

방정식 $x+y+z=k$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 세 문자 x, y, z 중에서 중복을 허락하여 k개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}H_{k}={}_{3+k-1}C_{k}={}_{k+2}C_{k}={}_{k+2}C_{2}=\frac{(k+2)(k+1)}{2}=105$$

$(k+2)(k+1)=210=15\times14$

$k+1=14$

$\therefore k=13 \ (\because k>0)$

TIP

순열이나 조합의 수를 계산할 때, 위의 풀이에서 $(k+2)(k+1)=210$과 같이, 문자를 포함한 식이 연속된 자연수의 곱인 경우, 전개하여 인수분해하는 것보다 문자에 자연수를 넣어 보며 해를 찾는 게 편할 때가 많다.

32 답 ④

방정식 $x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는 세 문자 x, y, z 중에서 중복을 허락하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_{3}H_{7}={}_{3+7-1}C_{7}={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=36$

또, 방정식 $x+y+z=7$의 양의 정수해는

$x\ge1$, $y\ge1$, $z\ge1$이므로

$x'=x-1$, $y'=y-1$, $z'=z-1$이라 하면

$x+y+z=7$을 만족하는 양의 정수해의 개수는

$x'+y'+z'=4$를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$b={}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

$\therefore a-b=36-15=21$

33 답 ⑤

$x-1=x'$, $y-1=y'$, $z-1=z'$으로 놓으면, 부등식
$x+y+z\le5$의 해의 개수는
$x'+y'+z'\le2$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.
(i) $x'+y'+z'=0$인 경우
해의 개수는 $x'=y'=z'=0$으로 1개
(ii) $x'+y'+z'=1$인 경우
x', y', z'에서 중복을 허락하여 1개를 선택하는 중복조합의 수이다. 즉, x', y', z' 중 하나가 1이고 나머지가 0이면 되므로 해의 개수는 3이다.
(iii) $x'+y'+z'=2$인 경우
x', y', z'에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수이므로 ${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$
(i)~(iii)에서 구하는 부등식의 해의 개수는
$1+3+6=10$(개)

34 답 ③

집합 Y의 원소 3개 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택하고, 이 5개의 함숫값과 정의역을 작은 수부터 큰 수까지 정렬하여 그 순서대로 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는
${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$(개)

35 답 ③

3개의 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 3, 2에 각각 대응시키면 된다.
즉, 함수 f의 개수는 공역의 원소 3개 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$(개)

36 답 210

공역의 원소 7개 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하고, 정의역의 원소와 공역에서 선택한 4개의 숫자를 큰 수부터 작은 수까지 순서대로 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 7개 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하는 중복조합으로
${}_7H_4={}_{7+4-1}C_4={}_{10}C_4=210$(개)

심플 정리

[순열, 조합, 중복순열, 중복조합]
서로 다른 n개에서 r개를 선택할 때,
① 중복 ×, 순서 ○ : 순열
② 중복 ○, 순서 ○ : 중복순열
③ 중복 ×, 순서 × : 조합
④ 중복 ○, 순서 × : 중복조합

Simple D 이항정리

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 26~27

01 답 ${}_3C_1$, 2, 3, 3, 3, 2, 3

02 답 ${}_3C_1$, 2, ${}_3C_3$, 3, 3, 2, 3, 3

03 답 2, 3, 1, 4, 6, 4, $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

04 답 ×

$(a+b)^n$의 전개식의 각 항에서 a의 지수와 b의 지수의 합은 n이다.

05 답 ○

06 답 ○

07 답 ○

08 답 $a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^2={}_2C_0a^2+{}_2C_1ab+{}_2C_2b^2$
$=a^2+2ab+b^2$

09 답 $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$

$(2a+b)^3$
$={}_3C_0(2a)^3+{}_3C_1(2a)^2\cdot b+{}_3C_2(2a)\cdot b^2+{}_3C_3b^3$
$=8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$

10 답 $x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$

$(x-y)^4$
$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\cdot(-y)+{}_4C_2x^2\cdot(-y)^2$
$+{}_4C_3x\cdot(-y)^3+{}_4C_4(-y)^4$
$=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$

11 답 $81x^4-108x^3y+54x^2y^2-12xy^3+y^4$

$(3x-y)^4$
$={}_4C_0(3x)^4+{}_4C_1(3x)^3\cdot(-y)+{}_4C_2(3x)^2\cdot(-y)^2$
$+{}_4C_3(3x)\cdot(-y)^3+{}_4C_4(-y)^4$
$=81x^4-108x^3y+54x^2y^2-12xy^3+y^4$

12 답 $x^2+2+\frac{1}{x^2}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2={}_2C_0x^2+{}_2C_1x\cdot\frac{1}{x}+{}_2C_2\left(\frac{1}{x}\right)^2$
$=x^2+2+\frac{1}{x^2}$

13 답 $x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$

$={}_3C_0x^3+{}_3C_1x^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+{}_3C_2x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^2+{}_3C_3\left(-\frac{1}{x}\right)^3$

$=x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$

14 답 $16x^4+32x^2+24+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^4}$

$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^4$

$={}_4C_0(2x)^4+{}_4C_1(2x)^3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+{}_4C_2(2x)^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2$

$+{}_4C_3(2x)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3+{}_4C_4\left(\frac{1}{x}\right)^4$

$=16x^4+32x^2+24+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^4}$

15 답 $x^4-\frac{4x^2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{27x^2}+\frac{1}{81x^4}$

$\left(x-\frac{1}{3x}\right)^4$

$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\cdot\left(-\frac{1}{3x}\right)+{}_4C_2x^2\cdot\left(-\frac{1}{3x}\right)^2$

$+{}_4C_3x\cdot\left(-\frac{1}{3x}\right)^3+{}_4C_4\left(-\frac{1}{3x}\right)^4$

$=x^4-\frac{4x^2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{27x^2}+\frac{1}{81x^4}$

16 답 10

$(x+2)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_rx^{5-r}2^r$

$x^{5-r}=x^4$에서 $r=1$

따라서 x^4의 계수는 ${}_5C_1\times2=10$

17 답 135

$(a-3)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_ra^{6-r}(-3)^r$

$a^{6-r}=a^4$에서 $r=2$

따라서 a^4의 계수는 ${}_6C_2\times(-3)^2=15\times9=135$

18 답 216

$(2x+3y)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_r(2x)^{4-r}(3y)^r$

$x^{4-r}y^r=x^2y^2$에서 $r=2$

따라서 x^2y^2의 계수는 ${}_4C_2\times2^2\times3^2=6\times4\times9=216$

19 답 ${}_6C_4$

${}_5C_3+{}_5C_4={}_6C_4$

20 답 ${}_6C_2$

$({}_4C_0+{}_4C_1)+{}_5C_2={}_5C_1+{}_5C_2={}_6C_2$

21 답 8

${}_3C_0+{}_3C_1+{}_3C_2+{}_3C_3=(1+1)^3=2^3=8$

22 답 15

${}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=(1+1)^4=2^4$이므로

${}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=2^4-{}_4C_0=2^4-1=15$

23 답 0

${}_5C_0-{}_5C_1+{}_5C_2-{}_5C_3+{}_5C_4-{}_5C_5=(1-1)^5=0$

24 답 32

${}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_6C_6=(1+1)^6$ ⋯ ㉠

${}_6C_0-{}_6C_1+{}_6C_2-\cdots+{}_6C_6=(1-1)^6$ ⋯ ㉡

㉠－㉡을 하면

$2({}_6C_1+{}_6C_3+{}_6C_5)=2^6$

$\therefore\ {}_6C_1+{}_6C_3+{}_6C_5=2^5=32$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 28～29

25 답 ②

$(x+a)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_rx^{6-r}\cdot a^r$

$x^{6-r}=x^4$에서 $r=2$

x^4의 계수가 60이므로

${}_6C_2a^2=15a^2=60$

$a^2=4\qquad\therefore a=2\ (\because\ a>0)$

26 답 ⑤

$(x-a)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_rx^{5-r}\cdot(-a)^r$

x의 계수는 $r=4$일 때 ${}_5C_4(-a)^4=5a^4$이고,

상수항은 $r=5$일 때 ${}_5C_0(-a)^5=-a^5$

x의 계수와 상수항의 합이 0이므로

$5a^4+(-a^5)=0$

$a^4(5-a)=0$

$\therefore a=5(\because\ a>0)$

27 답 ④

$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_rx^{7-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r={}_7C_rx^{7-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{-2r}={}_7C_r(-1)^r\cdot x^{7-3r}$

$x^{7-3r}=\frac{1}{x^5}=x^{-5}$에서

$7-3r=-5$

$3r=12\qquad\therefore r=4$

따라서 $\frac{1}{x^5}$의 계수는 ${}_7C_4(-1)^4=35$

28 답 ②

$\left(ax-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(ax)^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r a^{5-r}\cdot x^{5-r}(-1)^r\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r$$
$$={}_5C_r a^{5-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{5-2r}$$

$x^{5-2r}=x^1$에서 $r=2$

x의 계수가 -80이므로

${}_5C_2 a^3\cdot(-1)^2=10a^3=-80$

$a^3=-8 \qquad \therefore a=-2$

29 답 ③

$(x+1)^3$, $(x+2)^4$의 전개식의 일반항을 각각 구하면

${}_3C_r x^{3-r}$, ${}_4C_s x^{4-s}\cdot 2^s$

$(x+1)^3(x+2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r\cdot{}_4C_s\cdot 2^s\cdot x^{7-s-r}$

$(x+1)^3(x+2)^4$의 전개식에서 x의 계수는

$7-s-r=1$

$\therefore s+r=6$

(i) $r=2$, $s=4$일 때,

x의 계수는

${}_3C_2\cdot{}_4C_4\cdot 2^4=3\times1\times16=48$

(ii) $r=3$, $s=3$일 때,

x의 계수는

${}_3C_3\cdot{}_4C_3\cdot 2^3=1\times4\times8=32$

(i), (ii)에 의해 x의 계수는 $48+32=80$

30 답 ②

$(1+2x)^4$, $(1-x)^5$의 전개식의 일반항을 각각 구하면

${}_4C_r(2x)^r$, ${}_5C_s(-x)^s$

$(1+2x)^4(1-x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r\cdot{}_5C_s\cdot 2^r\cdot(-1)^s\cdot x^{r+s}$

$(1+2x)^4(1-x)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는

$r+s=2$

(i) $r=0$, $s=2$일 때,

x^2의 계수는

${}_4C_0\cdot{}_5C_2\cdot 2^0\cdot(-1)^2=1\times10\times1\times1=10$

(ii) $r=1$, $s=1$일 때,

x^2의 계수는

${}_4C_1\cdot{}_5C_1\cdot 2^1\cdot(-1)^1=4\times5\times2\times(-1)=-40$

(iii) $r=2$, $s=0$일 때,

x^2의 계수는

${}_4C_2\cdot{}_5C_0\cdot 2^2\cdot(-1)^0=6\times1\times4\times1=24$

(i)~(iii)에 의해 x^2의 계수는 $10-40+24=-6$

31 답 ②

$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}\cdot\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r={}_5C_r(-2)^r\cdot x^{5-2r}$

$(3x+4)\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 상수항이 나오는 경우는 다음의 경우가 있다.

(i) $3x+4$의 x항과 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^5$의 $\dfrac{1}{x}$ 항

$3x+4$의 x의 계수는 3이고,

$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^5$의 $\dfrac{1}{x}$, 즉 x^{-1}의 계수는

$5-2r=-1$에서 $r=3$일 때,

${}_5C_3(-2)^3=10\times(-8)=-80$이므로

구하는 상수항은 $3\times(-80)=-240$

(ii) $3x+4$의 상수항과 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^5$의 상수항

$3x+4$의 상수항은 4이고,

$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^5$의 상수항은

$5-2r=0$에서 $r=\dfrac{5}{2}$이므로 자연수 r가 존재하지 않는다.

따라서 구하는 상수항은 -240이다.

32 답 ④

${}_{n-1}C_5+{}_{n-1}C_6={}_nC_6$이므로 주어진 식은

${}_nC_4={}_nC_6$

그런데 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

$\therefore n=4+6=10$

심플 정리

[파스칼의 삼각형]

파스칼의 삼각형에서 같은 줄에 있는 이웃하는 두 항의 합은 두 항의 가운데 아래에 있는 다음 줄의 항이다.

${}_nC_{r-1}$ ${}_nC_r$

${}_{n+1}C_r$

33 답 ③

${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$ ⋯ ㉠임을 이용하자.

${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2$

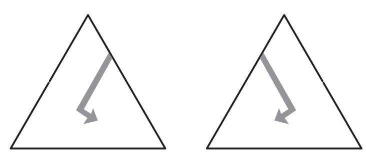
$=({}_3C_3+{}_3C_2)+{}_4C_2$ ($\because {}_nC_n=1$)

$={}_4C_3+{}_4C_2$ ($\because$ ㉠)

$={}_5C_3$ ($\because$ ㉠)

TIP

파스칼의 삼각형에서 대각선으로 숫자들을 더하면, 마지막으로 더해진 항의 다음 줄에서 쉽게 그 합을 찾을 수 있다.



34 답 ②

${}_{n}C_{r-1}+{}_{n}C_{r}={}_{n+1}C_{r}$ ⋯ ㉠임을 이용하자.

${}_{4}C_{1}+{}_{5}C_{2}+{}_{6}C_{3}+{}_{7}C_{4}+{}_{8}C_{5}$

$=\{({}_{4}C_{0}+{}_{4}C_{1})+{}_{5}C_{2}+{}_{6}C_{3}+{}_{7}C_{4}+{}_{8}C_{5}\}-{}_{4}C_{0}$

$=\{({}_{5}C_{1}+{}_{5}C_{2})+{}_{6}C_{3}+{}_{7}C_{4}+{}_{8}C_{5}\}-{}_{4}C_{0}$ (∵ ㉠)

$=\{({}_{6}C_{2}+{}_{6}C_{3})+{}_{7}C_{4}+{}_{8}C_{5}\}-{}_{4}C_{0}$ (∵ ㉠)

$=\{({}_{7}C_{3}+{}_{7}C_{4})+{}_{8}C_{5}\}-{}_{4}C_{0}$ (∵ ㉠)

$=({}_{8}C_{4}+{}_{8}C_{5})-{}_{4}C_{0}$ (∵ ㉠)

$={}_{9}C_{5}-{}_{4}C_{0}$

$=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}-1=126-1=125$

35 답 ④

${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}$이므로

$2^{n}=32=2^{5}$

$\therefore n=5$

36 답 ⑤

${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}$이므로

${}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}-1$ $(\because {}_{n}C_{0}=1)$

주어진 식은

$4000<2^{n}-1<5000$

$\therefore 4001<2^{n}<5001$

이때 $2^{12}=4096$, $2^{13}=8192$이므로 부등식을 만족하는 양의 정수 n의 값은 12이다.

37 답 ④

${}_{19}C_{0}={}_{19}C_{19}$, ${}_{19}C_{1}={}_{19}C_{18}$, ⋯, ${}_{19}C_{9}={}_{19}C_{10}$이므로

${}_{19}C_{0}+{}_{19}C_{1}+{}_{19}C_{2}+\cdots+{}_{19}C_{9}$

$={}_{19}C_{19}+{}_{19}C_{18}+{}_{19}C_{17}+\cdots+{}_{19}C_{10}$

즉,

${}_{19}C_{0}+{}_{19}C_{1}+{}_{19}C_{2}+\cdots+{}_{19}C_{19}$

$=2({}_{19}C_{10}+{}_{19}C_{11}+{}_{19}C_{12}+\cdots+{}_{19}C_{19})=2^{19}$

$\therefore {}_{19}C_{10}+{}_{19}C_{11}+{}_{19}C_{12}+\cdots+{}_{19}C_{19}=2^{18}$

따라서 자연수 n의 값은 18이다.

38 답 ④

${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{4}+\cdots=2^{n-1}$이므로 $n=10$을 대입하면

${}_{10}C_{0}+{}_{10}C_{2}+{}_{10}C_{4}+{}_{10}C_{6}+{}_{10}C_{8}+{}_{10}C_{10}=2^{9}=512$

연습 문제 [C~D] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 30～31

01 답 126

${}_{3}H_{r}={}_{r+2}C_{r}={}_{r+2}C_{2}={}_{7}C_{2}$이므로 $r=5$

$\therefore {}_{5}H_{r}={}_{5}H_{5}={}_{9}C_{5}={}_{9}C_{4}=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

02 답 ③

서로 다른 8개의 상자 중에서 중복을 허락하여 구슬을 넣을 상자를 3개 선택하는 중복조합의 수이므로

${}_{8}H_{3}={}_{8+3-1}C_{3}={}_{10}C_{3}=120$(가지)

다른 풀이

각 상자에 들어갈 구슬의 개수를 x_1, x_2, x_3, ⋯, x_8이라 하면 구하는 방법의 수는 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_8=3$의 음이 아닌 정수해의 개수이므로

${}_{8}H_{3}={}_{8+3-1}C_{3}={}_{10}C_{3}=120$(가지)

03 답 ③

> 세 정수 a, b, c에 대하여 $2\le|a|\le|b|\le|c|\le7$를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는?
>
> ① 420 ② 432 ③ 448
>
> ④ 460 ⑤ 472
>
> 먼저 세 자연수의 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수를 구한 후, 각각 양수와 음수값을 가질 수 있으므로 2를 곱하면 돼.

1st 먼저 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수를 구하자.

주어진 조건을 만족시키는 세 자연수 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

6개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하고 크기가 작은 것부터 차례대로 a, b, c라 하면 돼.

${}_{6}H_{3}={}_{6+3-1}C_{3}={}_{8}C_{3}=56$(개)

${}_{n}H_{r}={}_{n+r-1}C_{r}$

2nd 이제 순서쌍 $(a, b\ c)$의 개수를 구하자.

이때 a, b, c는 각각 음의 정수와 양의 정수의 값을 가질 수 있으므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수의 2^3배와 같다.

$|a|$, $|b|$, $|c|$는 각각 $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$로 두 가지씩이므로 $2\times2\times2=2^3$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$56\times8=448$(개)

04 답 ②

x의 값을 기준으로 경우를 나누자.

(i) $x=0$일 때,

$y+z=7$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_{2}H_{7}={}_{2+7-1}C_{7}={}_{8}C_{7}={}_{8}C_{1}=8$(개)

(ii) $x=1$일 때,

$y+z=6$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_{2}H_{6}={}_{2+6-1}C_{6}={}_{7}C_{6}={}_{7}C_{1}=7$(개)

(iii) $x=2$일 때,

$y+z=3$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$(개)

(iv) $x=3$ 이상일 때에는 만족하는 해가 없다.

(i)~(iv)에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$8+7+4=19$(개)

05 답 ④

$(a+b+c)^{10}$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 문자 3개를 중복을 허락하여 10번 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=\frac{12\times 11}{2\times 1}=66$(개)

06 답 12

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{4, 5, 6, 7\}$로의 함수 f 중 다음 조건을 만족하는 함수의 개수를 구하시오.

(가) $f(2)=5$

(나) 집합 X의 임의의 두 원소 i, j에 대하여

$i<j$이면 $f(i)\le f(j)$

공역의 원소 중 중복을 허락하고 순서에 관계없이 고른 후 작거나 같은 것부터 차례로 정의역의 원소에 대응시키면 되므로 중복조합의 수를 생각하자.

1st $f(1)$이 가능한 경우의 수를 구하자.

조건 (가), (나)에서 가능한 $f(1)$의 값은

$f(1)=4$ 또는 $f(1)=5$로 2가지이다.

2nd 정의역의 원소 3, 4가 대응될 수 있는 함수의 개수를 구하자.

한편, 공역 5, 6, 7 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택한 후, 작은 것부터 차례로 정렬하여 차례로 $f(3)$과 $f(4)$에 대응시키면 조건을 만족하는 함수가 된다.

즉, 구하는 경우의 수는 ${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$(가지)

조건 (나)를 만족하는 함수의 개수는 중복조합의 수를 이용해.

따라서 함수 f의 개수는 $2\times 6=12$(개)

07 답 ②

조건 (가)에 의해

정의역 X에서 짝수 2개의 함숫값으로 공역 X의 원소 5개 중 2개의 원소를 선택하고 작은 수부터 차례로 $f(2), f(4)$에 대응시키면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$(가지)

조건 (나)에 의해

정의역 X에서 홀수 3개의 함숫값으로 공역 X의 원소 5개 중에서 중복을 허락하여 3개의 원소를 선택하고 작은 수부터 차례로 $f(1), f(3), f(5)$에 대응시키면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_5H_3={}_{5+3-1}H_3={}_7H_3=35$(가지)

따라서 구하는 함수의 개수는 $10\times 35=350$(개)

08 답 ②

$a_1\le a_2\le a_3\le a_4$를 만족시키는 경우의 수는 주사위의 눈 6개 중에 중복을 허락하여 4개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6H_4={}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=126$(가지)

이 중에서 조건을 만족하지 않는 $a_1=a_2\le a_3\le a_4$인 경우의 수를 빼자.

즉, 주사위의 눈 6개 중에 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수이므로

${}_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=56$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $126-56=70$(가지)

09 답 ②

$(x+y)^{10}$의 전개식의 일반항은 ${}_{10}C_r x^{10-r}y^r$

$10-r=6$에서 $r=4$

$\therefore a={}_{10}C_4=210$

한편, $\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s(3x^2)^{4-s}\left(-\frac{1}{x}\right)^s={}_4C_s3^{4-s}x^{8-2s}(-1)^s\left(\frac{1}{x}\right)^s$

$={}_4C_s3^{4-s}\cdot(-1)^s\cdot x^{8-3s}$

$8-3s=2$에서 $s=2$

$\therefore b={}_4C_2 3^2\cdot(-1)^2=6\times 9=54$

$\therefore a+b=210+54=264$

10 답 ③

$\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x^5}\right)^r={}_nC_r x^{2n-7r}$ ⋯ ㉠

상수항은 $2n-7r=0$, 즉 $n=\frac{7}{2}r$에서 자연수 n의 최솟값은

$r=2$일 때 $n=7$

㉠에 $r=2$, $n=7$을 대입하면

$a={}_7C_2=21$

$\therefore n+a=7+21=28$

11 답 ③

$(x^2+3)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_r(x^2)^{4-r}\cdot 3^r={}_4C_r 3^r\cdot x^{8-2r}$이고,

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$이므로

$(x^2+3)^4(x+a)^2$의 전개식에서 x^3이 나오는 경우는

$(x^2+3)^4$에서 x^2항과 $(x+a)^2$에서 x항의 곱일 때뿐이다.

$(x^2+3)^4$에서 x^2의 계수는 $r=3$일 때이므로 ${}_4C_3\cdot 3^3=108$,

$(x+a)^2$에서 x의 계수는 $2a$이므로

$(x^2+3)^4(x+a)^2$의 x^3의 계수는

$108\times 2a=216a=36$

$\therefore a=\frac{1}{6}$

12 답 ②

${}_{n}C_{r-1}+{}_{n}C_{r}={}_{n+1}C_{r}$ ⋯ ㉠임을 이용하자.

${}_{3}C_{0}+{}_{4}C_{1}+{}_{5}C_{2}+\cdots+{}_{20}C_{17}$

$=({}_{4}C_{0}+{}_{4}C_{1})+{}_{5}C_{2}+\cdots+{}_{20}C_{17}(\because {}_{n}C_{0}=1)$

$=({}_{5}C_{1}+{}_{5}C_{2})+{}_{6}C_{3}+\cdots+{}_{20}C_{17}(\because$ ㉠$)$

$\vdots$

$={}_{20}C_{16}+{}_{20}C_{17}$

$={}_{21}C_{17}(\because$ ㉠$)$

$={}_{21}C_{4}(\because {}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r})$

13 답 ①

파스칼의 삼각형의 성질에서 대각선 성분들의 합의 성질을 이용하자.

${}_{1}C_{1}+{}_{2}C_{1}+{}_{3}C_{1}+\cdots+{}_{10}C_{1}={}_{11}C_{2}$ $(\because {}_{n}C_{r-1}+{}_{n}C_{r}={}_{n+1}C_{r})$에서

$1+2+({}_{3}C_{1}+\cdots+{}_{10}C_{1})=55$

$\therefore {}_{3}C_{1}+\cdots+{}_{10}C_{1}=55-3=52$

한편,

${}_{2}C_{2}+{}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{2}={}_{11}C_{3}$에서

$1+({}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{2})=165$이므로

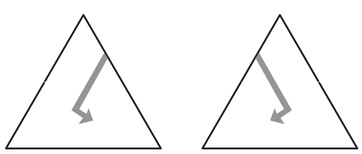
${}_{3}C_{2}+{}_{4}C_{2}+\cdots+{}_{10}C_{2}=165-1=164$

따라서 평행사변형 내부에 있는 숫자들의 합은

$52+164=216$

TIP

파스칼의 삼각형에서 대각선으로 숫자들을 더하면, 마지막으로 더해진 항의 다음 줄에서 쉽게 그 합을 찾을 수 있다.



14 답 ⑤

ㄱ. ${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}$이므로

$n=9$를 대입하면

${}_{9}C_{0}+{}_{9}C_{1}+{}_{9}C_{2}+\cdots+{}_{9}C_{9}=2^{9}$ (참)

ㄴ. ${}_{n}C_{0}-{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}-\cdots+(-1)^{n}{}_{n}C_{n}=0$ ⋯ ㉠

이므로 $n=5$를 대입하면

${}_{5}C_{0}-{}_{5}C_{1}+{}_{5}C_{2}-{}_{5}C_{3}+{}_{5}C_{4}-{}_{5}C_{5}=0$

$\therefore {}_{5}C_{0}+{}_{5}C_{2}+{}_{5}C_{4}={}_{5}C_{1}+{}_{5}C_{3}+{}_{5}C_{5}$ (참)

ㄷ. ㉠에 $n=7$을 대입하면

${}_{7}C_{0}-{}_{7}C_{1}+{}_{7}C_{2}-{}_{7}C_{3}+{}_{7}C_{4}-{}_{7}C_{5}+{}_{7}C_{6}-{}_{7}C_{7}=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

심플 정리

[이항계수의 성질]

(1) ${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}$

(2) ${}_{n}C_{0}-{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}-\cdots+(-1)^{n}{}_{n}C_{n}=0$

(3) ${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{4}+\cdots={}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{3}+{}_{n}C_{5}+\cdots=2^{n-1}$

15 답 ③

(ⅰ) 원소가 0개인 부분집합의 개수 : 집합 X의 원소에서 0개를 택하는 조합이므로 ${}_{7}C_{0}$

(ⅱ) 원소가 2개인 부분집합의 개수 : 집합 X의 원소에서 2개를 택하는 조합이므로 ${}_{7}C_{2}$

(ⅲ) 원소가 4개인 부분집합의 개수 : 집합 X의 원소에서 4개를 택하는 조합이므로 ${}_{7}C_{4}$

(ⅳ) 원소가 6개인 부분집합의 개수 : 집합 X의 원소에서 6개를 택하는 조합이므로 ${}_{7}C_{6}$

즉, 원소의 개수가 짝수인 부분집합의 개수는

${}_{7}C_{0}+{}_{7}C_{2}+{}_{7}C_{4}+{}_{7}C_{6}=2^{7-1}=2^{6}=64$(개)

16 답 9

$11^{n}=(1+10)^{n}$이므로

$(1+x)^{n}={}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}x+{}_{n}C_{2}x^{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}x^{n}$에 $n=10$을 대입하면

$11^{n}={}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}\cdot 10+{}_{n}C_{2}\cdot 10^{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}\cdot 10^{n}$ ⋯ Ⅰ

이때, ${}_{n}C_{2}\cdot 10^{2}$, ${}_{n}C_{3}\cdot 10^{3}$, ⋯, ${}_{n}C_{n}\cdot 10^{n}$은 모두 100으로 나누어떨어지므로 11^{n}을 100으로 나누었을 때의 나머지는

${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}\cdot 10=1+10n$이다.

이것을 100으로 나누었을 때의 몫을 q라 하면 나머지는 21이므로

$1+10n=100q+21$ $(q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$10n=100q+20$ ⋯ Ⅱ

$\therefore n=10q+2$

이때, n은 두 자리의 정수이므로 12, 22, 32, ⋯, 92 중 하나이다.

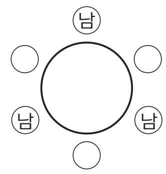
따라서 구하는 정수의 개수는 9이다. ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$11^{n}=(1+10)^{n}$의 꼴로 변형하여 이항정리를 이용한다.	30%
Ⅱ	나머지를 구하는 식을 세운다.	40%
Ⅲ	두 자리의 정수 n의 개수를 구한다.	30%

Ⅰ 대단원 TEST [A~D] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 32~35

01 답 ②



먼저 남학생 3명이 원탁에 앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$(가지)

여학생 3명이 그 나머지 자리에 앉는 방법의 수는 $3!=6$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times2=12$(가지)

02 답 ④

1학년 2명, 2학년 2명, 3학년 3명이 모두 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 1학년 2명은 이웃하고, 2학년 2명은 이웃하지 않도록 의자에 앉게 하는 방법의 수는?
이웃할 때는 한 묶음으로 생각하고, 이웃하지 않을 때는 빈 공간을 만들어 놓고 생각해.

① 108 ② 120 ③ 132
④ 144 ⑤ 156

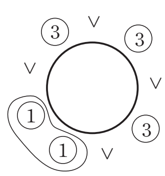
1st 먼저 이웃하는 1학년 학생들을 한 사람으로 생각하고, 3학년 학생과 함께 원순열로 자리에 앉히는 방법의 수를 구하자.

1학년 학생을 한 명으로 보면 3학년 학생이 3명이므로 총 4명을 원순열로 앉히는 방법의 수야.

1학년 2명을 한 사람으로 생각하고 3학년 3명과 같이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!=6$(가지)이고, 그 각각의 경우에 대하여 1학년 2명이 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2!$가지이다.
n명이 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $n!$(가지)이야.

즉, 이웃하는 1학년 2명과 3학년 3명이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는 $6\times2!=12$(가지)이다.

2nd 2학년끼리 이웃하지 않으려면 3학년과 1학년 묶음 사이에 앉으면 돼.



또, 2학년 2명이 이웃하지 않도록 앉으려면 그림과 같이 ∨표시가 된 4곳 중에서 2곳을 택하여 앉으면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4P_2=4\times3=12$(가지)이다.
순서를 생각하여 나열하므로 순열을 이용한 거야.

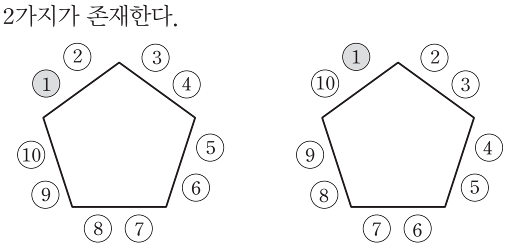
따라서 구하는 경우의 수는

$12\times12=144$(가지)

03 답 ②

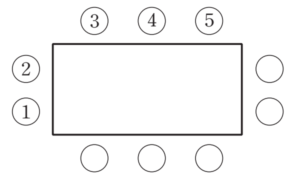
10명을 원형으로 배열하는 방법의 수는 $(10-1)!=9!$(가지)

이때, 정오각형 모양의 탁자에서 다음 그림과 같이 서로 다른 경우는 2가지가 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는 $9!\times2$(가지)

04 답 ②



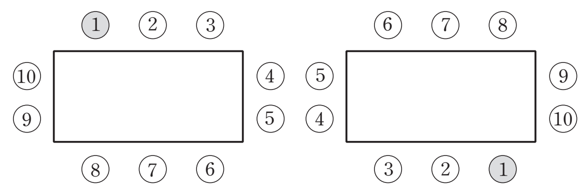
탁자의 모양이 직사각형이므로 회전하여 일치하지 않는 경우는 5가지가 나온다. 즉, 기준이 되는 학생이 그림에서 ①~⑤의 좌석에 앉으면 모두 다른 경우이므로 구하는 방법의 수는

$(10-1)!\times5=9!\times5$(가지)

다른 풀이

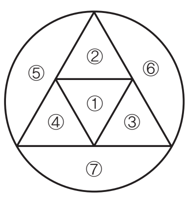
10명을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $10!$가지이다.

그런데 직사각형 모양의 탁자에는 2가지의 똑같은 경우가 생기므로



$\dfrac{10!}{2!}=9!\times5$(가지)

05 답 ⑤



7개의 색 중 ①에 색을 칠하는 방법의 수는 7이다.

①에 칠한 색을 제외한 6개의 색 중 3개의 색을 택하는 방법의 수는 ${}_6C_3$(가지)

이 세 가지의 색을 ②, ③, ④에 칠하는 방법의 수는 원순열의 수이므로 $2!$(가지)이다.

즉, ①, ②, ③, ④에 칠하는 방법의 수는

$7\times{}_6C_3\times2!$(가지)

이 각각에 대하여 ⑤, ⑥, ⑦에 색을 칠하는 방법의 수는 순열의 수이므로 $3!$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$7\times{}_6C_3\times2!\times3!=\dfrac{7!}{3}$(가지)

06 답 ③

빨간색이 칠해지는 곳을 기준으로 하여 그 맞은편에 파란색을 칠하는 방법은 한 가지이다.

나머지 서로 다른 4가지의 색으로 4개의 날개를 칠하는 경우의 수 $4!$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $1!\times4!=24$(가지)

07 답 ③

서로 다른 n가지의 색으로 반구의 n등분한 면을 칠하는 방법의 수가 120가지이므로

$(n-1)!=120$

$120=5!$이므로 $n-1=5$ $\therefore n=6$

08 답 ③

4개의 정거장 중에서 승객이 내릴 정거장 3개를 중복을 허락하여 택하는 중복순열의 수이므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$(가지)

09 답 ③

한 개의 전구로 만들 수 있는 신호는 2가지이므로 네 개의 전구로 만들 수 있는 신호는 $2^5=32$(가지)

이때 모두 꺼진 것은 신호에서 제외하므로 만들 수 있는 최대의 신호의 개수는

$32-1=31$(가지)

10 답 ③

네 자리의 자연수가 5의 배수이려면 일의 자리의 수는 5이어야 한다. 나머지 세 자리는 1부터 5까지 모두 들어갈 수 있으므로 다른 5개 중에 중복을 허락하여 3개를 선택하여 나열하는 경우의 수를 구하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

11 답 ④

다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 만들 수 있는 자연수를 크기가 작은 것부터 나열할 때, 2300은 몇 번째 수인가?

한 자리, 두 자리, 세 자리로 된 수를 구한 후 천의 자릿수에 1 또는 2가 오는 네 자리 수를 생각하자.

① 310 ② 315 ③ 320
④ 325 ⑤ 330

1st 한 자리, 두 자리, 세 자리의 수의 개수를 구해보자.

한 자리의 수는 1, 2, 3, 4의 4개

두 자리의 수는

$4\times{}_5\Pi_1=4\times5=20$(개)

십의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 0을 제외한 4개, 일의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 5개야.

세 자리의 수는

$4\times{}_5\Pi_2=4\times5^2=100$(개)

백의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 0을 제외한 4개, 십의 자리와 일의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 각각 5개야.

2nd 네 자리의 수 중 천의 자리의 수가 1과 2인 경우를 나누어서 2300보다 작은 자연수의 개수를 구하자.

네 자리의 수 중 천의 자리의 수가 1인 네 자리의 자연수는

${}_5\Pi_3=125$(개)

네 자리의 수 중 천의 자리의 수가 2, 백의 자리의 수가 0 또는 1 또는 2인 자연수는

$3\times{}_5\Pi_2=75$(개)

백의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 3보다 작은 정수인 3개, 십의 자리와 일의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 각각 5개야.

즉, 2300보다 작은 수의 개수는

$4+20+100+125+75=324$(개)

따라서 2300은 325번째 수이다.

12 답 136

조건 (가)에 의해 $f(3)$의 값은 2, 4, 6 중 하나이다.

(i) $f(3)=2$인 경우

공역 X의 원소 1을 $f(1)$, $f(2)$로 대응시키고,

공역 X의 원소 3, 4, 5, 6을 중복을 허락하여 각각 하나씩 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$으로 대응시키면 된다.

즉, 함수의 개수는

${}_1\Pi_2\times{}_4\Pi_3=4^3=64$(개)

(ii) $f(3)=4$인 경우

공역 X의 원소 1, 2, 3을 $f(1)$, $f(2)$로 대응시키고,

공역 X의 원소 5, 6을 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$으로 중복을 허락하여 각각 하나씩 대응시키면 된다.

즉, 함수의 개수는

${}_3\Pi_2\times{}_2\Pi_3=3^2\times2^3=72$(개)

(iii) $f(3)=6$인 경우, 조건 (다)를 만족하는 함수는 없다.

따라서 구하는 모든 함수의 개수는 $64+72=136$(개)이다.

13 답 ②

parallel에 있는 8개의 문자를 일렬로 나열할 때, 모음끼리 이웃하도록 나열하는 방법의 수는?

모음 a, a, e를 한 묶음으로 생각하여 나열해 보자. 이때, 모음끼리 자리 바꾸는 경우를 놓치지 말자.

① 352 ② 360 ③ 368
④ 376 ⑤ 382

1st aae를 한 문자로 생각하고 일렬로 나열하는 방법의 수를 구하자.

3개의 모음을 한 묶음으로 생각해야 해.

parallel의 모음은 a, a, e이므로 이 3개의 모음을 한 문자 □로 생각하면 □, p, r, l, l, l의 6개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수는

[같은 것이 있는 순열]
n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 모두 일렬로 나열하는 순열의 수는
$\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

$\dfrac{6!}{3!}=120$(가지)

2nd 모음끼리 자리를 바꾸는 방법의 수를 구하자.

이때, a, a, e를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$120\times3=360$(가지)

14 답 ②

양 끝에 노란색 깃발을 놓으면 가운데 7개의 자리에는 노란색 깃발 2개, 빨간색 깃발 5개를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 방법의 수는

$\dfrac{7!}{2!5!}=7\times3=21$(가지)

15 답 6

다음 조건을 만족시키는 네 자연수 a, b, c, d로 이루어진 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c+d=6$ 네 개의 자연수의 합이 6이 되는 경우를 따져보자.

(나) $a \times b \times c \times d$는 4의 배수이다. a, b, c, d 중 하나 이상이 4의 배수를 포함하던가 두 개 이상이 2의 배수라는 거야.

1st 조건 (가)를 만족하는 경우의 수를 구하자.

네 자연수의 합이 6인 경우는 $1+1+1+3$ 또는 $1+1+2+2$의 두 가지가 있다.

2nd 조건 (가)를 만족하는 경우 중 조건 (나)를 만족하는 경우를 찾아 순서쌍의 개수를 구하자.

(i) 네 자연수가 1, 1, 1, 3인 경우

이 자연수들의 곱은 $1 \times 1 \times 1 \times 3=3$으로 4의 배수가 아니므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) 네 자연수가 1, 1, 2, 2인 경우

이 자연수들의 곱은 $1 \times 1 \times 2 \times 2=4$로 4의 배수이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 가능한 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 1, 1, 2, 2로 만들 수 있는 순서쌍의 개수이므로 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$(개)

16 답 ③

s, u를 □, □로 놓고 □, t, □, d, e, n, t의 문자 7개를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 □는 s로, 두 번째 □는 u로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 □와 t를 각각 2개씩 포함한 7문자를 나열하는 개수이므로 $\dfrac{7!}{2!2!}=1260$(개)

17 답 ⑤

A → P인 최단거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$(가지)

P → B인 최단거리로 가는 경우의 수는

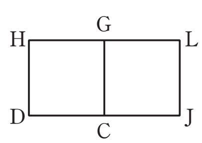
$\dfrac{4!}{3!1!}=4$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는 $6 \times 4=24$(가지)

18 답 ②

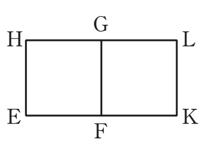
꼭짓점 A와 이웃한 꼭짓점 중 B가 아닌 것은 꼭짓점 D, E이다.

(i) A → D → L로 가는 경우의 수



$1 \times \dfrac{3!}{2!}=3$(가지)

(ii) A → E → L로 가는 경우의 수



$1 \times \dfrac{3!}{2!}=3$(가지)

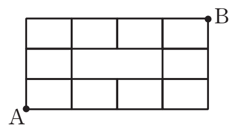
따라서 구하는 방법의 수는

$3+3=6$(가지)

19 답 ②

오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 방법의 수는?

도로가 끊긴 곳에 임시로 길을 연결하여 전체 방법의 수에서 임시로 연결한 길을 지나는 방법의 수를 빼자.

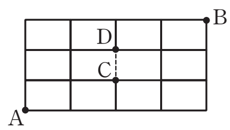


① 23 ② 26 ③ 29

④ 32 ⑤ 35

1st 끊긴 곳을 임시로 연결시켜 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 방법의 수를 구하자.

그림과 같이 주어진 도로에서 끊긴 도로의 양 끝점을 C, D라 하고 이 도로를 연결하자.



A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{7!}{4!3!}=35$(가지)

2nd 임시로 연결한 도로를 반드시 지나는 방법의 수를 구하고 전체 경우의 수에서 빼자.

A → C → D → B인 경우

$\dfrac{3!}{2!1!} \times 1 \times \dfrac{3!}{2!1!}=9$(가지)

A → C인 경우의 수 : $\dfrac{3!}{2!1!}$

C → D인 경우의 수 : 1

D → B인 경우의 수 : $\dfrac{3!}{2!1!}$

따라서 구하는 최단거리로 가는 방법의 수는

$35-9=26$(가지)

20 답 ④

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\dfrac{8 \times 7}{2}=28$,

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=\dfrac{5 \times 4}{2}=10$이므로

${}_3H_6+{}_4H_2=28+10=38$

21 답 ②

세 명의 후보 중 한 사람씩 선택한 투표용지가 12장 나올 수 있는 경우의 수는 서로 다른 3개 중에 중복을 허락하여 12개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{12}={}_{3+12-1}C_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=\dfrac{14 \times 13}{2}=91$(가지)

다른 풀이

3명의 회장 후보가 각각 얻는 표의 수를 a, b, c라 하면 구하는 경우의 수는 방정식 $a+b+c=12$의 음이 아닌 정수해 (a, b, c)의 개수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3H_{12}={}_{3+12-1}C_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=\dfrac{14 \times 13}{2}=91$(가지)

심플(고등확통)해006-031_ok.indd 29 18. 9. 4. 오후 1:54

22 답 ③

바구니에 빨간 장미 2송이, 분홍 장미 3송이, 흰 장미 4송이가 들어 있다. 이 9송이 장미를 세 명에게 나누어 주는 방법의 수는? (단, 같은 색의 장미꽃은 구별되지 않으며, 장미꽃을 받지 못한 학생이 있어도 된다.) 색깔별로 학생들에게 장미꽃을 나누어 주는 방법의 수를 구하면 돼.

① 810 ② 840 ③ 900 ④ 980 ⑤ 1080

1st 색깔별로 장미꽃을 나누어 주는 방법의 수를 구하자.

빨간 장미 2송이를 3명에게 나누어 주는 방법의 수는 세 명 중에서 중복을 허락하여 빨간 장미를 받을 2명을 택하는 중복조합의 수와 같다.

[중복조합] 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수 ⇨ ${}_{n}H_{r}={}_{n+r-1}C_{r}$

$\therefore\ {}_{3}H_{2}={}_{3+2-1}C_{2}={}_{4}C_{2}=6$(가지)

마찬가지 방법으로 분홍 장미 3송이를 3명에게 나누어 주는 방법의 수는

${}_{3}H_{3}={}_{3+3-1}C_{3}={}_{5}C_{3}=10$(가지)

같은 방법으로 흰 장미 4송이를 3명에게 나누어 주는 방법의 수는

${}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$(가지)

2nd 구한 각각의 방법의 수의 곱을 구하자.

따라서 구하는 방법의 수는

$6\times10\times15=900$(가지)

23 답 36

$x=2l$, $y=2m$, $z=2n$ (단, l, m, n은 자연수)라 하면

$2l+2m+2n=20$에서 $l+m+n=10$

이때, $l=l'+1$, $m=m'+1$, $n=n'+1$으로 놓으면

$l+m+n=10$을 만족시키는 양의 정수해의 개수는

$l'+m'+n'=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_{3}H_{7}={}_{3+7-1}C_{7}={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=36$

24 답 ②

x, y, z가 -4보다 큰 정수이므로

$x\ge-3$, $y\ge-3$, $z\ge-3$

$x'=x+3$, $y'=y+3$, $z'=z+3$으로 놓으면

$x'\ge0$, $y'\ge0$, $z'\ge0$

$x+y+z=1$을 만족시키는 -4보다 큰 정수해의 개수는

$x'+y'+z'=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

$\therefore\ {}_{3}H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_{2}=66$

TIP

x, y, z가 -4보다 큰 정수이므로 $x>-4$, $y>-4$, $z>-4$로 놓을 수 있지만 정수라는 조건에 의해 $x\ge-3$, $y\ge-3$, $z\ge-3$으로 놓을 수 있다. 만약 x, y, z가 유리수라면 이렇게 놓을 수 없다는 것에 유의하자.

25 답 ④

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$와 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\longrightarrow Y$의 개수는?

(가) $f(1)+f(2)=6$

(나) 집합 X의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$

조건 (가)를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값을 생각해보자.
조건 (나)에서 중복조합의 수를 이용하자.

① 4 ② 9 ③ 14 ④ 19 ⑤ 24

1st 집합 Y에서 조건 (가)와 (나)를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값을 모두 찾아보자.

집합 Y의 원소인 1부터 6까지의 자연수 중에서 조건 (가)에서 $f(1)+f(2)=6$이고, 조건 (나)에서 $f(1)\le f(2)$이므로 두 조건을 만족시키는 경우는 $f(1)=1$, $f(2)=5$ 또는 $f(1)=2$, $f(2)=4$ 또는 $f(1)=f(2)=3$의 세 가지뿐이다.

2nd 각각의 경우의 수를 구하자.

(i) $f(1)=1$, $f(2)=5$인 경우

조건 (나)에서 $f(2)=5\le f(3)\le f(4)$이므로 $f(3)$과 $f(4)$의 값을 결정하는 방법의 수는 5, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

공역의 원소 5, 6 중에서 중복을 허락하여 두 개의 수를 고르면 작거나 같은 순서로 $f(3)$, $f(4)$에 대응시키면 돼.

${}_{2}H_{2}={}_{2+2-1}C_{2}={}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$(가지)

(ii) $f(1)=2$, $f(2)=4$인 경우

$f(2)=4\le f(3)\le f(4)$이므로 $f(3)$과 $f(4)$의 값을 결정하는 방법의 수는 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{2}={}_{3+2-1}C_{2}={}_{4}C_{2}=6$(가지)

(iii) $f(1)=3$, $f(2)=3$인 경우

$3\le f(3)\le f(4)$이므로 $f(3)$과 $f(4)$의 값을 결정하는 방법의 수는 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}H_{2}={}_{4+2-1}C_{2}={}_{5}C_{2}=10$(가지)

(i), (ii), (iii)에 의해 구하는 함수의 개수는

$3+6+10=19$(개)

26 답 ⑤

$\left(x+\dfrac{1}{x^{n}}\right)^{10}$의 전개식의 일반항을 구하면

${}_{10}C_{r}x^{10-r}(x^{-n})^{r}={}_{10}C_{r}x^{10-(n+1)r}$ $(0\le r\le10)$

전개식에서 상수항, 즉

$10-(n+1)r=0$ ⇨ $(n+1)r=10$을 만족시키는 순서쌍 (n, r)는 $(1, 5)$, $(4, 2)$, $(9, 1)$이다.

따라서 자연수 n의 값들의 합은 $9+4+1=14$이다.

27 답 ②

$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^2의 계수는?

각각의 $(1+x)^n$의 전개식에서 x^2의 계수의 합을 구하면 되겠지?

① 150　② 165　③ 180
④ 195　⑤ 210

1st 먼저 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항을 이용해서 x^2의 계수부터 구하자.

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$이므로

$(a+b)^n$의 전개식의 일반항 : ${}_nC_r a^{n-r}b^r$

$(1+x)$, $(1+x)^2$, $(1+x)^3$, $\cdots$, $(1+x)^{10}$

각각의 식에서 x^2항의 계수를 구하면

0, ${}_2C_2$, ${}_3C_2$, ${}_4C_2$, $\cdots$, ${}_{10}C_2$

2nd 파스칼의 삼각형을 이용하여 이항계수의 합을 구하자.

주어진 식의 x^2의 계수는 ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

파스칼의 삼각형의 성질에 의해

$${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2={}_{11}C_3=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$$

$$\begin{array}{c}
{}_1C_0\ {}_1C_1\\
{}_2C_0\ {}_2C_1\ {}_2C_2\\
{}_3C_0\ {}_3C_1\ {}_3C_2\ {}_3C_3\\
{}_4C_0\ {}_4C_1\ {}_4C_2\ {}_4C_3\ {}_4C_4\\
\vdots\quad\vdots\quad\quad\ddots\\
{}_{10}C_0\ {}_{10}C_1\ {}_{10}C_2\ \cdots\ {}_{10}C_{10}\\
{}_{11}C_0\ {}_{11}C_1\ {}_{11}C_2\ {}_{11}C_3\ \cdots\ {}_{11}C_{11}
\end{array}$$

28 답 102

$(1-x)^4(2-x)^3$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(-x)^r\cdot{}_3C_s2^{3-s}\cdot(-x)^s={}_4C_r\cdot{}_3C_s2^{3-s}\cdot(-x)^{r+s}$

x^2의 계수는 $r+s=2$

(i) $r=0$, $s=2$일 때,
　x^2의 계수는 ${}_4C_0\cdot{}_3C_2\cdot2=6$

(ii) $r=1$, $s=1$일 때,
　x^2의 계수는 ${}_4C_1\cdot{}_3C_1\cdot2^2=48$

(iii) $r=2$, $s=0$일 때,
　x^2의 계수는 ${}_4C_2\cdot{}_3C_0\cdot2^3=48$

(i)~(iii)에서 구하는 x^2의 계수는 $48+48+6=102$

29 답 ⑤

${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$이므로

${}_4H_0+{}_4H_1+{}_4H_2+{}_4H_3+\cdots+{}_4H_{10}$

$={}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{13}C_{10}$

$=({}_4C_0+{}_4C_1)+{}_5C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{13}C_{10}$ ($\because {}_nC_0=1$)

$=({}_5C_1+{}_5C_2)+{}_6C_3+\cdots+{}_{13}C_{10}$

$=({}_6C_2+{}_6C_3)+\cdots+{}_{13}C_{10}$

$\vdots$

$={}_{13}C_9+{}_{13}C_{10}$

$={}_{14}C_{10}={}_{14}C_4$ ($\because {}_nC_r={}_nC_{n-r}$)

30 답 ④

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$에서 $n=6$, $x=2$를 대입하면

${}_6C_0+2\cdot{}_6C_1+2^2\cdot{}_6C_2+\cdots+2^6\cdot{}_6C_6=(1+2)^6=3^6$

$\therefore n=6$

31 답 30

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$에서 4개의 카드를 택하는 경우는

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ / $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$ / $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$

의 세 가지이다. … Ⅰ

(i) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$으로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수

　$\frac{4!}{2!}=12$(개)

(ii) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$으로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수

　$\frac{4!}{2!}=12$(개)

(ii) $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$으로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수

　$\frac{4!}{2!2!}=6$(개) … Ⅱ

따라서 구하는 자연수의 개수는

$12+12+6=30$(개) … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	1, 2, 2, 3, 3에서 4개의 숫자를 택하는 경우를 구한다.	30%
Ⅱ	각 경우의 수를 구한다.	60%
Ⅲ	구하는 자연수의 개수를 구한다.	10%

32 답 84

$(x+y+z)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 세 문자 x, y, z에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 경우의 수와 같으므로 서로 다른 항의 개수는

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$(개) … Ⅰ

한편, $(a+b)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 두 문자 a, b에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수와 같으므로 서로 다른 항의 개수는

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$(개) … Ⅱ

따라서 주어진 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$21\times4=84$(개) … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$(x+y+z)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구한다.	40%
Ⅱ	$(a+b)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구한다.	40%
Ⅲ	주어진 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구한다.	20%

심플(고등확통)해006-031_ok.indd 31　18. 9. 4. 오후 1:54

Ⅱ 확률

Simple E 확률의 뜻과 활용

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 38~39

01 답 시행

02 답 합사건, $A\cup B$

03 답 곱사건, $A\cap B$

04 답 여사건, A^C

05 답 ×

사건 A와 사건 B가 서로 배반사건이면, $A\cap B=\varnothing$이다.

06 답 ○

두 사건 A, A^C은 항상 $A\cap A^C=\varnothing$이므로 배반사건이다.

07 답 ×

임의의 사건 A에 대하여 $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$이다.

08 답 ○

이 주사위를 100번 반복하여 던져서 1의 눈이 15번 나왔으므로

1의 눈이 나올 확률은 $\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$이다.

09 답 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

10 답 $\{1, 3, 5\}$

11 답 $\{2, 4, 6\}$

12 답 $\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

13 답 $\{2, 10\}$

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$이므로

$A\cap B=\{2, 10\}$

14 답 $A\cap B=\{2, 3\}$, 배반사건이 아니다.

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$에서 $A\cap B=\{2, 3\}\neq\varnothing$이므로 배반사건이 아니다.

15 답 $\{4, 5\}$

$A=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $A^C=\{4, 5\}$

16 답 $\{1, 4, 6\}$

$B=\{2, 3, 5\}$이므로 $B^C=\{1, 4, 6\}$

17 답 $\frac{2}{3}$

표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고,

4 이하의 눈의 수가 나오는 사건을 A라 하면

$A=\{1, 2, 3, 4\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

18 답 $\frac{2}{3}$

표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고,

2의 배수의 눈의 수가 나오는 사건을 A,

3의 배수의 눈의 수가 나오는 사건을 B라 하면

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{3, 6\}$이므로

$A\cup B=\{2, 3, 4, 6\}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

19 답 $\frac{1}{3}$

표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고,

6의 약수의 눈의 수가 나오는 사건을 A,

3 이상의 눈의 수가 나오는 사건을 B라 하면

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$이므로

$A\cap B=\{3, 6\}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

20 답 $\frac{1}{4}$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 표본공간은

$S=\{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{H}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{H}), (\mathrm{T}, \mathrm{T})\}$이고,

모두 앞면이 나오는 사건을 A라 하면

$A=\{(\mathrm{H}, \mathrm{H})\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{4}$

21 답 $\frac{1}{2}$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 표본공간은

$S=\{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{H}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{H}), (\mathrm{T}, \mathrm{T})\}$이고,

서로 다른 면이 나오는 사건을 A라 하면

$A=\{(\mathrm{H}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{H})\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

22 답 $\frac{7}{15}$

600명 중 280명이 A사 휴대폰을 사용하고 있으므로 구하는 확률은 $\frac{280}{600}=\frac{7}{15}$

23 답 $\frac{23}{30}$

B사 휴대폰을 사용할 확률은 $\frac{140}{600}=\frac{7}{30}$이므로 여사건의 확률은 $1-\frac{7}{30}=\frac{23}{30}$

유형 연습 [+내신 유형]

문제편 pp. 40~45

24 답 ④

2의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 2 또는 3의 배수의 눈이 나오는 사건은 $A\cup B$이다.
$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{3, 6\}$이므로 $A\cup B=\{2, 3, 4, 6\}$
따라서 사건 $A\cup B$의 근원사건의 개수는 4이다.

25 답 ②

짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 8의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 짝수이면서 8의 약수가 적혀 있는 공이 나오는 사건은 $A\cap B$이다.
$A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 $A\cap B=\{2, 4, 8\}$
따라서 사건 $A\cap B$의 근원사건의 개수는 3이다.

26 답 ⑤

서로 다른 세 개의 동전을 한 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는 $2\times2\times2=8$(가지)이다.
이 중에서 모두 뒷면이 나오는 경우는 (뒤, 뒤, 뒤)로 1가지이다.
따라서 적어도 하나의 동전에서 앞면이 나오는 근원사건의 개수는
$8-1=7$(가지)

TIP
구해야 하는 사건보다 여사건을 구하는 게 더 간단할 때는
$n(A)=n(S)-n(A^C)$
임을 이용하자.

27 답 ③

서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)이다.
이 중에서 두 눈의 수의 합이 10보다 큰 경우는 (5, 6), (6, 5), (6, 6)의 3가지이다.
따라서 두 눈의 수의 합이 10 이하인 근원사건의 개수는
$36-3=33$(개)이다.

28 답 ②

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 홀수의 눈이 나오는 사건 $A=\{1, 3, 5\}$, 3의 배수의 눈이 나오는 사건 $B=\{3, 6\}$, 제곱수의 눈이 나오는 사건 $C=\{1, 4\}$이다.
ㄱ. $A\cap B=\{3\}$이므로 사건 A와 B는 배반사건이 아니다.
ㄴ. $B\cap C=\varnothing$이므로 사건 B와 C는 서로 배반사건이다.
ㄷ. $A\cap C=\{1\}$이므로 사건 A와 C는 배반사건이 아니다.
따라서 서로 배반인 사건은 ㄴ뿐이다.

29 답 ④

전체 공의 개수는 $n+12$이고, 흰 공의 개수가 n이므로 흰 공이 나올 확률은
$\frac{n}{n+12}=\frac{2}{5}$
$5n=2n+24$
$3n=24$
$\therefore n=8$

30 답 ④

집합 A의 부분집합의 개수는 $2^3=8$(개)
원소 a가 포함되어 있는 부분집합의 개수는
$2^{3-1}=2^2=4$(개)
$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

31 답 ①

동전 한 개와 주사위 한 개를 던져서 나오는 모든 경우의 수는
$2\times6=12$(가지)
동전의 앞면을 H라고 하면 동전의 앞면과 주사위의 눈이 홀수가 나오는 경우는 (H, 1), (H, 3), (H, 5)의 3가지이다.
$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

32 답 ②

주사위 한 개를 두 번 던져 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$(가지)이다.
이때, $a>b$인 순서쌍 (a, b)는 다음과 같다.
(6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1),
(5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1),
(4, 3), (4, 2), (4, 1),
(3, 2), (3, 1),
(2, 1)
즉, $a>b$인 순서쌍 (a, b)의 개수는
$5+4+3+2+1=15$
$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

33 답 ⑤

3개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6\times6=216$(가지)
3개의 주사위가 모두 다른 눈의 수가 나오는 경우는 서로 다른 6개에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 것과 같으므로
${}_6P_3=6\times5\times4=120$(가지)이다.
$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{120}{216}=\dfrac{5}{9}$

34 답 ②

5개의 문자 a, b, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!$(가지)이다.
a, b를 하나의 문자 □로 보면 □, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우는 $4!$가지이고, 이때 a, b가 서로 자리를 바꾸는 경우는 2가지이므로 a, b가 이웃하는 경우는 $4!\times2$가지이다.
$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{4!\times2}{5!}=\dfrac{2}{5}$

35 답 $\dfrac{3}{10}$

5명의 주자의 순서를 정하는 경우의 수는 $5!$(가지)이다.
첫 번째 주자와 마지막 주자를 뽑는 방법의 수는 남학생 3명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수이므로 ${}_3P_2$이고, 나머지 3명의 주자를 나열하는 경우의 수는 $3!$이므로 첫 번째 주자와 마지막 주자가 모두 남학생인 경우의 수는 ${}_3P_2\times3!$(가지)이다.
$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{{}_3P_2\times3!}{5!}=\dfrac{3\times2\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1}=\dfrac{3}{10}$

36 답 ①

7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!$(가지)이다.
홀수가 적힌 카드가 서로 이웃하지 않으려면 그림과 같이 홀수가 적힌 4장의 카드 사이에 짝수가 적힌 3장의 카드가 놓이면 된다.

홀	짝	홀	짝	홀	짝	홀

홀수가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$(가지)이고, 짝수가 적혀 있는 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$(가지)이므로 홀수가 적힌 카드가 서로 이웃하지 않는 경우의 수는
$4!\times3!$(가지)이다.
$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{4!\times3!}{7!}=\dfrac{3\times2\times1}{7\times6\times5}=\dfrac{1}{35}$

37 답 ④

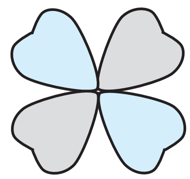
5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!$(가지)이다.
A, B를 하나로 보고 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!$(가지)이고, 이때, A, B가 자리를 바꾸는 경우는 2가지이므로 A, B가 이웃하게 앉는 경우의 수는 $3!\times2$(가지)이다.
$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{3!\times2}{4!}=\dfrac{1}{2}$

38 답 ①

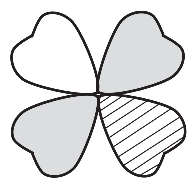
6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)!=5!$(가지)이다.
남학생 3명과 여학생 3명을 각각 하나로 보면, 서로 다른 2명이 원탁에 둘러앉는 경우는 한 가지이고, 남학생 3명과 여학생 3명이 각각 자리를 바꾸는 경우는 각각 $3!$가지이므로 남학생끼리 여학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는 $1\times3!\times3!$(가지)
$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{1\times3!\times3!}{5!}=\dfrac{3\times2\times1}{5\times4}=\dfrac{3}{10}$

39 답 $\dfrac{1}{4}$

(i) 두 가지 색의 잎으로 구성된 클로버의 개수
4가지 색 중에서 2개를 선택하면 되므로 ${}_4C_2=6$(개)



(ii) 세 가지 색의 잎으로 구성된 클로버의 개수
4가지 색 중에서 잎에 색칠된 3가지 색을 고르는 방법의 수는 ${}_4C_3$, 선택한 세 가지 색 중에서 다음과 같이 두 잎에 칠해진 색을 선택하는 방법의 수는 ${}_3C_1$이고, 남은 두 색은 각각 남은 한 잎씩 칠하면 되므로
${}_4C_3\times{}_3C_1=4\times3=12$(개)



(iii) 4가지 색의 잎으로 구성된 클로버의 개수
4가지 색을 원형으로 배열하는 경우는 원순열과 같으므로
$(4-1)!=3!=6$(개)
$\therefore$ (당첨될 확률)$=\dfrac{6}{6+12+6}=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$

40 답 ④

3명의 학생이 시킬 수 있는 세트 메뉴의 수는
${}_3\Pi_3=3^3=27$(가지)이고, 3명이 모두 같은 세트 메뉴 A 또는 B 또는 C를 시키는 경우의 수는 3이므로
(구하는 확률)$=\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$

41 답 ②

세 자리의 자연수를 만드는 모든 경우의 수는
${}_3\Pi_3=3^3=27$(가지)
각 자리의 숫자가 다른 경우의 수는 서로 다른 3개 중에서 3개를 뽑는 순열이므로 $3!=6$(가지)
$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$

42 답 ③

집합 X에서 집합 Y로의 모든 함수의 개수는 ${}_{2}\Pi_{4}=2^4=16$(가지)이고, 이 중에서 상수함수의 개수는 $f(x)=1$ 또는 $f(x)=2$인 경우이므로 2가지이다.

$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$

43 답 ④

여섯 개의 숫자 1, 2, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!2!}=60$(가지)

2, 2, 2를 □로 보면 1, □, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$(가지)

$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$

44 답 ②

흰 공 3개와 검은 공 3개를 일렬로 배열하는 모든 경우의 수는 $\dfrac{6!}{3!3!}=20$(가지)

흰 공 3개가 서로 이웃하는 경우의 수는 흰 공 3개를 하나로 보고 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{3!}=4$(가지)

$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$

45 답 ④

A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우는 주어진 도로망에서 오른쪽으로 4칸, 위로 4칸가면 되므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{4!4!}=70$(가지)

A 지점에서 C 지점을 거쳐 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{5!}{2!3!}=3\times10=30$(가지)

$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{30}{70}=\dfrac{3}{7}$

46 답 ①

주머니에 있는 6개의 바둑돌 중에서 2개의 바둑돌을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{6}C_{2}=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$(가지)

꺼낸 공이 모두 흰 바둑돌일 경우의 수는 ${}_{2}C_{2}=1$(가지)

$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{1}{15}$

47 답 ⑤

주머니에 있는 5개의 구슬 중에서 2개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{5}C_{2}=10$(가지)

노란 구슬 3개 중에서 1개를 꺼내고, 빨간 구슬 2개 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{3}C_{1}\times{}_{2}C_{1}=6$(가지)

$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

48 답 ⑤

10장의 카드에서 2장의 카드를 선택하는 경우의 수는

${}_{10}C_{2}=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$(가지)

한편, 두 장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 홀수이려면 홀수 카드 한 장과 짝수 카드 한 장을 꺼내는 경우이므로

${}_{5}C_{1}\times{}_{5}C_{1}=25$(가지)

$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{25}{45}=\dfrac{5}{9}$

49 답 4

10개의 제비에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_{2}=45$(가지), n개의 당첨제비에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{n}C_{2}$(가지)

모두 당첨제비일 확률이 $\dfrac{2}{15}$이므로

$\dfrac{{}_{n}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}=\dfrac{2}{15}$

$\dfrac{{}_{n}C_{2}}{45}=\dfrac{2}{15}$

${}_{n}C_{2}=\dfrac{2}{15}\times45=6$

$\dfrac{n(n-1)}{2}=6$

$n(n-1)=12=4\times3$이므로 $n=4$

50 답 ②

여섯 개의 점 중에서 임의로 두 개를 택하는 경우의 수는

${}_{6}C_{2}=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$(가지)

한편, 두 점 사이의 거리가 2인 경우의 수는 마주보는 점끼리 선택한 경우이므로 3가지이다.

$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$

51 답 ⑤

여섯 개의 점 중에서 임의로 세 개를 택하는 경우의 수는

${}_{6}C_{3}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$(가지)

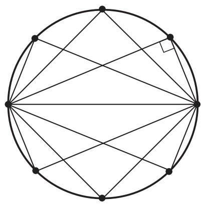
한편, 삼각형이 만들어지는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 세로줄에 일직선으로 놓인 세 점을 택하는 경우를 빼주면 되므로 $20-2=18$(가지)이다.

$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{18}{20}=\dfrac{9}{10}$

52 답 ②

8개의 점 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는

${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$(개)



직각삼각형은 한 변이 원의 지름이어야 한다. 원의 지름의 양 끝점을 택하는 방법은 4개이고, 나머지 다른 한 점을 택하는 방법은 6개이므로 직각삼각형의 개수는 $4\times6=24$(개)

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

53 답 ③

네 개의 주사위를 던졌을 때 나온 눈의 수들은 자동으로 정렬되므로 전체 경우의 수는 순서에 상관없이 서로 다른 6개의 숫자 중에 중복을 허락하여 4개를 뽑는 것이므로

${}_6H_4={}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=126$(가지)

짝수의 눈만 나오는 경우의 수는 서로 다른 세 개의 수 2, 4, 6에서 중복을 허락하여 4개를 뽑는 중복조합이므로

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$(가지)

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{15}{126}=\frac{5}{42}$

54 답 ②

방정식 $x+y+z=5$를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 세 종류의 문자 x, y, z에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 것이므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$(가지)

즉, 집합 A의 원소의 개수는 21이다.

방정식 $x+y+z=5$의 자연수의 해는

(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)로 6개이다.

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

TIP

$x+y+z=5$의 자연수의 해의 개수를 구할 때에도 중복조합을 이용할 수 있다.
$x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$이므로 $x'=x-1$, $y'=y-1$, $z'=z-1$이라 하면 $x+y+z=5$의 자연수의 해의 개수는 $x'+y'+z'=2$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.
따라서 자연수의 해의 개수는
${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$(개)

55 답 ②

같은 종류의 연필 7개를 3명 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$(가지)

한편, 3명이 모두 연필을 1개 이상 받는 경우의 수는 먼저 3명에게 연필을 1개씩 나누어 주고 남은 4개의 연필을 3명에게 남김없이 나누어 주면 되므로 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$(가지)

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

56 답 ③

$X=\{a, b, c\}$에서 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$로의 함수 f의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$(개)

한편, $f(a)\leq f(b)\leq f(c)$인 함수의 개수는 공역의 원소인 5개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개의 숫자를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_{3+5-1}C_3={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$(개)

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{35}{125}=\frac{7}{25}$

57 답 ④

1000개의 제품 중에 60개의 불량품이 있으므로 임의로 하나를 선택했을 때 그 제품이 불량품일 확률은

$\frac{60}{1000}=\frac{3}{50}$

58 답 ⑤

자유투 성공률이 80 %이므로

$\frac{14+n}{20+n}=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

$70+5n=80+4n$

$\therefore n=10$

59 답 ④

상자 속에 들어 있는 흰 공의 개수를 n이라 할 때, 상자에서 동시에 3개의 공을 꺼낼 때 3개 모두 흰 공일 확률이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{{}_nC_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$

$\frac{{}_nC_3}{120}=\frac{1}{6}$

${}_nC_3=\frac{1}{6}\times120=20$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=20$

$n(n-1)(n-2)=120=6\times5\times4$

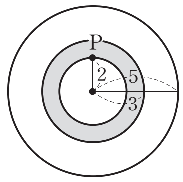
$\therefore n=6$

60 답 ②

$\overline{OA}$ 위의 임의의 점 P가 $\overline{BC}$ 위에 있을 확률은

$\dfrac{(\overline{BC}\text{의 길이})}{(\overline{OA}\text{의 길이})}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

61 답 ③



반지름의 길이가 5인 원판의 넓이는

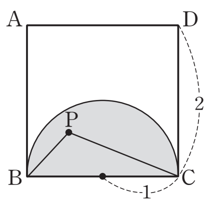
$\pi\times5^2=25\pi$

$2\le\overline{OP}\le3$을 만족하는 점 P의 영역의 넓이는 반지름의 길이가 3인 원의 넓이에서 반지름의 길이가 2인 원의 넓이를 빼면 되므로

$\pi\times3^2-\pi\times2^2=9\pi-4\pi=5\pi$

$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{5\pi}{25\pi}=\dfrac{1}{5}$

62 답 $\dfrac{1}{8}$



$\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원을 그릴 때, 점 P가 반원 밖에 있으면 예각삼각형, 반원의 경계에 있으면 직각삼각형, 반원의 내부에 있으면 둔각삼각형이다. 즉, △PBC가 둔각삼각형일 확률은

$\dfrac{(\overline{BC}\text{를 지름으로 하는 반원의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\times\pi\times1^2}{2\times2}=\dfrac{\pi}{8}$

$\therefore k=\dfrac{1}{8}$

> **심플 정리**
>
> **[기하학적 확률]**
>
> 연속적인 변량을 크기로 갖는 표본공간의 영역 S 안에서 각각을 택할 가능성이 같을 때, 영역 S에 포함되어 있는 영역 A에 대하여 영역 S에서 임의로 택한 것이 영역 A에 속할 확률은
>
> $\mathrm{P}(A)=\dfrac{(\text{영역 } A\text{의 크기})}{(\text{영역 } S\text{의 크기})}$

Simple F 확률의 덧셈정리

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 46~47

01 답 0, 1

02 답 1, 0

03 답 $\mathrm{P}(A\cap B)$

04 답 여사건

05 답 ○

06 답 ×

표본공간이 S인 임의의 두 사건 A, B에 대하여

$A\cup B\subset S$이므로

$0\le\mathrm{P}(A\cup B)\le\mathrm{P}(S)=1$

07 답 ○

08 답 ○

사건 A의 여사건 A^C에 대하여

$A\cup A^C=S$이므로 $\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(S)=1$

또, $A\cap A^C=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A\cap A^C)=\mathrm{P}(\varnothing)=0$

09 답 $\dfrac{1}{6}$

표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고 $a=1$일 사건은 $\{1\}$이므로 확률은 $\dfrac{1}{6}$

10 답 1

표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고 a가 6 이하일 사건은 전사건이므로 확률은 1

11 답 $\dfrac{1}{2}$

표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고 a가 홀수일 사건은 $\{1, 3, 5\}$이므로 확률은 $\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

12 답 0

표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고 $a=7$일 사건은 공사건이므로 확률은 0

13 답 $\frac{7}{10}$

꺼낸 카드가 2의 배수일 사건을 A, 3의 배수일 사건을 B라 하면

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로 $P(A)=\frac{5}{10}$

$B=\{3, 6, 9\}$이므로 $P(B)=\frac{3}{10}$

$A\cap B=\{6\}$이므로 $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{5}{10}+\frac{3}{10}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$

다른 풀이

10 이하의 자연수 중에서

2의 배수의 집합은 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$이고,

3의 배수의 집합은 $\{3, 6, 9\}$이므로

2의 배수 또는 3의 배수의 집합은 $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{7}{10}$

14 답 $\frac{3}{5}$

꺼낸 카드가 6의 약수일 사건을 A, 10의 약수일 사건을 B라 하면

$A=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$B=\{1, 2, 5, 10\}$이므로 $P(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$A\cap B=\{1, 2\}$이므로 $P(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

15 답 $\frac{3}{5}$

꺼낸 카드가 5의 배수일 사건을 A, 8의 약수일 사건을 B라 하면

$A=\{5, 10\}$이므로 $P(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

$B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 $P(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$A\cap B=\varnothing$이므로 $P(A\cap B)=0$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

16 답 $\frac{7}{12}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{10-3}{12}=\frac{7}{12}$

17 답 $\frac{5}{6}$

두 사건 A, B가 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{6}$

18 답 $\frac{15}{16}$

여사건의 확률을 구해보자. 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 4번 모두 뒷면이 나오는 경우는 (T, T, T, T)로 1가지이므로 4번 모두 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{16}$이다.

따라서 앞면이 적어도 한 번 나올 확률은 $1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

19 답 $\frac{11}{16}$

뒷면이 한 번도 나오지 않는 경우는 (H, H, H, H)의 1가지, 4번 중에 뒷면이 한 번만 나오는 경우는

(T, H, H, H), (H, T, H, H), (H, H, T, H),

(H, H, H, T)의 4가지이다.

즉, 뒷면이 한 번도 나오지 않거나 한 번만 나올 확률은 $\frac{5}{16}$

따라서 뒷면이 2번 이상 나올 확률은

$1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$

20 답 0.7

$P(A^C)=1-P(A)=1-0.3=0.7$

21 답 0.4

$P(B^C)=1-P(B)=1-0.6=0.4$

22 답 0.8

$P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)$

$=1-P(A\cap B)=1-0.2=0.8$

유형 연습 [+ 내신 유형] 문제편 pp. 48~53

23 답 ⑤

꺼낸 공이 빨간색 공 또는 파란색 공일 사건은 전사건이므로 $a=1$, 꺼낸 공이 노란 공일 사건은 공사건이므로 $b=0$

$\therefore a+b=1$

24 답 ⑤

주사위 두 개를 던질 때 두 눈의 수의 합이 2 이상일 사건은 전사건이므로 $a=1$, 두 눈의 합이 1일 사건은 일어날 수 없으므로 $b=0$

$\therefore a-b=1$

25 답 ④

ㄱ. A가 공사건이면 $P(A)=0$이고 A가 전사건이면 $P(A)=1$ 이므로 $0\le P(A)\le 1$이다. (거짓)

ㄴ. $A=S$이면 A가 전사건이므로 $P(A)=1$ (참)

ㄷ. ‘$\mathrm{P}(A)\neq 0$이면 $A\neq\varnothing$’의 대우는 ‘$A=\varnothing$이면 $\mathrm{P}(A)=0$’이고 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

26 답 ①

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\mathrm{P}(A)+2\mathrm{P}(A)-\frac{1}{4}$

$3\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

27 답 ②

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.7=0.5+0.4-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=0.2$

28 답 ③

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.8=0.3+\mathrm{P}(B)-0.2$에서 $\mathrm{P}(B)=0.7$

$\therefore\ \mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=0.3$

29 답 ③

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

즉, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$이므로

$\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

30 답 ④

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

즉, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=4\mathrm{P}(A)-2\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$

$A\cup B=S$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=1$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=2\mathrm{P}(A)=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

31 답 ①

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\qquad\qquad=\frac{16}{15}-\mathrm{P}(A\cap B)$

이고, $\mathrm{P}(A\cup B)\leq 1$이므로

$\frac{16}{15}-\mathrm{P}(A\cap B)\leq 1$에서 $\frac{1}{15}\leq\mathrm{P}(A\cap B)$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 최솟값은 $\frac{1}{15}$이다.

32 답 ④

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\qquad\qquad=\mathrm{P}(A)+\frac{3}{5}\mathrm{P}(A)-\frac{1}{5}\mathrm{P}(A)$

$\qquad\qquad=\frac{7}{5}\mathrm{P}(A)$

이때, $\mathrm{P}(A\cup B)\leq 1$이므로

$\frac{7}{5}\mathrm{P}(A)\leq 1$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)\leq\frac{5}{7}$

따라서 $\mathrm{P}(A)$의 최댓값은 $\frac{5}{7}$이다.

33 답 ⑤

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\qquad\qquad=\frac{5}{6}-\mathrm{P}(A\cap B)$

(i) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$일 때,

$\mathrm{P}(A\cup B)$는 최솟값 $\frac{2}{3}$를 갖는다. $\quad\therefore\ a=\frac{2}{3}$

(ii) $\mathrm{P}(A\cap B)=0$일 때,

$\mathrm{P}(A\cup B)$는 최댓값 $\frac{5}{6}$를 갖는다. $\quad\therefore\ b=\frac{5}{6}$

$\therefore\ a+b=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

34 답 ⑤

동전 한 개와 주사위 한 개를 동시에 던졌을 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $2\times 6=12$(가지)

동전의 앞면이 나오는 사건을 A라 하면 동전의 앞면이 나오고 주사위의 눈이 임의의 수가 나오면

되므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

주사위의 짝수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 주사위의 눈이 짝수가 나오고 동전은 앞면이나 뒷면이 나오면 되므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{3\times 2}{12}=\frac{1}{2}$

동전의 앞면이 나오고 주사위의 눈이 짝수가 나오는 사건은

$A\cap B$이고, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\qquad\qquad=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Ⅱ F

심플(고등확통)해032-065_ok.indd 39 18. 9. 4. 오후 1:54

다른 풀이

동전의 앞면 또는 주사위의 짝수의 눈이 나오는 사건의 여사건은 동전의 뒷면과 주사위의 홀수의 눈이 나오는 사건이다.

즉, 여사건의 확률은 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$이므로

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

35 답 ③

카드에 적혀 있는 수가 4로 나누어떨어질 사건을 A, 5로 나누어떨어질 사건을 B라 하면, 4와 5의 최소공배수인 20으로 나누어떨어질 사건은 $A\cap B$이다.

$A=\{4, 8, 12, \cdots, 100\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{25}{100}$

$B=\{5, 10, 15, \cdots, 100\}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{20}{100}$

$A\cap B=\{20, 40, 60, 80, 100\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{100}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{25}{100}+\frac{20}{100}-\frac{5}{100}\\&=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

36 답 ⑤

2장의 카드에 적혀 있는 수가 모두 짝수인 사건을 A라 하면 짝수 2, 4, 6, 8, 10이 적혀 있는 5장의 카드에서 2장의 카드를 뽑으면 되므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{10}{45}$

2장의 카드에 적혀 있는 수가 모두 6의 약수인 사건을 B라 하면 1, 2, 3, 6이 적혀 있는 4장의 카드에서 2장의 카드를 뽑으면 되므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{6}{45}$

사건 $A\cap B$는 2장의 카드에 적혀 있는 숫자가 짝수이고 6의 약수인 2, 6인 경우뿐이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{45}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{10}{45}+\frac{6}{45}-\frac{1}{45}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

37 답 ⑤

두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라 하자. ab가 3의 배수가 되는 경우는 a가 3의 배수이거나 b가 3의 배수인 경우이다.

a가 3의 배수인 사건을 A라 하면 a는 3 또는 6의 눈이 나오고 b는 임의의 눈이 나와도 되므로 $2\times 6=12$(가지)

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{12}{36}$

b가 3의 배수인 사건을 B라 하면 b는 3 또는 6의 눈이 나오고 a는 임의의 눈이 나와도 되므로 $2\times 6=12$(가지)

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{12}{36}$

사건 $A\cap B$는 a와 b가 모두 3의 배수의 눈이 나오는 사건이므로 $2\times 2=4$(가지)

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{36}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{12}{36}+\frac{12}{36}-\frac{4}{36}\\&=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

38 답 ③

10 이하의 홀수 1, 3, 5, 7, 9로 중복을 허락하여 만들 수 있는 두 자리의 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_2=5^2=25$이다.

3의 배수일 사건을 A라 하면 15, 51, 33, 39, 93, 57, 75, 99로 8가지이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{8}{25}$

5의 배수일 사건을 B라 하면 15, 35, 55, 75, 95로 5가지이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{5}{25}$

이때, 3과 5의 공배수가 되는 경우는 15, 75로 2가지이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{25}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{8}{25}+\frac{5}{25}-\frac{2}{25}=\frac{11}{25}\end{aligned}$$

39 답 ⑤

x에 대한 이차방정식 $(2x-a)(5x-a)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}a$ 또는 $x=\frac{1}{5}a$

자연수 a가 2의 배수 또는 5의 배수이면 주어진 방정식은 적어도 하나의 정수해를 갖는다.

1부터 50까지의 자연수 중에서 2의 배수가 나오는 사건을 A라 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{25}{50}$

5의 배수가 나오는 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B)=\frac{10}{50}$

사건 $A\cap B$는 10의 배수가 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{50}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{25}{50}+\frac{10}{50}-\frac{5}{50}\\&=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

40 답 ①

이 학급의 학생 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 이 학생이 야구 경기를 관람한 경험이 있는 학생일 사건을 A, 축구 경기를 관람한 경험이 있는 학생일 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{11}{30}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{15}{30}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{20}{30}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{11}{30}+\frac{15}{30}-\frac{20}{30}$

$=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

41 답 ④

이 회사의 사람들 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 이 사람이 지하철을 이용하는 사람일 사건을 A, 버스를 이용하는 사람일 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A\cup B)=0.81$, $\mathrm{P}(A)=0.55$, $\mathrm{P}(B)=0.40$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.81=0.55+0.40-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.14$

따라서 지하철 또는 버스 중 한 가지 대중교통만을 이용하는 사람일 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B)=0.81-0.14=0.67$

42 답 ④

두 눈의 수의 합이 3이 되는 사건은

$\{(1, 2), (2, 1)\}$이므로 확률은 $\frac{2}{36}$

두 눈의 수의 합이 4가 되는 사건은

$\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$이므로 확률은 $\frac{3}{36}$

두 사건은 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

(구하는 확률)$=\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{5}{36}$

43 답 ①

서로 다른 주사위 3개를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6\times6=216$(가지)

눈의 수의 합이 5가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 세 눈의 수가 1, 1, 3이 나오는 사건을 A라 하면

$\frac{3!}{2!}=3$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{216}$

(ii) 세 눈의 수가 1, 2, 2가 나오는 사건을 B라 하면

$\frac{3!}{2!}=3$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{216}$

두 사건 A, B는 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$

44 답 ④

화살을 쏘아서 맞힌 숫자를 4로 나누었을 때 나머지가 1인 사건을 A, 나머지가 3인 사건을 B라 하면

$A=\{1, 5, 9\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$

$B=\{3, 7\}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{10}$

두 사건 A, B는 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{3}{10}+\frac{2}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

45 답 ③

2명의 대표가 모두 남학생인 사건을 A, 모두 여학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$

두 사건 A, B는 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

46 답 ①

2개의 공이 모두 파란 공인 사건을 A, 모두 노란 공인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

두 사건 A, B는 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{15}+\frac{1}{5}=\frac{4}{15}$

TIP

문제를 제대로 읽지 않고 빨간 공을 2개 꺼내는 경우의 수를 ${}_1\mathrm{C}_2$로 놓고 계산하지 말자. 빨간 공은 1개만 있으므로 2개의 공을 꺼낼 때, 2개의 공이 모두 빨간 색일 수는 없기 때문이다.

47 답 ②

뽑힌 2명이 모두 1학년인 사건을 A, 2명 모두 2학년인 사건을 B, 2명 모두 3학년인 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$,

$\mathrm{P}(C)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{36}$

세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

Ⅱ F

48 답 ⑤

두 자리의 자연수를 만드는 모든 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$(가지)

두 자리의 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수가 되어야 한다.

(ⅰ) 각 자리의 수의 합이 3이 된 사건을 A라 하면

12, 21의 2가지이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{25}$

(ⅱ) 각 자리의 수의 합이 6이 되는 사건을 B라 하면

15, 51, 24, 42, 33의 5가지이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$

(ⅲ) 각 자리의 수의 합이 9가 되는 사건을 C라 하면

45, 54의 2가지이므로 $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{25}$

세 사건 A, B, C는 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$=\frac{2}{25}+\frac{1}{5}+\frac{2}{25}=\frac{9}{25}$

49 답 ③

6개의 문자 C, O, F, F, E, E를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!2!}=180$(가지)

(ⅰ) 양 끝에 F, F가 오는 사건을 A라 하면

구하는 경우의 수는 가운데 C, O, E, E를 나열하는 것이므로

$\frac{4!}{2!}=12$(가지)

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{12}{180}=\frac{1}{15}$

(ⅱ) 양 끝에 E, E가 오는 사건을 B라 하면

구하는 경우의 수는 가운데 C, O, F, F를 나열하는 것이므로

$\frac{4!}{2!}=12$(가지)

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{12}{180}=\frac{1}{15}$

두 사건 A, B는 배반사건이므로 구하는 확률은

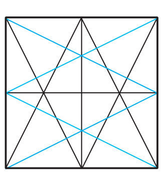
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$

50 답 ③

9개의 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 2개의 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_2=36$(가지)

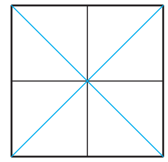
(ⅰ) 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{5}$인 사건을 A라 하면

이 경우는 8가지가 나오므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$



(ⅱ) 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$인 사건을 B라 하면

이 경우는 2가지가 나오므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$



두 사건 A, B는 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

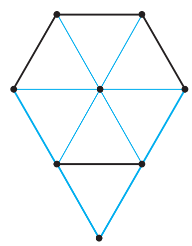
$=\frac{2}{9}+\frac{1}{18}=\frac{5}{18}$

51 답 ④

8개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 2개의 점을 임의로 선택하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2=28$(가지)

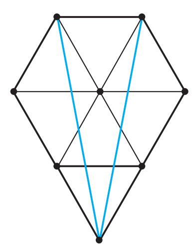
(ⅰ) 두 점 사이의 거리가 2인 사건을 A라 하면

아래 그림에서 5가지가 나오므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{28}$



(ⅱ) 두 점 사이의 거리가 2보다 큰 사건을 B라 하면

아래 그림에서 2가지가 나오므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{28}=\frac{1}{14}$



두 사건 A, B는 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{5}{28}+\frac{1}{14}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$

52 답 ⑤

'적어도 짝수가 하나 포함되는 사건'의 여사건은 '모두 홀수가 포함되는 사건'이다.

10 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 개의 숫자를 택할 때 서로 다른 두 홀수가 포함될 확률은

$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

53 답 ②

'적어도 한 개의 당첨제비를 뽑을 사건'의 여사건은 '모두 당첨제비가 아닌 것을 뽑을 사건'이다.

모두 당첨제비가 아닌 것을 뽑을 확률은

$\frac{{}_{7}C_{2}}{{}_{10}C_{2}}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$

54 답 ③

'적어도 한쪽 끝에는 남학생을 세울 사건'의 여사건은 '양쪽 끝에 모두 여학생을 세울 사건'이다.

양쪽 끝에 여학생 3명 중 2명을 택하여 일렬로 나열하는 경우는 ${}_{3}P_{2}$가지, 나머지 3명을 안쪽에 나열하는 경우는 $3!$가지이므로 양쪽 끝에 모두 여학생을 세울 경우의 수는 ${}_{3}P_{2}\times3!$(가지)

즉, 양쪽 끝에 모두 여학생을 세울 확률은

$\frac{{}_{3}P_{2}\times3!}{5!}=\frac{3}{10}$

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

55 답 ⑤

'적어도 한 명이 북한강을 선택할 사건'의 여사건은 '세 명 모두 북한강을 선택하지 않을 사건'이다.

세 명 모두 북한강을 선택하지 않을 확률, 즉 낙동강이나 금강을 선택할 확률은

$\frac{{}_{6}C_{3}}{{}_{10}C_{3}}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

56 답 ④

2개의 공 중에서 '검은 공이 적어도 하나 나올 사건'의 여사건은 '2개의 공이 모두 흰 공일 사건'이다.

2개의 공이 모두 흰 공일 확률은 $\frac{{}_{3}C_{2}}{{}_{n+3}C_{2}}$

즉, 검은 공이 적어도 하나 나올 확률은

$1-\frac{{}_{3}C_{2}}{{}_{n+3}C_{2}}=\frac{11}{12}$

$\frac{{}_{3}C_{2}}{{}_{n+3}C_{2}}=\frac{1}{12}$

$\frac{\frac{3\times2}{2\times1}}{\frac{(n+3)(n+2)}{2\times1}}=\frac{1}{12}$

$\frac{6}{(n+3)(n+2)}=\frac{1}{12}$

$(n+3)(n+2)=72=9\times8$이므로

$n+3=9 \qquad \therefore n=6$

57 답 ④

'서로 다른 눈이 나올 사건'의 여사건은 '서로 같은 눈이 나올 사건'이다.

서로 다른 주사위 2개를 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$(가지)

2개의 주사위의 눈이 서로 같은 경우는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$으로 6가지이다.

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{6}{36}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$

58 답 ①

'눈의 수의 합이 5 이상일 사건'의 여사건은 '눈의 수의 합이 5보다 작을 사건'이다.

서로 다른 주사위 2개를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

눈의 수의 합이 5보다 작을 경우의 수를 구하자.

(ⅰ) 눈의 수의 합이 2인 경우의 수 : $(1, 1)$의 1가지

(ⅱ) 눈의 수의 합이 3인 경우의 수 : $(1, 2)$, $(2, 1)$의 2가지

(ⅲ) 눈의 수의 합이 4인 경우의 수 : $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3가지

즉, 눈의 수의 합이 5보다 작을 경우의 수는 $1+2+3=6$(가지)이므로 눈의 수의 합이 5보다 작을 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

59 답 ③

'공에 적힌 수가 연속하는 자연수가 아닐 사건'의 여사건은 '공에 적힌 수가 연속하는 자연수일 사건'이다.

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_{2}=45$(가지)

공에 적혀 있는 두 수가 연속하는 두 자연수가 나오는 경우는

$(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 7)$, $(7, 8)$, $(8, 9)$, $(9, 10)$으로 9가지이다.

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{9}{45}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

60 답 ①

'A, B가 이웃하지 않게 앉을 사건'의 여사건은 'A, B가 이웃하여 앉을 사건'이다.

5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!$(가지)

5명이 원탁에 앉을 때 A, B가 이웃하여 앉는 경우의 수는 A, B를 한 사람으로 생각하여 서로 다른 4명이 원탁에 앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!$(가지)이고, A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수 2를 곱한 $3!\times2$(가지)이다.

즉, A, B가 이웃하여 앉을 확률은 $\frac{3!\times2}{4!}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

61 답 ⑤

'양쪽 끝에 있는 두 수의 곱이 짝수일 사건'의 여사건은 '양쪽 끝에 있는 두 수의 곱이 홀수일 사건'이다.

6개의 숫자 2, 2, 2, 3, 3, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{6!}{3!2!}=60$(가지)

양쪽 끝에 있는 두 수의 곱이 홀수가 되는 것은 양쪽 끝에 홀수인 3이 있고 가운데에 2, 2, 2, 4를 나열하는 경우이므로

$\frac{4!}{3!}=4$(가지)

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{4}{60}=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

62 답 ④

주사위를 두 번 던지는 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)

처음 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 할 때, 구해야 하는 사건의 여사건은 $\frac{b}{a}$가 자연수가 되는 사건이다. 이 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 2), (2, 4), (2, 6),
(3, 3), (3, 6),
(4, 4), (5, 5), (6, 6)

으로 14가지이다.

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{14}{36}=1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}$

63 답 ④

집합 X의 원소가 4개이므로 함수 $f: X \longrightarrow X$의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4$(개)

'역함수가 존재하지 않는 사건'의 여사건은 '역함수가 존재하는 사건'이고, 역함수가 존재하려면 함수가 일대일대응이어야 한다.

즉, 함수 $f: X \longrightarrow X$가 일대일대응이 되는 함수의 개수는 $4!$(개)

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{4!}{4^4}=1-\frac{3}{32}=\frac{29}{32}$

연습 문제 [E~F]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 54~55

01 답 ④

$\frac{12}{n+1}$가 정수가 되기 위해서는 $n+1$이 12의 약수이어야 한다.

즉, $n+1$의 값은 1, 2, 3, 4, 6, 12이어야 하므로

$n=0, 1, 2, 3, 5, 11$

그런데 n이 10 이하의 자연수이므로 $n=1, 2, 3, 5$

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

02 답 ②

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나온 눈의 수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $6\times6=36$(개)

x에 대한 다항식 x^3-ax+b를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 3인 경우는 나머지정리에 의해 $1-a+b=3$

$\therefore b=a+2$

이 식을 만족하는 순서쌍 (a, b)는

(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)으로 4가지이다.

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

심플 정리

[나머지정리]

(1) 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $f(a)$이다.

$f(x)=(x-a)Q(x)+R \Rightarrow R=f(a)$

(2) 다항식 $f(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

03 답 ③

서로 다른 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!$(가지)

C, D, E 중 A, B 사이에 들어가는 1개의 문자를 뽑는 경우의 수는 3이고, A, B와 그 사이에 들어 있는 문자를 하나로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!$이다. 이때, A, B가 서로 자리를 바꾸는 방법의 수가 2이다.

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{3\times3!\times2}{5!}=\frac{3}{10}$

04 답 ②

5장의 카드를 일렬로 나열하여 네 자리의 자연수를 만드는 경우의 수는 ${}_5P_4$(가지)

자연수가 짝수가 되려면 일의 자리 숫자가 2 또는 4가 되어야 한다. 일의 자리 숫자가 2가 되는 네 자리의 자연수는 ${}_4P_3$이고, 일의 자리 숫자가 4가 되는 네 자리의 자연수도 ${}_4P_3$이다.

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{2\times{}_4P_3}{{}_5P_4}=\frac{2\times4\times3\times2}{5\times4\times3\times2}=\frac{2}{5}$

05 답 ①

원 모양의 연못 둘레에 향나무 4그루와 단풍나무 4그루를 심으려고 한다. 이 8그루의 나무를 임의로 배열하여 같은 간격으로 심을 때, 단풍나무끼리는 어느 것도 서로 이웃하지 않을 확률은?

단풍나무끼리는 어느 것도 서로 이웃하지 않으려면 향나무 사이사이에 단풍나무를 심어야 해.

① $\frac{1}{35}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{3}{35}$
④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

1st 원 모양으로 나무를 심는 경우의 수는 원순열을 이용하여 구하자.

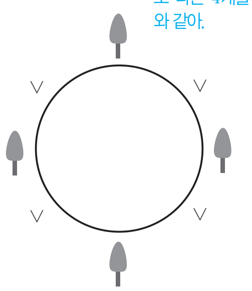
향나무 4그루와 단풍나무 4그루를 원 모양의 연못 둘레에 심는 모든 경우의 수는 $(8-1)!=7!$

서로 다른 n개를 원형으로 나열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

2nd 먼저 향나무를 원순열로 배열한 후 단풍나무를 배열해야 해.

향나무 4그루를 원순열로 배열하는 경우의 수는 $(4-1)!=3!$(가지)이고, 향나무 사이의 4곳에 단풍나무를 심는 경우의 수는 $4!$(가지)이다. 이때, 단풍나무끼리는 이웃하지 않게 되므로 경우의 수는 $3!\times 4!$이다.

4그루의 단풍나무를 심는 경우의 수는 서로 다른 4개를일렬로 나열하는 순열의 수와 같아.



$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{3!\times 4!}{7!}=\frac{1}{35}$

06 답 ④

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!3!}=60$(가지)

2, 2, 2를 A로 생각하여 1, 1, A, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$(가지)

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

07 답 ①

주어진 10개의 문자를 나열하는 방법의 수는

$\frac{10!}{4!6!}=210$(가지)

A끼리는 어느 두 개도 서로 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는 B를 먼저 나열하고, 그 사이의 7개 자리 ∨ 중에서 A가 들어갈 자리 4개를 선택하는 조합의 수와 같으므로

${}_7C_4={}_7C_3=35$(가지)

∨B∨B∨B∨B∨B∨B∨

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$

08 답 ⑤

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수일 확률은?

세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 세 수 중에서 홀수가 2개, 짝수가 1개인 경우이거나 세 수가 모두 짝수인 경우야.

① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{10}{21}$ ⑤ $\frac{11}{21}$

1st 순서를 고려하지 않아도 되므로 전체 경우의 수는 조합을 이용하여 구해야 해.

서로 다른 9개의 공에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_3=84$(가지)

2nd 세 수의 합이 짝수가 되는 경우를 생각해보자.

3개의 공에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 홀수 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 공에서 2개, 짝수 2, 4, 6, 8이 적힌 공에서 1개를 꺼내면 되므로

${}_5C_2\times{}_4C_1=10\times 4=40$(가지)

곱사건의 경우의 수를 구한 거야.

(ii) 짝수가 적힌 공에서 3개를 모두 꺼내면 되므로

${}_4C_3=4$(가지)

(i)과 (ii)의 사건은 서로 배반사건이므로 $40+4=44$(가지)

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{40}{84}+\frac{4}{84}$

$=\frac{44}{84}=\frac{11}{21}$

09 답 ②

3부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 6장의 카드에서 임의로 3장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$(가지)

여기에서 가장 큰 수가 홀수될 수 있는 수는 5, 7이다.

(i) 가장 큰 수가 5인 사건을 A라 하면

3, 4의 수가 적힌 2장의 카드에서 2장을 꺼내는 방법의 수는 ${}_2C_2=1$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{20}$

(ii) 가장 큰 수가 7인 사건을 B라 하면

3, 4, 5, 6의 수가 적힌 4장의 카드에서 2장을 꺼내는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{6}{20}$

(i), (ii)에서 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{20}+\frac{6}{20}=\frac{7}{20}$

심플(고등확통)해032-065_ok.indd 45 18. 9. 4. 오후 1:54

10 답 ①

두 사건 A, B에 대하여

$P(A)=\frac{3}{2}P(A\cap B)$, $P(B)=\frac{5}{2}P(A\cap B)$ … ㉠

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$$P(A\cup B)=\frac{3}{2}P(A\cap B)+\frac{5}{2}P(A\cap B)-P(A\cap B)\ (\because ㉠)$$
$$=3P(A\cap B)$$

$\therefore \frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}=\frac{3P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=3$

11 답 ①

사건 A가 일어날 확률은 $\frac{3}{4}$이고 사건 B가 일어날 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

$P(A)=\frac{3}{4}$, $P(B)=\frac{2}{3}$ … ㉠

$$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-P(A\cap B)\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{17}{12}-P(A\cap B)$$

$P(A\cup B)\le 1$이므로

$P(A\cap B)\ge\frac{17}{12}-1=\frac{5}{12}$ … ㉡

$P(A\cap B)\le P(B)=\frac{2}{3}$ … ㉢

㉡, ㉢에 의해

$\frac{5}{12}\le P(A\cap B)\le\frac{2}{3}$

즉, $M=\frac{2}{3}$, $m=\frac{5}{12}$이므로

$M-m=\frac{2}{3}-\frac{5}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

12 답 ③

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 두 눈의 수의 합이 4 이하이거나 두 눈의 수의 곱이 홀수일 확률은?

합사건의 확률이므로 곱사건의 확률을 구한 후에 확률의 덧셈정리를 이용해야 해.

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

1st 두 눈의 수의 합이 4 이하일 확률을 구해보자.

두 눈의 수의 합이 4 이하일 사건을 A, 두 눈의 수의 곱이 홀수일 사건을 B라 하자.

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 두 눈의 수를 각각 a, b라 하고, 그 순서쌍을 (a, b)라 하면

$A=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$

$\therefore P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

2nd 두 눈의 수의 곱이 홀수일 확률을 구해 보자.

$B=\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$

$\therefore P(B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

3rd 확률의 덧셈정리를 이용해.

$A\cap B=\{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$이므로

두 눈의 합이 4 이하이고, 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건이야.

$P(A\cap B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

$$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

확률의 덧셈정리를 이용한 거야.

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

13 답 ⑤

임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, '흰 공을 적어도 1개 이상 꺼낼 사건'의 여사건은 '모두 검은 공을 꺼낼 사건'이다.

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_2=21$(가지)

주머니에서 2개의 검은 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_2=6$(가지)

흰 공을 적어도 1개 이상 꺼내는 사건을 A라 하면 모두 검은 공을 꺼내는 사건은 A^C이다.

$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{6}{21}=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

14 답 ⑤

8명 중 5명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_5={}_8C_3=56$(가지)

'A 또는 B가 뽑힐 사건'의 여사건은 'A, B가 모두 뽑히지 않는 사건'이고, 이 경우의 수는 ${}_6C_5=6$(가지)이므로 A, B가 모두 뽑히지 않을 확률은 $\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

따라서 A 또는 B가 뽑힐 확률은

$1-\frac{3}{28}=\frac{25}{28}$

15 답 ④

A의 원소의 개수를 알면 부분집합의 개수를 구할 수 있어.

집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합들 중에서 임의로 2개를 선택할 때, 적어도 한 개의 부분집합에서 1을 포함할 확률은?

여사건의 확률을 구해서 $P(A)=1-P(A^C)$인 것을 이용해.

① $\frac{17}{30}$ ② $\frac{19}{30}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{23}{30}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

1st 집합 A의 부분집합 중에서 2개를 선택하는 경우의 수를 구해보자.

집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합의 개수는 $2^4=16$(개)이다. 이 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는

원소의 개수가 n개인 집합의 부분집합의 개수는 2^n이야.

${}_{16}C_2=\frac{16\times 15}{2\times 1}=120$(개)

2nd 여사건의 확률을 이용하자.

'적어도 한 개의 부분집합에서 1을 포함하는 사건'의 여사건은 '두 개의 부분집합에서 모두 1을 포함하지 않는 사건'이다. 1을 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{4-1}=8$(개)이다. 이 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는

$${}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28(\text{개})$$

즉, 구하는 사건의 여사건의 확률은 $\frac{28}{120}=\frac{7}{30}$

$\therefore$ (구하는 확률)$=1-\frac{7}{30}=\frac{23}{30}$

16 답 14

$|a-b|>1$의 여사건은 $|a-b|\le1$이므로

$|a-b|=0,\ |a-b|=1$ … Ⅰ

(i) $|a-b|=0$, 즉 $a=b$인 경우

순서쌍 (a, b)는

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$

의 6가지

(ii) $|a-b|=1$인 경우

순서쌍 (a, b)는

$(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)$,

$(4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$의 10가지

(i), (ii)에서 $|a-b|\le1$의 경우의 수는 $6+10=16$(가지)이므로 $|a-b|\le1$인 확률은

$\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$ … Ⅱ

따라서 $|a-b|>1$일 확률은

$1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

$\therefore\ p=9,\ q=5 \Rightarrow p+q=14$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\lvert a-b\rvert>1$의 여사건을 구한다.	20%
Ⅱ	$\lvert a-b\rvert\le1$인 확률을 구한다.	50%
Ⅲ	여사건의 확률을 이용하여 $\lvert a-b\rvert>1$의 확률을 구한다.	30%

Simple G 조건부확률

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 56~57

01 답 조건부확률, $P(B|A)$

02 답 $P(A\cap B)$

03 답 곱셈정리

04 답 $P(B|A)$, $P(A|B)$

05 답 ○

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

06 답 ○

두 사건 A, B가 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$P(A\cap B)=0$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0$,

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0$

$\therefore\ P(A|B)=P(B|A)=0$

07 답 ×

$P(A|B)=P(B|A)$이려면

$P(A\cap B)=0$ 또는 $P(A)=P(B)$

08 답 ×

두 사건 A, B에 대하여 $A\cap B$와 $A\cap B^C$는 배반사건이고, $A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$이므로

$$P(A)=P((A\cap B)\cup(A\cap B^C))$$
$$=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$$

09 답 $\frac{1}{2}$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

10 답 $\frac{2}{3}$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

Ⅱ G

11 답 $\frac{3}{4}$

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

12 답 $\frac{5}{8}$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{8}$$

13 답 (가) : $\frac{1}{2}$, (나) : $\frac{1}{6}$, (다) : $\frac{1}{3}$

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{3,\ 6\}$, $A\cap B=\{6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\boxed{\frac{1}{2}}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\boxed{\frac{1}{6}}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

14 답 $\frac{1}{9}$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$$

15 답 $\frac{4}{9}$

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}$$

16 답 $\frac{3}{8}$

$$\frac{\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A|B)}=\frac{\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}}{\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}}=\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$$

17 답 (가) : $\frac{3}{7}$, (나) : $\frac{1}{3}$, (다) : $\frac{1}{7}$

$\mathrm{P}(A)$는 갑이 검은 공 3개, 흰 공 4개 중에서 검은 공 한 개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(A)=\boxed{\frac{3}{7}}$

$\mathrm{P}(B|A)$는 갑이 검은 공을 꺼낸 상황에서 을이 검은 공을 꺼낼 확률, 즉 검은 공 2개, 흰 공 4개 중에서 을이 검은 공을 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}}$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{7}}$$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 58~61

18 답 ⑤

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A|B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$

19 답 ②

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{3}}=\frac{9}{16}$$

20 답 ③

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$

21 답 ②

한 학생을 택할 때, 그 학생이 영화 A를 본 사건을 A, 여학생일 사건을 W라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(W|A)$이다.

$n(A)=10+6=16$, $n(A\cap W)=6$이므로

$$\mathrm{P}(W|A)=\frac{n(A\cap W)}{n(A)}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

22 답 ⑤

불량품이 나오는 사건을 X, B기계에서 만든 제품일 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

$n(X)=16$, $n(X\cap Y)=12$이므로

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{n(X\cap Y)}{n(X)}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

23 답 ①

이 학급의 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 교내 주말 스포츠클럽에 참여한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 W라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(W|A)$이다.

$n(A)=20$, $n(A\cap W)=6$이므로

$$\mathrm{P}(W|A)=\frac{n(A\cap W)}{n(A)}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

24 답 ③

임의로 선택한 한 명이 A 헬스클럽에 등록한 사람일 사건을 A, 남자인 사건을 M이라 하면

$$a=\mathrm{P}(M|A)=\frac{n(M\cap A)}{n(A)}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

임의로 선택한 한 명이 B 헬스클럽에 등록한 사람일 사건을 B, 여자인 사건을 W라 하면

$$b=\mathrm{P}(W|B)=\frac{n(W\cap B)}{n(B)}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}\qquad\therefore a+b=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$$

25 답 ④

안경을 낀 학생을 선택할 사건을 A, 여학생을 선택할 사건을 W라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(W|A)$이다.

$n(A)=10+5=15$, $n(A\cap W)=5$이므로

$\mathrm{P}(W|A)=\dfrac{n(A\cap W)}{n(A)}=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3}$

26 답 ③

1단계 시험에 합격하는 사건을 A, 2단계 전형에 합격하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{20}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$에서

$\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{5}\times\mathrm{P}(B|A)$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$

27 답 ②

전체 방청객 중에서 남자에게 의견을 묻는 사건을 A, 일반인일 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$n(A)=14+18=32$, $n(A\cap B)=18$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{18}{32}=\dfrac{9}{16}$

28 답 ③

$a>b$일 사건을 A, $a+b$가 짝수일 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$a>b$인 경우는 서로 다른 5개 숫자 카드 중 2개를 뽑아 큰 것을 a, 작은 것을 b로 놓으면 되므로

$n(A)={}_5\mathrm{C}_2=10$

사건 $A\cap B$는 $a>b$이고 $a+b$가 짝수인 경우이다. 즉,

$A\cap B=\{(3, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 3)\}$이므로

$n(A\cap B)=4$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

29 답 ②

A가 대표로 뽑힐 사건을 A, B가 대표로 뽑힐 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)$이다.

사건 B가 일어난 경우의 수는 B를 제외한 6명 중 2명의 대표를 뽑는 경우이므로 $n(B)={}_6\mathrm{C}_2=15$

사건 $A\cap B$가 일어난 경우의 수는 A, B를 제외한 5명 중 1명의 대표를 뽑는 경우이므로

$n(A\cap B)={}_5\mathrm{C}_1=5$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3}$

30 답 ④

인터넷 강의를 수강하는 학생인 사건을 A, 여학생일 사건을 W라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(W|A)$이다.

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap W)=\dfrac{3}{8}$

$\mathrm{P}(W|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap W)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{5}{8}$

31 답 ③

비행기의 승객 중 임의로 선택한 한 명의 승객이 어른인 사건을 A, 여자일 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

승객 전체의 40 %가 남자이므로 승객 전체의 60 %$\left(\dfrac{3}{5}\right)$가 여자이다. 또, 여자 중에서 30 %가 어린이이므로 여자 중에서 70 %$\left(\dfrac{7}{10}\right)$가 어른이다.

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{21}{50}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{21}{50}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{21}{40}$

다른 풀이

표를 만들어서 $\mathrm{P}(B|A)$로 구해보자.

전체 승객수를 100명으로 놓자.

	어른	어린이	계
남	38	2	40
여	42	18	60
계	80	20	100

$\therefore n(A)=80$, $n(A\cap B)=42$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{42}{80}=\dfrac{21}{40}$

32 답 ③

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$

33 답 ③

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{5}{7}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{7}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{5}{7}-\dfrac{2}{7}=\dfrac{3}{7}$

34 답 ②

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{10}$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{5}$

35 답 ④

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{25}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$에서

$\frac{3}{25}=\mathrm{P}(A)\times\frac{2}{5}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$

36 답 ②

주머니 속에서 지원이가 흰 공을 꺼낼 사건을 A, 주희가 흰 공을 꺼낼 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$

37 답 ②

첫 번째 꺼낸 사탕이 딸기 맛 사탕일 사건을 A, 두 번째 꺼낸 사탕이 딸기 맛 사탕일 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

38 답 ④

재경이가 당첨제비를 뽑을 사건을 A, 영석이가 당첨제비를 뽑을 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(B^C|A)=\frac{7}{9}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$

39 답 ④

여학생을 선택할 사건을 A, 남학생을 선택할 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$

40 답 ③

A 주머니를 선택하는 사건을 A, B 주머니를 선택하는 사건을 B라 하고, 꺼낸 바둑돌이 모두 검은 색일 사건을 E라고 하면 두 개의 주머니 중 하나를 택할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4},$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)}$$

$$=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}=\frac{1}{4}$$

41 답 ⑤

A상자를 택하는 사건을 A, B상자를 택하는 사건을 B라 하고, 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나올 사건을 E라 하면 두 개의 주머니 중 하나를 선택할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}=\frac{4}{15},$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}=\frac{3}{10}$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)}$$

$$=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15}+\frac{3}{10}}=\frac{8}{17}$$

42 답 ④

A 생산라인에서 생산된 전구일 사건을 A, B 생산라인에서 생산된 전구일 사건을 B라 하고, 불량품일 사건을 E라고 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{7}{10}\times\frac{4}{100}=\frac{28}{1000}=\frac{7}{250}$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{100}=\frac{6}{1000}=\frac{3}{500}$

두 사건 $A\cap E$, $B\cap E$는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)}$$

$$=\frac{\frac{7}{250}}{\frac{7}{250}+\frac{3}{500}}=\frac{\frac{14}{500}}{\frac{17}{500}}=\frac{14}{17}$$

심플 정리

[조건부확률]

(1) 조건부확률 : 사건 A가 일어났다고 가정할 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 **조건부확률**이라 하고, 기호 $\mathrm{P}(B|A)$로 나타낸다. (단, $\mathrm{P}(A)\neq 0$)

(2) 사건 A가 일어났을 때, 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

Simple H 독립시행의 확률

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 62~63

01 답 독립, $\mathrm{P}(B)$

02 답 독립사건

03 답 종속, 종속사건

04 답 독립시행

05 답 ○

06 답 ○

07 답 ×

08 답 ×

동전이나 주사위를 던지는 시행은 독립시행의 대표적인 예이다.

09 답 $\frac{1}{2}$

$A=\{1,\ 3,\ 5\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

10 답 $\frac{1}{3}$

$B=\{1,\ 2\}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

11 답 $\frac{1}{6}$

$A\cap B=\{1\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

12 답 독립

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

13 답 독립

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$A\cap B=\{1\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore$ 독립

14 답 독립

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$A\cap B^C=\{1\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore$ 독립

15 답 독립

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$A^C\cap B=\{4\}$에서 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore$ 독립

16 답 독립

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{3\}$에서 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore$ 독립

17 답 $\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

18 답 $\frac{5}{6}$

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4+3-2}{6}=\frac{5}{6}$$

19 답 $\frac{1}{2}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

다른 풀이

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

20 답 $\frac{1}{3}$

$A=\{1,\ 5\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

21 답 $\frac{2}{9}$

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=3\times\frac{2}{3^3}=\frac{2}{9}$

22 답 $\frac{27}{4}$

2개의 동전이 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 두 개의 동전을 던지는 시행을 10번 반복했을 때, 두 개 모두 앞면이 나오는 경우가 3번일 확률은

${}_{10}\mathrm{C}_{\boxed{3}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\boxed{3}}\cdot\left(\boxed{\frac{3}{4}}\right)^7$

$\therefore$ (구하는 값)$=3+3+\frac{3}{4}=\frac{27}{4}$

Ⅱ
H

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 64~69

23 답 ⑤

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{5, 10\}$이므로

$A\cap B=\{10\}$

ㄱ. $P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$ (참)

ㄷ. $P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}=P(A\cap B)$이므로

A, B는 서로 독립이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

24 답 ③

$A=\{3, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$, $C=\{2, 3, 5\}$이므로

$A\cap B=\{3, 6\}$, $B\cap C=\{2, 3\}$

(가) $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,

$P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로

$P(A)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\neq P(A\cap B)$

즉, A와 B는 서로 $\boxed{\text{종속}}$이다.

(나) $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

$P(B\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로

$P(B)P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}=P(B\cap C)$

즉, B와 C는 서로 $\boxed{\text{독립}}$이다.

따라서 (가), (나)에 알맞은 말은 각각 종속, 독립이다.

25 답 ①

ㄱ. $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$

$P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

즉, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

ㄴ. $P(A\cap C)=P(A)+P(C)-P(A\cup C)=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-1=\frac{1}{15}$

$P(A)P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

즉, $P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$이므로 두 사건 A, C는 서로 종속이다.

ㄷ. $P(B\cap C)=P(B)+P(C)-P(B\cup C)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{9}{10}=0$

즉, $P(B\cap C)\neq P(B)P(C)$이므로 두 사건 B, C는 서로 종속이다.

따라서 서로 독립인 사건은 ㄱ이다.

26 답 ②

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$이다.

$$\begin{aligned}P(A^C\cap B^C)&=P((A\cup B)^C)\\&=1-P(A\cup B)\\&=1-\{P(A)+P(B)-\boxed{P(A\cap B)}\}\\&=1-\{P(A)+P(B)-P(A)P(B)\}\\&=1-P(A)-P(B)\{1-P(A)\}\\&=\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}\\&=\boxed{P(A^C)P(B^C)}\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A^C과 B^C은 서로 독립이다.

27 답 ③

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 사건 A가 일어나는 확률은 사건 B와 상관없이 일정하므로

$P(A|B)=P(A|B^C)=P(A)$ (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$\begin{aligned}P(A\cap B^C)&=P(A)-P(A\cap B)\\&=P(A)-P(A)P(B)\ (\because A,\ B\text{가 서로 독립})\\&=P(A)(1-P(B))\\&=P(A)P(B^C)\end{aligned}$$

즉, 두 사건 A와 B^C은 서로 독립이다. (거짓)

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 ㄴ과 마찬가지 방법으로 두 사건 A^C와 B도 서로 독립이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

28 답 ⑤

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)P(B)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

$\therefore p=12$, $q=1$ ⇨ $p+q=12+1=13$

29 답 ④

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A|B)=P(A)=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

30 답 ⑤

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\qquad\qquad=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이므로

$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$

31 답 ⑤

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{35}$

32 답 ①

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다. 즉,

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C|B^C)=\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

또, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{5}{6}$에서

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$

33 답 ④

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$에서 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

한편, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다. 즉,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$

34 답 ②

$2\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\qquad\qquad=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

에서

$\frac{2}{5}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{P}(A)$

$\frac{4}{5}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}\qquad\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

35 답 ④

두 사건 A, B가 서로 배반사건일 때, $A\cap B=\varnothing$이므로

$p=\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

두 사건 A, B가 서로 독립일 때,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$q=\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\qquad=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}-\frac{1}{9}=\frac{13}{18}$

$\therefore\ \frac{q}{p}=\frac{\frac{13}{18}}{\frac{5}{6}}=\frac{13}{15}$

36 답 ④

처음에 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 B라고 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{4}{7}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{16}{49}$

TIP

공을 꺼낸 후 색깔을 확인하고, 다시 넣는 시행(복원추출)은 다음에 뽑는 것에 영향을 주지 않으므로 독립이다. 하지만 공을 꺼낸 후 색깔을 확인하고 다시 넣지 않는다면(비복원추출), 처음에 꺼낸 공의 색깔에 따라 다음에 꺼내는 공에 영향을 주므로 종속이라고 할 수 있다.

37 답 ③

주사위의 홀수의 눈이 나올 사건을 A, 동전의 뒷면이 나올 사건을 B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

38 답 ①

A가 자유투에 성공하는 사건을 A, B가 자유투에 성공하는 사건을 B라고 하면 두 사건 A, B는 독립이다.

A가 자유투에 성공할 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

또, A와 B 중 적어도 한 사람이 자유투에 성공할 확률은 $\frac{3}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\qquad\qquad=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

에서

$\frac{3}{4}=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

Ⅱ H

39 답 ⑤

정현이가 이 문제를 푸는 사건을 A, 연지가 이 문제를 푸는 사건을 B라고 하자. 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 정현이와 연지가 모두 문제를 풀지 못하는 사건인 A^C, B^C도 서로 독립이다.

정현이와 연지가 문제를 풀 확률이 각각 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

즉, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

따라서 '정현이와 연지 2명 중 적어도 한 명이 이 문제를 풀 사건'은 '정현이, 연지 모두 이 문제를 풀지 못할 사건'의 여사건이므로 구하는 확률은

$1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

40 답 ⑤

두 사격선수 A, B가 표적을 명중시키는 사건을 각각 A, B라 하자.

두 사격선수 A, B의 명중률이 각각 $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$

사격선수 A, B가 표적에 명중시키지 못하는 사건은 각각 A^C, B^C이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

이때, 'A, B가 적어도 한 발이 표적에 명중시키는 사건'의 여사건은 'A, B 모두 표적에 명중시키지 못하는 사건'이므로 구하는 확률은

$1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{23}{25}$

41 답 ②

처음에 흰 공이 나올 확률이 $\frac{3}{5}$이고, 두 번째에 검은 공이 나올 확률은 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로

$a=\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

5개의 공에서 동시에 공 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$(가지)이고, 흰 공과 검은 공이 각각 하나씩 나오는 경우의 수가

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=6$(가지)이므로

$b=\mathrm{P}(B)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

꺼낸 공을 다시 집어넣는 시행에서 첫 번째와 두 번째 시행으로 흰 공이 나오는 사건은 서로 독립이다.

흰 공이 나오는 확률이 $\frac{3}{5}$이고, 검은 공이 나오는 확률이 $\frac{2}{5}$이므로

$c=\mathrm{P}(C)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$

$a=\frac{15}{50}$, $b=\frac{30}{50}$, $c=\frac{24}{50}$이므로 $a<c<b$

42 답 ①

한 번의 시행에서 불이 켜질 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 다섯 번 시행에서 세 번만 불이 켜질 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=10\times\frac{4}{3^5}=\frac{40}{3^5}$

43 답 ②

한 번의 시행에서 흰 구슬이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이므로 3번의 시행에서 흰 구슬이 2번 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=3\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

44 답 ③

이 농구선수가 자유투 1회 시행에서 성공할 확률은

$\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$이므로 성공하지 못할 확률은 $1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$이다.

자유투는 독립시행이므로 5번 던져서 4번 성공할 확률은

${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^1=\left(\frac{4}{5}\right)^4$

$\therefore p=5,\ q=4 \Rightarrow p+q=9$

45 답 ①

A가 B에게 이길 확률은 $\frac{3}{5}$이므로 질 확률은 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

매회 탁구시합을 하는 것은 독립시행이므로 탁구선수 A가 3번의 시합 중에서 2번 이길 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)=3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^3$

$\therefore k=2$

46 답 ④

동전 1개를 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 동전을 던지는 시행은 독립시행이므로 한 개의 동전을 8번 던질 때 앞면이 n번 나올 확률은

${}_8\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{8-n}={}_8\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{7}{32}$에서

${}_8\mathrm{C}_n\cdot\frac{1}{256}=\frac{7}{32}$

${}_8\mathrm{C}_n=56$

이때, ${}_8\mathrm{C}_3={}_8\mathrm{C}_5=56$이므로 $n=3$ 또는 $n=5$

따라서 모든 자연수 n의 값의 곱은 $3\times5=15$

47 답 ②

동전을 던지는 시행은 독립시행이므로 앞면이 2번 나올 확률은

$$\mathrm{P}(A)={}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}={}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

앞면이 3번 나올 확률은

$$\mathrm{P}(B)={}_n\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}={}_n\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이때, $4\mathrm{P}(A)=3\mathrm{P}(B)$이므로

$4{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=3{}_n\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^n$에서

$$4\times\frac{n(n-1)}{2\times1}=3\times\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$$

$4=n-2 \qquad \therefore n=6$

48 답 ⑤

6의 약수의 눈은 1, 2, 3, 6이므로 한 개의 주사위를 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이므로 한 개의 주사위를 3회 던졌을 때 6의 약수의 눈이 2회 나올 확률 $\mathrm{P}(A)=a$는

$$a={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=3\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

또, 한 개의 동전을 던질 때 동전의 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 한 개의 동전을 5회 던졌을 때 동전의 앞면이 3회 나올 확률 $\mathrm{P}(B)=b$는

$$b={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\times\frac{1}{2^5}=\frac{5}{16}$$

$$\therefore ab=\frac{4}{9}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{36}$$

49 답 ⑤

동전을 6번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 a라 하면, 뒷면이 나오는 횟수는 $6-a$이다.

앞면이 나오면 $+1$만큼, 뒷면이 나오면 -1만큼 이동하므로 6번의 시행 후에 도착하는 점의 위치는

$a+(-1)\cdot(6-a)=2$

$2a-6=2 \qquad \therefore a=4$

즉, 앞면은 4번, 뒷면은 2번 나와야 한다.

$$\therefore (\text{구하는 확률})={}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=15\times\frac{1}{2^6}=\frac{15}{64}$$

50 답 ④

1 또는 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, 1과 6 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.

주사위를 4번 던져서 점 P가 점 (2, 2)의 위치에 있기 위해서는 두 번은 1 또는 6의 눈이 나와서 x축의 양의 방향으로 2만큼 움직이고, 두 번은 1 또는 6 이외의 눈이 나와서 y축의 양의 방향으로 2만큼 이동하면 된다.

$$\therefore (\text{구하는 확률})={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

51 답 ③

B가 방어에 성공할 확률은 A가 손으로 오른쪽을 가리킬 때 B가 고개를 왼쪽으로 돌리거나 A가 손으로 왼쪽을 가리킬 때 B가 고개를 오른쪽으로 돌리는 경우의 확률이므로

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{8}{15}$$

즉, B가 방어에 성공하는 확률은 $\frac{8}{15}$이고, 두 번의 시행 중 1번만 성공하는 확률은

$${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{8}{15}\right)\left(\frac{7}{15}\right)=\frac{2\times8\times7}{15^2}=\frac{112}{225}$$

52 답 ②

A가 한 문제를 풀 수 있는 확률이 $\frac{2}{3}$이고, 각 문제를 푸는 경우는 독립시행이다.

5문제 중 4문제 이상을 풀어야 합격하므로 4문제 또는 5문제를 풀면 합격이다.

확률의 합을 구하면

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$=80\times\left(\frac{1}{3}\right)^5+32\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{112}{243}$$

$\therefore k=112$

심플 정리

[독립시행의 확률]

(1) 독립시행 : 동일한 시행을 반복하는 경우에 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립일 때, 이런 시행을 독립시행이라고 한다.

(2) 독립시행의 확률 : 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, 이 시행을 n회 반복한 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}\,(r=0, 1, 2, \cdots, n)$$

53 답 ③

주사위 한 개를 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나오는 확률과 홀수의 눈이 나오는 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이다.

주사위 한 개를 5번 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나오는 횟수와 홀수의 눈이 나오는 횟수의 곱이 6이 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 짝수의 눈이 2번 나오고 홀수의 눈이 3번 나오는 경우

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=10\times\frac{1}{2^5}=\frac{5}{16}$$

(ii) 짝수의 눈이 3번 나오고 홀수의 눈이 2번 나오는 경우

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\times\frac{1}{2^5}=\frac{5}{16}$$

$$\therefore (\text{구하는 확률})=\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

Ⅱ H

54 답 ④

(ⅰ) 한 개의 주사위를 던질 때 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고,

동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1$

주사위의 홀수의 눈이 나온 후 동전을 3번 던져 앞면이 2번 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{16}$

(ⅱ) 한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고,

동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은 ${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2$

주사위의 짝수의 눈이 나온 후 동전을 2번 던져 앞면이 2번 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$

∴ (구하는 확률)$=\frac{3}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$

55 답 ⑤

주사위를 던져서 나온 눈의 수가 2 이하일 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

(ⅰ) 주사위를 2회까지 던지고 멈추는 경우

두 번 모두 2 이하의 눈이 나와야 하므로

${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(ⅱ) 주사위를 3회까지 던지고 멈추는 경우

앞의 두 번의 시행 중 1번만 2 이하의 눈이 나오고, 세 번째 시행에서 2 이하의 눈이 나와야 하므로

${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

∴ (구하는 확률)$=\frac{1}{9}+\frac{4}{27}=\frac{7}{27}$

56 답 ②

(ⅰ) 3세트에서 A가 우승하는 경우

A가 3세트 모두 이겨야 하므로

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

(ⅱ) 4세트까지 경기하여 A가 우승하는 경우

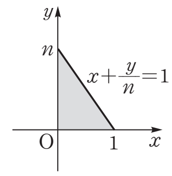
3세트 중 2세트를 A가 이기고, 4세트에서 A가 이겨야 하므로

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

∴ (구하는 확률)$=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}=\frac{16}{27}$

57 답 ①

직선 $x+\frac{y}{n}=1$은 두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ n)$을 지나는 직선으로 제1사분면에서 x축, y축과 이루는 도형은 밑변의 길이가 1이고 높이가 n인 직각삼각형이다.



이 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times n=\frac{n}{2}$이므로 이 값이 자연수가 되려면 n은 짝수이어야 한다.

'주사위를 6번 던질 때 짝수가 2회 이상 일어나는 사건'은 '주사위를 6번 던질 때 모두 홀수만 나오거나 짝수가 1회만 일어나는 사건'의 여사건이다.

$$\therefore \text{(구하는 확률)}=1-\left\{{}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$$
$$=1-\left(\frac{1}{64}+\frac{6}{64}\right)=\frac{57}{64}$$

심플 정리

[직선의 방정식]

(1) 직선의 방정식의 표준형
① 기울기가 a이고 y절편이 b인 직선의 방정식은 $y=ax+b$
② 기울기가 m이고 한 점 $(x_1,\ x_2)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-y_1=m(x-x_1)$
③ 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1\neq x_2$)
특히, $x_1=x_2$일 때 , 직선의 방정식은 $x=x_1$ (또는 $x=x_2$)

(2) 직선의 방정식의 일반형
일반적으로 직선의 방정식은 x, y에 대한 일차방정식
$ax+by+c=0$의 꼴로 나타낼 수 있다.
이를 직선의 방정식의 일반형이라 한다. (단, $a\neq0$ 또는 $b\neq0$)

(3) 두 직선의 교점 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$을 지나는 직선의 방정식은
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (단, k는 임의의 실수)

(4) x절편이 p이고 y절편이 q인 직선의 방정식은
$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ (단, $p\neq0$, $q\neq0$)

연습 문제 [G~H]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 70~71

01 답 ③

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$=\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{1}{5}$

02 답 ⑤

임의로 선택한 한 개의 공이 검은색일 사건을 A, 공에 적혀 있는 수가 짝수일 사건을 B라 하면

$n(A)=9$, $n(A\cap B)=4$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{4}{9}$

03 답 ④

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라 하자. ab가 짝수일 때, $a+b$가 홀수일 확률은?

ab가 짝수인 조건에서 $a+b$가 홀수가 되는 조건부확률을 구하는 거야.

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

1st 'ab가 짝수인 사건'의 확률을 여사건의 확률로 구해보자.

ab가 짝수가 나오는 사건을 A라 하면, → ab가 홀수이려면 a, b가 모두 홀수이어야 해.

사건 A의 여사건 A^C은 'a, b가 모두 홀수가 나오는 사건'이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ → a와 b가 홀수일 확률은 둘 다 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이야. 또, a, b가 나오는 사건은 서로 독립이야.

2nd 'ab가 짝수이고 $a+b$가 홀수인 사건'의 확률을 구해보자.

사건 $A\cap B$는 'a가 짝수이고 b가 홀수' 또는 'a가 홀수이고 b가 짝수'이므로

ab가 짝수이고, $a+b$가 홀수인 경우야.

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

3rd 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 조건부확률을 구해야 해.

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$

04 답 ⑤

남학생 16명 중에서 테니스를 선택한 남학생이 6명이므로 골프를 선택한 남학생은 10명이다. 또 여학생 14명 중에서 골프를 선택한 여학생이 8명이므로 테니스를 선택한 여학생은 6명이다. 이것을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

	골프	테니스	계
남학생	10	6	16
여학생	8	6	14
계	18	12	30

이 학급의 학생 30명 중에서 임의로 한 명을 뽑았을 때 골프를 선택한 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이고 $n(A)=18$, $n(A\cap B)=10$

따라서

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$

05 답 ⑤

첫 번째, 두 번째에 흰 구슬이 나오는 사건을 각각 A, B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4}$

따라서 2개 모두 흰 구슬이 나오는 사건의 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

TIP

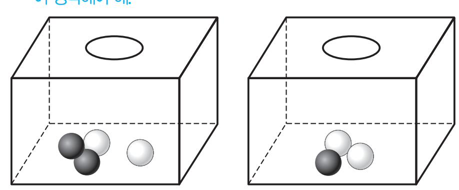
흰 구슬 2개와 검은 구슬 3개가 들어 있는 주머니에서 첫 번째에 흰 구슬을 꺼낼 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$

흰 구슬을 꺼내고 난 후에는 흰 구슬 1개와 검은 구슬 3개가 있으므로 두 번째에 흰 구슬을 꺼낼 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4}$

06 답 ②

크기와 모양이 같은 공이 상자 A에는 검은 공 2개와 흰 공 2개, 상자 B에는 검은 공 1개와 흰 공 2개가 들어 있다. 두 상자 A, B 중 임의로 선택한 하나의 상자에서 공을 1개 꺼냈더니 검은 공이 나왔을 때, 그 상자에 남은 공이 모두 흰 공일 확률은?

상자 A에서 검은 공을 꺼낸 경우와 상자 B에서 검은 공을 꺼낸 경우로 나누어 생각해야 해.



상자 A 상자 B

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

1st 상자 A에서 꺼낸 공이 검은 공인 경우와 상자 B에서 꺼낸 공이 검은 공인 경우로 나누어 생각해야 해.

임의로 선택한 상자에서 공을 하나 꺼낼 때, 상자 A에서 공을 꺼낼 사건을 X, 상자 B에서 공을 꺼낼 사건을 Y, 꺼낸 공이 검은 공일 사건을 Z라 하면 상자 A를 선택해서 검은 공을 꺼낼 사건은 $X\cap Z$이고

$\mathrm{P}(X\cap Z)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$ 상자 A 또는 B를 선택할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이야.

상자 B를 선택해서 검은 공을 꺼낼 사건은 $Y\cap Z$이고

$\mathrm{P}(Y\cap Z)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Ⅱ G~H 연습

2nd 검은 공을 꺼낸 후 남은 공이 모두 흰 공이려면 사건 Y가 일어나야 해. 즉, 사건 Z가 일어났을 때, 사건 Y가 일어날 조건부확률을 구해야 해.

$P(Z)=P(X\cap Z)+P(Y\cap Z)$이므로

$$\therefore P(Y|Z)=\frac{P(Y\cap Z)}{P(Z)}$$

$$=\frac{P(Y\cap Z)}{P(X\cap Z)+P(Y\cap Z)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{2}{5}$$

07 답 ③

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 2, 3, 4\}$라고 하면

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{3}$

① $B_1=\{4, 6\}$이라 하면 $P(B_1)=\frac{1}{3}$이고,

$P(A)P(B_1)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

한편, $A\cap B_1=\{4\}$이므로 $P(A\cap B_1)=\frac{1}{6}$

따라서 $P(A)P(B_1)\neq P(A\cap B_1)$이므로

두 사건 A, B_1은 종속사건이다.

② $B_2=\{5, 6\}$이라 하면 $P(B_2)=\frac{1}{3}$이고,

$P(A)P(B_2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

한편, $A\cap B_2=\varnothing$이므로 $P(A\cap B_2)=0$

따라서 $P(A)P(B_2)\neq P(A\cap B_2)$이므로

두 사건 A, B_2는 종속사건이다.

③ $B_3=\{3, 4, 5\}$이라 하면 $P(B_3)=\frac{1}{2}$이고,

$P(A)P(B_3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

한편, $A\cap B_3=\{3, 4\}$이므로 $P(A\cap B_3)=\frac{1}{3}$

따라서 $P(A)P(B_3)=P(A\cap B_3)$이므로

두 사건 A, B_3은 독립사건이다.

④ $B_4=\{4, 5, 6\}$이라 하면 $P(B_4)=\frac{1}{2}$이고,

$P(A)P(B_4)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

한편, $A\cap B_4=\{4\}$이므로 $P(A\cap B_4)=\frac{1}{6}$

따라서 $P(A)P(B_4)\neq P(A\cap B_4)$이므로

두 사건 A, B_4는 종속사건이다.

⑤ $B_5=\{3, 4, 5, 6\}$이라 하면 $P(B_5)=\frac{2}{3}$이고,

$P(A)P(B_5)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

한편, $A\cap B_5=\{3, 4\}$이므로 $P(A\cap B_5)=\frac{1}{3}$

따라서 $P(A)P(B_5)\neq P(A\cap B_5)$이므로

두 사건 A, B_5는 종속사건이다.

08 답 ③

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(B|A)=P(B|A^C)=P(B)$ (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C과 B도 서로 독립이다. (거짓)

ㄷ. $P(A)P(B)+P(A^C)P(B)$

$=\{P(A)+P(A^C)\}P(B)$

$=P(B)$ ($\because P(A)+P(A^C)=1$) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

09 답 ④

$A=A\cap(B\cup B^C)=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$

이므로

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서 $\frac{1}{4}=\frac{7}{12}P(B)$

$\therefore P(B)=\frac{12}{7}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{7}$

10 답 ⑤

N팀을 응원하는 여학생의 수를 x라 하고, 야구를 보러 온 학생들을 응원하는 팀과 성별에 따라 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

	M	N	계
남	4	10	14
여	8	x	$8+x$
계	12	$10+x$	$22+x$

M팀을 응원하는 학생을 선택하는 경우가 사건 A이므로

$P(A)=\frac{12}{22+x}$

여학생을 선택하는 경우가 사건 B이므로

$P(B)=\frac{8+x}{22+x}$

사건 $A\cap B$는 M팀을 응원하는 여학생이므로

$P(A\cap B)=\frac{8}{22+x}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

즉, $\frac{8}{22+x}=\frac{12}{22+x}\times\frac{8+x}{22+x}$에서

$8(22+x)=12(8+x)$

$2(22+x)=3(8+x)$

$44+2x=24+3x$

$\therefore x=20$

11 답 ②

사건 A가 일어날 확률이 p이고, 사건 A가 일어나지 않을 확률이 $2p$이므로 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$에서

$p+2p=1$

$3p=1 \quad \therefore p=\frac{1}{3}$

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $\frac{1}{3}$인 시행을 8회 반복할 때, 사건 A가 1회 일어날 확률은

${}_8\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^7=8\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^7=4\times\left(\frac{2}{3}\right)^8$

$\therefore k=4$

12 답 ①

한 개의 주사위를 네 번 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나온
주사위를 여러 번 던지는 시행은 각 시행의 결과가 다른 시행에 영향을 주지 않으니까 독립시행이야.
횟수가 홀수의 눈이 나온 횟수보다 많을 확률은?

① $\frac{5}{16}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{7}{16}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

1st 짝수의 눈이 나온 횟수가 홀수의 눈이 나온 횟수보다 많은 경우를 모두 구해야 해.

주사위를 네 번 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나온 횟수가 홀수의 눈이 나온 횟수보다 많은 경우는 네 번 모두 짝수의 눈이 나오거나 짝수의 눈이 3번, 홀수의 눈이 1번 나오는 경우로 나눌 수 있다.

2nd 독립시행의 확률을 이용해서 앞에서 구한 두 가지 경우의 확률을 각각 구해보자.

주사위를 한 번 던졌을 때 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(ⅰ) 네 번 모두 짝수의 눈이 나올 확률

${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$

1회 시행에서 사건 A가 나올 확률이 p일 때, n회 독립시행에서 사건 A가 r번 나오는 독립시행의 확률은 ${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$이야.

(ⅱ) 짝수의 눈이 3번, 홀수의 눈이 1번 나올 확률

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

(구하는 확률)$=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}=\frac{5}{16}$

13 답 ②

앞면이 나오는 횟수를 a,
뒷면이 나오는 횟수를 b라 하면

$\begin{cases} a+b=7 \cdots ㉠ \\ a-b=3 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠과 ㉡을 연립하면 $a=5,\ b=2$

따라서 동전을 7번 던져서 앞면이 5번, 뒷면이 2번 나올 확률은

${}_7\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2={}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{21}{128}$

14 답 2

$\mathrm{P}(A)=a,\ \mathrm{P}(B)=b\ (a>b)$라 하면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{5}{8}=a+b-\frac{1}{8}$

$\therefore a+b=\frac{3}{4} \cdots ㉠$

또, 두 사건 $A,\ B$가 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B)$

$\therefore ab=\frac{1}{8} \cdots ㉡$ … Ⅰ

㉠, ㉡을 연립하여 풀어보자.

a와 b의 합과 곱이 주어졌으므로 두 근을 $a,\ b$로 가지는 이차방정식은

$x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$

$8x^2-6x+1=(4x-1)(2x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

즉, $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}\ (\because a>b)$ … Ⅱ

$\therefore \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\mathrm{P}(A\cap B)$와 $\mathrm{P}(A\cup B)$로 $\mathrm{P}(A)$와 $\mathrm{P}(B)$에 대한 식을 구한다.	40%
Ⅱ	구한 방정식을 풀어서 $\mathrm{P}(A)$와 $\mathrm{P}(B)$의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	$\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$의 값을 계산한다.	20%

심플 정리

[이차방정식]

(1) 근과 계수의 관계
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$
$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$ (단, $\alpha,\ \beta$는 실수)

(2) 이차식의 인수분해
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

(3) 이차방정식의 작성
두 수 $\alpha,\ \beta$를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

Ⅱ G~H 연습

Ⅱ 대단원 TEST [E~H] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 72~75

01 답 ④

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 표본공간을 S라 하면 $S=\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$이다.

앞면이 한 번만 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 앞면이 두 번 나오거나 뒷면이 두 번 나오는 사건이므로

$A^C=\{(H, H), (T, T)\}$

두 번째 던진 동전이 앞면이 나오는 사건을 B라 하면

$B=\{(H, H), (T, H)\}$

$\therefore A^C\cup B=\{(H, H), (T, H), (T, T)\}$

따라서 사건 $A^C\cup B$의 근원사건의 수는 3이다.

02 답 ③

$a=1$일 때 : $b=2, 3, 4, 5, 6$으로 5가지

$a=2$일 때 : $b=3, 4, 5, 6$으로 4가지

$a=3$일 때 : $b=4, 5, 6$으로 3가지

$a=4$일 때 : $b=5, 6$으로 2가지

$a=5$일 때 : $b=6$으로 1가지

즉, $a<b$인 경우의 수는

$5+4+3+2+1=15$

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

03 답 ④

5장의 카드 중에서 차례로 두 장을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

30보다 큰 두 자리의 홀수가 되는 경우는

(i) 일의 자리의 숫자는 1

십의 자리의 숫자는 3, 4, 5가 될 수 있으므로 3가지

(ii) 일의 자리의 숫자가 3

십의 자리의 숫자는 4, 5가 될 수 있으므로 2가지

(iii) 일의 자리의 숫자가 5

십의 자리의 숫자는 3, 4가 될 수 있으므로 2가지

(i)~(iii)에서

(구하는 확률)$=\frac{3+2+2}{20}=\frac{7}{20}$

04 답 ②

7명의 학생을 원형으로 나열하는 경우의 수는

$(7-1)!=6!$

여학생 3명을 하나로 보고 원형으로 나열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!$이고, 여학생 3명을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$

따라서 구하는 확률은

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{4!\times 3!}{6!}=\frac{1}{5}$

05 답 ③

세 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

(i) 백의 자리 숫자가 2인 경우

① 십의 자리 숫자가 2일 때, 일의 자리 숫자가 2, 3이 될 수 있으므로 2가지

② 십의 자리 숫자가 3일 때, 일의 자리 숫자가 1, 2, 3이 될 수 있으므로 3가지

(ii) 백의 자리 숫자가 3인 경우

십의 자리와 일의 자리 숫자로 1, 2, 3 중에 중복하여 선택할 수 있으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

(i), (ii)에서

(구하는 확률)$=\frac{2+3+9}{27}$

$=\frac{14}{27}$

06 답 ③

0부터 9까지의 정수로 중복을 허락하여 네 자리의 비밀번호를 만들 때, 0101, 1133, 1313, 7722, 2772 등과 같이 두 가지 숫자가 두 개씩 있는 비밀번호를 만들 수 있는 확률은 $\left(\frac{q}{p}\right)^3$

4자리 숫자 중에 두 가지 숫자가 두 개씩 있으므로 같은 것이 있는 순열로 구해야 해.

이다. 이때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

1st 네 자리의 비밀번호를 만드는 모든 경우의 수는 중복순열을 이용해.

네 자리의 비밀번호를 만들 수 있는 모든 경우는 10개의 수 중에서 중복을 허락하여 4개의 수를 뽑는 중복순열의 수이므로

${}_{10}\Pi_4=10^4$

2nd 10개의 수 중에서 임의로 2개의 수를 뽑은 후 같은 것이 있는 순열을 이용해.

서로 다른 두 가지 숫자 a, b를 선택하는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$

두 가지 숫자 a, b로 이루어진 4개의 수

a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$(가지)

a와 b가 각각 2개씩 있으므로 같은 것이 있는 순열이야.

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{45\times 6}{10000}$

$=\frac{27}{1000}=\left(\frac{3}{10}\right)^3$

즉, $p=10$, $q=3$이므로 $p+q=13$

07 답 16

흰 공 2개, 빨간 공 4개가 주머니에 들어있으므로 공 2개를 꺼내는 전체 경우의 수는

$_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

꺼낸 공이 모두 흰 공인 경우의 수는 $_2C_2=1$(가지)

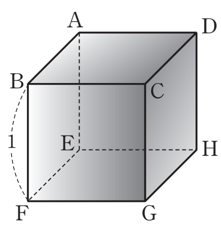
$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{1}{15}$

즉, $p=15$, $q=1$이므로 $p+q=16$

08 답 ④

오른쪽 그림과 같은 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 임의로 서로 다른 두 꼭짓점을 택할 때, 두 점 사이의 거리가 무리수일 확률은?

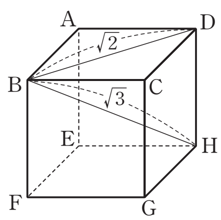
서로 다른 두 꼭짓점 사이의 거리가 무리수가 되는 것은 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$인 경우가 있어.



① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{5}$

1st 정육면체의 꼭짓점에서 서로 다른 2개의 점을 택하는 경우의 수는 조합의 개수를 이용해야 해.

그림과 같이 정육면체 ABCD$-$EFGH의 꼭짓점은 8개이므로 8개의 점에서 서로 다른 2개의 점을 택하는 경우의 수는



$_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

2nd 두 점 사이의 거리는 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$이 될 수 있고 이 중에서 무리수는 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$이야.

(i) 선분의 길이가 $\sqrt{2}$인 경우

정육면체의 한 면 ABFE에는 선분 AF, BE와 같이 길이가 $\sqrt{2}$인 대각선이 2개 존재한다. 정육면체는 면이 6개이고 각 면에는 대각선이 각각 2개씩 있으므로

$6\times2=12$

(ii) 선분의 길이가 $\sqrt{3}$인 경우

선분 AG, BH, CE, DF의 4가지

(i), (ii)에서

(구하는 확률)$=\frac{12+4}{28}=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$

09 답 ⑤

$P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$

10 답 ②

두 눈의 수의 합이 4의 배수인 사건을 A, 6의 배수인 사건을 B라 하면 두 눈의 수의 합이 12의 배수인 사건은 $A\cap B$이다.

두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라 하자.

(i) $a+b$가 4의 배수가 되는 경우

i) $a+b=4$인 경우의 수

(1, 3), (2, 2), (3, 1)로 3가지

ii) $a+b=8$인 경우의 수

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)로 5가지

iii) $a+b=12$인 경우의 수

(6, 6)으로 1가지

즉, $a+b$가 4의 배수가 되는 경우의 수는

$3+5+1=9$(가지)

$\therefore P(A)=\frac{9}{36}$

(ii) $a+b$가 6의 배수가 되는 경우

i) $a+b=6$인 경우의 수

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)로 5가지

ii) $a+b=12$인 경우의 수

(6, 6)으로 1가지

즉, $a+b$가 6의 배수가 되는 경우의 수는

$5+1=6$(가지)

$\therefore P(B)=\frac{6}{36}$

(iii) $a+b$가 12의 배수가 되는 경우

(6, 6)으로 1가지

$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{36}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{9}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}$

$=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$

11 답 ②

흰 공 6개와 빨간 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 4개의 공 중 흰 공의 개수가 3 이상인 경우는 흰 공의 개수가 3, 4일 때이다.

(i) 흰 공의 개수가 3일 확률은

$\frac{_6C_3\times{}_4C_1}{_{10}C_4}=\frac{20\times4}{210}=\frac{80}{210}$

(ii) 흰 공의 개수가 4일 확률은

$\frac{_6C_4}{_{10}C_4}=\frac{15}{210}$

$\therefore$ (구하는 확률)$=\frac{80}{210}+\frac{15}{210}=\frac{95}{210}=\frac{19}{42}$

12 답 ①

같은 색의 공이 연속하여 나오지 않는 경우는

'검은 공 → 흰 공 → 검은 공' 또는 '흰 공 → 검은 공 → 흰 공'의 순서로 꺼내는 두 가지 경우가 있다.

(i) '검은 공 → 흰 공 → 검은 공'으로 나올 확률

$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$

(ii) '흰 공 → 검은 공 → 흰 공'으로 나올 확률

$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$

(i), (ii)에 의해

(구하는 확률)$=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

13 답 ③

(i) 1회에 흰 공 1개, 검은 공 1개를 뽑으면 상자에는 흰 공만 4개가 남으므로

$\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}\times 1=\frac{1}{3}$

(ii) 1회에 흰 공 2개를 뽑으면 상자에는 흰 공 3개, 검은 공 1개가 남으므로

$\frac{{}_5C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에 나오는 사건은 배반사건이므로

(구하는 확률)$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

14 답 ④

'적어도 한 사람이 검은 공을 꺼내는 사건'의 여사건은 '두 사람이 모두 흰 공을 꺼내는 사건'이다.

주머니 속에서 갑이 흰 공을 꺼낼 사건을 A, 을이 흰 공을 꺼낼 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{4}{7}$, $P(B|A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{7}$

∴ (구하는 확률)$=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

15 답 ④

5장의 카드를 5명에게 나눠주는 모든 경우의 수는 $5!$

홀수 1, 3, 5가 적혀 있는 카드를 남학생 2명에게 나누어 주는 방법의 수는 ${}_3P_2$, 남은 3장의 카드를 여학생 3명에게 나누어 주는 방법의 수는 $3!$이므로

두 명의 남학생 모두 홀수가 적혀 있는 카드를 받을 확률은

$\frac{{}_3P_2\times 3!}{5!}=\frac{3}{10}$

따라서 적어도 한 명의 남학생이 짝수가 적혀 있는 카드를 받을 확률은

$1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

16 답 ⑤

7개의 의자가 일렬로 놓여 있다. 이 7개의 의자에 남학생 4명, 여학생 3명이 임의로 앉을 때, 2명 이상의 여학생이 서로 이웃하게 앉을 확률은?

이 사건의 여사건은 '여학생 중 어느 2명도 서로 이웃하지 않게 앉는 사건'이야.

① $\frac{1}{7}$　② $\frac{2}{7}$　③ $\frac{3}{7}$

④ $\frac{4}{7}$　⑤ $\frac{5}{7}$

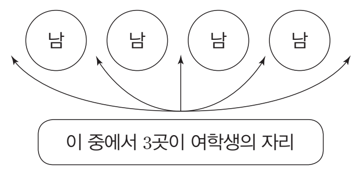
1st 7명의 학생을 의자에 앉히는 경우의 수를 구하자.

7명의 학생이 일렬로 나열된 7개의 의자에 앉는 경우의 수는 $7!$

2nd 여학생 어느 2명도 이웃하지 않도록 앉는 방법을 구하자.

'두 명 이상의 여학생이 서로 이웃하게 앉을 사건'의 여사건은 '여학생 어느 2명도 이웃하지 않게 앉는 사건'이다.

여학생끼리 어느 2명도 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우는 먼저 4개의 의자에 남학생 4명을 앉힌 후, 남학생이 앉은 의자 사이와 양 끝에 여학생이 앉을 의자를 3개 놓는 경우의 수는 ${}_5P_3$



즉, 여학생끼리 어느 2명도 이웃하지 않도록 의자에 앉을 확률은 $\frac{4!\times{}_5P_3}{7!}=\frac{2}{7}$ 남학생 4명을 앉히는 경우의 수는 $4!$이고 그림에서 표시된 5자리에 3명의 여학생이 앉는 경우의 수는 ${}_5P_3$이다.

3rd $P(A)=1-P(A^C)$을 이용해.

따라서 2명 이상의 여학생이 서로 이웃하게 앉을 확률은

$1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

17 답 80

A회사 휴대폰을 선택한 남자 직원이 60 %이므로

$300\times\frac{60}{100}=180$

A회사 휴대폰을 선택한 여자 직원의 수를 x라 하면 A회사 휴대폰을 선택한 전체 직원의 수는 $180+x$이다.

	남	여	계
A	180	x	$180+x$
B	120	$200-x$	$320-x$
계	300	200	500

이때, 500명의 직원 중에서 임의로 뽑은 한 명이 A회사 휴대폰을 선택한 사람이었을 때 이 사람이 여자 직원일 확률이 $\frac{2}{5}$이므로

$\frac{x}{180+x}=\frac{2}{5}$, $5x=360+2x$, $3x=360$

∴ $x=120$

따라서 B회사 휴대폰을 선택한 여자 직원의 수는

$200-120=80$

18 답 ②

두 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, $a+b$가 소수가 되는 순서쌍은

$a+b=2$인 경우의 수

$(1, 1)$로 1개

$a+b=3$인 경우의 수

$(1, 2)$, $(2, 1)$로 2개

$a+b=5$인 경우의 수

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$로 4개

$a+b=7$인 경우의 수

$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$로 6개

$a+b=11$인 경우의 수

$(5, 6)$, $(6, 5)$로 2개

즉, 두 눈의 수의 합이 소수인 경우의 개수는

$1+2+4+6+2=15$(개)

이 중에서 a, b가 모두 소수인 순서쌍은

$(2, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$로 4개

$\therefore$ (구하는 확률)$=\dfrac{4}{15}$

19 답 ③

한 개의 주사위를 두 번 던진다. 6의 눈이 한 번도 나오지 않을 때, 나온 두 눈의 수의 합이 4의 배수일 확률은?

6의 눈이 한 번도 나오지 않은 상황에서 두 눈의 수의 합이 4의 배수가 되는 조건부확률을 구해야 해.

① $\dfrac{4}{25}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{6}{25}$

④ $\dfrac{7}{25}$ ⑤ $\dfrac{8}{25}$

1st 6의 배수의 눈이 한 번도 나오지 않을 확률과 두 눈의 수가 6의 배수가 아니고 합이 4의 배수인 확률을 구하자.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 6의 눈이 한 번도 나오지 않는 사건을 A, 나온 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 사건을 B라 하자.

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{25}{36}$ 주사위를 한 번 던져 6의 눈이 한 번도 나오지 않을 확률은 $\dfrac{5}{6}$이고, 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나오는 사건은 서로 독립이야.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례대로 a, b라 하자. 6의 눈이 한 번도 나오지 않으면서 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 사건 $A\cap B$를 순서쌍 (a, b)로 나타내면

$\{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3)\}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{6}{36}$

2nd 주사위 한 개를 두 번 던져 6의 배수가 한 번도 나오지 않은 조건에서 두 눈의 수의 합이 4의 배수가 되는 조건부확률을 구해.

구하는 확률은 사건 A가 일어날 때, 사건 B가 일어날 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{6}{36}}{\frac{25}{36}}=\frac{6}{25}$$

20 답 ②

확률의 곱셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{5}{8}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{16}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{5}{8}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{9}{16}$

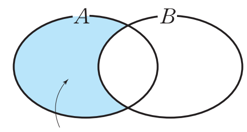
TIP

집합에서 나타내면

$A\cap B^C=A-(A\cap B)$

이것을 확률로 표현하면

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$



$A\cap B^C=A-(A\cap B)$

21 답 ①

처음 뽑힌 학생이 남학생일 경우와 여학생일 경우의 확률을 각각 구한다.

처음에 뽑힌 학생이 남학생인 사건을 A, 두 번째 뽑힌 학생이 여학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$\quad=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$\quad=\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{8+2}{30}=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$

22 답 ④

A가 동전을 2개 던져서 나온 앞면의 개수만큼 B가 동전을 던진다. B가 던져서 나온 앞면의 개수가 1일 때, A가 던져서 나온 앞면의 개수가 2일 확률은?

A가 동전 2개를 던져서 나온 앞면의 개수는 0, 1, 2이고 각각의 경우에 B가 던질 수 있는 동전의 개수가 결정되는 거야.

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{1}{4}$

④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

1st A가 동전 2개를 던져 나올 수 있는 앞면의 개수는 0, 1, 2야. 각각의 경우에 B가 동전을 던져 앞면이 1개 나올 확률을 구해보자.

A가 동전 2개를 던져서 앞면이 n개 나오는 사건을 X_n(단, $n=0, 1, 2$)이라 하고, 두 번째로 B가 동전을 던져 앞면이 한 번 나오는 사건을 Y라 하자.

(i) A가 던진 동전의 앞면이 0개이면

B가 동전을 던질 수 없으므로 $\mathrm{P}(X_0\cap Y)=0$

(ii) A가 던진 동전의 앞면이 1개이면

B가 한 번 동전을 던질 수 있으므로

$\mathrm{P}(X_1\cap Y)={}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

(A가 던진 2개의 동전 중 한 개가 앞면이 나올 확률)
×(B가 던진 1개의 동전이 앞면이 나올 확률)

(iii) A가 던진 동전의 앞면이 2개이면

B가 두 번 동전을 던질 수 있으므로

$\mathrm{P}(X_2\cap Y)={}_2\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}$

(A가 던진 2개의 동전 중 2개가 앞면이 나올 확률)
×(B가 던진 2개의 동전 중 1개가 앞면이 나올 확률)

Ⅱ 대단원

2nd 사건 Y가 일어났을 때, X_2가 일어났을 조건부확률을 구해.

따라서 B가 던진 동전의 앞면의 개수가 1일 때, A가 던진 동전의 앞면의 개수가 2개일 확률은

$$\mathrm{P}(X_2|Y)=\frac{\mathrm{P}(X_2\cap Y)}{\mathrm{P}(X_0\cap Y)+\mathrm{P}(X_1\cap Y)+\mathrm{P}(X_2\cap Y)}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{1}{3}$$

23 답 ③

두 양궁선수 A, B가 과녁을 향하여 각각 한 개씩 화살을 쏠 때 명중시키는 사건을 각각 X, Y라 하자.

(i) A가 쏜 화살은 명중되고, B가 쏜 화살은 명중되지 않을 확률은

$$\mathrm{P}(X\cap Y^C)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y^C)=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{20}$$

(ii) A가 쏜 화살은 명중되지 않고, B가 쏜 화살은 명중될 확률은

$$\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y)=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{4}{20}$$

∴ (구하는 확률)

$$=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y^C)}{\mathrm{P}(X\cap Y^C)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{20}+\frac{4}{20}}=\frac{3}{7}$$

24 답 ④

$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{3, 6\}$, $C=\{2, 3, 5\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$

ㄱ. $A\cap B=\{3\}\neq\varnothing$이므로 A와 B는 배반사건이 아니다. (거짓)

ㄴ. $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$A\cap C=\{3, 5\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)\neq\mathrm{P}(A\cap C)$이므로 A와 C는 서로 종속이다. (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$B\cap C=\{3\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(B\cap C)$이므로 B와 C는 서로 독립이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

25 답 ④

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

두 사건 A, B가 독립이므로, 두 사건 A, B^C도 독립이다. 즉,

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$\frac{1}{6}=\mathrm{P}(A)\times\frac{1}{2}$에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

26 답 ⑤

한 개의 동전을 던져 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

뒷면이 4번 이상 나올 확률은 뒷면이 4번, 앞면이 1번 나오거나 5번 모두 뒷면이 나올 확률이므로

$$(\text{구하는 확률})={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}$$

27 답 ③

흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있는 상자에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 같은 색의 공이면 동전을 3회 던지고, 다른 색의 공이면 동전을 4회 던진다. 이때, 동전의 앞면이 3회 나올 확률은?

동전을 던지는 시행은 독립시행이고 동전을 한 번 던지는 시행에서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$임을 이용해야 해.

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{1}{5}$

④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

1st 상자에 있는 5개의 공에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때, 같은 색이 나올 확률과 다른 색이 나올 확률을 구하자.

상자에서 두 개의 공을 꺼낼 때, 같은 색의 공이 나올 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3+1}{10}=\frac{2}{5}$$

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}$ 는 흰 공이 두 개 나오는 확률이고,

$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}$ 는 검은 공이 두 개 나오는 확률이야.

즉, 다른 색의 공이 나올 확률은

$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

2nd 동전을 3회 또는 4회 던졌을 때 앞면이 3회 나올 확률은 독립시행의 확률로 구해야 해.

(i) 꺼낸 두 개의 공이 같은 색인 경우

$$\frac{2}{5}\times{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{20}$$

동전을 3회 던져서 앞면이 3회 나올 확률은 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 동전을 3회 던져서 앞면이 3회 나오는 독립시행의 확률이야.

(ii) 꺼낸 두 개의 공이 다른 색인 경우

$$\frac{3}{5}\times{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{20}$$

동전을 4회 던져서 앞면이 3회 나올 확률은 동전을 한 번 던져서 앞면과 뒷면이 나올 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이므로 동전을 4회 던져서 앞면이 3회 나오는 독립시행의 확률이야.

(i), (ii)에 의하여

$$(\text{구하는 확률})=\frac{1}{20}+\frac{3}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

28 답 ⑤

한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수일 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 이 시행은 독립시행이다.

점 P가 시계반대방향으로 1만큼 움직이는 횟수를 a, 시계반대 방향으로 2만큼 움직이는 횟수를 b라고 하면, 주사위를 6번 던지는 시행이므로 $a+b=6$

이때, 점 P가 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B에 있게 되려면 움직인 거리인 $a+2b$는 1, 4, 7, 10, …등과 같이 3의 배수보다 1 큰 수가 나와야 한다.

(i) $a+2b=1$ 또는 4인 경우, $a+b=6$을 동시에 만족하는 자연수의 해가 없다.

(ii) $\begin{cases} a+b=6 \\ a+2b=7 \end{cases}$ 인 경우

$a=5$, $b=1$이므로 이때의 확률은 ${}_6C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3^5}$

(iii) $\begin{cases} a+b=6 \\ a+2b=10 \end{cases}$ 인 경우

$a=2$, $b=4$이므로 이때의 확률은

${}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{15\times16}{3^6}=\frac{80}{3^5}$

(iv) $a+2b=13$ 또는 그 이상의 자연수인 경우

$a+b=6$을 동시에 만족하는 자연수의 해가 없다.

(i)~(iv)에 의하여

(구하는 확률)$=\frac{80+4}{3^5}=\frac{28}{81}$

29 답 23

흰 공을 W, 검은 공을 B, 빨간 공을 R, 초록 공을 G라 하자. W, W, B, B, R, G의 6개의 문자를 모두 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!2!}=180$(가지) … Ⅰ

흰 공끼리 이웃하는 사건을 X, 검은 공끼리 이웃하는 사건을 Y라 하자.

(i) 흰 공끼리 이웃하는 경우의 수는 WW를 하나로 보고 WW, B, B, R, G의 5개를 일렬로 배열하는 것이므로

$\frac{5!}{2!}=60$

$\therefore \mathrm{P}(X)=\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$

(ii) 검은 공끼리 이웃하는 경우의 수는 BB를 하나로 보고 W, W, BB, R, G의 5개를 일렬로 배열하는 것이므로

$\frac{5!}{2!}=60$

$\therefore \mathrm{P}(Y)=\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$

(iii) 흰 공끼리 이웃하고, 검은 공끼리 이웃하는 경우의 수는 WW와 BB를 하나로 보고 WW, BB, R, G의 4개를 일렬로 나열한 것이므로

$4!=24$(가지)

$\therefore \mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{24}{180}=\frac{2}{15}$ … Ⅱ

(i)~(iii)에서

$\mathrm{P}(X\cup Y)=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$

즉, $p=15$, $q=8$이므로 $p+q=23$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	6개의 공을 일렬로 배열하는 경우의 수를 구한다.	20%
Ⅱ	흰 공끼리 이웃하거나 검은 공끼리 이웃하는 경우의 수를 구한다.	60%
Ⅲ	확률의 덧셈정리를 이용하여 p, q를 구하고 $p+q$를 계산한다.	20%

30 답 60

임의로 한 명을 택할 때, 학생인 사건을 A, 기숙사 건립에 반대하는 사람인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{100}{200}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3b+20}{200}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2b}{200}$ … Ⅰ

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}\times\frac{3b+20}{200}=\frac{2b}{200}$

$3b+20=4b$

$\therefore b=20$ … Ⅱ

$a+2b=100$이므로

$a+40=100$

$\therefore a=60$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	임의로 한 명을 택할 때, 학생인 사건, 기숙사 건립에 반대하는 사건, 기숙사 건립에 반대하는 학생일 사건의 확률을 각각 구한다.	40%
Ⅱ	두 사건이 서로 독립일 조건을 이용하여 b의 값을 구한다.	40%
Ⅲ	a의 값을 구한다.	20%

Ⅲ 통계

Simple Ⅰ 확률변수와 확률분포

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 78~79

01 답 확률변수, $\mathrm{P}(X=x)$

02 답 이산확률변수

03 답 확률분포

04 답 0, 1, 1

05 답 ×

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면, 동전을 두 번 던지는 시행의 표본공간은 {(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)}이므로

앞면이 0번 나올 확률은 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}$

06 답 ×

시간은 연속적으로 셀 수 있는 값이 아니므로 이산확률변수가 아니다.

07 답 ○

흰 공 2개, 파란 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 x개일 확률은

$$\frac{\left(\begin{array}{c}\text{흰 공 2개 중}\\ x\text{개를 선택하는}\\ \text{경우의 수}\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{c}\text{파란 공 3개 중}\\ (2-x)\text{개를 선택하는}\\ \text{경우의 수}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{주머니 안의 5개의 공 중에서}\\ \text{임의로 2개를 선택하는 경우의 수}\end{array}\right)}$$

08 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

이산확률변수는 확률변수 X가 셀 수 있을 때이다. ㄷ의 출근 시간은 셀 수 없으므로 이산확률변수가 아니다.

09 답 $X=0, 1, 2, 3, 4$

4개의 동전을 던질 때 앞면이 나오는 동전의 개수 X는 0(4개의 동전 모두 뒷면이 나오는 경우)부터 4(4개의 동전 모두 앞면이 나오는 경우)까지 나올 수 있다.

10 답 $X=0, 1, 2$

검은 공 3개와 노란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개를 꺼낼 때 나오는 노란 공의 개수 X는 0(검은 공만 2개 나오는 경우)부터 2(노란 공만 2개 나오는 경우)까지 나올 수 있다.

11 답 $X=0, 1, 2, 3, 4, 5$

5번의 사격으로 과녁을 맞히는 개수 X는 0(모두 과녁을 맞히지 못하는 경우)부터 5(모두 과녁을 맞히는 경우)까지 나올 수 있다.

12 답 $X=1, 2, 3, 4, 5, 6$

주사위 하나를 던질 때 나오는 눈의 수 X는 1부터 6까지의 자연수이다.

13 답 $X=0, 1, 2$

빨간 공 2개와 파란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 동시에 2개의 공을 꺼낼 때 나오는 빨간 공의 개수 X는 0부터 2까지의 정수이다.

14 답 x, 4, 6

6개의 공이 들어 있는 주머니에서 동시에 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2$이다. 이때, 꺼낸 2개의 공들 중에서 빨간 공이 x개이면 파란 공은 $(2-x)$개이고, 그 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_x\cdot{}_4\mathrm{C}_{2-x}$이다.

따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_2\mathrm{C}_{\boxed{x}}\cdot{}_{\boxed{4}}\mathrm{C}_{2-x}}{{}_{\boxed{6}}\mathrm{C}_2}$$

15 답 해설 참조

확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_2\mathrm{C}_x\cdot{}_4\mathrm{C}_{2-x}}{{}_6\mathrm{C}_2}$$

$x=0,\ 1,\ 2$를 대입하면

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$$

이므로

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

16 답 $\frac{14}{15}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0\le X\le 1)&=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\\&=\frac{2}{5}+\frac{8}{15}=\frac{14}{15}\end{aligned}$$

17 답 $\frac{3}{8}$

확률의 총합이 1이므로

$a+\frac{1}{4}+a=1$에서 $2a=\frac{3}{4}$

$\therefore a=\frac{3}{8}$

18 답 $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X^2=1)&=\mathrm{P}(X=-1\text{ 또는 }X=1)\\&=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)\\&=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

19 답 $\frac{5}{8}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X^2+X=0)&=\mathrm{P}(X(X+1)=0)\\&=\mathrm{P}(X=-1 \text{ 또는 } X=0)\\&=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)\\&=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 80～83

20 답 ④

④ 공부 시간은 셀 수 없기 때문에 이산확률변수가 될 수 없다.

21 답 ⑤

흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행이므로 나오는 흰 공의 개수 X는 0부터 3까지 정수 값을 가질 수 있다.

22 답 $X=0, 1, 2$

빨간 공 5개, 파란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 꺼내는 시행이므로 나오는 파란 공의 개수 X는 0부터 2까지의 정수 값을 가질 수 있다.

23 답 11

농구에서 자유투를 10번 던져서 성공한 횟수를 X라 할 때, 확률변수 $X=0, 1, 2, \cdots, 10$이므로 그 개수는 11이다.

24 답 ①

확률변수 X의 확률분포표에서

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{9}$

25 답 ②

확률변수 X의 확률분포표에서

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{28}$, $\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{14}$이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=5)=\frac{3}{28}+\frac{1}{14}=\frac{5}{28}$

26 답 해설 참조

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 소수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하므로 $X=0, 1, 2$

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$(가지)이다.

(i) $X=0$일 때,

소수의 눈이 아닌 눈은 1, 4, 6이므로 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 소수의 눈이 하나도 나오지 않는 경우의 수는 $3\times3=9$(가지)

$\therefore \mathrm{P}(X=0)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

(ii) $X=1$일 때,

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 소수의 눈이 나오는 횟수가 1인 경우는 첫 번째에 소수의 눈이 나오고 두 번째에 소수가 아닌 눈이 나오거나 첫 번째에 소수가 아닌 눈이 나오고 두 번째에 소수의 눈이 나오는 경우이다. 소수의 눈은 2, 3, 5이고, 소수가 아닌 눈은 1, 4, 6이므로 이 경우의 수는 $(3\times3)\times2=18$(가지)

$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

(iii) $X=2$일 때,

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 소수의 눈이 둘다 나오는 경우의 수는 $3\times3=9$(가지)

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

따라서 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

다른 풀이

주사위를 던지는 것은 독립사건이므로 독립시행의 확률로 구해 보자.

한 개의 주사위를 던질 때, 소수의 눈 2, 3, 5가 나오는 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) $X=0$일 때,

두 번 중 소수의 눈이 0번 나올 확률은

${}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

(ii) $X=1$일 때,

두 번 중 소수의 눈이 1번 나올 확률은

${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

(iii) $X=2$일 때,

두 번 중 소수의 눈이 2번 나올 확률은

${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

27 답 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때,

한 개의 동전을 두 번 던지는 시행의 표본공간은

{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)}

앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하므로 $X=0$ 또는 $X=2$일 확률은 각각 $\frac{1}{4}$이고, $X=1$일 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

$$\therefore \mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\boxed{\frac{1}{4}} & (x=0,\ 2)\\ \boxed{\frac{1}{2}} & (x=1)\end{cases}$$

Ⅲ Ⅰ

28 답 $P(X=x)=\frac{{}_{3}C_{x}\cdot{}_{7}C_{3-x}}{{}_{10}C_{3}}$ $(x=0, 1, 2, 3)$

10개의 제비 중 3개의 제비를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_{3}$이다. 임의로 뽑은 3개의 제비 중에 당첨제비가 x개이면 당첨제비가 아닌 제비는 $(3-x)$개이고, 그 경우의 수는 ${}_{3}C_{x}\cdot{}_{7}C_{3-x}$

$\therefore P(X=x)=\frac{{}_{3}C_{x}\cdot{}_{7}C_{3-x}}{{}_{10}C_{3}}$ $(x=0, 1, 2, 3)$

29 답 ④

한 종류의 책 5권 중에 임의로 2권의 책을 뽑는 경우의 수는 ${}_{5}C_{2}$이고, 뽑은 2권의 책 중에 저자의 싸인이 들어 있는 책이 x개 포함되는 경우의 수는 ${}_{3}C_{x}\cdot{}_{2}C_{2-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)=\frac{{}_{3}C_{x}\cdot{}_{2}C_{2-x}}{{}_{5}C_{2}}$ $(x=0, 1, 2)$

즉, $a=3$, $b=2$, $c=5$이므로

$a+b+c=10$

30 답 ③

한 개의 주사위를 던질 때, 눈의 수가 4보다 큰 수가 나오는 경우는 눈의 수가 5 또는 6일 때이므로 이때의 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

$P(X=x)$는 10번 중에 주사위의 눈의 수가 5 또는 6인 경우가 x번 나올 확률이므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{10}C_{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}$$
$$={}_{10}C_{x}\times\frac{2^{10-x}}{3^{10}}(x=0, 1, 2, \cdots, 10)$$

즉, $f(x)=10-x$, $a=3$이므로

$f(a)=f(3)=7$

31 답 ⑤

확률의 총합이 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}=\frac{6}{k}=1 \qquad \therefore k=6$

32 답 ②

확률의 총합이 1이므로

$P(X=1)+P(X=3)+P(X=5)=1$

$\frac{k}{1}+\frac{k}{3}+\frac{k}{5}=k\left(\frac{15+5+3}{15}\right)=\frac{23}{15}k=1 \qquad \therefore k=\frac{15}{23}$

33 답 ⑤

확률의 총합이 1이므로

$5a+2a+3a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{10}$

34 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+a=1$

$\therefore a=\frac{1}{6}$

35 답 ①

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 모든 경우는

(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H),
(T, T, H), (T, H, T), (H, T, T), (T, T, T)

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$a=P(X=0)=\frac{1}{8}$, $b=P(X=2)=\frac{3}{8}$이므로

$\therefore b^{2}-a^{2}=\frac{9}{64}-\frac{1}{64}=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$

다른 풀이

동전을 던지는 것은 독립시행의 확률로 구해 보자.

한 개의 동전을 던질 때, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고,

확률변수X는 세 개의 동전을 던질 때 뒷면이 나올 횟수이다.

$P(X=0)$은 세 개의 동전이 모두 앞면이 나올 확률이므로

$a={}_{3}C_{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}$

$P(X=2)$는 세 개의 동전 중 두 개가 뒷면, 하나가 앞면이 나올 확률이므로

$b={}_{3}C_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$

$\therefore b^{2}-a^{2}=\frac{9}{64}-\frac{1}{64}=\frac{1}{8}$

36 답 ②

확률의 총합이 1이므로

$a+\frac{1}{10}+b+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=1$

$\therefore a+b=\frac{3}{5}$

37 답 ④

확률의 총합이 1이므로

$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+a+\frac{1}{8}=1 \qquad \therefore a=\frac{3}{8}$

$$\therefore P(X\le 3a)=P\left(X\le\frac{9}{8}\right)$$
$$=P(X=0)+P(X=1)$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

38 답 ③

확률의 총합이 1이므로

$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}+a^2=1$

$2a^2+a-1=0$

$(a+1)(2a-1)=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because 0\le a\le 1)$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-X=0)=\mathrm{P}(X(X-1)=0)$

$=\mathrm{P}(X=0 \text{ 또는 } X=1)$

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

39 답 ③

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=1 \text{ 또는 } X=2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{4}$

다른 풀이

두 개의 동전을 던져서 앞면이 나오는 횟수가 X이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

40 답 ⑤

참치김밥의 개수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X>1)=\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{15}$

41 답 ⑤

1부터 5까지의 자연수에서 두 개의 숫자를 뽑아서 큰 수에서 작은 수를 뺀 값을 X라 하면 X는 1부터 4까지의 값을 가진다.

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=1-\mathrm{P}(X=4)=1-\frac{1}{10}$

$=\frac{9}{10}$

TIP

$\mathrm{P}(X=4)$의 값을 구해보자.
서로 다른 다섯 개의 숫자 중 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$이고, 이 중에서 두 수의 차가 4인 경우, 즉 1과 5를 동시에 뽑는 한 가지 경우뿐이므로 $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{10}$

42 답 ③

주사위를 던져서 짝수가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 확률변수 X는 주사위를 다섯 번 던졌을 때 짝수가 나오는 횟수이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$={}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}$

43 답 ④

3번 타석에 들어섰을 때 안타를 치는 개수를 확률변수 X라 하므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

한편, $X^2+3\ge 4X$에서

$X^2-4X+3=(X-1)(X-3)\ge 0$

$\therefore\ X\le 1$ 또는 $X\ge 3$

$\mathrm{P}(X^2+3\ge 4X)=\mathrm{P}(X\le 1)+\mathrm{P}(X\ge 3)$

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=1-\mathrm{P}(X=2)$

$=1-{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)$

$=1-\frac{3\times 2^2\times 3}{5^3}=1-\frac{36}{125}=\frac{89}{125}$

44 답 ③

흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 꺼낼 때
(흰 공 0개, 검은 공 3개), (흰 공 1개, 검은 공 2개),
(흰 공 2개, 검은 공 1개), (흰 공 3개, 검은 공 0개)
의 네 가지 경우가 있으므로 흰 공의 개수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

X의 각 값에 대한 확률을 구해보면

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35},$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35},\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$

이것을 확률분포표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

확률분포표에서 $\mathrm{P}(X=2)$가 최댓값을 가지므로 $a=2$

Ⅲ
Ⅰ

45 답 1

빨간 공 2개, 파란 공 5개가 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 꺼낼 때

(빨간 공 0개, 파란 공 3개), (빨간 공 1개, 파란 공 2개), (빨간 공 2개, 파란 공 1개)

의 세 가지 경우가 있으므로 빨간 공의 개수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

X의 각 값에 대한 확률을 구해보면

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_0\cdot{}_5\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{10}{35}=\dfrac{2}{7}$

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{20}{35}=\dfrac{4}{7}$

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{5}{35}=\dfrac{1}{7}$

이것을 확률분포표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$\mathrm{P}(X\geq1)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\dfrac{4}{7}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{5}{7}$

따라서 정수 m의 값은 1이다.

46 답 ②

정사면체 모양의 주사위를 두 번 던져서 나온 수를 각각 a, b라 하면 $a+b$는 2부터 8까지의 자연수를 가질 수 있다. 각각의 경우에 대해 순서쌍 (a, b)를 구해보면

$a+b=2$: (1, 1)

$a+b=3$: (1, 2), (2, 1)

$a+b=4$: (1, 3), (2, 2), (3, 1)

$a+b=5$: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

$a+b=6$: (2, 4), (3, 3), (4, 2)

$a+b=7$: (3, 4), (4, 3)

$a+b=8$: (4, 4)

전체 경우의 수는

$1+2+3+4+3+2+1=16$

이것을 확률분포표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$\mathrm{P}(X\leq4)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\dfrac{1+2+3}{16}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

따라서 정수 m의 값은 4이다.

Simple J 이산확률변수의 기댓값, 분산, 표준편차

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 84~85

01 답 $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n$

02 답 $X-m$, $\mathrm{E}(X^2)$

03 답 $\mathrm{V}(X)$

04 답 a, b

05 답 $|a|$

06 답 ○

07 답 ×

$m=-1\times\dfrac{1}{4}+0\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=0$

08 답 ×

$\mathrm{E}(3X-2)=3\mathrm{E}(X)-2=3\times5-2=13$

09 답 ○

$\sigma(-4X+5)=|-4|\sigma(X)=4\times7=28$

10 답 5

$m=\mathrm{E}(X)=2\times\dfrac{1}{3}+5\times\dfrac{1}{3}+8\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{15}{3}=5$

11 답 6

X	2	5	8
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$(X-m)^2$	$(2-5)^2=9$	$(5-5)^2=0$	$(8-5)^2=9$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=9\times\dfrac{1}{3}+0\times\dfrac{1}{3}+9\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{18}{3}=6$

다른 풀이

분산을 구할 때, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-m^2$으로 계산하는 것이 편할 때가 많다.

주어진 확률분포표에서

X^2	4	25	64
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{E}(X^2)=4\times\dfrac{1}{3}+25\times\dfrac{1}{3}+64\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{93}{3}=31$

$\mathrm{E}(X)=5$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-m^2=31-5^2=6$

12 답 $\sqrt{6}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{6}$

심플(고등확통)해066-104_ok.indd 70 18. 9. 4. 오후 1:54

13 답 해설 참조

주머니 안의 6개의 공들 중에서 2개의 공을 꺼내는 시행이므로 전체 경우의 수는 ${}_6C_2$이고, 꺼낸 공들 중에서 빨간 공의 개수가 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

이에 대응하는 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\cdot{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\cdot{}_4C_0}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

14 답 $\frac{2}{3}$

$$m=E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

15 답 $\frac{16}{45}$

$$V(X)=E(X^2)-m^2$$
$$=\left(0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{1}{15}\right)-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{45}$$

16 답 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{16}{45}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$$

17 답 7

$$E(3X+1)=3E(X)+1=3\times2+1=7$$

18 답 16

$$V(-2X-50)=(-2)^2\,V(X)=4\times4=16$$

19 답 6

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{4}=2$이므로

$$\sigma(-3X-2)=|-3|\sigma(X)=3\times2=6$$

20 답 $E(X)=1$, $V(X)=\frac{1}{2}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$$

$$V(X)=\left(0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}\right)-1^2=\frac{1}{2}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

21 답 1

$$E(Y)=E(2X-1)=2E(X)-1=2\times1-1=1$$

22 답 2

$$V(Y)=V(2X-1)=2^2V(X)=4\times\frac{1}{2}=2$$

23 답 $\sqrt{2}$

$$\sigma(Y)=\sigma(2X-1)=|2|\sigma(X)=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 86~87

24 답 ①

확률의 합은 1이므로

$$\frac{1}{2}+a+b=1$$

$$\therefore a+b=\frac{1}{2}\ \cdots\ ㉠$$

X의 기댓값이 $\frac{3}{4}$이므로

$$E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times a+2\times b=\frac{3}{4}$$

$$\therefore a+2b=\frac{3}{4}\ \cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$

$$\therefore ab=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

25 답 ①

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{10}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{4}{10}=\frac{30}{10}=3$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{2}{10}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{4}{10}=\frac{100}{10}=10$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=10-3^2=1$$

다른 풀이

$$V(X)=E((X-m)^2)$$
$$=(1-3)^2\times\frac{1}{10}+(2-3)^2\times\frac{2}{10}+(3-3)^2\times\frac{3}{10}+(4-3)^2\times\frac{4}{10}$$
$$=\frac{4}{10}+\frac{2}{10}+0+\frac{4}{10}=\frac{10}{10}=1$$

Ⅲ J

26 답 ④

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=1,$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{11}{3}-1^2=\frac{8}{3}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

27 답 ①

확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_2\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}\ (x=0,\ 1,\ 2)$

X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

28 답 ③

확률변수 $X=0,\ 100,\ 200$이고, X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	100	200	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

X의 기댓값(평균)은

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+100\times\frac{1}{2}+200\times\frac{1}{4}$

$=100$

29 답 ④

빨간 공 3개, 파란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 동시에 2개의 공을 꺼낼 때, 나오는 빨간 공의 개수 $X=0,\ 1,\ 2$이고, 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7},$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{2}{7}+1^2\times\frac{4}{7}+2^2\times\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{8}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$

30 답 ③

5개의 제비 중에서 임의로 2개의 제비를 뽑을 때, 나오는 당첨제비의 개수 $X=0,\ 1,\ 2$이고, 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5},$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+4^2\times\frac{3}{10}=\frac{9}{5}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

31 답 ⑤

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1=2\times1-1=1,$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X-1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times1=4$이므로

$\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)=1+4=5$

32 답 ①

$\mathrm{E}(2X^2+3)=2\mathrm{E}(X^2)+3$이므로 $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하자.

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서 $\mathrm{E}(X)=2$이고, $\mathrm{V}(X)=3$이므로

$3=\mathrm{E}(X^2)-2^2\qquad\therefore\ \mathrm{E}(X^2)=7$

$\therefore\ \mathrm{E}(2X^2+3)=2\mathrm{E}(X^2)+3=2\times7+3=17$

33 답 ①

$\mathrm{E}(X)=1$이고, $\mathrm{E}(Y)=1$이므로

$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b=1$

$\therefore\ a+b=1\ \cdots$ ㉠

또, $\mathrm{V}(X)=4,\ \mathrm{V}(Y)=1$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)=a^2\times4=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}\ (\because\ a>0)$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a-b=0$

34 답 ④

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서 $\mathrm{E}(X)=1,\ \mathrm{V}(X)=1$이므로

$1=\mathrm{E}(X^2)-1^2\qquad\therefore\ \mathrm{E}(X^2)=2$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X^2+X+1)$

$=\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)+1$

$=2+1+1=4$

35 답 ②

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=2$,

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{2}-2^2=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{V}(2X+1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times\frac{1}{2}=2$

36 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$2a+2a+a=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{5}$

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{6}{5}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$

$\therefore\ \mathrm{V}(5X-1)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times\frac{14}{25}=14$

37 답 ④

확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=i)=\frac{1}{6}(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$

X의 평균을 구하면

$\mathrm{E}(X)=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$

$\therefore\ \mathrm{E}(2X-3)=2\mathrm{E}(X)-3=2\times\frac{7}{2}-3=4$

38 답 ⑤

흰 공 5개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 동시에 2개의 공을 꺼낼 때, 나오는 흰 공의 개수 $X=0,\ 1,\ 2$이고, 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_5\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{18}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{5}{18}=\frac{10}{9}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{5}{9}+2^2\times\frac{5}{18}=\frac{5}{3}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{5}{3}-\left(\frac{10}{9}\right)^2=\frac{35}{81}$

$\therefore\ \mathrm{V}(9X-5)=9^2\mathrm{V}(X)=81\times\frac{35}{81}=35$

Simple K 이항분포

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 88~89

01 답 ${}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}$

02 답 $np,\ npq,\ \sqrt{npq}$

03 답 $\frac{X}{n},\ p$

04 답 ○

05 답 ×

3의 배수는 3, 6이므로 주사위를 한 번 던져서 3의 배수가 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다. 주사위를 100번 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

06 답 ○

동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 동전을 50번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=50\times\frac{1}{2}=25$

07 답 $\mathrm{B}(4,\ 0.2)$

08 답 $\mathrm{B}(100,\ 0.2)$

09 답 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$

10 답 $\mathrm{B}\left(600,\ \frac{1}{6}\right)$

11 답 $n=5,\ p=\frac{3}{4}$

$0.75=\frac{3}{4}$이고, $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{3}{4}\right)$이므로 $n=5,\ p=\frac{3}{4}$

12 답 $\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$

13 답 $\frac{135}{512}$

$\mathrm{P}(X=3)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{135}{512}$

14 답 60

$\mathrm{E}(X)=180\times\frac{1}{3}=60$

15 답 40

$\mathrm{V}(X)=180\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=40$

Ⅲ K

16 답 $2\sqrt{10}$

$\sigma(X)=\sqrt{180\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

17 답 50

X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50$

18 답 25

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$

19 답 5

$\sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5$

20 답 $\frac{1}{3}$

주사위 한 개를 던지는 시행횟수 n이 충분히 크면 큰수의 법칙에 의해 통계적 확률 $\frac{X}{n}$는 수학적 확률 p와 같아진다.

4보다 큰 5, 6의 눈이 나올 수학적 확률 $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

21 답 $\frac{1}{2}$

동전 한 개를 던지는 시행횟수 n이 충분히 크면 큰수의 법칙에 의해 통계적 확률 $\frac{X}{n}$는 수학적 확률 p와 같아진다.

동전의 앞면이 나올 수학적 확률 $p=\frac{1}{2}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 90~93

22 답 ④

이항분포 $\mathrm{B}\left(720, \frac{1}{6}\right)$을 따르는 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{720}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{720-x}$ $(x=0, 1, \cdots, 720)$

$x=20$을 대입하면

$\mathrm{P}(X=20)={}_{720}\mathrm{C}_{20}\left(\frac{1}{6}\right)^{20}\left(\frac{5}{6}\right)^{700}=\frac{{}_{720}\mathrm{C}_{20}\times5^{700}}{6^{720}}$

즉, $a=720$, $b=5$, $c=6$

$\therefore\ a+b+c=720+5+6=731$

TIP

확률질량함수가 ${}_n\mathrm{C}_xp^xq^{n-x}$ 꼴이면 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$로 바꿀 수 있다. 역으로 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 확률질량함수 ${}_n\mathrm{C}_xp^xq^{n-x}$로 바꿀 수도 있다.

23 답 ①

ㄱ. 동전의 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 동시에 8개의 동전을 던지는 시행이므로 이항분포 $\mathrm{B}\left(8, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

ㄴ. 주사위의 눈의 수가 2가 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이고, 주사위를 8번 던지는 시행이므로 이항분포 $\mathrm{B}\left(8, \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

ㄷ. 확률변수 X_3는 흰 공 2개를 포함하여 8개의 공이 들어 있는 주머니에서 공 2개를 꺼낼 때 나오는 흰 공의 개수이므로 X_3의 확률질량함수는 $\frac{{}_2\mathrm{C}_x\cdot{}_6\mathrm{C}_{2-x}}{{}_8\mathrm{C}_2}$ $(x=0, 1, 2)$이므로 독립시행의 확률이 아니다.

따라서 이항분포 $\mathrm{B}\left(8, \frac{1}{2}\right)$을 따르는 것은 ㄱ이다.

24 답 ②

이항분포 $\mathrm{B}(10, 0.1)$을 따르는 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{10-x}$ $(x=0, 1, \cdots, 10)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(|X|\le1)&=\mathrm{P}(-1\le X\le1)\\&=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\\&={}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{9}{10}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^9\\&=\frac{9^{10}+10\times9^9}{10^{10}}=\frac{19\times9^9}{10^{10}}\end{aligned}$$

25 답 ④

자유투 성공률이 75 %이므로 $p=\frac{3}{4}$이고, 50번의 독립시행이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50, \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

즉, $n=50$, $p=\frac{3}{4}$

$\therefore\ n+p=50+\frac{3}{4}=\frac{203}{4}$

26 답 ④

$\mathrm{E}(X)=10p=2 \qquad \therefore\ p=\frac{1}{5}$

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=10\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$

27 답 ②

$a=\mathrm{E}(X)=450\times\frac{1}{3}=150$,

$b=\sigma(X)=\sqrt{450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=\sqrt{100}=10$이므로

$a+b=150+10=160$

28 답 ③

확률변수 X가 이항분포 $B\left(48, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{48\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}=\sqrt{9}=3$

$\therefore\ \sigma(3X+2)=|3|\sigma(X)=3\times3=9$

29 답 ⑤

확률변수 X가 이항분포 $B\left(50, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=50\times\frac{1}{5}=10,\ V(X)=50\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=8$

$\sigma(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$8=E(X^2)-10^2 \qquad \therefore\ E(X^2)=108$

30 답 ④

$E(X)=np=8 \cdots$ ㉠

$V(X)=np(1-p)=4 \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$8(1-p)=4 \Rightarrow 1-p=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ p=\frac{1}{2}$

31 답 ③

이항분포 $B(n, p)$에서

$E(X)=np=0.75 \cdots$ ㉠

$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=0.75$에서

$np(1-p)=0.75^2 \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$0.75(1-p)=0.75^2$

$1-p=0.75 \qquad \therefore\ p=0.25$

이것을 ㉠에 대입하면

$n\times0.25=0.75 \qquad \therefore\ n=3$

32 답 ②

확률변수 X의 확률질량함수가

$P(X=x)={}_{125}C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{125-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 125)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(125, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$E(X)=125\times\frac{1}{5}=25,\ V(X)=125\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=20$

$\therefore\ E(X)+V(X)=25+20=45$

33 답 ②

확률변수 X는 이항분포 $B\left(240, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=240\times\frac{1}{4}=60$

$V(X)=240\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=45$

$k\times V(X)=\{E(X)\}^2$에서

$45k=3600 \qquad \therefore\ k=80$

다른 풀이

$E(X)=np,\ V(X)=npq$이고,

$k\times V(X)=\{E(X)\}^2$에서 $k\times npq=(np)^2 \Rightarrow kq=np$

$n=240,\ p=\frac{1}{4},\ q=\frac{3}{4}$이므로

$k\times\frac{3}{4}=240\times\frac{1}{4} \qquad \therefore\ k=60\times\frac{4}{3}=80$

34 답 ④

확률변수 X의 확률질량함수가

$P(X=x)={}_{30}C_x\frac{2^x}{3^{30}}={}_{30}C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{30-x}\ (x=0, 1, \cdots, 30)$

확률변수 X는 이항분포 $B\left(30, \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$E(X)=30\times\frac{2}{3}=20$

$V(X)=30\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{20}{3}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$\frac{20}{3}=E(X^2)-20^2$

$\therefore\ E(X^2)=400+\frac{20}{3}=\frac{1220}{3}$

35 답 ③

$E(X)=np=4p$이므로 $n=4$

또, $V(2X)=4V(X)=4p$이므로

$4\times4p(1-p)=4p$

$1-p=\frac{1}{4} \qquad \therefore\ p=\frac{3}{4}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4, \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore\ P(X=n-1)=P(X=3)$

$={}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{4\times27}{4^4}=\frac{27}{64}$

36 답 ②

$E(X)=np=\frac{12}{5} \cdots$ ㉠

$\{\sigma(X)\}^2=V(X)=npq=\frac{12}{5}q\ (\because$ ㉠$)$

$V(X)=\frac{36}{25}$이므로

$\frac{12}{5}q=\frac{36}{25}$

$\therefore\ q=\frac{3}{5},\ p=1-q=\frac{2}{5}$

$E(X)=\frac{2n}{5}=\frac{12}{5}$에서 $n=6$

확률변수 X는 이항분포 $B\left(6, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$\frac{P(X=4)}{P(X=1)}=\frac{{}_6C_4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^2}{{}_6C_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^5}=\frac{15\times2^3}{6\times3^3}=\frac{20}{27}$

즉, $a=27,\ b=20$

$\therefore\ a+b=27+20=47$

Ⅲ
K

37 답 ③

ㄱ. $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y)=np$ (참)

ㄴ. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)$

$k=2$일 때, 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4n,\ \frac{p}{4}\right)$를 따르므로

$\mathrm{V}(Y)=4n\times\frac{p}{4}\left(1-\frac{p}{4}\right)=np\left(1-\frac{p}{4}\right)$

$\mathrm{V}(X)-\mathrm{V}(Y)=np\left\{(1-p)-\left(1-\frac{p}{4}\right)\right\}=np\left(-\frac{3p}{4}\right)$

$0<p\le1$이므로

$-\frac{3}{4}\le-\frac{3p}{4}<0$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)-\mathrm{V}(Y)<0$ (거짓)

ㄷ. $\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X\right)=\frac{1}{4}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{4}np(1-p)$

$k=1$일 때, 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(2n,\ \frac{p}{2}\right)$를 따르므로

$\mathrm{V}(Y)=2n\times\frac{p}{2}\left(1-\frac{p}{2}\right)=np\left(1-\frac{p}{2}\right)$

$\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X\right)-\mathrm{V}(Y)=np\left\{\frac{1}{4}(1-p)-\left(1-\frac{p}{2}\right)\right\}$

$=np\left(-\frac{3}{4}+\frac{p}{4}\right)$

$0<p\le1$이므로

$-\frac{3}{4}<-\frac{3}{4}+\frac{p}{4}\le-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X\right)-\mathrm{V}(Y)<0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

38 답 ⑤

명중률이 90%, 즉 $\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$인 미사일을 100번 발사할 때, 명중한 미사일의 개수인 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{9}{10}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{9}{10}=90$

39 답 ⑤

두 개의 동전을 던질 때, 나오는 모든 경우는 {(앞, 앞), (앞, 뒤), (뒤, 앞), (뒤, 뒤)}이므로 두 개의 동전을 던져서 둘 다 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 두 개의 동전을 300번 던질 때, 둘 다 앞면이 나오는 횟수가 확률변수 X이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(300,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\sigma(X)=\sqrt{300\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}$

$=\sqrt{\frac{900}{16}}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$

40 답 ③

발아될 확률이 90 %, 즉 $\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$인 씨앗을 100개 심었을 때, 발아되는 씨앗의 개수를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{9}{10}\right)$를 따른다.

$a=\mathrm{E}(X)=100\times\frac{9}{10}=90$,

$b=\mathrm{V}(X)=100\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=9$이므로

$\therefore\ a+b=90+9=99$

41 답 ④

한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수인 3, 6이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 한 개의 주사위를 90번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(90,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\mathrm{V}(X)=90\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=20$이므로

$\mathrm{V}(2X+3)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times20=80$

42 답 ②

흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 나오는 확률은 $\frac{3}{5}$이므로 그 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 색깔을 확인하고 다시 넣는 일을 100번 반복할 때 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{100\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

43 답 ⑤

불량품이 생산될 확률이 20 %, 즉 $\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$인 기계가 100개의 제품을 생산할 때, 불량품의 개수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{5}=20$, $\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$16=\mathrm{E}(X^2)-20^2\qquad\therefore\ \mathrm{E}(X^2)=416$

44 답 ③

이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 평균은

$\mathrm{E}(X)=np=1$이므로 $p=\frac{1}{n}$ ⋯ ㉠

$\{\sigma(X)\}^2=\mathrm{V}(X)=npq=q=\frac{98}{100}=\frac{49}{50}$이므로

$p=1-q=\frac{1}{50}=\frac{1}{n}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ n=50$

45 답 ②

서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때 나오는 전체 경우의 수는 36이고, 두 눈의 수의 합이 10 또는 12가 되는 경우는 두 눈의 수가 (4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)인 경우이므로 이때의 확률은 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

즉, 주어진 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{9}\right)$을 따른다.

$\sigma(X)=\sqrt{n\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2n}}{9}=4$에서

$\sqrt{2n}=18$

$2n=324 \qquad \therefore n=162$

46 답 ③

한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 동전을 8번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(8,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$m=\mathrm{E}(X)=8\times\frac{1}{2}=4$,

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{8\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{|X-m|}{\sigma}<\frac{1}{\sqrt{2}}\right)&=\mathrm{P}\left(\frac{|X-4|}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&=\mathrm{P}(-1<X-4<1)\\&=\mathrm{P}(3<X<5)\\&=\mathrm{P}(X=4)\\&={}_8\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\\&=\frac{35}{128}\end{aligned}$$

47 답 ④

$\left|\frac{X}{10}-\frac{1}{6}\right|<0.1$에서 $-0.1<\frac{X}{10}-\frac{1}{6}<0.1$

$\frac{1}{6}-0.1<\frac{X}{10}<\frac{1}{6}+0.1$

$0.66\cdots<X<2.66\cdots$

확률변수 X는 횟수이므로 정수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(0.66\cdots<X<2.66\cdots)&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\\&=0.323+0.291\\&=0.614\end{aligned}$$

48 답 ㄱ, ㄷ, ㄴ, ㄹ

〈보기〉에서 주어진 식은 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<0.1\right)$의 값을 의미한다.

ㄱ. 100번의 시행 중 어떤 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하고 그 사건이 일어날 확률이 $\frac{1}{2}$인 경우 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

ㄴ. 400번의 시행 중 어떤 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 Y라 하고 그 사건이 일어날 확률이 $\frac{1}{2}$인 경우 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

ㄷ. 200번의 시행 중 어떤 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 Z라 하고 그 사건이 일어날 확률이 $\frac{1}{2}$인 경우 Z는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

ㄹ. 1000번의 시행 중 어떤 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 W라 하고 그 사건이 일어날 확률이 $\frac{1}{2}$인 경우 W는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1000,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

큰수의 법칙에 의하여 n이 커질수록 확률은 1에 가까워진다.

따라서 작은 것부터 차례로 나열하면 ㄱ, ㄷ, ㄴ, ㄹ이다.

심플 정리

[큰수의 법칙]

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p이고, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 하면 임의의 양수 h에 대하여 n이 충분히 크면

확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)$는 1에 가까워진다.

즉, 시행횟수 n이 커지면 통계적 확률 $\frac{X}{n}$는 수학적 확률 p에 가까워진다.

Ⅲ

K

연습 문제 [I~K]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 94~95

01 답 ⑤

⑤ 버스를 기다리는 시간을 X분이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0\le X\le 10$인 모든 실수이므로 셀 수 없다. 따라서 이산확률변수가 아니다.

02 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$\frac{3}{10}+p+\frac{1}{10}+p+p=1$

$3p=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$\therefore p=\frac{1}{5}$

03 답 ⑤

$\mathrm{P}(3\le X\le 4)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$이므로

먼저 $\mathrm{P}(X=3)$, $\mathrm{P}(X=4)$를 각각 구하자.

(i) 나오는 눈의 수의 합이 3인 경우는

$(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$이므로 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{36}$

(ii) 나오는 눈의 수의 합이 4인 경우는

$(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$이므로 $\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{36}$

$\therefore \mathrm{P}(3\le X\le 4)=\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{5}{36}$

04 답 ⑤

$X^2-3X+2=(X-1)(X-2)\le 0$에서 $1\le X\le 2$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-3X+2\le 0)=\mathrm{P}(1\le X\le 2)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35}$이므로

$\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\frac{12}{35}+\frac{18}{35}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$

05 답 ③

확률의 총합이 1이므로

$a+\frac{1}{4}+b=1$

$\therefore a+b=\frac{3}{4}$ ⋯ ㉠

$\mathrm{E}(X)=1\times a+3\times\frac{1}{4}+7\times b=5$에서

$a+7b=\frac{17}{4}$ ⋯ ㉡

㉡$-$㉠을 연립하여 a를 소거하면

$6b=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$ $\qquad\therefore b=\frac{7}{12}$

06 답 ③

4로 나눈 나머지가 확률변수이므로 $X=0, 1, 2, 3$이지?

주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수를 4로 나눈 나머지를 확률변수 X라 하자. X의 평균은?

(단, 주사위의 각 눈이 나올 확률은 모두 같다.)

① 2 ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

X가 이산확률변수니까 확률분포표를 구하여 평균을 구해.

1st 확률변수 X의 확률분포표를 만들어 보자.

주사위의 눈을 4로 나눈 나머지는 0부터 3까지이므로 확률변수 X가 취할 수 있는 값은 $X=0,\ 1,\ 2,\ 3$이다.

X의 확률분포표는 다음과 같다.

주사위 눈	4	1, 5	2, 6	3	
X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

2nd 이산확률분포의 평균의 정의를 이용해서 $\mathrm{E}(X)$를 구해.

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$

[평균의 정의]
$\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$

07 답 ②

$\mathrm{E}(X)=3$, $\mathrm{V}(X)=5$이고,

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$5=\mathrm{E}(X^2)-3^2$ $\qquad\therefore \mathrm{E}(X^2)=14$

$\therefore \mathrm{E}((2X-1)^2)=\mathrm{E}(4X^2-4X+1)$

$=4\mathrm{E}(X^2)-4\mathrm{E}(X)+1$

$=4\times 14-4\times 3+1$

$=56-12+1=45$

08 답 ③

확률변수 X의 확률분포표가 다음과 같다.

확률의 총합이 1이라는 것으로부터 a와 b의 관계식을 찾아.

X	-1	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a^2	$\frac{1}{3}$	b	$\frac{1}{6}$	1

X의 분산이 최댓값을 가질 때, $12a$의 값은?

구해야 하는 것이 a의 값이니까 분산을 a의 함수로 나타내보자.

① $\sqrt{15}$ ② $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ ③ $2\sqrt{15}$

④ $\frac{5\sqrt{15}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{15}$

1st 확률의 총합이 1임을 이용하여 a와 b의 관계식을 찾자.

확률의 총합이 1이므로 $a^2+\frac{1}{3}+b+\frac{1}{6}=1$에서

$a^2+b=\frac{1}{2}$이므로 $b=\frac{1}{2}-a^2$ ⋯ ㉠

2nd $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$을 이용해서 분산을 a와 b의 식으로 나타내보자.

$$E(X)=(-1)\times a^2+0\times\frac{1}{3}+1\times b+2\times\frac{1}{6}$$
$$=-a^2+b+\frac{1}{3}$$
$$=-a^2+\left(\frac{1}{2}-a^2\right)+\frac{1}{3}\ (\because ㉠)$$
$$=-2a^2+\frac{5}{6}$$
$$E(X^2)=(-1)^2\times a^2+0\times\frac{1}{3}+1^2\times b+2^2\times\frac{1}{6}$$
$$=a^2+b+\frac{2}{3}$$
$$=\frac{7}{6}\ (\because ㉠)$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{7}{6}-\left(-2a^2+\frac{5}{6}\right)^2$$

이때, 분산이 최댓값을 가지려면 $-2a^2+\frac{5}{6}=0$이어야 한다.

즉, $a^2=\frac{5}{12}$

$0\le a\le 1$이므로 $a=\frac{2\sqrt{15}}{12}$

a는 확률값이야.

$\therefore 12a=2\sqrt{15}$

다른 풀이

확률의 총합이 1이므로 $a^2+b=\frac{1}{2} \Rightarrow a^2=\frac{1}{2}-b$ ⋯ ㉠

$$E(X)=-a^2+b+\frac{1}{3}$$
$$=-\left(\frac{1}{2}-b\right)+b+\frac{1}{3}(\because ㉠)$$
$$=2b-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=2b-\frac{1}{6}$$
$$E(X^2)=a^2+b+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}(\because ㉠)$$
$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{7}{6}-\left(2b-\frac{1}{6}\right)^2$$
$$=\frac{7}{6}-4\left(b-\frac{1}{12}\right)^2$$

분산이 최댓값을 가지려면 $b=\frac{1}{12}$이어야 한다.

이것을 ㉠에 대입하면

$$a^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

$\therefore a=\frac{2\sqrt{15}}{12}(\because a>0)$

$\therefore 12a=2\sqrt{15}$

09 답 ③

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{3}{10}\right)$을 따르므로

$E(X)=\frac{3}{10}n=30 \quad \therefore n=100$

$\therefore V(X)=100\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=21$

10 답 ②

확률변수 X는 이항분포 $B\left(125, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{125\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=2\sqrt{5}$

11 답 ⑤

$E(2X-5)=2E(X)-5=175$에서 $E(X)=np=90$

$\sigma(2X-5)=2\sigma(X)=12$에서 $\sigma(X)=\sqrt{npq}=6$

즉, $npq=90q=36$에서 $q=\frac{36}{90}=\frac{2}{5}$

$\therefore p=1-q=\frac{3}{5}$

$E(X)=n\times\frac{3}{5}=90$에서

$n=90\times\frac{5}{3}=150$

12 답 ⑤

주어진 식은 확률질량함수가

$P(X=x)={}_8C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{8-x}\ (x=0, 1, \cdots, 8)$

으로 주어진 확률변수 X의 평균을 구하는 식이다.

이때, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(8, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=8\times\frac{3}{4}=6$

13 답 ⑤

주어진 그래프에서 $f(m)$이 0보다 크려면 주사위의 눈의 수가 1 또는 2가 나와야 한다. 즉, 한 개의 주사위를 던졌을 때 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이고, 이 시행을 15회 반복하므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$E(X)=15\times\frac{1}{3}=5$

14 답 7

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$16=8E(X)-\{E(X)\}^2$

즉, $\{E(X)-4\}^2=0 \quad \therefore E(X)=4$

$\therefore E(3X-5)=3E(X)-5=3\times4-5=7$

15 답 300

동전을 두 번 던질 때, 나오는 경우와 상금은 다음과 같다.

(H : 앞면, T : 뒷면)

(H, H) : $100+100=200$(원)

(H, T) : $100+200=300$(원)

(T, H) : $200+100=300$(원)

(T, T) : $200+200=400$(원)

즉, X가 취할 수 있는 값은 200, 300, 400이고, 이에 대응하는 확률은 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$이다.

X	200	300	400	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=200\times\frac{1}{4}+300\times\frac{1}{2}+400\times\frac{1}{4}=300$

16 답 4

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}n$

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3n, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(Y)=3n\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12}n$

확률변수 Z는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(Z)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$ … Ⅰ

세 개의 분산의 크기를 비교하기 위해 모두의 분모를 36으로 하면

$\mathrm{V}(X)=\frac{9}{36}n$, $\mathrm{V}(Y)=\frac{15}{36}n$, $\mathrm{V}(Z)=\frac{8}{36}n$

이 중 가장 작은 값은 $m=\frac{8}{36}n=\frac{2}{9}n$ … Ⅱ

$$\therefore \frac{\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)+\mathrm{V}(Z)}{m}=\frac{\frac{9}{36}n+\frac{15}{36}n+\frac{8}{36}n}{\frac{8}{36}n}$$

$$=\frac{9+15+8}{8}=\frac{32}{8}$$

$$=4$$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	세 확률변수 X, Y, Z의 분산을 구한다.	60%
Ⅱ	m을 구한다.	20%
Ⅲ	주어진 식의 값을 계산한다.	20%

Simple L 연속확률변수와 정규분포

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 96~97

01 답 연속확률변수

02 답 1

03 답 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ×

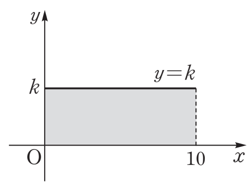
정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

07 답 $\frac{1}{10}$

확률밀도함수가 정의된 구간에서 확률밀도함수와 x축 사이의 넓이는 1이므로

$10\times k=1$

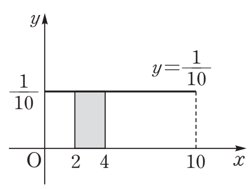
$\therefore k=\frac{1}{10}$



08 답 $\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(2\le X\le 4)$

$=(4-2)\times\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$

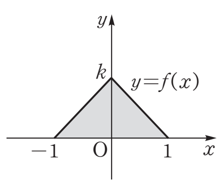


09 답 1

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$와 x축 사이의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 2\times k=1$

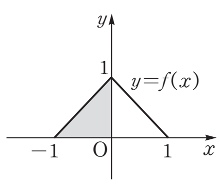
$\therefore k=1$



10 답 $\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(-1\le X\le 0)$

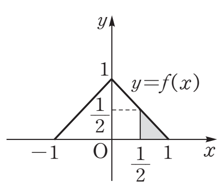
$=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$



11 답 $\frac{1}{8}$

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$



12 답 1

확률밀도함수가 정의된 구간에서 확률밀도함수와 x축 사이의 넓이가 1이므로

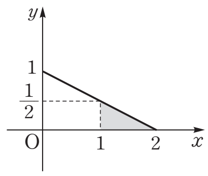
$\frac{1}{2}\times2\times k=1$

$\therefore k=1$

13 답 $\frac{1}{4}$

$P(1\le X\le2)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{4}$



14 답 $\frac{3}{4}$

$P(0\le X\le1)=1-P(1\le X\le2)$

$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

15 답 $N(5,\ 4)$ 또는 $N(5,\ 2^2)$

16 답 $N(3,\ 2)$ 또는 $N(3,\ (\sqrt{2})^2)$

17 답 $N(0,\ 1)$

18 답 $E(X_1)<E(X_2)<E(X_3)$

정규분포곡선의 대칭축은 평균을 의미하므로 오른쪽에 있을수록 확률변수의 평균값이 크다.

$\therefore E(X_1)<E(X_2)<E(X_3)$

19 답 $V(X_1)=V(X_2)=V(X_3)$

정규분포곡선의 모양이 같으므로 분산의 값은 모두 같다.

즉, $V(X_1)=V(X_2)=V(X_3)$

20 답 $E(X_4)=E(X_5)<E(X_6)$

정규분포곡선의 대칭축은 평균을 의미하므로 오른쪽에 있을수록 확률변수의 평균값이 크다.

$\therefore E(X_4)=E(X_5)<E(X_6)$

21 답 $\sigma(X_5)=\sigma(X_6)<\sigma(X_4)$

정규분포곡선이 낮고 폭이 넓어질수록 표준편차의 값은 커진다.

$\therefore \sigma(X_5)=\sigma(X_6)<\sigma(X_4)$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 98~99

22 답 ⑤

앞면이 나오는 횟수는 셀 수 있으므로 이산확률변수이다.

23 답 ㄴ, ㄷ

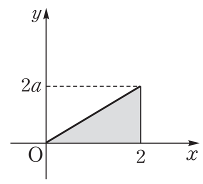
ㄱ. 제품의 개수는 이산확률변수이다.

24 답 ①

$0\le x\le2$에서 $y=f(x)$와 x축과 이루는 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times2\times2a=1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$



25 답 ②

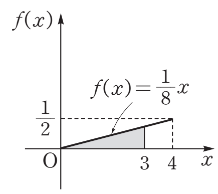
$-1\le x\le4$에서 함수 $f(x)$와 x축 사이의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times5\times k=1\qquad\therefore k=\frac{2}{5}$

26 답 ⑤

$0\le x\le3$에서 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이가 구하는 확률이므로

$\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{8}=\frac{9}{16}$



27 답 ④

$-1\le x\le1$에서 $f(x)$와 x축 사이의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times2\times(3k+k)=4k=1\qquad\therefore k=\frac{1}{4}$

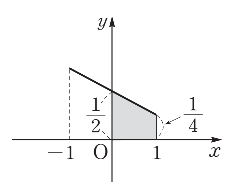
확률밀도함수는 두 점 $\left(-1,\ \frac{3}{4}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$을 지나는 직선이므로

$$y=\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{1-(-1)}(x-1)+\frac{1}{4}$$

$\therefore f(x)=y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\ (-1\le x\le1)$

확률 $P(0\le X\le1)$은 구간 $0\le x\le1$에서 $f(x)$와 x축 사이의 넓이이므로

$\frac{1}{2}\times1\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$



심플 정리

[직선의 방정식]

(1) 기울기가 m이고 한 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y=m(x-x_1)+y_1$

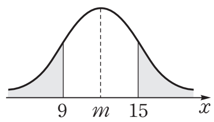
(2) 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1\ (x_1\ne x_2)$

28 답 ④

④ σ의 값이 클수록 가운데 부분의 높이는 낮아지고 폭이 넓어진다.

29 답 ④

정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

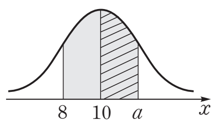


$\mathrm{P}(X\le 9)=\mathrm{P}(X\ge 15)$에서

$m=\frac{9+15}{2}=12$

30 답 ④

정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 3^2)$을 따르는 정규분포곡선은 직선 $x=10$에 대하여 대칭이고



$\mathrm{P}(8\le X\le a)=2\mathrm{P}(8\le X\le 10)$이므로

$\frac{8+a}{2}=10$

$8+a=20$

$\therefore\ a=12$

TIP

정규분포곡선의 대칭성은 자주 이용되는 성질이다. 즉, 평균을 m이라고 할 때, $x=m$에 대하여 대칭이다.
이 문제의 경우 $x=10$에 대하여 대칭이므로 a의 값은 $x=10$과 $x=8$ 사이의 거리가 같아야 한다는 것으로 해결되는 것이다.

31 답 ①

정규분포곡선의 대칭축은 확률변수의 평균을 의미하고, 그 값이 작을수록 왼쪽에 위치한다. 즉, 평균이 가장 작은 확률변수는 곡선이 가장 왼쪽에 위치한 X_1이다.

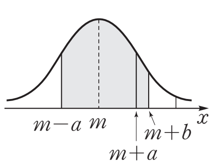
정규분포곡선의 곡선의 모양은 분산의 크기에 따라 달라지고, 그 값이 클수록 높이가 낮고 폭이 넓어진다. 즉, 분산이 가장 큰 확률변수는 가장 높이가 낮은 곡선인 X_2이다.

심플 정리

[정규분포곡선의 성질]

(1) $x=m$에 대하여 대칭이다.
(2) 곡선과 x축 사이의 전체 넓이는 1이다.
(3) m의 값이 클수록 대칭축이 오른쪽에 위치한다.
(4) σ의 값이 작을수록 곡선의 높이가 높아지고 폭이 좁아진다.
σ의 값이 클수록 곡선의 높이가 낮아지고 폭이 넓어진다.

32 답 ④



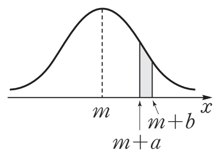
$\mathrm{P}(m-a\le X\le m+b)$

$=\mathrm{P}(m-a\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+b)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+a)+\mathrm{P}(m\le X\le m+b)$($\because$ 대칭성)

$=0.2+0.3=0.5$

33 답 ①

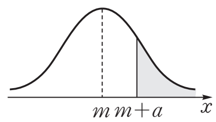


$\mathrm{P}(m+a\le X\le m+b)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+b)-\mathrm{P}(m\le X\le m+a)$

$=0.3-0.2=0.1$

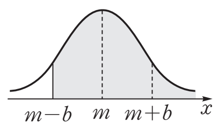
34 답 ③



$\mathrm{P}(m+a\le X)$

$=\mathrm{P}(m\le X)-\mathrm{P}(m\le X\le m+a)$

$=0.5-0.2=0.3$



$\mathrm{P}(m-b\le X)$

$=\mathrm{P}(m-b\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+b)+0.5$

$=0.3+0.5=0.8$

$\therefore\ \mathrm{P}(m+a\le X)+\mathrm{P}(m-b\le X)$

$=0.3+0.8=1.1$

Simple M 표준정규분포

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 100～101

01 답 표준정규분포

02 답 $z=0$

03 답 $\dfrac{X-m}{\sigma}$

04 답 $\mathrm{N}(np,\ npq)$

05 답 ×

$\mathrm{N}(10,\ 4)=\mathrm{N}(10,\ 2^2)$이므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-10}{2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

06 답 ○

07 답 ×

$\mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{1}{5}=20,\ \mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=16$

08 답 1.23

z	…	0.03	0.04	…
0.0	…	.0120	.0160	…
⋮		⋮	⋮	
1.2	…	$\boxed{.3907}$	.3925	…
1.3	…	.4082	.4099	…
⋮		⋮	⋮	

위의 표준정규분포표에서 확률의 값 0.3907이 있는 왼쪽 끝 숫자가 1.2이고, 위쪽 끝 숫자가 0.03이므로 $a=1.23$

09 답 0.4099

z	…	0.03	$\boxed{0.04}$	…
0.0	…	.0120	.0160	…
⋮		⋮	⋮	
1.2	…	.3907	.3925	…
$\boxed{1.3}$	…	.4082	.4099	…
⋮		⋮	⋮	

위의 표준정규분포표에서 왼쪽 끝 숫자가 1.3인 위쪽 끝 숫자가 0.04인 세로줄이 만나는 곳에 있는 숫자가 구하는 확률의 값 b이므로 $b=0.4099$

10 답 $\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)$

$m=6,\ \sigma=3$이므로

$$\mathrm{P}(3\le X\le 6)=\mathrm{P}\left(\frac{3-6}{3}\le\frac{X-6}{3}\le\frac{6-6}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)$$

11 답 $\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)$

$m=100,\ \sigma=5$이므로

$$\mathrm{P}(90\le X\le 110)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{90-100}{5}\le\frac{X-100}{5}\le\frac{110-100}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)$$

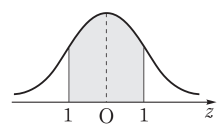
12 답 $\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

$m=100,\ \sigma=\sqrt{0.01}=0.1$이므로

$$\mathrm{P}(0.4\le X\le 0.5)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{0.4-0.3}{0.1}\le\frac{X-0.3}{0.1}\le\frac{0.5-0.3}{0.1}\right)$$
$$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$$

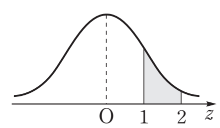
13 답 0.6826

$$\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=2\times 0.3413$$
$$=0.6826$$



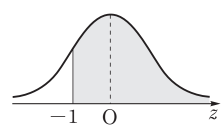
14 답 0.1359

$$\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.4772-0.3413$$
$$=0.1359$$



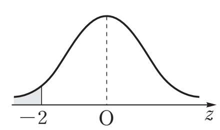
15 답 0.8413

$$\mathrm{P}(Z\ge -1)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+0.5$$
$$=0.3413+0.5$$
$$=0.8413$$



16 답 0.0228

$$\mathrm{P}(Z\le -2)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.4772$$
$$=0.0228$$



17 답 $\mathrm{E}(X)=5,\ \sigma(X)=2$

X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(25,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\begin{cases}\mathrm{E}(X)=25\times\dfrac{1}{5}=5\\ \sigma(X)=\sqrt{25\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}}=2\end{cases}$$

18 답 $\mathrm{N}(5,\ 2^2)$

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(25,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르고, $n=25$가 충분히 크므로 X의 분포는 근사적으로

$\mathrm{N}\left(25\times\dfrac{1}{5},\ 25\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(5,\ 2^2)$을 따른다.

Ⅲ M

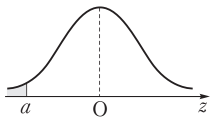
유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 102~105

19 답 ①

$P(Z \le a)$의 값이 0.5보다 작으므로 a는 음수이다.

$P(Z \le a) = 0.0228$에서



$P(Z \le a)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le |a|)$

$= 0.0228$

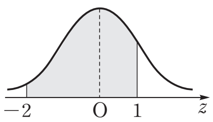
즉, $P(0 \le Z \le |a|) = 0.4772$

$P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$이므로 $|a| = 2$

$\therefore a = -2$ ($\because a < 0$)

20 답 ④

$P(-2 \le Z \le 1)$



$= P(-2 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1)$

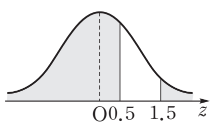
$= P(0 \le Z \le 2) + P(0 \le Z \le 1)$

$= 0.4772 + 0.3413$

$= 0.8185$

21 답 ④

$P(Z \le 0.5) + P(1.5 \le Z)$



$= 1 - P(0.5 \le Z \le 1.5)$

이고,

$P(0.5 \le Z \le 1.5)$

$= P(0 \le Z \le 1.5) - P(0 \le Z \le 0.5)$

$= 0.4332 - 0.1915$

$= 0.2417$

이므로

$P(Z \le 0.5) + P(1.5 \le Z) = 1 - 0.2417 = 0.7583$

22 답 ④

$E(X) = 100$, $\sigma(X) = 5$이므로

$E(Z) = E\left(\frac{1}{5}X - 20\right) = \frac{1}{5}E(X) - 20$

$= \frac{1}{5} \times 100 - 20 = 0$

$\sigma(Z) = \sigma\left(\frac{1}{5}X - 20\right) = \frac{1}{5}\sigma(X) = \frac{1}{5} \times 5 = 1$

$\therefore E(Z) + \sigma(Z) = 0 + 1 = 1$

23 답 ④

정규분포 $N(30, 2^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여

$Z = \frac{X-30}{2}$으로 표준화하면

$P(27 \le X \le 33) = P\left(\frac{27-30}{2} \le \frac{X-30}{2} \le \frac{33-30}{2}\right)$

$= P(-1.5 \le Z \le 1.5)$

$= 2 \times P(0 \le Z \le 1.5)$

$= 2 \times 0.4332 = 0.8664$

TIP

정규분포를 따르는 확률변수는 표준화를 통해 확률을 구하게 된다.

즉, $N(m, \sigma^2)$을 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화하면 표준정규분포 $N(0, 1)$로 바뀌게 되고, 표준정규분포표를 이용하여 값을 구할 수 있다.

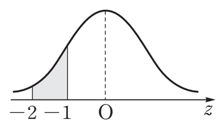
24 답 ③

정규분포 $N(40, 8^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여

$Z = \frac{X-40}{8}$으로 표준화하면

$P(24 \le X \le 32)$

$= P\left(\frac{24-40}{8} \le \frac{X-40}{8} \le \frac{32-40}{8}\right)$



$= P(-2 \le Z \le -1)$

$= P(1 \le Z \le 2)$

$= P(0 \le Z \le 2) - P(0 \le Z \le 1)$

$= 0.4772 - 0.3413$

$= 0.1359$

25 답 ④

정규분포 $N(45, 5^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여

$Z = \frac{X-45}{5}$로 표준화하면

$P(45 \le X \le k)$

$= P\left(\frac{45-45}{5} \le \frac{X-45}{5} \le \frac{k-45}{5}\right)$

$= P\left(0 \le Z \le \frac{k-45}{5}\right) = 0.4772$

이때, $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$이므로

$\frac{k-45}{5} = 2$

$\therefore k = 55$

26 답 ③

정규분포 $N(15, 3^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여

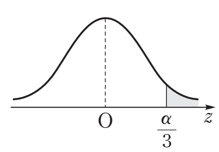
$Z = \frac{X-15}{3}$로 표준화하면

$P(X \ge 15 + \alpha)$

$= P\left(\frac{X-15}{3} \ge \frac{(15+\alpha)-15}{3}\right) = P\left(Z \ge \frac{\alpha}{3}\right) = 0.1587$

이때, $P\left(Z \ge \frac{\alpha}{3}\right)$의 값이 0.5보다 작으므로 α는 양수이다.

$P\left(0 \le Z \le \frac{\alpha}{3}\right)$



$= P(Z \ge 0) - P\left(Z \ge \frac{\alpha}{3}\right)$

$= 0.5 - 0.1587 = 0.3413$

이때, $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$이므로

$\frac{\alpha}{3} = 1 \qquad \therefore \alpha = 3$

27 답 ③

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$, $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-10}{2}$, $Z_Y=\dfrac{Y-10}{4}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(12\le X\le 16)=\mathrm{P}(14\le Y\le a)$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{12-10}{2}\le\frac{X-10}{2}\le\frac{16-10}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{14-10}{4}\le\frac{Y-10}{4}\le\frac{a-10}{4}\right)$$

즉, $\mathrm{P}(1\le Z_X\le 3)=\mathrm{P}\left(1\le Z_Y\le\dfrac{a-10}{4}\right)$이므로

$\dfrac{a-10}{4}=3 \qquad \therefore a=22$

28 답 ①

$\mathrm{E}(X)=9$, $\mathrm{V}(X)=1^2$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1=2\times9-1=17$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X-1)=2^2\mathrm{V}(X)=2^2\times1^2=2^2$

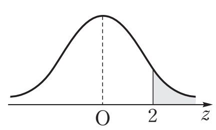
이때, X가 정규분포 $\mathrm{N}(9,\ 1^2)$을 따를 때, Y는 정규분포 $\mathrm{N}(17,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{Y-17}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(19\le Y\le 20)&=\mathrm{P}\left(\frac{19-17}{2}\le\frac{Y-17}{2}\le\frac{20-17}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4332-0.3413\\&=0.0919\end{aligned}$$

29 답 ①

$X>30$이면 지각하므로 구하는 확률은



$\mathrm{P}(X>30)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-20}{5}>\dfrac{30-20}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z>2)=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

30 답 ⑤

국어 성적은 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 20^2)$을 따르므로 이 학생의 국어 점수를 표준화하면

$Z(\text{국어})=\dfrac{80-60}{20}=1$

수학 성적은 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 18^2)$을 따르므로 이 학생의 수학 점수를 표준화하면

$Z(\text{수학})=\dfrac{82-60}{18}=\dfrac{22}{18}=\dfrac{11}{9}=1.22\cdots$

영어 성적은 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 9^2)$을 따르므로 이 학생의 영어 점수를 표준화하면

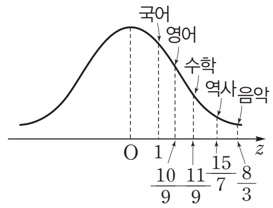
$Z(\text{영어})=\dfrac{90-80}{9}=\dfrac{10}{9}=1.11\cdots$

역사 성적은 정규분포 $\mathrm{N}(55,\ 7^2)$을 따르므로 이 학생의 역사 점수를 표준화하면

$Z(\text{역사})=\dfrac{70-55}{7}=\dfrac{15}{7}=2.14\cdots$

음악 성적은 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 3^2)$을 따르므로 이 학생의 음악 점수를 표준화하면

$Z(\text{음악})=\dfrac{58-50}{3}=\dfrac{8}{3}=2.66\cdots$

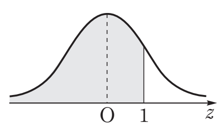


따라서 상대적으로 가장 높은 점수의 과목은 ‘음악’이다.

31 답 ③

통학 거리를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3,\ 0.5^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-3}{0.5}$으로 표준화하면



$\mathrm{P}(X\le 3.5)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-3}{0.5}\le\dfrac{3.5-3}{0.5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5+0.34$

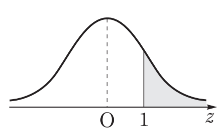
$=0.84$

따라서 통학 거리가 3.5 km 이내인 학생들은 전체 학생의 84 %이다.

32 답 ②

수학 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 15^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-60}{15}$으로 표준화하면



$\mathrm{P}(X\ge 75)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-60}{15}\ge\dfrac{75-60}{15}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.3413$

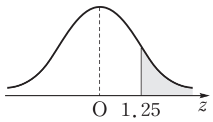
$=0.1587$

따라서 수학 성적이 75점인 학생이 15.87 %이므로 수학 성적이 75점인 학생은 2등급이다.

33 답 ②

수학 서술형 수행평가 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 0.8^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-8}{0.8}$로 표준화하면



$\mathrm{P}(X\geq 9)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-8}{0.8}\geq\dfrac{9-8}{0.8}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 1.25)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.25)$

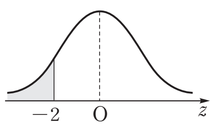
$=0.5-0.3944=0.1056$

전체 학생이 100명이므로 이 서술형 수행평가 결과가 9점 이상인 학생은 $100\times 0.1056=10.56$(명) 이하, 즉 10명이다.

34 답 ③

우유의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 5^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-200}{5}$으로 표준화하면



$\mathrm{P}(X\leq 190)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-200}{5}\leq\dfrac{190-200}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq -2)$

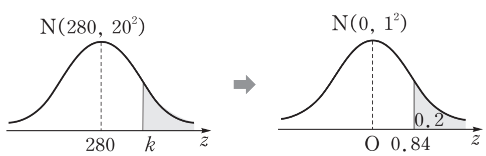
$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

하루에 생산되는 우유의 개수가 10000개이므로 중량 미달 우유는 $10000\times 0.0228=228$(개)이다.

35 답 ③

상위 20 %의 경계가 되는 점수를 k라 하자.



$\mathrm{P}(X\geq k)=0.2$이면 $\mathrm{P}(280\leq X\leq k)=0.3$

확률변수 X를 $Z=\dfrac{X-280}{20}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(280\leq X\leq k)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{280-280}{20}\leq\dfrac{X-280}{20}\leq\dfrac{k-280}{20}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\dfrac{k-280}{20}\right)=0.3$

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.84)=0.3$이므로

$\dfrac{k-280}{20}=0.84$

$\therefore\ k=280+20\times 0.84=296.8$(점)

따라서 입사시험의 점수는 정수이므로 면접 대상자가 되기 위해서는 최소 297점 이상이어야 한다.

36 답 ⑤

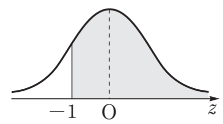
확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(162,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=162\times\dfrac{2}{3}=108$,

$\mathrm{V}(X)=162\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=36$

n은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(108,\ 6^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-108}{6}$로 표준화하면



$\mathrm{P}(X\geq 102)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-108}{6}\geq\dfrac{102-108}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq -1)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(Z\geq 0)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+0.5$

$=0.3413+0.5$

$=0.8413$

37 답 ①

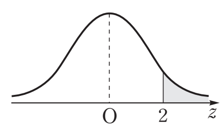
주사위를 한 번 던질 때 3의 눈이 나올 확률이 $\dfrac{1}{6}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=180\times\dfrac{1}{6}=30$,

$\mathrm{V}(X)=180\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=25$

n은 충분히 크므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-30}{5}$으로 표준화하면



$\mathrm{P}(X\geq 40)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-30}{5}\geq\dfrac{40-30}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 2)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

38 답 ②

두 개의 주사위를 던지는 시행에서 두 눈의 수가 같게 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. 두 눈의 수가 같은 경우는 (1, 1), (2, 2), ⋯, (6, 6)으로 6가지이므로 이 경우가 일어날 확률은 $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$이다.

이때, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=720\times\dfrac{1}{6}=120$,

$\mathrm{V}(X)=720\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=100$

n은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-120}{10}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(110\le X\le 140)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{110-120}{10}\le\dfrac{X-120}{10}\le\dfrac{140-120}{10}\right)$

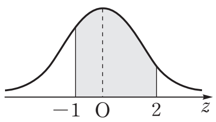
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$



39 답 ②

버스가 운행표대로 A정류장에 도착하는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \dfrac{9}{10}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=400\times\dfrac{9}{10}=360$,

$\mathrm{V}(X)=400\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{10}=6^2$

n은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 6^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-360}{6}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(363\le X\le 369)$

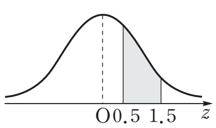
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{363-360}{6}\le\dfrac{X-360}{6}\le\dfrac{369-360}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.4332-0.1915$

$=0.2417$



40 답 ①

이 기계에서 생산된 불량품의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{10}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{1}{10}=10$,

$\mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{9}{10}=3^2$

n은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 3^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-10}{3}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(X\le 7)$

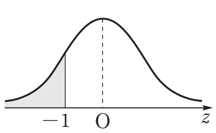
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-10}{3}\le\dfrac{7-10}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.3413$

$=0.1587$



41 답 ①

하프라인에서 72회 슛을 시도하여 성공한 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=72\times\dfrac{2}{3}=48$, $\mathrm{V}(X)=72\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=4^2$

n은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 4^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-48}{4}$로 표준화하면

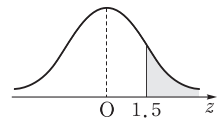
$\mathrm{P}(X\ge 54)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-48}{4}\ge\dfrac{54-48}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$



42 답 ③

흰 공 2개, 파란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 흰 공 1개, 파란 공 1개를 뽑을 확률은 $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=450\times\dfrac{2}{3}=300$, $\mathrm{V}(X)=450\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=10^2$

n은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 10^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-300}{10}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(288\le X\le 296)$

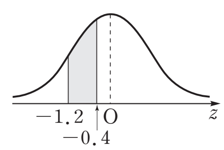
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{288-300}{10}\le\dfrac{X-300}{10}\le\dfrac{296-300}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.2\le Z\le -0.4)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.4)$

$=0.3849-0.1554$

$=0.2295$



43 답 ①

400명의 시청자 중 이 드라마를 시청하는 사람의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.2)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=400\times 0.2=80$, $\mathrm{V}(X)=400\times 0.2\times 0.8=8^2$

n은 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-80}{8}$으로 표준화하면

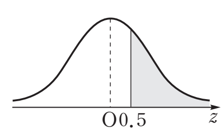
$\mathrm{P}(X\ge 84)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-80}{8}\ge\dfrac{84-80}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$



Ⅲ M

44 답 ④

(ⅰ) 동전의 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50$,

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=5^2$

n은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-50}{5}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(X\geq 60)=\mathrm{P}\left(\frac{X-50}{5}\geq\frac{60-50}{5}\right)=\mathrm{P}(Z\geq 2)$

(ⅱ) 주사위의 짝수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1600,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(Y)=1600\times\frac{1}{2}=800$,

$\mathrm{V}(Y)=1600\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=20^2$

n은 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(800,\ 20^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-800}{20}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(Y\geq a)=\mathrm{P}\left(\frac{Y-800}{20}\geq\frac{a-800}{20}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-800}{20}\right)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 확률이 같다고 하므로

$\frac{a-800}{20}=2$

$a-800=40$

$\therefore a=840$

45 답 ④

(ⅰ) 동전의 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(256,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=256\times\frac{1}{2}=128$,

$\mathrm{V}(X)=256\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=8^2$

n은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(128,\ 8^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-128}{8}$로 표준화하면

$\mathrm{P}(X\leq 120)=\mathrm{P}\left(\frac{X-128}{8}\leq\frac{120-128}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq -1)$

(ⅱ) 동전을 2개를 던져서 2개 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1200,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(Y)=1200\times\frac{1}{4}=300$,

$\mathrm{V}(Y)=1200\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=15^2$

n은 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 15^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-300}{15}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(Y\geq a)=\mathrm{P}\left(\frac{Y-300}{15}\geq\frac{a-300}{15}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-300}{15}\right)$

한편, (ⅰ)에서 $\mathrm{P}(Z\leq -1)=\mathrm{P}(Z\geq 1)$이므로

$\frac{a-300}{15}=1$

$a-300=15$

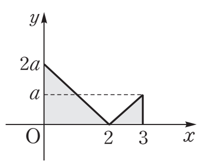
$\therefore a=315$

연습 문제 [L~M]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 106~107

01 답 ④

확률밀도함수가 정의된 구간에서 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times 2\times 2a+\frac{1}{2}\times 1\times a$

$=\frac{5}{2}a=1$

$\therefore a=\frac{2}{5}$

02 답 ①

$0\leq x\leq 5$에서 정의된 확률밀도함수 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times(5+1)\times k=3k=1$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

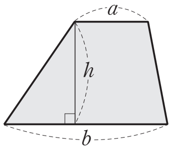
$\therefore \mathrm{P}(0\leq X\leq 2)=\frac{1}{2}\times(2+1)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

TIP

(사다리꼴의 넓이)

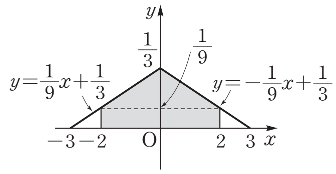
$=\frac{1}{2}\times$(윗변의 길이$+$밑변의 길이)$\times$(높이)

$=\frac{1}{2}(a+b)h$



03 답 ③

확률밀도함수 $f(x)$의 그림은 다음과 같다.

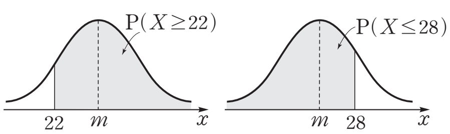


이때, $f(2)=f(-2)=\frac{1}{9}$이고 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

즉, 구하는 확률은 전체의 넓이인 1에서 양 끝의 삼각형의 넓이를 빼서 구할 수 있다.

$$\therefore \mathrm{P}(-2\le X\le 2)=1-2\times \mathrm{P}(2\le X\le 3)$$
$$=1-2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{9}\right)$$
$$=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

04 답 ③



정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(X\ge 22)=\mathrm{P}(X\le 28)$에서

$$m=\frac{22+28}{2}=\frac{50}{2}=25$$

05 답 ①

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(22,\ 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-22}{4}$로 표준화하면

$\mathrm{P}(17\le X\le 28)$

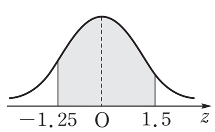
$=\mathrm{P}\left(\frac{17-22}{4}\le\frac{X-22}{4}\le\frac{28-22}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.25\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.25)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.3944+0.4332$

$=0.8276$



06 답 ①

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(1800,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=1800\times\frac{1}{3}=600$,

$\mathrm{V}(X)=1800\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=20^2$

n은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(600,\ 20^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-600}{20}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(X\le 560)$

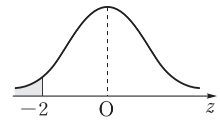
$=\mathrm{P}\left(\frac{X-600}{20}\le\frac{560-600}{20}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$



07 답 ④

계란 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X가 정규분포를 따른다는 거야.

어느 양계장에서 생산하는 계란 1개의 무게는 평균이 52 g, 표준편차가 8 g인 정규분포를 따른다고 한다.

이 양계장에서 생산하는 계란 중 임의로 1개를 선택할 때, 이 계란의 무게가 60 g 이상이고 68 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

확률변수 X를 표준화하면 표준정규분포표를 이용해서 확률을 구할 수 있어.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 0.0440 ② 0.0655 ③ 0.0919
④ 0.1359 ⑤ 0.1525

1st 계란 1개의 무게를 확률변수 X라 하고 X가 따르는 분포를 나타내보자.

이 양계장에서 생산하는 계란 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(52,\ 8^2)$을 따른다.

2nd 이제 표준화하여 확률을 구하자.

$Z=\frac{X-52}{8}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

즉, 임의로 선택한 1개의 계란의 무게가 60 g 이상이고 68 g 이하일 확률은

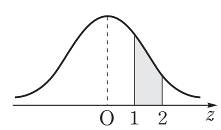
$\mathrm{P}(60\le X\le 68)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{60-52}{8}\le\frac{X-52}{8}\le\frac{68-52}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$



TIP

정규분포에 대한 실생활 문제는 다음과 같은 순서로 해결하자.

(i) 문제의 뜻을 이해하여 확률변수 X를 정한 후 X가 따르는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 구하자.

(ii) X를 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화하자.

(iii) 구하는 확률을 식으로 나타낸 후 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구하자.

Ⅲ L~M 연습

08 답 ④

$\mathrm{P}(0 \le X \le a) = \frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{2} \times a \times 1 = \frac{1}{3} \qquad \therefore a = \frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(0 \le X \le b) = 1$이므로

$\frac{1}{2} \times b \times 1 = 1 \qquad \therefore b = 2$

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$

09 답 ②

세탁하는데 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따른다.

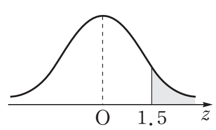
$Z = \frac{X-30}{2}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(X \ge 33) = \mathrm{P}\left(\frac{X-30}{2} \ge \frac{33-30}{2}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 1.5)$

$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$

$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$



10 답 ④

$\frac{20}{1000} = 0.02$이므로 2% 이내에 들어야 입사시험에 합격한다.

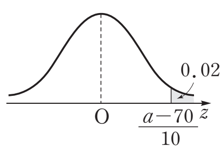
합격자의 최저 점수를 a점이라고 하면, 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 10^2)$에서 $\mathrm{P}(X \ge a) = 0.02$를 만족하는 상수 a의 값을 구하면 된다.

$Z = \frac{X-70}{10}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(X \ge a)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{X-70}{10} \ge \frac{a-70}{10}\right)$

$= \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{a-70}{10}\right) = 0.02$



$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{a-70}{10}\right) = 0.5 - 0.02 = 0.48$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.48$이므로

$\frac{a-70}{10} = 2 \qquad \therefore a = 90$

TIP

정규분포에 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대한 확률이 주어질 때, 미지수는 다음과 같은 순서로 구하자.

(i) X를 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화하자.

(ii) 주어진 확률을 Z에 대한 확률로 나타내자.

(iii) (ii)식을 표준정규분포표에 나오는 확률을 이용할 수 있도록 변형하자.

(iv) 표준정규분포표의 확률을 만족시키는 Z의 범위를 이용하여 미지수의 값을 구하자.

11 답 155

확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고

$\mathrm{P}(X \le 3) = \mathrm{P}(3 \le X \le 80) = 0.3$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 이를 표준화하여 식을 세운 다음 연립방정식을 풀어 봐.

일 때, $m+\sigma$의 값을 구하시오.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.25) = 0.1$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.52) = 0.2$로 계산한다.)

1st 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{P}(X \le 3) = 0.3$을 표준화해보자.

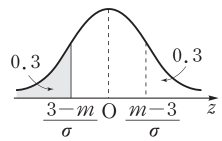
확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 이를 표준화하면

주어진 표준정규분포의 확률값을 이용하기 위해서 확률변수 X를 표준화해야 해.

$\mathrm{P}(X \le 3) = \mathrm{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \le \frac{3-m}{\sigma}\right)$

$= \mathrm{P}\left(Z \le \frac{3-m}{\sigma}\right) = 0.3$

표준정규분포 곡선에서 $\frac{3-m}{\sigma}$의 위치는 다음과 같다.



즉, $\mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma} \le Z \le 0\right) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{m-3}{\sigma}\right) = 0.2 \ \cdots$ ㉠

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.52) = 0.2$이므로

$\frac{m-3}{\sigma} = 0.52$

$\therefore m = 3 + 0.52\sigma \ \cdots$ ㉡

2nd 같은 방법으로 $\mathrm{P}(3 \le X \le 80)$을 표준화해보자.

$\mathrm{P}(3 \le X \le 80)$

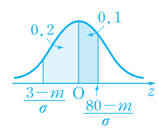
$= \mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma} \le \frac{X-m}{\sigma} \le \frac{80-m}{\sigma}\right)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma} \le Z \le \frac{80-m}{\sigma}\right)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{3-m}{\sigma} \le Z \le 0\right) + \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{80-m}{\sigma}\right)$

$= 0.2 + \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{80-m}{\sigma}\right)$ ($\because$ ㉠)

$= 0.3$



즉, $\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.1$

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.25) = 0.1$이므로

$\frac{80-m}{\sigma} = 0.25$

$\therefore m = 80 - 0.25\sigma \ \cdots$ ㉢

3rd 연립방정식을 풀어서 m과 σ의 값을 구해보자.

㉡을 ㉢에 대입하면

$3 + 0.52\sigma = 80 - 0.25\sigma$

$0.77\sigma = 77 \qquad \therefore \sigma = 100$

이것을 ㉡에 대입하면

$m = 3 + 0.52 \times 100 = 55$

$\therefore m + \sigma = 55 + 100 = 155$

12 답 ③

X를 표준화하고 표준정규분포표를 이용해서 확률을 계산해.

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 등식을 만족시킨다.

$$P(m \le X \le m+12) - P(X \le m-12) = 0.3664$$

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 σ의 값을 구한 것은?

Z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$P(m \le X \le m+12)$를 표준화하여 구한 확률을 p라 하고, 표준정규분포곡선의 성질을 이용하여 확률 $P(X \le m-12)$를 p로 나타내 봐.

1st 확률변수 X를 표준화하여 $P(m \le X \le m+12)$와 $P(X \le m-12)$를 확률변수 Z로 나타내보자.

확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 표준화하면

$P(m \le X \le m+12)$

$=P\left(\dfrac{m-m}{\sigma} \le \dfrac{X-m}{\sigma} \le \dfrac{(m+12)-m}{\sigma}\right)$

$=P\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right)$

$P(X \le m-12)=P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} \le \dfrac{(m-12)-m}{\sigma}\right)$

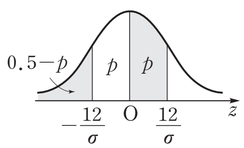
$=P\left(Z \le -\dfrac{12}{\sigma}\right)$

이때, $P\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right)=p$라 하면

표준정규분포곡선의 성질에 의해

$P\left(Z \le -\dfrac{12}{\sigma}\right)=0.5-p$

[표준정규분포곡선의 성질]
① 직선 $z=0$에 대칭인 종모양
② 곡선과 x축 사이의 전체 넓이는 1 (점근선은 x축)



2nd 구한 확률을 주어진 조건에 대입하여 σ의 값을 구해.

$P(m \le X \le m+12) - P(X \le m-12)$

$=P\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right)-P\left(Z \le -\dfrac{12}{\sigma}\right)$

$=p-(0.5-p)$

$=2p-0.5=0.3664$

$\therefore p=\dfrac{1}{2}\times(0.5+0.3664)=0.4332$

즉, $p=P\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right)=0.4332$

$P(0 \le Z \le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{12}{\sigma}=1.5 \qquad \therefore \sigma=\dfrac{12}{1.5}=8$

13 답 55

(i) 한 개의 주사위를 450번 던질 때 5 이상의 숫자가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(450, \dfrac{1}{3}\right)$을 따른다.

$E(X)=450\times\dfrac{1}{3}=150$,

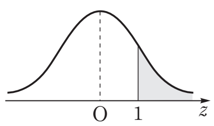
$V(X)=450\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=10^2$

n은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(150, 10^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-150}{10}$으로 표준화하면

$P(X \ge 160)$

$=P\left(\dfrac{X-150}{10} \ge \dfrac{160-150}{10}\right)$



$=P(Z \ge 1)$ ··· Ⅰ

(ii) 한 개의 주사위를 100번 던질 때 소수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B\left(100, \dfrac{1}{2}\right)$을 따른다.

$E(Y)=100\times\dfrac{1}{2}=50$,

$V(Y)=100\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=5^2$

n은 충분히 크므로 Y는 근사적으로 정규분포 $N(50, 5^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{Y-50}{5}$으로 표준화하면

$P(Y \le k)$

$=P\left(\dfrac{Y-50}{5} \le \dfrac{k-50}{5}\right)=P\left(Z \le \dfrac{k-50}{5}\right)$ ··· Ⅱ

(i), (ii)에서 $P(Z \ge 1)+P\left(Z \le \dfrac{k-50}{5}\right)=1$이므로

$\dfrac{k-50}{5}=1 \qquad \therefore k=55$ ··· Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	첫 번째 확률을 표준화하여 나타낸다.	40%
Ⅱ	두 번째 확률을 표준화하여 나타낸다.	40%
Ⅲ	두 확률의 합이 1이 되는 조건을 찾는다.	20%

Ⅲ L~M 연습

Simple N 통계적 추정

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 108~109

01 답 표본조사

02 답 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

03 답 $2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

04 답 ○

공장에서 생산되는 제품의 경우, 조사과정에서 상품가치가 떨어지고 비효율적이므로 전수조사보다는 표본조사가 적합하다.

05 답 ×

표본평균의 평균은 표본의 크기와 상관없이 $E(\overline{X})=m$으로 일정하다.

06 답 ○

신뢰구간의 길이는 $2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이고, n이 일정할 때 신뢰도가 높아지면 k의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이도 길어진다.

07 답 전수조사

08 답 표본조사

09 답 모집단 : 유권자 전체, 표본: 성인남녀 2000명

10 답 모집단 : 어느 공장에서 생산하는 전구 전체,
표본 : 전구 200개

11 답 $E(\overline{X})=30,\ \sigma(\overline{X})=2$

$\sigma(\overline{X})=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$

12 답 $E(\overline{X})=10,\ \sigma(\overline{X})=\frac{1}{2}$

$\sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{100}}=\frac{1}{2}$

13 답 $E(\overline{X})=20,\ \sigma(\overline{X})=1$

모표준편차가 $\sqrt{16}=4$이므로 $\sigma(\overline{X})=\frac{4}{\sqrt{16}}=1$

14 답 $E(\overline{X})=40,\ \sigma(\overline{X})=\frac{3}{5}$

모표준편차가 $\sqrt{9}=3$이므로 $\sigma(\overline{X})=\frac{3}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}$

15 답 거짓

표본의 크기에 관계없이 표본평균의 평균은 항상 모평균과 같다.

16 답 참

표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로 표본의 크기 n이 커지면 표준편차는 작아진다.

17 답 $19.608\le m\le 20.392$

$20-1.96\times\frac{1}{\sqrt{25}}\le m\le 20+1.96\times\frac{1}{\sqrt{25}}$

이때, $1.96\times\frac{1}{\sqrt{25}}=0.392$이므로

$20-0.392\le m\le 20+0.392$

$\therefore\ 19.608\le m\le 20.392$

18 답 $49.484\le m\le 50.516$

$50-2.58\times\frac{1}{\sqrt{25}}\le m\le 50+2.58\times\frac{1}{\sqrt{25}}$

이때, $2.58\times\frac{1}{\sqrt{25}}=0.516$이므로

$50-0.516\le m\le 50+0.516$

$\therefore\ 49.484\le m\le 50.516$

19 답 $49.02\le m\le 50.98$

$50-1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}\le m\le 50+1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}$

이때, $1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}=1.96\times\frac{1}{2}=0.98$이므로

$50-0.98\le m\le 50+0.98$

$\therefore\ 49.02\le m\le 50.98$

20 답 $48.71\le m\le 51.29$

$50-2.58\times\frac{2}{\sqrt{16}}\le m\le 50+2.58\times\frac{2}{\sqrt{16}}$

이때, $2.58\times\frac{2}{\sqrt{16}}=2.58\times\frac{1}{2}=1.29$이므로

$50-1.29\le m\le 50+1.29$

$\therefore\ 48.71\le m\le 51.29$

21 답 0.196

$2\times1.96\times\frac{0.5}{\sqrt{100}}=2\times1.96\times\frac{0.5}{10}=0.196$

22 답 0.258

$2\times2.58\times\frac{0.5}{\sqrt{100}}=2\times2.58\times\frac{0.5}{10}=0.258$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 110~113

23 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

ㄴ. 전수조사는 시간과 비용이 많이 든다.

ㄹ. 조사 대상 전체 중 일부분을 선출하여 전체를 조사하는 방법은 표본조사이다.

24 답 ⑤

ㄱ. 공장에서 생산되는 제품의 경우, 조사과정에서 상품가치가 떨어지고 비효율적이므로 표본조사를 하고 그 결과로부터 모집단을 추측한다.

ㄴ, ㄷ, ㅁ. 전수조사는 시간이 오래 걸리고 비용이 많이 드는 단점이 있다. 따라서 시청률이나 휴대전화 사용시간, 독서량 등은 표본조사를 하고, 그 결과로부터 모집단을 추측한다.

ㄹ. 인구 주택 총 조사는 전수조사의 대표적인 예이다. 이것으로부터 모집단의 양상을 파악해 국가 정책 수립의 기초자료를 제공할 수 있다.

TIP

전수조사는 모집단 전체를 조사하기 때문에, 모집단에 존재하는 다양하고 구체적인 특성을 파악할 수 있다.
모든 자료를 전수조사하는 것이 매우 정확할 것이라고 생각할 수도 있지만, 실제로는 오차가 발생하기도 한다. 인구 주택 총 조사의 경우에도 조사 과정에서 정보가 누락되거나 잘못 조사되는 경우가 있다. 또한 조사 시간이 오래 걸리기 때문에, 시간이 지남에 따라 초기 자료와 최종 자료에 차이가 발생하기도 한다.
전수조사가 불가능한 경우도 있다. 예를 들어 식품의 신선도 유지기간을 알아보기 위해 전수조사를 한다면, 그 식품들은 전부 판매할 수 없을 것이다.
특별한 경우를 제외하고는 대부분의 사회 조사는 표본조사로 이루어지며, 그것으로부터 모집단을 추측한다.

25 답 ⑤

복원추출하는 방법의 수는

$4\times4=16$(가지)

26 답 ③

모집단의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

확률변수 X의 평균과 분산을 구하면

$m=\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{3}\times(1+2+3)=2$

$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\left(1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}\right)-2^2$

$=\frac{1}{3}\times(1+4+9)-4=\frac{14}{3}-4=\frac{2}{3}$

따라서 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$a=\mathrm{E}(\overline{X})=m=2,\ b=\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{2}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+3b=2+3\times\frac{1}{3}=3$

다른 풀이

모집단 $\{1,\ 2,\ 3\}$에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 방법의 수는 $3\times3=9$

$\overline{X}=1$인 경우 : $(1,\ 1)$

$\overline{X}=1.5$인 경우 : $(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

$\overline{X}=2$인 경우 : $(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$

$\overline{X}=2.5$인 경우 : $(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

$\overline{X}=3$인 경우 : $(3,\ 3)$

이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{9},\ \mathrm{P}(\overline{X}=1.5)=\frac{2}{9},\ \mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(\overline{X}=2.5)=\frac{2}{9},\ \mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{1}{9}$

$\overline{X}$	1	1.5	2	2.5	3	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

표본평균 $\overline{X}$의 확률분포표로부터 직접 확률과 평균을 구해보자.

$\mathrm{E}(\overline{X})=1\times\frac{1}{9}+1.5\times\frac{2}{9}+2\times\frac{1}{3}+2.5\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{9}$

$=\frac{1}{9}\times(1+3+6+5+3)=\frac{18}{9}=2$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=\left(1^2\times\frac{1}{9}+1.5^2\times\frac{2}{9}+2^2\times\frac{1}{3}+2.5^2\times\frac{2}{9}+3^2\times\frac{1}{9}\right)-2^2$

$=\frac{1}{9}\times(1+2.25\times2+4\times3+6.25\times2+9)-4$

$=\frac{1}{9}\times(1+4.5+12+12.5+9)-4$

$=\frac{13}{3}-4=\frac{1}{3}$

따라서 $a=\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ b=\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+3b=2+3\times\frac{1}{3}=3$

27 답 ③

확률변수 X의 평균을 m, 분산을 σ^2이라 하면

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(\overline{X}+10)=\mathrm{E}(\overline{X})+10=m+10>m$

즉, 확률변수 Y의 평균은 모평균 m보다 크다.

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(\overline{X}+10)=\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\sigma^2}{5}<\sigma^2$

즉, 확률변수 Y의 분산은 모분산 σ^2보다 작다. 이때 분산이 작아지면 정규분포곡선은 곡선의 높이가 높아지고 폭이 좁아지므로 $Y=\overline{X}+10$의 분포를 나타내는 그래프의 개형은 C이다.

28 답 ②

모평균 m과 모표준편차 σ가 모두 10이고, 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$E(\overline{X})=m=10,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{25}}=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$$

$$\therefore\ E(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=10+2=12$$

29 답 ①

모집단이 정규분포 $N(100,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(100,\ \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $N(100,\ 1)$을 따른다.

30 답 ④

모집단이 정규분포 $N(50,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$E(\overline{X})=50,\ V(\overline{X})=\frac{4^2}{4}=4$$

$$\therefore\ E(\overline{X})+V(\overline{X})=50+4=54$$

31 답 ②

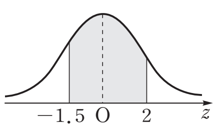
모집단의 평균과 분산이 각각 120과 100이므로 크기가 25인 표본을 임의추출하면 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$$E(\overline{X})=120,\ V(\overline{X})=\frac{100}{25}=4$$

즉, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(120,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-120}{2}$으로 표준화하면

$$\begin{aligned}&P(117\le\overline{X}\le124)\\&=P\left(\frac{117-120}{2}\le\frac{\overline{X}-120}{2}\le\frac{124-120}{2}\right)\\&=P(-1.5\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le1.5)+P(0\le Z\le2)\\&=0.4332+0.4772=0.9104\end{aligned}$$



32 답 ②

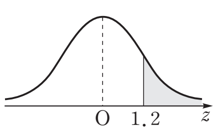
모집단이 정규분포 $N(60,\ 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$E(\overline{X})=60,\ V(\overline{X})=\frac{5^2}{10^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

즉, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-60}{0.5}$으로 표준화하면

$$\begin{aligned}&P(\overline{X}\ge60.6)\\&=P\left(\frac{\overline{X}-60}{0.5}\ge\frac{60.6-60}{0.5}\right)\\&=P(Z\ge1.2)\\&=0.5-P(0\le Z\le1.2)\\&=0.5-0.3849=0.1151\end{aligned}$$



33 답 ④

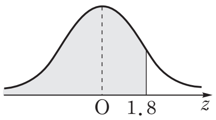
모집단이 정규분포 $N(360,\ 100^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$E(\overline{X})=360,\ V(\overline{X})=\frac{100^2}{5^2}=20^2$$

즉, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(360,\ 20^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-360}{20}$으로 표준화하면

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le396)&=P\left(\frac{\overline{X}-360}{20}\le\frac{396-360}{20}\right)\\&=P(Z\le1.8)\\&=0.5+P(0\le Z\le1.8)\\&=0.5+0.4641\\&=0.9641\end{aligned}$$



34 답 ②

표본평균이 100, 모표준편차가 4, 표본의 크기가 16이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$100-2\times\frac{4}{\sqrt{16}}\le m\le100+2\times\frac{4}{\sqrt{16}}$$

$$100-2\le m\le100+2$$

$$\therefore\ 98\le m\le102$$

35 답 ⑤

표본평균이 4.5, 모표준편차가 0.2, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$4.5-2\times\frac{0.2}{\sqrt{400}}\le m\le4.5+2\times\frac{0.2}{\sqrt{400}}$$

$$4.5-0.02\le m\le4.5+0.02$$

$$\therefore\ 4.48\le m\le4.52$$

36 답 ③

표본평균이 3, 모표준편차가 1, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$3-2.58\times\frac{1}{\sqrt{100}}\le m\le3+2.58\times\frac{1}{\sqrt{100}}$$

$$3-0.258\le m\le3+0.258$$

$$\therefore\ 2.742\le m\le3.258$$

37 답 ③

표본의 크기 121은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 11을 사용하자.

표본평균이 20이므로 신뢰도 95%로 모평균 m을 추정하면

$$20-1.96\times\frac{11}{\sqrt{121}}\le m\le20+1.96\times\frac{11}{\sqrt{121}}$$

$$20-1.96\le m\le20+1.96$$

$$\therefore\ 18.04\le m\le21.96$$

38 답 ③

표본의 크기 100은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 20을 사용하자.

표본평균이 100이므로 모평균 m을 신뢰도 95%로 신뢰구간을 추정하면

$100-2\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 100+2\times\frac{20}{\sqrt{100}}$

$100-4\le m\le 100+4$

$\therefore\ 96\le m\le 104$

39 답 ②

표본의 크기 400은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 20을 사용하자.

표본평균이 50이므로 모평균 m을 신뢰도 99%로 신뢰구간을 추정하면

$50-2.5\times\frac{20}{\sqrt{400}}\le m\le 50+2.5\times\frac{20}{\sqrt{400}}$

$50-2.5\le m\le 50+2.5$

$\therefore\ 47.5\le m\le 52.5$

TIP

표본의 크기가 크게 되면 정규분포를 따르게 된다. 표본의 크기가 충분히 크면 모표준편차와 표본표준편차의 오차가 충분히 줄어들기 때문에 모표준편차 대신 표본표준편차를 사용할 수 있는 것이다.

40 답 ④

$2\times2.58\times\frac{10}{\sqrt{400}}=2\times2.58\times\frac{1}{2}=2.58$

TIP

모평균의 신뢰도에 따른 신뢰구간은

$\overline{X}-k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ \left(\overline{X}+k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{X}-k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

41 답 ③

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 추출하여 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (단, k는 상수)

ㄱ. 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰도 계수 k가 커지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다. (참)

ㄴ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 커지면 분모 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다. (참)

ㄷ. 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고, 표본의 크기를 크게 하면 분모 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

42 답 ⑤

모표준편차가 8이고, 신뢰도가 99 %인 모평균의 신뢰구간의 길이가 2 이하이어야 하므로

$2\times2.5\times\frac{8}{\sqrt{n}}\le 2$

$20\le\sqrt{n}$

$\therefore\ n\ge 400$

따라서 n의 최솟값은 400이다.

43 답 ④

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{5^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(m-1\le\overline{X}\le m+1)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{(m-1)-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\le\frac{(m+1)-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)$

$=2\times\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.8904$

즉, $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.4452$

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)=0.4452$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{5}=1.6$

$\sqrt{n}=1.6\times5=8$

$\therefore\ n=64$

44 답 ②

표본의 크기가 256이고, 모표준편차가 8이므로 신뢰도 95%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{8}{\sqrt{256}}=2\times1.96\times\frac{8}{16}=1.96$

45 답 ①

모표준편차가 20이고, 신뢰도 95%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는 $104-96=8$이므로

$2\times2\times\frac{20}{\sqrt{n}}=8$

$\sqrt{n}=10$

$\therefore\ n=100$

연습 문제 [N]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 114~115

01 답 ①

$E(\overline{X})=E(X)=18$이므로

$E(X)=10\times\frac{1}{2}+20a+30\left(\frac{1}{2}-a\right)$

$\qquad=20-10a=18$

$10a=2$

$\therefore a=\frac{1}{5}$

02 답 ①

탁구공에 적힌 숫자를 X라 하면

$P(X=x)=\frac{1}{5}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}$

$\qquad=\frac{15}{5}=3$

이때, $E(\overline{X})=E(X)$이므로 $E(\overline{X})=3$

$\therefore E(4\overline{X}+3)=4E(\overline{X})+3=4\times3+3=15$

03 답 ④

어떤 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 아래 표와 같다. 이 모집단에서 크기가 5인 표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균을 a, 분산을 b라 하면 ab의 값은?

확률변수 X와 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산의 관계를 이용해봐.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

1st 우선 주어진 확률분포표를 이용하여 확률변수 X의 평균과 분산을 구하자.

$E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2,$

$E(X^2)=1\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{2}+9\times\frac{1}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$

$\therefore V(X)=\frac{9}{2}-2^2=\frac{1}{2}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$을 이용한 거야.

$\therefore m=2,\ \sigma^2=\frac{1}{2}$

2nd 표본평균의 성질을 이용하여 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산을 구하자.

표본의 크기 $n=5$이므로

$a=E(\overline{X})=m=2,\ b=V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{1}{2}}{5}=\frac{1}{10}$

[확률변수 X와 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 관계]
① $E(\overline{X})=m$　② $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$　③ $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore ab=2\times\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$

04 답 ⑤

모분산이 0.5, 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$V(\overline{X})=\frac{0.5}{n}\geq0.02\qquad\therefore n\leq\frac{0.5}{0.02}=25$

따라서 n의 최댓값은 25이다.

05 답 ②

야구공의 무게를 확률변수 X라 하면 X은 정규분포 $N(144.9,\ 6^2)$을 따르지?

어느 회사에서 생산된 야구공의 무게는 평균이 144.9 g, 표준편차가 6 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 야구공 중 임의로 선택한 야구공 9개 무게의 표본평균이 141.7 g 이상 148.9 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0\leq Z\leq z)$
1.6	0.4452
1.7	0.4554
1.8	0.4641
1.9	0.4713
2.0	0.4772

① 0.9165　② 0.9224　③ 0.9267　④ 0.9282　⑤ 0.9413

1st 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구하자.

어느 회사에서 생산된 야구공의 무게를 확률변수 X라고 하자. 임의로 선택한 야구공 9개 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$E(\overline{X})=144.9,\ V(\overline{X})=\frac{6^2}{9}=4$

모평균이 m, 모분산이 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의로 추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균은 모평균과 같고, $\overline{X}$의 분산은 모분산보다 작다. 즉,
① $E(\overline{X})=m$　② $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$　③ $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

즉, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(144.9,\ 2^2)$을 따른다.

2nd 표준정규분포표를 이용하여 표본평균 $\overline{X}$가 141.7 g 이상 148.9 g 이하일 확률을 구해보자.

$Z=\frac{\overline{X}-144.9}{2}$로 표준화하면

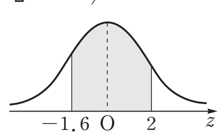
$P(141.7\leq\overline{X}\leq148.9)$

$=P\left(\frac{141.7-144.9}{2}\leq\frac{\overline{X}-144.9}{2}\leq\frac{148.9-144.9}{2}\right)$

$=P(-1.6\leq Z\leq2)$

$=P(0\leq Z\leq1.6)+P(0\leq Z\leq2)$

$=0.4452+0.4772=0.9224$



06 답 ③

표본의 크기가 400으로 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10을 사용하자.

표본평균이 168이므로 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$168-2\times\frac{10}{\sqrt{400}}\leq m\leq168+2\times\frac{10}{\sqrt{400}}$

$168-1\leq m\leq168+1$

$\therefore 167\leq m\leq169$

07 답 ③

표본의 크기 100은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 20을 사용하자.

즉, $\sigma=20$, $n=100$이고 표본평균 $\overline{X}=245$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$245-1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 245+1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}$$

$$245-3.92\le m\le 245+3.92$$

$$\therefore\ 241.08\le m\le 248.92$$

따라서 신뢰구간에 속하는 정수는

242, 243, 244, 245, 246, 247, 248의 7개이다.

08 답 ②

신뢰구간의 길이는 $2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ⋯ ㉠이므로 신뢰도에 따라 k의 값이 정해진다.

ㄱ. 신뢰도를 크게 하면 ㉠에서 k의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 10보다 커진다. (거짓)

ㄴ. 두 표본의 신뢰도에 따른 k의 값을 각각 k_1, k_2라 하자. 두 표본의 크기가 $n_1=n_2=n$이면 ㉠에서

$$2k_1\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=10,\ 2k_2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=8$$

$$k_1=\frac{5\sqrt{n}}{\sigma},\ k_2=\frac{4\sqrt{n}}{\sigma}$$

$\therefore\ k_1>k_2 \Rightarrow \alpha_1>\alpha_2$ (참)

ㄷ. 두 표본의 신뢰도가 같으면 ㉠에서 k의 값도 같다.

이때,

$$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=10,\ 2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}=8\text{에서}$$

$$\sqrt{n_1}=\frac{2k\sigma}{10},\ \sqrt{n_2}=\frac{2k\sigma}{8}$$

$\therefore\ n_1<n_2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

09 답 ①

회사에서 생산된 핸드볼 공의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(350,\ 16^2)$을 따른다. 이때 임의로 추출된 핸드볼 공 64개의 무게의 평균을 표본평균 $\overline{X}$라 하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=350,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{16^2}{64}=2^2$$

즉, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(350,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-350}{2}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 346$ 또는 $\overline{X}\ge 355)$

$=\mathrm{P}(\overline{X}\le 346)+\mathrm{P}(\overline{X}\ge 355)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-350}{2}\le\frac{346-350}{2}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-350}{2}\ge\frac{355-350}{2}\right)$

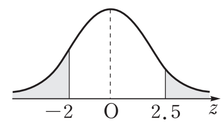
$=\mathrm{P}(Z\le -2)+\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)+\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$

$=(0.5-0.4772)+(0.5-0.4938)$

$=0.0228+0.0062$

$=0.0290$



10 답 25

대중교통을 이용하여 출근하는 어느 지역 직장인의 월 교통비는 평균이 8이고 표준편차가 1.2인 정규분포를 따른다고 한다. 대중교통을 이용하여 출근하는 이 지역 직장인 중 임의추출한 n명의 월 교통비의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때,

n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 모집단의 분포 형태와 관계없이 정규분포를 따름이 알려져 있어.

$$\mathrm{P}(7.76\le\overline{X}\le 8.24)\ge 0.6826$$

이 되기 위한 n의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, 교통비의 단위는 만 원이다.)

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

1st 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구하자.

월 교통비를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 1.2^2)$을 따른다. 임의추출한 n명의 월 교통비의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$$\mathrm{E}(\overline{X})=8, \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1.2^2}{n}$$

[표본평균의 평균, 분산, 표준편차]
모평균이 m, 모분산이 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의로 추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여
① $\mathrm{E}(\overline{X})=m$ ② $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ ③ $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

즉, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(8,\ \left(\frac{1.2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

2nd 표준정규분포표를 이용하여 최솟값 n을 구해보자.

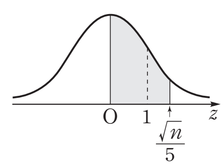
$Z=\frac{\overline{X}-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}$로 표준화하면

$\mathrm{P}(7.76\le\overline{X}\le 8.24)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{7.76-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\le\frac{\overline{X}-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\le\frac{8.24-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.6826$



즉, $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.3413$

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{5}\ge 1 \qquad \therefore\ n\ge 25$$

따라서 구하는 n의 최솟값은 25이다.

Ⅲ N 연습

11 답 25

> 어느 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 초콜릿 중에서 임의추출한, 크기가 49인 표본을 조사하였더니 초콜릿 무게의 표본평균의 값이 $\bar{x}$이었다. 이 결과를 이용하여, 이 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도95 %의 신뢰구간을 구하면 $1.73 \le m \le 1.87$이다.
> 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로 이 범위의 양 끝을 $1.73 \le m \le 1.87$과 비교하면 2개의 연립방정식을 세울 수 있어. 이를 이용해 $\bar{x}$와 σ 값을 구할 수 있겠지?
> $\frac{\sigma}{\bar{x}}=k$일 때, $180k$의 값을 구하시오.
> (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.475$로 계산한다.)

1st 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$인 것을 이용하여 $\bar{x}$와 σ의 값을 포함한 범위를 구해보자.

어느 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다. 임의추출한 크기가 49인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\bar{x}$의 평균과 분산은

$\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{49}=\left(\frac{\sigma}{7}\right)^2$

$\overline{X}=\bar{x}$일 때,

모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{7} \le m \le \bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{7}$

이다.

[신뢰구간]
$\bar{x}-k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
① 신뢰도 95%일 때, $k=1.96$
② 신뢰도 99%일 때, $k=2.58$

2nd 구한 범위와 문제에서 주어진 범위의 양 끝값을 비교하여 연립방정식을 풀자.

이를 주어진 신뢰구간 $1.73 \le m \le 1.87$의 양 끝값과 비교하면

$\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{7}=1.73$ ⋯ ㉠

$\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{7}=1.87$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\bar{x}=3.6 \qquad \therefore \bar{x}=1.8$

㉡−㉠을 하면

$2\times1.96\times\frac{\sigma}{7}=0.14 \qquad \therefore \sigma=0.25$

$k=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{0.25}{1.8}=\frac{25}{180}$이므로

$\therefore 180k=180\times\frac{25}{180}=25$

12 답 2

주어진 확률분포표에서

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ ⋯ Ⅰ

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\left(0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$=3-\frac{9}{4}$

$=\frac{3}{4}$ ⋯ Ⅱ

표본의 크기가 n일 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분산이 $\frac{3}{8}$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{\frac{3}{4}}{n}=\frac{3}{8}$

$\therefore n=2$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	확률분포표를 이용하여 평균을 구한다.	30%
Ⅱ	확률분포표를 이용하여 분산을 구한다.	40%
Ⅲ	$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$을 이용하여 n의 값을 구한다.	30%

심플 정리

[모평균의 추정]

(1) 모평균의 신뢰구간
정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때의 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 모평균 m의 신뢰구간은 다음과 같다.
① 신뢰도 95%의 신뢰구간
$\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
② 신뢰도 99%의 신뢰구간
$\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 모평균의 신뢰구간의 길이 : $2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
신뢰도 95%일 때 $k=1.96$, 신뢰도 99%일 때 $k=2.58$

Ⅲ 대단원 TEST [Ⅰ~Ⅳ] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 116~119

01 답 ②

100원짜리 동전 한 개와 10원짜리 동전 한 개를 던져 앞면이 나온 동전의 금액의 합을 확률변수 X라 하면 둘 다 뒷면이 나오는 경우, 10원짜리만 앞면이 나오는 경우, 100원짜리만 앞면이 나오는 경우, 둘 다 앞면이 나오는 경우의 확률이 모두 $\frac{1}{4}$이다.

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	10	100	110	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+10\times\frac{1}{4}+100\times\frac{1}{4}+110\times\frac{1}{4}=55$

02 답 ③

X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	100	1000	5000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{58}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{2}{100}$	1

$\mathrm{P}(X\ge1000)=\mathrm{P}(X=1000)+\mathrm{P}(X=5000)$

$=\frac{10}{100}+\frac{2}{100}=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$

03 답 ①

확률의 총합이 1이므로

$a+\frac{a}{2}+a^2=1$

$2a^2+3a-2=0$

$(2a-1)(a+2)=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because 0\le a\le1)$

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$이므로

$\therefore \mathrm{E}(2X+3)=2\mathrm{E}(X)+3=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)+3=\frac{5}{2}$

04 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{k}+\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{k}+\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{k}=\frac{5+10+10}{k}=\frac{25}{k}=1 \qquad \therefore k=25$

따라서 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	-1	0	1	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{5}+0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{5}+0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{5}-\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{15-1}{25}=\frac{14}{25}$

$\therefore \mathrm{V}(5X+3)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times\frac{14}{25}=14$

05 답 ④

주머니 안의 공의 개수는

$1+2+3+\cdots+10=55$(개)이므로

확률변수 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	1	2	3	…	10	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{3}{55}$	…	$\frac{10}{55}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=\frac{1}{55}\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

$=\frac{1}{55}\times(1+4+9+16+25+36+49+64+81+100)$

$=\frac{385}{55}=7$

$\therefore \mathrm{E}(3X-1)=3\mathrm{E}(X)-1=3\times7-1=20$

06 답 ④

확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)={}_{30}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{30-x}(x=0, 1, \cdots, 30)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=30\times\frac{1}{3}=10$

$\therefore \mathrm{E}(5X-1)=5\mathrm{E}(X)-1=5\times10-1=50-1=49$

07 답 ①

$\mathrm{E}(10X+1)=10\mathrm{E}(X)+1=21$

$\therefore \mathrm{E}(X)=np=2 \cdots$ ㉠

$\mathrm{E}(10X^2+1)=10\mathrm{E}(X^2)+1=60$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=\frac{59}{10}$

분산을 구하면

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{59}{10}-2^2=\frac{59}{10}-\frac{40}{10}=\frac{19}{10}$

확률분포 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=npq=2q$ ($\because$ ㉠)$=\frac{19}{10}$에서

$q=\frac{19}{20}$, $p=1-q=1-\frac{19}{20}=\frac{1}{20}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{20}=2 \qquad \therefore n=40$

08 답 ②

이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{10}\right)$에서 α는 확률의 총합을 나타내고, β는 평균을 나타낸다.

$$\begin{cases}\alpha=(\text{확률의 총합})=1\\ \beta=\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{10}=10\end{cases}$$

$\therefore \alpha+\beta=1+10=11$

Ⅲ 대단원

09 답 ③

$$\begin{aligned}V(X)&=10p(1-p)\\&=-10p^2+10p\\&=-10\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

따라서 $p=\frac{1}{2}$일 때, $V(X)$는 최댓값 $\frac{5}{2}$를 갖는다.

10 답 ④

각 모둠마다 5명 중 남학생이 3명 있으므로, 각 모둠에서 임의로 2명씩 선택할 때 남학생들만 선택될 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$이다.

이때, 남학생들만 선택된 모둠의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{3}{10}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=np=10\times\frac{3}{10}=3$

11 답 ②

확률변수 X, Y는 반복 시행한 독립시행의 횟수니까 이항분포를 따르겠지?

한 개의 주사위를 180번 던질 때 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하고, 한 개의 동전을 n번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하자. Y의 분산이 X의 분산보다 크게 되도록 하는 n의 최솟값은?

① 100　② 101　③ 102
④ 103　⑤ 104

1st 이항분포를 따르는 확률변수 X의 분산을 구해.

주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나오는 확률은 $\frac{1}{6}$이므로

확률변수 X는 이항분포 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\therefore V(X)=180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=25$

[이항분포의 평균, 분산]
$E(X)=np$, $V(X)=npq$ (단, $q=1-p$)

2nd 확률변수 Y 또한 이항분포를 따르므로 같은 방법으로 Y의 분산도 구하자.

한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$V(Y)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$

3rd 부등식 $V(Y)>V(X)$에 대입하여 자연수 n의 최솟값을 구하자.

$V(Y)>V(X)$이므로

$\frac{n}{4}>25$

$\therefore n>100$

따라서 자연수 n의 최솟값은 101이다.

12 답 ③

확률밀도함수의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times a=\frac{3}{4}a=1$

$\therefore a=\frac{4}{3}$

13 답 ②

이차방정식 $6x^2-5x+1=0$에서

$(2x-1)(3x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

이때, $P(X\le1)\le P(X\le2)$이므로

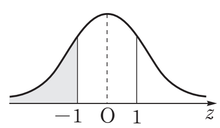
$P(X\le1)=\frac{1}{3}$, $P(X\le2)=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore P(1<X\le2)&=P(X\le2)-P(X\le1)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

14 답 8

확률변수 X에 대하여 $Z=\frac{X-50}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}P(X\le40)&=P\left(\frac{X-50}{10}\le\frac{40-50}{10}\right)\\&=P(Z\le-1)\\&=P(Z\ge1)\\&=0.5-P(0\le Z\le1)\end{aligned}$$



한편, $P(-1\le Z\le1)=0.68$에서

$2P(0\le Z\le1)=0.68$이므로

$P(0\le Z\le1)=0.34$

$\therefore a=P(X\le40)=0.5-0.34=0.16$

$\therefore 50a=50\times0.16=8$

15 답 ⑤

정규분포의 확률밀도함수는 평균에 대하여 대칭이다.

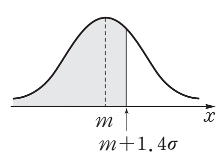
조건 (가)에서 평균은 $m=\frac{27+33}{2}=30$

조건 (나)를 이용하여 분산과 표준편차를 구하면

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=925-30^2=25=5^2$

$\therefore \sigma=5$

$$\begin{aligned}\therefore P(X\le37)&=P(X\le30+7)\\&=P(X\le30+1.4\times5)\\&=P(X\le m+1.4\sigma)\\&=0.5+0.4192\\&=0.9192\end{aligned}$$



심플(고등확통)해066-104_ok.indd 100　18. 9. 4. 오후 1:54

16 답 ⑤

상자에서 꺼낸 녹색 볼펜의 개수를 확률변수 X라고 하면

X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=150\times\frac{2}{5}=60,\ \mathrm{V}(X)=150\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=36$

n이 충분히 크므로 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 6^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-60}{6}$으로 표준화하면

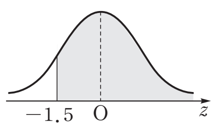
$\mathrm{P}(X\geq 51)=\mathrm{P}\left(\frac{X-60}{6}\geq\frac{51-60}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq -1.5)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.5+0.4332$

$=0.9332$



17 답 ③

주사위를 400번 던질 때, 짝수가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{2}=200,\ \mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=100$

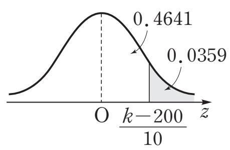
n이 충분히 크므로 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-200}{10}$으로 표준화하면

$\mathrm{P}(X\geq k)=\left(\frac{X-200}{10}\geq\frac{k-200}{10}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-200}{10}\right)$

$=0.0359$



즉, $\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{k-200}{10}\right)=0.5-0.0359=0.4641$이고,

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.8)=0.4641$이므로

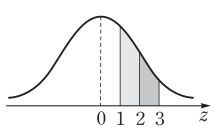
$\frac{k-200}{10}=1.8,\ k-200=18\qquad\therefore k=218$

18 답 ④

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ a)$를 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ b)$를 따른다.

ㄱ. 확률변수 X의 정규분포곡선은 평균인 0에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(1\leq X\leq 2)>\mathrm{P}(2\leq X\leq 3)$



(거짓)

ㄴ. $Z=\frac{X-0}{a}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포를 따르고

$\mathrm{P}(-a\leq X\leq 0)=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0)$이다.

$Z=\frac{Y-0}{b}$으로 놓으면, Z는 표준정규분포를 따르고

$\mathrm{P}(0\leq Y\leq b)=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$이다.

이때, $\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0)=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$이므로

$\mathrm{P}(-a\leq X\leq 0)=\mathrm{P}(0\leq Y\leq b)$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(-1\leq X\leq 1)=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{a}\leq Z\leq\frac{1}{a}\right)$이고,

$\mathrm{P}(-2\leq Y\leq 2)=\mathrm{P}\left(-\frac{2}{b}\leq Z\leq\frac{2}{b}\right)$이므로 두 확률이 같으면

$\frac{1}{a}=\frac{2}{b}$, 즉 $b=2a$이고 a는 양수이므로 $a<b$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

19 답 ⑤

공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(201.5,\ 1.8^2)$을 따르지?

어느 공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량은 평균이 201.5 g이고 표준편차가 1.8 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개의 화장품 내용량의 표본평균이 200 g 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.7745 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

1st 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구하자.

공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량을 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(201.5,\ 1.8^2)$을 따른다.

임의추출한 화장품 9개 내용량의 표본평균을 확률변수 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$\mathrm{E}(\overline{X})=201.5,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1.8^2}{9}=0.6^2$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(201.5,\ 0.6^2)$을 따른다.

2nd 표준정규분포표를 이용하여 표본평균 $\overline{X}$가 200 g 이상일 확률을 구해 보자.

표본평균 $\overline{X}$에 대해 $Z=\frac{\overline{X}-201.5}{0.6}$로 표준화하면

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 200)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-201.5}{0.6}\geq\frac{200-201.5}{0.6}\right)$

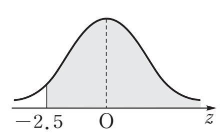
$=\mathrm{P}(Z\geq -2.5)$

$=\mathrm{P}(-2.5\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(Z\geq 0)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)+\mathrm{P}(Z\geq 0)$

$=0.4938+0.5$

$=0.9938$



20 답 ③

모집단에서 추출한 표본의 크기가 1600으로 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 30을 사용할 수 있다. 따라서 수학영역의 평균점수 m을 95 %의 신뢰도로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\frac{30}{\sqrt{1600}}=2\times 1.96\times\frac{30}{40}=2.94$

Ⅲ 대단원

심플(고등확통)해066-104_ok.indd 101 18. 9. 4. 오후 1:55

21 답 ②

정규분포 $N(8,\ 8^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하면 표본평균 $\overline{X}$는 평균이 8이고 분산이 $\frac{8^2}{16}=4$인 정규분포 $N(8,\ 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-8}{2}$로 표준화하면

$P(\overline{X}\le 11)=P\left(\frac{\overline{X}-8}{2}\le\frac{11-8}{2}\right)$

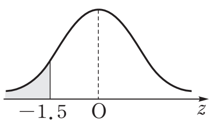
$=P(Z\le 1.5)$

이고,

$P(\overline{Y}\le 22)=1-P(\overline{X}\le 11)$

$=1-P(Z\le 1.5)$

$=P(Z\le -1.5)$ ⋯ ㉠



한편, 정규분포 $N(30,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하면 표본평균 $\overline{X}$는 평균이 30이고 분산이 $\frac{\sigma^2}{9}$인 정규분포 $N\left(30,\ \left(\frac{\sigma}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{Y}-30}{\frac{\sigma}{3}}$으로 표준화하면

$P(\overline{Y}\le 22)=P\left(\frac{\overline{Y}-30}{\frac{\sigma}{3}}\le\frac{22-30}{\frac{\sigma}{3}}\right)$

$=P\left(Z\le -\frac{24}{\sigma}\right)$

$=P(Z\le -1.5)$ ($\because$ ㉠)

$\frac{24}{\sigma}=1.5$이므로

$\sigma=\frac{24}{1.5}=16$

22 답 ②

표본평균이 60, 표본표준편차가 3, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m의 신뢰도 99%인 신뢰구간은

$60-2.6\times\frac{3}{\sqrt{36}}\le m\le 60+2.6\times\frac{3}{\sqrt{36}}$

$60-1.3\le m\le 60+1.3$

$58.7\le m\le 61.3$

따라서 이 구간에 속하는 값은 59.0이다.

23 답 ③

정규분포 $N(m,\ 3^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 추출하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}$으로 표준화하면

$P(m-0.5\le\overline{X}\le m+0.5)$

$=P\left(\frac{(m-0.5)-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\le\frac{(m+0.5)-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)$

$=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{6}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)$

$=2P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)$

$=0.8664$

즉, $P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.4332$

표준정규분포표에서 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{6}=1.5$

$\sqrt{n}=9$ $\quad\therefore n=81$

24 답 ③

ㄱ. $E(\overline{X_A})=m_1$, $E(\overline{X_B})=m_2$이므로 $m_1=m_2$이면,
$E(\overline{X_A})=E(\overline{X_B})$이다. (참)

ㄴ. 표본평균 $\overline{X_B}$의 표준편차는

$\frac{\frac{\sigma}{2}}{\sqrt{n_2}}=\frac{\sigma}{2\sqrt{n_2}}\ne\frac{\sigma}{2}$ (거짓)

ㄷ. $n_1=4n_2$일 때, m_1에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는

$b-a=2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$

$=2\times\frac{k\sigma}{\sqrt{4n_2}}=\frac{k\sigma}{\sqrt{n_2}}$

m_2에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는

$d-c=2\times k\times\frac{\sigma}{2\sqrt{n_2}}$

$=\frac{k\sigma}{\sqrt{n_2}}$

$\therefore b-a=d-c$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

25 답 ②

표본평균이 30, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 25이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$30-2.5\times\frac{5}{\sqrt{25}}\le m\le 30+2.5\times\frac{5}{\sqrt{25}}$

$\therefore 27.5\le m\le 32.5$

26 답 ⑤

모표준편차가 18이고, 신뢰도가 99%인 신뢰구간의 길이가 6 이하이어야 하므로

$2\times 2.5\times\frac{18}{\sqrt{n}}\le 6$

$15\le\sqrt{n}$

$\therefore n\ge 15^2=225$

n은 자연수이므로 n의 최솟값은 225이다.

27 답 2

A기계에서 나온 상품의 부피를 확률변수 X_A라 하면 X_A는 정규분포 $N(m,\ \alpha^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X_A-m}{\alpha}$으로 표준화하면 확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다.

B기계에서 나온 상품의 부피를 확률변수 X_B라 하면 X_B는 정규분포 $N(m+18,\ \beta^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X_B-(m+18)}{\beta}$로 표준화하면 확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다. … Ⅰ

$P(X_A\le m+6)=P(X_B\ge m+6)$

표준화하여 식을 다시 정리하면

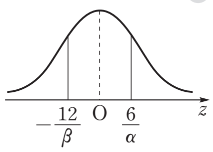
$P\left(\dfrac{X_A-m}{\alpha}\le\dfrac{(m+6)-m}{\alpha}\right)$

$=P\left(\dfrac{X_B-(m+18)}{\beta}\ge\dfrac{(m+6)-(m+18)}{\beta}\right)$

즉, $P\left(Z\le\dfrac{6}{\alpha}\right)=P\left(Z\ge-\dfrac{12}{\beta}\right)$ … Ⅱ

$\dfrac{6}{\alpha}=\dfrac{12}{\beta}$

$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{12}{6}=2$



… Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	두 상품이 따르는 정규분포로부터 각각을 표준화하는 식을 찾는다.	30%
Ⅱ	$P(X_A\le m+6)=P(X_B\ge m+6)$을 표준화하여 α와 β의 관계식을 찾는다.	40%
Ⅲ	$\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값을 구한다.	30%

28 답 0.84

모집단이 정규분포 $N(4,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(4,\ \dfrac{4^2}{4}\right)$, 즉 $N(4,\ 2^2)$을 따른다. … Ⅰ

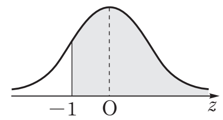
이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-4}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 … Ⅱ

$P(\overline{X}\ge2)=P\left(\dfrac{\overline{X}-4}{2}\ge\dfrac{2-4}{2}\right)$

$=P(Z\ge-1)$

$=0.5+P(0\le Z\le1)$

$=0.5+0.34=0.84$ … Ⅲ



[채점기준표]

Ⅰ	표본평균 $\overline{X}$의 분포를 구한다.	30%
Ⅱ	$Z=\dfrac{\overline{X}-4}{2}$라 놓고 표준화한다.	30%
Ⅲ	$P(\overline{X}\ge2)$일 확률을 구한다.	40%

심플(고등확통)해066-104_ok.indd 103 18. 9. 4. 오후 1:55