심플

자이스토리

고등수학의 기본을 심플하게 완성!

SIMPLE Xi story

미적분

[해설편]

자이스토리 · 수경출판사

SIMPLE Xi story 빠른 정답 찾기

I 수열의 극한

A 수열의 극한

01 수렴, $\lim_{n\to\infty} a_n$ 02 발산 03 진동 04 × 05 ×
06 ○ 07 수렴, 1 08 수렴, 1
09 수렴, 0 10 수렴, 2 11 발산 12 발산
13 발산 14 2 15 -2 16 6 17 $\frac{2}{3}$ 18 0
19 2 20 발산 21 0 22 발산 23 1 24 2
25 ③ 26 ② 27 ③ 28 ③ 29 ⑤ 30 -2
31 ① 32 ③ 33 ① 34 ② 35 ④ 36 ②
37 ① 38 ④ 39 ⑤ 40 ④ 41 ③ 42 3
43 ⑤ 44 ④ 45 ③ 46 ④ 47 ⑤ 48 ②
49 ③ 50 ⑤ 51 ④ 52 ③ 53 ③ 54 ①
55 ③ 56 ③ 57 ⑤ 58 ⑤ 59 ① 60 ③

B 등비수열의 수렴과 발산

01 $1, 0, -1<r\le1$ 02 양의 무한대
03 진동, 절댓값, 발산 04 $0, -1<r\le1$ 05 ×
06 × 07 × 08 ○ 09 수렴, 0 10 발산
11 발산 12 수렴, 0 13 발산 14 발산
15 수렴, 0 16 수렴, 0 17 발산
18 수렴, 0 19 $-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$ 20 $-3<x\le3$
21 $-2\le x<2$ 22 $\frac{3}{2}$ 23 ⑤ 24 ③ 25 ⑤
26 ③ 27 ② 28 ④ 29 ③ 30 ③ 31 ③
32 ④ 33 ② 34 ① 35 ② 36 ② 37 ③

연습 [A–B]

01 ④ 02 ④ 03 ① 04 ② 05 4 06 ③
07 12 08 ② 09 ③ 10 ④ 11 ③ 12 ②
13 ① 14 4 15 ② 16 $\frac{26}{3}$

C 급수의 수렴과 발산

01 급수 02 급수의 합 03 0
04 × 05 ○ 06 ○ 07 $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)$
08 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n}$ 09 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 10 $\sum_{n=1}^{\infty}2$
11 수렴, $\frac{1}{2}$ 12 수렴, 2 13 수렴, 0
14 발산 15 $\frac{1}{2}$ 16 2 17 발산 18 수렴
19 6 20 2 21 8 22 6 23 ⑤ 24 ②
25 ④ 26 ② 27 ③ 28 ⑤ 29 ① 30 3
31 ③ 32 ⑤ 33 ② 34 ⑤ 35 ③ 36 ⑤

D 등비급수

01 등비급수 02 $\frac{a}{1-r}$ 03 수렴, 발산
04 × 05 ○ 06 ○ 07 수렴 08 발산 09 발산
10 발산 11 수렴, 3 12 발산 13 발산
14 수렴, $\frac{8}{3}$ 15 $-2<x<2$ 16 $-1<x<5$
17 (가) : $\frac{1}{10}$, (나) : $\frac{11}{45}$ 18 (가) : $\frac{1}{2}$, (나) : 2
19 18 20 ② 21 ③ 22 3 23 ⑤ 24 ⑤
25 ④ 26 ② 27 ④ 28 ② 29 ③ 30 ③
31 ⑤ 32 ④

연습 [C–D]

01 ② 02 ② 03 ③ 04 $\frac{3}{2}$ 05 ① 06 54
07 ⑤ 08 ② 09 ④ 10 ④ 11 ① 12 ②
13 ② 14 ③ 15 20

I 대단원 TEST [A–D]

01 ⑤ 02 ② 03 ③ 04 ① 05 ③ 06 ①
07 ③ 08 ② 09 ⑤ 10 ③ 11 ② 12 ④
13 ⑤ 14 ⑤ 15 ① 16 ② 17 ② 18 ①
19 7 20 ④ 21 ④ 22 ② 23 ① 24 ⑤
25 ④ 26 ⑤ 27 3 28 10

Ⅱ 미분법

E 지수함수와 로그함수의 미분

01 ∞ 02 e 03 자연로그, $\ln x$ 04 ○ 05 ×
06 ○ 07 8 08 0 09 0 10 ∞ 11 3
12 $-\infty$ 13 -3 14 e^4 15 e^5 16 $\frac{1}{2}$
17 $3\ln 10$ 18 4 19 2 20 $\frac{1}{\ln 2}$
21 $\ln 5$ 22 $y'=3e^x$ 23 $y'=5^x \ln 5$
24 $y'=\frac{2}{3x}$ 25 $y'=\frac{1}{x\ln 2}$ 26 ⑤ 27 ①
28 ② 29 ⑤ 30 ① 31 ⑤ 32 ③ 33 ①
34 ⑤ 35 ① 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39 ⑤
40 ④ 41 ⑤ 42 ③ 43 ⑤ 44 ② 45 ①
46 ① 47 ⑤ 48 ③ 49 ③ 50 ① 51 1
52 ① 53 ⑤ 54 ⑤ 55 ① 56 ① 57 ③
58 ④ 59 ⑤ 60 ① 61 ⑤ 62 ④ 63 ④
64 ① 65 ③ 66 ② 67 ③ 68 ④ 69 ②
70 ③ 71 ⑤ 72 ⑤ 73 ④ 74 ⑤ 75 ②
76 ⑤

F 삼각함수의 미분

01 $\sec^2\theta$ 02 $\alpha+\beta$
03 $\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ 04 1 05 × 06 ○
07 ○ 08 ○ 09 $\frac{5}{3}$ 10 $\frac{5}{4}$ 11 $\frac{4}{3}$ 12 1
13 $\frac{25}{16}$ 14 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 15 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
16 $2+\sqrt{3}$ 17 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 18 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 19 1 20 1
21 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 22 1 23 $\frac{3}{4}$ 24 $\frac{5}{3}$ 25 1 26 ①
27 ⑤ 28 ③ 29 ② 30 ③ 31 ② 32 ③
33 ② 34 ④ 35 ① 36 ② 37 ② 38 ②
39 ③ 40 ⑤ 41 ③ 42 ⑤ 43 ④ 44 ①
45 ④ 46 ⑤ 47 ① 48 ② 49 ⑤ 50 ⑤
51 ⑤ 52 ④ 53 ① 54 ② 55 ⑤ 56 ④
57 ① 58 ④ 59 ⑤ 60 ② 61 ① 62 ②
63 ④ 64 ④ 65 ⑤ 66 ② 67 ⑤ 68 ④
69 ④ 70 ④ 71 ① 72 ④ 73 ③ 74 ②

연습 [E-F]

01 ③ 02 ④ 03 ⑤ 04 ③ 05 ⑤ 06 ③
07 ④ 08 12 09 ② 10 ④ 11 ① 12 ①
13 ③ 14 ⑤ 15 ④ 16 $-\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{15}}{12}$

G 여러 가지 미분법 (1)

01 $-\sin x$ 02 $f'(g(x))g'(x)$ 03 $\frac{f'(x)}{f(x)}$
04 ○ 05 × 06 ○ 07 $y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$
08 $y'=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ 09 $y'=-\frac{2(x^2-3x+1)}{(x^2-1)^2}$
10 $y'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ 11 $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$ 12 $y'=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
13 $y'=\frac{-2x+1}{(x^2-x-1)^2}$ 14 $y'=\sec^2 x$ 15 $y'=-\csc^2 x$
16 $y'=\sec x\tan x$ 17 $y'=-\csc x\cot x$
18 $y'=\tan x+x\sec^2 x$ 19 $y'=2\sin x(1+\sec^2 x)$
20 $y'=\frac{\tan x-x\sec^2 x}{\tan^2 x}$ 21 $y'=\frac{x\sec x\tan x-2\sec x}{x^3}$
22 $y'=6(2x+1)^2$ 23 $y'=2e^{2x}$ 24 $y'=3\cos 3x$
25 $y'=2\sin x\cos x$ 26 $y'=\frac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$
27 $y'=-\frac{x\cos(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}$ 28 ③ 29 ② 30 ②
31 ① 32 ⑤ 33 ③ 34 ⑤ 35 ⑤ 36 ⑤
37 ⑤ 38 ① 39 ⑤ 40 ④ 41 ② 42 ③
43 ②

H 여러 가지 미분법 (2)

01 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 02 음함수 03 이계도함수
04 ○ 05 ○ 06 × 07 $y'=\frac{1}{x}$
08 $y'=\frac{3}{x\ln 10}-2x$ 09 $y'=\frac{5(\ln x)^4}{x}$
10 $y'=-\tan x$ 11 $y'=-\frac{2}{x^3}$ 12 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
13 $y'=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ 14 $y'=9x^2-\frac{5}{x^6}$
15 $y'=2+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$ 16 $y'=1+\frac{1}{x^2}$
17 $\frac{dy}{dx}=t$ 18 $\frac{dy}{dx}=-\cot t$ 19 $\frac{dy}{dx}=2x-2$
20 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ 21 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y^3}$ 22 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{4y+1}$
23 $y''=6x+4$ 24 $y''=-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ 25 $y''=4e^{-2x}$
26 $y''=-9\sin 3x$ 27 ④ 28 ② 29 ① 30 ②
31 ② 32 ⑤ 33 ④ 34 ④ 35 ① 36 ②
37 ⑤ 38 ④ 39 ① 40 ④ 41 ① 42 ⑤

연습 [G-H]

01 ③ 02 ① 03 ① 04 ② 05 ③ 06 15
07 ⑤ 08 ⑤ 09 21 10 ② 11 ① 12 12
13 ② 14 ① 15 ① 16 1

I 도함수의 활용 (1)

01 미분계수, $f'(a)$ 02 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$
03 $f'(a)=g'(a)$ 04 ○ 05 ○ 06 ×
07 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 08 $y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
09 $y=x+1$ 10 $y=2x-2$ 11 $y=x-1$
12 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ 13 $y=x+\frac{1}{2}$ 14 $y=2x-\frac{\pi}{2}+1$
15 $y=x+2$ 16 $y=2x-2$ 17 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
18 $y=-\frac{1}{4}x+1$ 19 $y=\frac{2}{e}x+\frac{2}{e}$ 20 $y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}$
21 구간 $(0, e)$에서 증가, 구간 (e, ∞)에서 감소
22 구간 $(-2, 2)$에서 증가, 구간 $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$에서 감소
23 구간 $(-\infty, -2)$에서 감소, 구간 $(-2, \infty)$에서 증가
24 ③ 25 ② 26 ③ 27 ① 28 ② 29 ④
30 ① 31 ⑤ 32 ④ 33 ⑤ 34 ③ 35 ①
36 ② 37 ④ 38 ② 39 ③ 40 ③ 41 ⑤
42 2 43 ① 44 ④ 45 ④ 46 ④ 47 4
48 ① 49 ② 50 ③ 51 ③ 52 ③ 53 ③
54 ④

J 도함수의 활용 (2)

01 극대 02 $f''(a)>0$ 03 변곡점 04 ○
05 ○ 06 × 07 × 08 $y''=6x+2$
09 $y''=4e^{2x}$ 10 $y''=-\frac{1}{x^2}$ 11 $y''=-\sin x$
12 $y''=-\frac{4}{(x+2)^3}$ 13 극댓값 : 5, 극솟값 : 1
14 극댓값 : -2, 극솟값 : 2 15 극솟값 : $-e^{-1}$
16 극솟값 : $-e^{-1}$
17 $x<1$에서 아래로 볼록, $x>1$에서 위로 볼록
18 $x<0$에서 위로 볼록, $x>0$에서 아래로 볼록
19 $x<0$에서 아래로 볼록, $x>0$에서 위로 볼록
20 $0<x<\pi$에서 위로 볼록, $\pi<x<2\pi$에서 아래로 볼록
21 $x=e^{\frac{3}{2}}$ 22 $x=0$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$
23 $x=-1$ 24 ③ 25 ⑤ 26 ④ 27 ②
28 ① 29 ⑤ 30 ④ 31 ⑤ 32 ⑤ 33 ④
34 ② 35 ③ 36 ① 37 ③ 38 ⑤ 39 ⑤
40 ⑤ 41 ⑤ 42 ② 43 ④ 44 ③ 45 ④
46 ② 47 ③ 48 ① 49 ④ 50 ③
51 $-\frac{1}{2}\le a\le 0$ 52 ④

K 도함수의 활용 (3)

01 $f(a)$, $f(b)$, 극댓값, 극솟값 02 x
03 $(f'(t), g'(t))$, $(f''(t), g''(t))$ 04 × 05 ○
06 ○ 07 해설 참조 08 해설 참조
09 해설 참조 10 최댓값 : $\frac{2}{3}$, 최솟값 : $\frac{1}{2}$
11 최댓값 : 2π, 최솟값 : $-\pi$ 12 2
13 1 14 해설 참조 15 속도 : 3, 가속도 : -3
16 속도 : e, 가속도 : e 17 속도 : $(6, 3)$, 속력 : $3\sqrt{5}$
18 속도 : $(-\pi, 0)$, 속력 : π 19 속도 : $(e, 2e)$, 속력 : $\sqrt{5}e$
20 ③ 21 ③ 22 ③ 23 ④ 24 ④ 25 ①
26 ③ 27 ① 28 1 29 ④ 30 ④ 31 $\frac{1}{e}$
32 ② 33 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 34 ② 35 ⑤ 36 ⑤
37 ③ 38 ② 39 ③ 40 ④ 41 ② 42 ①
43 ④ 44 $0\le k<2$ 45 ② 46 ② 47 ③
48 ① 49 2 50 ③ 51 ② 52 ③ 53 ②
54 ① 55 ③ 56 ⑤ 57 ④ 58 ③ 59 ①

연습 [I–K]

01 ④ 02 ① 03 ⑤ 04 ② 05 ② 06 ⑤
07 ② 08 ③ 09 5 10 ⑤ 11 ② 12 ②
13 ④ 14 ④ 15 ⑤ 16 -1

Ⅱ 대단원 TEST [E–K]

01 ⑤ 02 ① 03 ① 04 ④ 05 ④ 06 ⑤
07 ⑤ 08 ② 09 14 10 10 11 ⑤ 12 ④
13 ① 14 ② 15 ① 16 ② 17 ③ 18 ③
19 ④ 20 ④ 21 ⑤ 22 ① 23 ③ 24 ⑤
25 ① 26 ② 27 6 28 ⑤ 29 ④ 30 ⑤
31 -2 32 4

Ⅲ 적분법

L 여러 가지 함수의 적분법

01 $\ln|x|$ 02 e^x 03 $\frac{1}{\ln a}$
04 $-\cot x$ 05 × 06 × 07 ○
08 $-\frac{1}{x}+C$ 09 $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$ 10 $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$
11 $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$ 12 $2\sqrt{x}+C$ 13 $3\sqrt[3]{x}+C$
14 $-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$ 15 $e^{x-1}+C$ 16 $e^{x+1}+C$

17 $\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$ 18 $\dfrac{3^{x-1}}{\ln 3}+C$

19 $-2\cos x-3\sin x+C$ 20 $\sin x+\tan x+C$

21 $-\cot x+\cos x+C$ 22 $\sin x-\cos x+C$

23 $\tan x+C$ 24 $-\cot x+C$ 25 $\sec x+C$

26 ① 27 ③ 28 ③ 29 ④ 30 ③ 31 ④

32 ① 33 ⑤ 34 ① 35 ④ 36 ② 37 2

38 ③ 39 ② 40 ⑤ 41 ④

M 치환적분법과 부분적분법

01 $\dfrac{1}{a}F(ax+b)$ 02 $\dfrac{1}{a}\ln|ax+b|$ 03 $f(x)g(x)$

04 × 05 ○ 06 ○ 07 $\dfrac{1}{4}(x+2)^4+C$

08 $\dfrac{2}{3}(x-2)\sqrt{(x-2)}+C$ 09 $\dfrac{1}{10}(2x-1)^5+C$

10 $\dfrac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$ 11 $\dfrac{1}{2}e^{2x+1}+C$

12 $\dfrac{3^{2x-1}}{2\ln 3}+C$ 13 $-\dfrac{1}{5}\cos(5x+2)+C$

14 $\dfrac{1}{3}\sin(3x-1)+C$ 15 $\ln(x^2+1)+C$

16 $\ln(e^x+3)+C$ 17 $\ln|x+2|+C$

18 $\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C$ 19 $\dfrac{1}{2}x^2-\ln|x|+C$

20 $x-2\ln|x+1|+C$ 21 $\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+C$

22 (가) : e^x, (나) : $f(x)g'(x)$ 23 ② 24 ④ 25 ⑤

26 -3 27 ⑤ 28 ③ 29 ③ 30 ③ 31 ④

32 ① 33 ③ 34 ③ 35 ④ 36 ② 37 ③

38 ③ 39 ⑤ 40 ④ 41 ④ 42 ③ 43 ⑤

44 ② 45 ④ 46 ④ 47 ④ 48 ③

연습 [L-M]

01 ② 02 ③ 03 ③ 04 ④ 05 ⑤ 06 ③

07 ② 08 ③ 09 ③ 10 2 11 ② 12 ③

13 ② 14 ③ 15 ③ 16 -1

N 정적분의 치환적분법과 부분적분법

01 $F(b)$, $F(a)$ 02 b, a, $f(t)$

03 $f(x)g(x)$, $f'(x)g(x)$ 04 ○ 05 × 06 ○

07 $\dfrac{1}{2}$ 08 1 09 $\dfrac{5}{3}$ 10 1 11 $\dfrac{1}{\ln 2}$

12 $\dfrac{3}{2}$ 13 1 14 1 15 5 16 $\dfrac{38}{3}$ 17 $\dfrac{1}{2}$

18 $\dfrac{1}{2}e-\dfrac{1}{2}$ 19 $\dfrac{1}{2}$ 20 $\dfrac{1}{2}$ 21 1 22 e^2+1

23 1 24 ① 25 ③ 26 ④ 27 ② 28 ③

29 ② 30 ④ 31 ⑤ 32 ④ 33 ② 34 ①

35 ② 36 ① 37 ③ 38 ④ 39 ① 40 ⑤

41 ② 42 4 43 1 44 ② 45 ③ 46 6

47 ③ 48 6 49 5 50 ① 51 ④ 52 ③

53 ④ 54 ② 55 ③ 56 ③ 57 ④ 58 ④

59 ① 60 ④ 61 ⑤ 62 ① 63 ② 64 ①

65 ④ 66 ④ 67 ① 68 ③ 69 ① 70 ②

O 정적분으로 정의된 함수와 급수

01 $f(x)$ 02 $f(a)$ 03 b, a 04 × 05 × 06 ○

07 1 08 2 09 e 10 -1 11 -1

12 (가) : 1 (나) : e 13 (가) : $1-e^2$ (나) : 1

14 (가) : e^{2x} (나) : e^2-1 15 ① 16 ④ 17 ②

18 ⑤ 19 ③ 20 ② 21 ② 22 ① 23 ①

24 ④ 25 ④ 26 ③ 27 ④ 28 ② 29 ①

P 정적분의 활용

01 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ 02 $\displaystyle\int_a^b S(x)dx$

03 $\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2$ 또는 $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ 04 ×

05 ○ 06 ○ 07 $\dfrac{14}{3}$ 08 2 09 e^2-e 10 1

11 $\dfrac{4}{3}$ 12 $e+\dfrac{1}{e}-2$ 13 2 14 (1) ① $\dfrac{1}{\pi}\sin \pi t$ ② $\dfrac{1}{\pi}$

(2) 50 15 5 16 (가) : $3t^2+4$ (나) : 16 17 ②

18 ③ 19 ① 20 ② 21 ④ 22 ② 23 ④

24 ① 25 ① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ①

30 ⑤ 31 ④ 32 ④ 33 ③ 34 ③ 35 ④

36 ⑤ 37 ③ 38 ⑤ 39 ② 40 ④ 41 ③

42 ① 43 ② 44 ④ 45 ② 46 ④ 47 ⑤

48 ③ 49 ④ 50 ②

연습 [N-P]

01 ① 02 ① 03 ④ 04 ① 05 ④ 06 ①

07 ④ 08 ⑤ 09 ② 10 ① 11 ③ 12 ③

13 ③ 14 ③ 15 5

Ⅲ 대단원 TEST [L-P]

01 ③ 02 ⑤ 03 ③ 04 23 05 ⑤ 06 ④

07 ① 08 ② 09 ⑤ 10 ④ 11 ② 12 ④

13 3 14 ② 15 ④ 16 ③ 17 ⑤ 18 6

19 ⑤ 20 ④ 21 ② 22 12 23 ② 24 ③

25 $\dfrac{8}{3}$ 26 ③ 27 ④ 28 ① 29 56 30 2

31 4

I 수열의 극한

Simple A 수열의 극한

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 8∼9

01 답 수렴, $\lim_{n\to\infty} a_n$

02 답 발산

03 답 진동

04 답 ×

05 답 ×

06 답 ○

07 답 수렴, 1

n이 한없이 커질 때, 각 항은 항상 1이므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 1이다.

08 답 수렴, 1

n이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{n+1}{n+2}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 1이다.

09 답 수렴, 0

n이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{1}{2^n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 0이다.

10 답 수렴, 2

n이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{2n+1}{n+1}$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 2이다.

11 답 발산

수열 $\{n^2-1\}$은 0, 3, 8, 15, 24, …이므로 양의 무한대로 발산한다. 즉, $\lim_{n\to\infty}(n^2-1)=\infty$

12 답 발산

수열 $\{-3n+1\}$은 -2, -5, -8, -11, …이므로 음의 무한대로 발산한다. 즉, $\lim_{n\to\infty}(-3n+1)=-\infty$

13 답 발산

수열 $\{1+(-1)^n\}$은 0, 2, 0, 2, …이므로 진동한다. 즉, 발산한다.

14 답 2

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=2+0=2$$

15 답 -2

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}-\frac{2n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}$$
$$=0-2=-2$$

16 답 6

$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)$$
$$=3\times2=6$$

17 답 $\frac{2}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{2}{3}$$

18 답 0

분모의 최고차항인 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0$$

19 답 2

분모의 최고차항인 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{1}=2$$

20 답 발산

분모의 최고차항인 n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2-\frac{1}{n}}=\infty$$

21 답 0

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{0}{1+1}=0$$

22 답 발산

$$\lim_{n\to\infty}(2n-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{2}{n}-1\right)=-\infty$$

23 답 1

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=1$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

24 답 2

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+2}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

유형 연습 [+내신 유형] 문제편 pp. 10~15

25 답 ③

① $\lim_{n\to\infty} 2=2$ ② $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n}=2$

③ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}=1$ ④ $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1}=2$

⑤ $\lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{2^n}\right)=2$

26 답 ②

ㄱ. 수열 $\{2n-3\}$은 $-1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots$이므로 양의 무한대로 발산한다.

ㄴ. 수열 $\left\{3+\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$은 n이 한없이 커질 때, 3에 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\{4-(-1)^n\}$은 5, 3, 5, 3, ⋯이므로 발산(진동)한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄴ뿐이다.

27 답 ③

ㄱ. 수열 $\{-2n^2+1\}$은 $-1,\ -7,\ -17,\ -31,\ \cdots$이므로 음의 무한대로 발산한다.

ㄴ. 수열 $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$는 $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \cdots$이므로 발산(진동)한다.

ㄷ. 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$은 n의 값이 한없이 커질 때, 0에 수렴한다.

따라서 발산하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

28 답 ③

$\lim_{n\to\infty} n=\infty$이므로 수렴하지 않는다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} n\times\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty} n\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$이 성립하지 않는다.

29 답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n-2b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n-2\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=3\times2-2\times(-1)=8$$

30 답 -2

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+1)(b_n-1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+1)\cdot\lim_{n\to\infty}(b_n-1)$$
$$=(-2+1)\times(3-1)=-2$$

31 답 ①

$a_n=\frac{1}{3}\{(a_n+b_n)+(2a_n-b_n)\}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\{(a_n+b_n)+(2a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{3}\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{3}\times\{-1+(-5)\}=-2$$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (단, α와 β는 상수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=-1$에서 $\alpha+\beta=-1$

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=-5$에서 $2\alpha-\beta=-5$

$\therefore\ \alpha=-2,\ \beta=1$

32 답 ③

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2,\ \lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n^2}\right)=a$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(a+\frac{1}{n^2}\right)=6$에서

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n^2}\right)=2\times a=6$

$\therefore\ a=3$

33 답 ①

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)=3,$$
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2^n}\right)=2$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-b_n}{a_nb_n+2}=\frac{\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)}{\lim_{n\to\infty}(a_nb_n+2)}$$
$$=\frac{2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}2}$$
$$=\frac{2\times3-2}{3\times2+2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

34 답 ②

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 분모의 차수와 분자의 차수가 같으면 최고차항의 계수의 비와 같으므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-2}{2n^2+4n+3}=\frac{1}{2}$$

35 답 ④

ㄱ. 분모의 최고차항인 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=0$$

ㄴ. 분모의 최고차항인 n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=1$$

ㄷ. 분모의 최고차항인 n^2으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2-n}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1-\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n^2}}=\infty$$

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

36 답 ②

일반항이 $\frac{n(2n+1)}{(n+1)(n+2)}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+3n+2}=\frac{2}{1}=2$$

37 답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\{\log_2(n^2-2n+3)-2\log_2(2n+1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n^2-2n+3}{(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n^2-2n+3}{4n^2+4n+1}$$
$$=\log_2\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{4n^2+4n+1}\right\}=\log_2\frac{1}{4}=-2$$

38 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{1+2+3+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n}{n^2+n}=4$$

39 답 ⑤

이차방정식 $x^2-2nx+1=0$의 근과 계수의 관계에서

$\alpha_n+\beta_n=2n$, $\alpha_n\beta_n=1$

$\therefore\ \alpha_n{}^2+\beta_n{}^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n=4n^2-2$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2}{n^2}=4$$

40 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-3n-1}{4n^2+n}=\frac{a}{4}=3\qquad\therefore\ a=12$$

41 답 ③

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)n^2+bn+1}{3n-2}$이 수렴하므로 분자와 분모의 차수가 같아야 한다. $\quad\therefore\ a=1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{3n-2}=\frac{b}{3}=2$에서 $b=6$

$\therefore\ a+b=7$

TIP

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)n^2+bn+1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)n+b+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}$에서 이 식이 극한값을 가지려면 $a-1=0$이어야 한다.

만약 $a-1\neq0$이면

(i) $a-1>0$: 양의 무한대로 발산

(ii) $a-1<0$: 음의 무한대로 발산

42 답 3

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한이므로 분모의 최고차항인 n으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+6n+9}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+6+\frac{9}{n}}{2-\frac{1}{n}}=6$$

$a\neq0$이면 주어진 수열은 발산하므로 $a=0$

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{9}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{6}{2}=3$$

$\therefore\ b=3\qquad\therefore\ a+b=3$

43 답 ⑤

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)n^2-bn+1}{2n+1}$이 수렴하므로 분자와 분모의 차수가 같아야 한다. $\quad\therefore\ a+b=0\ \cdots$ ㉠

$\lim_{n\to\infty}\frac{-bn+1}{2n+1}=-\frac{b}{2}=5$에서 $b=-10\ \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=10$

$\therefore\ a-b=20$

44 답 ④

근호를 포함한 $\infty-\infty$ 꼴의 극한이므로 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+2n}-3n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{9n^2+2n}-3n)(\sqrt{9n^2+2n}+3n)}{\sqrt{9n^2+2n}+3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{9n^2+2n}+3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{n}}+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{1}{3}$$

45 답 ③

무리식이 있으므로 유리화하여 계산하자.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1$$

46 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2}=1$$

47 답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

48 답 ②

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2\times\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{2}$$

49 답 ③

ㄱ. $\infty-\infty$ 꼴이고 무리식이 있으므로 유리화하여 계산하자.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=0\ (\text{수렴})$$

ㄴ. $\infty-\infty$ 꼴이므로 다항식의 경우는 최고차항으로 묶어서 계산하자.

$$\lim_{n\to\infty}(2+n-n^2)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-n^2\left(-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n}+1\right)\right\}=-\infty\ (\text{발산})$$

ㄷ. $\infty-\infty$ 꼴이고 무리식이 있으므로 유리화하여 계산하자.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}\ (\text{수렴})$$

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

50 답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-n)(\sqrt{n^2+an}+n)}{\sqrt{n^2+an}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{n^2+an}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}=\frac{a}{2}=5$$

$\therefore a=10$

51 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an-1}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{a}{2}=3$$

$\therefore a=6$

52 답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2-an}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-an}}{(n-\sqrt{n^2-an})(n+\sqrt{n^2-an})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-an}}{an}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{a}{n}}}{a}$$
$$=\frac{2}{a}=4$$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

53 답 ③

$a_n=\frac{1}{2}\{(2a_n-b_n)+b_n\}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(2a_n-b_n)+b_n\}$$
$$=\frac{1}{2}\{\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)+\lim_{n\to\infty}b_n\}$$
$$=\frac{1}{2}\times(2+4)=3$$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$(단, α는 상수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=2$에서

$2\alpha-4=2$

$2\alpha=6 \quad \therefore \alpha=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=3$

54 답 ①

$(2n+3)a_n=b_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=3$이고

$a_n=\frac{b_n}{2n+3}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}b_n=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$$

55 답 ③

$\frac{a_n+5}{2a_n+1}=b_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$

$a_n+5=b_n(2a_n+1)$, $a_n+5=2a_nb_n+b_n$

$5-b_n=2a_nb_n-a_n$

$(2b_n-1)a_n=5-b_n$

$\therefore a_n=\frac{5-b_n}{2b_n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5-b_n}{2b_n-1}=\frac{5-\lim_{n\to\infty}b_n}{2\lim_{n\to\infty}b_n-1}$$
$$=\frac{5-2}{2\times2-1}=1$$

56 답 ③

$-1\le\sin n\theta\le1$이므로 각 변에 $\frac{1}{n+1}$을 곱하면

$-\frac{1}{n+1}\le\frac{\sin n\theta}{n+1}\le\frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n+1}=0$

TIP

θ의 값에 관계없이 모든 자연수 n에 대하여
$-1\le\sin n\theta\le1$이므로
$-\frac{1}{n+1}\le\frac{\sin n\theta}{n+1}\le\frac{1}{n+1}$

57 답 ⑤

$3n-1\le(n+1)a_n\le3n+1$에서 각 변에 $\frac{1}{n+1}$을 곱하면

$\frac{3n-1}{n+1}\le a_n\le\frac{3n+1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+1}=3$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$

58 답 ⑤

$2n^2+3n-3<na_n<2n^2+3n+4$에서

$\frac{2n^2+3n-3}{n}<a_n<\frac{2n^2+3n+4}{n}$이므로

$\frac{2n^2+3n-3}{n(n+1)}<\frac{a_n}{n+1}<\frac{2n^2+3n+4}{n(n+1)}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-3}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+4}{n(n+1)}=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+1}=2$

59 답 ①

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\times0=0$ (참)

ㄴ. [반례] $a_n=(-1)^n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n^2=1$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. [반례] $a_n=\frac{2}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$이면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}2=2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

60 답 ③

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$(단, α와 β는 상수)일 때,

$a_n<b_n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n$ $\quad\therefore\ \alpha\le\beta$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}a_n$

$=$(상수) (참)

ㄷ. [반례] $a_n=n$, $b_n=n+\frac{1}{n}$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이지만 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Simple B 등비수열의 수렴과 발산

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 16~17

01 답 1, 0, $-1<r\le1$

02 답 양의 무한대

03 답 진동, 절댓값, 발산

04 답 0, $-1<r\le1$

05 답 ×

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴할 조건은 $-1<r\le1$이다.

06 답 ×

등비수열 $\{r^n\}$에서 $-1<r<1$이면 극한값은 0, $r=1$이면 극한값은 1이다.

07 답 ×

등비수열 $\{r^n\}$에서 $r<-1$이면 진동한다.

08 답 ○

09 답 수렴, 0

주어진 수열은 공비가 $\frac{1}{2}$이고, $-1<\frac{1}{2}\le1$이므로 0으로 수렴한다.

10 답 발산

주어진 수열은 공비가 -3이고, $-3<-1$이므로 발산한다.

11 답 발산

주어진 수열은 공비가 $\sqrt{2}$이고, $\sqrt{2}>1$이므로 발산한다.

12 답 수렴, 0

주어진 수열은 공비가 $\frac{2}{3}$이고, $-1<\frac{2}{3}\le1$이므로 0으로 수렴한다.

13 답 발산

주어진 수열은 공비가 -1이므로 진동한다.

14 답 발산

수열 $\{3^n\}$은 공비가 3이고, $3>1$이므로 발산한다.

15 답 수렴, 0

수열 $\{(-0.2)^n\}$의 공비는 -0.2이고, $-1<-0.2\le1$이므로 0으로 수렴한다.

16 답 수렴, 0

수열 $\left\{\left(\frac{7}{10}\right)^n\right\}$의 공비는 $\frac{7}{10}$이고, $-1<\frac{7}{10}\le1$이므로 0으로 수렴한다.

17 답 발산

수열 $\{(\sqrt{1.5})^n\}$의 공비는 $\sqrt{1.5}$이고, $\sqrt{1.5}>1$이므로 발산한다.

18 답 수렴, 0

수열 $\left\{\cos^n \frac{\pi}{6}\right\}$의 공비는 $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고,

$-1<\frac{\sqrt{3}}{2}\le 1$이므로 0으로 수렴한다.

19 답 $-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$

주어진 수열의 공비가 $2x$이므로 $-1<2x\le 1$이어야 한다.

$\therefore -\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$

20 답 $-3<x\le 3$

주어진 수열의 공비가 $\frac{x}{3}$이므로 $-1<\frac{x}{3}\le 1$이어야 한다.

$\therefore -3<x\le 3$

21 답 $-2\le x<2$

주어진 수열의 공비가 $-\frac{x}{2}$이므로 $-1<-\frac{x}{2}\le 1$이어야 한다.

$\therefore -2\le x<2$

22 답 $\frac{3}{2}$

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{0}{1+0}=\boxed{0} \text{ ←(가)}$$

(ii) $|r|>1$일 때, $\left|\frac{1}{r}\right|<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이다.

따라서 분자, 분모를 r^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{1}{0+1}=\boxed{1} \text{ ←(나)}$$

(iii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{1}{1+1}=\boxed{\frac{1}{2}} \text{ ←(다)}$$

(iv) $r=-1$일 때, $\{r^n\}$은 진동하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}$의 값은 없다.

즉, $a=0$, $b=1$, $c=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b+c=0+1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 18~19

23 답 ⑤

① 수열 $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{1}{3}$이고, $-1<\frac{1}{3}<1$이므로 0에 수렴한다.

② 수열 $\{0.9^n\}$은 공비가 0.9이고, $-1<0.9<1$이므로 0에 수렴한다.

③ 수열 $\left\{\sin^n\frac{\pi}{6}\right\}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$이고,
$-1<\frac{1}{2}<1$이므로 0에 수렴한다.

④ 수열 $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$은 공비가 $-\frac{2}{3}$이고, $-1<-\frac{2}{3}<1$이므로 0에 수렴한다.

⑤ $\left\{\frac{5^n}{4^{n+1}}\right\}=\left\{\frac{1}{4}\times\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\}$은 공비는 $\frac{5}{4}$이고, $\frac{5}{4}>1$이므로 발산한다.

24 답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n-1}+1}{2^{2n-1}-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\times 4^n+1}{\frac{1}{2}\times 4^n-3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

25 답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot 3^n+1}{3^{n+1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{a}{3}=5 \qquad \therefore a=15$$

26 답 ③

등비수열 $\left\{\left(\frac{x-1}{3}\right)^n\right\}$의 공비가 $\frac{x-1}{3}$이므로 이 등비수열이 수렴할 조건은

$-1<\frac{x-1}{3}\le 1$

$-3<x-1\le 3$

$-2<x\le 4$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3, 4의 6개이다.

27 답 ②

$\frac{(2x+1)^n}{3^n}=\left(\frac{2x+1}{3}\right)^n$이므로 이 등비수열이 수렴할 조건은

$-1<\frac{2x+1}{3}\le 1$

$-3<2x+1\le 3$

$-4<2x\le 2$

$-2<x\le 1$

즉, $a=-2$, $b=1$ $\qquad\therefore a+b=-1$

28 답 ④

등비수열 $\{(\log_3 x-2)^n\}$의 공비가 $\log_3 x-2$이므로 이 등비수열이 수렴할 조건은

$-1<\log_3 x-2\le 1$

$1<\log_3 x\le 3$

$3<x\le 27$

즉, $a=3$, $b=27$

$\therefore\ b-a=24$

29 답 ③

등비수열 $\left\{(x-2)\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1}\right\}$이 수렴할 조건은

(i) 첫째항 $x-2=0$

$\therefore x=2$

(ii) 공비가 $\frac{x+1}{2}$이므로

$-1<\frac{x+1}{2}\le 1$

$-2<x+1\le 2$

$-3<x\le 1$

(i), (ii)에서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2이다.

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 0이다.

30 답 ③

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴할 조건은 $-1<r\le 1$이다.

ㄱ. 등비수열 $\left\{\left(-\frac{r}{2}\right)^n\right\}$의 공비는 $-\frac{r}{2}$이고,

$-\frac{1}{2}\le -\frac{r}{2}<\frac{1}{2}$이므로 수렴한다.

ㄴ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{r+1}{2}\right)^n\right\}$의 공비는 $\frac{r+1}{2}$이고,

$0<\frac{r+1}{2}\le 1$이므로 수렴한다.

ㄷ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{r}{2}-1\right)^n\right\}$의 공비는 $\frac{r}{2}-1$이고,

$-\frac{3}{2}<\frac{r}{2}-1\le -\frac{1}{2}$

이므로 항상 수렴하는 것은 아니다.

따라서 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

31 답 ③

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$f(r)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2r^n}{2-r^n}=\frac{1}{2}$

(ii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$f(r)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2r^n}{2-r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}+2}{\frac{2}{r^n}-1}=-2$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$

32 답 ④

(i) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2-x^n}{1+x^n}=2$

(ii) $x=1$일 때,

$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2-x^n}{1+x^n}=\frac{2-1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2-x^n}{1+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{x^n}-1}{\frac{1}{x^n}+1}=-1$

따라서 함수 $f(x)$의 모든 치역의 원소의 합은

$2+\frac{1}{2}+(-1)=\frac{3}{2}$

33 답 ②

(i) $|r|>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}}{1+r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{r^{2n}}+1}=1$

$\therefore a=1$

(ii) $|r|=1$, 즉 $r=-1$ 또는 $r=1$일 때

$\lim_{n\to\infty} r^{2n}=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}}{1+r^{2n}}=\frac{1}{2}$

$\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore a-b=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

34 답 ①

ㄱ. $|r|>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+r^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{r-\left(\frac{1}{r}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^{2n-2}}=r$ (참)

ㄴ. $|r|=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} r^{2n}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+r^2}=\frac{r-1}{1+r^2}$

(i) $r=1$이면 $\frac{r-1}{1+r^2}=\frac{1-1}{1+1}=0$

(ii) $r=-1$이면 $\frac{r-1}{1+r^2}=\frac{-1-1}{1+1}=-1$ (거짓)

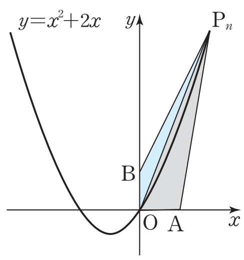
ㄷ. $|r|<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+r^2}=-\frac{1}{r^2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

35 답 ②



위의 그림에서

$S(n)=\dfrac{1}{2}\times1\times(n^2+2n)=\dfrac{n^2+2n}{2}$

$T(n)=\dfrac{1}{2}\times1\times n=\dfrac{n}{2}$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{\{T(n)\}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+2n}{2}}{\frac{n^2}{4}}=2$

36 답 ②

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=\sqrt{n+2}$, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{n+1}$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}-\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n})$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$

37 답 ③

$\mathrm{A}_n(\alpha,\ \alpha+n)$, $\mathrm{B}_n(\beta,\ \beta+n)$이라 하면 α와 β는 방정식

$x^2=x+n$, $x^2-x-n=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-n$

$\therefore\ l_n^{\ 2}=(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=2(\beta-\alpha)^2$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4n+1$이므로

$l_n^{\ 2}=8n+2$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n^{\ 2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+2}{n}=8$

심플 정리

[곱셈공식의 변형]

(1) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(3) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$\qquad\quad=(a-b)^2+2ab$

연습 문제 [A~B] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 20～21

01 답 ④

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+1)(3n-1)}{n^2(n-1)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)}{1-\frac{1}{n}}=6$

02 답 ④

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)-(n^2-2n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}$

$=\dfrac{4}{2}=2$

03 답 ①

$b_n=\dfrac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$

$\displaystyle\qquad=\frac{1}{2}\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\}$

$\displaystyle\qquad=\frac{1}{2}\times\{5-(-1)\}=3$

다른 풀이

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$(단, α와 β는 상수)라 하면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=5$에서

$\alpha+\beta=5$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=-1$에서

$\alpha-\beta=-1$

$\therefore\ \alpha=2,\ \beta=3$

04 답 ②

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 극한값 4를 갖기 위해서는 분모, 분자의 차수가 같아야 하므로 $a=0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{bn+3}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{b}{2}=4$

$\therefore\ b=8$

$\therefore\ a+b=8$

심플(미적분)해설1단원_006-029팔교.indd 13 20. 9. 4. 오후 2:30

05 답 4

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n+2a)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-n+2a)(\sqrt{n^2+an}+n-2a)}{\sqrt{n^2+an}+n-2a}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+an-(n-2a)^2}{\sqrt{n^2+an}+n-2a}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5an-4a^2}{\sqrt{n^2+an}+n-2a}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5a-\frac{4a^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1-\frac{2a}{n}}=\frac{5a}{2}=10$

$\therefore a=4$

06 답 ③

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2n-1\le a_n\le 2n+1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-a_n}{\sqrt{4n^2+2n+1}}$의 값은?

모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$의 꼴로 표현된 것은 수열의 극한의 대소 관계에 대한 성질을 이용해야 해.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

1st 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\frac{a_n}{n}$의 극한값을 먼저 구해야 해.

$2n-1\le a_n\le 2n+1$에서

$2-\frac{1}{n}\le\frac{a_n}{n}\le 2+\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$일 때, $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$를 이용한 거야.

2nd 분자, 분모를 모두 n으로 나눈 후 극한값을 구하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-a_n}{\sqrt{4n^2+2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{a_n}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}}}=\frac{4-2}{2}=1$

07 답 12

$a_n-1=c_n$이라 하면 $a_n=c_n+1$이고,

$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=2$에서 $\lim_{n\to\infty}c_n=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(c_n+1)=2+1=3$

$a_n+2b_n=d_n$이라 하면 $b_n=\frac{1}{2}(d_n-a_n)$

$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=9$에서 $\lim_{n\to\infty}d_n=9$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(d_n-a_n)=\frac{1}{2}\times(9-3)=3$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n(1+b_n)$

$=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}(1+b_n)$

$=3\times(1+3)=12$

08 답 ②

$3a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}c_n=4$이고

$b_n=-3a_n+c_n$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3a_n+c_n}{a_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(-3+\frac{c_n}{a_n}\right)$

$=-3\ \left(\because \lim_{n\to\infty}a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}c_n=4\right)$

09 답 ③

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\alpha$일 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, α는 0이 아닌 실수이다.)

[보기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

ㄴ. $\alpha=1$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{\alpha}$ 수열의 기본 성질을 적절히 써서 참, 거짓을 구별하자.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 식을 변형하여 수열의 극한의 기본 성질을 이용할 수 있는지 확인해야 해.

ㄱ. $\frac{b_n}{a_n}=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_nc_n$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_nc_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}c_n=0\times\alpha=0$ (참)

ㄴ. [반례] $a_n=n+1$, $b_n=n$이면 $\alpha=1$이지만

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$이라고 해서 두 수열이 반드시 같은 수열일 필요는 없어.

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=1$이다. (거짓)

2nd 치환하여 극한값을 구해야 해.

ㄷ. $\frac{b_n}{a_n}=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_nc_n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_nc_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_n}=\frac{1}{\alpha}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10 답 ④

x에 대한 이차식 $a_nx^2+a_nx-1$을 $x-n$으로 나눈 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여

$a_nn^2+a_nn-1=4$

$(n^2+n)a_n=5$, $a_n=\frac{5}{n^2+n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(4n^2-1)a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5(4n^2-1)}{n^2+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(4-\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{n}}=20$

> **심플 정리**
> **[나머지정리]**
> (1) x의 다항식 $f(x)$를 x의 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$와 같다.
> (2) x의 다항식 $f(x)$를 x의 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$와 같다.

11 답 ③

$n^2<n^2+n+1<(n+1)^2$에서 $n<\sqrt{n^2+n+1}<n+1$

$a_n=\sqrt{n^2+n+1}-n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\frac{1}{2}$$

12 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+a\times3^{n+1}}{2^{n-1}-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+3a}{\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1}$$
$$=-3a=12$$

$\therefore a=-4$

13 답 ①

> 등비수열 $\left\{\left(\frac{x^2-x}{6}\right)^n\right\}$이 수렴하기 위한 실수 x의 최댓값을
> 등비수열의 수렴 조건은 공비 r가 $-1<r\le1$이어야 해.
> M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M+m$의 값은?
>
> ① 1 ② 2 ③ 3
> ④ 4 ⑤ 5

1st 등비수열의 수렴 조건을 이용하여 공비의 범위를 구한 후 연립부등식을 풀어야 해.

수열 $\left\{\left(\frac{x^2-x}{6}\right)^n\right\}$의 공비가 $\frac{x^2-x}{6}$이므로 $-1<\frac{x^2-x}{6}\le1$

등비수열 $\{r^n\}$은 공비 r가 $-1<r<1$이면 0으로 수렴하고 $r=1$이면 1로 수렴해.

$-6<x^2-x\le6$

(i) $-6<x^2-x$에서

$x^2-x+6>0$, 즉 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0$

완전제곱식 대신에 판별식 $D=1-24<0$임을 이용해도 돼.

따라서 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $x^2-x\le6$에서 $x^2-x-6\le0$

$(x-3)(x+2)\le0$

$-2\le x\le3$

2nd 연립부등식의 해를 이용하여 최댓값과 최솟값의 합을 구하야 해.

(i), (ii)에서 $-2\le x\le3$이므로

최댓값 $M=3$, 최솟값 $m=-2$이다.

$\therefore M+m=1$

14 답 4

$a_n=r^{n-1}$이고 $S_n=\frac{r^n-1}{r-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}}{\frac{r^n-1}{r-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-r^{n-1}}{r^n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r-1}{r-\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}}$$
$$=\frac{r-1}{r}\left(\because \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0\right)$$
$$=1-\frac{1}{r}=\frac{3}{4}$$

$\frac{1}{r}=\frac{1}{4}$

$\therefore r=4$

15 답 ②

> 함수 $f(x)=2(x-1)^2-1$에 대하여 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 두 점 A, B에서 만난다. 자연수 n에 대하여
> 두 점 A, B 의 x좌표가 직선 $x=1$에 대해 대칭이라는 사실을 알아야 해.
> $\overline{AB}=n$을 만족시키는 두 점 A, B의 x좌표를 a_n, b_n $(b_n>a_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}$의 값은?
>
> ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
> ④ 2 ⑤ 4

1st 이차함수의 대칭성을 이용하여 a_n과 b_n 사이의 관계를 구해야 해.

이차함수 $f(x)$의 대칭축이 $x=1$이므로 a_n, b_n은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

$\therefore \frac{a_n+b_n}{2}=1$

중점의 좌표가 대칭축인 $x=1$ 위에 있어야 해.

$a_n+b_n=2$ ⋯ ㉠

또한 $\overline{AB}=n$에서

$b_n-a_n=n$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b_n=\frac{2+n}{2}=1+\frac{n}{2}$

2nd 분자, 분모를 n으로 나눈 후 극한값을 구하자.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{2}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

TIP

이차함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 대칭축은 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$이다.
즉, 이차함수가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $x=\alpha$, $x=\beta$이면 대칭축은 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$가 되는 특징이 있다.

16 답 $\frac{26}{3}$

(i) $-1<-\frac{1}{2}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$임을 이용하면

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+8}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}+2}=4 \quad \cdots \text{Ⅰ}$$

(ii) $x=1$을 대입하면

$$f(1)=\frac{1-4+8}{1+2}=\frac{5}{3} \quad \cdots \text{Ⅱ}$$

(iii) $3>1$이므로 분자, 분모를 $3^{2n}=9^n$으로 나누어

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n=0$임을 이용하면

$$\begin{aligned}f(3)&=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n+1}-4\times3^n+8}{3^{2n}+2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times9^n-4\times3^n+8}{9^n+2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3-4\times\frac{1}{3^n}+\frac{8}{9^n}}{1+\frac{2}{9^n}}=3\end{aligned} \quad \cdots \text{Ⅲ}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(3)=4+\frac{5}{3}+3=\frac{26}{3} \quad \cdots \text{Ⅳ}$$

[채점기준표]

Ⅰ	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구한다.	30%
Ⅱ	$f(1)$의 값을 구한다.	30%
Ⅲ	$f(3)$의 값을 구한다.	30%
Ⅳ	구하고자 하는 함숫값의 합을 구한다.	10%

Simple C 급수의 수렴과 발산

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 22~23

01 답 급수

02 답 급수의 합

03 답 0

04 답 ×

05 답 ○

06 답 ○

07 답 $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)$

08 답 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n}$

09 답 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

10 답 $\sum_{n=1}^{\infty}2$

11 답 수렴, $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}S_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

12 답 수렴, 2

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}S_n\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=2\end{aligned}$$

13 답 수렴, 0

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}S_n\\&=\lim_{n\to\infty}\{\log_2(n+1)-\log_2 n\}\\&=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+1}{n}=\log_2 1=0\end{aligned}$$

14 답 발산

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}S_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\\&=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty\end{aligned}$$

15 답 $\frac{1}{2}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-1)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-1)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

16 답 2

$(a_1-2)+(a_2-2)+(a_3-2)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)$

가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=2$

17 답 발산

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq0$이므로 발산한다.

18 답 수렴

급수 $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$에서

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=0$

첫째항부터 제n항까지의 부분합 S_n을 구하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}=\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$=\frac{5}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}=\frac{5}{4}$ (수렴)

19 답 6

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=4+2=6$$

20 답 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=4-2=2$$

21 답 8

$$\sum_{n=1}^{\infty}2a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$
$$=2\times4=8$$

22 답 6

$$\sum_{n=1}^{\infty}3b_n=3\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=3\times2=6$$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 24~25

23 답 ⑤

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

따라서 주어진 급수는 양의 무한대로 발산한다.

24 답 ②

ㄱ. $S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$

이므로 발산한다.

ㄴ. $S_n=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(2^n-1)=\infty$이므로 발산한다.

ㄷ. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\frac{2}{3}$이므로 수렴한다.

따라서 수렴하는 급수는 ㄷ뿐이다.

25 답 ④

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\ \left(\because \frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\right)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

26 답 ②

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

27 답 ③

주어진 급수의 제n항이

$\dfrac{1}{n^2+2n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$이므로

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\cancel{\dfrac{1}{3}}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\cancel{\dfrac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{3}}-\cancel{\dfrac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{4}}-\cancel{\dfrac{1}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\dfrac{1}{n-1}}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$

28 답 ⑤

$S_n=\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\log_2\dfrac{k^2-1}{k^2}$

$=\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(\dfrac{k-1}{k}\times\dfrac{k+1}{k}\right)$

$=\log_2\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\right)+\log_2\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3}\right)+\cdots+\log_2\left(\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n+1}{n}\right)$

$=\log_2\left\{\left(\dfrac{1}{2}\times\cancel{\dfrac{3}{2}}\right)\times\left(\cancel{\dfrac{2}{3}}\times\cancel{\dfrac{4}{3}}\right)\times\cdots\times\left(\cancel{\dfrac{n-1}{n}}\times\dfrac{n+1}{n}\right)\right\}$

$=\log_2\dfrac{n+1}{2n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\dfrac{n+1}{2n}$

$=\log_2\dfrac{1}{2}=-1$

> 심플 정리
>
> **[로그의 성질]**
>
> $a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $y>0$일 때,
>
> (1) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
>
> (2) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
>
> (3) $\log_a x^r=r\log_a x$
>
> (4) $a^{\log_a x}=x$

29 답 ①

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-3)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{3}{2}$

$\lim_{n\to\infty}(4a_n+5)=4\lim_{n\to\infty}a_n+5$

$=4\times\dfrac{3}{2}+5=11$

30 답 3

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\dfrac{n}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{n}{n+1}\right)=0$

이때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(2a_n+1)=2\lim_{n\to\infty}a_n+1=2+1=3$

31 답 ③

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{2}\neq0$이므로 발산한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$

$=\dfrac{1}{2}\neq0$이므로 발산한다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\cancel{\dfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{2}}-\cancel{\dfrac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$

이므로 수렴한다.

따라서 발산하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

32 답 ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+4b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+4\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=3\times2+4\times3=18$

33 답 ②

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}2a_n$

$=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{5}{2}$

34 답 ⑤

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다. (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$에 수렴한다면

$a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$ (참)

ㄷ. ㄴ의 대우가 참이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

35 답 ③

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \beta$ (단, α와 β는 상수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n+b_n)-a_n\}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \beta - \alpha$ (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} \log a_n = 0$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

36 답 ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \alpha$ (단, α는 상수)라 하자.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \beta$ (단, β는 상수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + a_n - a_n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$= \alpha - \beta$ (참)

ㄴ. ㄱ의 대우에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 발산한다. (참)

ㄷ. ㄱ에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$도 수렴한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

Simple D 등비급수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 26~27

01 답 등비급수

02 답 $\frac{a}{1-r}$

03 답 수렴, 발산

04 답 ×

$r=1$일 때, 등비수열 $\{r^n\}$은 1로 수렴하지만 등비급수

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$은 ∞로 발산한다.

05 답 ○

06 답 ○

07 답 수렴

공비가 $\frac{1}{2}$이고 $-1 < \frac{1}{2} < 1$이므로 수렴

08 답 발산

공비가 $\sqrt{2}$이고 $\sqrt{2} > 1$이므로 발산

09 답 발산

공비가 $-\frac{3}{2}$이고 $-\frac{3}{2} < -1$이므로 발산

10 답 발산

공비가 -1이므로 발산

11 답 수렴, 3

공비가 $\frac{2}{3}$이고 $-1 < \frac{2}{3} < 1$이므로 수렴하고 그 합은

$\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$

12 답 발산

공비가 2이고 $2 > 1$이므로 발산

13 답 발산

공비가 4이고 $4 > 1$이므로 발산

14 답 수렴, $\frac{8}{3}$

공비가 $\frac{1}{4}$이고 $-1 < \frac{1}{4} < 1$이므로 수렴하고 그 합은

$\frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{8}{3}$

15 답 $-2<x<2$

공비가 $-\frac{x}{2}$이므로 등비급수가 수렴하려면

$-1<-\frac{x}{2}<1$

$\therefore\ -2<x<2$

16 답 $-1<x<5$

공비가 $\frac{x-2}{3}$이므로 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{x-2}{3}<1$

$-3<x-2<3$

$\therefore\ -1<x<5$

17 답 (가) : $\frac{1}{10}$, (나) : $\frac{11}{45}$

$$0.2\dot{4}=0.2+0.04+0.004+0.0004+\cdots$$
$$=\frac{2}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\cdots$$
$$=\frac{2}{10}+\frac{\frac{4}{100}}{1-\underbrace{\boxed{\frac{1}{10}}}_{(가)}}$$
$$=\frac{2}{10}+\frac{4}{90}$$
$$=\frac{22}{90}$$
$$=\underbrace{\boxed{\frac{11}{45}}}_{(나)}$$

18 답 (가) : $\frac{1}{2}$, (나) : 2

n번째 정사각형의 넓이를 S_n이라 하면 $S_1=1$이고, n번째 정사각형과 $n+1$번째 정사각형의 한 변의 길이의 비가

$1:\frac{1}{\sqrt{2}}=1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{2}$이다.

$S_{n+1}=\overbrace{\boxed{\frac{1}{2}}}^{(가)}\times S_n$이다.

따라서 구하는 넓이

$$S=\frac{1}{1-\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}}}_{(가)}}=\overbrace{\boxed{2}}^{(나)}$$

> 심플 정리
>
> **[길이 · 넓이 · 부피의 닮음비]**
>
> 두 도형의 닮음비가 $a:b$라 할 때,
>
> (1) 길이의 비는 $a:b$
>
> (2) 넓이의 비는 $a^2:b^2$
>
> (3) 부피의 비는 $a^3:b^3$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 28～29

19 답 18

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{6^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9\times\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=9\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=9\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=18$$

20 답 ②

$2^{n+1}-2^{n-1}=2^{n-1}(2^2-1)=3\times2^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}-2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\times2^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

21 답 ③

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}+\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

22 답 3

공비가 $\frac{x}{2}-3$이므로 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{x}{2}-3<1$, $2<\frac{x}{2}<4$ $\quad\therefore\ 4<x<8$

따라서 정수 x는 5, 6, 7로 3개이다.

23 답 ⑤

공비가 $\log_2 x-1$이므로 등비급수가 수렴하려면

$-1<\log_2 x-1<1$, $0<\log_2 x<2$ $\quad\therefore\ 1<x<4$

따라서 정수 x는 2, 3이고, 모든 정수 x의 값의 합은 $2+3=5$이다.

24 답 ⑤

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$

ㄱ. 공비가 r^2이고, $0\le r^2<1$이므로 수렴한다.

ㄴ. 공비가 $-r$이고, $-1<-r<1$이므로 수렴한다.

ㄷ. 공비가 $\frac{1-r}{2}$이고, $0<\frac{1-r}{2}<1$이므로 수렴한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

25 답 ④

$\overline{OA_n}$의 길이를 l_n이라 하면

$\overline{OA_1}=\frac{2}{3}\overline{OA}$이므로 $l_1=\frac{2}{3}$이고,

$\overline{OA_{n+1}}=\frac{2}{3}\overline{OA_n}$이므로 $l_{n+1}=\frac{2}{3}l_n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{OA_n}=\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$

26 답 ②

점 P_n의 좌표를 (x_n, y_n)이라 하면 $x_1=0$

$x_2=x_3=\frac{2}{3}$

$x_4=x_5=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$x_6=x_7=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5$

⋮

$\therefore \alpha=\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5+\cdots$

$=\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{6}{5}$

27 답 ④

처음 15만 톤의 40 %가 재활용되고, 재활용될 때마다 40 %씩 다시 재활용되므로 재활용 과정을 무한히 반복할 때 사용할 수 있는 물의 양은

$15+15\times\frac{2}{5}+15\times\left(\frac{2}{5}\right)^2+\cdots$

등비급수의 합을 구하면

$\dfrac{15}{1-\frac{2}{5}}=25$(만 톤)

28 답 ②

정삼각형 S_1의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$이므로

S_1의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{3})^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

정삼각형 $A_nB_nC_n$과 정삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는 $2:1$이므로 넓이의 비는 $4:1$이다.

즉, $S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$이다.

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{3}$

29 답 ③

$\overline{AA_1}=\frac{1}{2}\overline{AB}=1$이고, $\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}\overline{AA_1}=\frac{1}{2}$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}$이고,

$\overline{A_nA_{n+1}}$과 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$의 길이의 비가 $2:1$이므로 넓이의 비는 $4:1$이다. 즉, $S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{\pi}{8}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{6}$

30 답 ③

$0.\dot{2}=0.2+0.02+0.002+\cdots=\frac{0.2}{1-0.1}=\frac{2}{9}$

$0.\dot{5}=0.5+0.05+0.005+\cdots=\frac{0.5}{1-0.1}=\frac{5}{9}$

이므로 등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{9}$이고, 공비가 $\frac{5}{9}$이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{\frac{2}{9}}{1-\frac{5}{9}}=\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{2}$

31 답 ⑤

$0.\dot{\alpha}=0.\alpha+0.0\alpha+0.00\alpha+\cdots=\frac{0.\alpha}{1-0.1}=\frac{\alpha}{9}$

즉, 등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{\alpha}{9}$이고, 공비가 $0.\alpha=\frac{\alpha}{10}$이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{\frac{\alpha}{9}}{1-\frac{\alpha}{10}}=\frac{10\alpha}{9(10-\alpha)}=\frac{10}{9}$

$\alpha=10-\alpha$에서 $\alpha=5$

32 답 ④

$0.00\dot{a}=\frac{a}{900}$, $0.0\dot{b}=\frac{b}{90}$, $0.\dot{c}=\frac{c}{9}$이고 이 세 수가 순서대로 등비수열을 이루므로

$\left(\frac{b}{90}\right)^2=\frac{a}{900}\times\frac{c}{9}$

$\therefore b^2=ac$

그런데 $1<a<b<c<9$이므로

$a=2$, $b=4$, $c=8$

$\therefore a+b+c=14$

심플 정리

[등비중항]

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b는 a와 c의 등비중항이고 다음이 성립한다.

$b^2=ac$

I D

연습 문제 [C~D]
[기출＋기출 변형] 문제편 pp. 30~31

01 답 ②

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{2n^2+3}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n+1}{2n^2+3} = \frac{4}{2} = 2$

02 답 ②

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = \left(2-\cancel{\frac{3}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{3}{2}} - \cancel{\frac{3}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{n+1}{n}} - \frac{n+2}{n+1}\right)$

$= 2 - \frac{n+2}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right) = 1$

03 답 ③

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$이므로 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \log_2 \frac{n+1}{n+2}$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \log_2 \frac{k+1}{k+2}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \log_2 \frac{4}{5} + \cdots + \log_2 \frac{n+1}{n+2}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \log_2 \left(\frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{5} \times \cdots \times \frac{\cancel{n+1}}{n+2}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{2}{n+2} = -\infty$

즉, 음의 무한대로 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$

즉, 수렴한다.

따라서 발산하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

> 심플 정리
>
> [급수의 수렴과 발산]
>
> (1) $\lim_{n\to\infty} S_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.
>
> (2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.
>
> (3) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

04 답 $\frac{3}{2}$

> x에 대한 이차방정식 $x^2-2nx+(n^2-1)=0$의 두 근을 α_n, β_n $(\alpha_n<\beta_n)$이라고 할 때, $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\beta_n}\right)$의 값을 구하시오. 근과 계수의 관계를 이용하거나 인수분해를 이용해서 $\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\beta_n}$을 n에 관한 식으로 나타내야 해.

1st $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이지?

$x^2-2nx+(n^2-1)=0$

$\{x-(n-1)\}\{x-(n+1)\}=0$

$\therefore \alpha_n = n-1,\ \beta_n = n+1\ (\because \alpha_n<\beta_n)$

2nd 부분합 S_n을 먼저 구한 후, S_n의 극한값을 구해야 해.

$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\beta_n}\right)$

$= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \frac{1}{n}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2}$

> **TIP**
>
> $\alpha_n+\beta_n = 2n$, $\alpha_n\beta_n = n^2-1$이므로
>
> $(\beta_n-\alpha_n)^2 = (\alpha_n+\beta_n)^2 - 4\alpha_n\beta_n = 4$
>
> $\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\beta_n} = \frac{\beta_n-\alpha_n}{\alpha_n\beta_n} = \frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

05 답 ①

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3a_n - \frac{1}{4}\right) = 4$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(3a_n - \frac{1}{4}\right) = 0$

$3a_n - \frac{1}{4} = b_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$a_n = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{12}$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}b_n + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12}$

06 답 54

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+5b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 5\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$= 4+50 = 54$

07 답 ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=1$일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, α는 상수) 급수의 합이 1이라는 사실보다는 급수가 수렴한다는 사실에 유의해야 해.

[보기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha-1$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 발산한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이야.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ (참)

2nd 식을 변형하여 급수의 성질을 이용하자.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{-(a_n-b_n)+a_n\}$

$=-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha-1$ (참)

3nd 대우를 이용하여 참, 거짓을 판별하자.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (단, β는 상수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n-b_n)+b_n\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta+1$

즉, 대우인 '$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$도 수렴한다.'가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

08 답 ②

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^{-n}}{3^n-2^{-n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{6^n-1}{3^n}}{\frac{6^n-1}{2^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$$

09 답 ④

$a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n\ (n\geq1)$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{7}{2}$인 등비수열이므로 $a_n=\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}\ (n\geq1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}10\times\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}=\frac{10}{1-\frac{2}{7}}=14$$

10 답 ④

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$은 $-1<\frac{x-3}{2}<1$일 때 수렴하므로

$1<x<5$

$1<x<5$를 만족시키는 정수 x는 2, 3, 4

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $2+3+4=9$이다.

11 답 ①

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}\right)^n$이 수렴할 때, 다음 [보기]의 급수 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은? 등비급수가 수렴할 조건은 공비가 -1보다 크고 1보다 작아야지?

[보기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r+1}{3}\right)^n$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(2r-1)^n$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{4}-1\right)^n$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 등비급수가 수렴하기 위한 공비의 범위를 구해야 해.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}\right)^n$이 수렴하므로 공비 $\frac{r}{2}$의 값의 범위는

$-1<\frac{r}{2}<1 \qquad \therefore -2<r<2$

2nd 주어진 급수의 공비의 범위를 구해서 수렴 · 발산을 파악해야 해.

ㄱ. $-1<r+1<3$에서 $-\frac{1}{3}<\frac{r+1}{3}<1$이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r+1}{3}\right)^n$은 수렴한다.

ㄴ. $-4<2r<4$에서 $-5<2r-1<3$이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2r-1)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

ㄷ. $-\frac{1}{2}<\frac{r}{4}<\frac{1}{2}$에서 $-\frac{3}{2}<\frac{r}{4}-1<-\frac{1}{2}$이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{4}-1\right)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

따라서 수렴하는 것은 ㄱ뿐이다.

12 답 ②

$a_1=0.\dot{2}=\frac{2}{9}$, $a_2=0.0\dot{8}=\frac{8}{90}$이므로 공비 r는 $r=\frac{8}{90}\div\frac{2}{9}=\frac{2}{5}$

$\therefore a_n=\frac{2}{9}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

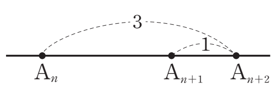
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{10}{27}$$

13 답 ②

$\overline{A_nA_{n+1}}=a_n$이라 하면

$\overline{A_nA_{n+2}}:\overline{A_{n+1}A_{n+2}}=3:1$이므로

$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}:\overline{A_nA_{n+1}}=1:2$



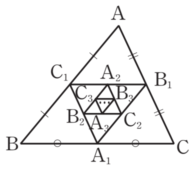
$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 10이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nA_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{10}{1-\frac{1}{2}}=10\times2=20$$

14 답 ③

오른쪽 그림과 같이 넓이가 3인 ABC가 있다. 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $A_1B_1C_1$을 만들고 다시 삼각형 $A_2B_2C_2$에서 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $A_2B_2C_2$를 만든다. 이와 같은 가정을 계속할 때, $\triangle A_1B_1C_1+\triangle A_2B_2C_2+\triangle A_3B_3C_3+\cdots$의 값은?



만들어진 삼각형이 모두 닮음인 삼각형이야.
닮음비를 이용하여 공비를 찾아야 해.

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1
④ 3 ⑤ 9

1st 닮음비를 이용하여 공비를 찾고, 첫째항을 직접 구해야 해.

$\triangle A_nB_nC_n \backsim \triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ (SSS 닮음)

두 도형의 닮음비가 $a:b$이면 넓이의 비는 $a^2:b^2$이다.

$\triangle A_nB_nC_n$와 $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비가 $2:1$이므로 넓이의 비는 $4:1$이다.

$\triangle A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라 하면 $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 넓이는 $\triangle A_nB_nC_n$의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로 $S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$

또, $S_1=\frac{1}{4}\times 3=\frac{3}{4}$

2nd 등비급수의 합을 구해야 해.

따라서 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

$\therefore \triangle A_1B_1C_1+\triangle A_2B_2C_2+\triangle A_3B_3C_3+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1$$

첫째항이 a이고 공비가 r인 등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$야.

15 답 20

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{2n^2+1}{3n+1}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{2n^2+1}{3n+1}\right)=0$ … Ⅰ

$b_n=na_n-\frac{2n^2+1}{3n+1}$로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고

$a_n=\frac{b_n}{n}+\frac{2n^2+1}{3n^2+n}$ … Ⅱ

$$\therefore \lim_{n\to\infty}30a_n=30\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}+\frac{2n^2+1}{3n^2+n}\right)$$

$$=30\times\frac{2}{3}=20 \quad \cdots \text{Ⅲ}$$

[채점기준표]

Ⅰ	주어진 급수가 수렴하므로 일반항의 극한값이 0임을 보인다.	20%
Ⅱ	치환을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.	40%
Ⅲ	$\lim_{n\to\infty}30a_n$의 값을 구한다.	40%

Ⅰ 대단원 TEST [A~D] [기출+기출 변형]
문제편 pp. 32~35

01 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$ (수렴)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1-3^n}{1+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}=-1$ (수렴)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}=0$ (수렴)

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

02 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2-n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{(n^2-n+1)-(n^2-n-1)\}}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2-n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2-n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}=1$$

03 답 ③

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 d인 등차수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{n\{1+(n-1)d\}}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{1+(n-1)d\}}{2n^2}=\frac{d}{2}=5$$

$\therefore d=10$

04 답 ①

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여
$\frac{1+a_n}{a_n}=n^2+2$가 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}n^2a_n$의 값은?

주어진 식을 정리해서 a_n을 구해야 해.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 분자를 직접 분모로 나누어 정리한 후 역수를 취해 a_n을 구해야 해.

$$\frac{1+a_n}{a_n}=\frac{1}{a_n}+1=n^2+2$$

$$\frac{1}{a_n}=n^2+1$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{n^2+1}$$

2nd 주어진 식의 분자, 분모를 n^2으로 나눈 후 극한값을 구해야 해.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}n^2a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴에서 분모와 분자의 차수가 같으면 최고차항의 계수의 비가 극한값이야.

05 답 ③

$\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=3\times3-2\times(-2)=13$

06 답 ①

분자와 분모의 차수가 같아야 하므로

$a+3b=0$ ⋯ ㉠

$\lim_{n\to\infty}\frac{(3a+b)n+4}{(a+3b)n^2+2n-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3a+b)n+4}{2n-1}$

$=\frac{3a+b}{2}=4$

$\therefore 3a+b=8$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore a^2+b^2=10$

07 답 ③

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+an}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+an}+n}{(\sqrt{n^2+an}-n)(\sqrt{n^2+an}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+an}+n}{an}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}{a}$

$=\frac{2}{a}=2$

$\therefore a=1$

08 답 ②

> 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+1}=\frac{1}{4}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n+a_n}{n-a_n}$의 값은?
>
> $\frac{a_n}{2n+1}=b_n$으로 치환하여 $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{4}$임을 이용하자.
>
> ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

1st $\frac{a_n}{2n+1}=b_n$으로 치환한 후, a_n을 b_n에 관하여 정리하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+1}=\frac{1}{4}$에서 $b_n=\frac{a_n}{2n+1}$으로 놓으면

$a_n=(2n+1)b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{4}$

2nd 주어진 식의 분자, 분모를 n으로 나눈 후 극한값의 기본 성질을 이용하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{n+a_n}{n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+(2n+1)b_n}{n-(2n+1)b_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(2+\frac{1}{n}\right)b_n}{1-\left(2+\frac{1}{n}\right)b_n}$

$=\frac{1+2\times\frac{1}{4}}{1-2\times\frac{1}{4}}=3$

수렴하는 두 수열에 대한 극한값의 기본 성질을 이용하여 계산한 거야.

09 답 ⑤

> 수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은?
>
> 곡선이 x축과 만나는 것을 이차방정식의 판별식을 이용하여 구하자.
>
> ① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

1st 판별식을 이용하여 a_n의 범위를 구해야 해.

이차방정식 $x^2-(n+1)x+a_n=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(n+1)^2-4a_n\ge0$

$\therefore a_n\le\frac{(n+1)^2}{4}$

또, 이차방정식 $x^2-nx+a_n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=n^2-4a_n<0$

$\therefore a_n>\frac{n^2}{4}$

즉, $\frac{n^2}{4}<a_n\le\frac{(n+1)^2}{4}$ ⋯ ㉠

2nd 극한값의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구해야 해.

㉠의 각 변을 n^2으로 나누면

$\frac{n^2}{4n^2}<\frac{a_n}{n^2}\le\frac{(n+1)^2}{4n^2}$

각각에 $\lim_{n\to\infty}$을 취하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2}\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}\le\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{4}$

모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$를 이용한 거야.

10 답 ③

분모, 분자를 6^n으로 나누면

$\lim_{n\to\infty}\frac{6^n-3^n}{(2^n-1)(3^n-1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}=1$

11 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+a_n\times5^n}{2^n-5^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+a_n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}a_n=2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=-2$$

12 답 ④

등비수열 $\{(x-2)(x-5)^{n-1}\}$의 공비는 $x-5$이므로 이 등비수열이 수렴하기 위한 조건은

$x-2=0$ 또는 $-1<x-5\le1$

$\therefore x=2$ 또는 $4<x\le6$

따라서 주어진 조건을 만족하는 정수 x는 2, 5, 6이므로 그 합은 $2+5+6=13$이다.

13 답 ⑤

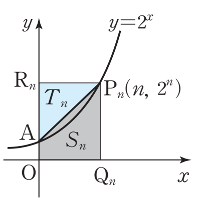
$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}=2$$

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times1^n}{1^n+2}=\frac{2}{3}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+2}=\frac{0}{2}=0$$

$$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right)+f(1)+f\left(\frac{2}{3}\right)=2+\frac{2}{3}+0=\frac{8}{3}$$

14 답 ⑤



그림에서 $\triangle AP_nR_n$의 넓이

$$T_n=\frac{1}{2}\times(2^n-1)\times n$$

사각형 AOQ_nP_n의 넓이

$$S_n=\frac{1+2^n}{2}\times n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{1+2^n}=1$$

15 답 ①

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[보기]

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다. 극한값의 기본 성질은 수렴하는 수열일 때만 적용할 수 있어.

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $0<a_n<b_n$이고 수열 $\{b_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 식을 변형한 후 극한값의 기본 성질을 이용하여 구해야 해.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}\{(a_n-b_n)\}=\beta$ (단, α와 β는 상수)라고 하면

$b_n=a_n-(a_n-b_n)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta \text{ (참)}$$

수렴하는 두 수열에 대한 극한값의 기본 성질을 이용한 거야.

2nd 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 중에 하나는 수렴하고 하나는 발산하는 것을 찾아 주어진 명제가 거짓임을 보여야 해.

ㄴ. [반례] $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $b_n=2^n$이면

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$이지만

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$으로 발산한다.

ㄷ. [반례] $a_n=(-1)^n+2$, $b_n=4$이면

$0<a_n<b_n$, $\lim_{n\to\infty}b_n=4$ (수렴)이지만

$\{a_n\}$은 발산한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

16 답 ②

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-5}=\frac{3}{2}(\neq0)$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n-5}$은 발산한다.

ㄴ. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1 \text{ (수렴)}$$

ㄷ. $$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1+\sqrt{n+1})=\infty$$

따라서 수렴하는 것은 ㄴ뿐이다.

17 답 ②

자연수 n에 대하여 직선 $(n+1)x+ny=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?

직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형은 삼각형이야.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

1st x절편과 y절편을 각각 구해서 삼각형의 넓이를 구해야해.

직선 $(n+1)x+ny=1$의 x절편은 $\frac{1}{n+1}$, y절편은 $\frac{1}{n}$이므로

$$a_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n(n+1)}$$

주어진 직선의 x절편이 a, y절편이 b일 때, 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times|a|\times|b|$야.

2nd 부분분수를 이용하여 부분합 S_n을 구한 후 S_n의 극한값을 계산해야 해.

첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\times\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

급수의 합은 부분합의 극한값을 구하는 거야.

18 답 ①

자연수 n에 대하여 $3^n\cdot5^{n+1}$의 모든 양의 약수의 개수를 a_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

a, b가 서로 다른 소수일 때, a^pb^q의 모든 양의 약수의 개수는 $(p+1)(q+1)$이야.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

1st a, b가 서로 다른 소수일 때, a^pb^q의 모든 양의 약수의 개수는 $(p+1)\times(q+1)$임을 이용하여 a_n을 구하자.

$3^n\cdot5^{n+1}$의 모든 양의 약수의 개수 $a_n=(n+1)(n+2)$

2nd 부분분수를 이용하여 부분합 S_n을 구한 후 S_n의 극한값을 계산해야 해.

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 부분합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

부분분수 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

$$=\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

급수의 합은 부분합의 극한값을 구하는 거야.

19 답 7

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n-7n+1}{2n-1}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n-7n+1}{2n-1}=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-7+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=7$$

20 답 ④

수열 $2,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{5}{4},\ \cdots$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 S_n이라 하자.

(ⅰ) $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때

$S_{2m-1}=\boxed{2}$ (가)

(ⅱ) $n=2m$ (m은 자연수)일 때

$S_{2m}=2-\boxed{\frac{m+2}{m+1}}$ (나)

$\therefore \lim_{m\to\infty} S_{2m}=\boxed{1}$ (다)

따라서 주어진 급수는 발산한다.

$a=2$, $b=1$, $f(m)=\frac{m+2}{m+1}$이므로

$f(a+b)=f(3)=\frac{5}{4}$

21 답 ④

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (단, α와 β는 상수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(5a_n+3b_n)=5\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=5\alpha+3\beta=18 \cdots ㉠$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=3\alpha-2\beta=7 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=3$, $\beta=1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha+\beta=4$$

22 답 ②

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ⅰ 대단원

23 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3$, $a_2=1$이므로 첫째항은 3,

공비는 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$이다.

$\therefore a_n=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}9\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{81}{8}$$

24 답 ⑤

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 첫째항이 $0.\dot{a}=\frac{a}{9}$이고, 공비가 $0.1\times a$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{a}{9}}{1-0.1\times a}=\frac{40}{9}$$

$$\frac{a}{9(1-0.1\times a)}=\frac{40}{9}$$

$$\frac{a}{1-0.1\times a}=40$$

$a=40-4a$

$\therefore a=8$

25 답 ④

첫째항과 공차를 같은 문자로 놓고 일반항 a_n을 나타내야 해.

첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a_1>0$)

[보기]

ㄱ. 수열 $\{S_n\}$이 수렴한다.

ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$이 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$이 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1st 첫째항과 공차를 모두 a라 하고 일반항 a_n을 구해. 부분합 S_n을 구하여 수렴, 발산을 조사해야 해.

$a_n=an$ (단, a는 첫째항이고 양수이다.)

$a_n=a+(n-1)a=a+an-a$
$=an$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a\times\frac{n(n+1)}{2}$$

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ (거짓)

ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{a}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{a}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{a}\text{ (참)}$$

2nd 무리식인 경우 분자 또는 분모를 유리화한 후 극한값을 구해야 해.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{\frac{a}{2}(n+1)(n+2)}+\sqrt{\frac{a}{2}n(n+1)}}$$

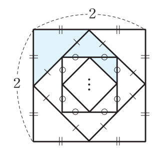
$$=\frac{a}{\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{a}{2}}}=\frac{\sqrt{2a}}{2}\text{ (참)}$$

분자와 분모의 차수가 같아 최고차항의 계수를 비를 이용한 거야.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

26 답 ⑤

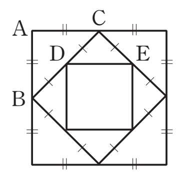
한 변의 길이가 2인 정사각형이 있다. 다음 그림과 같이 각 변의 중점을 이어서 정사각형을 만들고 4개의 직각삼각형 중 하나에 색을 칠한다.



이와 같은 과정을 한없이 계속할 때, 색이 칠해지는 부분의 넓이는? n번째와 $n+1$번째 삼각형의 닮음비를 구해서 공비를 구해야 해.

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

1st n번째와 $n+1$번째 삼각형의 닮음비를 이용하여 공비를 구해야 해.



위의 그림에서 $\triangle ABC\backsim\triangle CDE$이므로

$\overline{AC}:\overline{CD}=\sqrt{2}:1$

따라서 $\triangle ABC$와 $\triangle CDE$의 넓이의 비가 $2:1$이므로 공비는 $\frac{1}{2}$
닮음비가 $a:b$이면 넓이의 비는 $a^2:b^2$

이다.

1st 첫째항을 직접 구하여 등비급수의 합을 구해야 해.

정사각형의 한 변의 길이가 2이므로 첫 번째 도형의 색칠한 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$이다.

따라서 첫째항이 $\frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수의 합 S는

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$ 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$이야.

심플(미적분)해설1단원_006-029팔교.indd 28 20. 9. 4. 오후 2:31

27 답 3

다항식 $a_nx^2-a_nx+2$를 $x-n-1$로 나눈 나머지가 5이므로

$a_n(n+1)^2-a_n(n+1)+2=5$

$n(n+1)a_n=3$

$\therefore a_n=\frac{3}{n(n+1)}$ … Ⅰ

첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+1)}$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=3\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=3\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \quad \cdots \text{Ⅱ}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=3\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=3$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	나머지정리를 이용하여 일반항 a_n을 구한다.	40%
Ⅱ	일반항 a_n을 부분분수로 바꾼 후 부분합 S_n을 구한다.	50%
Ⅲ	부분합의 극한을 구한다.	10%

심플 정리

[나머지정리]

x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

28 답 10

등비수열 $\left\{\left(\frac{r-1}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하므로

$-1<\frac{r-1}{3}\le 1$

$-3<r-1\le 3$

$\therefore -2<r\le 4$ … ㉠ … Ⅰ

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-2}{3}\right)^n$이 수렴하므로

$-1<\frac{r-2}{3}<1$

$-3<r-2<3$

$\therefore -1<r<5$ … ㉡ … Ⅱ

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 r의 값의 범위는 $-1<r\le 4$

따라서 정수 r는 0, 1, 2, 3, 4이므로 그 합은 10이다. … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	등비수열의 수렴 조건을 이용하여 r의 값의 범위를 구한다.	40%
Ⅱ	등비급수의 수렴 조건을 이용하여 r의 값의 범위를 구한다.	40%
Ⅲ	등비수열과 등비급수가 동시에 수렴하는 모든 정수 r의 값의 합을 구한다.	20%

Ⅱ 미분법

Simple E 지수함수와 로그함수의 미분

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 38~39

01 답 ∞

02 답 e

03 답 자연로그, $\ln x$

04 답 ○

05 답 ×

06 답 ○

07 답 8

$\lim_{x\to 3}2^x=2^3=8$

08 답 0

09 답 0

10 답 ∞

11 답 3

12 답 $-\infty$

13 답 -3

14 답 e^4

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^4=e^4$

15 답 e^5

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^5=e^5$

16 답 $\frac{1}{2}$

17 답 $3\ln 10$

18 답 4

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\times 4=4$

19 답 2

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2=1\times 2=2$

20 답 $\frac{1}{\ln 2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\log_2(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_2(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_2 e = \frac{1}{\ln 2}$

21 답 $\ln 5$

22 답 $y' = 3e^x$

23 답 $y' = 5^x \ln 5$

24 답 $y' = \frac{2}{3x}$

25 답 $y' = \frac{1}{x \ln 2}$

$y = 2\log_4 x = \log_{2^2} x^2 = \log_2 x$

$\therefore y' = \frac{1}{x \ln 2}$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 40~47

26 답 ⑤

$\lim_{x \to 0} \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3\right\} = 1 + 3 = 4$

> **심플 정리**
> **[지수함수 $y = a^x$의 극한]**
> ① $y = a^x$ $(a>0,\ a \neq 1)$의 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
> ② a의 값에 관계없이 $\lim_{x \to 0} a^x = 1$, $\lim_{x \to 1} a^x = a$

27 답 ①

분모, 분자를 각각 5^x으로 나누면

$\lim_{x \to \infty} \frac{2^x + 3^x}{4^x + 5^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x}{\left(\frac{4}{5}\right)^x + 1} = \frac{0+0}{0+1} = 0$

28 답 ②

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4^x+1}{4^x-1}$

$\lim_{x \to -\infty} 4^x = 0$이므로

$\lim_{x \to -\infty} \frac{4^x+1}{4^x-1} = -1$

29 답 ⑤

5^x으로 소괄호 안을 묶으면

$\lim_{x \to \infty} (5^x - 3^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \left\{5^x\left(1 - \frac{3^x}{5^x}\right)\right\}^{\frac{1}{x}}$

$= 5 \lim_{x \to \infty} \left\{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}} = 5$

30 답 ①

$\lim_{x \to 9} \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

31 답 ⑤

$\lim_{x \to 2} (\log_2 x^3 + \log_2 x)$

$= \lim_{x \to 2} (3 \log_2 x + \log_2 x)$

$= \lim_{x \to 2} 4 \log_2 x = 4$

32 답 ③

$\lim_{x \to \infty} \log_2 \frac{8x+1}{x} = \lim_{x \to \infty} \log_2 \left(8 + \frac{1}{x}\right)$

$= \log_2(8+0)$

$= \log_2 8 = 3$

> **심플 정리**
> **[로그함수 $y = \log_a x$의 극한]**
> ① $y = \log_a x$ $(a>0,\ a \neq 1)$의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고 치역은 실수 전체의 집합이다.
> ② a의 값에 관계없이 $\lim_{x \to 1} \log_a x = 0$, $\lim_{x \to a} \log_a x = 1$
> ③ 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x) > 0$일 때,
> $\lim_{x \to \infty} \{\log_a f(x)\} = \log_a \{\lim_{x \to \infty} f(x)\}$가 성립한다.

33 답 ①

$\lim_{x \to 4} (\log_2 |x^2 - 4| - \log_2 |x+2|)$

$= \lim_{x \to 4} \log_2 \left|\frac{x^2-4}{x+2}\right|$

$= \lim_{x \to 4} \log_2 \left|\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}\right|$

$= \lim_{x \to 4} \log_2 |x-2|$

$= \log_2 2 = 1$

34 답 ⑤

$\lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{1}{3x} \cdot 3} = e^3$

35 답 ①

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{-\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} \left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^{-2} = e^{-2}$

36 답 ③

$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} \left\{\left(1 + \frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{3x}}\right\}^3 = e^3$

37 답 ④

$x - 1 = t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1$일 때, $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

38 답 ⑤

$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = e^2$

39 답 ⑤

$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{4x} = \lim_{x \to \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^2 = e^2$

40 답 ④

$-x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때, $t \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-4x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right\}^{4}=e^{4}$$

41 답 ⑤

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{ax}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}}$$
$$=\frac{1}{e^{a}}=e^{-a}$$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{ax}=e^{-2}$이므로

$a=2$

42 답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times2$$
$$=1\times2=2$$

43 답 ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3}{2}$$
$$=1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

44 답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+x)}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\log_2(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1}{3}\log_2 e=\frac{1}{3\ln 2}$$

45 답 ①

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_4(1+2x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\log_4(1+2x)}{2x}\times2$$
$$=\frac{1}{\ln 4}\times2=\frac{1}{\ln 2}$$

46 답 ①

$$\lim_{x\to0}\frac{2x}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to0}\frac{4x}{\ln(1+4x)}\times\frac{1}{2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+4x)}{4x}}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

47 답 ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{\ln(1+2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{2x}{\ln(1+2x)}\times\frac{\ln(1+4x)}{4x}\times\frac{4}{2}\right\}$$
$$=1\times1\times2=2$$

48 답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+2x}{1+x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\{\ln(1+2x)-\ln(1+x)\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right\}$$
$$=1\times2-1=1$$

49 답 ③

$$\lim_{x\to\infty}x\{\ln(x+1)-\ln x\}=\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}\cdots ㉠$$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때, $t \longrightarrow 0$이므로 ㉠은

$$\lim_{t\to0}\left\{\frac{1}{t}\ln(1+t)\right\}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

50 답 ①

이차방정식 $x^2-x\ln(1-4t)+\ln(1+2t)=0$의 두 근이 $f(t)$, $g(t)$이므로 근과 계수의 관계에 의해

$f(t)+g(t)=\ln(1-4t)$, $f(t)g(t)=\ln(1+2t)$

$$\therefore \lim_{t\to0}\left\{\frac{1}{f(t)}+\frac{1}{g(t)}\right\}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)+g(t)}{f(t)g(t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1-4t)}{\ln(1+2t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\ln(1-4t)}{-4t}\times(-4)}{\frac{\ln(1+2t)}{2t}\times2}$$
$$=\frac{-4}{2}=-2$$

심플 정리

[근과 계수의 관계]

(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

(2) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

51 답 1

$e^x-1=t$로 치환하면 $e^x=1+t$

$\therefore x=\ln(1+t)$ (가)

$x \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$=\frac{1}{\ln e}=1$$

$\therefore f(t)=\ln(1+t)$

$\therefore f(e-1)=\ln(1+e-1)=1$

52 답 ①

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\times(-2)$$
$$=1\times(-2)=-2$$

53 답 ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x^2+2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{x+2}\right)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

54 답 ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{\ln(1+4x)}{4x}\times\frac{4}{2}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{4}{2}=2$$

55 답 ①

$3^x-1=t$로 치환하면 $3^x=1+t$

$\therefore\ x=\log_3(1+t)$

$x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_3(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\log_3(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$=\frac{1}{\log_3 e}=\log_e 3=\ln 3$$

56 답 ①

$4^x-1=t$로 치환하면 $4^x=1+t$

$\therefore\ x=\log_4(1+t)$

$x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{2x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{2\log_4(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{2\log_4(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$=\frac{1}{2\log_4 e}$$
$$=\frac{\ln 4}{2}=\ln 2$$

57 답 ③

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때, $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-(t+1)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{e^t-1}{t}-1\right)$$
$$=1-1=0$$

58 답 ④

$3>e$이므로 주어진 식의 분자, 분모를 3^x으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^a-\left(\frac{e}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{e}{3}\right)^x}=3^a=3$$

$\therefore\ a=1$

59 답 ⑤

분모, 분자를 3^x으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\times3^{x+1}+2}{3^x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{a\times3+\frac{2}{3^x}}{1-\frac{4}{3^x}}=3a$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{a\times3^{x+1}+2}{3^x-4}=6$이므로

$3a=6\qquad\therefore\ a=2$

60 답 ①

$x\longrightarrow0$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}(e^x+a)=0$이므로

$1+a=0\qquad\therefore\ a=-1$

$a=-1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{2}\right)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

즉, $b=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{a}{b}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$$

61 답 ⑤

$x\longrightarrow0$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고 극한값이 2이므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}(e^{x+b}-1)=0$이므로

$e^b=1\qquad\therefore\ b=0$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times\frac{x}{e^x-1}\times a\right\}$$
$$=1\times1\times a=a$$

즉, $a=2\qquad\therefore\ a+b=2$

62 답 ④

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}(e^x-a)=0$이므로 $a=1$ ⋯ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{bx}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)=2$$

즉, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ ab=\frac{1}{2}$

63 답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-a^{-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-(a^{-x}-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}-\frac{a^{-x}-1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{a^{-x}-1}{-x}\right)$$
$$=1+\ln a=\ln ae$$

즉, $\ln 2e=\ln ae$

$\therefore a=2$

64 답 ①

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이어야 한다.

$f(0)=k$이고,

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\times(-2)\right\}=-2$$

$\therefore k=-2$

65 답 ③

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

$x\neq1$일 때, $f(x)=\dfrac{e^{x-1}-x}{x-1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때, $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{t\to0}\frac{e^t-(t+1)}{t}=\lim_{t\to0}\left(\frac{e^t-1}{t}-1\right)=1-1=0$$

$\therefore f(1)=0$

66 답 ②

$f'(x)=e^x-6x+1$이므로 $f'(0)=2$

67 답 ③

$\ln 2x=\ln 2+\ln x$이므로 $f'(x)=(\ln 2x)'=\dfrac{1}{x}$

$\therefore f'(1)=1$

68 답 ④

$f'(x)=e^x+xe^x$이므로 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$

69 답 ②

$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$이므로

$f'(e^{-2})=\ln e^{-2}+1=-2+1=-1$

70 답 ③

$$f'(x)=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'$$
$$=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}$$
$$=x(2\ln x+1)$$

$\therefore f'(e)=e(2\ln e+1)=3e$

71 답 ⑤

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$

$f(x)=4^x$에서 $f'(x)=4^x\ln 4$

$\therefore 2f'(1)=2\times4\ln 4=16\ln 2$

72 답 ⑤

$e^{x+1}=e^x\cdot e$이므로 $(e^{x+1})'=e\cdot e^x=e^{x+1}$

$f'(x)=x'e^{x+1}+x(e^{x+1})'=e^{x+1}+x\cdot e^{x+1}=(1+x)e^{x+1}$

$\therefore f'(1)=2e^2$

TIP

e^{x+1}의 미분은 G에서 합성함수의 미분으로 쉽게 할 수 있다.
$g(x)=x+1$이라 하면 $e^{x+1}=e^{g(x)}$이고 $g'(x)=1$이므로
$(e^{g(x)})'=e^{g(x)}\cdot g'(x)=e^{x+1}$

73 답 ④

$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}$이므로 $f'\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)=1$

74 답 ⑤

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}=2f'(-1)$$

$f'(x)=\dfrac{4}{\ln 2}\cdot2^x\ln 2=4\cdot2^x$이므로 $f'(-1)=4\times2^{-1}=2$

$\therefore 2f'(-1)=2\times2=4$

75 답 ②

$$f'(x)=x'\ln|x|+x\cdot(\ln|x|)'$$
$$=\ln|x|+x\cdot\frac{1}{x}=\ln|x|+1$$

$$\therefore \lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x^2-e^2}=\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}\cdot\frac{1}{x+e}$$
$$=f'(e)\cdot\frac{1}{2e}=(\ln e+1)\cdot\frac{1}{2e}$$
$$=\frac{1}{e}=e^{-1}$$

76 답 ⑤

$f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to1+}(e^{x-1}+a)=\lim\limits_{x\to1-}(bx+1)=f(1)$

$\therefore a=b\ \cdots$ ㉠

또한, $f'(1)$의 값이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}e^{x-1} & (x>1)\\ b & (x<1)\end{cases}$에서 $\lim\limits_{x\to1+}e^{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}b$

$\therefore 1=b\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=1$이므로 $a+b=2$

Ⅱ E

Simple F 삼각함수의 미분

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 48~49

01 답 $\sec^2\theta$

02 답 $\alpha+\beta$

03 답 $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

04 답 1

05 답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 답 ○

09 답 $\dfrac{5}{3}$

10 답 $\dfrac{5}{4}$

11 답 $\dfrac{4}{3}$

12 답 1

$\csc\theta=\dfrac{5}{3}$, $\cot\theta=\dfrac{4}{3}$이므로

$\csc^2\theta-\cot^2\theta=\dfrac{25}{9}-\dfrac{16}{9}=\dfrac{9}{9}=1$

13 답 $\dfrac{25}{16}$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta=\left(\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}$

14 답 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)$

$=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

15 답 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

16 답 $2+\sqrt{3}$

$\tan\dfrac{5}{12}\pi=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\dfrac{\pi}{6}}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\times\tan\dfrac{\pi}{6}}$

$=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$

17 답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 75^\circ\cos 30^\circ-\cos 75^\circ\sin 30^\circ$

$=\sin(75^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

18 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 100^\circ\cos 70^\circ+\sin 100^\circ\sin 70^\circ$

$=\cos(100^\circ-70^\circ)=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

19 답 1

$\dfrac{\tan 75^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 75^\circ\tan 30^\circ}$

$=\tan(75^\circ-30^\circ)=\tan 45^\circ=1$

20 답 1

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x=\sin\dfrac{2}{4}\pi=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

21 답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x}{\tan x}=\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{4}}{\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

22 답 1

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\cos x=1$

23 답 $\dfrac{3}{4}$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\times\dfrac{4x}{\sin 4x}\times\dfrac{3x}{4x}\right)$

$=1\times1\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}$

24 답 $\dfrac{5}{3}$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan 5x}{5x}\times\dfrac{3x}{\sin 3x}\times\dfrac{5x}{3x}\right)$

$=1\times1\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{5}{3}$

25 답 1

$f'(x)=\cos x$이므로 $f'(0)=1$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 50~57

26 답 ①

$$\csc 300^\circ=\frac{1}{\sin 300^\circ}=\frac{1}{\sin(360^\circ-60^\circ)}=\frac{1}{-\sin 60^\circ}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

27 답 ⑤

$$\sec\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$$

28 답 ③

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이고, $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\theta=\frac{5}{4}\pi$

$$\therefore \cot\frac{5}{4}\pi=\frac{1}{\tan\frac{5}{4}\pi}=\frac{1}{\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=1$$

29 답 ②

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=1$이므로

$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+1^2=2$

30 답 ③

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{8}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

31 답 ②

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로 $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로 $\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$

$\therefore (\sec^2\theta-\tan^2\theta)+(\csc^2\theta-\cot^2\theta)=2$

32 답 ③

$$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{1}{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{16}{7}$$

33 답 ②

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ&=\sin(45^\circ-30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

34 답 ④

$\sin 100^\circ=\sin(90^\circ+10^\circ)=\cos 10^\circ$,

$\sin 50^\circ=\sin(90^\circ-40^\circ)=\cos 40^\circ$이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\cos 10^\circ\cos 40^\circ+\sin 10^\circ\sin 40^\circ\\&=\cos(10^\circ-40^\circ)=\cos(-30^\circ)\\&=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

35 답 ①

$$\frac{\tan 10^\circ+\tan 35^\circ}{1-\tan 10^\circ\tan 35^\circ}=\tan(10^\circ+35^\circ)=\tan 45^\circ=1$$

36 답 ②

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$$

α, β는 모두 예각이므로 $0^\circ<\alpha+\beta<180^\circ$

$\therefore \alpha+\beta=45^\circ$

37 답 ②

이차방정식 $x^2-6x-5=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=6$, $\tan\alpha\tan\beta=-5$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{6}{1-(-5)}=1$$

α, β는 모두 예각이므로 $0^\circ<\alpha+\beta<180^\circ$

$\therefore \alpha+\beta=45^\circ$

38 답 ②

x에 대한 이차방정식 $x^2-ax-2=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=a$, $\tan\alpha\tan\beta=-2$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$에서 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{a}{1-(-2)}=\frac{2}{3}$

$\therefore a=2$

39 답 ③

두 직선 $y=-\frac{1}{5}x+1$, $y=\frac{2}{3}x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면

$\tan\alpha=-\frac{1}{5}$, $\tan\beta=\frac{2}{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\frac{-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{1+\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{2}{3}}\right|=1$$

$\therefore \theta=45^\circ$

40 답 ⑤

두 직선의 기울기는 $m=a$, $m'=\frac{1}{4}$이고, 두 직선이 이루는 예각의 크기가 45°이므로

$$1=\tan 45^\circ=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{a-\frac{1}{4}}{1+a\times\frac{1}{4}}\right|$$

$$\therefore \frac{a-\frac{1}{4}}{1+a\times\frac{1}{4}}=\pm 1$$

(i) $\frac{a-\frac{1}{4}}{1+a\times\frac{1}{4}}=-1$에서

$a-\frac{1}{4}=-1-\frac{a}{4}$

$\therefore a=-\frac{3}{5}$

(ii) $\frac{a-\frac{1}{4}}{1+a\times\frac{1}{4}}=1$에서

$a-\frac{1}{4}=1+\frac{a}{4}$

$\therefore a=\frac{5}{3}$

a는 양수이므로 $a=\frac{5}{3}$

41 답 ③

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{\cos 3x}=\frac{\sin 0-\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0$$

42 답 ⑤

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{\cos x+1}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{\cos x+1}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{\cos x+1}$$
$$=\lim_{x\to\pi}(1-\cos x)=2$$

43 답 ④

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{\sin(x+x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{\sin x\cos x+\cos x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{2\sin x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}=1$$

44 답 ①

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sin x-1}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{-(1-\sin x)}$$
$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)=-2$$

45 답 ④

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\tan x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}-1}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

46 답 ⑤

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2-1}{\sin^2 x-\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\sin^2 x-\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2$$

47 답 ①

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(-2x)}{-2x}\times(-2)\right\}$$
$$=1\times(-2)=-2$$

48 답 ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{3}{2}\right)$$
$$=1\times1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

49 답 ⑤

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{1}{\cos x}\times 2\right)$$
$$=1\times1\times2=2$$

50 답 ⑤

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin 4x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(\sin 4x)}{\sin 4x}\times\frac{\sin 4x}{4x}\times 2\right\}$$
$$=1\times1\times2=2$$

51 답 ⑤

$x^\circ=\frac{\pi}{180}x$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^\circ}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{\pi}{180}x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{180}{\pi}=\frac{180}{\pi}=k$$

$$\therefore \frac{k\pi}{90}=2$$

52 답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-\sin 4x}{\sin 2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 6x}{\sin 2x}-\frac{\sin 4x}{\sin 2x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 6x}{6x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{6}{2}-\frac{\sin 4x}{4x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{4}{2}\right)$$
$$=1\times1\times\frac{6}{2}-1\times1\times\frac{4}{2}=1$$

53 답 ①

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x}{-2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 4x}{4x}\times\frac{4}{-2}\right)$$
$$=1\times(-2)=-2$$

54 답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{4x}{\sin 4x}\times\frac{3}{4}\right)$$
$$=1\times1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

55 답 ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan 2x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(\tan 2x)}{\tan 2x}\times\frac{\tan 2x}{2x}\times2\right\}$$
$$=1\times1\times2=2$$

56 답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x+\tan 3x}{4x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{4x}+\frac{\tan 3x}{4x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\times\frac{1}{4}+\frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{3}{4}\right)$$
$$=1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{4}=1$$

57 답 ①

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(4x^3-3x^2+2x)}{3x^3+2x^2-x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(4x^3-3x^2+2x)}{4x^3-3x^2+2x}\times\frac{4x^3-3x^2+2x}{3x^3+2x^2-x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan(4x^3-3x^2+2x)}{4x^3-3x^2+2x}\times\lim_{x\to0}\frac{4x^3-3x^2+2x}{3x^3+2x^2-x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4x^2-3x+2}{3x^2+2x-1}=-2$$

58 답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\quad\longleftarrow 1-\cos^2 x=\sin^2 x$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{2}{1+\cos x}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{2}{1+1}=1$$

59 답 ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{4x^2}{1-\cos 2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4x^2(1+\cos 2x)}{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4x^2(1+\cos 2x)}{\sin^2 2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2\times(1+\cos 2x)\right\}$$
$$=1^2\times(1+1)=2$$

60 답 ②

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$일 때 $t\longrightarrow0$이고

$x=\frac{\pi}{2}+t$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{t}=-1$$

61 답 ①

$\frac{\pi}{2}-\theta=t$로 놓으면 $\theta\longrightarrow\frac{\pi}{2}$일 때 $t\longrightarrow0$이고 $\theta=\frac{\pi}{2}-t$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\theta-\pi}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\lim_{t\to0}\frac{2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\pi}{\tan t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-2t}{\tan t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}\times(-2)$$
$$=1\times(-2)=-2$$

62 답 ②

$x-\frac{3}{2}\pi=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\frac{3}{2}\pi$일 때 $t\longrightarrow0$이고

$x=\frac{3}{2}\pi+t$이므로

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)\tan x=\lim_{t\to0}t\tan\left(t+\frac{3}{2}\pi\right)$$
$$=\lim_{t\to0}t\cdot(-\cot t)$$
$$=\lim_{t\to0}\left(-\frac{t}{\tan t}\right)=-1$$

63 답 ④

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $x \longrightarrow \infty$일 때, $t \longrightarrow 0$이고 $x=\frac{1}{t}$이므로

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

64 답 ④

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $x \longrightarrow \infty$일 때, $t \longrightarrow 0$이고 $x=\frac{1}{t}$이므로

$$\therefore \lim_{x\to\infty} x\tan\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=1$$

65 답 ⑤

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $x \longrightarrow \infty$일 때, $t \longrightarrow 0$이고 $x=\frac{1}{t}$이므로

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{4}{x}\cot\frac{2}{x}=\lim_{t\to 0}\sin 4t\cot 2t$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin 4t}{4t}\times\frac{2t}{\tan 2t}\times\frac{4}{2}\right)$$
$$=1\times 1\times\frac{4}{2}=2$$

66 답 ②

$180^\circ=\pi$에서 $1^\circ=\frac{\pi}{180}$이므로

$$\left(\frac{1}{x}\right)^\circ=\frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\pi}{180x}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)^\circ=\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{180x}$$

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $x \longrightarrow \infty$일 때, $t \longrightarrow 0$이고 $x=\frac{1}{t}$이므로

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{180x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}t}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{180}t}{\frac{\pi}{180}t}\times\frac{\pi}{180}\right)=\frac{\pi}{180}$$

67 답 ⑤

극한값이 존재하고 $x \longrightarrow 0$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+a)}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x}{\sin x}\times(x+a)\right\}$$
$$=1\times a=a$$

$\therefore a=2$

$\therefore a-b=2-0=2$

68 답 ④

0이 아닌 극한값이 존재하고 $x \longrightarrow 0$일 때, (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

$\lim_{x\to 0}(ax^2+b)=0 \qquad \therefore b=0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{ax^2+b}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{ax^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{ax^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{ax^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{a}\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$
$$=\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}$$

$\therefore a=1 \qquad \therefore a+b=1$

69 답 ④

0이 아닌 극한값이 존재하고 $x \longrightarrow 0$일 때, (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+b}-1)=0$이므로

$\sqrt{b}-1=0 \qquad \therefore b=1$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+b}-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+1}-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot(\sqrt{ax+1}+1)}{ax}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{a}\cdot(\sqrt{ax+1}+1)\right\}$$
$$=1\times\frac{2}{a}\times 2=\frac{4}{a}=4$$

$\therefore a=1$

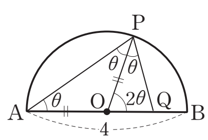
$\therefore ab=1$

70 답 ④

$\angle APO=\angle OPQ=\theta$라 하면

$\angle PAO=\theta$이므로

$\angle POQ=2\theta$ ($\because$ 외각)



$\triangle OPQ$에서 사인법칙에 의하여

[사인법칙]
삼각형 ABC에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 마주 보는 변의 길이를 각각 a, b, c라 하고, R가 삼각형 ABC의 외접원의 반지름이면
$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$$\frac{\overline{OQ}}{\sin\theta}=\frac{\overline{OP}}{\sin(\pi-3\theta)}$$
$$\frac{\overline{OQ}}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin 3\theta}$$
$$\therefore \overline{OQ}=\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

점 P가 점 B에 한없이 가까워질 때 $\theta \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{\theta\to 0}\overline{AQ}=\lim_{\theta\to 0}(\overline{AO}+\overline{OQ})$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\left(2+\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)=\lim_{\theta\to 0}\left(2+\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{2}{3}\right)$$
$$=2+1\times 1\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

71 답 ①

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x}=k$

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 치환하면 $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$일 때, $t \longrightarrow 0$이고

$x=\frac{\pi}{2}+t$이므로

$$\begin{aligned}\therefore k&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{-\sin t}=-2\end{aligned}$$

72 답 ④

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=a$

$$\begin{aligned}a&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^3\cos x(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\right\}\\&=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

73 답 ③

곱의 미분법에 의해

$$\begin{aligned}f'(x)&=\{x'\cdot\sin x+x\cdot(\sin x)'\}+(\cos x)'\\&=(\sin x+x\cos x)-\sin x=x\cos x\end{aligned}$$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

74 답 ②

곱의 미분법에 의해

$$\begin{aligned}f'(x)&=\{x'\cdot\cos x+x\cdot(\cos x)'\}-(\sin x)'\\&=(\cos x-x\sin x)-\cos x\\&=-x\sin x\end{aligned}$$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{12}$

연습 문제 [E~F] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 58~59

01 답 ③

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}\times\frac{1}{2}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$$

02 답 ④

$3^x-1=t$로 치환하면 $x \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow 0$이고 $x=\log_3(t+1)$이므로

$$\begin{aligned}k&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3^x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3(t+1)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\log_3(t+1)^{\frac{1}{t}}=\log_3 e\end{aligned}$$

$\therefore 3^k=3^{\log_3 e}=e$

03 답 ⑤

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}(5^x+2^x)^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to\infty}\left[5^x\left\{1+\left(\frac{2}{5}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to\infty}5\left\{1+\left(\frac{2}{5}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}\\&=5\times 1=5\ \left(\because \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x=0\right)\end{aligned}$$

04 답 ③

$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{6x}}$의 값은?

e의 정의를 알아야 해.

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $\sqrt{e}$
④ e ⑤ e^2

1st 주어진 식을 변형하여 e의 정의 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$임을 이용하자.

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{6x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

$\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}$ 즉 $(1+0)^{\infty}$ 꼴의 극한값이 바로 e야.

05 답 ⑤

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+3x}{1+x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\{\ln(1+3x)-\ln(1+x)\}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+3x)-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)\\&=\lim_{x\to 0}\ln(1+3x)^{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}\times 3}-\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\&=\ln e^3-\ln e\\&=3-1=2\end{aligned}$$

Ⅱ E~F 연습

심플 정리

[로그의 성질]

$a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ b\neq1,\ x>0,\ y>0,\ c>0,\ c\neq1$이고,
m이 임의의 실수일 때

(1) $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$
(2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
(3) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
(4) $\log_a x^m=m\log_a x$
(5) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
(6) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$
(7) $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$
(8) $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

06 답 ③

극한값이 존재하고, $x\longrightarrow0$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이면
(분자) $\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to0}(e^{ax}-b)=0$

$1-b=0 \quad \therefore b=1$

$\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}=2$에서

$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\times a\right)=2$

$\therefore a=2$

$\therefore a+b=3$

07 답 ④

$\ln 5x=\ln 5+\ln x$이므로

$f'(x)=(\ln 5+\ln x)'=\frac{1}{x}$

$\therefore f'\left(\frac{1}{4}\right)=4$

08 답 12

$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+10x-1}{x}$의 값을 구하시오.
지수함수의 극한값을 구하기 위해 주어진 식을 분리해봐.

1st $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형하자.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+10x-1}{x}=\lim_{x\to0}\left(2\times\frac{e^{2x}-1}{2x}+10\right)$$
$$=2\times1+10$$
지수함수의 극한 $\lim_{x\to0}\frac{e^{bx}-1}{ax}=\frac{b}{a}$임을 이용해.
$$=12$$

09 답 ②

$$f'(x)=x'\log_2 x+x(\log_2 x)'$$
$$=1\times\log_2 x+\frac{x}{x\ln 2}$$
$$=\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}$$
$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{\ln 2}$$

10 답 ④

두 직선 $3x-5y+6=0,\ ax-y-2=0$의 기울기는 각각

$m_1=\frac{3}{5},\ m_2=a$

두 직선이 x축과 이루는 각의 크기를 각각 $\theta_1,\ \theta_2$라 하면

$\tan\theta_1=m_1=\frac{3}{5},\ \tan\theta_2=m_2=a$

$\therefore \tan\frac{\pi}{4}=\left|\tan(\theta_1-\theta_2)\right|=\left|\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right|$

즉, $1=\left|\frac{\frac{3}{5}-a}{1+\frac{3}{5}a}\right|$

$\therefore 1+\frac{3}{5}a=\frac{3}{5}-a$ 또는 $1+\frac{3}{5}a=a-\frac{3}{5}$

$\frac{8}{5}a=-\frac{2}{5}$ 또는 $\frac{2}{5}a=\frac{8}{5}$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

11 답 ①

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin ax}{x}+b\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\times a+b\right)$$
$$=a+b$$

$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin ax}{x}+b\right)=-2$이므로

$a+b=-2$

12 답 ①

세 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}x^a\ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=2$일 때,
$a+b+c$의 값은?
극한값이 2로 존재하려면 주어진 식을 $(1+0)^\infty$ 꼴로 변형해야 해.

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

1st 등식이 성립하기 위한 조건을 생각하여 b의 값을 구해.

$\lim_{x\to\infty}\ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=0$이려면 $\lim_{x\to\infty}\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=1$이어야 하므로

$\lim_{x\to\infty}b=1 \quad \therefore b=1$

2nd 주어진 식에 $b=1$을 대입하여 극한값을 구해.

$$\lim_{x\to\infty}x^a\ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}cx^{a-2}\ln\left(1+\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{c}}$$
$(1+0)^\infty$ 꼴로 맞추어야 해.
$$=\lim_{x\to\infty}cx^{a-2}=2$$

$a,\ c$가 양수이므로 $a=2,\ c=2$

$\therefore a+b+c=2+1+2=5$

13 답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2x\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{2x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{4}$$

14 답 ⑤

$x \longrightarrow 0$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이면 (분모) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\sin(ax+b)=\sin b=0$

$\therefore b=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin(ax+b)}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin ax}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin ax\times\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin ax}{ax}\times a\times\cos x}$$
$$=\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$$

$\therefore a=2$

$\therefore a+b=2$

15 답 ④

좌표평면에서 두 직선 $y=x$, $y=-2x$가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

두 직선이 이루는 각의 크기와 관련된 문제는 tan 함수의 덧셈정리를 이용해.

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2

④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

1st 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 tan 값이 바로 기울기임을 이용하자.

두 직선 $y=x$, $y=-2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면

기울기는 각각 1과 -2이지?

$\tan\theta_1=1$, $\tan\theta_2=-2$

2nd $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$를 이용하자.

$$\therefore \tan\theta=|\tan(\theta_1-\theta_2)|$$
$$=\left|\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right|$$

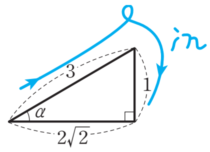
두 직선 $y=mx+b$, $y=m'x+b'$이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 $\tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$임을 이용한 거야.

$$=\left|\frac{1-(-2)}{1+1\times(-2)}\right|=3$$

16 답 $-\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{15}}{12}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$이므로 $\cos\alpha$와 $\sin\beta$만 각각 구해보자.

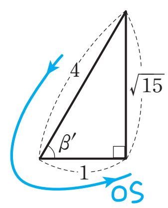
$\sin\alpha=\frac{1}{3}$을 만족하는 직각삼각형은 오른쪽 그림과 같다.



α는 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 제1사분면의 각이고, 제1사분면에서 코사인은 양수이므로

$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ … Ⅰ

$\cos\beta'=\frac{1}{4}$을 만족하는 직각삼각형은 오른쪽 그림과 같다.



β는 $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$이므로 제2사분면의 각이고, 제2사분면에서 사인은 양수이므로

$\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$ … Ⅱ

$$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$
$$=-\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{15}}{12}$$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\cos\alpha$의 값을 구한다.	30%
Ⅱ	$\sin\beta$의 값을 구한다.	30%
Ⅲ	덧셈공식을 이용하여 $\cos(\alpha+\beta)$의 값을 구한다.	40%

심플 정리

[삼각함수의 덧셈정리]

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$,
$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

Ⅱ E~F 연습

Simple G 여러 가지 미분법 (1)

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 60~61

01 답 $-\sin x$

02 답 $f'(g(x))g'(x)$

03 답 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

04 답 ○

05 답 ×

$(\tan x)'=\sec^2 x$

06 답 ○

07 답 $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$y'=\dfrac{2x(x-1)-x^2\times1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

08 답 $y'=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$y'=\dfrac{2(x^2+1)-2x\times2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

09 답 $y'=-\dfrac{2(x^2-3x+1)}{(x^2-1)^2}$

$y'=\dfrac{2(x^2-1)-(2x-3)\times2x}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{2(x^2-3x+1)}{(x^2-1)^2}$

10 답 $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$y'=\dfrac{2x(x+1)-x^2\times1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

11 답 $y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

$y'=-\dfrac{(x-1)'}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

12 답 $y'=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$y'=\dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

13 답 $y'=\dfrac{-2x+1}{(x^2-x-1)^2}$

$y'=\dfrac{-1\times(2x-1)}{(x^2-x-1)^2}=\dfrac{-2x+1}{(x^2-x-1)^2}$

14 답 $y'=\sec^2 x$

$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$이므로

$y'=\dfrac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

15 답 $y'=-\csc^2 x$

$y=\cot x=\dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}$이므로

$y'=\dfrac{(\cos x)'\cdot\sin x-\cos x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}$

$=\dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\dfrac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$

16 답 $y'=\sec x\tan x$

$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$이므로

$y'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=\dfrac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sec x\tan x$

17 답 $y'=-\csc x\cot x$

$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$이므로

$y'=\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'=\dfrac{-(\sin x)'}{\sin^2 x}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$

$=-\dfrac{1}{\sin x}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}=-\csc x\cot x$

18 답 $y'=\tan x+x\sec^2 x$

$y'=x'\cdot\tan x+x\cdot(\tan x)'=\tan x+x\sec^2 x$

19 답 $y'=2\sin x(1+\sec^2 x)$

$y'=2\{(\sin x)'\cdot\tan x+\sin x\cdot(\tan x)'\}$

$=2(\cos x\tan x+\sin x\sec^2 x)=2\sin x(1+\sec^2 x)$

20 답 $y'=\dfrac{\tan x-x\sec^2 x}{\tan^2 x}$

21 답 $y'=\dfrac{x\sec x\tan x-2\sec x}{x^3}$

$y'=\dfrac{\sec x\tan x\cdot x^2-\sec x\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{x\sec x\tan x-2\sec x}{x^3}$

22 답 $y'=6(2x+1)^2$

$y'=3(2x+1)^2\cdot(2x+1)'=3(2x+1)^2\cdot2=6(2x+1)^2$

23 답 $y'=2e^{2x}$

24 답 $y'=3\cos 3x$

25 답 $y'=2\sin x\cos x$

$y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x$

26 답 $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$

$y=\sqrt{f(x)}$이면 $y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ 이므로 $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$

27 답 $y'=-\dfrac{x\cos(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'=\cos(\sqrt{1-x^2})\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x\cos(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}$

유형 연습 [+ 내신 유형] 문제편 pp. 62~63

28 답 ③

$$f'(x)=\frac{(2x-3)'\cdot(3x+2)-(2x-3)\cdot(3x+2)'}{(3x+2)^2}$$
$$=\frac{2\cdot(3x+2)-(2x-3)\cdot3}{(3x+2)^2}=\frac{13}{(3x+2)^2}$$
$\therefore f'(-1)=13$

29 답 ②

$$f'(x)=-\frac{x'}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$
$\therefore f'(2)=-\frac{1}{4}$

30 답 ②

$f(x)=\frac{x^2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$에서

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2x)(x^2-1)-2x(x^3-x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$
$\therefore f'(2)=\frac{4}{9}$

31 답 ①

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=3f'(1)+f'(1)=4f'(1)$$
$f'(x)=\frac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$이므로

$$f'(1)=\frac{-2}{(1+1)^2}=-\frac{1}{2}$$
$\therefore\ 4f'(1)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

32 답 ⑤

$$f'(x)=\sec x\tan x-(-\csc x\cot x)$$
$$=\sec x\tan x+\csc x\cot x$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4}+\csc\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{4}$$
$$=\sqrt{2}\times1+\sqrt{2}\times1=2\sqrt{2}$$

33 답 ③

$$f'(x)=2\sec^2x-(-\csc^2x)=2\sec^2x+\csc^2x$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sec^2\frac{\pi}{4}+\csc^2\frac{\pi}{4}=2\times2+2=6$$

34 답 ⑤

$$f'(x)=\sec^2x\cdot\sec x+\tan x\cdot\sec x\tan x$$
$$=\sec x(\sec^2x+\tan^2x)$$
$$=\sec x(\sec^2x+\sec^2x-1)\ (\because\ 1+\tan^2x=\sec^2x)$$
$$=\sec x(2\sec^2x-1)$$
$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\sec0\cdot(2\sec^2 0-1)$$
$$=1\times(2\times1-1)=1$$

35 답 ⑤

$$f'(x)=\frac{\sin x\cdot(1+\cos x)-(1-\cos x)\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\times1}{(1+0)^2}=2$$

36 답 ⑤

$f'(x)=4\sin^3x\cdot\cos x$이므로 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

37 답 ⑤

$f'(x)=e^{x^3+2x}\cdot(3x^2+2)$이므로 $x=0$에서의 미분계수는

$f'(0)=2$

38 답 ①

$f'(x)=3^{\sin x}\cdot\ln3\cdot\cos x$이므로 $x=0$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=\ln3$

39 답 ⑤

$f'(x)=\frac{(x^3+x)'}{x^3+x}=\frac{3x^2+1}{x^3+x}$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{3+1}{1+1}=2$$

40 답 ④

$f'(x)=\frac{(\sin x)'}{\sin x\cdot\ln3}=\frac{\cos x}{\ln3\cdot\sin x}$이므로 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\ln3}$

41 답 ②

$f'(x)=\cos(x^2-x)\cdot(2x-1)=(2x-1)\cos(x^2-x)$이므로

$f'(0)=(0-1)\cos0=-1$

42 답 ③

$$f'(x)=-\sin(\cos x)\cdot(-\sin x)=\sin x\cdot\sin(\cos x)$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\times\sin0=0$$

43 답 ②

$f'(x)=\cos(\log_3x)\cdot\frac{1}{x\ln3}=\frac{\cos(\log_3x)}{x\ln3}$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{\cos0}{\ln3}=\frac{1}{\ln3}$$

Ⅱ G

Simple H 여러 가지 미분법 (2)

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 64~65

01 답 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

02 답 음함수

03 답 이계도함수

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ×

함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재하고 미분가능할 때,

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$이다.

07 답 $y'=\dfrac{1}{x}$

$y'=\dfrac{(3x)'}{3x}=\dfrac{3}{3x}=\dfrac{1}{x}$

08 답 $y'=\dfrac{3}{x\ln 10}-2x$

09 답 $y'=\dfrac{5(\ln x)^4}{x}$

$y'=5(\ln x)^4\cdot(\ln x)'=\dfrac{5(\ln x)^4}{x}$

10 답 $y'=-\tan x$

$y'=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

11 답 $y'=-\dfrac{2}{x^3}$

$y'=(x^{-2})'=-2x^{-2-1}$

$=-2x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$

12 답 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'=(x^{\frac{1}{2}})'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

13 답 $y'=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

$y'=(x^{-\frac{1}{3}})'=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

14 답 $y'=9x^2-\dfrac{5}{x^6}$

$y'=3\times 3x^2+(-5)\times x^{-5-1}=9x^2-5x^{-6}=9x^2-\dfrac{5}{x^6}$

15 답 $y'=2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$

$y=2x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=2x-x^{-1}+x^{-2}$이므로

$y'=2+x^{-2}-2x^{-3}=2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$

16 답 $y'=1+\dfrac{1}{x^2}$

$y=x+1-\dfrac{1}{x}=x+1-x^{-1}$이므로

$y'=1+0+x^{-2}=1+\dfrac{1}{x^2}$

17 답 $\dfrac{dy}{dx}=t$

$\dfrac{dx}{dt}=2$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t}{2}=t$

18 답 $\dfrac{dy}{dx}=-\cot t$

$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=\cos t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t}{-\sin t}=-\cot t$

19 답 $\dfrac{dy}{dx}=2x-2$

$2x+y-x^2=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2+\dfrac{dy}{dx}-2x=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=2x-2$

20 답 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

$x^2+y^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

21 답 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{4y^3}$

$y=\sqrt[4]{x+4}$에서 $y^4=x+4$이므로 양변을 y에 대하여 미분하면

$4y^3=\dfrac{dx}{dy}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{4y^3}$

22 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{4y+1}$

$x=\sqrt{2y^2+y+3}$에서 $x^2=2y^2+y+3$이므로 양변을 y에 대하여 미분하면

$2x\frac{dx}{dy}=4y+1$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{2x}{4y+1}$

23 답 $y''=6x+4$

$y'=3x^2+4x \quad \therefore y''=6x+4$

24 답 $y''=-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

$y'=2x^{-\frac{1}{2}}$ 이므로 $y''=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

25 답 $y''=4e^{-2x}$

$y'=e^{-2x}\cdot(-2x)'=-2e^{-2x}$이므로

$y''=-2\cdot e^{-2x}\cdot(-2)=4e^{-2x}$

26 답 $y''=-9\sin 3x$

$y'=\cos 3x\cdot(3x)'=3\cos 3x$이므로

$y''=3\cdot(-\sin 3x)\cdot(3x)'=-9\sin 3x$

유형 연습 [+내신 유형]

문제편 pp. 66~67

27 답 ④

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$이므로 $x=1$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$

28 답 ②

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$f'(x)=\frac{(\cos x)'}{\cos x\cdot\ln 3}=-\frac{-\sin x}{\ln 3\cdot\cos x}$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\ln 3}$

29 답 ①

$f(x)=\ln\cot x=\ln\frac{\cos x}{\sin x}=\ln\cos x-\ln\sin x$이므로

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'}{\cos x}-\frac{(\sin x)'}{\sin x}$$
$$=-\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$=-\frac{1}{\sin x\cos x}$$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$

30 답 ②

함수 $f(x)=\frac{(x-2)^3}{(x-3)^2(x-4)}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=3\ln|x-2|-2\ln|x-3|-\ln|x-4|$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-4}$

$\therefore \lim_{x\to5}\frac{f'(x)}{f(x)}=1-1-1=-1$

31 답 ②

$y=f(x)=\frac{2x^5-3x^3-1}{x^3}=2x^2-3-x^{-3}$에서

$f'(x)=4x-(-3)\cdot x^{-4}=4x+\frac{3}{x^4}$

따라서 $x=-1$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-4+3=-1$

32 답 ⑤

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f(x)=\sqrt{x}(1+x^2)=\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{2}}$에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{5}{2}x\sqrt{x}$$

$\therefore f'(1)=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$

33 답 ④

$y=f(x)=(1+2x)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2}-1}\times(1+2x)'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{1+2x}}\times2=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

따라서 $x=0$에서의 미분계수는 $f'(0)=1$

34 답 ④

$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x-2}=(x^2-1)(x-2)^{\frac{1}{2}}$에서

$$f'(x)=2x(x-2)^{\frac{1}{2}}+(x^2-1)\cdot\frac{1}{2}(x-2)^{\frac{1}{2}-1}(x-2)'$$
$$=2x(x-2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(x^2-1)(x-2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=2x\sqrt{x-2}+\frac{x^2-1}{2\sqrt{x-2}}$$
$$=\frac{4x(x-2)+x^2-1}{2\sqrt{x-2}}$$
$$=\frac{5x^2-8x-1}{2\sqrt{x-2}}$$

$\therefore f'(3)=\frac{45-24-1}{2}=\frac{20}{2}=10$

Ⅱ H

35 답 ①

$\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}==2t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{1}=2t$$

따라서 $t=-1$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 -2이다.

36 답 ②

$$\frac{dx}{dt}=(t-t^{-1})'=1+t^{-2}=\frac{t^2+1}{t^2}$$

$\frac{dy}{dt}=(t+t^{-1})'=1-t^{-2}=\frac{t^2-1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{t^2+1}{t^2}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$$\therefore \lim_{t\to0}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to0}\frac{t^2-1}{t^2+1}=-1$$

37 답 ⑤

$x^2-\frac{y^2}{2}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y}$$

따라서 점 $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 2이다.

> 심플 정리
>
> **[음함수의 미분법]**
>
> x의 함수 y가 $f(x,\ y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 음함수라 하고, y를 x에 대한 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

38 답 ④

$x^3-y^2+2xy+1=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2-2y\frac{dy}{dx}+2y+2x\frac{dy}{dx}=0$$

$$(2x-2y)\frac{dy}{dx}=-3x^2-2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2-2y}{2x-2y}$$

따라서 점 $(0,\ -1)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 1이다.

> **TIP**
>
> 음함수 $f(x,\ y)=0$ 꼴로 주어진 함수를 미분할 때,
>
> $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$, $\frac{d}{dx}y^n=ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$
>
> 을 이용하면 된다. 여기서
>
> $\frac{d}{dx}y^n=\frac{d}{dy}y^n\cdot\frac{dy}{dx}=ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$
>
> 를 기억하자. y를 미분변수로!

39 답 ①

$f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$

$a^3+2a=3$

$(a-1)(a^2+a+3)=0 \qquad \therefore a=1$

$f'(x)=3x^2+2$이므로

$$(f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}$$

40 답 ④

$$\lim_{x\to1}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}=(f^{-1})'(1)$$

$f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$2a+\cos a=1 \qquad \therefore a=0$

$f'(x)=2-\sin x$이므로

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2-\sin 0}=\frac{1}{2}$$

41 답 ①

함수 $f(x)=\frac{1}{x-2}$에 대하여

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)'=\{(x-2)^{-1}\}'$$
$$=-(x-2)^{-1-1}=-(x-2)^{-2}$$

$f''(x)=2(x-2)^{-3}=\frac{2}{(x-2)^3}$이므로

$f''(1)=-2$

42 답 ⑤

함수 $f(x)=x^2e^{-x}$에 대하여

$$f'(x)=(x^2)'\cdot e^{-x}+x^2\cdot(e^{-x})'$$
$$=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}$$

$$f''(x)=(2x-x^2)'\cdot e^{-x}+(2x-x^2)\cdot(e^{-x})'$$
$$=(2-2x)e^{-x}+(2x-x^2)(-e^{-x})$$
$$=(2-4x+x^2)e^{-x}$$

$\therefore f''(0)=2$

연습 문제 [G~H] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 68~69

01 답 ③

함수 $f(x)=\frac{2x-1}{3x+1}$에 대하여

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'(3x+1)-(2x-1)(3x+1)'}{(3x+1)^2}$$
$$=\frac{2(3x+1)-(2x-1)\times 3}{(3x+1)^2}=\frac{5}{(3x+1)^2}$$

$\therefore f'(0)=5$

02 답 ①

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2+1)-(x^2-2x)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{2x^2+2x-2}{(x^2+1)^2}=\frac{ax^2+bx+c}{(x^2+1)^2}$$

즉, $a=2$, $b=2$, $c=-2$ $\quad\therefore a+b+c=2$

03 답 ①

함수 $f(x)$가 $f(\cos x)=\sin 2x+\tan x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$를 만족시킬 때, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

합성함수의 미분법과 삼각함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 $\cos x=\frac{1}{2}$이 되는 $x=\frac{\pi}{3}$를 대입해.

① $-2\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ 0
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

1st 합성함수의 미분법과 삼각함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구하자.

$f(\cos x)=\sin 2x+\tan x$에서 양변을 미분하면

$-\sin x\cdot f'(\cos x)=2\cos 2x+\sec^2 x$ ⋯ ㉠

합성함수 미분법 $y'=f'(g(x))g'(x)$와 삼각함수의 미분법
① $(\sin x)'=\cos x$ ② $(\cos x)'=-\sin x$ ③ $(\tan x)'=\sec^2 x$
를 이용한 거야.

2nd $\cos x=\frac{1}{2}$이 되는 x의 값을 대입하여 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하자.

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$일 때 $x=\frac{\pi}{3}$

㉠에 $x=\frac{\pi}{3}$를 대입하면

$$-\sin\frac{\pi}{3}\cdot f'\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{2}{3}\pi+\sec^2\frac{\pi}{3}$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2^2=3$$
$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\times 3=-2\sqrt{3}$$

04 답 ②

$$f'(x)=\frac{-\sin x\cdot(\sin x+\cos x)-\cos x\cdot(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$
$$=\frac{-\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x+\cos x\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$$
$$=\frac{-1}{1+2\sin x\cos x}\quad(\because \sin^2 x+\cos^2 x=1)$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

05 답 ③

함수 $f(x)=\sec\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$에서

$$f'(x)=\sec\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)'$$
$$=2\sec\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$
$$=2\sec\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4}$$
$$=2\sqrt{2}\times 1=2\sqrt{2}$$

06 답 15

함수 $f(x)=5e^{3x-3}$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.
합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 $x=1$을 대입해.

1st 우선 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구하자.

$f(x)=5e^{3x-3}$이므로

$f'(x)=15e^{3x-3}$

합성함수의 미분법에 의해 $f(x)=e^{g(x)}$일 때, $f'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)$야.

2nd $x=1$을 대입하여 $f'(1)$의 값을 구해.

$f'(x)=15e^{3x-3}$이므로

$f'(1)=15e^0=15$

07 답 ⑤

함수 $y=f(x)=\ln|\tan x|$에서

$$f'(x)=\frac{1}{\tan x}\times(\tan x)'$$
$$=\frac{\cos x}{\sin x}\times\sec^2 x$$
$$=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

따라서 $x=\frac{\pi}{4}$에서의 미분계수는

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$$

08 답 ⑤

함수 $y=x^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=\ln x^{\ln x}=(\ln x)^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\ln x$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=y\cdot\frac{2}{x}\ln x=x^{\ln x}\cdot\frac{2}{x}\ln x=2x^{\ln x-1}\ln x$$

따라서 $x=e$에서의 접선의 기울기는

$2e^{\ln e-1}\ln e=2$

Ⅱ G~H 연습

09 답 21

로그함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 $x=10$을 대입해.

함수 $f(x)=\ln(2x-1)$에 대하여 $f'(10)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

1st 로그함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구하자.

$f(x)=\ln(2x-1)$에서 $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$ 로그함수의 미분법 $y=\ln|f(x)| \Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$를 이용한 거야.

2nd $x=10$을 대입하여 $f'(10)$에서 p, q의 값을 구해.

$\therefore f'(10)=\frac{2}{19}$

따라서 $p=19$, $q=2$이므로 $p+q=21$

10 답 ②

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cos\frac{\pi}{2}}=1$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

함수 $f(x)=x^{\cos x}$에서 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\cos x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}$$

$$f'(x)=x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^0\times\left(-1\times\ln\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\times 0\right)=-\ln\frac{\pi}{2}$$

11 답 ①

매개변수 t에 대하여 $x=\frac{1}{t}$, $y=t^3+1$에서

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t^2},\ \frac{dy}{dt}=3t^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{-\frac{1}{t^2}}=-3t^4$$

따라서 $t=1$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 -3이다.

12 답 12

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(x^3)=2x^3-x^2+32x$를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.

합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 $x=1$을 대입해.

1st 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구하자.

$f(x^3)=2x^3-x^2+32x$를 미분하면

$3x^2f'(x^3)=6x^2-2x+32$

합성함수의 미분법 $y'=f'(g(x))g'(x)$를 이용한 거야.

2nd $x=1$을 대입하여 $f'(1)$의 값을 구하자.

위 식에 $x=1$을 대입하면 $3f'(1)=36$ $\quad\therefore f'(1)=12$

13 답 ②

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

따라서 위의 식에서 $x=1$, $y=1$을 대입하면 구하는 접선의 기울기는 -1이다.

14 답 ①

함수 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$을 미분하면 $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

또, 위의 식을 미분하면

$$f''(x)=\frac{-2\cdot(x^2+1)^2-(-2x)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{-2(x^2+1)+8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$\therefore f''(0)=-2$

15 답 ①

함수 $f(x)=\ln(e^x-1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 양수 a에 대하여 $\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}$의 값은?

$f'(x)$는 로그함수의 미분법, $g'(x)$는 역함수의 미분법을 이용해야겠지?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

1st 역함수의 성질과 로그함수의 미분법을 이용하자.

$g(a)=b$라 하면 $f(b)=a$이므로

$\ln(e^b-1)=a \qquad \therefore e^b-1=e^a$

함수 $f(x)=\ln(e^x-1)$을 미분하면

$f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$ 로그함수의 미분법 $y=\ln|f(x)| \Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$를 이용한 거야.

2nd 역함수의 미분법을 이용해 $g'(a)$를 구하고, $\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}$의 값을 구하자.

$$g'(a)=\frac{1}{f'(b)}=\frac{e^b-1}{e^b}=\frac{e^a}{e^a+1}$$

$$\therefore \frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}=\frac{e^a-1}{e^a}+\frac{e^a+1}{e^a}=2$$

16 답 1

함수 $f(x)=\frac{1}{2}e^x\sin x$를 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^x\sin x+\frac{1}{2}e^x\cos x=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x) \quad \cdots \text{Ⅰ}$$

위의 식을 미분하면

$$f''(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x)=e^x\cos x \quad \cdots \text{Ⅱ}$$

$$\therefore f''(0)=e^0\times 1=1 \quad \cdots \text{Ⅲ}$$

[채점기준표]

Ⅰ	$f'(x)$를 구한다.	30%
Ⅱ	$f''(x)$를 구한다.	40%
Ⅲ	$f''(0)$을 구한다.	30%

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 70～71

01 답 미분계수, $f'(a)$

02 답 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

03 답 $f'(a)=g'(a)$

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ×

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 이 구간에서 증가하면 $f'(x)\geq 0$이다.

07 답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$y=\sqrt{x}$에서 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$x=1$일 때 기울기는 $\frac{1}{2}$

따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$이고, 점 $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x-1)+1$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

08 답 $y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$

$x=\frac{\pi}{3}$일 때 기울기는 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

09 답 $y=x+1$

$y=e^x$에서 $y'=e^x$

$x=0$일 때 기울기는 $e^0=1$

따라서 기울기가 1이고 점 $(0, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=(x-0)+1$ $\quad\therefore y=x+1$

10 답 $y=2x-2$

$y=\ln x^2$에서 $y'=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$

$x=1$일 때 기울기는 2

따라서 기울기가 2이고 점 $(1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=2(x-1)$

$\therefore y=2x-2$

11 답 $y=x-1$

$y=x\ln x$에서 $y'=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$x=1$일 때 기울기는 1

따라서 기울기가 1이고 점 $(1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=x-1$

12 답 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

$y=\frac{x-1}{x+2}$에서

$y'=\frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$

접점을 $(a, f(a))$라 하면

$\frac{3}{(a+2)^2}=\frac{1}{3}$

$\therefore a=1$ $(\because a>0)$

따라서 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(1, 0)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{3}(x-1)$

$\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

13 답 $y=x+\frac{1}{2}$

$y=\sqrt{2x}$에서

$y'=\frac{2}{2\sqrt{2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$

접점을 $(a, f(a))$라 하면

$\frac{1}{\sqrt{2a}}=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 기울기가 1이고 점 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$

$\therefore y=x+\frac{1}{2}$

14 답 $y=2x-\frac{\pi}{2}+1$

$y=\tan x$에서

$y'=\sec^2 x$

접점을 $(a, f(a))$라 하면

$\sec^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}=2$

$\therefore a=\frac{\pi}{4}$

따라서 기울기가 2이고 접점이 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$인 접선의 방정식은

$y=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$

$\therefore y=2x-\frac{\pi}{2}+1$

15 답 $y=x+2$

$y'=e^{x+1}$

$e^{a+1}=1$을 만족하는 접점 $(a,\ f(a))$라 하면 $a=-1$

따라서 기울기가 1이고 점 $(-1,\ 1)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=(x+1)+1$

$\therefore\ y=x+2$

16 답 $y=2x-2$

$y=2\ln x$에서 $y'=\dfrac{2}{x}$

접점을 $(a,\ f(a))$라 하면

$\dfrac{2}{a}=2\qquad \therefore\ a=1$

따라서 기울기가 2이고 점 $(1,\ 0)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=2(x-1)$

$\therefore\ y=2x-2$

17 답 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

$y=\sqrt{x}$에서 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

접점을 $(a,\ f(a))$라 하면 기울기는 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)+\sqrt{a}$

이 접선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(-1-a)+\sqrt{a}$

$a+1=2a\qquad \therefore\ a=1$

따라서 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}(x-1)+1$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

18 답 $y=-\dfrac{1}{4}x+1$

$y=\dfrac{1}{x}$에서 $y'=-\dfrac{1}{x^2}$

접점을 $(a,\ f(a))$라 하면 기울기는 $y'=-\dfrac{1}{a^2}$

접선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{a^2}(x-a)+\dfrac{1}{a}$

이 접선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=-\dfrac{1}{a^2}(0-a)+\dfrac{1}{a}$

$1=\dfrac{2}{a}\qquad \therefore\ a=2$

따라서 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{4}(x-2)+\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{4}x+1$

19 답 $y=\dfrac{2}{e}x+\dfrac{2}{e}$

$y=e^{2x}$에서 $y'=2e^{2x}$

접점을 $(a,\ f(a))$라 하면 기울기는

$y'=2e^{2a}$

접선의 방정식은

$y=2e^{2a}(x-a)+e^{2a}$

이 접선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=2e^{2a}(-1-a)+e^{2a}$

$0=e^{2a}(-1-2a)$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$

따라서 접선의 방정식은

$y=2e^{-1}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+e^{-1}$

$\therefore\ y=\dfrac{2}{e}x+\dfrac{2}{e}$

20 답 $y=\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{e}$

$y=\ln(x+1)$에서 $y'=\dfrac{1}{x+1}$

접점을 $(a,\ f(a))$라 하면 기울기는

$y'=\dfrac{1}{a+1}$

접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{a+1}(x-a)+\ln(a+1)$

이 접선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{1}{a+1}(-1-a)+\ln(a+1)$

$\ln(a+1)=1$

$a+1=e\qquad \therefore\ a=e-1$

따라서 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{e}(x-e+1)+1$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{e}$

21 답 구간 $(0,\ e)$에서 증가, 구간 $(e,\ \infty)$에서 감소

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$는 $x>0$에서 정의된다.

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(e)=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

따라서 구간 $(0,\ e)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가하고, 구간 $(e,\ \infty)$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.

22 답 구간 $(-2, 2)$에서 증가, 구간 $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$에서 감소

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$에서

$f'(x)=\dfrac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}=\dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$

$f'(-2)=f'(2)=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 구간 $(-2, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가하고, 구간 $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.

23 답 구간 $(-\infty, -2)$에서 감소, 구간 $(-2, \infty)$에서 증가

$f(x)=xe^{\frac{x}{2}}$에서

$f'(x)=e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}=\left(1+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$

$e^{\frac{x}{2}}>0$이므로

$f'(-2)=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

따라서 구간 $(-\infty, -2)$에서 $f'(x)<0$이므로 감소하고, 구간 $(-2, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 72~75

24 답 ③

$y=\dfrac{x-1}{x+3}$에서

$y'=\dfrac{(x+3)-(x-1)}{(x+3)^2}=\dfrac{4}{(x+3)^2}$

$x=1$에서의 접선의 기울기는 $y'=\dfrac{1}{4}$

기울기가 $\dfrac{1}{4}$이고 점 $(1, 0)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{4}(x-1)$

$\therefore y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}$

이것이 $y=ax+b$와 같으므로

$a=\dfrac{1}{4}$, $b=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore a-b=\dfrac{1}{2}$

25 답 ②

$y=4\ln ax$에서 $y'=\dfrac{4a}{ax}=\dfrac{4}{x}$

점 $(2, 4\ln 2a)$에서의 접선의 기울기는 $y'=2$

기울기가 2이고 점 $(2, 4\ln 2a)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=2(x-2)+4\ln 2a$

이 접선이 원점을 지나므로

$0=2(0-2)+4\ln 2a$

$\ln 2a=1$

$\therefore a=\dfrac{e}{2}$

26 답 ③

$y=\sin 2x$에서 $y'=2\cos 2x$

점 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$에서의 접선의 기울기는 $y'=2\cos\pi=-2$

기울기가 -2이고 점 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=-2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore y=-2x+\pi$

27 답 ①

$y=3e^{2-x}$에서 $y'=-3e^{2-x}$

점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기는 $y'=-3$

기울기가 -3이고 점 $(2, 3)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=-3(x-2)+3=-3x+9$

원점과 직선 $3x+y-9=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|-9|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$

심플 정리

[점과 직선 사이의 거리]

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

28 답 ②

$y=\dfrac{\ln x}{x}$에서

$y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$x=1$에서의 접선의 기울기 $y'=1$에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 -1이고 점 $(1, 0)$을 지나므로

$y=-(x-1)$

$\therefore y=-x+1$

29 답 ④

$y=\frac{1}{x^2+x}$에서

$y'=-\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$이므로 접점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$y'=-\frac{3}{4}$이고, 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이다.

구하는 직선은 기울기가 $\frac{4}{3}$이고 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$y=\frac{4}{3}(x-1)+\frac{1}{2}$

$y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{6}$

위 식에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{4}{3}x-\frac{5}{6}$

$\therefore\ x=\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{8}$

30 답 ①

$y=\tan x$에서 $y'=\sec^2 x$이므로 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ \sqrt{3}\right)$에서의 접선의 기울기는

$y'=\sec^2\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}}=4$

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

구하는 직선은 기울기가 $-\frac{1}{4}$이고 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ \sqrt{3}\right)$을 지나므로

$y=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$

따라서 y절편은 $\frac{\pi}{12}+\sqrt{3}$

$\therefore\ a=\frac{1}{12}$

31 답 ⑤

$y=\frac{ax}{e^x}$에서

$y'=\frac{ae^x-axe^x}{e^{2x}}=\frac{a(1-x)}{e^x}$

$x=2$에서의 접선의 기울기는 $y'=-\frac{a}{e^2}$

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{e^2}{a}$이다.

구하는 직선은 기울기가 $\frac{e^2}{a}$이고 점 $\left(2,\ \frac{2a}{e^2}\right)$를 지나므로

$y=\frac{e^2}{a}(x-2)+\frac{2a}{e^2}$

이 직선이 원점을 지나므로 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$\frac{2e^2}{a}=\frac{2a}{e^2}$

$a^2=e^4\qquad\therefore\ a=e^2\ (\because\ a>0)$

32 답 ④

$f(x)=\sqrt{2x+7}$에서

$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+7}}=\frac{1}{\sqrt{2x+7}}$

$\frac{1}{\sqrt{2a+7}}=\frac{1}{3}$을 만족하는 접점을 $(a,\ f(a))$라 하면 $a=1$

따라서 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{3}(x-1)+3$

따라서 y절편은 $\frac{8}{3}$이다.

33 답 ⑤

$y=\cos 2x$에서 $y'=-2\sin 2x$

직선 $y=\frac{1}{2}x-1$에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로

접점을 $(a,\ f(a))$라 하면

$-2\sin 2a=-2$

$\sin 2a=1$

$2a=\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\ a=\frac{\pi}{4}$

따라서 기울기가 -2이고 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ y=-2x+\frac{\pi}{2}$

34 답 ③

$y=\ln(x+2)$에서 $y'=\frac{1}{x+2}$이고

접점을 $(a,\ f(a))$라 하면

$\frac{1}{a+2}=2\qquad\therefore\ a=-\frac{3}{2}$

따라서 기울기가 2이고 점 $\left(-\frac{3}{2},\ -\ln 2\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)-\ln 2=2x+3-\ln 2$

$\therefore\ k=3-\ln 2$

35 답 ①

직선 $3x-y+2=0$, 즉 $y=3x+2$에 평행한 직선의 기울기는 3이다.

$y=e^{3x}+k$에서 $y'=3e^{3x}$

접점을 $(a,\ f(a))$라 하면

$3e^{3a}=3\qquad\therefore\ a=0$

기울기가 3이고 점 $(0,\ 1+k)$를 지나는 접선의 방정식

$y=3x+1+k$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=4+k$

$\therefore\ k=-2$

36 답 ②

$y=2x\ln x$에서 $y'=2\ln x+2$

접점을 $(a, f(a))$라 하면 $y'=2\ln a+2$

기울기가 $2\ln a+2$이고 점 $(a, 2a\ln a)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=2(\ln a+1)(x-a)+2a\ln a$

이 접선이 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=2(\ln a+1)(0-a)+2a\ln a$

$-1=(\ln a+1)\times(-a)+a\ln a$

$\therefore a=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2x-2$

37 답 ④

$y=e^{x+k}$에서 $y'=e^{x+k}$

접점을 $(a, f(a))$라 하면 $y'=e^{a+k}$

기울기가 e^{a+k}이고 점 (a, e^{a+k})을 지나는 접선의 방정식은

$y=e^{a+k}(x-a)+e^{a+k}$

이 접선이 원점을 지나므로

$0=e^{a+k}(0-a)+e^{a+k}$

$\therefore a=1$

구하는 접선의 방정식은

$y=e^{1+k}(x-1)+e^{1+k}=e^{1+k}x$

이 접선이 $(1, e^2)$을 지나므로

$e^2=e^{1+k}$

$\therefore k=1$

38 답 ②

$y=\dfrac{k}{x}$에서 $y'=-\dfrac{k}{x^2}$

접점을 $(a, f(a))$라 하면 $y'=-\dfrac{k}{a^2}$

기울기가 $-\dfrac{k}{a^2}$이고 점 $\left(a, \dfrac{k}{a}\right)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{k}{a^2}(x-a)+\dfrac{k}{a}$

이 접선은 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=-\dfrac{k}{a^2}(0-a)+\dfrac{k}{a}$

$1=\dfrac{2k}{a}$ $\quad\therefore a=2k$

구하는 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{4k}(x-2k)+\dfrac{1}{2}$

$=-\dfrac{1}{4k}x+1$

x절편이 8이므로

$0=-\dfrac{1}{4k}\times 8+1$

$\therefore k=2$

39 답 ③

$y=k\sqrt{x}$에서 $y'=\dfrac{k}{2\sqrt{x}}$

접점을 $(a, f(a))$라 하면 $y'=\dfrac{k}{2\sqrt{a}}$

기울기가 $\dfrac{k}{2\sqrt{a}}$이고 점 $(a, k\sqrt{a})$를 지나는 접선의 방정식은

$y=\dfrac{k}{2\sqrt{a}}(x-a)+k\sqrt{a}=\dfrac{k}{2\sqrt{a}}x-\dfrac{ka}{2\sqrt{a}}+k\sqrt{a}$

$=\dfrac{k}{2\sqrt{a}}x+\dfrac{k}{2}\sqrt{a}$

이 접선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{2\sqrt{a}}\times(-2)+\dfrac{k}{2}\sqrt{a}$

$\dfrac{k}{\sqrt{a}}=\dfrac{k}{2}\sqrt{a},\ k=\dfrac{k}{2}a$ $\quad\therefore a=2$

즉, 구하는 접선의 방정식은 $y=\dfrac{k}{2\sqrt{2}}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}k$

한편, y절편이 2이므로 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}k=2$ $\quad\therefore k=2\sqrt{2}$

40 답 ③

$y=\dfrac{x}{x-2}$에서 $y'=\dfrac{(x-2)-x}{(x-2)^2}=\dfrac{-2}{(x-2)^2}$

접점을 $(a, f(a))$라 하면 기울기가 $\dfrac{-2}{(a-2)^2}$이고 점 $\left(a, \dfrac{a}{a-2}\right)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{2}{(a-2)^2}(x-a)+\dfrac{a}{a-2}$

이 접선이 $(3, -1)$을 지나므로

$-1=-\dfrac{2}{(a-2)^2}(3-a)+\dfrac{a}{a-2}$

$-(a-2)^2=-2(3-a)+a(a-2)$

$a^2-2a-1=0$ $\quad\therefore a=1\pm\sqrt{2}$

따라서 접선의 개수는 2이다.

41 답 ⑤

$y=(x+k)e^{-x}$에서

$y'=e^{-x}-(x+k)e^{-x}=(1-k-x)e^{-x}$

접점을 $(a, f(a))$라 하면 기울기가 $(1-k-a)e^{-a}$이고 점 $(a, (a+k)e^{-a})$을 지나는 접선의 방정식은

$y=(1-k-a)e^{-a}(x-a)+(a+k)e^{-a}$

원점에서는 접선을 그을 수 없으므로 $x=0$, $y=0$을 대입한 방정식을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

$0=(1-k-a)e^{-a}(0-a)+(a+k)e^{-a}$

$0=(a^2+ka+k)e^{-a}$

$e^{-a}>0$이므로 a에 대한 이차방정식 $a^2+ka+k=0$을 만족하는 실근이 존재하지 않으면 된다.

따라서 a에 대한 이차방정식 $a^2+ka+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4k<0$ $\quad\therefore 0<k<4$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은 $1+2+3=6$

Ⅱ Ⅰ

42 답 2

$y=(x+n)e^{-2x}$에서

$y'=e^{-2x}-2(x+n)e^{-2x}=(1-2x-2n)e^{-2x}$

접점을 $(a, f(a))$라 하면 기울기가 $(1-2a-2n)e^{-2a}$이고

점 $(a, (a+n)e^{-2a})$을 지나는 접선의 방정식은

$y=(1-2a-2n)e^{-2a}(x-a)+(a+n)e^{-2a}$

이 접선이 원점을 지나므로

$0=(1-2a-2n)e^{-2a}(0-a)+(a+n)e^{-2a}$

$0=(2a^2+2na+n)e^{-2a}$

$e^{-2a}>0$이므로 방정식 $2a^2+2na+n=0$이 실근을 갖는다.

따라서 a에 대한 이차방정식 $2a^2+2na+n=0$의 판별식을

$\frac{D}{4}$라 하면

$\frac{D}{4}=n^2-2n\geq 0 \qquad \therefore n\leq 0$ 또는 $n\geq 2$

따라서 자연수 n의 최솟값은 2

43 답 ①

두 곡선 $y=ax^2$, $y=\ln x$가 접할 때 접점의 x좌표를 t라 하면

$x=t$일 때 함숫값이 같으므로

$at^2=\ln t$ ⋯ ㉠

두 곡선의 식을 각각 미분하면

$y'=2ax$, $y'=\frac{1}{x}$이고 $x=t$일 때 기울기가 같으므로

$2at=\frac{1}{t}$

$at^2=\frac{1}{2}$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2}=\ln t$

$\therefore t=e^{\frac{1}{2}}$

이것을 ㉠에 대입하면

$ae=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{1}{2e}$

44 답 ④

두 곡선 $y=e^x$, $y=a\sqrt{x-\frac{1}{2}}$이 접할 때 접점의 x좌표를

t라 하면 $x=t$일 때 함숫값이 같으므로

$e^t=a\sqrt{t-\frac{1}{2}}$ ⋯ ㉠

두 곡선의 식을 각각 미분하면

$y'=e^x$, $y'=\dfrac{a}{2\sqrt{x-\frac{1}{2}}}$

이고 $x=t$일 때 기울기가 같으므로

$e^t=\dfrac{a}{2\sqrt{t-\frac{1}{2}}}$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{a}{2\sqrt{t-\frac{1}{2}}}=a\sqrt{t-\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}=t-\frac{1}{2}$ ($\because a\neq 0$)

$\therefore t=1$

이것을 ㉡에 대입하면 $a=\sqrt{2}e$

45 답 ④

두 곡선 $y=e^{x-1}$, $y=\ln ax$가 $x=k$인 점에서 공통인 접선을 가질 때, $x=k$에서 함숫값이 같으므로

$e^{k-1}=\ln ak$ ⋯ ㉠

두 곡선의 식을 각각 미분하면

$y'=e^{x-1}$, $y'=\frac{1}{x}$이고 $x=k$일 때 기울기가 같으므로

$e^{k-1}=\frac{1}{k} \qquad \therefore k=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$1=\ln a$에서 $a=e$

$\therefore ak=e$

46 답 ④

$y=\sqrt{4x+1}$, 즉 $y=(4x+1)^{\frac{1}{2}}$에서

$y'=\frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}}\times 4=\dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$

$x=2$에서의 기울기가 $y'=\dfrac{2}{\sqrt{8+1}}=\frac{2}{3}$이고 점 $(2, 3)$을

지나는 접선의 방정식은

$y=\frac{2}{3}(x-2)+3$

$\therefore y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

즉, x절편은 $-\frac{5}{2}$, y절편은 $\frac{5}{3}$

따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{25}{12}$

47 답 4

$y=\frac{a}{x+1}$, 즉 $y=a(x+1)^{-1}$에서

$y'=-a(x+1)^{-2}=-\dfrac{a}{(x+1)^2}$

$x=1$에서의 기울기가 $y'=-\frac{a}{4}$이고 점 $\left(1, \frac{a}{2}\right)$를 지나는

접선의 방정식은

$y=-\frac{a}{4}(x-1)+\frac{a}{2}=-\frac{a}{4}x+\frac{3}{4}a$

즉, x절편은 3, y절편은 $\frac{3}{4}a$이므로 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{4}a=\frac{9}{2} \qquad \therefore a=4$

48 답 ①

$y=2xe^x$에서 $y'=2e^x+2xe^x=2e^x(1+x)$

$x=1$에서의 기울기가 $y'=2e\times(1+1)=4e$이고

점 $(1,\ 2e)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=4e(x-1)+2e=4ex-2e$

즉, x절편은 $\frac{1}{2}$, y절편은 $-2e$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2e=\frac{e}{2}$

49 답 ②

$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)>0$일 때 $f(x)$는 그 구간에서 증가하므로

$-x^2+1>0$ $(\because (x^2+1)^2>0)$

$(x+1)(x-1)<0$

즉, $-1<x<1$에서 $f(x)$가 증가하므로

$a=-1,\ b=1$

$\therefore ab=-1$

50 답 ③

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$에서

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)>0$일 때 $f(x)$는 그 구간에서 증가하므로

$1-\ln x>0$ $(\because x^2>0)$

$\ln x<\ln e$

즉, $0<x<e$일 때, $f(x)$는 증가한다.

따라서 증가하는 구간의 자연수는 1, 2이므로 모든 자연수 x의 값의 합은 $1+2=3$이다.

51 답 ③

$f(x)=2x+\frac{14}{x}$에서

$f'(x)=2-\frac{14}{x^2}=\frac{2x^2-14}{x^2}=\frac{2(x^2-7)}{x^2}$

$f'(x)>0$일 때 $f(x)$는 그 구간에서 증가하므로

$x^2-7>0$ $(\because x^2>0)$

즉, $x<-\sqrt{7}$ 또는 $x>\sqrt{7}$일 때, $f(x)$는 증가한다.

따라서 증가하는 구간에서 최소의 자연수는 3이다.

52 답 ③

$f(x)=x+\ln(x^2+k)$에서

$f'(x)=1+\frac{2x}{x^2+k}=\frac{x^2+2x+k}{x^2+k}$

함수 $f(x)$가 모든 x에 대하여 증가하면

$f'(x)\geq 0$이므로

$\frac{x^2+2x+k}{x^2+k}\geq 0$

$x^2+k>0$이므로 모든 x에 대하여 이차부등식

$x^2+2x+k\geq 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식

$\frac{D}{4}=1-k\leq 0 \qquad \therefore 1\leq k$

따라서 양수 k의 최솟값은 1

53 답 ③

$f(x)=(x^2+x+a)e^{-x}$에서

$f'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x+a)e^{-x}$

$=(-x^2+x+1-a)e^{-x}$

함수 $f(x)$가 감소하면 $f'(x)\leq 0$이므로 모든 x에 대하여 이차부등식 $-x^2+x+1-a\leq 0$ $(\because e^{-x}>0)$이 성립해야 한다.

이차방정식 $-x^2+x+1-a=0$의 판별식

$D=1-4\times(-1)\times(1-a)\leq 0$

$1+4-4a\leq 0$

$\therefore a\geq\frac{5}{4}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{5}{4}$이다.

54 답 ④

$f(x)=2x+\sin ax$에서

$f'(x)=2+a\cos ax$

함수 $f(x)$가 모든 x에 대하여 증가하면

$f'(x)\geq 0$이므로

$2+a\cos ax\geq 0$ ⋯ ㉠

한편, $-1\leq\cos ax\leq 1$이므로

$-a\leq a\cos ax\leq a$

$2-a\leq 2+a\cos ax\leq 2+a$

㉠을 만족하려면

$2-a\geq 0$

$\therefore a\leq 2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

Simple J 도함수의 활용 (2)

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 76~77

01 답 극대

02 답 $f''(a)>0$

03 답 변곡점

04 답 ○

05 답 ○

06 답 ×

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

07 답 ×

미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 $x=a$에서 극값을 갖는다.

08 답 $y''=6x+2$

$y'=3x^2+2x-2 \qquad \therefore\ y''=6x+2$

09 답 $y''=4e^{2x}$

$y'=2e^{2x} \qquad \therefore\ y''=4e^{2x}$

10 답 $y''=-\dfrac{1}{x^2}$

$y'=\dfrac{1}{x} \qquad \therefore\ y''=-\dfrac{1}{x^2}$

11 답 $y''=-\sin x$

$y'=\cos x \qquad \therefore\ y''=-\sin x$

12 답 $y''=-\dfrac{4}{(x+2)^3}$

$y'=\dfrac{(x+2)-x}{(x+2)^2}=\dfrac{2}{(x+2)^2}$

$\therefore\ y''=-\dfrac{4(x+2)}{(x+2)^4}=-\dfrac{4}{(x+2)^3}$

13 답 극댓값 : 5, 극솟값 : 1

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$인 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=5$, $x=0$에서 극솟값 $f(0)=1$을 갖는다.

다른 풀이

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$에서

$f'(x)=0$인 $x=0$ 또는 $x=-2$

$f''(x)=6x+2$

$f''(-2)=-12+2=-10<0$이므로

$f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고,

극댓값은 $f(-2)=-8+12+1=5$

또, $f''(0)=2>0$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=1$을 갖는다.

14 답 극댓값 : -2, 극솟값 : 2

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

$f'(x)=0$인 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	×	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	×	↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-2$,

$x=1$에서 극솟값 $f(1)=2$를 갖는다.

다른 풀이

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$에서 $f'(x)=0$인 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=\dfrac{2x}{x^4}=\dfrac{2}{x^3}$

$f''(-1)=-2<0$이므로

$f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고,

극댓값은 $f(-1)=-2$

$f''(1)=2>0$이므로

$f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=2$를 갖는다.

15 답 극솟값 : $-e^{-1}$

$f(x)=xe^x$에서 $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$f'(x)=0$인 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=-e^{-1}$을 갖는다.

다른 풀이

$f'(x)=e^x+xe^x$에서 $f'(-1)=0$

$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$f''(-1)=e^{-1}>0$이므로

$f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=-e^{-1}$을 갖는다.

16 답 극솟값 : $-e^{-1}$

$f(x)=x\ln x$에서 $f'(x)=\ln x+1$

$f'(x)=0$인 $x=e^{-1}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=e^{-1}$에서 극솟값 $f(e^{-1})=-e^{-1}$을 갖는다.

다른 풀이

$f'(x)=\ln x+1$에서 $f'(e^{-1})=0$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}$

$f''(e^{-1})=e>0$이므로

$f(x)$는 $x=e^{-1}$에서 극솟값 $f(e^{-1})=-e^{-1}$을 갖는다.

17 답 $x<1$에서 아래로 볼록, $x>1$에서 위로 볼록

$y=-x^3+3x^2-x$에서

$y'=-3x^2+6x-1$

$y''=-6x+6$

$x<1$에서 $y''>0$, $x>1$에서 $y''<0$이므로

$x<1$에서 아래로 볼록, $x>1$에서 위로 볼록이다.

18 답 $x<0$에서 위로 볼록, $x>0$에서 아래로 볼록

$y=\dfrac{1}{x}$에서

$y'=-\dfrac{1}{x^2}$

$y''=\dfrac{2x}{x^4}=\dfrac{2}{x^3}$

$x<0$에서 $y''<0$, $x>0$에서 $y''>0$이므로

$x<0$에서 위로 볼록, $x>0$에서 아래로 볼록이다.

19 답 $x<0$에서 아래로 볼록, $x>0$에서 위로 볼록

$y=x-\dfrac{1}{x}$에서

$y'=1+\dfrac{1}{x^2}$

$y''=-\dfrac{2x}{x^4}=-\dfrac{2}{x^3}$

$x<0$에서 $y''>0$, $x>0$에서 $y''<0$이므로

$x<0$에서 아래로 볼록, $x>0$에서 위로 볼록이다.

20 답 $0<x<\pi$에서 위로 볼록, $\pi<x<2\pi$에서 아래로 볼록

$y=x+\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$에서

$y'=1+\cos x$

$y''=-\sin x$

$0<x<\pi$에서 $y''<0$, $\pi<x<2\pi$에서 $y''>0$이므로 $0<x<\pi$에서 위로 볼록, $\pi<x<2\pi$에서 아래로 볼록이다.

21 답 $x=e^{\frac{3}{2}}$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에서

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln x)\times 2x}{x^4}=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$

$f''(x)=0$인 x를 구하면

$-3+2\ln x=0$

$\ln x=\dfrac{3}{2}$

$\therefore x=e^{\frac{3}{2}}$

$x<e^{\frac{3}{2}}$일 때, $f''(x)<0$이고,

$x>e^{\frac{3}{2}}$일 때, $f''(x)>0$이므로

$x=e^{\frac{3}{2}}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $x=e^{\frac{3}{2}}$일 때, 변곡점이다.

22 답 $x=0$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$f''(x)=\frac{-2x\times(x^2+1)^2-(1-x^2)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{-2x\times(x^2+1)-(1-x^2)\times 4x}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$$

$f''(x)=0$인 x를 구하면

$2x(x^2-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$x<-\sqrt{3}$일 때 $f''(x)<0$,

$-\sqrt{3}<x<0$일 때 $f''(x)>0$,

$0<x<\sqrt{3}$일 때 $f''(x)<0$,

$x>\sqrt{3}$일 때 $f''(x)>0$이므로

$x=0$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $x=0$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$일 때, 변곡점이다.

23 답 $x=-1$

$f(x)=xe^{2x}$에서

$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=(2x+1)e^{2x}$

$f''(x)=2e^{2x}+2(2x+1)e^{2x}=4(x+1)e^{2x}$

$f''(x)=0$인 x를 구하면 $4(x+1)e^{2x}=0$

$\therefore x=-1$

$x<-1$일 때, $f''(x)<0$,

$x>-1$일 때, $f''(x)>0$이므로

$x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

$x=-1$일 때, 변곡점이다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 78~81

24 답 ③

$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$인 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=1$을 갖는다.

25 답 ⑤

$f(x)=\frac{x^2}{x+1}$에서 $f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$인 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=0$을 갖는다.

26 답 ④

$f(x)=xe^{-x}$에서 $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$인 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

$f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=e^{-1}$을 갖는다.

27 답 ②

$f(x)=(x^2-2x)e^x$에서

$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x)e^x=(x^2-2)e^x$

$f'(x)=0$인 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$에서 극댓값 $f(-\sqrt{2})=(2\sqrt{2}+2)e^{-\sqrt{2}}$,

$x=\sqrt{2}$에서 극솟값 $f(\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$을 갖는다.

$\therefore$ (극댓값)$\times$(극솟값)

$=(2+2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}\times e^{\sqrt{2}}$

$=(4-8)e^0=-4$

다른 풀이

$f'(x)=(x^2-2)e^x$이므로

$f'(x)=0$인 $x=\pm\sqrt{2}$

$f''(x)=2xe^x+(x^2-2)e^x$

$=(x^2+2x-2)e^x$

$f''(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}}<0$이므로

$f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$에서

극댓값 $f(-\sqrt{2})=(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$을 갖는다.

또, $f''(\sqrt{2})=2\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}>0$이므로

$f(x)$는 $x=\sqrt{2}$에서 극솟값 $f(\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$을 갖는다.

(이하 동일)

28 답 ①

$f(x)=x^2\ln x$에서

$f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$

$f'(x)=0$인 $x=e^{-\frac{1}{2}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=e^{-\frac{1}{2}}$에서 극솟값 $f(e^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2e}$을 갖는다.

29 답 ⑤

$f(x)=x+\sqrt{8-x^2}$에서 함수가 정의되기 위해서는 근호 안이 0보다 크거나 같아야 한다.

$8-x^2\ge 0$

$(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})\le 0$

$\therefore\ -2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$

$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}$

$=\frac{\sqrt{8-x^2}-x}{\sqrt{8-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{8-x^2}=x$

양변을 제곱하면

$8-x^2=x^2$

$x^2=4\quad \therefore x=2\ (\because x>0)$

즉, $f'(x)=0$인 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

$f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $f(2)=2+\sqrt{8-4}=4$를 갖는다.

$a=2,\ b=4$

$\therefore a+b=6$

30 답 ④

$f(x)=x-\sqrt{2}\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$에서

$f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x$

$f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x=0$에서

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

즉, $f'(x)=0$인 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

$f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극솟값 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-1$,

$x=\frac{7}{4}\pi$에서 극댓값 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{7}{4}\pi+1$을 갖는다.

$\therefore$ (극솟값)+(극댓값)$=2\pi$

다른 풀이

$f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x=0$에서

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$를 만족시키는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

$f''(x)=\sqrt{2}\sin x$이고

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0,\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$이므로

$f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극솟값은 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-1$

$f'\left(\frac{7}{4}\pi\right)=0,\ f''\left(\frac{7}{4}\pi\right)<0$이므로

$f(x)$는 $x=\frac{7}{4}\pi$에서 극댓값은 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{7}{4}\pi+1$

$\therefore$ (극솟값)+(극댓값)$=2\pi$

31 답 ⑤

$f(x)=\frac{\sin x}{e^x}\ (0\le x\le 2\pi)$에서

$f'(x)=\frac{\cos x\times e^x-\sin x\times e^x}{e^{2x}}$

$=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $\cos x-\sin x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi\ (\because 0\le x\le 2\pi)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극대이므로 $a=\frac{\pi}{4}$

$x=\frac{5}{4}\pi$에서 극소이므로 $b=\frac{5}{4}\pi$

$\therefore a+b=\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{6}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

32 답 ⑤

$f(x)=\frac{3x-2}{x^2+a}$에서

$f'(x)=\frac{3(x^2+a)-(3x-2)\times 2x}{(x^2+a)^2}$

$=\frac{-3x^2+4x+3a}{(x^2+a)^2}$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극대이므로

$f'(3)=0$

$-27+12+3a=0$

$3a=15\qquad \therefore a=5$

33 답 ④

$f(x)=a\sin x+b\cos x$에서

$f'(x)=a\cos x-b\sin x$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값 2를 가지므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=2$ ⋯ ㉠

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b=0$ ⋯ ㉡

㉡에서 $b=\sqrt{3}a$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}a=2$

$\therefore a=1$

이것을 $b=\sqrt{3}a$에 대입하면

$b=\sqrt{3}$

$\therefore ab=\sqrt{3}$

34 답 ②

$f(x)=xe^{ax}$에서

$f'(x)=e^{ax}+axe^{ax}$

함수 $f(x)=xe^{ax}$가 $x=2$에서 극댓값 b를 가지려면

$f(2)=2e^{2a}=b$ ⋯ ㉠

$f'(2)=(1+2a)e^{2a}=0$ ⋯ ㉡

㉡에서

$1+2a=0\ (\because e^{2a}>0)$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{2}{e}$

$\therefore ab=-\frac{1}{e}$

Ⅱ J

35 답 ③

$f(x)=a\ln x+x^2-5x$에서

$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-5$ ⋯ ㉠

$x=2$에서 극소이므로

$f'(2)=\frac{a}{2}+4-5=0 \qquad \therefore a=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$$f'(x)=\frac{2}{x}+2x-5=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$이고, $x<\frac{1}{2}$에서 $f'(x)>0$, $x>\frac{1}{2}$에서 $f'(x)<0$이므로

$x=\frac{1}{2}$에서 $f(x)$는 극대이다.

즉, $b=\frac{1}{2} \qquad \therefore a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

36 답 ①

$f(x)=\frac{x^2+2x+n}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+1)-(x^2+2x+n)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x^2+2x+2-2x^3-4x^2-2nx}{(x^2+1)^2}=\frac{-2\{x^2+(n-1)x-1\}}{(x^2+1)^2}$$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $f'(x)=0$의 실근이 존재하고, 그 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+(n-1)x-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식

$D=(n-1)^2+4>0$

모든 자연수 n에 대하여 $(n-1)^2\geq 0$이므로

$(n-1)^2+4>0$

따라서 자연수 n의 최솟값은 1이다.

37 답 ③

$f(x)=\ln(x^2+n)+\frac{1}{2}x$에서

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+n}+\frac{1}{2}=\frac{x^2+4x+n}{2(x^2+n)}$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $f'(x)=0$의 실근이 존재하고, 그 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+4x+n=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식

$\frac{D}{4}=4-n>0 \qquad \therefore n<4$

따라서 자연수 n의 최댓값은 3이다.

38 답 ⑤

$f(x)=ax+\frac{1}{x}+\ln x^2$에서

$f'(x)=a-\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{x^2}=\frac{ax^2+2x-1}{x^2}$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $f'(x)=0$의 실근이 존재하고, 그 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

(i) $a=0$일 때,

$f'(x)=0$인 $x=\frac{1}{2}$로 존재한다.

(ii) $a\neq 0$일 때,

이차방정식 $ax^2+2x-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식

$\frac{D}{4}=1+a>0 \qquad \therefore a>-1$

(i), (ii)에 의해 $a>-1$

39 답 ⑤

$f(x)=(x^2+ax+2)e^x$에서

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+2)e^x$
$\quad =\{x^2+(a+2)x+(a+2)\}e^x$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않을 때,

이차방정식 $x^2+(a+2)x+(a+2)=0$의 실근이 존재하지 않거나 중근을 가지면 되므로 판별식을 D라 하면

$D=(a+2)^2-4(a+2)\leq 0 \qquad \therefore -2\leq a\leq 2$

따라서 극값을 갖지 않도록 하는 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2로 5개이다.

40 답 ⑤

$y=x+\sin x$ $(0<x<2\pi)$에서

$y'=1+\cos x$

$y''=-\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면

$f''(x)>0$이므로 $\sin x<0$ $(0<x<2\pi) \qquad \therefore \pi<x<2\pi$

41 답 ⑤

$y=f(x)=\frac{\ln x}{x}$에서

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln x)\times 2x}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$

$0<x<k$인 구간에서 곡선 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$는 항상 위로 볼록하므로

$f''(x)<0$

$-3+2\ln x<0$ $(\because x^3>0)$

$\ln x<\frac{3}{2} \qquad \therefore 0<x<e^{\frac{3}{2}}$ $(\because x>0)$

$0<x<k$인 구간에서 곡선이 볼록하므로 $k\leq e^{\frac{3}{2}}$

42 답 ②

$y=\dfrac{x^2+k}{e^x}$에서

$y'=\dfrac{2xe^x-(x^2+k)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{-x^2+2x-k}{e^x}$

$y''=\dfrac{(-2x+2)e^x-(-x^2+2x-k)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{x^2-4x+k+2}{e^x}$

실수 전체의 구간에서 아래로 볼록할 때, 모든 x에 대하여 $y''>0$ 이다.

즉, $x^2-4x+k+2>0$

이차방정식 $x^2-4x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4-k-2<0 \qquad \therefore\ k>2$

한편 $k=2$일 때

$y''=\dfrac{x^2-4x+4}{e^x}=\dfrac{(x-2)^2}{e^x}$

가 되어 $x=2$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=2$일 때 변곡점이 아니다.

즉, $k=2$일 때도 아래로 볼록한 곡선의 모양이 변하지 않는다.

$\therefore\ k\ge 2$

따라서 실수 k의 최솟값은 2이다.

43 답 ④

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$에서

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

$f''(x)=\dfrac{-\frac{2}{x}\times x^3-(1-2\ln x)\times 3x^2}{x^6}=\dfrac{-5+6\ln x}{x^4}$

$f''(x)=0$인 x의 값을 구하면

$6\ln x-5=0$

$\ln x=\dfrac{5}{6} \qquad \therefore\ x=e^{\frac{5}{6}}$

$x<e^{\frac{5}{6}}$일 때 $f''(x)<0$, $x>e^{\frac{5}{6}}$일 때 $f''(x)>0$이므로

$x=e^{\frac{5}{6}}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표는 $e^{\frac{5}{6}}$이다.

44 답 ③

$f(x)=\ln(x^2+1)$에서

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=0$인 x의 값을 구하면

$-2(x^2-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

$x<-1$일 때 $f''(x)<0$,

$-1<x<1$일 때 $f''(x)>0$,

$x>1$일 때 $f''(x)<0$이므로 $y=f(x)$는 2개의 변곡점을 갖는다.

45 답 ④

$f(x)=x-\sin x\ (0<x<2\pi)$에서

$f'(x)=1-\cos x$

$f''(x)=\sin x$

$f''(x)=0$인 x의 값을 구하면

$\sin x=0 \qquad \therefore\ x=\pi\ (\because\ 0<x<2\pi)$

$f''(\pi)=0$이고, $0<x<\pi$일 때 $f''(x)>0$, $\pi<x<2\pi$일 때 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표는 π이다.

46 답 ②

$f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$에서

$f'(x)=-\dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-8(x^2+1)^2+8x\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{24x^2-8}{(x^2+1)^3}=\dfrac{8(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

$f''(x)=0$인 x의 값을 구하면

$3x^2-1=0$, $x^2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때 $f''(x)>0$,

$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때 $f''(x)<0$,

$x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때 $f''(x)>0$이므로

$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 곡선 $y=f(x)$는 변곡점을 갖는다.

두 변곡점 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 3\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 3\right)$의 y좌표의 값은 같으므로

두 변곡점 사이의 거리는

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

47 답 ③

$f(x)=\cos 2x\ (0<x<\pi)$에서

$f'(x)=-2\sin 2x$

$f''(x)=-4\cos 2x$

$f''(x)=0$인 x의 값을 구하면

$\cos 2x=0$

$2x=\dfrac{\pi}{2}$, $2x=\dfrac{3}{2}\pi \qquad \therefore\ x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}\pi$

$x<\dfrac{\pi}{4}$일 때 $f''(x)<0$, $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$일 때 $f''(x)>0$,

$x>\dfrac{3}{4}\pi$일 때 $f''(x)<0$이므로

$x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{3}{4}\pi$에서 함수 $f(x)$는 변곡점을 갖는다.

따라서 변곡점의 x좌표의 합은 $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{4}\pi=\pi$

Ⅱ J

48 답 ①

$y=f(x)=xe^{ax+2}$에서

$f'(x)=e^{ax+2}+axe^{ax+2}=(ax+1)e^{ax+2}$

$f''(x)=ae^{ax+2}+a(ax+1)e^{ax+2}=(ax+2)ae^{ax+2}$

점 $\left(-\frac{1}{2}, b\right)$가 변곡점이므로 $f''\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

$\left(-\frac{a}{2}+2\right)ae^{-\frac{a}{2}+2}=0$

$-\frac{a}{2}+2=0\ (\because a\neq 0)\qquad \therefore a=4$

즉, $y=f(x)=xe^{4x+2}$이고, 이 곡선이 점 $\left(-\frac{1}{2}, b\right)$를 지나므로

$b=-\frac{1}{2}e^{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2}=-\frac{1}{2}e^{0}=-\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

49 답 ④

$y=f(x)=(\ln ax)^2$에서

$f'(x)=\frac{2\ln ax\times a}{ax}=\frac{2\ln ax}{x}$

$f''(x)=\frac{2\times\frac{a}{ax}\times x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2-2\ln ax}{x^2}$

$f''(x)=0$인 x의 값을 구하면

$2(1-\ln ax)=0\ (\because x>0)\qquad \therefore x=\frac{e}{a}$

$0<x<\frac{e}{a}$일 때 $f''(x)>0$, $x>\frac{e}{a}$일 때 $f''(x)<0$이므로 함수 $y=f(x)$는 $x=\frac{e}{a}$에서 변곡점을 갖는다.

한편 $x=\frac{e}{a}$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'\left(\frac{e}{a}\right)=2$

$\frac{2\ln\left(a\times\frac{e}{a}\right)}{\frac{e}{a}}=\frac{2a}{e}=2\qquad \therefore a=e$

50 답 ③

$f(x)=(a+\cos x)e^x$에서

$f'(x)=(-\sin x)e^x+(a+\cos x)e^x=(a-\sin x+\cos x)e^x$

$f''(x)=(-\cos x-\sin x)e^x+(a-\sin x+\cos x)e^x=(a-2\sin x)e^x$

$f''(k)=0$이면 $x=k$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $x=k$에서 변곡점을 갖는다.

$f''(k)=0$에서

$\sin x=\frac{a}{2}\ (\because e^x>0)$

$-1\leq\sin x\leq 1$이므로 $-1\leq\frac{a}{2}\leq 1$

즉, $-2\leq a\leq 2$일 때, $f''(k)=0$

이때, $a=2$인 경우 $f''(x)=2(1-\sin x)e^x$에서 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이지만 $x=\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다. $a=-2$인 경우도 마찬가지이다.

따라서 $-2<a<2$일 때, 변곡점이 존재하므로 정수 a는 -1, 0, 1로 3개이다.

51 답 $-\frac{1}{2}\leq a\leq 0$

$y=(ax^2-1)e^x$에서

$y'=2axe^x+(ax^2-1)e^x=(ax^2+2ax-1)e^x$

$y''=(2ax+2a)e^x+(ax^2+2ax-1)e^x=(ax^2+4ax+2a-1)e^x$

(i) $a=-\frac{1}{2}$일 때,

$y''=\left(-\frac{1}{2}x^2-2x-2\right)e^x$

$=-\frac{1}{2}(x+2)^2e^x\leq 0$

이므로 변곡점을 갖지 않는다.

(ii) $a=0$일 때,

$y''=-e^x<0$이므로 변곡점을 갖지 않는다.

(iii) $a\neq-\frac{1}{2}$, $a\neq 0$일 때,

이 곡선이 변곡점을 갖지 않으려면

이차방정식 $ax^2+4ax+2a-1=0$의 실근이 존재하지 않으면 된다.

이차방정식의 판별식 D에 대하여

$\frac{D}{4}=2a^2+a<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<a<0$

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{1}{2}\leq a\leq 0$

52 답 ④

$y'=2ax+\cos x-\sin x$

$y''=2a-\sin x-\cos x$

$=2a-\sqrt{2}\left(\sin x\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=2a-\sqrt{2}\left(\sin x\times\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\times\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=2a-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$(\because \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta))$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}a$이면 $f''(x)=0$이다.

$-1\leq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$이므로

$-1\leq\sqrt{2}a\leq 1$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq a\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때, $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$인 경우

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$이지만 $x=\frac{\pi}{4}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.

따라서 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 변곡점이 존재한다.

01 답 $f(a)$, $f(b)$, 극댓값, 극솟값

02 답 x

03 답 $(f'(t), g'(t))$, $(f''(t), g''(t))$

04 답 ×

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

05 답 ○

06 답 ○

시각 t에서의 위치가 $x=2t$, $y=3t$일 때

속도는 $((2t)', (3t)')$, 즉 $(2, 3)$이므로

가속도는 $((2)', (3)')$, 즉 $(0, 0)$

07 답 해설 참조

(i) 함수 $y=x^3-2x^2+x$은 다항함수이므로 정의역은 실수 전체이다.

(ii) 곡선의 주기는 없다.

(iii) $x^3-2x^2+x=0$에서

$x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2=0$이므로

x축과 만나는 점의 x좌표는 0, 1이다.

(iv) $y=f(x)=x^3-2x^2+x$에서

$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$, $f''(x)=6x-4$

$f'(x)=0$인 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$\frac{1}{3}$	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대$\left(\frac{4}{27}\right)$	↘	극소(0)	↗

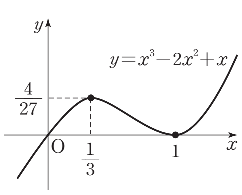
(v) $f''(x)=6x-4=0$에서 $x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$x<\frac{2}{3}$에서 $f''(x)<0$이므로

위로 볼록, $x>\frac{2}{3}$에서 $f''(x)>0$

이므로 아래로 볼록이고,

$f(x)$의 변곡점은 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right)$이다.



(vi) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

08 답 해설 참조

(i) 함수 $y=(1-x)e^{x-2}$의 정의역은 실수 전체이다.

(ii) 곡선의 주기는 없다.

(iii) $y=(1-x)e^{x-2}$에서 $1-x=0$ $(\because e^{x-2}>0)$이므로

x축과 만나는 점의 x좌표는 1이다.

(iv) $y=f(x)=(1-x)e^{x-2}$에서

$f'(x)=-e^{x-2}+(1-x)e^{x-2}=-xe^{x-2}$

$f''(x)=-(1+x)e^{x-2}$

$f'(x)=0$인 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	극대$\left(\frac{1}{e^2}\right)$	↘

(v) $f''(x)=-(1+x)e^{x-2}$에서

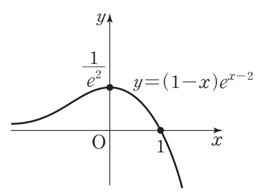
$x<-1$일 때 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록,

$x>-1$일 때 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록,

변곡점은 $\left(-1, \frac{2}{e^3}\right)$이다.

(vi) $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



09 답 해설 참조

(i) 함수 $y=x\ln x$의 정의역은 $x>0$이다.

(ii) 곡선의 주기는 없다.

(iii) $y=x\ln x$에서 $x\ln x=0$이므로 x축과 만나는 점의 x좌표는 1이다.

(iv) $y=f(x)=x\ln x$에서

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$f''(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$인 $x=\frac{1}{e}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$\frac{1}{e}$	…
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	극소$\left(-\frac{1}{e}\right)$	↗

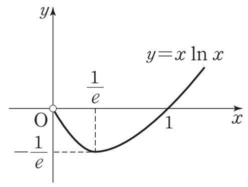
(v) $f''(x)=\frac{1}{x}$은 $x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록이고

변곡점은 없다.

Ⅱ K

(vi) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



10 답 최댓값 : $\frac{2}{3}$, 최솟값 : $\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{x-2}{x^2-3}$에서

$f'(x)=\frac{(x^2-3)-(x-2)\times 2x}{(x^2-3)^2}=\frac{-(x-1)(x-3)}{(x^2-3)^2}$

구간 $[0, 1]$에서 $f'(x)\le 0$이므로

최댓값은 $f(0)=\frac{2}{3}$, 최솟값은 $f(1)=\frac{1}{2}$

11 답 최댓값 : 2π, 최솟값 : $-\pi$

$f(x)=x\cos x-\sin x$에서

$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$

구간 $[0, 2\pi]$에서 $f'(x)=0$인 x는 $x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

$0<x<\pi$일 때 $f'(x)<0$, $\pi<x<2\pi$일 때 $f'(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극솟값 $f(\pi)=-\pi$를 가진다.

또, 양 끝값을 구하면

$f(0)=0$, $f(2\pi)=2\pi$

따라서 주어진 구간에서 최댓값은 2π, 최솟값은 $-\pi$이다.

12 답 2

방정식 $x-e^x+2=0$의 실근의 개수는 함수 $f(x)=x-e^x+2$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x-e^x+2$에서

$f'(x)=1-e^x$

$f'(x)=0$인 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	극대(1)	$\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

따라서 $f(x)=x-e^x+2$의 그래프와 x축의 교점은 2개이므로 방정식 $x-e^x+2=0$의 실근은 2개이다.

13 답 1

방정식 $x-\cos x=2$의 실근의 개수는 함수 $f(x)=x-\cos x-2$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x-\cos x-2$에서

$f'(x)=1+\sin x$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $-1\le\sin x\le 1$이므로 $f'(x)=1+\sin x\ge 0$이다.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

따라서 함수 $f(x)=x-\cos x-2$의 그래프와 x축의 교점이 1개이므로 방정식 $x-\cos x=2$의 실근은 1개이다.

14 답 해설 참조

$f(x)=x-x\ln x-3$으로 놓으면

$f'(x)=1-\left(\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)=-\ln x$

$f'(x)=0$인 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	극대 (-2)	$\searrow$

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은 -2이므로 $f(x)<0$

$\therefore\ x-x\ln x-3<0$

15 답 속도 : 3, 가속도 : -3

$f(t)=3\ln t$에서 $f'(t)=\frac{3}{t}$, $f''(x)=-\frac{3}{t^2}$

$t=1$에서의 속도와 가속도를 각각 구하면

$f'(1)=3$, $f''(1)=-3$

16 답 속도 : e, 가속도 : e

$f(t)=e^t+2$에서 $f'(t)=e^t$, $f''(t)=e^t$

$t=1$에서의 속도와 가속도를 각각 구하면

$f'(1)=e$, $f''(1)=e$

17 답 속도 : $(6, 3)$, 속력 : $3\sqrt{5}$

$x=t^2+4t$, $y=3t+1$에서

$\frac{dx}{dt}=2t+4$, $\frac{dy}{dt}=3$

$t=1$에서의 속도와 속력을 각각 구하면

속도 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=(6, 3)$

속력 $\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

18 답 속도 : $(-\pi, 0)$, 속력 : π

$x=\sin\pi t$, $y=\cos\pi t$에서

$\frac{dx}{dt}=\pi\cos\pi t$, $\frac{dy}{dt}=-\pi\sin\pi t$

$t=1$에서의 속도와 속력을 각각 구하면

속도 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=(-\pi, 0)$

속력 $\sqrt{\pi^2+0}=\pi$

19 답 속도 : $(e, 2e)$, 속력 : $\sqrt{5}e$

$x=e^t+1$, $y=2e^t-1$에서 $\dfrac{dx}{dt}=e^t$, $\dfrac{dy}{dt}=2e^t$

$t=1$에서의 속도와 속력을 각각 구하면

속도 $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)=(e, 2e)$

속력 $\sqrt{e^2+(2e)^2}=\sqrt{5}e$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 84~89

20 답 ③

① 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=\dfrac{-x}{x^2+1}=-f(x)$이므로 원점에 대하여 대칭이다.

② $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$인 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소$\left(-\dfrac{1}{2}\right)$	↗	극대$\left(\dfrac{1}{2}\right)$	↘

따라서 극댓값은 $f(1)=\dfrac{1}{2}$, 극솟값은 $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$이다.

③ $f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$에서

$f''(x)=\dfrac{-2x(x^2+1)^2-(-x^2+1)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

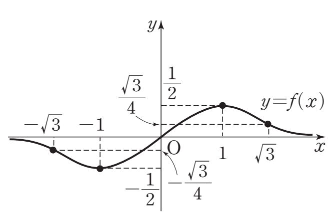
$f''(x)=0$인 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$x<-\sqrt{3}$일 때 $f''(x)<0$, $-\sqrt{3}<x<0$일 때 $f''(x)>0$,

$0<x<\sqrt{3}$일 때 $f''(x)<0$, $x>\sqrt{3}$일 때 $f''(x)>0$이므로

변곡점은 $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$의 3개이다.

④, ⑤ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



x축과의 교점은 1개이고,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

21 답 ③

① 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-xe^x\neq f(x)$이므로 y축에 대하여 대칭이 아니다.

② $f(x)=xe^{-x}$에서

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$e^{-x}>0$이므로 $f'(x)=0$인 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대$\left(\dfrac{1}{e}\right)$	↘

따라서 극댓값은 $f(1)=\dfrac{1}{e}$이다.

③ $f'(x)=(1-x)e^{-x}$에서

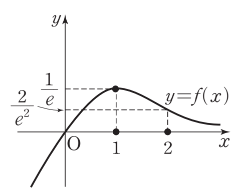
$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$f''(x)=0$인 $x=2$

$x<2$일 때 $f''(x)<0$, $x>2$일 때 $f''(x)>0$이므로

$x=2$에서 변곡점 $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$의 1개를 갖는다.

④, ⑤ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



x축과의 교점은 1개이고,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

22 답 ③

ㄴ. $f(x)=x+x\ln x$에서 정의역은 $x>0$

$f'(x)=1+\ln x+1=2+\ln x$

$f'(x)=0$인 $x=\dfrac{1}{e^2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

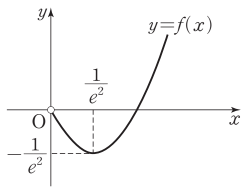
x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소$\left(-\dfrac{1}{e^2}\right)$	↗

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e^2}$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{e^2}$을 갖는다. (참)

ㄷ. $f'(x)=2+\ln x$에서 $f''(x)=\dfrac{1}{x}$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다. (거짓)

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



즉, 함수 $f(x)$의 치역은 $\left\{y \middle| y \geq -\frac{1}{e^2}\right\}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

23 답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프의 모양이 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$, 즉 함수 $y=f'(x)$의 접선의 기울기가 양수인 구간이다.

함수 $y=f'(x)$의 접선의 기울기가 양수인 구간은 구간 (a, b)와 (d, e)이고, 주어진 선택지에서 아래로 볼록한 구간은 (d, e)이다.

24 답 ④

ㄱ. 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. 점 $(0, 0)$에서 $f''(0)=0$이고 $x<0$일 때 $f''(x)>0$, $x>0$일 때 $f''(x)<0$이므로 점 $(0, 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. (참)

ㄷ. $x>0$일 때 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이다. (참)

ㄹ. 구간 $(-\infty, \infty)$에서 함수 $f(x)$는 증가하고 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$는 x축과 한 점, 즉 $(0, 0)$에서 만난다. (참)

ㅁ. 구간 $(-\infty, \infty)$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 점근선은 없다. (거짓)

따라서 옳은 것의 개수는 4이다.

25 답 ①

ㄱ. $f(0)=0$이고, 구간 $(0, 1)$에서 함수 $f(x)$가 증가하므로 $f(1)>0$이다. (거짓)

ㄴ. $x=-2$와 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$가 $(-)$에서 $(+)$로 바뀌므로 극소, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$가 $(+)$에서 $(-)$로 바뀌므로 극대이므로 3개의 극값을 갖는다. (참)

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(-1, 0)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(0, 1)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

26 답 ③

$f(x)=2x+\sqrt{1-x^2}$에서

$f'(x)=\dfrac{2\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$인 x의 값을 구하자.

$2\sqrt{1-x^2}-x=0$

$2\sqrt{1-x^2}=x$

양변을 제곱하면

$4(1-x^2)=x^2$

$4-4x^2=x^2$

$5x^2=4$

$\therefore x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ($\because 0\leq x\leq 1$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	극대$(\sqrt{5})$	↘	2

구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때, 최솟값 1을 갖는다.

27 답 ①

$f(x)=2xe^x$에서

$f'(x)=2e^x+2xe^x=(2+2x)e^x$

$f'(x)=0$인 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{4}{e^2}$	↘	극소$\left(-\frac{2}{e}\right)$	↗	$4e^2$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=4e^2$, 최솟값은 $f(-1)=-\dfrac{2}{e}$이므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$4e^2\times\left(-\dfrac{2}{e}\right)=-8e$

28 답 1

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(x^2-x+1)-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}\\&=\frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}\\&=\frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2-x+1)^2}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$인 $x=1$ ($\because 0\leq x\leq 2$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	극대(1)	↘	$\frac{2}{3}$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=1$, 최솟값은 $f(0)=0$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $1+0=1$이다.

29 답 ④

$f(x)=x^2(\ln x-1)$에서

$f'(x)=x(2\ln x-1)$

$f'(x)=0$인 $x=e^{\frac{1}{2}}$ ($\because 1\le x\le e^2$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	극소$\left(-\frac{1}{2}e\right)$	$\nearrow$	e^4

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f(e^2)=e^4$, 최솟값은 $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2}e$이므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$e^4\times\left(-\frac{1}{2}e\right)=-\frac{1}{2}e^5$

30 답 ④

곡선 $y=\sqrt{x}$ 위를 움직이는 점 P의 좌표를 $(t, \sqrt{t})$ $(t\ge 0)$로 놓고, 점 P와 점 $(3, 0)$ 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\sqrt{t^2-5t+9}$

$f'(t)=\frac{2t-5}{2\sqrt{t^2-5t+9}}$

$f'(t)=0$인 $t=\frac{5}{2}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	3	$\searrow$	극소$\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$	$\nearrow$

따라서 구하는 거리의 최솟값은 $\frac{\sqrt{11}}{2}$이다.

다른 풀이

$f'(t)=\sqrt{t^2-5t+9}=\sqrt{t^2-5t+\frac{25}{4}+\frac{11}{4}}=\sqrt{\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}$

즉, $f(t)$는 $t=\frac{5}{2}$일 때, 최솟값 $\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$을 가진다.

31 답 $\frac{1}{e}$

점 A의 좌표를 (t, e^{-t})라 하고 직사각형 OBAC의 넓이를 $S(t)$라 하자.

$S(t)=te^{-t}$

$S'(t)=e^{-t}+t(-e^{-t})=e^{-t}(1-t)$

$S'(t)=0$에서 $t=1$

함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$	극대$\left(\frac{1}{e}\right)$	$\searrow$

따라서 $t>0$에서 $t=1$일 때 $S(t)$는 극댓값이면서 최댓값 $S(1)=\frac{1}{e}$을 갖는다.

32 답 ②

곡선 $y=-2\ln x$ 위의 직사각형의 꼭짓점 A의 좌표를 $(a, -2\ln a)$ $(0<a<1)$라 하고 직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하자.

$S(a)=-4a\ln a$

$S'(a)=-4(\ln a+1)$

$S'(a)=0$인 $a=\frac{1}{e}$

함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대$\left(\frac{4}{e}\right)$	$\searrow$	

따라서 $a=\frac{1}{e}$에서 함수 $S(a)$는 극댓값이자 최댓값 $S\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{4}{e}$를 갖는다.

33 답 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면

$10\theta=2\pi r$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{5}r$ $\cdots$ ㉠

한편, 원뿔의 높이를 h라 하면 $h=\sqrt{100-r^2}$이므로 원뿔의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{100-r^2}$ $(0<r<10)$

$V'(r)=-\frac{\pi r(3r^2-200)}{3\sqrt{100-r^2}}$

$V'(r)=0$인 $r=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ ($\because 0<r<10$)

함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	(0)	$\cdots$	$\frac{10\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	(10)
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $V(r)$는 $r=\frac{10\sqrt{6}}{3}$일 때 극대이며 최대이므로 ㉠에서 원뿔의 부피가 최대가 되도록 하는 θ의 값은

$\theta=\frac{\pi}{5}\times\frac{10\sqrt{6}}{3}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

TIP

일반적으로 (극댓값)$\ne$(최댓값), (극솟값)$\ne$(최솟값)이다.
그런데 주어진 구간에서 극값이 하나만 존재하면
(극댓값)$=$(최댓값) 또는 (극솟값)$=$(최솟값)이 성립한다.

Ⅱ K

34 답 ②

$\sin x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=2t^2-t+1\ (-1\le t\le 1)$

$g'(t)=4t-1$

$g'(t)=0$인 $t=\frac{1}{4}$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	4	↘	극소$\left(\frac{7}{8}\right)$	↗	2

따라서 함수 $g(t)$의 최댓값 $M=g(-1)=4$이고, 최솟값

$m=g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{8}$이므로 $M-m=4-\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{25}{8}$

35 답 ⑤

$f(x)=2\sin^3 x+3(1-\sin^2 x)+1\ (\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$

$\quad=2\sin^3 x-3\sin^2 x+4$

$\sin x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=2t^3-3t^2+4\ (-1\le t\le 1)$

$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$g'(t)=0$인 $t=0$ 또는 $t=1$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0
$g(t)$	-1	↗	극대(4)	↘	3

따라서 함수 $g(t)$의 최댓값 $M=g(0)=4$이고, 최솟값

$m=g(-1)=-1$이므로 $M-m=4-(-1)=5$

36 답 ⑤

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

$f(x)=4\sin^3 x+3\cos^2 x=4\sin^3 x+3(1-\sin^2 x)$

$\quad=4\sin^3 x-3\sin^2 x+3\ (0\le x\le \pi)$

$\sin x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=4t^3-3t^2+3\ (0\le t\le 1)$

$g'(t)=12t^2-6t=6t(2t-1)$

$g'(t)=0$인 $t=0$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	3	↘	극소$\left(\frac{11}{4}\right)$	↗	4

따라서 함수 $g(t)$의 최댓값 $M=g(1)=4$이고, 최솟값

$m=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{4}$이므로 $Mm=4\times\frac{11}{4}=11$

37 답 ③

$f(x)=\frac{k}{2}x-\ln x$에서

$f'(x)=\frac{k}{2}-\frac{1}{x}\ (x>0)$

이때, $k<0$이면 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 $x>0$에서 감소한다.

즉, $f(x)$의 최솟값이 존재하지 않으므로 $k>0$

$f'(x)=0$인 $x=\frac{2}{k}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{k}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소$\left(1-\ln\frac{2}{k}\right)$	↗

$f(x)$는 $x=\frac{2}{k}$에서 극솟값이면서 최솟값을 가진다. 최솟값이 1이므로 $f\left(\frac{2}{k}\right)=1-\ln\frac{2}{k}=1$

$\therefore k=2$

38 답 ②

$f(x)=e^x-x+k$에서

$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$인 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소$(1+k)$	↗

$f(x)$는 $x=0$에서 극솟값이면서 최솟값 $f(0)=1+k$를 갖는다.

최솟값이 3이므로 $k=2$

39 답 ③

$f(x)=x\ln x-2x+k$에서

$f'(x)=\ln x-1$

$f'(x)=0$인 $x=e$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소$(-e+k)$	↗

$f(x)$는 $x=e$에서 극솟값이면서 최솟값 $f(e)=-e+k$를 갖는다.

최솟값이 2이므로 $-e+k=2\quad \therefore k=e+2$

$\therefore a+k=e+(e+2)=2e+2$

40 답 ④

$f(x)=ax\sqrt{1-x^2}+b$의 정의역은 $-1\le x\le 1$

$f'(x)=\frac{a(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$인 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	b	↘	극소 $\left(-\frac{1}{2}a+b\right)$	↗	극대 $\left(\frac{1}{2}a+b\right)$	↘	b

따라서 최댓값은 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}a+b$,

최솟값은 $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}a+b$이므로

$\frac{1}{2}a+b=6$, $-\frac{1}{2}a+b=2$

위 두 식을 연립하면 $a=4$, $b=4$

$\therefore a+b=4+4=8$

41 답 ②

$f(x)=x\ln x-x$로 놓으면 정의역은 $x>0$

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$

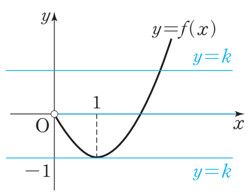
$f'(x)=0$인 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소(-1)	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값이면서 최솟값 $f(1)=-1$을 갖는다.

함수 $f(x)=x\ln x-x$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 곡선 $y=x\ln x-x$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $k=-1$ 또는 $k\geq 0$이므로 주어진 값 중 실수 k의 값이 아닌 것은 $-\frac{1}{2}$이다.

42 답 ①

$f(x)=xe^x$로 놓자.

$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

즉, $f'(x)=0$인 $x=-1$

$f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$

$f''(x)=0$인 $x=-2$

$x<-2$일 때 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록이고,

$x>-2$일 때 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 변곡점 $\left(-2,\ -\frac{2}{e^2}\right)$를 갖는다.

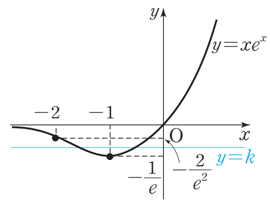
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소$\left(-\frac{1}{e}\right)$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값이면서 최솟값 $f(-1)=-\frac{1}{e}$을 갖는다.

또, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$

함수 $y=xe^x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=xe^x$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $-\frac{1}{e}<k<0$

$\alpha=-\frac{1}{e}$, $\beta=0$

$\therefore \alpha+\beta=\left(-\frac{1}{e}\right)+0=-\frac{1}{e}$

43 답 ④

$f(x)=2\sqrt{x}-x$로 놓으면 정의역은 $x\geq 0$

$f'(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=\frac{1}{\sqrt{x}}-1$

즉, $f'(x)=0$인 $x=1$

$f''(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$x>0$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록이다.

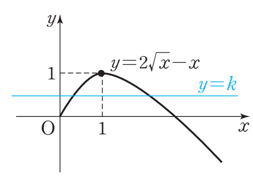
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	극대(1)	↘

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값이면서 최댓값 $f(1)=1$을 갖는다.

또, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(2\sqrt{x}-x)=-\infty$

함수 $y=2\sqrt{x}-x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=2\sqrt{x}-x$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $k=1$ 또는 $k<0$이므로 주어진 값 중 실수 k의 값이 아닌 것은 0이다.

Ⅱ
K

44 답 $0\le k<2$

$f(x)=2\sin x\ (-\pi\le x\le\pi)$로 놓으면

$f'(x)=2\cos x$

$f'(x)=0$인 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{2}$

또, $f''(x)=-2\sin x$

$f''(x)=0$에서 $x=-\pi$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\pi$

$x<0$일 때 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록이고,

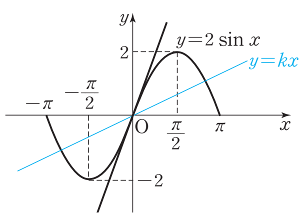
$x>0$일 때 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 변곡점 $(0,\ 0)$을 갖는다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	극소 (-2)	↗	극대 (2)	↘	0

곡선 $y=2\sin x$의 그래프 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=2x$



따라서 곡선 $y=2\sin x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 그림과 같이 $0\le k<2$

45 답 ②

$f(x)=x-e^x$으로 놓자.

$f'(x)=1-e^x$

$f'(x)=0$인 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대(-1)	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값이면서 최댓값 $f(0)=-1$을 갖는다.

$f(x)\le k$가 성립하려면 $k\ge-1$

즉, 실수 k의 최솟값은 -1이다.

46 답 ②

$f(x)=k\ln x-x$로 놓으면 정의역은 $x>0$

$f'(x)=\dfrac{k}{x}-1$

$f'(x)=0$인 $x=k$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대$(k\ln k-k)$	↘

함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극댓값이면서 최댓값 $f(k)=k\ln k-k$를 갖는다.

$f(x)\le0$이 성립하려면

$k\ln k-k\le0$

$\ln k\le1\ (\because k>0)$

$\therefore k\le e$

따라서 양수 k의 최댓값은 e이다.

47 답 ③

$f(x)=\sin x+x^2-k\ (x\ge0)$로 놓자.

$f'(x)=\cos x+2x$, $f''(x)=-\sin x+2$

이때, $-1\le\sin x\le1$에서 $f''(x)\ge0$이므로 $f'(x)$는 증가하고,

$f'(0)=1$이므로 $x\ge0$에서 $f'(x)>0$이다.

$x\ge0$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $f(x)$의 최솟값은

$f(0)=-k$

$x\ge0$일 때, $f(x)\ge0$이어야 하므로

$f(0)=-k\ge0$

$\therefore k\le0$

따라서 k의 최댓값은 0이다.

48 답 ①

시각 t에서의 위치가 $P(t)=\sin t-\sqrt{3}\cos t$이므로

$P'(t)=\cos t+\sqrt{3}\sin t$

시각 $t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 속도를 구하면

$P'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{2}=\sqrt{3}$

$\therefore v=\sqrt{3}$

$P''(t)=-\sin t+\sqrt{3}\cos t$

시각 $t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 가속도를 구하면

$P''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{2}=-1$

$\therefore a=-1$

$\therefore va=\sqrt{3}\times(-1)=-\sqrt{3}$

49 답 2

시각 t에서의 위치는 각각 $P(t)=\dfrac{1}{3}t^3+4t$, $Q(t)=2t^2+\dfrac{2}{3}$이므로 속도를 각각 구하면

$P'(t)=t^2+4$, $Q'(t)=4t$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간의 시각을 t라 하면

$t^2+4=4t$

$(t-2)^2=0$

심플(미적분)해설2단원_I~K049-080팔교.indd 70 20. 9. 4. 오후 2:48

즉, $t=2$일 때 두 점의 속도가 같다.

$P(2)=\frac{8}{3}+8=\frac{32}{3}$, $Q(2)=8+\frac{2}{3}=\frac{26}{3}$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$\frac{32}{3}-\frac{26}{3}=\frac{6}{3}=2$

50 답 ③

방향을 바꿀 때는 속도의 부호가 변할 때이므로

$P'(t)=\cos t-\sin t=0$

즉, $\sin t=\cos t$를 만족하는 해는

$t=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \cdots$

처음으로 방향을 바꿀 때는 $t=\frac{\pi}{4}$이고,

이때의 위치는

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

51 답 ②

점 P의 시각 t에서의 위치가 $P(t)=\frac{at}{t^2+1}$이므로

$P'(t)=\frac{a(t^2+1)-at\times 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{a(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$

$P'(t)=0$인 $t=1$ ($\because t\geq 0$)

$P(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$P'(t)$		$+$	0	$-$
$P(t)$		↗	$\frac{a}{2}$	↘

점 P는 $t=1$의 좌우에서 $P'(t)$의 부호가 바뀌므로 처음으로 방향을 바꾼다.

이때, 위치는 $P(1)=\frac{a}{2}=1$이므로

$a=2$

52 답 ③

시각 t에서의 위치가 $P(t)=\ln(t^2+4)$이므로

$P'(t)=v(t)=\frac{2t}{t^2+4}$ ($\because t\geq 0$)

$t\geq 0$일 때, $v(t)\geq 0$이므로 점 P의 속도가 최대일 때 속력도 최대이다.

$v(t)=\frac{2t}{t^2+4}$이므로

$$v'(t)=\frac{2(t^2+4)-2t\times 2t}{(t^2+4)^2}=\frac{-2t^2+8}{(t^2+4)^2}$$
$$=\frac{-2(t-2)(t+2)}{(t^2+4)^2}$$

$v'(t)=0$인 $t=2$ ($\because t\geq 0$)

$v(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$v'(t)$		$+$	0	$-$
$v(t)$		↗	극대	↘

따라서 속도는 $t=2$에서 극대이면서 최대이므로 속력의 최댓값은

$|v(2)|=\frac{2\times 2}{2^2+4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

53 답 ②

시각 t에서의 위치가 $x=t^2$, $y=t^2-4t$이므로

$\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=2t-4$

즉, $v(t)=(2t, 2t-4)$

$$\therefore |v(t)|=\sqrt{(2t)^2+(2t-4)^2}$$
$$=\sqrt{8t^2-16t+16}$$
$$=\sqrt{8(t^2-2t)+16}$$
$$=\sqrt{8(t-1)^2+8}$$

$t=1$일 때, 속력이 최소가 되고

이때, 점 P의 위치는 $(1^2, 1^2-4\times 1)$에서 $(1, -3)$

54 답 ①

시각 t에서의 위치가 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$이므로

$\frac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t$, $\frac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t$

즉, $v(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t, e^t\sin t+e^t\cos t)$

$$|v(t)|=\sqrt{(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t+e^t\cos t)^2}$$
$$=e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2}$$
$$=e^t\sqrt{(\cos^2 t-2\cos t\sin t+\sin^2 t)+(\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t)}$$
$$=e^t\sqrt{2(\cos^2 t+\sin^2 t)}$$
$$=\sqrt{2}e^t\ (\because \cos^2 x+\sin^2 x=1)$$

점 P의 속력이 $\sqrt{2}e$일 때의 시각 t를 구면

$\sqrt{2}e^t=\sqrt{2}e$

$\therefore t=1$

55 답 ③

시각 t에서의 위치가

$x=\sqrt{3}\cos t-\sin t$, $y=\sqrt{3}\sin t+\cos t$이므로

$\frac{dx}{dt}=-\sqrt{3}\sin t-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sqrt{3}\cos t-\sin t$

즉, $v(t)=(-\sqrt{3}\sin t-\cos t, \sqrt{3}\cos t-\sin t)$

$$|v(t)|=\sqrt{(-\sqrt{3}\sin t-\cos t)^2+(\sqrt{3}\cos t-\sin t)^2}$$
$$=\sqrt{4(\sin^2 t+\cos^2 t)}=2$$

따라서 점 P의 속력은 2로 일정하므로 $a=2$

Ⅱ K

56 답 ⑤

시각 t에서의 위치가 $x=t+\sin t$, $y=1-\cos t$이므로

$\frac{dx}{dt}=1+\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$

즉, $v(t)=(1+\cos t,\ \sin t)$

$\therefore\ |v(t)|=\sqrt{(1+\cos t)^2+\sin^2 t}$

$=\sqrt{2(1+\cos t)}$

$-1\le\cos t\le1$에서 $0\le1+\cos t\le2$이므로

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 2

57 답 ④

시각 t에서의 위치가 $x=\frac{1}{2}t^2-\ln 2t$, $y=3t$이므로

$\frac{dx}{dt}=t-\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=3$

즉, $v(t)=\left(t-\frac{1}{t},\ 3\right)$

$\therefore\ |v(t)|=\sqrt{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+3^2}$

$=\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}+7}$

$t^2>0$, $\frac{1}{t^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$t^2+\frac{1}{t^2}\ge2\sqrt{t^2\times\frac{1}{t^2}}=2$ $\left(\text{단, 등호는 } t^2=\frac{1}{t^2}\text{일 때}\right)$

즉, $t=1$일 때 속력은 최솟값 $\sqrt{2+7}=3$을 갖는다.

$a=1$, $b=3$이므로 $a+b=4$

58 답 ③

시각 t에서의 위치가 $x=t\ln t$, $y=t+\ln t$이므로

$\frac{dx}{dt}=\ln t+1$, $\frac{dy}{dt}=1+\frac{1}{t}$

$\therefore\ \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{t}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{1}{t^2}$

즉, $a(t)=\left(\frac{1}{t},\ -\frac{1}{t^2}\right)$이므로 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$a(1)=(1,\ -1)$

59 답 ①

시각 t에서의 위치가

$x=\frac{1}{12}t^4-2t^2+2t$, $y=3t^2-2t+1$이므로

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}t^3-4t+2$, $\frac{dy}{dt}=6t-2$

$\therefore\ \frac{d^2x}{dt^2}=t^2-4$, $\frac{d^2y}{dt^2}=6$

즉, $a(t)=(t^2-4,\ 6)$이므로

$|a(t)|=\sqrt{(t^2-4)^2+6^2}$

따라서 $t^2=4$, 즉 $t=2$ ($\because\ t>0$)일 때, 점 P의 가속도의 크기는 최솟값 6을 갖는다.

연습 문제 [I~K]

[기출+기출 변형] 문제편 pp. 90~91

01 답 ④

$f(x)=\ln(3-x)$라 하면

$f'(x)=-\frac{1}{3-x}$

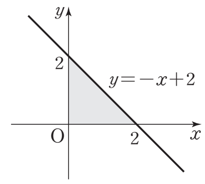
직선 $y=3-x$에 평행한 직선의 기울기는 -1이므로

$-\frac{1}{3-x}=-1\qquad\therefore\ x=2$

접점의 좌표는 $(2,\ 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=-(x-2)$

$\therefore\ y=-x+2$



이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times2=2$

02 답 ①

> 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{\sin x}{e^{2x}}$가 $x=a$에서 극솟값을 가질 때, $\cos a$의 값은?
>
> ① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　③ 0
>
> ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
>
> 미분가능한 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 가질 조건은 $f'(a)=0$, $f''(a)>0$

1st 함수 $y=f(x)$가 극솟값을 가질 조건을 따지자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 가질 때

$f'(a)=0$, $f''(a)>0$

$f(x)=\frac{\sin x}{e^{2x}}$에 대하여

$f'(x)=\frac{\cos x\times e^{2x}-\sin x\times 2e^{2x}}{e^{4x}}$

$=\frac{\cos x-2\sin x}{e^{2x}}$

함수 $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$에 대하여 $h'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

2nd $f'(a)=0$인 식을 구하자.

$f'(a)=\frac{\cos a-2\sin a}{e^{2a}}=0$

$e^{2a}>0$이므로

$\cos a-2\sin a=0$

$\cos a=2\sin a$ ⋯ ㉠

양변을 제곱하면

$\cos^2 a=4\sin^2 a$

$1-\sin^2 a=4\sin^2 a$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 이용한 거야.

$5\sin^2 a=1$

$\therefore\ \sin^2 a=\frac{1}{5}$ ⋯ ㉡

3rd $f''(a)>0$인 식을 정리하자.

$f''(x)=\dfrac{3\sin x-4\cos x}{e^{2x}}$이므로

$f''(a)=\dfrac{3\sin a-4\cos a}{e^{2a}}=\dfrac{-5\sin a}{e^{2a}}>0$ (∵ ㉠)

$\therefore \sin a<0$

㉡에서 $\sin a=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \cos a=2\sin a=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

03 답 ⑤

$f(x)=y=\sin x$라 하면

$f'(x)=\cos x$

접점의 좌표를 $(k, \sin k)$라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(k)=\cos k=-1 \qquad \therefore k=\pi$

따라서 접점의 좌표는 $(\pi, 0)$이고, 접선의 방정식은

$y=-(x-\pi)=-x+\pi \qquad \therefore a=\pi$

04 답 ②

$y=\dfrac{2}{x+1}$에 대하여 $y'=-\dfrac{2}{(x+1)^2}$

접점을 $(a, f(a))$라 할 때, $y'=-\dfrac{2}{(a+1)^2}$

접선의 방정식은

$y=-\dfrac{2}{(a+1)^2}(x-a)+\dfrac{2}{a+1}$

이 접선은 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=-\dfrac{2}{(a+1)^2}(1-a)+\dfrac{2}{a+1}$

$\dfrac{1-a}{a+1}=1 \qquad \therefore a=0$

즉, 접선의 방정식은 $y=-2x+2$에서 $2x+y-2=0$

따라서 원점과 접선 사이의 거리는

$\dfrac{|-2|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

심플 정리

[점과 직선 사이의 거리]

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

05 답 ②

함수 $f(x)=x^2-8\ln x\ (x>0)$에서

$f'(x)=2x-\dfrac{8}{x}=\dfrac{2x^2-8}{x}$

함수 $f(x)$는 $f'(x)>0$인 구간에서 증가하므로

$2(x^2-4)>0$

$\therefore x>2$ (∵ $x>0$)

즉, 구간 $(2, \infty)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 2

06 답 ⑤

곡선에 접하는 직선의 기울기는 미분으로 구할 수 있지?

곡선 $y=\sin 2x\ (0<x<\pi)$에 접하고 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$와 수직인 직선의 y절편은?

두 직선이 수직으로 만날 조건은 두 직선의 기울기의 곱이 항상 -1일 때야.

① $\dfrac{\pi}{5}$ ② $\dfrac{\pi}{4}$ ③ $\dfrac{\pi}{3}$

④ $\dfrac{\pi}{2}$ ⑤ π

1st 먼저 주어진 직선과 수직일 조건을 이용하면 접선의 기울기를 구할 수 있어.

직선 $y=\dfrac{1}{2}x$와 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$\dfrac{1}{2}\times m=-1 \qquad \therefore m=-2$

두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$이 수직일 조건은 $aa'=-1$

곡선 $y=\sin 2x\ (0<x<\pi)$의 접선의 기울기는

$y'=2\cos 2x$

직선 $y=\dfrac{1}{2}x$와 수직인 직선의 기울기가 -2이므로

$2\cos 2x=-2$

$\cos 2x=-1$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ (∵ $0<x<\pi$)

$\cos\pi=-1$이니까 $2x=\pi \quad \therefore x=\dfrac{\pi}{2}$

즉, 점 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

기울기가 m이고, 점 (x_1, y_1)을 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

$\therefore y=-2x+\pi$

따라서 이 직선의 y절편은 π이다.

07 답 ②

$f(x)=\cos x+x\sin x\ (0<x<2\pi)$에서

$f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$

$0<x<2\pi$에서 $f'(x)=0$인

$x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

$f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 극대이고, 극댓값은

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0+\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

또, $f(x)$는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$에서 극소이고, 극솟값은

$f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=0+\dfrac{3}{2}\pi\sin\dfrac{3}{2}\pi=-\dfrac{3}{2}\pi$

따라서 극솟값과 극댓값의 합은

$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\pi=-\pi$

08 답 ③

함수 $f(x)=2x+n\cos x$에서

$f'(x)=2-n\sin x$

$f'(x)=0$인 $\sin x=\dfrac{2}{n}$ ⋯ ㉠

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 ㉠의 근이 존재하고, 그 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$\dfrac{2}{n}<1 \qquad \therefore n>2$

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이다.

09 답 5

함수 $f(x)=\ln(x^2+k)$에서

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+k}$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2+k)-2x\times 2x}{(x^2+k)^2}$

$=\dfrac{-2(x^2-k)}{(x^2+k)^2}$

$f''(x)=0$인 $x=-\sqrt{k}$ 또는 $x=\sqrt{k}$

$x<-\sqrt{k}$일 때 $f''(x)<0$, $-\sqrt{k}<x<\sqrt{k}$일 때 $f''(x)>0$,

$x>\sqrt{k}$일 때 $f''(x)<0$

즉, $x=-\sqrt{k}$, $x=\sqrt{k}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$(-\sqrt{k}, \ln 2k)$, $(\sqrt{k}, \ln 2k)$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$이므로

$2\sqrt{k}=2\sqrt{5} \qquad \therefore k=5$

10 답 ⑤

$f(x)=\dfrac{x(x+k)}{e^x}=\dfrac{x^2+kx}{e^x}$에서

$f'(x)=\dfrac{(2x+k)e^x-(x^2+kx)e^x}{e^{2x}}$

$=\dfrac{-x^2+(2-k)x+k}{e^x}$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$f'(0)=0$, 즉 $k=0$

$f'(x)=\dfrac{-x^2+2x}{e^x}$이므로

$f'(x)=0$인 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	0	⋯	2	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고

구간 $(0, \infty)$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

$k=0$이므로 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

$\therefore f(2)=\dfrac{4}{e^2}$

11 답 ②

$f(x)=\cos x(\cos x-1)$에서

$f'(x)=-\sin x\cdot(\cos x-1)+\cos x\cdot(-\sin x)$

$=-\sin x(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$일 때, $\sin x=0$ 또는 $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=-\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{3}$ $\left(\because -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{2}$	⋯	$-\frac{\pi}{3}$	⋯	0	⋯	$\frac{\pi}{3}$	⋯	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↘	극소 $\left(-\frac{1}{4}\right)$	↗	극대 (0)	↘	극소 $\left(-\frac{1}{4}\right)$	↗	0

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=0$,

최솟값은 $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{4}$

즉, 최댓값과 최솟값의 합은 $-\dfrac{1}{4}$

12 답 ②

$f(x)=x+\sqrt{a-x^2}$의 정의역은

$a-x^2\ge 0$이므로 $-\sqrt{a}\le x\le\sqrt{a}$

$f'(x)=1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{a-x^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{a-x^2}-x}{\sqrt{a-x^2}}$

$f'(k)=0$일 때, $\sqrt{a-k^2}-k=0$

$a-k^2=k^2 \qquad \therefore k=\sqrt{\dfrac{a}{2}}\ (\because k>0)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	⋯	$\sqrt{\frac{a}{2}}$	⋯
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$에서 극댓값을 가지면서 최댓값을 갖는다.

$f\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)=\sqrt{\dfrac{a}{2}}+\sqrt{\dfrac{a}{2}}=\sqrt{2a}$

최댓값이 2이므로 $a=2$

13 답 ④

$x^2-ke^x=0$에서 $k=\dfrac{x^2}{e^x}$이므로

두 함수 $y=k$, $y=\dfrac{x^2}{e^x}$의 그래프의 교점이 2개일 때를 구하자.

$f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$으로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2xe^x-x^2e^x}{e^{2x}}=\dfrac{2x-x^2}{e^x}=\dfrac{-x(x-2)}{e^x}$

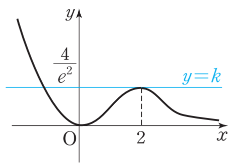
심플(미적분)해설2단원_l~K049-080팔교.indd 74 20. 9. 4. 오후 2:48

$f'(x)=0$인 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소(0)	$\nearrow$	극대$\left(\frac{4}{e^2}\right)$	$\searrow$

또 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

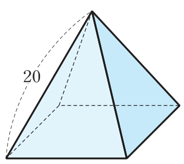


따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$k=\frac{4}{e^2}$

14 답 ④

오른쪽 그림과 같이 옆면의 모서리의 길이가 20인 정사각뿔이 있다. 이 정사각뿔의 부피가 최대가 되도록 하는 밑면의 한 변의 길이는?



밑면의 한 변의 길이를 x로 놓고, 정사각뿔의 부피를 x에 대한 식으로 나타내어 미분을 이용하여 최댓값을 구하자.

① $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ ② $\frac{20}{3}\sqrt{3}$ ③ $10\sqrt{3}$

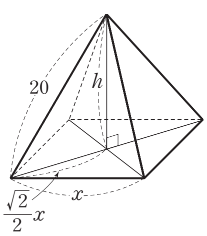
④ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{50}{3}\sqrt{3}$

1st 정사각뿔의 부피는 밑면의 넓이와 높이를 알아야 돼.

밑면의 한 변의 길이를 x,

높이를 h라 하면

$h=\sqrt{400-\frac{1}{2}x^2}$ $(\because 0<x<20\sqrt{2})$



정사각뿔의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{1}{3}x^2\sqrt{400-\frac{1}{2}x^2}$ 정사각뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\times$(밑면의 넓이)$\times$(높이)를 이용하여 구한 거야.

2nd 미분을 이용하여 최댓값을 구하자.

$$V'(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{400-\frac{1}{2}x^2}+\frac{1}{3}x^2\times\frac{-x}{2\sqrt{400-\frac{1}{2}x^2}}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}x\left(400-\frac{1}{2}x^2\right)-\frac{1}{3}x^3}{2\sqrt{400-\frac{1}{2}x^2}}=\frac{1600x-3x^3}{6\sqrt{400-\frac{1}{2}x^2}}$$

$V'(x)=0$인 $x=\frac{40}{3}\sqrt{3}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{40}{3}\sqrt{3}$	$\cdots$	$(20\sqrt{2})$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $V(x)$는 $x=\frac{40}{3}\sqrt{3}$일 때 극대이며 최대이므로 부피가 최대가 되도록 하는 밑면의 한 변의 길이는 $\frac{40}{3}\sqrt{3}$이다.

15 답 ⑤

시각 t에서의 위치가 $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$이므로

$\frac{dx}{dt}=3\cos^2 t\times(-\sin t)=-3\sin t\cos^2 t$,

$\frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\times\cos t=3\sin^2 t\cos t$

즉, $v(t)=(-3\sin t\cos^2 t,\ 3\sin^2 t\cos t)$이므로

$|v(t)|=\sqrt{(-3\sin t\cos^2 t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}$

$=\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}$

$=3\sin t\cos t$ $(\because \sin^2 x+\cos^2 x=1)$

16 답 -1

함수 $f(x)=(\ln 2x)^2$에서

$f'(x)=2\ln 2x\times\frac{2}{2x}=\frac{2\ln 2x}{x}$

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln 2x}{x^2}=\frac{2(1-\ln 2x)}{x^2}$

$f''(x)=0$인 $x=\frac{e}{2}$

$0<x<\frac{e}{2}$일 때 $f''(x)>0$, $x>\frac{e}{2}$일 때 $f''(x)<0$이므로 $x=\frac{e}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{2},\ 1\right)$이다. … Ⅰ

변곡점에서의 기울기는

$f'\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{2\ln\left(2\times\frac{e}{2}\right)}{\frac{e}{2}}=\frac{4}{e}$

기울기가 $\frac{4}{e}$이고, 점 $\left(\frac{e}{2},\ 1\right)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=\frac{4}{e}\left(x-\frac{e}{2}\right)+1$

$\therefore y=\frac{4}{e}x-1$ … Ⅱ

따라서 변곡점에서 그은 접선의 y절편은 -1 … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	변곡점의 좌표를 구한다.	40%
Ⅱ	접선의 방정식을 구한다.	40%
Ⅲ	y절편을 구한다.	20%

Ⅱ

I~K 연습

Ⅱ 대단원 TEST [E~K] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 92~95

01 답 ⑤

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{5x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{5}\times1=\frac{1}{5}$

02 답 ①

$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{e^{ax}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\times\frac{1}{\frac{e^{ax}-1}{ax}}\times\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=-2$

[삼각함수와 지수함수의 극한] 심플 정리

(1) 삼각함수의 극한

① $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ ② $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

(2) 지수함수의 극한

① $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ② $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

03 답 ①

$x-\frac{\pi}{2}=t$라고 하면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이다.

$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{-2t}{\sin t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{-2}{\frac{\sin t}{t}}=-2$

TIP

- 삼각함수의 극한에서 $x\to a\ (a\neq0)$일 때, $x-a=t$로 치환하여 $t\to0$이 되도록 한다.
- $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ (단, x는 라디안)

04 답 ④

$\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$의 값은?

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형하자.

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ 1
④ e ⑤ $2e$

1st $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형하자.

$\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\tan x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{\tan x-\sin x}$ $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$임을 이용하기 위해서는 분자에 -1이 있어야 하므로, 여기에 착안하여 $e^{1-\tan x}$를 공통인수로 묶어낸 거야.

$=\lim_{x\to0}\frac{e}{e^{\tan x}}\cdot\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$

2nd $\tan x-\sin x=t$로 치환하여 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$을 이용해 극한값을 구하자.

$\tan x-\sin x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{e}{e^{\tan x}}\cdot\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e}{e^{\tan x}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e}{e^{\tan x}}\cdot\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}$ $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (단, α와 β는 상수) 즉, 각각 수렴할 때, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$ 인 함수의 극한의 성질을 이용한 거야.

$=e\times1=e$

05 답 ④

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to0}(a+\sin^2 x)=0$ $\therefore a=0$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{x^2}{x\ln(1+x)}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}\right\}$

$=1^2\times\frac{1}{\ln e}=1$

$\therefore b=1$

$\therefore a+b=1$

06 답 ⑤

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\tan\frac{\pi}{4}=1$에서

$\tan\alpha-\tan\beta=1+\tan\alpha\tan\beta$이므로

$(1+\tan\alpha)(1-\tan\beta)$

$=1+\tan\alpha-\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta$

$=1+(1+\tan\alpha\tan\beta)-\tan\alpha\tan\beta$

$=2$

07 답 ⑤

$f(x)=x\ln x$이므로

$f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$f'(e)=\ln e+1=2$

08 답 ②

$f(x)=\log_2 5x=\log_2 5+\log_2 x$이므로

$f'(x)=(\log_2 5+\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$

$\therefore f'(1)=\frac{1}{\ln 2}$

09 답 14

함수 $f(x)=x\ln x+13x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.
로그함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 $x=1$을 대입해.

1st 우선, 로그함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구하자.

$f(x)=x\ln x+13x$에서

로그함수의 미분법 $y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{1}{x}$과 곱의 미분법을 이용한 거야.

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}+13=\ln x+14$

2nd $x=1$을 대입하여 $f'(1)$의 값을 구해.

$f'(x)=\ln x+14$이므로 $f'(1)=14$

10 답 10

함수 $f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}$과 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=(g\circ f)(x)$라 하자. $h'(0)=15$일 때, $g'(1)$의 값을 구하시오.

$h'(0)$의 값이 주어져 있으니까 $h(x)=(g\circ f)(x)$를 x에 대하여 미분해봐.

1st 합성함수의 미분법을 이용하여 $h(x)=(g\circ f)(x)$의 양변을 미분해 보자.

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

2nd $x=0$을 대입하여 $g'(1)$의 값을 구해.

$f(0)=1$이므로

$h'(0)=g'(f(0))f'(0)=g'(1)f'(0)=15$

이때, $f'(x)=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$이므로 $f'(0)=\frac{3}{2}$

합성함수의 미분법 $y=\{f(x)\}^n$(n은 실수)이면 $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$를 이용한 거야.

따라서 $g'(1)\times\frac{3}{2}=15$이므로

$g'(1)=15\times\frac{2}{3}=10$

11 답 ⑤

$y'=\{(x+1)^2\}'(x^2-1)^2+(x+1)^2\{(x^2-1)^2\}'$

$=2(x+1)(x^2-1)^2+(x+1)^2\times2(x^2-1)(x^2-1)'$

$=2(x+1)(x^2-1)^2+4x(x+1)^2(x^2-1)$

$=2(x+1)(x^2-1)(x^2-1+2x^2+2x)$

$=2(x+1)^2(x^2-1)(3x^2+2x-1)$

따라서 $x=0$에서의 접선의 기울기, 즉 미분계수는

$2\times1\times(-1)\times(-1)=2$

12 답 ④

$f'(x)=\cos(\cos x)\times(\cos x)'=-\sin x\times\cos(\cos x)$

$\therefore f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$=-(-1)\times\cos 0=1$

13 답 ①

$f'(x)=3(x^2-x+a)^2(2x-1)$이고, $f'(0)=-3$이므로

$-3a^2=-3,\ a^2=1$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

14 답 ②

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}=x^{-\frac{3}{4}}$이므로

$f'(x)=-\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}-1}=-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}=-\frac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-\frac{3}{4}$

15 답 ①

$\tan\theta=\left|\frac{-\frac{2}{3}-(-1)}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-1)}\right|=\left|\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}\right|=\frac{1}{5}$

즉, $\cot\theta=5$이므로

$\sin^2\theta=\frac{1}{\csc^2\theta}$

$=\frac{1}{1+\cot^2\theta}=\frac{1}{26}$

16 답 ②

$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 $x=1$에서의 접선의 기울기는 e이다.

기울기가 e이고, 점 $(1, e)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=e(x-1)+e$

$\therefore y=ex$

이 직선은 동시에 $y=2\sqrt{x-k}$에 접한다.

곡선 $y=2\sqrt{x-k}$ 위의 접점의 좌표를 $(a, 2\sqrt{a-k})$라 할 때, 접점은 $y=ex$ 위에 있으므로

$2\sqrt{a-k}=ea$ ⋯ ㉠

$y'=\frac{2}{2\sqrt{x-k}}=\frac{1}{\sqrt{x-k}}$이고, $x=a$에서 접선의 기울기가 e이므로

$\frac{1}{\sqrt{a-k}}=e$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2\sqrt{a-k}=\frac{a}{\sqrt{a-k}}$

$2(a-k)=a$

$\therefore a=2k$

이것을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{\sqrt{k}}=e \qquad \therefore k=\frac{1}{e^2}$

17 답 ③

$f(x)=x\ln x$라 하면

$f'(x)=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(a, a\ln a)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=\ln a+1$

기울기가 $\ln a+1$이고 점 $(a, a\ln a)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=(\ln a+1)(x-a)+a\ln a$

이 접선이 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=(\ln a+1)(0-a)+a\ln a$

$\therefore a=1$

즉, 접선의 방정식은 $y=x-1$

점 $(0, 0)$과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|0-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ⅱ 대단원

18 답 ③

$y=x\ln(x+1)$에서

$y'=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$

$x=t$에서의 접선의 기울기는

$y'=\ln(t+1)+\frac{t}{t+1}$

기울기가 $\ln(t+1)+\frac{t}{t+1}$이고, 점 $(t,\ t\ln(t+1))$을 지나는 접선의 방정식은

$y=\left\{\ln(t+1)+\frac{t}{t+1}\right\}(x-t)+t\ln(t+1)$

접선과 y축과의 교점, 즉 y절편 $f(t)=-\frac{t^2}{t+1}$

$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{t+1}=-1$

TIP

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 차수가 같고, 최고차항의 계수가 각각 a, b일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$임을 이용하면 극한값 계산을 쉽게 할 수 있다.

19 답 ④

두 곡선 $y=a\ln x$, $y=x^2$이 접할 때, 상수 a의 값은? (단, $a>0$)

두 곡선이 접하면 접하는 점에 대하여 기울기가 같고, 함숫값이 일치하지?

① $\frac{1}{2}e$ ② e ③ $\frac{3}{2}e$ ④ $2e$ ⑤ $\frac{5}{2}e$

1st 두 곡선이 접할 때의 조건을 알아야 해.

$f(x)=a\ln x$, $g(x)=x^2$으로 놓으면

$x=k$에서 두 곡선이 접할 때

$f'(k)=g'(k)$, $f(k)=g(k)$ 두 곡선이 접하면 접할 때, 기울기와 함숫값이 같다는 조건이 필요해.

2nd 접하는 점에서 두 곡선의 기울기와 함숫값이 같음을 이용하자.

$f'(x)=\frac{a}{x}$, $g'(x)=2x$이고 $x=k$에서 기울기가 같으므로

$\frac{a}{k}=2k \qquad \therefore a=2k^2 \cdots ㉠$

또한 $x=k$에서 함숫값이 같으므로 $a\ln k=k^2$

여기에 ㉠을 대입하면

$2k^2\times\ln k=k^2$

$\ln k=\frac{1}{2}\ (\because k>0)$

즉, $k=\sqrt{e}$

$\therefore a=2e\ (\because ㉠)$

20 답 ④

$f(x)=y=3x^4-4ax^3+6ax^2-3$이라 하면

$f'(x)=12x^3-12ax^2+12ax$

$f''(x)=12(3x^2-2ax+a)$

이때, 모든 실수 x에 대하여 아래로 볼록하므로

$f''(x)=12(3x^2-2ax+a)\ge0$

즉, 이차방정식 $3x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le0 \qquad \therefore 0\le a\le3$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3으로 4개이다.

21 답 ⑤

$f(x)=y=\frac{2}{x+1}\ (x>-1)$라 하면

$f'(x)=-\frac{2}{(x+1)^2}$

직선 $y=\frac{1}{2}x$와 수직인 직선의 기울기는 -2이므로

$-\frac{2}{(x+1)^2}=-2 \qquad \therefore x=0$

즉, 접점 $(0,\ 2)$에서 접선의 기울기가 -2이다.

기울기가 -2이고, 점 $(0,\ 2)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=-2(x-0)+2 \qquad \therefore y=-2x+2$

따라서 접선의 y절편은 2

22 답 ①

$f(x)=(x^2+kx+2)e^x$에서

$f'(x)=(2x+k)e^x+(x^2+kx+2)e^x=\{x^2+(k+2)x+k+2\}e^x$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $e^x>0$이므로

$x^2+(k+2)x+k+2\ge0$

즉, 이차방정식 $x^2+(k+2)x+k+2=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+(k+2)x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+2)^2-4(k+2)\le0$

$(k+2)(k-2)\le0$

$\therefore\ -2\le x\le2$

따라서 정수 k는 -2, -1, 1, 0, 1, 2로 5개이다.

23 답 ③

곡선 $y=\frac{2x-1}{3x-1}$ 위에 접선의 기울기가 4인 접점이 두 개 있다. 이 두 점 사이의 거리는?

곡선을 미분하면 접선의 기울기를 구할 수 있어. 접선의 기울기가 4일 때의 접점의 좌표를 먼저 구하자.

① $\frac{\sqrt{13}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{15}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{17}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{19}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{21}}{3}$

1st 미분을 이용하여 접선의 기울기가 4인 접점의 x좌표를 구하자.

$f(x)=y=\frac{2x-1}{3x-1}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2\times(3x-1)-(2x-1)\times 3}{(3x-1)^2}$

$=\frac{1}{(3x-1)^2}$

[몫의 미분법]
미분가능한 함수 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$에 대하여
$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

접점의 좌표를 $(a, f(a))$로 놓으면 접선의 기울기가 4이므로

$\frac{1}{(3a-1)^2}=4$

$(3a-1)^2=\frac{1}{4}$, $3a=1\pm\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{6}$

2nd 두 점의 좌표를 알고 있으면 두 점 사이의 거리를 구할 수 있지.

따라서 두 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)^2+\left(0-\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{17}{9}}=\frac{\sqrt{17}}{3}$

TIP

[두 점 사이의 거리]
두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는
$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

24 답 ⑤

$f(x)=\sin x+a\cos x-1$이므로

$f'(x)=\cos x-a\sin x$

$f''(x)=-\sin x-a\cos x$

변곡점의 x좌표가 $\frac{\pi}{3}$이므로

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}-a\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{a}{2}=0$

$\therefore a=-\sqrt{3}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}-1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1=-1$

$\therefore b=-1$

$\therefore ab=(-\sqrt{3})\times(-1)=\sqrt{3}$

25 답 ①

$f(x)=\frac{x+a}{x^2+3}$이므로

$f'(x)=\frac{(x^2+3)-(x+a)\times 2x}{(x^2+3)^2}$

$=\frac{-x^2-2ax+3}{(x^2+3)^2}$

$x=-1$에서 극소값을 가지므로

$f'(-1)=\frac{-1+2a+3}{(1+3)^2}=0$

$\therefore a=-1$

$f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}=\frac{-(x-3)(x+1)}{(x^2+3)^2}$에서

$f'(x)=0$인 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 가지므로

$f(3)=\frac{3-1}{9+3}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

26 답 ②

$f(x)=e^x-2x$라 하면

$f'(x)=e^x-2$

$f'(x)=0$인 $x=\ln 2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=\ln 2$에서 극솟값이면서 최솟값

$f(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2$를 갖는다.

방정식 $e^x-2x=k$가 실근을 가지려면 $k\geq 2-2\ln 2$이어야 한다.

따라서 k의 최솟값은 $2-2\ln 2$이다.

27 답 6

$f(x)=x\sqrt{6-x}$라 놓으면 정의역은 $x\leq 6$

$f'(x)=\sqrt{6-x}+x\times\frac{-1}{2\sqrt{6-x}}$

$=\frac{2(6-x)-x}{2\sqrt{6-x}}$

$=\frac{3(4-x)}{2\sqrt{6-x}}$

$f'(x)=0$인 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	극대	↘	0

$f(x)$는 $x=4$에서 극댓값이면서 최댓값 $f(4)=4\times\sqrt{6-4}=4\sqrt{2}$를 갖는다.

즉, $f(x)=x\sqrt{6-x}\leq 4\sqrt{2}$

따라서 $x\sqrt{6-x}\leq n$을 만족시키는 n은

$n\geq 4\sqrt{2}=5.6\times\times\times$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

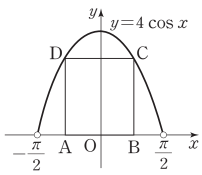
Ⅱ 대단원

28 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 곡선

$y=4\cos x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

와 x축으로 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 $\frac{m}{3}\pi+n\sqrt{3}$이다. 이때, 두 자연수 m, n의 합 $m+n$의 값은?



내접하는 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 식으로 나타내자.

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

1st 직사각형의 둘레의 길이를 식으로 나타내자.

$\overline{\text{OB}}=a$로 놓으면 $0<a<\frac{\pi}{2}$이고 $\overline{\text{BC}}=4\cos a$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $f(a)$라 하면

$f(a)=4(a+2\cos a)$ 직사각형의 둘레의 길이는 $2\times$ {(가로의 길이)+(세로의 길이)}

2nd 함수 $f(a)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 작성하여 최댓값을 구하자.

$f'(a)=4(1-2\sin a)$

$f(a)=0$인 $a=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	극대 $\left(\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}\right)$	↘	

따라서 $f(a)$는 $a=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값이면서 최댓값

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$을 갖는다.

이것은 $\frac{m}{3}\pi+n\sqrt{3}$과 같으므로

$m=2$, $n=4$

$\therefore m+n=6$

29 답 ④

$f(x)=\sin x-x\cos x$이므로

$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$

$f'(x)=0$인 $x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

즉, 구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극댓값이면서 최댓값 $f(\pi)=\sin\pi-\pi\cos\pi=\pi$를 갖는다.

30 답 ⑤

시각 t에서의 위치가 $P(t)=t+\cos\pi t$이므로

$P'(t)=1-\pi\sin\pi t$

$P''(t)=-\pi^2\cos\pi t$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$-\pi^2\cos 3\pi=\pi^2$

31 답 -2

$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ … Ⅰ

$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ … Ⅱ

$\log_2\sin 15^\circ+\log_2\cos 15^\circ$

$=\log_2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$

$=\log_2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

$=\log_2\frac{6-2}{16}=\log_2\frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\sin 15^\circ$를 구한다.	40%
Ⅱ	$\cos 15^\circ$를 구한다.	40%
Ⅲ	$\log_2\sin 15^\circ+\log_2\cos 15^\circ$를 구한다.	20%

32 답 4

시각 t에서의 위치가 $x=a\ln(t+1)$, $y=t^2+2t$이므로

$\frac{dx}{dt}=\frac{a}{t+1}$, $\frac{dy}{dt}=2t+2$ … Ⅰ

$t=1$에서의 속도는 $\left(\frac{a}{2}, 4\right)$이고, $t=1$에서의 속력이 $2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+4^2}=2\sqrt{5}$ … Ⅱ

양변을 제곱하면

$\frac{a^2}{4}+16=20$

$a^2=16$

$\therefore a=4$ $(\because a>0)$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 구한다.	30%
Ⅱ	속력에 대한 식을 구한다.	30%
Ⅲ	양수 a를 구한다.	40%

Ⅲ 적분법

Simple L 여러 가지 함수의 적분법

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 98～99

01 답 $\ln|x|$

02 답 e^x

03 답 $\dfrac{1}{\ln a}$

04 답 $-\cot x$

05 답 ×

$\int x^{\sqrt{2}}dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}x^{\sqrt{2}+1}+C$ (단, C는 적분상수)

06 답 ×

$\int 2^x\,dx=\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$ (단, C는 적분상수)

07 답 ○

08 답 $-\dfrac{1}{x}+C$ (단, C는 적분상수)

$\int \dfrac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}\,dx$

$=\dfrac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=-\dfrac{1}{x}+C$ (단, C는 적분상수)

09 답 $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$ (단, C는 적분상수)

$\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$

$=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$ (단, C는 적분상수)

10 답 $\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$ (단, C는 적분상수)

$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{3}}\,dx$

$=\dfrac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1}+C$

$=\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$ (단, C는 적분상수)

11 답 $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$ (단, C는 적분상수)

$\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$

$=\dfrac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C$

$=\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

$=\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$ (단, C는 적분상수)

12 답 $2\sqrt{x}+C$ (단, C는 적분상수)

$\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$=\dfrac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C$

$=2\sqrt{x}+C$ (단, C는 적분상수)

13 답 $3\sqrt[3]{x}+C$ (단, C는 적분상수)

$\int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

$=\dfrac{1}{-\frac{2}{3}+1}x^{-\frac{2}{3}+1}+C$

$=3\sqrt[3]{x}+C$ (단, C는 적분상수)

14 답 $-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$ (단, C는 적분상수)

$\int \dfrac{1}{x\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx$

$=\dfrac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}+C$

$=-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$ (단, C는 적분상수)

15 답 $e^{x-1}+C$ (단, C는 적분상수)

$\int e^{x-1}\,dx=e^{-1}\int e^x\,dx$

$=e^{x-1}+C$ (단, C는 적분상수)

16 답 $e^{x+1}+C$ (단, C는 적분상수)

$\int (\sqrt{e})^{2x+2}\,dx=\int e^{x+1}\,dx$

$=e\int e^x\,dx$

$=e^{x+1}+C$ (단, C는 적분상수)

17 답 $\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$ (단, C는 적분상수)

$\int 2^{x+1}\,dx=2\int 2^x\,dx$

$=2\times\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$

$=\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$ (단, C는 적분상수)

18 답 $\dfrac{3^{x-1}}{\ln 3}+C$ (단, C는 적분상수)

$\displaystyle\int 3^{x-1}\,dx=\frac{1}{3}\int 3^x\,dx=\frac{1}{3}\times\frac{3^x}{\ln 3}+C$

$=\dfrac{3^{x-1}}{\ln 3}+C$ (단, C는 적분상수)

19 답 $-2\cos x-3\sin x+C$ (단, C는 적분상수)

$\displaystyle\int(2\sin x-3\cos x)dx$

$\displaystyle=2\int\sin x\,dx-3\int\cos x\,dx$

$=-2\cos x-3\sin x+C$ (단, C는 적분상수)

20 답 $\sin x+\tan x+C$ (단, C는 적분상수)

$\displaystyle\int(\cos x+\sec^2 x)dx$

$\displaystyle=\int\cos x\,dx+\int\sec^2 x\,dx$

$=\sin x+\tan x+C$ (단, C는 적분상수)

21 답 $-\cot x+\cos x+C$ (단, C는 적분상수)

$\displaystyle\int(\csc^2 x-\sin x)dx$

$\displaystyle=\int\csc^2 x\,dx-\int\sin x\,dx$

$=-\cot x+\cos x+C$ (단, C는 적분상수)

22 답 $\sin x-\cos x+C$ (단, C는 적분상수)

$\displaystyle\int(\cot x+1)\sin x\,dx$

$\displaystyle=\int(\cos x+\sin x)dx\ \left(\because \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$\displaystyle=\int\cos x\,dx+\int\sin x\,dx$

$=\sin x-\cos x+C$ (단, C는 적분상수)

23 답 $\tan x+C$ (단, C는 적분상수)

$1+\tan^2 x=\sec^2 x$이므로

$\displaystyle\int(1+\tan^2 x)dx=\int\sec^2 x\,dx$

$=\tan x+C$ (단, C는 적분상수)

24 답 $-\cot x+C$ (단, C는 적분상수)

$1+\cot^2 x=\csc^2 x$이므로

$\displaystyle\int(1+\cot^2 x)dx=\int\csc^2 x\,dx$

$=-\cot x+C$ (단, C는 적분상수)

25 답 $\sec x+C$ (단, C는 적분상수)

$\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\tan x\cdot\sec x\,dx$

$=\sec x+C$ (단, C는 적분상수)

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 100~101

26 답 ①

$\displaystyle f(x)=\int(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)dx$

$\displaystyle=\int(x+2\sqrt{x}-3)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{4}{3}x\sqrt{x}-3x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=C=0$이므로

$f(4)=8+\dfrac{32}{3}-12=\dfrac{20}{3}$

TIP

부정적분의 성질

함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속함수일 때

(1) $\displaystyle\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\displaystyle\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(3) $\displaystyle\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

27 답 ③

$\displaystyle F(x)=\int\frac{x^2+2}{x^3}dx=\int\left(\frac{1}{x}+2x^{-3}\right)dx$

$=\ln|x|-\dfrac{1}{x^2}+C$ (단, C는 적분상수)

$F(1)=-1+C=-1\qquad\therefore C=0$

$\therefore F(e)=1-\dfrac{1}{e^2}$

28 답 ③

$\displaystyle f(x)=\int\frac{(x-2)^2}{\sqrt{x}}dx$

$\displaystyle=\int\frac{x^2-4x+4}{\sqrt{x}}dx$

$\displaystyle=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\dfrac{8}{3}x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=C=0$이므로

$f(1)=\dfrac{2}{5}-\dfrac{8}{3}+8=\dfrac{86}{15}$

29 답 ④

$f'(x)=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x-2+\dfrac{1}{x}$이므로

$\displaystyle f(x)=\int\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2-2x+\ln|x|+C$ (단, C는 적분상수)

$f(x)$가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$f(1)=\dfrac{1}{2}-2+C=0\qquad\therefore C=\dfrac{3}{2}$

$f(-1)=\dfrac{1}{2}+2+\dfrac{3}{2}=4$

30 답 ③

$f(x)=\int f'(x)dx=\int e^{x+2}\,dx$

$=e^{x+2}+C$ (단, C는 적분상수)

$f(-2)=e^0+C=2$ $\therefore C=1$

$\therefore f(-1)=e+1$

31 답 ④

$f(x)=\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$

$=\int \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1}dx$

$=\int (e^x-1)dx=e^x-x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=1+C=0$ $\therefore C=-1$

$\therefore f(\ln 2)=e^{\ln 2}-\ln 2-1=1-\ln 2$

32 답 ①

$f(x)g(x)=\int (e^x+1)dx$

$=e^x+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)g(0)=1+C=2$ $\therefore C=1$

$\therefore f(-1)g(-1)=e^{-1}-1+1=\frac{1}{e}$

33 답 ⑤

$f(x)=\int 3^x(3^x+1)dx=\int (3^{2x}+3^x)dx$

$=\int (9^x+3^x)dx$

$=\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{3^x}{\ln 3}+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=\frac{1}{\ln 9}+\frac{1}{\ln 3}+C=\frac{3}{2\ln 3}+C=\frac{1}{\ln 3}$

$\therefore C=-\frac{1}{2\ln 3}$

$\therefore f(1)=\frac{9}{\ln 9}+\frac{3}{\ln 3}-\frac{1}{2\ln 3}=\frac{14}{2\ln 3}=\frac{7}{\ln 3}$

34 답 ①

$f(x)=\int (4^x-2^x)dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 2}+C=-\frac{1}{2\ln 2}+C=\frac{1}{2\ln 2}$

$\therefore C=\frac{1}{\ln 2}$

$\therefore f(1)=\frac{4}{\ln 4}-\frac{2}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$

35 답 ④

$f'(x)=ke^x$이므로

$f(x)=\int ke^x\,dx=ke^x+C$ (단, C는 적분상수)

$f'(0)=k$, $f(0)=k+C$이므로

점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식은

$y=k(x-0)+k+C$

$y=kx+k+C$

이 방정식이 $y=2x+1$과 같아야 하므로 $k=2$, $C=-1$

따라서 $f(x)=2e^x-1$

$\therefore f(1)=2e-1$

36 답 ②

$f(x)=\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$

$=\int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx$ ($\because \sin^2 x+\cos^2 x=1$)

$=\int \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x}dx$

$=\int (1-\cos x)dx$

$=x-\sin x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=C=1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}+1=\frac{\pi}{2}$

37 답 2

$f(x)=\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

$=\int \frac{1+1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$ ($\because \sin^2 x+\cos^2 x=1$)

$=\int (2\sec^2 x-1)dx$ $\left(\because \sec x=\frac{1}{\cos x}\right)$

$=2\tan x-x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(\pi)=-\frac{3}{4}\pi$이므로

$f(\pi)=2\tan\pi-\pi+C=-\pi+C=-\frac{3}{4}\pi$

$\therefore C=\frac{\pi}{4}$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=2$

38 답 ③

$f(x)=\int \frac{1-\sin^2 x}{2\cos x}dx$

$=\int \frac{\cos^2 x}{2\cos x}dx$ ($\because \sin^2 x+\cos^2 x=1$)

$=\frac{1}{2}\int \cos x\,dx$

$=\frac{1}{2}\sin x+C$ (단, C는 적분상수)

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+C=1$ $\therefore C=\frac{1}{2}$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

Ⅲ L

39 답 ②

$f(x)=\int(\sec x+\tan x)\sec x\,dx$

$=\int(\sec^2 x+\sec x\tan x)dx$

$=\tan x+\sec x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=2$이므로

$f(0)=\tan 0+\sec 0+C=1+C=2$

$\therefore C=1$

$\therefore f(\pi)=\tan\pi+\sec\pi+1=0-1+1=0$

40 답 ⑤

$f(x)=\int(\tan x+\cot x)^2 dx$

$=\int(\tan^2 x+2+\cot^2 x)dx \left(\because \cot x=\dfrac{1}{\tan x}\right)$

$=\int\{(1+\tan^2 x)+(1+\cot^2 x)\}dx$

$=\int(\sec^2 x+\csc^2 x)dx$

$(\because 1+\tan^2 x=\sec^2 x,\ 1+\cot^2 x=\csc^2 x)$

$=\tan x-\cot x+C$ (단, C는 적분상수)

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\tan\dfrac{\pi}{6}-\cot\dfrac{\pi}{6}+C$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}+C=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}-\cot\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

41 답 ④

$f'(x)=\tan^2 x$이므로

$f(x)=\int\tan^2 x\,dx$

$=\int(\sec^2 x-1)dx\ (\because 1+\tan^2 x=\sec^2 x)$

$=\tan x-x+C$ (단, C는 적분상수)

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$f(0)=\tan 0-0+C=C=0$

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{\pi}{4}$

Simple M 치환적분법과 부분적분법

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 102~103

01 답 $\dfrac{1}{a}F(ax+b)$

02 답 $\dfrac{1}{a}\ln|ax+b|$

03 답 $f(x)g(x)$

04 답 ×

05 답 ○

06 답 ○

07 답 $\dfrac{1}{4}(x+2)^4+C$ (단, C는 적분상수)

$x+2=t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=1 \Rightarrow dx=dt$이므로

$\int(x+2)^3 dx=\int t^3 dt$

$=\dfrac{1}{4}t^4+C$

$=\dfrac{1}{4}(x+2)^4+C$ (단, C는 적분상수)

08 답 $\dfrac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}+C$ (단, C는 적분상수)

$x-2=t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=1 \Rightarrow dx=dt$이므로

$\int\sqrt{x-2}dx=\int\sqrt{t}\,dt$

$=\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$=\dfrac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}+C$ (단, C는 적분상수)

09 답 $\dfrac{1}{10}(2x-1)^5+C$ (단, C는 적분상수)

$2x-1=t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=2 \Rightarrow dx=\dfrac{1}{2}dt$이므로이므로

$\int(2x-1)^4 dx=\int\dfrac{1}{2}t^4 dt$

$=\dfrac{1}{10}t^5+C$

$=\dfrac{1}{10}(2x-1)^5+C$ (단, C는 적분상수)

10 답 $\dfrac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$ (단, C는 적분상수)

$3x+2=t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=3 \Rightarrow dx=\dfrac{1}{3}dt$이므로이므로

$\int\sqrt{3x+2}dx=\int\dfrac{1}{3}\sqrt{t}\,dt$

$=\dfrac{2}{9}t\sqrt{t}+C$

$=\dfrac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$ (단, C는 적분상수)

11 답 $\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$ (단, C는 적분상수)

$(e^{2x+1})'=2e^{2x+1}$이므로

$\int e^{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$ (단, C는 적분상수)

12 답 $\frac{3^{2x-1}}{2\ln 3}+C$ (단, C는 적분상수)

$(3^{2x-1})'=2\ln 3\cdot 3^{2x-1}$이므로

$\int 3^{2x-1}\,dx=\frac{3^{2x-1}}{2\ln 3}+C$ (단, C는 적분상수)

13 답 $-\frac{1}{5}\cos(5x+2)+C$ (단, C는 적분상수)

$\{\cos(5x+2)\}'=-5\sin(5x+2)$이므로

$\int \sin(5x+2)dx=-\frac{1}{5}\cos(5x+2)+C$ (단, C는 적분상수)

14 답 $\frac{1}{3}\sin(3x-1)+C$ (단, C는 적분상수)

$\{\sin(3x-1)\}'=3\cos(3x-1)$이므로

$\int \cos(3x-1)dx=\frac{1}{3}\sin(3x-1)+C$ (단, C는 적분상수)

15 답 $\ln(x^2+1)+C$ (단, C는 적분상수)

$(x^2+1)'=2x$이므로

$\int \frac{2x}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)+C$ (단, C는 적분상수)

16 답 $\ln(e^x+3)+C$ (단, C는 적분상수)

$(e^x+3)'=e^x$이므로

$\int\frac{e^x}{e^x+3}dx=\int\frac{(e^x+3)'}{e^x+3}dx$

$=\ln(e^x+3)+C$ (단, C는 적분상수)

17 답 $\ln|x+2|+C$ (단, C는 적분상수)

$\int\frac{1}{x+2}dx=\int\frac{(x+2)'}{x+2}dx$

$=\ln|x+2|+C$ (단, C는 적분상수)

18 답 $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$ (단, C는 적분상수)

$\int\frac{1}{2x-1}dx=\int\frac{\left\{\frac{1}{2}(2x-1)\right\}'}{2x-1}dx$

$=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$ (단, C는 적분상수)

19 답 $\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+C$ (단, C는 적분상수)

$\int\frac{x^2-1}{x}dx=\int\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+C$ (단, C는 적분상수)

20 답 $x-2\ln|x+1|+C$ (단, C는 적분상수)

$\int\frac{x-1}{x+1}dx=\int\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx$

$=x-2\ln|x+1|+C$ (단, C는 적분상수)

21 답 $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$ (단, C는 적분상수)

$\int\frac{1}{x(x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\ln|x|-\ln|x+1|+C$

$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$ (단, C는 적분상수)

22 답 (가) : e^x, (나) : $f(x)g'(x)$

$g(x)=e^x$ (가)

$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$ (나)

$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx$ (가)

$=xe^x-e^x+C$ (단, C는 적분상수)

TIP

부분적분법을 이용할 때, $f'(x)$와 $g(x)$인 함수를 정하는게 중요하다. $f'(x)$와 $g(x)$가 정해지면 이것을 이용하여 $f(x)$와 $g'(x)$가 결정되므로 $f'(x)$는 적분하기 쉬운 함수인 e^x, 삼각함수, $g(x)$는 미분하기 쉬운 다항함수, $\ln x$로 놓으면 부분적분법을 이용하기에 좋다.

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 104~107

23 답 ②

$3-2x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=-2 \Rightarrow dx=-\frac{1}{2}\,dt$이므로

$\int(3-2x)^4\,dx=\int t^4\cdot\left(-\frac{1}{2}\,dt\right)$

$=\int\left(-\frac{1}{2}t^4\right)dt$

$=-\frac{1}{10}t^5+C$

$=-\frac{1}{10}(3-2x)^5+C$ (단, C는 적분상수)

$\therefore a=-\frac{1}{10}$

TIP

$\int(ax+b)^n dx$, $\int f(g(x))g'(x)dx$ 꼴일 때 치환적분법을 이용하여 구한다.

Ⅲ M

24 답 ④

$2x^2-1=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=4x \Rightarrow dx=\dfrac{1}{4x}dt$이므로

$$\int x(2x^2-1)^4\,dx=\int xt^4\cdot\left(\frac{1}{4x}dt\right)$$
$$=\int \frac{1}{4}t^4\,dt$$
$$=\frac{1}{20}t^5+C$$
$$=\frac{1}{20}(2x^2-1)^5+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$\therefore k=20$

25 답 ⑤

$(x^2-x+2)'=2x-1$

$x^2-x+2=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=2x-1 \Rightarrow dx=\dfrac{1}{2x-1}dt$이므로

$$f(x)=\int (2x-1)(x^2-x+2)^3\,dx$$
$$=\int (2x-1)t^3\cdot\left(\frac{1}{2x-1}dt\right)$$
$$=\int t^3\,dt$$
$$=\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{4}(x^2-x+2)^4+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(0)=5$이므로

$f(0)=4+C=5 \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(1)=\dfrac{1}{4}\times(1-1+2)^4+1=5$

26 답 -3

$(x^3+3x+1)'=3x^2+3$

$x^3+3x+1=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=3(x^2+1) \Rightarrow dx=\dfrac{1}{3(x^2+1)}dt$이므로

$$f(x)=\int (x^2+1)(x^3+3x+1)^2\,dx$$
$$=\int (x^2+1)t^2\cdot\left\{\frac{1}{3(x^2+1)}dt\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\int t^2\,dt=\frac{1}{9}t^3+C$$
$$=\frac{1}{9}(x^3+3x+1)^3+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(0)=\dfrac{1}{9}$이므로

$f(0)=\dfrac{1}{9}+C=\dfrac{1}{9} \qquad \therefore C=0$

$\therefore f(-1)=\dfrac{1}{9}\times(-1-3+1)^3=-3$

27 답 ⑤

$x^2+1=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=2x \Rightarrow dx=\dfrac{1}{2x}dt$이므로

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int x\sqrt{t}\cdot\left(\frac{1}{2x}dt\right)$$
$$=\int \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

즉, $n=\dfrac{3}{2}$, $a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore n-a=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{6}$

28 답 ③

$x^2+2x+10=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=2(x+1) \Rightarrow dx=\dfrac{1}{2(x+1)}dt$이므로

$$f(x)=\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$$
$$=\int \frac{x+1}{\sqrt{t}}\cdot\left\{\frac{1}{2(x+1)}dt\right\}$$
$$=\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$
$$=\sqrt{t}+C$$
$$=\sqrt{x^2+2x+10}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(-1)=3$이므로

$f(-1)=3+C=3 \qquad \therefore C=0$

$\therefore f(3)=\sqrt{9+6+10}=\sqrt{25}=5$

29 답 ③

$x^3+1=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=3x^2 \Rightarrow dx=\dfrac{1}{3x^2}dt$이므로

$$f(x)=\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$$
$$=\int \frac{x^2}{\sqrt{t}}\cdot\left(\frac{1}{3x^2}dt\right)$$
$$=\int \frac{1}{3\sqrt{t}}dt$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(0)=\dfrac{1}{3}$이므로

$f(0)=\dfrac{2}{3}+C=\dfrac{1}{3} \qquad \therefore C=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore f(2)=\dfrac{2}{3}\times 3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$

30 답 ③

$x^2=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}dt$이므로

$$f(x)=\int xe^{x^2}\,dx$$
$$=\int xe^{t}\cdot\left(\frac{1}{2x}dt\right)$$
$$=\int \frac{1}{2}e^{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}e^{t}+C$$
$$=\frac{1}{2}e^{x^2}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=0$이므로

$f(0)=\frac{1}{2}+C=0 \quad \therefore C=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(1)=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e-1)$

31 답 ④

$e^x+1=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=e^x \Rightarrow dx=\frac{1}{e^x}dt$이므로

$$f(x)=\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$$
$$=\int e^x\sqrt{t}\cdot\left(\frac{1}{e^x}dt\right)$$
$$=\int \sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(\ln 3)=\frac{10}{3}$이므로

$f(\ln 3)=\frac{16}{3}+C=\frac{10}{3}$ ($\because a^{\log_a b}=b$ ⋯ ㉠) $\quad \therefore C=-2$

$\therefore f(3\ln 2)=f(\ln 8)=\frac{2}{3}(e^{\ln 8}+1)^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{2}{3}\times(8+1)^{\frac{3}{2}}-2$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{2}{3}\times 27-2=16$

32 답 ①

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$이므로

$f(x)=\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

$e^x+1=t$로 치환하면 $e^x=t-1$ ⋯ ㉠이고

$\frac{dt}{dx}=e^x \Rightarrow dx=\frac{1}{e^x}dt$이므로

$$f(x)=\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$$
$$=\int \frac{e^{2x}}{t}\cdot\left(\frac{1}{e^x}dt\right)$$
$$=\int \frac{e^x}{t}dt$$
$$=\int \frac{t-1}{t}dt \ (\because ㉠)$$
$$=\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=t-\ln|t|+C$$
$$=e^x+1-\ln(e^x+1)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=1-\ln 2$이므로

$f(0)=2-\ln 2+C=1-\ln 2 \quad \therefore C=-1$

$\therefore f(\ln 2)=e^{\ln 2}+1-\ln(e^{\ln 2}+1)-1$

$=2+1-\ln(2+1)-1$ ($\because a^{\log_a b}=b$)

$=2-\ln 3$

33 답 ③

$\ln x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=x\,dt$이므로

$$f(x)=\int \frac{\ln x}{x}dx$$
$$=\int \frac{t}{x}\cdot(x\,dt)$$
$$=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(1)=1$이므로

$f(1)=C=1$

$\therefore f(e^2)=\frac{1}{2}(\ln e^2)^2+1$

$=\frac{1}{2}\times 2^2+1=3$

34 답 ③

$\ln x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=x\,dt$이므로

$$f(x)=\int \frac{1}{x\ln x}dx$$
$$=\int \frac{1}{xt}\cdot(x\,dt)$$
$$=\int \frac{1}{t}dt$$
$$=\ln|t|+C$$
$$=\ln|\ln x|+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(e, 0)$을 지나므로

$f(e)=\ln|\ln e|+C=\ln 1+C=C=0$이므로

$f(e^e)=\ln|\ln e^e|=\ln e=1$

Ⅲ M

35 답 ④

$xf'(x)=(\ln x)^2$에서 $f'(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$이므로

$f(x)=\displaystyle\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx$

$\ln x=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x} \Rightarrow dx=x\,dt$이므로

$$f(x)=\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int\frac{t^2}{x}\cdot(x\,dt)$$
$$=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{3}(\ln x)^3+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(1)=C=\dfrac{4}{3}$이므로

$f(e^2)=\dfrac{8}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{12}{3}=4$

36 답 ②

$\sin x=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\dfrac{1}{\cos x}dt$이므로

$$f(x)=\int\sin^2 x\cos x\,dx=\int t^2\cos x\cdot\left(\frac{1}{\cos x}dt\right)$$
$$=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{3}\sin^3 x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=C=\dfrac{1}{3}$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{3}\sin^3\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

37 답 ③

$1-\sin x=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=-\cos x \Rightarrow dx=-\dfrac{1}{\cos x}dt$이므로

$$f(x)=\int(1-\sin x)^3\cos x\,dx=\int t^3\cos x\cdot\left(-\frac{1}{\cos x}dt\right)$$
$$=\int(-t^3)dt=-\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=-\frac{1}{4}(1-\sin x)^4+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}\left(1-\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^4+C=\dfrac{1}{4}$

$\therefore C=\dfrac{1}{4}$

$$\therefore f(0)=-\frac{1}{4}(1-\sin 0)^4+\frac{1}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$$

38 답 ③

$\cos^3 x=\cos^2 x\cos x=(1-\sin^2 x)\cos x$

$\sin x=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\dfrac{1}{\cos x}dt$이므로

$$f(x)=\int\cos^3 x\,dx$$
$$=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$=\int(1-t^2)\cos x\cdot\left(\frac{1}{\cos x}dt\right)$$
$$=\int(1-t^2)dt$$
$$=-\frac{1}{3}t^3+t+C$$
$$=-\frac{1}{3}\sin^3 x+\sin x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$을 지나므로

$f(0)=-\dfrac{1}{3}\sin^3 0+\sin 0+C=\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore C=\dfrac{1}{3}$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$$
$$=-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}=1$$

39 답 ⑤

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가

$\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$이므로 $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

$\therefore f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

$(x^2+x+1)'=2x+1$이므로

$$f(x)=\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$
$$=\int\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx$$
$$=\ln(x^2+x+1)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이 곡선의 원점을 지나므로 $f(0)=C=0$

$\therefore f(1)=\ln(1+1+1)=\ln 3$

40 답 ④

$(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$=\ln(e^x+e^{-x})+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=2\ln 2$이므로

$f(0)=\ln 2+C=2\ln 2$ $\quad\therefore C=\ln 2$

$$\therefore f(\ln 2)=\ln\left(2+\frac{1}{2}\right)+\ln 2=\ln\frac{5}{2}+\ln 2$$
$$=\ln\left(\frac{5}{2}\times 2\right)=\ln 5$$

41 답 ④

$(2-\cos x)'=\sin x$이므로

$$f(x)=\int\frac{\sin x}{2-\cos x}dx$$
$$=\int\frac{(2-\cos x)'}{2-\cos x}dx$$
$$=\ln|2-\cos x|+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=\ln 2$이므로

$f(0)=\ln|2-\cos 0|+C=C=\ln 2$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\ln\left|2-\cos\frac{\pi}{3}\right|+\ln 2$$
$$=\ln\left(2-\frac{1}{2}\right)+\ln 2=\frac{3}{2}+\ln 2$$
$$=\ln\left(\frac{3}{2}\times 2\right)=\ln 3$$

42 답 ③

$$\int\frac{x^2}{x-1}dx=\int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C$$
$$=ax^2+bx+c\ln|x-1|+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

즉, $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=1$

$$\therefore a+b+c=\frac{1}{2}+1+1=\frac{5}{2}$$

43 답 ⑤

$$f(x)=\int\frac{1}{x^2+2x}dx=\int\frac{1}{x(x+2)}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx \quad \left(\because \frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

44 답 ②

$$f(x)=\int\frac{x^3+2x}{x^2+x+1}dx=\int\left(x-1+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx$$
$$=\int(x-1)dx+\int\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x^2+x+1)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=C=0$

$$\therefore f(2)=\frac{1}{2}\times 2^2-2+\ln(2^2+2+1)=\ln 7$$

45 답 ④

$u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$f(x)=\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx$$
$$=xe^x-e^x+C$$
$$=(x-1)e^x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(1)=C=e^2$이므로 $f(2)=e^2+e^2=2e^2$

46 답 ④

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$f(x)=\int\ln x\,dx$$
$$=x\ln x-\int 1dx$$
$$=x\ln x-x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(1)=-1$이므로

$f(1)=-1+C=-1 \qquad \therefore C=0$

$\therefore f(e^2)=e^2\ln e^2-e^2=2e^2-e^2=e^2$

47 답 ④

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$$f(x)=\int x\cos x\,dx$$
$$=x\sin x-\int\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$f(0)=1+C=1 \qquad \therefore C=0$

$\therefore f(\pi)=\pi\sin\pi+\cos\pi=-1$

48 답 ③

$$f(x)=\int x^2e^xdx$$

$u(x)=x^2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면
$u'(x)=2x$, $v(x)=e^x$

$$=x^2e^x-2\int xe^xdx$$

$g(x)=x$, $h'(x)=e^x$으로 놓으면
$g'(x)=1$, $h(x)=e^x$

$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)$$
$$=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C$$
$$=(x^2-2x+2)e^x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$\therefore f(2)-f(1)$

$=\{(2^2-2\times2+2)e^2+C\}-\{(1^2-2\times1+2)e+C\}$

$=2e^2-e$

심플 정리

[부분적분법]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$$

Ⅲ

M

연습 문제[L~M] [기출+기출 변형]

문제편 pp. 108~109

01 답 ②

$$f(x)=\int\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx$$
$$=\int\frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx$$
$$=\int\left(\sqrt{x}+2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(1)=-\frac{2}{3}$이므로

$f(1)=\frac{2}{3}+2+2+C=-\frac{2}{3}$ $\therefore C=-\frac{16}{3}$

$\therefore f(4)=\frac{16}{3}+8+4-\frac{16}{3}=12$

02 답 ③

도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & (x<-1)\\ 3x^2+1 & (x>-1)\end{cases}$$

이므로

$$f(x)=\begin{cases}\int\frac{1}{x^2}dx & (x<-1)\\ \int(3x^2+1)dx & (x<-1)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-\frac{1}{x}+C_1 & (x<-1)\\ x^3+x+C_2 & (x>-1)\end{cases} \text{ (단, } C_1, C_2\text{는 적분상수)}$$

$f(-2)=\frac{1}{2}$이므로

$f(-2)=\frac{1}{2}+C_1=\frac{1}{2}$이므로 $C_1=0$

$\lim_{x\to-1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=-2+C_2$이고,

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)$

$1=-2+C_2$에서 $C_2=3$

$\therefore f(0)=3$

03 답 ③

$$f(x)=\int(e^{2x}+2e^{-x})dx$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^{-x}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=\frac{1}{2}-2+C=1$ $\therefore C=\frac{5}{2}$

$$\therefore f(\ln 2)=\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-2e^{-\ln 2}+\frac{5}{2}$$
$$=\frac{1}{2}e^{\ln 4}-2e^{\ln\frac{1}{2}}+\frac{5}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\times4-2\times\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\ (\because\ a^{\log_a b}=b)=\frac{7}{2}$$

04 답 ④

$y=\ln x-1$에서 $y+1=\ln x$이므로

$x=e^{y+1}$

$\therefore f^{-1}(x)=e^{x+1}$

$g(x)=\int f^{-1}(x)dx=\int e^{x+1}dx=e^{x+1}+C$ (단, C는 적분상수)

$g(-1)=2$이므로

$g(-1)=1+C=2$ $\therefore C=1$

$\therefore g(0)=e+1$

05 답 ⑤

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\sin x$이므로

$f(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x+C$ (단, C는 적분상수)

$\therefore f(\pi)-f(0)=(-\cos\pi+C)-(-\cos 0+C)=2$

06 답 ③

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $2\cos x+e^x$이므로

$f'(x)=2\cos x+e^x$

$$\therefore f(x)=\int(2\cos x+e^x)dx$$
$$=2\sin x+e^x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$f(0)=2\sin 0+e^0+C=1+C=0$ $\therefore C=-1$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}+e^{\frac{\pi}{2}}-1=2+e^{\frac{\pi}{2}}-1=e^{\frac{\pi}{2}}+1$

07 답 ②

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2\cos x+1$이므로

$$f(x)+g(x)=\int(2\cos x+1)dx$$
$$=2\sin x+x+C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수)}$$

$f(0)+g(0)=1-1=0=C_1$

$\therefore f(x)+g(x)=2\sin x+x$ … ㉠

또, $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=-2\sin x+1$이므로

$$f(x)-g(x)=\int(-2\sin x+1)dx$$
$$=2\cos x+x+C_2 \text{ (단, } C_2\text{는 적분상수)}$$

$f(0)-g(0)=1-(-1)=2=2+C_2$

$\therefore C_2=0$

$\therefore f(x)-g(x)=2\cos x+x$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$f(x)=\sin x+\cos x+x$, $g(x)=\sin x-\cos x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)\times g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\times1=\frac{\pi}{2}+1$

08 답 ③

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\frac{1}{1+\sin x}$이고 $f(0)=1$일 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은? 삼각함수의 부정적분 공식을 바로 적용하지 못하는 경우에는 식을 변형해야 해.

① $\sqrt{3}-2$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\sqrt{3}$
④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{3}+2$

1st 분자, 분모에 모두 $1-\sin x$를 곱하여 식을 변형하자.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sin x}&=\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\\&=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\ (\because \sin^2 x+\cos^2 x=1)\\&=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\\&=\sec^2 x-\sec x\tan x\end{aligned}$$

2nd 삼각함수의 적분공식을 이용한 후, 주어진 조건을 사용하여 적분상수를 구하자.

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx\\&=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)dx\\&=\tan x-\sec x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

C가 적분상수일 때, $\int\sec^2 x\,dx=\tan x+C$, $\int\sec x\tan x\,dx=\sec+C$

$f(0)=-1+C=1 \qquad \therefore C=2$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}-\sec\frac{\pi}{3}+2=\sqrt{3}-2+2=\sqrt{3}$$

09 답 ③

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수가

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x+k & (x<\pi)\\ \cos^2 x\sin x & (x>\pi)\end{cases}$$

구간이 나누어진 경우에는 각 구간에서의 부정적분을 구하고, 연속인 조건을 이용하여 k의 값을 구해야 해.

이고, $f(0)=f(2\pi)=0$일 때, 상수 $k\pi$의 값은? (단, k는 상수)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

1st 구간을 나누어 부정적분을 각각 구하자. 복잡한 삼각함수의 경우에는 치환적분법을 이용하자.

(i) $x<\pi$일 때

$$\int(\cos x+k)dx=\sin x+kx+C_1\ (C_1\text{은 적분상수})$$

$f(0)=C_1=0$

(ii) $x>\pi$일 때

$\cos x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=-\sin x \Rightarrow dx=-\frac{1}{\sin x}dt$이므로

$$\begin{aligned}\int\cos^2 x\sin x\,dx&=\int t^2\sin x\cdot\left(-\frac{1}{\sin x}dt\right)\\&=\int -t^2dt\\&=-\frac{1}{3}t^3+C_2\\&=-\frac{1}{3}\cos^3 x+C_2\ (\text{단, } C_2\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

$f(2\pi)=-\frac{1}{3}+C_2=0$

$\therefore C_2=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+kx & (x<\pi)\\ -\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{3} & (x>\pi)\end{cases}$$

2nd 함수가 연속인 조건을 이용하여 k의 값을 구하자.

이때, 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 연속이므로

$\lim_{x\to\pi-}f(x)=\lim_{x\to\pi+}f(x)$ 함수가 $x=a$에서 연속이려면 좌극한과 우극한이 같아야 해.

$\lim_{x\to\pi-}(\sin x+kx)=\lim_{x\to\pi+}\left(-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{3}\right)$

$\sin\pi+k\pi=-\frac{1}{3}\cos^3\pi+\frac{1}{3}$

$0+k\pi=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

$\therefore k\pi=\frac{2}{3}$

10 답 2

$\ln x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=x\,dt$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{\sin(\ln x)}{x}dx\\&=\int\frac{\sin t}{x}\cdot(x\,dt)\\&=\int\sin t\,dt\\&=-\cos t+C\\&=-\cos(\ln x)+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

$f(1)=-1+C=0 \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(e^\pi)=1+1=2$

심플 정리

[함수의 연속]

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되기 위한 조건은 다음과 같다.
(i) $x=a$에서 $f(x)$가 존재한다.
(ii) $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재한다.
(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

Ⅲ L~M 연습

11 답 ②

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x\neq0$인 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

좌변에서 $f(x)=t$로 치환하면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로 치환적분법을 이용해서 구할 수 있어.

(나) $f(0)=0$

이때, $\{f(1)\}^3$의 값은?

① $2\ln 2$ ② $3\ln 2$ ③ $1+2\ln 2$
④ $4\ln 2$ ⑤ $1+3\ln 2$

1st $\{f(x)\}^2f'(x)$가 주어졌지? 치환적분법이 생각나지?

조건 (가)에서

$$\{f(x)\}^2f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

양변을 x에 대하여 적분하면

$$\int\{f(x)\}^2f'(x)dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

먼저 $\int\{f(x)\}^2f'(x)dx$부터 정리하자.

$f(x)=t$로 치환하면

$f'(x)=\frac{dt}{dx}\Rightarrow dx=\frac{1}{f'(x)}dt$이므로

$$\int\{f(x)\}^2f'(x)dx$$
$$=\int t^2f'(x)\cdot\left(\frac{1}{f'(x)}dt\right)$$
$$=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C_1$$
$$=\frac{1}{3}\{f(x)\}^3+C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수)} \cdots ㉠$$

또, $\int\frac{2x}{x^2+1}dx$를 구하자.

$$\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$$
$$=\ln(x^2+1)+C_2 \text{ (단, } C_2\text{는 적분상수)} \cdots ㉡$$

㉠$=$㉡이므로

$$\frac{1}{3}\{f(x)\}^3+C_1=\ln(x^2+1)+C_2$$

$\therefore\ \{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)+C$ (단, C는 적분상수) $\cdots$ ㉢

C_1, C_2가 모두 상수이므로 $3(C_2-C_1)$의 값은 하나의 상수 C로 나타낼 수 있어.

2nd 나머지 주어진 조건을 사용하여 적분상수를 구해야 해.

조건 (나)에서 $f(0)=0$이므로 ㉢에 $x=0$을 대입하면

$\{f(0)\}^3=3\ln 1+C=0$ $\quad\therefore C=0$

㉢에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)\}^3=3\ln 2$

TIP

㉠과 ㉡에서 적분상수를 각각 C_1, C_2로 나타내지 않고 똑같이 C로 나타내면 안 된다. 각각의 부정적분에 따라 적분상수를 다르게 잡아야한다.

12 답 ③

$e^x-1=t$로 치환하면 $e^x=t+1$이고

$\frac{dt}{dx}=e^x=t+1\Rightarrow dx=\frac{1}{t+1}dt$이므로

$$f(x)=\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx$$
$$=\int\frac{t+2}{t}\cdot\left(\frac{1}{t+1}dt\right)$$
$$=\int\frac{t+2}{t(t+1)}dt$$
$$=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=2\ln|t|-\ln|t+1|+C$$
$$=2\ln|e^x-1|-x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(\ln 2)=\ln\frac{3}{2}$이므로

$f(\ln 2)=-\ln 2+C=\ln\frac{3}{2}$ $\quad\therefore C=\ln 3$

$\therefore f(\ln 3)=2\ln 2$

13 답 ②

$$f(x)=\int(\ln x)^2\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-2\left(x\ln x-\int 1\,dx\right)$$
$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$u(x)=(\ln x)^2$, $v'(x)=1$이면
$u'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $v(x)=x$

$g(x)=\ln x$, $h'(x)=1$이면
$g'(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=x$

$f(e)=e-2e+2e+C=e$ $\quad\therefore C=0$

$\therefore f(1)=2$

14 답 ③

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

조건 (가)에서

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=h(x)$

$\{f(x)g(x)\}'=h(x)$

$\therefore f(x)g(x)=\int h(x)dx$

$f(x)=x$, $h(x)=\ln x$를 대입하면

$$xg(x)=\int\ln x\,dx$$
$$=x\ln x-x+C$$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$이면
$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

(단, C는 적분상수)

위의 식에 $x=1$을 대입하면

$1\times g(1)=-1+C=-1$ ($\because$ 조건 (나))

$\therefore C=0$

즉, $xg(x)=x\ln x-x=x(\ln x-1)$에서

$g(x)=\ln x-1$

$\therefore g(e)=1-1=0$

15 답 ③

함수 $f(x)=\int e^x \sin x\,dx$에 대하여 $f(0)=\frac{1}{2}$일 때, $f(\pi)$의 값은?

부분적분법을 한 번 했는데도 해결되지 않는 경우 한 번 더 부분적분법을 적용해보자.

① $\frac{1}{2}e^\pi-1$ ② $\frac{1}{2}e^\pi$ ③ $\frac{1}{2}e^\pi+1$
④ $e^\pi-1$ ⑤ $e^\pi+1$

1st 부분적분을 두 번하여 반복되는 모습을 찾아야 해.

$\int e^x \sin x\,dx$

$u(x)=\sin x,\ v'(x)=e^x$이면 $u'(x)=\cos x,\ v(x)=e^x$

$=e^x\sin x-\int e^x \cos x\,dx$

$f(x)=\cos x,\ g'(x)=e^x$이면 $f'(x)=-\sin x,\ g(x)=e^x$

$=e^x\sin x-\left\{e^x\cos x-\int(-e^x\sin x)dx\right\}$

$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx$

처음에 구하고자 했던 모습과 같은 모습이 반복되어 나타났지?

2nd 반복된 모습이 나타난 항을 이항한 후 식을 정리하여 함수를 구해야 해.

$2\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-e^x\cos x+C_1$

$\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

(단, C는 $C=\frac{1}{2}C_1$인 적분상수)

$f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $f(0)=-\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore C=1$

$\therefore f(\pi)=\frac{1}{2}e^\pi+1$

16 답 -1

함수 $f(x)$의 부정적분이 $F(x)$이므로 $F'(x)=f(x)$

$F(x)=xf(x)+x\sin x+\cos x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)+\sin x+x\cos x-\sin x$

$f(x)=f(x)+xf'(x)+x\cos x$

$xf'(x)=-x\cos x$

$\therefore f'(x)=-\cos x\ (x\neq0)$ ⋯ Ⅰ

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-\cos x)\,dx=-\sin x+C$

(단 $x\neq0$, C는 적분상수) ⋯ Ⅱ

함수 $f(x)$가 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=C=0$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$ ⋯ Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	양변을 x에 대하여 미분하여 도함수 $f'(x)$를 구한다.	40%
Ⅱ	부정적분을 이용하여 $f(x)$를 구한다.	30%
Ⅲ	미분가능하면 연속이라는 조건을 이용하여 적분상수 C를 구한 후 함숫값을 구한다.	30%

Simple N 정적분의 치환적분법과 부분적분법

[개념 CHECK+연산 연습] pp. 110～111

01 답 $F(b)$, $F(a)$

02 답 b, a, $f(t)$

03 답 $f(x)g(x)$, $f'(x)g(x)$

04 답 ○

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy=\int_a^b f(t)dt=\cdots$

05 답 ×

$y=x^3$은 기함수이고 $y=x^2$은 우함수이므로

$\int_{-1}^1(x^3+2x^2)dx=\int_{-1}^1 x^3\,dx+\int_{-1}^1 2x^2\,dx$

$=0+2\int_0^1 2x^2\,dx$

$=4\int_0^1 x^2\,dx$

06 답 ○

함수 $y=\sin x$는 원점에 대하여 대칭인 함수, 즉 기함수이므로

$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx=0$

07 답 $\frac{1}{2}$

$\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

08 답 1

$\int_1^e\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_1^e=1-0=1$

09 답 $\frac{5}{3}$

$\int_1^3(\sqrt{x}-1)dx+\int_3^4(\sqrt{y}-1)dy$

$=\int_1^3(\sqrt{x}-1)dx+\int_3^4(\sqrt{x}-1)dx$

$=\int_1^4(\sqrt{x}-1)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x\right]_1^4$

$=\left(\frac{16}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)=\frac{5}{3}$

10 답 1

$\int_0^{\ln 2}e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^{\ln 2}$

$=e^{\ln 2}-e^0=2-1=1$

Ⅲ N

11 답 $\dfrac{1}{\ln 2}$

$\displaystyle\int_0^1 2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1=\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$

12 답 $\dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}(e^x+e^{-x})dx&=\left[e^x-e^{-x}\right]_0^{\ln 2}\\&=(e^{\ln 2}-e^{-\ln 2})-(e^0-e^{-0})\\&=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

13 답 1

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0-(-1)=1$

14 답 1

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx=\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-0=1$

15 답 5

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x+3\cos x)dx\\&=\left[-2\cos x+3\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\left(-2\cos\frac{\pi}{2}+3\sin\frac{\pi}{2}\right)-(-2\cos 0+3\sin 0)\\&=3-(-2)=5\end{aligned}$$

16 답 $\dfrac{38}{3}$

$2+x=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=1 \Rightarrow dx=dt$이고

$x=2$일 때 $t=4$, $x=7$일 때 $t=9$이므로

$$\begin{aligned}\int_2^7\sqrt{2+x}\,dx&=\int_4^9\sqrt{t}\,dt\\&=\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_4^9\\&=18-\frac{16}{3}=\frac{38}{3}\end{aligned}$$

17 답 $\dfrac{1}{2}$

$x^2+1=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=2x \Rightarrow dx=\dfrac{1}{2x}\,dt$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx&=\int_1^2\frac{1}{t^2}\,dt\\&=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2\\&=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

18 답 $\dfrac{1}{2}e-\dfrac{1}{2}$

$x^2=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=2x \Rightarrow dx=\dfrac{1}{2x}\,dt$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{x^2}dx&=\int_0^1\frac{1}{2}e^t\,dt\\&=\left[\frac{1}{2}e^t\right]_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

19 답 $\dfrac{1}{2}$

$\ln x=t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x} \Rightarrow dx=x\,dt$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx&=\int_0^1 tdt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

20 답 $\dfrac{1}{2}$

$\sin x=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\dfrac{1}{\cos x}\,dt$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx&=\int_0^1 t\,dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

21 답 1

$f(x)=x$, $g'(x)=e^x$이라 하면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\,dx&=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx\\&=\left[(x-1)e^x\right]_0^1=0-(-1)=1\end{aligned}$$

22 답 e^2+1

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2}\ln x\,dx&=\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx\\&=\left[x\ln x-x\right]_1^{e^2}\\&=(2e^2-e^2)-(0-1)\\&=e^2+1\end{aligned}$$

23 답 1

$f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$라 하면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx&=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\&=\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=(0+1)-(0+0)=1\end{aligned}$$

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 112~117

24 답 ①

$$\int_0^1 (x-1)\sqrt{x}\,dx=\int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{5}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{15}$$

25 답 ③

$$\int_1^4 (\sqrt{x}+1)^2\,dx+\int_4^1 (\sqrt{x}-1)^2\,dx$$
$$=\int_1^4 (\sqrt{x}+1)^2\,dx-\int_1^4 (\sqrt{x}-1)^2\,dx$$
$$=\int_1^4 \{(\sqrt{x}+1)^2-(\sqrt{x}-1)^2\}dx$$
$$=\int_1^4 4\sqrt{x}\,dx$$
$$=\left[\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}$$

26 답 ④

$$\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\,dx=\int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x}\,dx$$
$$=\int_1^2 \left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x+\ln|x|\right]_1^2$$
$$=(2+4+\ln 2)-\left(\frac{1}{2}+2\right)$$
$$=\frac{7}{2}+\ln 2$$

$\therefore a=\frac{7}{2},\ b=1$

$\therefore a+b=\frac{7}{2}+1=\frac{9}{2}$

27 답 ②

$$\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx=\int_3^4 \frac{1}{(x-2)(x-1)}\,dx$$
$$=\int_3^4 \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$\left(\because \frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\right)$$
$$=\Big[\ln|x-2|-\ln|x-1|\Big]_3^4$$
$$=\left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right]_3^4$$
$$=\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{4}{3}$$

$\therefore a=\frac{4}{3}$

28 답 ③

$$\int_0^{\ln 2} e^{-x+2}\,dx=e^2\int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx$$
$$=-e^2\Big[e^{-x}\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=-e^2\times\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}e^2$$

29 답 ②

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx-\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)\,dx$$
$$=\Big[e^x-x\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=(e^{\ln 2}-\ln 2)-(e^0-0)=1-\ln 2$$

30 답 ④

$$\int_0^1 (2^x-1)(4^x+2^x+1)dx$$
$$=\int_0^1 (2^x-1)\{(2^x)^2+2^x+1\}dx$$
$$=\int_0^1 (8^x-1)\,dx\ (\because (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3)$$
$$=\left[\frac{8^x}{\ln 8}-x\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{8}{\ln 8}-1\right)-\frac{1}{\ln 8}=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{\ln 2}-1$$

이것이 $\frac{a}{\ln 2}+b$와 같아야 하므로 $a=\frac{7}{3},\ b=-1$

$\therefore a-b=\frac{7}{3}-(-1)=\frac{10}{3}$

31 답 ⑤

$$\int_0^1 (3^x+1)^2\,dx-\int_1^0 (3^x-1)^2\,dx$$
$$=\int_0^1 (3^x+1)^2\,dx+\int_0^1 (3^x-1)^2\,dx$$
$$\left(\because \int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx\right)$$
$$=\int_0^1 \{(3^x+1)^2+(3^x-1)^2\}dx$$
$$=\int_0^1 (2\cdot 9^x+2)dx$$
$$=\left[\frac{2\cdot 9^x}{\ln 9}+2x\right]_0^1=\left(\frac{18}{\ln 9}+2\right)-\frac{2}{\ln 9}$$
$$=\frac{16}{2\ln 3}+2=\frac{8}{\ln 3}+2$$

이것이 $\frac{a}{\ln 3}+b$와 같아야 하므로

$a=8,\ b=2$

$\therefore a+b=10$

Ⅲ N

32 답 ④

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}dx \ (\because \sin^2 x+\cos^2 x=1)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\sin x)dx$$
$$=\Big[x-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}$$

33 답 ②

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x-\cot^2 x)dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x-1-\csc^2 x+1)dx$$
$$(\because 1+\tan^2 x=\sec^2 x,\ 1+\cot^2 x=\csc^2 x)$$
$$=\Big[\tan x+\cot x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=(1+1)-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\right)=2-\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

34 답 ①

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0+1)$$
$$=\sqrt{2}-1$$

35 답 ②

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{1-\sin^2 x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sec^2 x\,dx$$
$$=\Big[2\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=2-0=2$$

심플 정리

[삼각함수 사이의 관계]

(1) $\csc x=\frac{1}{\sin x}$ (2) $\sec x=\frac{1}{\cos x}$

(3) $\cot x=\frac{1}{\tan x}$ (4) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

(5) $1+\tan^2 x=\sec^2 x$ (6) $1+\cot^2 x=\csc^2 x$

36 답 ①

$0\le x\le 1$에서 $\sqrt{x}-1\le 0$이고

$1<x\le 4$에서 $\sqrt{x}-1>0$이므로

$$\int_0^4 |\sqrt{x}-1|dx$$
$$=\int_0^1 (1-\sqrt{x})dx+\int_1^4 (\sqrt{x}-1)dx$$
$$=\Big[x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1+\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\Big]_1^4$$
$$=\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{16}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)=2$$

37 답 ③

$-2\le x\le 0$에서 $e^x-1\le 0$이고

$0<x\le 2$에서 $e^x-1>0$이므로

$$\int_{-2}^2 |e^x-1|dx$$
$$=\int_{-2}^0 (1-e^x)dx+\int_0^2 (e^x-1)dx$$
$$=\Big[x-e^x\Big]_{-2}^0+\Big[e^x-x\Big]_0^2$$
$$=(0-1)-(-2-e^{-2})+(e^2-2)-(1-0)$$
$$=e^2+\frac{1}{e^2}-2$$

38 답 ④

$0\le x\le \frac{\pi}{2}$에서 $\cos x\ge 0$이고

$\frac{\pi}{2}<x\le \pi$에서 $\cos x<0$이므로

$$\int_0^{\pi} |\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=1-(-1)=2$$

39 답 ①

$0\le x\le \frac{\pi}{2}$에서 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$이면 $x=\frac{\pi}{4}$

$0\le x\le \frac{\pi}{4}$에서 $\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0$이고

$\frac{\pi}{4}<x\le \frac{\pi}{2}$에서 $\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx$$
$$=\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\right)$$
$$=\sqrt{2}-1$$

40 답 ⑤

함수 $f(x)=\begin{cases} e^x & (x\le 0) \\ \sqrt{x}+1 & (x>0)\end{cases}$이므로

$$\int_{\ln\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx=\int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} e^x\,dx+\int_0^1(\sqrt{x}+1)dx$$
$$=\Big[e^x\Big]_{\ln\frac{1}{2}}^{0}+\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\Big]_0^1$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+1=\frac{13}{6}$$

41 답 ②

함수 $f(x)=\begin{cases} 2\cos x & \left(x\le\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin x-1 & \left(x>\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2}{3}\pi} f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}(\sin x-1)dx$$
$$=\Big[2\sin x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\cos x-x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=2-1+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\pi\right)-\left(0-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\pi$$

이것이 $a+b\pi$와 같으므로

$a=\frac{3}{2},\ b=-\frac{1}{6}$

$\therefore\ 4ab=4\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{6}\right)=-1$

42 답 4

함수 $f(x)=\begin{cases} \sin\pi x+1 & (x\le 1) \\ \frac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$이므로

$$\int_0^e f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^e f(x)dx$$
$$=\int_0^1(\sin\pi x+1)dx+\int_1^e\frac{1}{x}dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x+x\Big]_0^1+\Big[\ln|x|\Big]_1^e$$
$$=\left(\frac{1}{\pi}+1\right)-\left(-\frac{1}{\pi}+0\right)+(1-0)$$
$$=2+\frac{2}{\pi}$$

이것이 $a+\frac{b}{\pi}$와 같으므로 $a=2,\ b=2$

$\therefore\ a+b=4$

43 답 1

$\cos x$는 우함수이고, $\tan x$는 기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos x+\tan x)dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\tan x\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx+0$$
$$=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=2\times\frac{1}{2}=1$$

TIP

위끝과 아래끝의 절댓값이 같고 부호가 다를 때, 피적분함수를 우함수, 기함수로 나누어 생각한다.
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-a, a]$에서 연속일 때
① $f(x)$가 우함수
$\Longleftrightarrow f(-x)=f(x)$
$\Longleftrightarrow \int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$
② $f(x)$가 기함수
$\Longleftrightarrow f(-x)=-f(x)$
$\Longleftrightarrow \int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

44 답 ②

$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$라 하면

$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore\ \int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=2\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$
$$=\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1$$
$$=e-\frac{1}{e}$$

45 답 ③

$$\int_{-2}^{1}(2^x-2^{-x})dx-\int_2^1(2^x-2^{-x})dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(2^x-2^{-x})dx+\int_1^2(2^x-2^{-x})dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(2^x-2^{-x})dx$$

$f(x)=2^x-2^{-x}$라 하면

$f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$

즉, $f(x)$는 기함수이다.

$$\int_{-2}^{1}(2^x-2^{-x})dx-\int_2^1(2^x-2^{-x})dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(2^x-2^{-x})dx=0$$

46 답 6

$|\sin x|$는 주기가 π인 함수이다.

$$\int_0^{3\pi}|\sin x|dx$$
$$=\int_0^{\pi}|\sin x|dx+\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|dx+\int_{2\pi}^{3\pi}|\sin x|dx$$
$$=3\int_0^{\pi}|\sin x|dx$$
$$=3\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=3\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=3\times(1+1)=6$$

Ⅲ
N

47 답 ③

$|2\sin x|$는 주기가 π인 함수이다.

$$\int_0^{n\pi}|2\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\pi}|2\sin x|dx+\int_{\pi}^{2\pi}|2\sin x|dx+\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|2\sin x|dx$$

$$=n\int_0^{\pi}|2\sin x|dx$$

$$=n\int_0^{\pi}2\sin x\,dx$$

$$=n\Big[-2\cos x\Big]_0^{\pi}=4n$$

$4n=100$에서 $n=25$

48 답 6

조건 (나)에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

조건 (다)에서 $f(x)$는 주기가 2인 함수이므로

$$\int_{-1}^{8}f(x)dx=4\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_7^8 f(x)dx$$

$$=8\int_0^1 f(x)dx+\int_{-1}^{0}f(x)dx$$

$$=9\int_0^1 f(x)dx$$

$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$이므로

$$\int_{-1}^{8}f(x)dx=9\times\frac{2}{3}=6$$

49 답 5

$4x-3=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=4\Rightarrow dx=\frac{1}{4}dt$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=\frac{3}{2}$일 때 $t=3$이므로

$$\int_1^{\frac{3}{2}}(4x-3)^3dx=\int_1^3 t^3\cdot\left(\frac{1}{4}dt\right)$$

$$=\int_1^3\frac{1}{4}t^3dt$$

$$=\left[\frac{1}{16}t^4\right]_1^3$$

$$=\frac{1}{16}\times(81-1)=5$$

50 답 ①

$3x-2=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=3\Rightarrow dx=\frac{1}{3}dt$이고

$x=\frac{2}{3}$일 때 $t=0$, $x=\frac{4}{3}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}e^{3x-2}dx=\int_0^2 e^t\cdot\left(\frac{1}{3}dt\right)$$

$$=\int_0^2\frac{1}{3}e^t\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}e^t\right]_0^2=\frac{1}{3}(e^2-1)$$

51 답 ④

$2\theta+\frac{\pi}{6}=t$로 치환하면

$\frac{dt}{d\theta}=2\Rightarrow d\theta=\frac{1}{2}dt$이고

$\theta=0$일 때 $t=\frac{\pi}{6}$, $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\left(\frac{1}{2}dt\right)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos t\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

52 답 ③

$2x+4=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=2\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$이고,

$x=1$일 때 $t=6$, $x=a$일 때 $t=2a+4$이므로

$$\int_1^a\frac{1}{2x+4}dx=\int_6^{2a+4}\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{1}{2}dt\right)$$

$$=\int_6^{2a+4}\frac{1}{2t}dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln|t|\right]_6^{2a+4}$$

$$=\frac{1}{2}\{\ln(2a+4)-\ln 6\}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{2a+4}{6}$$

이것이 $\ln 2$와 같으므로

$$\frac{1}{2}\ln\frac{2a+4}{6}=\ln 2$$

$$\ln\frac{2a+4}{6}=2\ln 2=\ln 4$$

$$\frac{2a+4}{6}=4$$

$\therefore a=10$

53 답 ④

$x^2+1=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}dt$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=\int_1^2\frac{x}{t^2}\cdot\left(\frac{1}{2x}dt\right)$$

$$=\int_1^2\frac{1}{2}t^{-2}dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2t}\right]_1^2$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

54 답 ②

$x^2+1=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}dt$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\sqrt{3}$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_1^4 x\sqrt{t}\cdot\left(\frac{1}{2x}dt\right)$$
$$=\int_1^4 \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

55 답 ③

$5-x^2=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=-2x \Rightarrow dx=-\frac{1}{2x}dt$이고

$x=-1$일 때 $t=4$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}dx=\int_4^1 \frac{x}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{2x}dt\right)$$
$$=\int_4^1\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$
$$=\int_1^4 \frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\,dt \left(\because \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx\right)$$
$$=\left[\sqrt{t}\right]_1^4=2-1=1$$

56 답 ③

$-x^2=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=-2x \Rightarrow dx=-\frac{1}{2x}dt$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=-1$이므로

$$\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx=\int_0^{-1} xe^t\cdot\left(-\frac{1}{2x}\,dt\right)$$
$$=\int_0^{-1}\left(-\frac{1}{2}e^t\right)dt$$
$$=\int_{-1}^0 \frac{1}{2}e^t\,dt \left(\because \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx\right)$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^t\right]_{-1}^0$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}=\frac{e-1}{2e}$$

57 답 ④

$e^x-1=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=e^x \Rightarrow dx=\frac{1}{e^x}dt$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\ln 2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\ln 2} e^x\sqrt{e^x-1}\,dx=\int_0^1 e^x\sqrt{t}\cdot\left(\frac{1}{e^x}dt\right)$$
$$=\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

58 답 ④

$\ln x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=x\,dt$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=\ln a$이므로

$$\int_1^a \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int_0^{\ln a}\frac{t^2}{x}\cdot(x\,dt)$$
$$=\int_0^{\ln a} t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\ln a}$$
$$=\frac{(\ln a)^3}{3}=9$$

$(\ln a)^3=27$에서 $\ln a=3$

59 답 ①

$\ln x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=x\,dt$이고

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^4$일 때 $t=4$이므로

$$\int_e^{e^4}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int_1^4 t^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$$

60 답 ④

$\cos x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=-\sin x \Rightarrow dx=-\frac{1}{\sin x}dt$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{t^2}\cdot\left(-\frac{1}{\sin x}dt\right)$$
$$=\int_1^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^2}\,dt \left(\because \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx\right)$$
$$=\left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^1=-1+2=1$$

61 답 ⑤

$1+\cos x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=-\sin x \Rightarrow dx=-\frac{1}{\sin x}dt$이고

$x=0$일 때 $t=2$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\sin x\,dx$$
$$=\int_2^1 t\sin x\cdot\left(-\frac{1}{\sin x}dt\right)$$
$$=\int_2^1(-t)dt=\int_1^2 t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Ⅲ N

62 답 ①

$\tan x=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=\sec^2 x \Rightarrow dx=\dfrac{1}{\sec^2 x}dt$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \sec^2 x\, dx$$
$$=\int_0^1 t^3 \sec^2 x \cdot \left(\frac{1}{\sec^2 x}dt\right)$$
$$=\int_0^1 t^3\, dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

63 답 ②

$\sqrt{3}+\tan x=t$로 치환하면

$\dfrac{dt}{dx}=\sec^2 x \Rightarrow dx=\dfrac{1}{\sec^2 x}dt$이고

$x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $x=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $t=2\sqrt{3}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 x}{\sqrt{3}+\tan x}dx$$
$$=\int_{\frac{4\sqrt{3}}{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{\sec^2 x}{t}\cdot\left(\frac{1}{\sec^2 x}dt\right)$$
$$=\int_{\frac{4\sqrt{3}}{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_{\frac{4\sqrt{3}}{3}}^{2\sqrt{3}}$$
$$=\ln 2\sqrt{3}-\ln\frac{4\sqrt{3}}{3}=\ln\left(2\sqrt{3}\times\frac{3}{4\sqrt{3}}\right)=\ln\frac{3}{2}$$

이것이 $\ln a$와 같으므로 $a=\dfrac{3}{2}$

64 답 ①

$f(x)=x$, $g'(x)=e^{-x}$이면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^1 \frac{x}{e^x}dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})dx$$
$$=(-e^{-1}+0)-\Big[e^{-x}\Big]_0^1$$
$$=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=\frac{e-2}{e}$$

65 답 ④

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$이면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2$이므로

$$\int_1^{e^2} x\ln x\, dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\frac{1}{2}x\, dx$$
$$=e^4-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^{e^2}=e^4-\left(\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(3e^4+1)$$

66 답 ④

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=x^2$이면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3$이므로

$$\int_1^e x^2\ln x\, dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{3}x^2\, dx$$
$$=\frac{1}{3}e^3-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{9}e^3+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}(2e^3+1)$$

67 답 ①

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}$이면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=-\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{e}-\left[\frac{1}{x}\right]_1^e$$
$$=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=1-\frac{2}{e}$$

이것이 $a+\dfrac{b}{e}$와 같아야 하므로

$a=1$, $b=-2$ $\quad\therefore a+b=-1$

68 답 ③

$f(x)=x+1$, $g'(x)=\cos x$이면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\cos x\, dx$$
$$=\Big[(x+1)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\, dx$$
$$=\frac{\pi}{2}+1+\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}+1-1=\frac{\pi}{2}$$

69 답 ①

$$\underbrace{\int_0^1 x^2e^x\, dx}_{f(x)=x^2,\ g'(x)=e^x\text{이면 } f'(x)=2x,\ g(x)=e^x}=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-\underbrace{\int_0^1 2xe^x\, dx}_{u(x)=2x,\ v'(x)=e^x\text{이면 } u'(x)=2,\ v(x)=e^x}$$
$$=e-\Big[2xe^x\Big]_0^1+2\int_0^1 e^x\, dx$$
$$=e-2e+2\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=e-2e+2e-2=e-2$$

70 답 ②

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\, dx}_{f(x)=\cos x,\ g'(x)=e^x\text{이면 } f'(x)=-\sin x,\ g(x)=e^x}$$
$$=\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\, dx}_{u(x)=\sin x,\ v'(x)=e^x\text{이면 } u'(x)=\cos x,\ v(x)=e^x}$$
$$=\Big[e^x\cos x+e^x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\, dx$$
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\, dx=\Big[e^x\cos x+e^x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\, dx=\frac{1}{2}\Big[e^x(\cos x+\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$$

Simple O 정적분으로 정의된 함수와 급수

[개념 CHECK + 연산 연습] pp. 118～119

01 답 $f(x)$

02 답 $f(a)$

03 답 b, a

$\int_a^b f(x)dx$

04 답 ×

$\int_a^x \frac{d}{dx}f(t)dt=f(x)-f(a)$

05 답 ×

함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^{a+2h}f(t)dt$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(a+2h)-F(a)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(a+2h)-F(a)}{2h}\times2$

$=2F'(a)=2f(a)$

06 답 ○

07 답 1

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x(2\sqrt{t}-1)dt=2\sqrt{x}-1$

$\therefore f'(1)=1$

08 답 2

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x\frac{t^2+1}{t}dt=\frac{x^2+1}{x}$

$\therefore f'(1)=2$

09 답 e

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x e^{2t-1}dt=e^{2x-1}$

$\therefore f'(1)=e$

10 답 -1

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x(\ln t-t)dt=\ln x-x$

$\therefore f'(1)=-1$

11 답 -1

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x(2\sin\pi t+\cos\pi t)dt$

$=2\sin\pi x+\cos\pi x$

$\therefore f'(1)=-1$

12 답 (가) : 1 (나) : e

$f(t)=t^2e^t$라 하고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하자.

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}t^2e^tdt=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(t)\Big]_1^{1+h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$

$=F'(1)$

$=f(\boxed{1})$ (가)

(나)

그런데 $f(1)=\boxed{e}$ 이므로

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}t^2e^tdt=\boxed{e}$ (나)

13 답 (가) : $1-e^2$ (나) : 1

$\int_0^2 f(x)dx=a$ (단, a는 상수)라 하면

$f(x)=e^x+a$이므로

$a=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(e^x+a)dx$

$=\Big[e^x+ax\Big]_0^2=e^2+2a-1$

$\therefore a=\boxed{1-e^2}$ (가)

$f(x)=e^x+1-e^2$이므로

따라서 $f(2)=\boxed{1}$ (나)

14 답 (가) : e^{2x} (나) : e^2-1

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{4}{n}}+e^{\frac{6}{n}}+\cdots+e^{\frac{2n}{n}})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}$

이때, $\Delta x=\frac{1-0}{n}$, $x_k=0+k\times\frac{1}{n}$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}=\int_0^1\boxed{e^{2x}}dx$ (가)

$=\frac{1}{2}\times\Big[\boxed{e^{2x}}\Big]_0^1$ (가)

$=\frac{1}{2}\times(\boxed{e^2-1})$ (나)

유형 연습 [+ 내신 유형]

문제편 pp. 120～121

15 답 ①

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=a$ (단, a는 상수)라 하면

$f(x)=\sin x-a$이므로

$a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a)dx$

$=\Big[-\cos x-ax\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}a+1$

$\left(1+\frac{\pi}{2}\right)a=1$에서 $a=\frac{2}{\pi+2}$

즉, $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi+2}$ $\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{2}{\pi+2}=\frac{\pi}{\pi+2}$

Ⅲ O

16 답 ④

$\int_1^e f(t)dt=A$ (단, A는 상수)라 하면

$f(x)=\ln x+A$이므로

$$A=\int_1^e f(t)dt$$
$$=\int_1^e (\ln t+A)dt$$
$$=\Big[t\ln t-t+At\Big]_1^e$$
$$=(e-e+Ae)-(-1+A)$$
$$=Ae+1-A$$

$(2-e)A=1$에서 $A=\frac{1}{2-e}$

즉, $f(x)=\ln x+\frac{1}{2-e}$

$f(e^2)=2+\frac{1}{2-e}=\frac{5-2e}{2-e}$이므로 $a=2,\ b=5,\ c=-2$

$\therefore\ a+b+c=2+5-2=5$

17 답 ②

$\int_a^x f(t)dt=\ln x-1$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\ln a-1=0$

$\therefore\ a=e$

또한 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{x}$

$\therefore\ f(a)=f(e)=\frac{1}{e}$

18 답 ⑤

$\int_a^x f(t)dt=e^{2x}-3e^x+2$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$e^{2a}-3e^a+2=0$

$(e^a-1)(e^a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=\ln 2$

또한 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2e^{2x}-3e^x$

$\therefore\ f(a)=f(\ln 2)=2\times4-3\times2=2$

19 답 ③

$\int_\pi^x f(t)dt=x\sin x+x-a$의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$\pi-a=0 \qquad \therefore\ a=\pi$

또한 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\sin x+x\cos x+1$

$\therefore\ f(a)=f(\pi)=-\pi+1$

20 답 ②

$\int_0^x (x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$이므로

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\cos x-1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-\sin x$

$\int_0^x f(t)dt=-\sin x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-\cos x$

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

21 답 ②

$\int_0^x (x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$이므로

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=e^x+x-1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=e^x+1$

$\int_0^x f(t)dt=e^x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x \qquad \therefore\ f(0)=1$

22 답 ①

$f(x)=\int_0^x (1-\ln t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-\ln x$

$f'(x)=0$인 $x=e$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x=e$의 좌우에서 부호가 $+$에서 $-$로 변하므로 극댓값을 갖는다.

$$f(e)=\int_1^e (1-\ln t)dt$$
$$=\int_1^e 1\,dt-\int_1^e \ln t\,dt$$
$$=\Big[t-t\ln t+t\Big]_1^e$$
$$=\Big[2t-t\ln t\Big]_1^e=e-2$$

$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$임을 이용한 거야.

따라서 극댓값은 $e-2$이다.

TIP

$\int \ln x\,dx$는 $\int 1\times\ln x\,dx$로 생각하여

$f'(x)=1,\ g(x)=\ln x$로 놓으면 $f(x)=x,\ g'(x)=\frac{1}{x}$이므로

부분적분법을 이용해서 구할 수 있다.

23 답 ①

$f(x)=\int_0^x (t-1)e^t\,dt$에서

$f'(x)=(x-1)e^x$

$f'(x)=0$인 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가지면서 최솟값을 갖는다.

$f(1)=\int_0^1 (t-1)e^t\,dt$

$=\Big[(t-1)e^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt$

$u(x)=t-1$, $v'(x)=e^t$으로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=e^t$

$=1-\Big[e^t\Big]_0^1$

$=1-e+1=2-e$

따라서 최솟값은 $2-e$이다.

24 답 ④

$f(x)=\int_0^x (\cos t-\sin t)dt$에서

$f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$인 $x=\frac{\pi}{4}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값을 가지면서 최댓값을 갖는다.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t-\sin t)dt$

$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$

따라서 최댓값은 $\sqrt{2}-1$이다.

25 답 ④

$f(t)=\frac{\cos t}{1-\sin t}$라 하고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\cos t}{1-\sin t}\,dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=F'(0)=f(0)=1$

26 답 ③

$f(t)=\sqrt{2^{t+2}+1}$이라 하고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}\sqrt{2^{t+2}+1}\,dt$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$

$=F'(1)=f(1)=\sqrt{2^3+1}=3$

27 답 ④

$f(t)=t\ln t$라 하고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to e}\frac{1}{x-e}\int_e^x t\ln t\,dt=\lim_{x\to e}\frac{F(x)-F(e)}{x-e}$

$=F'(e)=f(e)=e$

28 답 ②

$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

$=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$

$=-\cos\pi-(-\cos 0)=1+1=2$

29 답 ①

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$=\Big[\ln|1+x|\Big]_0^1$

$=\ln 2$

TIP

무한급수를 정적분으로 나타내는 방법!

(i) 무한급수에서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}$을 적분기호 $\int$로 나타낸다.

(ii) Δx에 해당하는 값이 $\frac{a}{n}$일 때, $\frac{a}{n}k\longrightarrow x$로, $\frac{a}{n}\longrightarrow dx$로 놓는다.

(iii) $\frac{a}{n}k$에서 $k=1$부터 $k=n$을 대입했을 때의 극한값을 적분구간 $\int_0^a$로 정한다.

Ⅲ

O

Simple P 정적분의 활용

개념 CHECK+연산 연습 pp. 122~123

01 답 $\int_a^b |f(x)|dx$

02 답 $\int_a^b S(x)dx$

03 답 $\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2$ 또는 $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

04 답 ×

$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

05 답 ○

06 답 ○

07 답 $\frac{14}{3}$

$S=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$

08 답 2

$S=\int_1^e \frac{2}{x}dx=\left[2\ln|x|\right]_1^e=2-0=2$

09 답 e^2-e

$S=\int_1^2 e^x\,dx=\left[e^x\right]_1^2=e^2-e$

10 답 1

$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0-(-1)=1$

11 답 $\frac{4}{3}$

곡선 $y=3\sqrt{x}$가 곡선 $y=\sqrt{x}$보다 위쪽에 있으므로

$S=\int_0^1 (3\sqrt{x}-\sqrt{x})dx=\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3}$

12 답 $e+\frac{1}{e}-2$

$x\ge0$에서 곡선 $y=e^x$이 곡선 $y=e^{-x}$보다 위쪽에 있으므로

$S=\int_0^1 (e^x-e^{-x})dx=\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1=e+\frac{1}{e}-2$

13 답 2

단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=(\sqrt{2-x})^2=2-x$

따라서 구하는 부피는

$\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 (2-x)dx$

$=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=4-2=2$

14 답 (1) ① $\frac{1}{\pi}\sin \pi t$ ② $\frac{1}{\pi}$ (2) 50

(1) ① $t=0$일 때의 위치가 $x_0=0$이므로 점 P의 위치 x는

$x=0+\int_0^t \cos \pi t\,dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin \pi t\right]_0^t=\frac{1}{\pi}\sin \pi t$

② $0\le t\le\frac{1}{2}$일 때, $\cos \pi t\ge0$이므로

$\int_0^{\frac{1}{2}} |\cos \pi t|dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin \pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}$

(2) $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{t^2\sin^2 t+t^2\cos^2 t}=t$이므로

$\int_0^{10} t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{10}=50$

15 답 5

$\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{dy}{dt}=\frac{4}{3}$이고

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{5}{3}$이므로

$\int_0^3 \frac{5}{3}\,dt=\left[\frac{5}{3}t\right]_0^3=5$

16 답 (가) : $3t^2+4$ (나) : 16

매개변수 t로 나타내어진 곡선

$x=t^3-4t,\ y=2\sqrt{3}t^2\ (0\le t\le2)$에서

$\frac{dx}{dt}=3t^2-4,\ \frac{dy}{dt}=4\sqrt{3}t$이므로

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(3t^2-4)^2+(4\sqrt{3}t)^2}$

$=\sqrt{9t^4-24t^2+16+48t^2}$

$=\sqrt{9t^4+24t^2+16}$

$=\sqrt{(3t^2+4)^2}$

$=\boxed{3t^2+4}$ ←(가)

곡선의 길이를 l이라 하면

$l=\int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

$=\int_0^2 (3t^2+4)dt=\left[t^3+4t\right]_0^2$

$=8+8=\boxed{16}$ ←(나)

유형 연습 [+내신 유형]

문제편 pp. 124~129

17 답 ②

$x\ge0$에서 $\frac{x}{x^2+1}\ge0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$

$=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1$

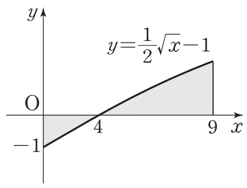
$=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 2$

18 답 ③

$0\le x\le 4$에서 $\frac{1}{2}\sqrt{x}-1\le 0$이고,

$4<x\le 9$에서 $\frac{1}{2}\sqrt{x}-1>0$이므로

구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^9\left|\frac{1}{2}\sqrt{x}-1\right|dx$$
$$=\int_0^4\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)dx+\int_4^9\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}-1\right)dx$$
$$=\left[x-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4+\left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_4^9$$
$$=4-\frac{8}{3}+9-9-\frac{8}{3}+4=\frac{8}{3}$$

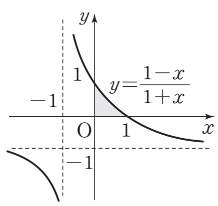
19 답 ①

$y=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1$이고 x절편과 y절편이 모두 1이다.

즉, $0\le x\le 1$에서

$0\le\frac{2}{1+x}-1\le 1$이므로 구하는

넓이를 S라 하면



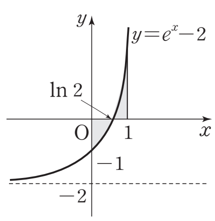
$$S=\int_0^1\left(\frac{2}{1+x}-1\right)dx$$
$$=\Big[2\ln(1+x)-x\Big]_0^1=2\ln 2-1$$

20 답 ②

$0\le x\le\ln 2$에서 $e^x-2\le 0$,

$\ln 2<x\le 1$에서 $e^x-2>0$이므로

구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^1|e^x-2|dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}(2-e^x)dx+\int_{\ln 2}^1(e^x-2)dx$$
$$=\Big[2x-e^x\Big]_0^{\ln 2}+\Big[e^x-2x\Big]_{\ln 2}^1$$
$$=2\ln 2-2+1+e-2-2+2\ln 2$$
$$=4\ln 2+e-5$$

이것이 $a\ln 2+be+c$와 같아야 하므로

$a=4,\ b=1,\ c=-5$

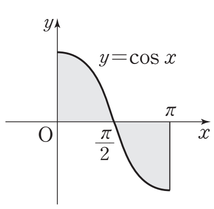
$\therefore\ a+b+c=0$

21 답 ④

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x\ge 0$,

$\frac{\pi}{2}<x\le\pi$에서 $\cos x<0$이므로

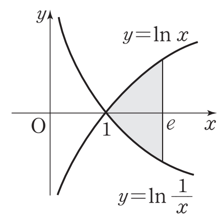
구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^{\pi}|\cos x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1-(-1)=2$$

22 답 ②

$\ln x=\ln\frac{1}{x}$인 $x=1$이므로 두 곡선은 점 $(1,\ 0)$에서 만나고 $x\ge 1$에서 $\ln x\ge-\ln x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_1^e\{\ln x-(-\ln x)\}dx$$
$$=\int_1^e 2\ln x\,dx$$
$$=2\Big[x\ln x-x\Big]_1^e$$
$$=2\{0-(-1)\}=2$$

23 답 ④

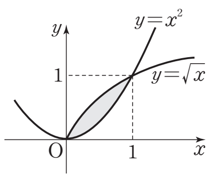
두 곡선 $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$가 만나는 점의 x좌표를 구하자.

$x^2=\sqrt{x}$에서 $x^4=x$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

두 곡선은 원점과 점 $(1,\ 1)$에서 만나고



$0\le x\le 1$에서 곡선 $\sqrt{x}\ge x^2$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

24 답 ①

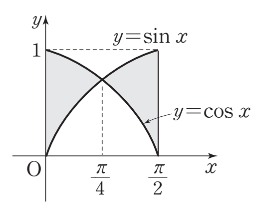
두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$가 만나는 점의 x좌표를 구하자.

$\sin x=\cos x$인 $x=\frac{\pi}{4}$이므로 두 곡선은 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$에서 만난다.

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $\cos x\ge\sin x$,

$\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x<\sin x$

이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1+(-1)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}-2$$

25 답 ①

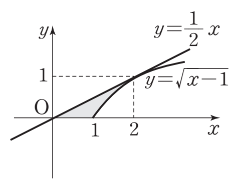
$y=\sqrt{x-1}$에서 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$x=2$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$

기울기가 $\frac{1}{2}$이고, 점 $(2,\ 1)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x-2)+1=\frac{1}{2}x$

구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^2\frac{1}{2}x\,dx-\int_1^2\sqrt{x-1}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^2-\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Ⅲ P

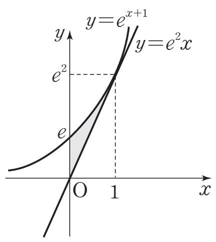
26 답 ②

$y=e^{x+1}$에서 $y'=e^{x+1}$

$x=1$에서의 접선의 기울기는 e^2

기울기가 e^2이고 점 $(1,\ e^2)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=e^2(x-1)+e^2=e^2x$



구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^1 (e^{x+1}-e^2x)dx$

$=\left[e^{x+1}-\frac{1}{2}e^2x^2\right]_0^1$

$=\left(e^2-\frac{e^2}{2}\right)-e$

$=\frac{e^2}{2}-e$

27 답 ③

$f(x)=\ln x$라 하면

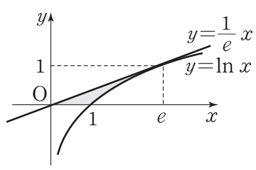
$f'(x)=\frac{1}{x}$

$x=e$에서의 기울기는 $f'(e)=\frac{1}{e}$

기울기가 $\frac{1}{e}$이고, 점 $(e,\ 1)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$

$\therefore\ y=\frac{1}{e}x$



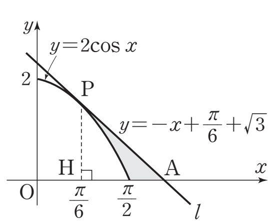
구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^e \frac{1}{e}x\,dx-\int_1^e \ln x\,dx$

$=\left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^e-\left[x\ln x-x\right]_1^e$

$=\frac{e}{2}-1$

28 답 ④



$y=2\cos x$에서 $y'=-2\sin x$

$x=\frac{\pi}{6}$에서의 접선의 기울기는

$y'=-2\sin\frac{\pi}{6}=-2\times\frac{1}{2}=-1$

기울기가 -1이고, 점 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{6},\ \sqrt{3}\right)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=-x+\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

$y=0$일 때, $x=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3},\ 0\right)$이고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{6},\ 0\right)$이다.

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=(\text{삼각형 PHA의 넓이})-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,dx$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}-\left[2\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{3}{2}-(2-1)=\frac{1}{2}$

29 답 ①

$A,\ B$의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^4 (\sqrt{x}-ax)dx=0$

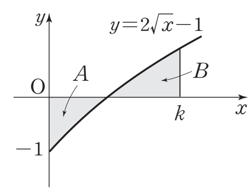
$\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^4=0$

$\frac{16}{3}-8a=0$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

30 답 ⑤

$A=B$이므로



$\int_0^k (2\sqrt{x}-1)dx=0$

$\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_0^k=0$

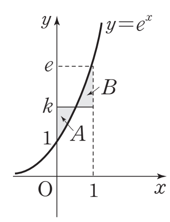
$\frac{4}{3}k^{\frac{3}{2}}-k=0$

$k>\frac{1}{4}$이므로 $\frac{4}{3}k^{\frac{1}{2}}=1$

$\therefore\ k=\frac{9}{16}$

31 답 ④

$A=B$이므로



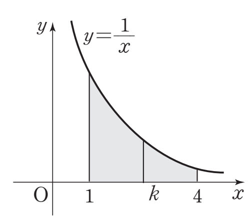
$\int_0^1 (e^x-k)dx=0$

$\left[e^x-kx\right]_0^1=0$

$(e-k)-1=0\qquad \therefore\ k=e-1$

32 답 ④

$\int_1^k \frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{x}dx$이므로



$\left[\ln x\right]_1^k=\frac{1}{2}\left[\ln x\right]_1^4$

$\ln k=\frac{1}{2}\ln 4\qquad \therefore\ k=2$

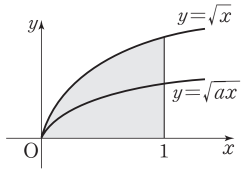
[함수 $y=x^r$의 부정적분] 심플 정리

r가 실수이고, C는 적분상수일 때,

(1) $r\neq-1$일 때 $\int x^r\,dx=\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C$

(2) $r=-1$일 때 $\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

33 답 ③



$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{ax}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$이므로

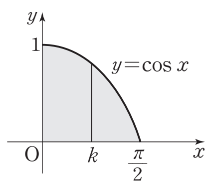
$\displaystyle\left[\frac{2}{3a}\cdot(ax)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$\displaystyle\frac{2}{3}\sqrt{a}=\frac{1}{3}$

$\displaystyle\sqrt{a}=\frac{1}{2}$

$\displaystyle\therefore a=\frac{1}{4}$

34 답 ③



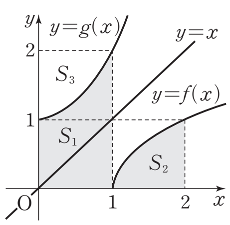
$\displaystyle\int_0^k \cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$이므로

$\displaystyle\Big[\sin x\Big]_0^k=\frac{1}{2}\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle\sin k=\frac{1}{2}$

$\displaystyle\therefore k=\frac{\pi}{6}$

35 답 ④

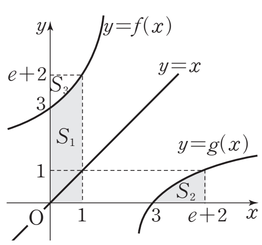


$\displaystyle\int_0^1 g(x)=S_1,\ \int_1^2 f(x)dx=S_2$라 하고, S_2에 해당하는 부분을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 S_3가 된다.

즉, $S_3=S_2$이므로 $S_1+S_2=S_1+S_3$는 직사각형의 넓이와 같다.

$\displaystyle\therefore \int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=1\times2=2$

36 답 ⑤

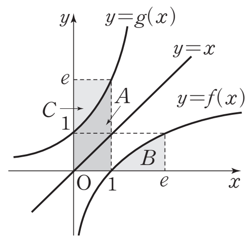


$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=S_1,\ \int_3^{e+2} g(x)=S_2$라 하고, S_2에 해당하는 부분을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 S_3가 된다.

즉, $S_3=S_2$이므로 $S_1+S_2=S_1+S_3$는 직사각형의 넓이와 같다.

$\displaystyle\therefore \int_0^1 f(x)dx+\int_3^{e+2} g(x)dx=1\times(e+2)=e+2$

37 답 ③



$\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=A,\ \int_1^e f(x)=B$라 하고, B에 해당하는 부분을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 C가 된다.

즉, $B=C$이므로 $A+B=A+C$는 직사각형의 넓이와 같다.

$\displaystyle\int_1^e f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=1\times e=e$

38 답 ⑤

직선 $x=t$ $(1\le x\le5)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$\displaystyle S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{t-1})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(t-1)$

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$\begin{aligned}V&=\int_1^5 S(t)dt\\&=\int_1^5 \frac{\sqrt{3}}{4}(t-1)dt\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}t^2-t\right]_1^5\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(\frac{25}{2}-5\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

TIP

입체도형의 부피 구하는 방법

(i) 좌표평면 위에 나타내기
(ii) x축에 수직인 평면으로 입체도형 자르기
(iii) 자른 단면의 넓이 $S(x)$ 구하기
(iv) 구간 $[a, b]$에서 $\displaystyle V=\int_a^b S(x)dx$ 계산하기

Ⅲ
P

39 답 ②

직선 $x=t$ $(1\le x\le7)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$\displaystyle S(t)=\left(\sqrt{\frac{t}{t^2+1}}\right)^2=\frac{t}{t^2+1}$

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$\begin{aligned}V&=\int_1^7 S(t)dt\\&=\int_1^7 \frac{t}{t^2+1}dt\\&=\frac{1}{2}\int_1^7 \frac{(t^2+1)'}{t^2+1}dt\\&=\frac{1}{2}\Big[\ln|t^2+1|\Big]_1^7\\&=\frac{1}{2}(\ln 50-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln 25=\ln 5\end{aligned}$$

40 답 ④

직선 $x=t\left(0<t<\frac{\pi}{4}\right)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(2\tan t)^2=4\tan^2 t$

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{4}} S(t)dt$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,dt$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 t-1)dt \ (\because 1+\tan^2 x=\sec^2 x)$$
$$=4\Big[\tan t-t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=4\times\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=4-\pi$$

41 답 ③

점 $\mathrm{A}(e)$에서 출발하므로 $t=1$에서 점 P의 위치 x는

$$x=e+\int_0^1 (e^t+1)dt$$
$$=e+\Big[e^t+t\Big]_0^1$$
$$=e+(e+1-1)=2e$$

42 답 ①

$\sin t=\cos t$인 $t=\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4},\ \cdots$이므로 출발 후 두 점 P, Q의 속도가 처음으로 같아지는 순간은 $t=\frac{\pi}{4}$일 때이다.

점 P의 위치 x_1은

$$x_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\,dt=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

점 Q의 위치 x_2는

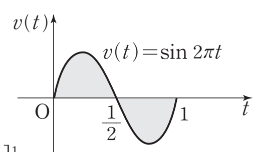
$$x_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-1$$

43 답 ②

$0\le t\le\frac{1}{2}$이면 $v(t)\ge0$이고, $\frac{1}{2}<t\le1$이면 $v(t)\le0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리 s는

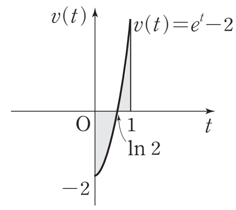


$$s=\int_0^1 |\sin 2\pi t|dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi t\,dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 \sin 2\pi t\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\right)+\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\right)=\frac{2}{\pi}$$

44 답 ④

$$a=\int_0^1 (e^t-2)dt=\Big[e^t-2t\Big]_0^1$$
$$=(e-2)-1=e-3$$

$0\le t\le\ln 2$이면 $v(t)\le0$이고, $\ln 2<t\le1$이면 $v(t)>0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리 b는



$$b=\int_0^1 |e^t-2|dt$$
$$=\int_0^{\ln 2} (2-e^t)dt+\int_{\ln 2}^1 (e^t-2)dt$$
$$=\Big[2t-e^t\Big]_0^{\ln 2}+\Big[e^t-2t\Big]_{\ln 2}^1$$
$$=(2\ln 2-2)-(0-1)+(e-2)-(2-2\ln 2)$$
$$=4\ln 2+e-5$$

$\therefore\ b-a=4\ln 2-2$

45 답 ②

시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가

$x=\frac{t^3}{3}-t,\ y=t^2$이므로

$\frac{dx}{dt}=t^2-1,\ \frac{dy}{dt}=2t$

$t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^3 \sqrt{(t^2-1)^2+(2t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^3 \sqrt{t^4+2t^2+1}\,dt$$
$$=\int_0^3 (t^2+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^3$$
$$=(9+3)-0=12$$

46 답 ④

시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가

$x=\frac{4}{3}t^3-t,\ y=2t^2+1$이므로

$\frac{dx}{dt}=4t^2-1,\ \frac{dy}{dt}=4t$

$t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^3 \sqrt{(4t^2-1)^2+(4t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^3 \sqrt{16t^4+8t^2+1}\,dt$$
$$=\int_0^3 \sqrt{(4t^2+1)^2}\,dt$$
$$=\int_0^3 (4t^2+1)dt$$
$$=\left[\frac{4}{3}t^3+t\right]_0^3=(36+3)-0=39$$

47 답 ⑤

시각 t에서의 위치가

$x=\sin t+\cos t,\ y=\sin t-\cos t$이므로

$\frac{dx}{dt}=\cos t-\sin t,\ \frac{dy}{dt}=\cos t+\sin t$

$t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^5 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^5 \sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^5 \sqrt{2}\,dt=\Big[\sqrt{2}t\Big]_0^5=5\sqrt{2}$$

48 답 ③

매개변수 t로 나타내어진 곡선

$x=t-\frac{1}{2}t^2,\ y=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}$이므로

$\frac{dx}{dt}=1-t,\ \frac{dy}{dt}=2\sqrt{t}$

구하는 곡선의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_2^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_2^4 \sqrt{(1-t)^2+(2\sqrt{t})^2}\,dt=\int_2^4 \sqrt{(t+1)^2}\,dt$$
$$=\int_2^4 (t+1)dt=\Big[\frac{1}{2}t^2+t\Big]_2^4=(8+4)-(2+2)=8$$

49 답 ④

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\ (2\le x\le 4)$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$2\le x\le 4$인 범위에서 곡선 $y=f(x)$의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_2^4 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$
$$=\int_2^4 \sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}^2}\,dx$$
$$=\int_2^4 \sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=\int_2^4 \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}x^2+\ln x\Big]_2^4$$
$$=\frac{1}{2}\{(8+\ln 4)-(2+\ln 2)\}=3+\frac{1}{2}\ln 2$$

50 답 ②

$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\ (0\le x\le 1)$라 하면

$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$1+\{f'(x)\}^2=1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$

$0\le x\le 1$인 범위에서 곡선 $y=f(x)$의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$
$$=\Big[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Big]_0^1=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

연습 문제 N~P

기출+기출 변형 → 문제편 pp. 130~131

01 답 ①

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx=\int_0^1 (e^x-e^{-x})dx$$
$$=\Big[e^x+e^{-x}\Big]_0^1=e+\frac{1}{e}-2$$

02 답 ①

$$\int_1^{14} \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}dx=\int_1^{14} (2x-1)^{-\frac{1}{3}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{2}{3}}\Big]_1^{14}$$
$$=\frac{3}{4}\times(9-1)=6$$

03 답 ④

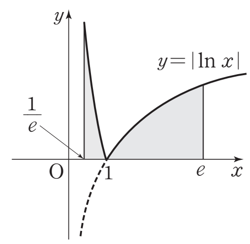
$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx=a+be^{-1}$일 때, $a-b$의 값은?

절댓값 기호가 있는 정적분은 절댓값 안의 함수가 양수인 구간과 음수인 구간을 나누어 구해야 해.

(단, a, b는 유리수)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

1st 절댓값 안의 함수가 양수인 구간과 음수인 구간을 각각 구해야 해.



$0<x\le 1$이면 $|\ln x|=-\ln x$이고,

$x\ge 1$이면 $|\ln x|=\ln x$이다.

2nd 정적분의 성질을 이용하여 두 구간으로 나눠서 각각의 정적분 값을 구해야 해.

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x)dx+\int_1^e \ln x\,dx$$
$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\,dx+\int_1^e \ln x\,dx$$
$$=-\Big[x\ln x-x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}+\Big[x\ln x-x\Big]_1^e$$

$f'(x)=x,\ g(x)=\ln x$로 놓고 부분적분법을 이용한 거야.

$$=-\left\{(-1)-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right\}+(e\ln e-e+1)$$
$$=-\left(-1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right)+(e-e+1)$$
$$=2-\frac{2}{e}=2-2e^{-1}$$

이것은 $a+be^{-1}$과 같으므로

$a=2,\ b=-2$

$\therefore a-b=4$

Ⅲ N~P 연습

04 답 ①

$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(x+1)\cos x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(x\cos x+\cos x)dx$에서

$f(x)=\cos x$, $g(x)=x\cos x$라 하면

$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$이므로 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이고,

$g(-x)=(-x)\cos(-x)=-x\cos x=-g(x)$이므로 $g(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(x\cos x+\cos x)dx$

$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx=2\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=2\times\frac{1}{2}=1$

05 답 ④

$\ln x=t$로 치환하면

$\frac{1}{x}=\frac{dx}{dt} \Rightarrow dx=x\,dt$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$\int_{1}^{e^2}\frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int_{0}^{2}\frac{t^3}{x}\cdot(x\,dt)=\int_{0}^{2}t^3\,dt=\Big[\frac{1}{4}t^4\Big]_{0}^{2}=4$

06 답 ①

주어진 식 $\int_{0}^{x}f(t)dt=e^x+ax+a$에 $x=0$을 대입하면

$\int_{0}^{0}f(t)dt=1+a=0$이므로 $a=-1$

주어진 식의 양변을 미분하면

$f(x)=e^x-1$

$\therefore f(\ln 2)=2-1=1$

07 답 ④

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_{1}^{x}f(t)dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}f(t)dt$

$=\frac{1}{2}\times f(1)=\frac{1}{2}\times2=1$

08 답 ⑤

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\times\frac{4k}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\times\frac{2k}{n}$

$=\int_{0}^{2}xf(x)dx$

$=\int_{0}^{2}xe^x\,dx$

$u(x)=x$, $v'(x)=e^x$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이고 부분적분법을 이용한 거야.

$=\Big[xe^x\Big]_{0}^{2}-\int_{0}^{2}e^x\,dx$

$=2e^2-\Big[e^x\Big]_{0}^{2}$

$=2e^2-(e^2-1)$

$=e^2+1$

TIP

정적분과 급수

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}=\int_{0}^{1}f(x)dx$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{p}{n}k\right)\times\frac{p}{n}=\int_{0}^{p}f(x)dx$

09 답 ②

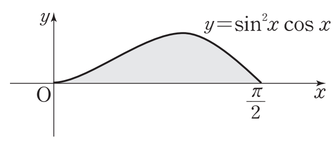
곡선 $y=\sin^2 x\cos x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

주어진 구간에서 곡선이 x축 위에 있는지 아래에 있는지를 파악해서 넓이를 구해야 해.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ 1 ⑤ 2

1st 주어진 곡선이 x축과 만나는 점을 찾은 후 곡선이 x축 위에 있는지 아래에 있는지 파악해야 해.



$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $\sin^2 x\cos x=0$의 해를 구하면

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ $\sin x=0$ 또는 $\cos x=0$이어야 해.

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $\sin^2 x\cos x\ge0$

2nd 삼각함수의 치환적분법을 이용하여 정적분 값을 구해야 해.

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin^2 x\cos x|dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx$ $\cos x$와 $\sin x$가 곱해진 것은 치환적분법을 주로 이용해.

$\sin x=t$로 치환하고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\cos x=\frac{dt}{dx} \Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos x}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx$

$=\int_{0}^{1}t^2\cos x\cdot\left(\frac{dt}{\cos x}\right)$

$=\int_{0}^{1}t^2\,dt=\Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_{0}^{1}=\frac{1}{3}$

10 답 ①

구하는 넓이는

$\int_{0}^{1}(\sqrt{x}-2^x+1)dx$

$=\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2^x}{\ln 2}+x\Big]_{0}^{1}$

$=\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{\ln 2}+1\right)+\frac{1}{\ln 2}=\frac{5}{3}-\frac{1}{\ln 2}$

이것이 $a+\frac{b}{\ln 2}$와 같으므로

$a=\frac{5}{3}$, $b=-1$ $\therefore a+b=\frac{2}{3}$

11 답 ③

두 곡선 $y=e^{x-1}$과 $y=\ln x+1$은 점 $(1,\ 1)$에서 접한다. 이 두 곡선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?
서로 역함수 관계임을 알고 두 곡선이 $y=x$에 대칭이라는 성질을 이용하여 구해야 해

① $\frac{1}{2}-\frac{2}{e}$ ② $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$ ③ $1-\frac{2}{e}$

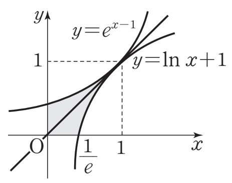
④ $1-\frac{1}{e}$ ⑤ $2-\frac{2}{e}$

1st 두 곡선이 $y=x$에 대칭임을 파악하고, 접점에서의 미분계수를 이용하여 직선 $y=x$가 접선임을 파악해야 해.

$y=e^{x-1}$과 $y=\ln x+1$은 서로 역함수 관계이므로 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 두 함수가 역함수 관계이면 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또한 $y=e^{x-1}$에서 $y'(x)=e^{x-1}$이고 $x=1$일 때의 미분계수가 1이므로 두 곡선은 직선 $y=x$의 점 $(1,\ 1)$에서 서로 접한다.

2nd 직선 $y=x$가 구하는 넓이를 이등분한다는 사실을 이용하여 구하기 쉬운 쪽의 넓이를 찾아 2배를 해주면 돼.



두 곡선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형은 그림의 어두운 부분과 같고 이것은 접선 $y=x$에 의하여 이등분된다.

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=2\int_0^1 (e^{x-1}-x)dx$ 곡선 $y=\ln x+1$과 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구해도 되지만 적분하기 쉬운 쪽을 택한 거야.

$=2\left[e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=2\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)=1-\frac{2}{e}$

12 답 ③

함수 $y=e^x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 영역의 넓이를 직선 $y=ax$가 이등분하므로

$\int_0^1 ax\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^x\,dx$

$\left[\frac{1}{2}ax^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^1$

$\frac{1}{2}\times1\times a=\frac{1}{2}(e-1)$

$\therefore a=e-1$

13 답 ③

직선 $x=t\ (0\le t\le 1)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(\sqrt{\ln t-1})^2=\ln t-1$

구하는 부피를 V라 하면

$V=\int_e^{e^2} S(t)dt$

$=\int_e^{e^2} (\ln t-1)dt$

$=\left[t\ln t-2t\right]_e^{e^2}$

$=(2e^2-2e^2)-(e-2e)=e$

14 답 ③

시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가

$x=4t,\ y=t^2-2\ln t$이므로

$\frac{dx}{dt}=4,\ \frac{dy}{dt}=2t-\frac{2}{t}$

$\therefore \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{4^2+\left(2t-\frac{2}{t}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(2t+\frac{2}{t}\right)^2}$

$=2t+\frac{2}{t}$

점 P가 $t=1$에서 $t=2$까지 움직인 거리를 s라 하면

$s=\int_1^2\left(2t+\frac{2}{t}\right)dt$

$=\left[t^2+2\ln|t|\right]_1^2$

$=(4+2\ln 2)-(1+0)=3+2\ln 2$

15 답 5

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=A$ (단, A는 상수)라고 하면

$f(x)=\cos x+1+\frac{A}{\pi}$ … Ⅰ

$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos t+1+\frac{A}{\pi}\right)dt$

$=\left[\sin t+t+\frac{A}{\pi}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=1+\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}$

$\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}+1$

$\therefore A=\pi+2$ … Ⅱ

즉, $f(x)=\cos x+2+\frac{2}{\pi}$

$\therefore f(0)=3+\frac{2}{\pi}$

$\therefore a=3,\ b=2 \Rightarrow a+b=5$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=A$ (단, A는 상수)로 놓고 $f(x)$를 A를 이용하여 나타낸다.	20%
Ⅱ	구한 $f(x)$를 직접 대입하여 적분한 후 A의 값을 구한다.	60%
Ⅲ	$a,\ b$를 구한 후 $a+b$의 값을 계산한다.	20%

Ⅲ
N~P 연습

Ⅲ 대단원 TEST [L~P] [기출+기출 변형] 문제편 pp. 132~135

01 답 ③

C가 적분상수일 때,

ㄱ. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx=\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}dx$

$\displaystyle=\int(\sqrt{x}+1)dx$

$\displaystyle=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\int \frac{3x^2e^x-2}{x^2}dx=\int(3e^x-2x^{-2})dx$

$\displaystyle=3e^x+\frac{2}{x}+C$ (참)

ㄷ. $\displaystyle\int \frac{8^x+1}{2^x+1}dx$

$\displaystyle=\int \frac{(2^x)^3+1}{2^x+1}dx$

$\displaystyle=\int \frac{(2^x+1)(4^x-2^x+1)}{2^x+1}dx$

$\displaystyle=\int(4^x-2^x+1)dx$

$\displaystyle=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

02 답 ⑤

$\displaystyle f(x)=\int f'(x)dx$

$\displaystyle=\int\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right)dx$

$=2e^{\frac{x}{2}}+x+C$ (단, C는 적분상수)

$\therefore f(2)-f(0)=(2e+2+C)-2-C=2e$

03 답 ③

$\displaystyle f(x)=\int(\sin 2x+x)dx$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(\pi)=\dfrac{\pi^2}{2}$이므로

$\displaystyle f(\pi)=-\frac{1}{2}\cos 2\pi+\frac{\pi^2}{2}+C$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{2}+C=\frac{\pi^2}{2}$

$\therefore C=\dfrac{1}{2}$

즉, $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

$\therefore f(0)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$

04 답 23

함수 $f(x)$에 대하여

$f'(x)=\begin{cases}3\sqrt{x} & (x>1)\\ 2x & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}2x^{\frac{3}{2}}+C_1 & (x>1)\\ x^2+C_2 & (x<1)\end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(4)=13$이라고 하므로

$f(4)=16+C_1=13 \qquad \therefore C_1=-3$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

$\displaystyle\lim_{x\to1-}(x^2+C_2)=\lim_{x\to1+}\left(2x^{\frac{3}{2}}-3\right)$

$1+C_2=-1 \qquad \therefore C_2=-2$

$\therefore f(-5)=25-2=23$

05 답 ⑤

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $2e^x+a^x\ln a$이므로

$f'(x)=2e^x+a^x\ln a$에서

$\displaystyle f(x)=\int(2e^x+a^x\ln a)dx$

$=2e^x+a^x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=-1$이라 하므로

$f(0)=2+1+C=-1 \qquad \therefore C=-4$

또, $f(1)=2e+3$이라 하므로

$f(1)=2e+a-4=2e+3$

$\therefore a=7$

06 답 ④

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다. $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$이고 $f(0)=1$일 때, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값은?

부정적분은 미분의 역연산이므로 미분해서 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$이 되는 함수를 떠올려야 해.

① $\dfrac{1}{e^2}$ ② $\dfrac{1}{e}$ ③ 1
④ e ⑤ e^2

1st $\{\ln|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$임을 이용하여 주어진 식을 적분하자.

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$에서 양변의 부정적분을 구하면

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 2dx$

$\ln f(x)=2x+C$ (단, C는 적분상수)

일반적으로 $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$이지만 주어진 조건에서 $f(x)>0$이기 때문에 절댓값 기호를 없애도 되는 거야.

2nd 주어진 조건을 이용하여 적분상수를 구해야 해.

$f(0)=1$이라 하므로 $\ln f(0)=0+C \qquad \therefore C=0$

즉, $f(x)=e^{2x}$

$\therefore f\left(\dfrac{1}{2}\right)=e$

07 답 ①

$f(x)=\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$에서

$\ln x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=xdt$이므로

$f(x)=\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int \frac{\sqrt{t}}{x}\cdot(xdt)$

$=\int \sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=0$이라 하므로 $C=0$

즉, $f(x)=\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore f(e)=\frac{2}{3}$

08 답 ②

$f(x)=\int (\sin^3 x-1)\sin x \cos x\, dx$에서

$\sin x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\frac{1}{\cos x}dt$이므로

$f(x)=\int (\sin^3 x-1)\sin x \cos x\, dx$

$=\int (t^3-1)t\cos x\cdot\left(\frac{1}{\cos x}dt\right)$

$=\int (t^3-1)t\,dt=\int (t^4-t)dt$

$=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{2}t^2+C$

$=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{2}\sin^2 x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=1$이라 하므로

$f(0)=C=1$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+1=\frac{7}{10}$

09 답 ⑤

$\int \tan x\, dx=\int \frac{\overset{(가)}{\sin x}}{\cos x}dx$이므로

$\cos x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=\overset{(나)}{-\sin x} \Rightarrow dx=-\frac{1}{\sin x}dt$이므로

$\int \tan x\, dx=\int \frac{\overset{(가)}{\sin x}}{\cos x}dx=\int \frac{\sin x}{t}\cdot\left(-\frac{1}{\sin x}dt\right)$

$=\int \left(-\frac{1}{t}\right)dt=-\ln|t|+C$

$=-\ln|\cos x|+C$ (단, C는 적분상수)

따라서 $f(x)=\sin x$, $g(x)=-\sin x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$

10 답 ④

$f(x)=\int x^2 \ln x\, dx$

$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int \frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x^2$으로 놓으면 $u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{3}x^3$이고 부분적분법을 이용한 거야.

$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=\frac{8}{9}$이라 하므로

$f(1)=-\frac{1}{9}+C=\frac{8}{9}$ $\quad\therefore C=1$

즉, $f(x)=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+1$

$\therefore f(3)=9\ln 3-3+1=9\ln 3-2$

11 답 ②

$x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. 이때, $f(\pi)$의 값은?

(가) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

(나) $f(x)+xf'(x)=x\cos x$

부정적분은 미분의 역연산이므로 미분해서 $f(x)+xf'(x)$가 되는 함수를 떠올려야 해.

① $-\frac{2}{\pi}$ ② $-\frac{1}{\pi}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{\pi}$ ⑤ $\frac{2}{\pi}$

1st (나)에서 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$임을 이용하여 좌변을 적분하고, 우변은 부분적분법을 이용하여 적분해보자.

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)=x\cos x$에서

$\int \{xf(x)\}'\,dx=\int x\cos x\,dx$에서

$xf(x)=x\sin x-\int \sin x\,dx$

우변에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$라 하면 $u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로 부분적분법을 이용하여 적분한 것이다.

$=x\sin x+\cos x+C$ ⋯ ㉠ (단, C는 적분상수)

2nd 주어진 조건을 이용하여 적분상수를 구해야 해.

조건 (가)에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이라 하므로

㉠에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+C$

$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+C$ $\quad\therefore C=0$

㉠에 $x=\pi$를 대입하면

$\pi f(\pi)=\pi\sin\pi+\cos\pi$

$\therefore f(\pi)=-\frac{1}{\pi}$

Ⅲ 대단원

12 답 ④

$$\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\left[2\ln x-\frac{1}{x}\right]_1^2$$
$$=\left(2\ln 2-\frac{1}{2}\right)-(0-1)$$
$$=2\ln 2+\frac{1}{2}$$

13 답 3

$$\int_2^3 3e^{3x-6}dx=\left[e^{3x-6}\right]_2^3=e^3-1=k \qquad \therefore k+1=e^3$$

$\therefore \ln(k+1)=\ln e^3=3$

14 답 ②

$\int_{-\pi}^{\pi}(|\cos x|+\cos x)dx$의 값은?

절댓값이 포함된 함수는 절댓값 안의 함수가 양수인 구간과 음수인 구간을 나누어 적분해야 해.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

1st 절댓값 안의 함수가 양수인 구간과 음수인 구간을 나누어 함수를 구해야 해.

$-\pi\le x\le -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$이면 $\cos x\le 0$이므로

$|\cos x|+\cos x=-\cos x+\cos x=0$

$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$이면 $\cos x\ge 0$이므로

$|\cos x|+\cos x=\cos x+\cos x=2\cos x$

2nd 주어진 구간이 대칭인 경우에는 우함수 또는 기함수의 성질을 이용하여 적분하면 편리해.

$$\int_{-\pi}^{\pi}(|\cos x|+\cos x)dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos x\,dx$$

$\cos x$는 우함수이므로 우함수의 성질을 이용하여 적분하면 편리해.

$$=4\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=4\times 1=4$$

심플 정리

[우함수와 기함수의 정적분]

(1) $f(x)=f(-x)$, 즉 $f(x)$가 우함수이면

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

(2) $f(x)=-f(-x)$, 즉 $f(x)$가 기함수이면

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$$

15 답 ④

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이다.

(나) $\int_1^{\frac{3}{2}}f(2x)dx=7$, $\int_1^{\frac{4}{3}}f(3x)dx=1$

(가)는 주기함수이고 (나)는 치환적분을 이용하여 나타내야 해.

$\int_{2001}^{2012}f(x)dx$의 값은?

① 65 ② 71 ③ 82 ④ 88 ⑤ 99

1st 조건 (나)에서 치환적분을 이용하여 함수 $f(x)$의 어떤 구간에서의 정적분 값을 나타내야 해.

조건 (나)의 $\int_1^{\frac{3}{2}}f(2x)dx=7$에서 $2x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

$x=1$일 때 $t=2$, $x=\frac{3}{2}$일 때 $t=3$이므로

$$\int_1^{\frac{3}{2}}f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_2^3 f(t)dt=7$$

$$\therefore \int_2^3 f(x)dx=14$$

$\int_1^{\frac{4}{3}}f(3x)dx=1$에서 $3x=s$로 치환하면

$\frac{ds}{dx}=3 \Rightarrow dx=\frac{ds}{3}$

$x=1$일 때 $s=3$, $s=\frac{4}{3}$일 때 $t=4$이므로

$$\int_1^{\frac{4}{3}}f(3x)dx=\frac{1}{3}\int_3^4 f(s)ds=1$$

$$\therefore \int_3^4 f(x)dx=3$$

2nd 구해야 하는 구간에서의 정적분 값을 주기함수의 성질을 이용하여 **1st**에서 구한 구간에서의 정적분 값을 이용해서 구하자.

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 주기가 2인 함수임을 알 수 있다.

$$\int_{2001}^{2012}f(x)dx=\int_1^{12}f(x)dx$$
$$=\int_1^2 f(x)dx+5\int_2^4 f(x)dx$$

그런데 $\int_1^2 f(x)dx=\int_3^4 f(x)dx=3$이고,

$$\int_2^4 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx$$
$$=14+3=17$$

$$\therefore \int_{2001}^{2012}f(x)dx=3+5\times 17=88$$

16 답 ③

$\int_1^4 \frac{2}{x}\ln\frac{x}{2}dx$에서 $\ln\frac{x}{2}=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=xdt$

$x=1$일 때 $t=\ln\frac{1}{2}$, $x=4$일 때 $t=\ln 2$이므로

$$\int_1^4 \frac{2}{x}\ln\frac{x}{2}dx=\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2}\frac{2t}{x}\cdot(xdt)=\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2}2tdt$$
$$=\Big[t^2\Big]_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2}=(\ln 2)^2-\left(\ln\frac{1}{2}\right)^2=0$$

17 답 ⑤

삼각함수의 덧셈정리를 이용하면 어떤 것을 치환해야 할지 알 수 있어.

정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(\cos x+1)dx$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

1st 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 변형해야 해.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(\cos x+1)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x(\cos x+1)\,dx$$이므로

$\sin 2x=\sin(x+x)=2\sin x\cos x$임을 이용한 거야.

2nd 삼각함수의 치환적분법을 이용하여 정적분 값을 구해야 해.

$\cos x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=-\sin x \Rightarrow dx=-\frac{1}{\sin x}dt$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x(\cos x+1)\,dx$$
$$=\int_1^0 2\sin x\cdot t(t+1)\cdot\left(-\frac{1}{\sin x}dt\right)$$
$$=\int_1^0 -(2t^2+2t)dt=\int_0^1(2t^2+2t)dt=\left[\frac{2t^3}{3}+t^2\right]_0^1=\frac{5}{3}$$

18 답 6

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f'(\sin x)\cos x\,dx$에서 $\sin x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\frac{1}{\cos x}dt$

$x=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f'(\sin x)\cos x\,dx$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 f'(t)\cos x\cdot\left(\frac{1}{\cos x}dt\right)$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 f'(t)dt=\Big[f(t)\Big]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)=9-3=6$$

19 답 ⑤

$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면

$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$ (가) 이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\times\sec^2\theta\,d\theta$$ (가)
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta\ (\because 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta)$$
$$=\frac{\pi}{4}$$ (나)

즉, $f(\theta)=\sec^2\theta$, $a=\frac{\pi}{4}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec^2\frac{\pi}{4}=(\sqrt{2})^2=2$

20 답 ④

$$\int_0^{\pi}x(\cos x+1)dx$$
$$=\int_0^{\pi}x\cos x\,dx+\int_0^{\pi}x\,dx$$
$$=\Big[x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$=\left(0-\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}\right)+\left(\frac{\pi^2}{2}-0\right)$$
$$=(-1-1)+\frac{\pi^2}{2}$$
$$=\frac{\pi^2}{2}-2$$
$$=\frac{\pi^2-4}{2}$$

$f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$라 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$이므로
$\int_0^{\pi}x\cos x dx$
$=\Big[x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x dx$

21 답 ②

주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=4-a$

$\therefore a=4$

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-4\sin x+8$

$\therefore f(0)=8$

$\therefore f(0)+a=8+4=12$

22 답 12

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_2^{2+3h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(2+3h)-F(2)}{h}$$
$$=3\lim_{h\to 0}\frac{F(2+3h)-F(2)}{3h}$$
$$=3F'(2)=3f(2)$$
$$=3\times 2^2=12$$

Ⅲ 대단원

23 답 ②

정적분으로 표현된 함수이지만 미분을 이용하여 최솟값을 구해야 해.

함수 $f(x)=\int_0^x (t-2)e^t\,dt$의 최솟값은?

① $2-e^2$ ② $3-e^2$ ③ $4-e^2$ ④ $5-e^2$ ⑤ $6-e^2$

1st 적분구간에 미지수 x가 들어가 있는 경우는 x에 대한 함수이면 양변을 x에 관해 미분한 후 극값을 갖는 x의 값을 찾아야 해.

$f(x)=\int_0^x (t-2)e^t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-2)e^x$

$f'(x)=0$인 $x=2$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지면서 최솟값을 갖는다.

극값이 하나일 때, (극솟값)=(최솟값) 또는 (극댓값)=(최댓값)이 성립한다.

2nd 부분적분법을 이용하여 최솟값을 구해야 해.

$$f(2)=\int_0^2 (t-2)e^t\,dt$$
$$=\int_0^2 te^t\,dt-2\int_0^2 e^t\,dt$$

$u(t)=t,\ v'(t)=e^t$이면 $u'(t)=1,\ v(t)=e^t$

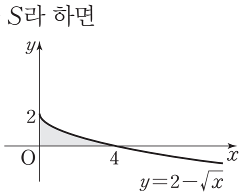
$$=\Big[te^t\Big]_0^2-\int_0^2 e^t\,dt-2\int_0^2 e^t\,dt$$
$$=2e^2-3\Big[e^t\Big]_0^2$$
$$=2e^2-3(e^2-1)=3-e^2$$

24 답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\cdots+\sqrt{2n}}{n^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2k}{n}}$$
$$=\int_0^1 \sqrt{2x}\,dx$$
$$=\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$
$$=\sqrt{2}\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

25 답 $\frac{8}{3}$

곡선 $y=2-\sqrt{x}$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분은 그림과 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

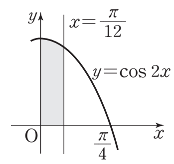


$$S=\int_0^4 (2-\sqrt{x})dx=\Big[2x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$$

26 답 ③

함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y=a$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은?

x축에 평행한 직선에 의해 이등분되므로 사각형의 넓이를 이용해야 해.



① $\frac{1}{2\pi}$ ② $\frac{1}{\pi}$ ③ $\frac{3}{2\pi}$ ④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{2\pi}$

1st 주어진 함수와 직선에 의해 둘러싸인 부분의 넓이를 구해야 해.

함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x\,dx=\Big[\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{4}$$

2nd x축에 평행한 직선에 의해 넓이가 이등분되므로 x축과 평행한 직선 아래에 있는 사각형의 넓이를 구해야 해.

이 영역이 $y=a$에 의하여 이등분되면 그 넓이는 $\frac{1}{8}$이다.

즉, x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$와 $y=a$에 의하여 둘러싸인 영역의 넓이는 $\frac{\pi}{12}\times a$이므로 $\frac{1}{8}=\frac{\pi}{12}\times a$

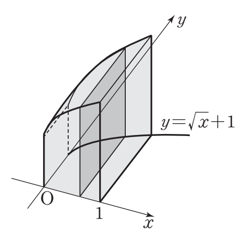
사각형의 넓이를 구한 거야.

$\therefore a=\frac{3}{2\pi}$

27 답 ④

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}+1$과 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

x축에 수직인 단면의 넓이를 적분한 거야.



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

1st x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 구해야 해.

직선 $x=t\ (0\le t\le 1)$을 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(\sqrt{t}+1)^2=t+2\sqrt{t}+1$

2nd 입체도형의 부피는 단면의 넓이를 적분해서 구해야 해.

구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^1 S(t)dt=\int_0^1 (t+2\sqrt{t}+1)dt$$
$$=\Big[\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t\sqrt{t}+t\Big]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1=\frac{17}{6}$$

28 답 ①

$v(t)=2\sqrt{2}t-\frac{1}{\sqrt{t}}$에서 점 P가 진행 방향을 바꾸는 순간은

$v(t)=0$일 때이므로 $t=\frac{1}{2}$

점 P가 $t=\frac{1}{2}$일 때부터 $t=1$이 될 때까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|2\sqrt{2}t-\frac{1}{\sqrt{t}}\right|dt&=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2\sqrt{2}t-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt\\&=\left[\sqrt{2}t^2-2\sqrt{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\\&=(\sqrt{2}-2)-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{4}-2\end{aligned}$$

29 답 56

$f(x)=\frac{1}{3}x\sqrt{x}$라 하면 $f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$이므로 곡선의 길이 l은

$l=\int_0^{12}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^{12}\sqrt{1+\frac{x}{4}}dx$

$\sqrt{1+\frac{x}{4}}=t$라 놓으면

$1+\frac{x}{4}=t^2$에서 $\frac{1}{4}\frac{dx}{dt}=2t \Rightarrow dx=8t\,dt$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=12$일 때 $t=2$이므로

$l=\int_1^2 t\cdot(8t\,dt)=\int_1^2 8t^2\,dt$

$=\left[\frac{8}{3}t^3\right]_1^2=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}$

$\therefore 3l=56$

30 답 2

$\int_2^4 f(2-x)dx$에서 $2-x=t$로 치환하면

$\frac{dt}{dx}=-1 \Rightarrow dx=-dt$

$x=2$일 때 $t=0$, $x=4$일 때 $t=-2$

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(2-x)dx&=\int_0^{-2}f(t)\cdot(-dt)\\&=-\int_0^{-2}f(t)dt\\&=\int_{-2}^{0}f(t)\,dt\end{aligned}$$ … Ⅰ

그런데 $f(-x)=f(x)$이므로 $\int_{-2}^{0}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$

$\int_{-2}^{2}f(x)dx=2\int_{-2}^{0}f(x)dx=4$에서 $\int_{-2}^{0}f(x)dx=2$

$\therefore \int_2^4 f(2-x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx=2$ … Ⅱ

[채점기준표]

Ⅰ	치환적분법을 이용하여 구하는 값을 간단한 정적분으로 나타낸다.	50%
Ⅱ	조건에서 주어진 대칭인 구간에서의 정적분 값을 우함수의 성질을 이용하여 구한다.	50%

31 답 4

두 곡선 $f(x)=2\sin x$, $g(x)=\sin 2x$의 교점의 x좌표는

$2\sin x=\sin 2x$

여기서

$\sin 2x=\sin(x+x)=\sin x\cos x+\cos x\sin x=2\sin x\cos x$

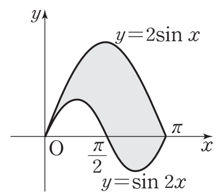
이므로

$2\sin x=2\sin x\cos x$

$2\sin x(\cos x-1)=0$

$\sin x=0$, $\cos x=1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ … Ⅰ



그림과 같이 $0\le x\le\pi$에서 두 곡선의 그래프를 그려보면 $y=2\sin x$의 그래프가 $y=\sin 2x$의 그래프보다 위쪽에 존재한다. … Ⅱ

구하는 부분의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\pi}|2\sin x-\sin 2x|dx\\&=\int_0^{\pi}(2\sin x-\sin 2x)dx\\&=\left[-2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}\\&=\left(2+\frac{1}{2}\right)-\left(-2+\frac{1}{2}\right)=4\end{aligned}$$ … Ⅲ

[채점기준표]

Ⅰ	두 곡선이 만나는 점의 x좌표를 구한다.	30%
Ⅱ	주어진 구간에서 두 곡선 중에서 어느 곡선이 위쪽에 있는지를 나타낸다.	30%
Ⅲ	정적분의 계산을 이용하여 넓이를 구한다.	40%

심플(미적분)해설3단원_081-120팔교.indd 117 20. 9. 4. 오후 3:01

[미분과 적분 공식 대조표]

	미분 공식	적분 공식(C는 적분상수)
1	$(x^n)'=nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$
2	$(e^x)'=e^x$	$\int e^x\,dx=e^x+C$
3	$(a^x)'=a^x \ln a$	$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
4	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$
5	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$\int \log_a x\,dx=x\log_a x-\frac{x}{\ln a}+C$
6	$(\sin x)'=\cos x$	$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$
7	$(\cos x)'=-\sin x$	$\int \cos x\,dx=\sin x+C$
8	$(\tan x)'=\sec^2 x$	$\int \tan x\,dx=\ln\lvert\sec x\rvert+C$
9	$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$\int \sec x\,dx=\ln\lvert\sec x+\tan x\rvert+C$
10	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$\int \csc x\,dx=\ln\lvert\csc x-\cot x\rvert+C$
11	$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$\int \cot x\,dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$
12	$(\sqrt{ax+b})'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$\int \sqrt{ax+b}\,dx=\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b}+C$
13	$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$

국어의 기본 개념을 3가지 키워드로 해결한다!!

[현대시 / 고전시가 / 문학 / 고전문학 / 국어기본]

국어 키워드

〈현대시, 고전시가〉 이해 **키워드**

Ⅰ 화자 Ⅱ 상황 Ⅲ 정서&태도

〈현대소설, 고전소설, 수필, 극〉 이해 **키워드**

Ⅰ 인물 Ⅱ 사건 Ⅲ 배경

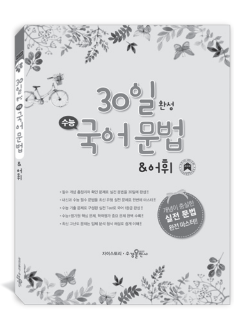
1 낯선 작품도 쉽게 분석할 수 있는 개념 정리

문학 교과서의 작품을 분석하여 출제 유형별로 꼭 알아야 할 개념을 쉬운 설명과 예시 작품을 통해 모두 정리하여 내신과 수능에 완벽 대비할 수 있습니다.

2 수능 유형 분석과 다양한 실전 연습 문제

수능 유형 분석을 바탕으로 단원을 구성하여 체계적으로 문제 유형을 익히고 실전 연습 문제를 통해 실력을 쌓을 수 있습니다.

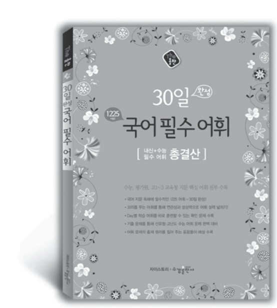
국어 1등급의 Key, 문법과 어휘 30일 완성!!



〈30일 완성 수능 국어 문법〉

신수능 출제 경향 완벽 반영!!

- 내신과 수능에 꼭 필요한 개념의 완벽 정리
- 수능 대비 실전 Test로 1등급 완성
- 고난도 문제의 입체 첨삭 해설

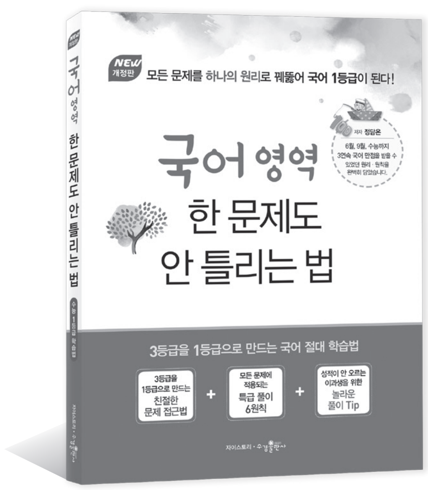


〈30일 완성 수능 국어 필수 어휘〉

내신, 수능 필수 어휘 1225개 총결산!!

- 내신 및 수능 대비 필수 기출 어휘 완전 정복
- 학력평가, 모의평가, 수능 실전 기출 문제
- 어휘 문제의 출제 원리를 짚어주는 꼼꼼 풀이

국어 1등급에는 1등급 풀이 원칙이 있다!!



국어 영역
한 문제도
안 틀리는 법

어려워지는
국어 지문을
쉽고 빨리
이해시킨다.

---

1 3등급이 1등급이 잘 안 되는 이유는?

공부를 해도 3등급에서 1등급으로 잘 도약하지 못하는 이유는 개인적인 감상으로 문제를 풀거나, 처음 보는 현대시라는 것만으로 겁을 먹고 내용 파악에 허둥대거나, 독서 지문은 무조건 〈보기〉나 선택지와 일일이 단순 대응시켜 확인함으로써 시간 부족을 초래하기 때문입니다.

- 지문 자체의 난이도가 높아도 수능 출제 원리대로 글을 읽는다면 빠르고 정확하게 지문을 분석할 수 있고 1등급이 될 수 있습니다.
- 한번 익히면 그 어떤 수능 문제에도 적용하고 응용하여 반드시 국어 1등급이 될 수 있는 방법을 알려드립니다.

2 이과생이 국어 성적 향상이 어려운 이유는?

- 이과생이 국어를 어려워하는 이유는 수능 국어에 문학적 감수성과 언어적 감각이 필요하다고 생각하기 때문입니다.
- 수능 국어는 객관적이고 논리적인 사고력을 요하는 시험으로, 이는 수학과 과학에서 요구하는 논리적 사고력과 같습니다.
- 이과생이 가진 논리력과 사고력을 수능 국어에 적용시킬 수 있는 tip을 알려드립니다.

3 수능 국어 100점을 위한 최고의 독학용 교재!

- 6월, 9월, 수능까지 3연속 국어 만점 저자의 수능에 최적화된 개념과 사고 방식을 알려줍니다.
- 방향을 잘못 잡아 헤매고 있는 수험생들에게 확실한 1등급 공부 방향을잡아줍니다.

3등급이 1등급 되는 문제 접근법

이제 정답을 ②로 고르는 데에 큰 문제가 없을 것이다. 문제에
있는 '틀'을 제공했기 때문이다. 즉, 〈보기〉를 참고하면 비록 '사
번도 등장하지 않는 (가)의 시도 사랑을 주제로 읽어 낼 수 있게

(가)에서 화자가 모시려는 대상, 안으려는 대상은 '태양'이다. 따라서 〈보기〉를
을 사랑하는 대상이라고 추론할 수 있다. 그렇다면, 화자가 '태양'을 모시려는
'몸'과 '맘'을 팔아버린 벗들은 화자와 다른 태도를 가졌다고 볼 수 있다. 그러므로
사랑하는 대상인 '태양'에 대해 화자와 유사한 태도를 보인다고 말하고 있는 ②는
할 수 있다.

핵심은 이것!

이처럼 문학 작품의 의미를 특정 방향으로 해석하고, 이에 대해
위해서는 반드시 기준이 필요하다. 그렇게 해야 객관성을 확보할 수
기준은 위의 문제처럼 〈보기〉가 될 수도 있고, 제시문에 묶여 있는

☆ 이과생을 위한 Tip

여기서 선택지를 사실형, 분할형 등으로 유형을 나누어 설명한 것은 설명의 편의를 위해서
계적으로 적용해야 한다는 의미가 아니다. 따라서 선택지를 여기서 구분한 유형에 맞춰 판단
하지 말자. 이는 수단에 갇혀 본질을 잊는 행위이다. 선택지의 구성 원리를 공부하는 이유는
으로 한 문제 풀이를 하기 위해서이다. 다시 말해, 단순히 눈으로 같은 내용을 찾아 헤매는 문
위해 선택지의 구성 원리를 공부하는 것이다. 이를 잊어서는 안 된다.

3등급이 1등급 되는 지문 접근법 **[01~05]**

〈 (가) 형식 문단 만들기 〉

가 (1)아랫도리 다박솔 깔린 산(山) 넘어 큰 산(山) 그 넘엇 산(山) 안 보
름을 타다.

(2)우뚝 솟은 산(山), 묵중히 엎드린 산(山), 골골이 장송(長松) 들어섰
위 엉서리에 얽혔고, 샅샅이 떡갈나무 억새풀 우거진 데 너구리, 여우,
소리, 도마뱀, 능구리 등(等), 실로 무수한 짐승을 지니인,