올림포스
전국연합학력평가
기출문제집
수학(고1)

정답과 풀이

정답과 풀이

01 다항식

개념 확인 문제

본문 7쪽

01 (1) x^3-3x^2-x+9 (2) $x^3-x^2+15x-13$

02 (1) $-6a^3b^3$ (2) $-\dfrac{y^5}{4x^2}$

03 (1) x^3-2x-1 (2) $6x^3-5x^2y+6xy^2+8y^3$

04 (1) $4x^2+4x+1$ (2) $a^2-6ab+9b^2$
(3) $4x^2-y^2$ (4) x^2+5x+6
(5) $6x^2-5x-4$
(6) $a^2+4b^2+c^2-4ab-4bc+2ca$
(7) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$ (8) $x^3-6x^2+12x-8$
(9) $8x^3+1$ (10) $27a^3-b^3$

05 (1) 13 (2) 45

06 (1) 몫: $2x^2-7x+7$, 나머지: -4
(2) 몫: $4x+14$, 나머지: $29x-25$

07 (1) $a=1$, $b=2$, $c=-1$ (2) $a=1$, $b=4$, $c=-1$

08 (1) 3 (2) $-\dfrac{51}{8}$

09 8

10 (1) 몫: x^2+x-1, 나머지: -3 (2) 몫: $2x^2+x-1$, 나머지: 1

11 (1) $(a+2)^3$ (2) $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$
(3) $(a-3)^3$ (4) $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$
(5) $(x-2y-z)^2$ (6) $(a-1)(a-2)(a^2-3a+4)$
(7) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$ (8) $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$
(9) $(x-y+1)(2x+y+1)$ (10) $(x+2)(x-3)(x-4)$

내신&학평 유형 연습

본문 8~19쪽

01 ③	02 ②	03 ③	04 ③	05 ①	06 ③
07 ④	08 ③	09 5	10 ④	11 10	12 12
13 3	14 36	15 ⑤	16 ②	17 ⑤	18 ③
19 ②	20 ②	21 ①	22 ②	23 ②	24 ④
25 ⑤	26 ④	27 5	28 ①	29 ①	30 ③
31 ②	32 ③	33 ④	34 ①	35 ⑤	36 ③
37 ②	38 10	39 3	40 ②	41 ④	42 24
43 ②	44 ③	45 ④	46 ⑤	47 ②	48 ①
49 12	50 ④	51 ④	52 ④	53 ④	54 ⑤
55 ④	56 ④	57 ①	58 ①	59 503	60 2
61 ②	62 ⑤	63 ③	64 ②	65 ③	66 ③
67 ③	68 ①	69 176			

01

$$\begin{aligned}A-B&=(3x^2-2xy+y^2)-(x^2+xy-y^2)\\&=2x^2-3xy+2y^2\end{aligned}$$

답 ③

02

$$\begin{aligned}A+B&=(x^2-2xy+y^2)+(x^2+2xy+y^2)\\&=2x^2+2y^2\end{aligned}$$

답 ②

03

$$\begin{aligned}A-2B&=4x^2+2x-1-2(x^2+x-3)\\&=4x^2+2x-1-2x^2-2x+6\\&=2x^2+5\end{aligned}$$

답 ③

04

$$\begin{aligned}&(A+2B)-(B+C)\\&=A+2B-B-C=A+B-C\\&=(x^2-xy+2y^2)+(x^2+xy+y^2)-(x^2-y^2)\\&=x^2-xy+2y^2+x^2+xy+y^2-x^2+y^2\\&=x^2+4y^2\end{aligned}$$

답 ③

05

$X-A=B$에서 $X=A+B$이므로

$$\begin{aligned}X&=A+B\\&=(2x^2-4x-2)+(3x+3)\\&=2x^2-x+1\end{aligned}$$

답 ①

06

$A-2X=B$에서 $2X=A-B$이므로

$$\begin{aligned}X&=\frac{1}{2}(A-B)\\&=\frac{1}{2}\{(2x^3+x^2-4x+1)-(x^2-4x+3)\}\\&=\frac{1}{2}(2x^3+x^2-4x+1-x^2+4x-3)\\&=\frac{1}{2}(2x^3-2)=x^3-1\end{aligned}$$

답 ③

07

물체 A와 물체 B의 질량을 각각 m_A, m_B라 하고 물체 A와 물체 B의 속력을 각각 v_A, v_B라 하자.

물체 A의 질량이 물체 B의 질량의 3배이므로

$m_A=3m_B$ …… ㉠

물체 A의 속력이 물체 B의 속력의 $\dfrac{1}{2}$배이므로

$v_A=\dfrac{1}{2}v_B$ …… ㉡

물체 A와 물체 B의 구심력의 크기가 같으므로

$$\frac{m_A(v_A)^2}{r_A}=\frac{m_B(v_B)^2}{r_B}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{3m_B\left(\frac{1}{2}v_B\right)^2}{r_A}=\frac{m_B(v_B)^2}{r_B}$$

$$\frac{3\times\frac{1}{4}}{r_A}=\frac{1}{r_B}$$

따라서 $\frac{r_A}{r_B}=\frac{3}{4}$

답 ④

08

구경이 40인 망원경 A의 집광력을 F_1이라 하고, 구경이 x인 망원경 B의 집광력을 F_2라 하면

$F_1=k\times 40^2=1600k$, $F_2=k\times x^2=kx^2$

망원경 A의 집광력 F_1은 망원경 B의 집광력 F_2의 2배이므로

$F_1=2F_2$

즉, $1600k=2kx^2$이므로 $x^2=800$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{800}=20\sqrt{2}$

답 ③

09

$$\begin{aligned}(x+4)(2x^2-3x+1)&=x(2x^2-3x+1)+4(2x^2-3x+1)\\&=2x^3-3x^2+x+8x^2-12x+4\\&=2x^3+5x^2-11x+4\end{aligned}$$

따라서 x^2의 계수는 5이다.

답 5

다른 풀이

$(x+4)(2x^2-3x+1)$에서 x^2항은 $x\times(-3x)+4\times 2x^2=5x^2$

따라서 x^2의 계수는 5이다.

10

$$\begin{aligned}(2x+3y)(4x-y)&=2x(4x-y)+3y(4x-y)\\&=8x^2-2xy+12xy-3y^2\\&=8x^2+10xy-3y^2\end{aligned}$$

따라서 xy의 계수는 10이다.

답 ④

다른 풀이

$(2x+3y)(4x-y)$에서 xy항은 $2x\times(-y)+3y\times 4x=10xy$

따라서 xy의 계수는 10이다.

11

$$\begin{aligned}(x+3)(x^2+2x+4)&=x(x^2+2x+4)+3(x^2+2x+4)\\&=x^3+2x^2+4x+3x^2+6x+12\\&=x^3+5x^2+10x+12\end{aligned}$$

따라서 x의 계수는 10이다.

답 10

다른 풀이

$(x+3)(x^2+2x+4)$에서 x항은 $x\times 4+3\times 2x=10x$

따라서 x의 계수는 10이다.

12

$(x+2y)^3=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

따라서 xy^2의 계수는 12이다.

답 12

13

$$\begin{aligned}(x+a)^3+x(x-4)&=(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)+(x^2-4x)\\&=x^3+(3a+1)x^2+(3a^2-4)x+a^3\end{aligned}$$

에서 x^2의 계수는 $3a+1$

따라서 $3a+1=10$이므로 $a=3$

답 3

14

$$\begin{aligned}(x-y-2z)^2&=x^2+(-y)^2+(-2z)^2+2\times x\times(-y)\\&\quad+2\times(-y)\times(-2z)+2\times(-2z)\times x\\&=x^2+y^2+4z^2-2xy+4yz-4zx\\&=x^2+y^2+4z^2-2(xy-2yz+2zx)\\&=62-2\times 13=36\end{aligned}$$

답 36

15

$(a+b-1)\{(a+b)^2+a+b+1\}=8$에서

$a+b=X$로 놓으면

$(X-1)(X^2+X+1)=8$

$X^3-1=8$, $X^3=9$

따라서 $(a+b)^3=9$

답 ⑤

16

$2019=k$로 놓으면

$$\begin{aligned}2016\times 2019\times 2022&=(k-3)k(k+3)\\&=k(k^2-9)\\&=k^3-9k\\&=2019^3-9\times 2019\end{aligned}$$

따라서 $a=2019$

답 ②

17

두 정사각형의 넓이의 합은 $a^2+(2b)^2=a^2+4b^2$, 직사각형의 넓이는 ab이고, 두 정사각형의 넓이의 합이 직사각형의 넓이의 5배이므로

$a^2+4b^2=5ab$

이때 $ab=4$이고 $(a+2b)^2=a^2+4b^2+4ab$이므로

$(a+2b)^2=9ab=9\times4=36$

따라서 한 변의 길이가 $a+2b$인 정사각형의 넓이는 36이다.

답 ⑤

18

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$\quad=2^3+3\times\frac{1}{3}\times2=10$

답 ③

19

$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+(-c)^2$

$\quad=(a+b-c)^2-2(ab-bc-ca)$

$\quad=25-2\times(-2)=29$

답 ②

다른 풀이

$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

$\quad=a^2+b^2+c^2+2(ab-bc-ca)$

에 $(a+b-c)^2=25$, $ab-bc-ca=-2$를 대입하면

$25=a^2+b^2+c^2+2\times(-2)$

따라서 $a^2+b^2+c^2=25+4=29$

20

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이므로

$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}$

$\quad=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$

$\quad=\frac{(\sqrt{2})^3-3\times(-2)\times\sqrt{2}}{-2}$

$\quad=\frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{-2}$

$\quad=-4\sqrt{2}$

답 ②

21

두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 a, b라 하자.

한 정육면체의 모서리가 12개이고, 두 정육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 60이므로

$12(a+b)=60$, $a+b=5$ …… ㉠

또, 한 정육면체의 면이 6개이고, 두 정육면체의 겉넓이의 합이 126이므로

$6(a^2+b^2)=126$, $a^2+b^2=21$ …… ㉡

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로 ㉠, ㉡에서

$21=5^2-2ab$, $2ab=4$

$ab=2$

따라서 두 정육면체의 부피의 합은

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$\quad=5^3-3\times2\times5=95$

답 ①

22

$\angle \mathrm{HPI}=90^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{HI}}=\overline{\mathrm{OP}}=4$

$\overline{\mathrm{PH}}=x$, $\overline{\mathrm{PI}}=y$라 하면 직각삼각형 PIH에서

$x^2+y^2=16$ …… ㉠

삼각형 PIH의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=\frac{\pi}{4}$에서 $r=\frac{1}{2}$

삼각형 PIH의 넓이를 이용하면

$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(x+y+4)$, $xy=\frac{1}{2}(x+y+4)$

$x+y=2(xy-2)$ …… ㉡

이때 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로 ㉠, ㉡에서

$16=4(xy-2)^2-2xy$, $xy(2xy-9)=0$

$xy\neq0$이므로 $xy=\frac{9}{2}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x+y=5$

따라서

$\overline{\mathrm{PH}}^3+\overline{\mathrm{PI}}^3=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\quad=5^3-3\times\frac{9}{2}\times5=\frac{115}{2}$

답 ②

23

[그림 1]에서 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b, 높이를 c라 하면 [그림 2]의 입체도형의 겉넓이가 236이므로

$2(ab+bc+ca)=236$

[그림 2]의 입체도형의 모든 모서리의 길이의 합이 82이므로

$4(a+b+c)+6=82$, $a+b+c=19$

따라서

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$\quad=19^2-236=125$

이므로 [그림 1]에서 직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

답 ②

24

$$
\begin{array}{r}
3x+1 \\
x^2-x+2\,\big)\overline{3x^3-2x^2+3x+7} \\
\underline{3x^3-3x^2+6x} \\
x^2-3x+7 \\
\underline{x^2-\ \ x+2} \\
-2x+5
\end{array}
$$

따라서 $a=3$, $b=5$이므로 $a+b=8$

답 ④

25

다항식 $4x^3-2x^2+3x+1$을 x^2-x+1로 나누면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r}
4x+2 \\
x^2-x+1\overline{)4x^3-2x^2+3x+1} \\
\underline{4x^3-4x^2+4x} \\
2x^2-x+1 \\
\underline{2x^2-2x+2} \\
x-1
\end{array}
$$

따라서 $Q(x)=4x+2$이므로 $Q(1)=4+2=6$

답 ⑤

26

$P(x)+4x=3x^3+x+11+4x=3x^3+5x+11$이므로 다항식 $P(x)+4x$를 다항식 $Q(x)=x^2-x+1$로 나누면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r}
3x+3 \\
x^2-x+1\overline{)3x^3+5x+11} \\
\underline{3x^3-3x^2+3x} \\
3x^2+2x+11 \\
\underline{3x^2-3x+3} \\
5x+8
\end{array}
$$

따라서 나머지는 $5x+8$이므로 $a=8$

답 ④

27

주어진 등식에서 좌변의 이차항은 $2x^2$, 우변의 이차항은 ax^2이므로 이차항의 계수를 비교하면

$a=2$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$3\times(-2)+8=0-2b+0$에서 $b=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0+8=0+0+2c$에서 $c=4$

따라서 $a+b+c=2+(-1)+4=5$

답 5

다른 풀이

좌변을 전개하면

$(2x+3)(x-2)+8=2x^2+3x-4x-6+8$

$=2x^2-x+2$ …… ㉠

우변을 전개하면

$ax(x-2)+b(x-2)+cx=ax^2-2ax+bx-2b+cx$

$=ax^2+(-2a+b+c)x-2b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $-2a+b+c=-1$, $-2b=2$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=4$이므로

$a+b+c=5$

28

$x(x+1)+2(x+1)=x^2+3x+2=x^2+ax+b$

이므로 $a=3$, $b=2$

따라서 $a-b=3-2=1$

답 ①

29

x에 대한 항등식이므로 $x=1$을 대입하면

$1-5+a+1=-1$에서 $a=2$

$x^3-5x^2+2x+1=(x-1)Q(x)-1$에 $x=2$를 대입하면

$2^3-5\times2^2+2\times2+1=(2-1)\times Q(2)-1$

$8-20+4+1=Q(2)-1$

따라서 $Q(2)=-6$

답 ①

30

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-a+b$ …… ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$6=a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=3$

그러므로 주어진 등식은

$x(x+1)(x+2)=(x+1)(x-1)P(x)+3x+3$

이때 $a-b=0$이므로 위 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-P(0)+3$, $P(0)=3$

따라서 $P(a-b)=P(0)=3$

답 ③

다른 풀이

주어진 등식의 좌변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+3x^2+2x=(x+1)(x-1)P(x)+ax+b$

$x^3+3x^2+2x=(x^2-1)P(x)+ax+b$

다항식 x^3+3x^2+2x를 x^2-1로 나누면 오른쪽과 같으므로

$$
\begin{array}{r}
x+3 \\
x^2-1\overline{)x^3+3x^2+2x} \\
\underline{x^3-x} \\
3x^2+3x \\
\underline{3x^2-3} \\
3x+3
\end{array}
$$

$P(x)=x+3$, $a=3$, $b=3$

따라서

$P(a-b)=P(0)$

$=3$

31

$D=-2x^2+(2x+1)+(x^3+x^2)$

$=x^3-x^2+2x+1$

이므로 사각형 모양으로 배열된 각 변의 3개의 다항식의 합은 x^3-x^2+2x+1이다.

$(x^3+x^2)+P(x)+(x^2+1)=x^3-x^2+2x+1$에서
$x^3+2x^2+1+P(x)=x^3-x^2+2x+1$
이 식은 x에 대한 항등식이므로
$P(x)=-3x^2+2x$
$Q(x)+(x^3-3x^2)+(x^2+1)=x^3-x^2+2x+1$에서
$Q(x)+x^3-2x^2+1=x^3-x^2+2x+1$
이 식은 x에 대한 항등식이므로
$Q(x)=x^2+2x$
따라서
$P(x)+Q(x)=(-3x^2+2x)+(x^2+2x)$
$=-2x^2+4x$

답 ②

32

$f(x)=x^3+3x^2+a$라 하면 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(1)=7$이므로
$1+3+a=7$
따라서 $a=3$

답 ③

33

$P(x)=x^3+x^2+x+1$이라 하자.
$P(x)$를 $2x-1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $P\left(\frac{1}{2}\right)$이므로
$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{15}{8}$
따라서 나머지는 $\frac{15}{8}$이다.

답 ④

34

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면
$f(x)=(x-1)Q(x)+R$
나머지정리에 의하여 $4\times\{f(1)-2\}=16$이므로
$f(1)=6$
따라서 구하는 나머지는
$R=f(1)=6$

답 ①

35

조건 (가), (나)에 의하여
$x^2f(x)+(3x^2+4x)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$
$4x(x+1)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$
위 식의 양변에 $x=0$, $x=-1$을 각각 대입하면 $b=0$, $a=3$이므로
$4x(x+1)f(x)=x^3+3x^2+2x$
$4x(x+1)f(x)=x(x+1)(x+2)$
이 식은 x에 대한 항등식이므로
$4f(x)=x+2$
$f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$
조건 (가)에서
$g(x)=x^2f(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2$
따라서 $g(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는
$g(4)=16+8=24$

답 ⑤

다른 풀이

조건 (가), (나)에 의하여
$x^2f(x)+(3x^2+4x)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$
$4x(x+1)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$
위 식의 양변에 $x=0$, $x=-1$을 각각 대입하면 $b=0$, $a=3$이므로
$4x(x+1)f(x)=x^3+3x^2+2x$
$4x(x+1)f(x)=x(x+1)(x+2)$
위 식의 양변에 $x=4$를 대입하면
$80f(4)=120$, $f(4)=\frac{3}{2}$
따라서 $g(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는
$g(4)=16f(4)=16\times\frac{3}{2}=24$

36

$f(x)$를 $x+1$, x^2-3으로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, 나눈 나머지를 R라 하자.
$f(x)=(x+1)Q_1(x)+R$에서
$f(x)-R=(x+1)Q_1(x)$
$f(x)=(x^2-3)Q_2(x)+R$에서
$f(x)-R=(x^2-3)Q_2(x)$이므로
$f(x)-R=(x+1)(x^2-3)(x+a)$ (a는 상수) …… ㉠
$f(x+1)-5$를 x^2+x로 나눈 몫을 $Q_3(x)$라 하면
$f(x+1)-5=(x^2+x)Q_3(x)$ …… ㉡
㉡에 $x=-1$, $x=0$을 대입하면
$f(0)=5$, $f(1)=5$
㉠에 $x=0$, $x=1$을 대입하면
$f(0)=-3a+R=5$ …… ㉢
$f(1)=-4-4a+R=5$ …… ㉣
㉢, ㉣을 연립하여 풀면
$R=-7$, $a=-4$
따라서 $f(x)=(x+1)(x^2-3)(x-4)-7$이므로
$f(4)=-7$

답 ③

37

다항식 $(4x+2)^{10}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(4x+2)^{10}=xQ(x)+R$

이 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$R=\boxed{1024}$

$(4x+2)^{10}=xQ(x)+\boxed{1024}$에 $x=505$를 대입하면

$2022^{10}=505\times Q(505)+\boxed{1024}$

나머지는 505보다 작은 수이므로

$2022^{10}=505\times Q(505)+505\times2+14$

$\qquad=505\times\{Q(505)+\boxed{2}\}+\boxed{14}$

따라서 2022^{10}을 505로 나누었을 때의 나머지는 $\boxed{14}$이다.

즉, $a=1024$, $b=2$, $c=14$이므로

$a+b+c=1040$

답 ②

38

$f(x)=x^3-x^2-10x+a$라 하면 $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(1)=1^3-1^2-10\times1+a=0$

따라서 $a=10$

답 10

39

다항식 $(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)$을 x^2+4x+5로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)$은 x^2+4x+5로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)=(x^2+4x+5)Q(x)$

$(x-1)\{(x+2)(x+a)+b\}=(x^2+4x+5)Q(x)$

x^2+4x+5는 $x-1$을 인수로 갖지 않고, 좌변은 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로 $Q(x)=x-1$이고

$x^2+4x+5=(x+2)(x+a)+b$

$x^2+4x+5=x^2+(2+a)x+2a+b$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$4=2+a$, $5=2a+b$에서 $a=2$, $b=1$

따라서 $a+b=3$

답 3

40

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=1+a+b+6=4$, $a+b=-3$ …… ㉠

$f(x+2)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $f(x+2)$는 $x-1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(x+2)=(x-1)Q(x)$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(3)=0$이므로

$9a+3b=-33$, $3a+b=-11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=1$

따라서 $b-a=5$

답 ②

41

x에 대한 다항식 x^3+x^2+ax+b가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 조립제법을 이용하면

1	1	1	a	b
		1	2	$a+2$
1	1	2	$a+2$	$a+b+2$
		1	3	
	1	3	$a+5$	

$a+b+2=0$, $a+5=0$이므로 $a=-5$, $b=3$

$Q(x)=x+3$이므로

$Q(ab)=Q(-15)=-15+3=-12$

답 ④

42

조건 ㈎에서 $2P(x)+Q(x)=0$, 즉 $Q(x)=-2P(x)$이므로

$P(x)Q(x)=-2\{P(x)\}^2$

조건 ㈏에 의하여 $-2\{P(x)\}^2$은 x^2-3x+2로 나누어떨어지므로 $-2\{P(x)\}^2$을 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $A(x)$라 하면

$-2\{P(x)\}^2=(x^2-3x+2)A(x)$

$\{P(x)\}^2=(x-1)(x-2)\left\{-\frac{1}{2}A(x)\right\}$

$P(x)$는 이차다항식이고, $\{P(x)\}^2$이 $x-1$과 $x-2$를 인수로 가지므로 $P(x)$도 $x-1$과 $x-2$를 인수로 갖는다. 즉

$P(x)=a(x-1)(x-2)$,

$Q(x)=-2a(x-1)(x-2)$ (a는 상수, $a\neq0$)

으로 놓으면 $P(0)=-4$이므로

$2a=-4$에서 $a=-2$

따라서 $P(x)=-2(x-1)(x-2)$, $Q(x)=4(x-1)(x-2)$이므로

$Q(4)=4\times3\times2=24$

답 24

43

$P(x)=x^2+ax+b$, $Q(x)=x+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x+1)-Q(x+1)=\{(x+1)^2+a(x+1)+b\}-\{(x+1)+c\}$

$\qquad=(x+1)\{(x+1)+a-1\}+(b-c)$

$\qquad=(x+1)(x+a)+(b-c)$

조건 ㈎에서 다항식 $P(x+1)-Q(x+1)$은 $x+1$로 나누어떨어지므로 $b-c=0$, 즉 $b=c$

그러므로 $P(x)-Q(x)=x^2+(a-1)x$

조건 (나)에서 방정식 $P(x)-Q(x)=0$은 중근을 가지므로

$a-1=0$, 즉 $a=1$

다항식 $P(x)+Q(x)=x^2+2x+2b$를 $x-2$로 나눈 나머지가 12이므로 $P(2)+Q(2)=4+4+2b=12$, 즉 $2b=4$

$b=c=2$

따라서 $P(x)=x^2+x+2$이므로 $P(2)=2^2+2+2=8$

답 ②

44

다항식 $2x^3+3x+4$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} a & 2 & 0 & 3 & 4 \\ & & 2a & \square & \square \\ \hline & 2 & 2a & \square & b \end{array}$$

이때 $2a=2$이므로 $a=1$

따라서 다항식 $2x^3+3x+4$를 일차식 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ & & 2 & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 2 & 5 & 9 \end{array}$$

즉, $b=9$이므로

$a+b=1+9=10$

답 ③

45

다항식 $3x^3-7x^2+5x+1$을 $3x-1$로 나눈 몫과 나머지를 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{3} & 3 & -7 & 5 & 1 \\ & & \boxed{1} & \boxed{-2} & 1 \\ \hline & 3 & \boxed{-6} & \boxed{3} & 2 \end{array}$$

이므로

$3x^3-7x^2+5x+1=\left(x-\frac{1}{3}\right)(\boxed{3x^2-6x+3})+2$

$=(3x-1)(\boxed{x^2-2x+1})+2$

따라서 몫은 $\boxed{x^2-2x+1}$이고, 나머지는 2이다.

즉, $f(x)=3x^2-6x+3$, $g(x)=x^2-2x+1$이므로

$f(2)+g(2)=3+1=4$

답 ④

46

다항식 x^3-27을 인수분해하면

$x^3-27=x^3-3^3$

$=(x-3)(x^2+3x+9)$

따라서 $a=3$, $b=9$이므로 $a+b=12$

답 ⑤

다른 풀이

$x^3-27=(x-3)(x^2+ax+b)$가 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$-26=-2(1+a+b)$, $1+a+b=13$

따라서 $a+b=12$

47

$x^4-x^2-12=(x-2)(x+2)(x^2+3)$

a가 양수이므로 $a=2$, $b=3$

따라서 $a+b=2+3=5$

답 ②

48

$x(x+2)+a=(x+b)^2$의 양변을 전개하면

$x^2+2x+a=x^2+2bx+b^2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2=2b$, $a=b^2$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로 $ab=1$

답 ①

49

$x+y=6$, $xy=2$이므로

$x^2y+xy^2=xy(x+y)$

$=2\times6=12$

답 12

다른 풀이

$x+y=6$의 양변에 xy를 곱하면

$xy(x+y)=6xy$

$x^2y+xy^2=6xy$

이때 $xy=2$이므로

$x^2y+xy^2=6\times2=12$

50

$x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$,

$xy=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$이므로

$x^2y+xy^2+x+y=xy(x+y)+(x+y)=(x+y)(xy+1)$

$=2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$

답 ④

51

다항식 x^3+3x^2-x-3을 인수분해하면

$x^3+3x^2-x-3=x^2(x+3)-(x+3)=(x^2-1)(x+3)$

이므로 $x^3+3x^2-x-3=(x^2-1)P(x)$에서

$(x^2-1)(x+3)=(x^2-1)P(x)$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 $P(x)=x+3$

따라서 $P(1)=1+3=4$

답 ④

52

한 변의 길이가 $a+6$인 정사각형 모양의 색종이의 넓이는 $(a+6)^2$이다.

한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 색종이를 오려낸 후 남아 있는 □ 모양의 색종이의 넓이는

$(a+6)^2-a^2=(a+6+a)(a+6-a)$

$\qquad=(2a+6)\times 6=12(a+3)$

따라서 $k=12$

답 ④

53

[그림 1]에서 A부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(2x+4)\times x=x(x+2)$

[그림 1]에서 B부분의 넓이는 $3\times 2=6$

[그림 1]의 넓이는 한 변의 길이가 $3x$인 정사각형에서 A부분과 B부분을 뺀 부분의 넓이와 같으므로

$(3x)^2-x(x+2)-6=8x^2-2x-6$

$\qquad=(4x+3)(2x-2)$ …… ㉠

[그림 2]의 직사각형에서 가로의 길이를 a라 하면 이 직사각형의 넓이는

$a(2x-2)$ …… ㉡

[그림 1]의 색종이를 여러 조각으로 나누어 겹치지 않게 빈틈없이 붙여서 [그림 2]와 같은 모양을 만들었으므로 [그림 1]의 도형의 넓이와 [그림 2]의 도형의 넓이는 같다.

㉠, ㉡에서 $a(2x-2)=(4x+3)(2x-2)$이므로

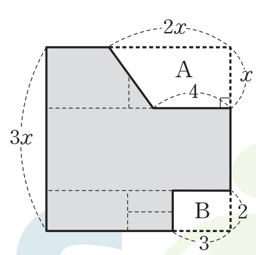
$a=4x+3$

따라서 직사각형의 가로의 길이는 $4x+3$이다.

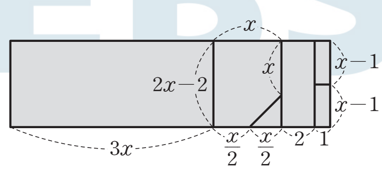
답 ④

다른 풀이

[그림 1]의 색종이를 오른쪽 그림과 같이 점선을 따라 잘라 내어 여섯 개의 조각으로 나눈다.



이렇게 여러 조각으로 나누어진 색종이를 다음 그림과 같이 겹치지 않게 빈틈없이 붙이면 문제의 [그림 2]와 같이 세로의 길이가 $2x-2$인 직사각형을 만들 수 있다.



따라서 이 직사각형의 가로의 길이는 $4x+3$이다.

54

$x^2+1=X$로 놓으면

$(x^2+1)^2+3(x^2+1)+2=X^2+3X+2=(X+1)(X+2)$

$\qquad=(x^2+2)(x^2+3)$

따라서 $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$이므로 $a+b=5$

답 ⑤

55

$x^2+x=X$로 놓으면

$(x^2+x)(x^2+x+1)-6=X(X+1)-6=X^2+X-6$

$\qquad=(X-2)(X+3)$

$\qquad=(x^2+x-2)(x^2+x+3)$

$\qquad=(x+2)(x-1)(x^2+x+3)$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로 $a+b=4$

답 ④

56

$x^2-x=X$로 놓으면

$(x^2-x)^2+2x^2-2x-15=X^2+2X-15=(X+5)(X-3)$

$\qquad=(x^2-x+5)(x^2-x-3)$

따라서 $a=-1$, $b=5$, $c=-3$ 또는 $a=-1$, $b=-3$, $c=5$이므로 $a+b+c=1$

답 ④

57

다항식 x^4+7x^2+16을 인수분해하면

$x^4+7x^2+16=(x^4+8x^2+16)-x^2=(x^2+4)^2-x^2$

$\qquad=(x^2+x+4)(x^2-x+4)$

따라서 $a=1$, $b=4$이므로 $a+b=5$

답 ①

58

다항식 x^4+4x^2+16을 인수분해하면

$x^4+4x^2+16=(x^4+8x^2+16)-4x^2=(x^2+4)^2-(2x)^2$

$\qquad=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=2$, $d=4$이므로

$a+b+c+d=12$

답 ①

59

$x^2=X$로 놓으면

$x^4-8x^2+16=X^2-8X+16=(X-4)^2$

$\qquad=(x^2-4)^2=(x+2)^2(x-2)^2$

이때 $a>b$이므로 $a=2$, $b=-2$

따라서

$\frac{2012}{a-b}=\frac{2012}{2-(-2)}=503$

답 503

60

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+kxy-3y^2+x+11y-6$

$=x^2+(ky+1)x-3y^2+11y-6$

$=x^2+(ky+1)x-(3y-2)(y-3)$

x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$(3y-2)-(y-3)=ky+1$

$2y+1=ky+1$

따라서 $k=2$

답 2

61

주어진 식을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$xy(x+y)-yz(y+z)-zx(z-x)$

$=x^2y+xy^2-y^2z-yz^2-z^2x+zx^2$

$=(y+z)x^2+(y^2-z^2)x-yz(y+z)$

$=(y+z)\{x^2+(y-z)x-yz\}$

$=(y+z)(x+y)(x-z)$

$=(x+y)(y+z)(x-z)$

따라서 인수인 것은 ② $x-z$이다.

답 ②

62

주어진 조건에서 좌변을 b에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$a^3+c^3+a^2c+ac^2-ab^2-b^2c$

$=-(a+c)b^2+a^3+c^3+ac(a+c)$

$=-(a+c)b^2+(a+c)(a^2-ac+c^2)+ac(a+c)$

$=(a+c)(-b^2+a^2-ac+c^2+ac)$

$=(a+c)(-b^2+a^2+c^2)$

이때 $(a+c)(a^2+c^2-b^2)=0$에서 a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a>0$, $c>0$

즉, $a+c>0$이므로 $a^2+c^2=b^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 b가 빗변인 직각삼각형이다.

답 ⑤

63

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-7$이라 하면 $f(-1)=0$이므로 $x+1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	2	-3	-12	-7
		-2	5	7
-1	2	-5	-7	0
		-2	7	
	2	-7	0	

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-7=(x+1)^2(2x-7)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-7$이므로

$a+b+c=-4$

답 ③

64

나무 블록의 부피는

$x^2(x+3)-1^3\times2=x^3+3x^2-2$

$f(x)=x^3+3x^2-2$라 하면 $f(-1)=0$이므로 $x+1$은 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	3	0	-2
		-1	-2	2
	1	2	-2	0

$f(x)=(x+1)(x^2+2x-2)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-2$이므로

$a\times b\times c=-4$

답 ②

65

$f(x)=x^4-2x^3+2x^2-x-6$이라 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 $x+1$, $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	-2	2	-1	-6
		-1	3	-5	6
2	1	-3	5	-6	0
		2	-2	6	
	1	-1	3	0	

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

따라서 $a=-2$, $b=-1$, $c=3$이므로 $a+b+c=0$

답 ③

66

$101=x$로 놓으면

$101^3-3\times101^2+3\times101-1=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$

$=(101-1)^3=100^3$

$=10^6$

답 ③

67

$14=X$로 놓으면

$(14^2+2\times14)^2-18\times(14^2+2\times14)+45$

$=(X^2+2X)^2-18(X^2+2X)+45$

$=(X^2+2X-3)(X^2+2X-15)$

$=(X-1)(X+3)(X-3)(X+5)$

$X=14$를 대입하면

$(14-1)\times(14+3)\times(14-3)\times(14+5)=13\times17\times11\times19$

따라서 $a+b+c+d=60$

답 ③

68

$2018=a$, $3=b$로 놓으면

$2018\times2021+9=a(a+b)+b^2=a^2+ab+b^2$

이므로

$$\begin{aligned}2018^3-27&=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\\&=2015\times(2018\times2021+9)\end{aligned}$$

따라서 2018^3-27을 $2018\times2021+9$로 나눈 몫은 2015이다.

답 ①

69

$10=x$로 놓으면

$10\times13\times14\times17+36$

$=x(x+3)(x+4)(x+7)+36=(x^2+7x)(x^2+7x+12)+36$

$=(x^2+7x)^2+12(x^2+7x)+36=(x^2+7x+6)^2$

$=(10^2+7\times10+6)^2=176^2$

따라서 $\sqrt{10\times13\times14\times17+36}=176$

답 176

서술형 연습

본문 20쪽

01 10 **02** 9

01

$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$에서

$f(1)-1=0$, $f(2)-2=0$, $f(3)-3=0$

즉, $f(x)-x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$을 인수로 갖는다. ······ ㉮

$f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x$ ······ ㉯

따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$f(4)=(4-1)(4-2)(4-3)+4=10$ ······ ㉰

답 10

단계	채점 기준	비율
㉮	$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$을 이용하여 $f(x)-x$의 인수를 구한 경우	40%
㉯	$f(x)$를 구한 경우	30%
㉰	나머지정리를 이용하여 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지를 구한 경우	30%

02

$f(x)=x^4+ax^2+b$라 하면 $f(x)$가 $x+1$을 인수로 가지므로

$f(-1)=1+a+b=0$에서 $b=-a-1$ ······ ㉠

조립제법을 이용하여 $f(x)=x^4+ax^2-a-1$을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}-1 & 1 & 0 & a & 0 & -a-1\\ & & -1 & 1 & -(a+1) & a+1\\ \hline & 1 & -1 & a+1 & -(a+1) & 0\end{array}$$

$f(x)=(x+1)\{x^3-x^2+(a+1)x-(a+1)\}$ ······ ㉮

$x^3-x^2+(a+1)x-(a+1)$은 $x+1$을 인수로 가지므로

$(-1)^3-(-1)^2+(a+1)\times(-1)-(a+1)=0$

$-2a-4=0$, 즉 $a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$b=1$ ······ ㉯

따라서 $x^4-2x^2+1=(x+1)^2P(x)$이므로

$16-8+1=1\times P(-2)$

그러므로 $P(-2)=9$ ······ ㉰

답 9

단계	채점 기준	비율
㉮	조립제법을 이용하여 다항식 x^4+ax^2+b를 인수분해한 경우	40%
㉯	a, b의 값을 구한 경우	40%
㉰	$P(-2)$의 값을 구한 경우	20%

1등급 도전

본문 21~23쪽

01 ① **02** 16 **03** 33 **04** 54
05 ④ **06** 74 **07** ⑤ **08** ③
09 13 **10** 146 **11** 27

01

풀이 전략 다항식의 연산을 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 정오각형의 한 내각의 크기를 구한 후 이등변삼각형의 성질과 조건을 이용하여 $\overline{PE}$의 길이를 구한다.

정n각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ\times(n-2)}{n}$

정오각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$

삼각형 ABE는 $\overline{AB}=\overline{AE}$인 이등변삼각형이고 $\angle BAE=108^\circ$이므로

$\angle ABE=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$

이등변삼각형은 두 밑각의 크기가 같다.

삼각형 BAC는 $\overline{BA}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이고 $\angle ABC=108^\circ$이므로

$\angle BAC=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$

삼각형 ABP에서 $\angle BAP=\angle ABP=36^\circ$이므로 $\angle APE=72^\circ$

또, $\angle EAP=108^\circ-36^\circ=72^\circ$

따라서 삼각형 APE는 $\angle APE=\angle EAP$이므로

$\overline{PE}=\overline{AE}=1$

두 내각의 크기가 같으므로 삼각형 APE는 이등변삼각형이다.

STEP 2 $\overline{BE}:\overline{PE}=\overline{PE}:\overline{BP}$를 이용하여 x의 값을 구한다.

$\overline{BE}:\overline{PE}=\overline{PE}:\overline{BP}$에서 $x:1=1:(x-1)$, $x^2-x-1=0$

$x(x-1)=1$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

STEP 3 p, q의 값을 구한다.

$x^2=x+1$, $x^3=(x+1)x=2x+1$, $x^4=(2x+1)x=3x+2$,

$x^5=(3x+2)x=5x+3$, $x^6=(5x+3)x=8x+5$이므로

$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8$

$=1+(-x+x^2)+x^2(-x+x^2)+x^4(-x+x^2)+x^6(-x+x^2)$

$=1+1+x^2+x^4+x^6$

$=2+(x+1)+(3x+2)+(8x+5)=12x+10$

$=(1+3+8)x+(2+1+2+5)$

$=12\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+10=16+6\sqrt{5}$

따라서 $p=16$, $q=6$이므로 $p+q=22$

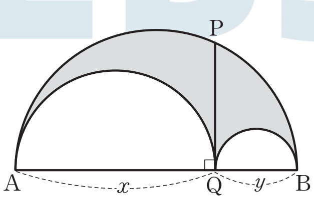
답 ①

02

풀이 전략 색칠한 부분의 넓이를 구한 후 곱셈 공식을 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 호 AB, 호 AQ 및 호 QB로 둘러싸인 도형의 넓이 S_1을 구한다.



[그림 1]

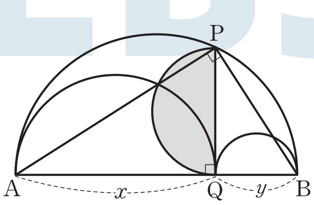
$\overline{AQ}=x$, $\overline{QB}=y$라 하면 S_1은 [그림 1]의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$S_1=\dfrac{\pi}{2}\times\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2-\dfrac{\pi}{2}\times\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-\dfrac{\pi}{2}\times\left(\dfrac{y}{2}\right)^2$

(선분 AB를 지름으로 하는 반원의 넓이)
−(선분 AQ를 지름으로 하는 반원의 넓이)
−(선분 QB를 지름으로 하는 반원의 넓이)

$=\dfrac{\pi}{4}xy$

STEP 2 선분 PQ를 지름으로 하는 반원의 넓이 S_2를 구한다.



[그림 2]

[그림 2]와 같이 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$를 그으면 삼각형 AQP와 삼각형 PQB는 서로 닮음이므로

선분 AB는 반원의 지름이므로 $\angle APB=90^\circ$
또, $\overline{AB}\perp\overline{PQ}$이므로 $\angle AQP=\angle PQB=90^\circ$,
$\angle APQ=\angle PBQ$
따라서 $\triangle AQP \backsim \triangle PQB$

$\overline{AQ}:\overline{PQ}=\overline{PQ}:\overline{BQ}$

$\overline{PQ}^2=\overline{AQ}\times\overline{BQ}=xy$

S_2는 [그림 2]의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$S_2=\dfrac{\pi}{2}\times\left(\dfrac{\overline{PQ}}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{8}xy$

STEP 3 곱셈 공식을 이용하여 $S_1-S_2=2\pi$일 때, 선분 AB의 길이는 구한다.

$S_1-S_2=2\pi$이므로 $\dfrac{\pi}{4}xy-\dfrac{\pi}{8}xy=2\pi$, $xy=16$ …… ㉠

또, $\overline{AQ}-\overline{QB}=8\sqrt{3}$이므로 $x-y=8\sqrt{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{AB}^2=(\overline{AQ}+\overline{QB})^2$

$=(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

$=(8\sqrt{3})^2+4\times16=256$

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
$=(x^2-2xy+y^2)+4xy$
$=(x-y)^2+4xy$

$\overline{AB}>0$이므로 $\overline{AB}=16$

답 16

03

풀이 전략 $g(x)$의 차수를 구한 후 인수정리를 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 조건 (가)를 이용하여 다항식 $g(x)$의 차수를 구한다.

조건 (가)에서 다항식 $f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나눈 몫은 $x+2$이고 나머지는 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로

$f(x)=\{x^2+g(x)\}(x+2)+\{g(x)\}^2-x^2$ …… ㉠

이때 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수는 $x^2+g(x)$의 차수보다 작다.

$g(x)$의 차수가 n $(n\geq2)$이면 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $2n$으로 $x^2+g(x)$의 차수인 n보다 크게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$g(x)$가 상수이면 $x^2+g(x)$의 차수와 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 2로 같게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $g(x)$의 차수는 1이다.

STEP 2 다항식의 차수를 이용하여 $g(x)$의 꼴을 구한다.

이때 $x^2+g(x)$는 이차식이므로 $\{g(x)\}^2-x^2$은 일차식 또는 상수이어야 한다.

$g(x)$의 일차항의 계수가 양수이므로 $g(x)=x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$\{g(x)\}^2-x^2$이 일차식 또는 상수이려면 $-x^2$이 없어져야 하므로 $g(x)$의 일차항의 계수는 1 또는 −1인데 최고차항의 계수가 양수이므로 1이다.

STEP 3 조건 (나)를 이용하여 다항식 $f(x)$를 구한다.

㉠에서

$f(x)=(x^2+x+a)(x+2)+(x+a)^2-x^2$

$=(x^2+x+a)(x+2)+2ax+a^2$

조건 (나)에서 $f(x)$가 $g(x)=x+a$로 나누어떨어지므로

$f(-a)=0$

$f(-a)=(a^2-a+a)(-a+2)-2a^2+a^2=-a^3+a^2=0$

$a^2(a-1)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=1$

$a=0$이면 $f(x)=(x^2+x)(x+2)$에서 $f(0)=0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$a=1$이면 $f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+2x+1$에서 $f(0)\neq0$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+2x+1$이므로

$f(2)=7\times4+4+1=33$

답 33

다른 풀이

다항식 $f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나눈 몫이 $x+2$이고 나머지가 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\{x^2+g(x)\}(x+2)+\{g(x)\}^2-x^2\\&=x^2(x+2)+(x+2)g(x)+\{g(x)\}^2-x^2\\&=(x+2)g(x)+\{g(x)\}^2+x^2(x+2)-x^2\\&=g(x)\{x+2+g(x)\}+x^3+x^2\\&=g(x)\{x+2+g(x)\}+x^2(x+1)\end{aligned}$$

이때 $f(x)$는 $g(x)$로 나누어떨어지므로 $x^2(x+1)$도 $g(x)$로 나누어떨어져야 한다. …… ㉠

$f(0)=g(0)\{2+g(0)\}\neq0$에서

$g(0)\neq0$이고 $g(0)\neq-2$ …… ㉡

$g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 ㉠, ㉡에 의하여

$g(x)=k(x+1)$ (단, $k>0$)

한편, $x^2+g(x)$로 나눈 나머지가 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로

$\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $x^2+g(x)$의 차수보다 작아야 한다.

$$\begin{aligned}x^2+g(x)&=x^2+k(x+1)\\&=x^2+kx+k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{g(x)\}^2-x^2&=\{k(x+1)\}^2-x^2\\&=(k^2-1)x^2+2k^2x+k^2\end{aligned}$$

즉, $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $x^2+g(x)$의 차수보다 작으려면

$k^2-1=0$이어야 한다.

이때 $k>0$이므로 $k=1$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)\{x+2+(x+1)\}+x^2(x+1)\\&=(x+1)(2x+3)+x^2(x+1)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}f(2)&=(2+1)(2\times2+3)+2^2\times(2+1)\\&=3\times7+4\times3=33\end{aligned}$$

04

풀이 전략 $Q(x)$를 구한 후 $P(x)$를 몫 $Q(x)$와 나머지 $R(x)$에 대한 관계식으로 나타낸다.

문제 풀이

STEP 1 다항식 $Q(x)$를 구한다.

$\{Q(x+1)\}^2+\{Q(x)\}^2=(x^2-x)P(x)$에서

$\{Q(x+1)\}^2+\{Q(x)\}^2=x(x-1)P(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$\{Q(1)\}^2+\{Q(0)\}^2=0$ → $\{Q(0)\}^2=\{Q(1)\}^2=0$

$\{Q(2)\}^2+\{Q(1)\}^2=0$ → $\{Q(1)\}^2=\{Q(2)\}^2=0$

그러므로

$Q(0)=Q(1)=Q(2)=0$ → $Q(x)$는 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 인수로 갖는다.

다항식 $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로

$Q(x)=x(x-1)(x-2)$ …… ㉡

STEP 2 $P(x)$를 변형하여 $R(x)$를 구한다.

㉡을 ㉠에 대입하면

$\{(x+1)x(x-1)\}^2+\{x(x-1)(x-2)\}^2=x(x-1)P(x)$

이므로

$$\begin{aligned}P(x)&=x(x-1)\{(x+1)^2+(x-2)^2\}\\&=x(x-1)(2x^2-2x+5)\\&=x(x-1)\{2(x-2)(x+1)+9\}\\&=2x(x-1)(x-2)(x+1)+9x(x-1)\\&=2(x+1)Q(x)+9x(x-1)\end{aligned}$$

$2x^2-2x+5$를 $x-2$로 나누면

$$\begin{array}{r} 2x+2 \\ x-2\,\overline{)\,2x^2-2x+5} \\ \underline{2x^2-4x} \\ 2x+5 \\ \underline{2x-4} \\ 9 \end{array}$$

$2x^2-2x+5=(x-2)(2x+2)+9$
$=2(x-2)(x+1)+9$

따라서 $R(x)=9x(x-1)$이므로

$R(3)=9\times3\times2=54$

답 54

05

풀이 전략 인수정리를 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$를 몫과 나머지 $3p^2$으로 표현한다.

조건 (가)에 의하여 $f(x)$를 $x+2$, x^2+4로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $3p^2$으로 같으므로

$f(x)=(x+2)Q_1(x)+3p^2$, $f(x)=(x^2+4)Q_2(x)+3p^2$

$Q_1(x)$는 x^2+4를 인수로 갖고 $Q_2(x)$는 $x+2$를 인수로 가져야 하므로 $Q_1(x)$와 $Q_2(x)$의 공통인수를 $x+a$ (a는 상수)라 하면

→ $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이므로 $Q_1(x)$와 $Q_2(x)$의 공통인수는 x의 계수가 1인 일차식이다.

$f(x)=(x+2)(x^2+4)(x+a)+3p^2$

STEP 2 조건 (나), (다)를 이용하여 p의 값을 구한다.

조건 (나)에서 $f(1)=f(-1)$이고

$f(1)=15(1+a)+3p^2$, $f(-1)=5(-1+a)+3p^2$이므로

$15(1+a)+3p^2=5(-1+a)+3p^2$에서

$15(1+a)=5(-1+a)$, $a=-2$

따라서 $f(x)=x^4-16+3p^2$이고

조건 (다)에 의하여 $f(\sqrt{p})=0$이므로 → $f(x)$가 $x-\sqrt{p}$를 인수로 갖는다.

$p^2-16+3p^2=0$, $4p^2=16$, $p^2=4$

$p>0$이므로 $p=2$

답 ④

06

풀이 전략 다항식 A를 다항식 B $(B\neq0)$으로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$임을 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 조건 (가)를 이용하여 다항식 $g(x)$의 차수를 구한다.

조건 (가)에서 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지가 $g(x)-2x^2$이고, 나머지 $g(x)-2x^2$의 차수는 다항식 $g(x)$의 차수

보다 작아야 하므로 다항식 $g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차식이다.

$g(x)$가 일차식이면
$(g(x)$의 차수$)<(g(x)-2x^2$의 차수$)$
$g(x)$가 삼차 이상의 다항식이면
$(g(x)$의 차수$)=(g(x)-2x^2$의 차수$)$
즉, $g(x)$가 이차식이고 $g(x)-2x^2$이 일차 이하의 다항식이어야 하므로 $g(x)$의 최고차항의 계수는 2이어야 한다.

즉, 다항식 $g(x)$를

$g(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

STEP 2 조건 (나)를 이용하여 다항식 $f(x)$를 구한다.

조건 (가)에서 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 몫과 나머지는 모두 $g(x)-2x^2$이므로

$$f(x)=g(x)\{g(x)-2x^2\}+g(x)-2x^2=\{g(x)+1\}\{g(x)-2x^2\}$$
$$=(2x^2+ax+b+1)(ax+b)$$

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$a=\frac{1}{2}$ $f(x)$의 최고차항의 계수는 $2a$이므로 $2a=1$에서 $a=\frac{1}{2}$

그러므로 $f(x)=\left(2x^2+\frac{1}{2}x+b+1\right)\left(\frac{1}{2}x+b\right)$

조건 (나)에서 나머지정리에 의하여 $f(1)=-\frac{9}{4}$이고

$f(1)=\left(2+\frac{1}{2}+b+1\right)\left(\frac{1}{2}+b\right)=b^2+4b+\frac{7}{4}$

이므로 $b^2+4b+\frac{7}{4}=-\frac{9}{4}$에서 $(b+2)^2=0$, $b=-2$

따라서 $f(x)=\left(2x^2+\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right)$이므로

$f(6)=(72+3-1)\times(3-2)=74$

답 74

07

풀이 전략 곱셈 공식과 인수분해를 이용하여 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$를 구한다.

문제 풀이

STEP 1 곱셈 공식과 조건 (가)를 이용하여 $P(x)Q(x)$를 구한다.

조건 (나)의 $\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=12x^4+24x^3+12x^2+16$에서

$\{P(x)+Q(x)\}^3-3P(x)Q(x)\{P(x)+Q(x)\}$

$=12x^4+24x^3+12x^2+16$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$를 이용하여 좌변의 식을 정리한다.

이때 조건 (가)에서 $P(x)+Q(x)=4$이므로

$64-12P(x)Q(x)=12x^4+24x^3+12x^2+16$

$-12P(x)Q(x)=12x^4+24x^3+12x^2-48$

$-P(x)Q(x)$

$=x^4+2x^3+x^2-4$

$=(x-1)(x+2)(x^2+x+2)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	2	1	0	-4
		1	3	4	4
-2	1	3	4	4	0
		-2	-2	-4	
	1	1	2	0	

그러므로 $P(x)Q(x)=-(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

STEP 2 다항식 $P(x)$가 최고차항의 계수가 음수임을 이용하여 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$를 구한다.

$P(x)+Q(x)=4$이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 조건 (가), (나)를 만족시키는 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$는

$P(x)=-x^2-x+2$, $Q(x)=x^2+x+2$

따라서 $P(2)=-4$, $Q(3)=14$이므로

$P(2)+Q(3)=10$

$P(2)=-4-2+2=-4$,
$Q(3)=9+3+2=14$

답 ⑤

다른 풀이

두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$가 조건 (가)를 만족시키고, $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로

$P(x)=ax^2+bx+c$ $(a<0)$, $Q(x)=4-(ax^2+bx+c)$

라 하면

$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3$

$=(ax^2+bx+c)^3+64-48(ax^2+bx+c)$
$\qquad+12(ax^2+bx+c)^2-(ax^2+bx+c)^3$

$=12a^2x^4+24abx^3+(12b^2+24ac-48a)x^2$
$\qquad+(24bc-48b)x+(12c^2-48c+64)$

$=12x^4+24x^3+12x^2+16$

양변의 계수를 비교하면

$12a^2=12$, $24ab=24$, $12b^2+24ac-48a=12$,

$24bc-48b=0$, $12c^2-48c+64=16$

$12a^2=12$에서 $a^2=1$이고
$a<0$이므로 $a=-1$
$24ab=24$에서 $ab=1$이고
$a=-1$이므로 $b=-1$

따라서 $a=-1$, $b=-1$, $c=2$이므로

$P(x)=-x^2-x+2$

$Q(x)=4-(-x^2-x+2)=x^2+x+2$

따라서 $P(2)+Q(3)=-4+14=10$

08

풀이 전략 $f(x)$의 차수를 구하고, 항등식의 성질을 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 주어진 등식에 $x=0$을 대입하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\{f(x)\}^3=4x^2f(x)+8x^2+6x+1$에 $x=0$을 대입하면

$\{f(0)\}^3=1$

따라서 $f(0)=1$이므로 다항식 $f(x)$를 x로 나눈 나머지는 1이다.

나머지정리에 의하여 $f(0)$ (참)

STEP 2 다항식 $f(x)$의 차수를 n이라 하고 좌변과 우변의 차수를 비교하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $f(x)$의 차수를 n이라 하면 좌변의 차수는 $3n$, 우변의 차수는 $n+2$이므로 $3n=n+2$에서 $n=1$

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a>0$)라 하면

$\{f(x)\}^3=4x^2f(x)+8x^2+6x+1$에서

$(ax+b)^3=4x^2(ax+b)+8x^2+6x+1$

양변의 x^3 항의 계수를 비교하면

$a^3=4a$

$a(a+2)(a-2)=0$

$a^3=4a$에서 $a^3-4a=0$
$a(a^2-4)=0$
$a(a+2)(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)$의 최고차항의 계수는 2이다. (거짓)

STEP 3 ㄱ, ㄴ을 이용하여 $f(x)$를 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. ㄴ에 의하여 $f(x)=2x+b$이고,

ㄱ에 의하여 $f(0)=1$이므로 $b=1$

그러므로 $f(x)=2x+1$

$\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $cx+d$ (c, d는 상수)라 하면

→ 다항식의 나눗셈에서 나머지는 상수이거나 나머지의 차수는 나누는 식의 차수보다 작아야 한다.

$\{f(x)\}^3=(x^2-1)Q(x)+cx+d$

위 식의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$\{f(1)\}^3=c+d$, $\{f(-1)\}^3=-c+d$이므로

$c+d=27$, $-c+d=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $c=14$, $d=13$

따라서 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나눈 나머지는 $14x+13$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

09

풀이 전략 인수정리를 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 조건 (가)에서 일차다항식 $Q(x)$의 경우를 파악하여 $Q(1)=0$인 경우를 확인한다.

조건 (가)에서 $Q(1)=0$인 경우와 $Q(1)\neq0$인 경우로 나눌 수 있다.

(i) $Q(1)=0$인 경우

$Q(x)=a(x-1)$ (a는 상수, $a\neq0$)이라 하면 조건 (나)에 의하여

$P(x)=x^3-10x+13-\{Q(x)\}^2$

$\quad=x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2$

이고 조건 (가)에 의하여

$x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2$이 x^2-3x+3으로 나누어떨어져야 하므로

$$\begin{array}{r|l}
 & x+(-a^2+3) \\ \hline
x^2-3x+3 & x^3\quad -a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2 \\
 & x^3\quad -3x^2+\qquad\qquad 3x \\ \hline
 & (-a^2+3)x^2+\ (2a^2-13)x+13-a^2 \\
 & (-a^2+3)x^2-3(-a^2+3)x+3(-a^2+3) \\ \hline
 & (-a^2-4)x+4+2a^2
\end{array}$$

이때 $(-a^2-4)x+4+2a^2=0$을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

→ 다항식 $P(x)$를 x^2-3x+3으로 나누면 나머지가 0이다.

STEP 2 $Q(1)\neq0$인 경우의 $P(x)$, $Q(x)$를 구한다.

(ii) $Q(1)\neq0$인 경우

다항식 $P(x)$는 x^2-3x+3과 $x-1$을 인수로 가지고 조건 (나)에 의하여 $x^3-10x+13-P(x)$는 이차식이 되어야 하므로 다항식 $P(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.

→ $x^3-10x+13-P(x)=\{Q(x)\}^2$에서 $Q(x)$는 일차다항식, $\{Q(x)\}^2$은 이차다항식이므로 좌변의 x^3 항이 없어지려면 $P(x)$의 최고차항의 계수가 1이어야 한다.

$P(x)=(x^2-3x+3)(x-1)=x^3-4x^2+6x-3$

이고, 조건 (나)에 의하여

$\{Q(x)\}^2=x^3-10x+13-P(x)$

$\quad=x^3-10x+13-(x^3-4x^2+6x-3)$

$\quad=4x^2-16x+16$

$\quad=(2x-4)^2$

이므로 $Q(x)=2x-4$ 또는 $Q(x)=-2x+4$

그런데 $Q(0)<0$에서 $Q(x)=2x-4$

$P(2)=8-16+12-3=1$

$Q(8)=12$

이므로 $P(2)+Q(8)=13$

답 13

다른 풀이

(i) $Q(1)=0$인 경우

$Q(x)=a(x-1)$ (a는 상수, $a\neq0$)이라 하면 조건 (나)에 의하여

$P(x)=x^3-10x+13-\{Q(x)\}^2$

$\quad=x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2$ …… ㉠

조건 (나)에 의하여 $x^3-10x+13-P(x)$는 이차식이 되어야 하므로 다항식 $P(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 이차식 x^2-3x+3과 일차식 $x-k$ (k는 상수)를 인수로 가지므로

$P(x)=(x^2-3x+3)(x-k)$

$\quad=x^3+(-k-3)x^2+(3k+3)x-3k$ …… ㉡

㉠과 ㉡에 의하여 $-a^2=-k-3$, $2a^2-10=3k+3$, $13-a^2=-3k$를 만족시키는 a와 k의 값은 존재하지 않는다.

10

풀이 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

문제 풀이

STEP 1 $x-a$가 $P(x)$의 인수임을 이용하여 $P(x)$를 인수분해한다.

다항식 $P(x)=x^4-290x^2+b$가 일차식 $x-a$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc}
a & 1 & 0 & -290 & 0 & b \\
 & & a & a^2 & a^3-290a & a^4-290a^2 \\ \hline
 & 1 & a & a^2-290 & a^3-290a & b+a^4-290a^2
\end{array}$$

다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는

$b+a^4-290a^2=0$이므로

$b=a^2(290-a^2)$

→ $P(x)$가 일차식 $x-a$를 인수로 가지므로 나머지가 0이다.

이때 b가 자연수이므로 $290-a^2>0$을 만족시키는 자연수 a의 값은 1, 2, 3, …, 17이다.

다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$Q(x)=x^3+ax^2+(a^2-290)x+a^3-290a$

$Q(-a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -a & 1 & a & a^2-290 & a^3-290a \\ & & -a & 0 & -a^3+290a \\ \hline & 1 & 0 & a^2-290 & 0 \end{array}$$

그러므로 $P(x)=(x-a)(x+a)(x^2+a^2-290)$

STEP 2 다항식 $P(x)$에서 인수 x^2+a^2-290이 더 이상 인수분해되지 않는 자연수 a의 개수를 구한다.

$P(x)$가 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 세 개의 다항식의 곱으로 인수분해되려면 x^2+a^2-290이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되지 않아야 한다.

x^2+a^2-290이 인수분해되면 $P(x)$가 네 개의 다항식의 곱으로 인수분해되기 때문이다.

이때 $x^2+a^2-290=x^2-(290-a^2)$의 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 $290-a^2$이 제곱수인 경우이다.

$290=1^2+17^2=11^2+13^2$이므로 $290-a^2$이 제곱수가 되는 자연수 a의 값은 1, 11, 13, 17이다.

그러므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a의 값의 개수는 $17-4=13$이므로 모든 다항식 $P(x)$의 개수는 13이다.

STEP 3 p, q의 값을 구한다.

$b=a^2(290-a^2)=-(a^2-145)^2+145^2$이고, a가 자연수이므로 b의 최댓값은 $a=12$일 때 $12^2\times(290-12^2)$이다.

a가 자연수이므로 a^2이 145에 가장 가까운 a의 값에서 b는 최댓값을 갖는다.

따라서 $p=13$이고 $q=12^2\times(290-12^2)$이므로

$$\frac{q}{(p-1)^2}=\frac{12^2\times(290-12^2)}{(13-1)^2}=146$$

답 146

11

풀이 전략 인수정리를 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 조건 (가), (나)를 만족시키는 경우를 파악한다.

조건 (가)에서 $P(1)P(2)=0$이므로

$P(1)=0$ 또는 $P(2)=0$

조건 (나)에서 사차다항식 $P(x)\{P(x)-3\}$이 $x(x-3)$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$P(0)\{P(0)-3\}=0$에서 $P(0)=0$ 또는 $P(0)=3$

$P(3)\{P(3)-3\}=0$에서 $P(3)=0$ 또는 $P(3)=3$

STEP 2 경우를 나누어 조건을 만족시키는 이차다항식 $P(x)$를 구한다.

(i) $P(1)=0$, $P(2)=0$인 경우

조건 (나)에서 $P(x)$는 이차다항식이므로 $P(0)=3$, $P(3)=3$이어야 한다.

$P(1)=0$, $P(2)=0$에서 이차다항식 $P(x)$가 $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로 $P(0)$, $P(3)$의 값은 0이 될 수 없다.

$P(x)=a(x-1)(x-2)$ (a는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$P(0)=2a=3$에서 $a=\frac{3}{2}$

그러므로 $P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$

(ii) $P(1)=0$, $P(2)\neq0$인 경우

$P(x)$가 $x-1$을 인수로 갖는다.

$P(x)$는 이차다항식이므로 조건 (나)에 의하여 다음과 같이 세 가지 경우만 생각하면 된다.

① $P(1)=0$, $P(0)=0$, $P(3)=3$일 때,

$P(x)=bx(x-1)$ (b는 상수, $b\neq0$)이라 하면

$P(3)=6b=3$에서 $b=\frac{1}{2}$

그러므로 $P(x)=\frac{1}{2}x(x-1)$

② $P(1)=0$, $P(0)=3$, $P(3)=0$일 때,

$P(x)=c(x-1)(x-3)$ (c는 상수, $c\neq0$)이라 하면

$P(0)=3c=3$에서 $c=1$

그러므로 $P(x)=(x-1)(x-3)$

③ $P(1)=0$, $P(0)=3$, $P(3)=3$일 때,

$P(x)=(x-1)(kx+l)$ (k, l은 상수, $k\neq0$)이라 하면

$P(0)=-l=3$, $P(3)=2(3k+l)=3$에서 $k=\frac{3}{2}$, $l=-3$

그러므로 $P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$

그런데 $P(2)=0$이므로 모순이다.

(iii) $P(1)\neq0$, $P(2)=0$인 경우

$P(x)$가 $x-2$를 인수로 갖는다.

$P(x)$는 이차다항식이므로 조건 (나)에 의하여 다음과 같이 세 가지 경우만 생각하면 된다.

① $P(2)=0$, $P(0)=0$, $P(3)=3$일 때,

$P(x)=dx(x-2)$ (d는 상수, $d\neq0$)이라 하면

$P(3)=3d=3$에서 $d=1$

그러므로 $P(x)=x(x-2)$

② $P(2)=0$, $P(0)=3$, $P(3)=0$일 때,

$P(x)=e(x-2)(x-3)$ (e는 상수, $e\neq0$)이라 하면

$P(0)=6e=3$에서 $e=\frac{1}{2}$

그러므로 $P(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x-3)$

③ $P(2)=0$, $P(0)=3$, $P(3)=3$일 때,

$P(x)=(x-2)(mx+n)$ (m, n은 상수, $m\neq0$)이라 하면

$P(0)=-2n=3$, $P(3)=3m+n=3$에서 $m=\frac{3}{2}$, $n=-\frac{3}{2}$

그러므로 $P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$

그런데 $P(1)=0$이므로 모순이다.

STEP 3 $Q(x)$를 구하여 $Q(4)$의 값을 구한다.

(i), (ii), (iii)에서

$$Q(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)+\frac{1}{2}x(x-1)+(x-1)(x-3)+x(x-2)+\frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

따라서 $Q(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는

$Q(4)=9+6+3+8+1=27$

답 27

02 방정식과 부등식(1)

개념 확인 문제

본문 25쪽

01 (1) $a=3$, $b=2$ (2) $a=-2$, $b=3$

02 (1) $2+3i$ (2) $-1-\sqrt{2}i$ (3) -5 (4) $-4i$

03 (1) $6+2i$ (2) $3+7i$ (3) $8-i$ (4) $\frac{1-5i}{13}$

04 (1) $\pm3i$ (2) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

05 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근
(3) 서로 다른 두 허근

06 $k\le9$

07 (1) 1 (2) $\frac{3}{4}$

08 (1) $x^2-2x-2=0$ (2) $x^2-4x+29=0$

09 (1) $(x-2\sqrt{3}i)(x+2\sqrt{3}i)$ (2) $(x+1-i)(x+1+i)$

10 (1) $k<4$ (2) $k=4$ (3) $k>4$

11 (1) $a>-5$ (2) $a=-5$ (3) $a<-5$

12 (1) 최댓값 : 11, 최솟값 : 2 (2) 최댓값 : 12, 최솟값 : 4

내신&학평 유형 연습

본문 26~37쪽

01 ④	02 ③	03 ①	04 53	05 ③	06 ③
07 ①	08 18	09 ②	10 ④	11 ③	12 ⑤
13 ⑤	14 ⑤	15 ⑤	16 12	17 25	18 24
19 ⑤	20 ④	21 ④	22 ①	23 ②	24 503
25 7	26 ①	27 ②	28 ④	29 ③	30 ②
31 6	32 ②	33 6	34 ③	35 ①	36 ③
37 ⑤	38 ③	39 18	40 ①	41 ②	42 ③
43 ⑤	44 ③	45 ③	46 ④	47 ②	48 ②
49 ②	50 4	51 ②	52 ⑤	53 13	54 7
55 2	56 11	57 11	58 18	59 ③	60 3
61 ⑤	62 ⑤	63 ④	64 ③	65 33	66 ②
67 ⑤	68 ②	69 ⑤			

01
$1+2i+i(1-i)=1+2i+i+1=2+3i$

답 ④

02
$(3+i)+(1-3i)=(3+1)+\{1+(-3)\}i=4-2i$

답 ③

03
$(2+i)(1+i)=2+2i+i+i^2=2+2i+i-1=1+3i$

답 ①

04
$(7+2i)(7-2i)=7^2-4i^2=49+4=53$

답 53

05
세 복소수 $2-3i$, $1+2i$, $6+9i$ 중 두 수씩 곱하면

$(2-3i)(1+2i)=2+4i-3i+6=8+i$

$(2-3i)(6+9i)=12+18i-18i+27=39$

$(1+2i)(6+9i)=6+9i+12i-18=-12+21i$

따라서 두 복소수 $2-3i$, $6+9i$의 곱이 자연수가 되므로

$a=39$

답 ③

06
a^2이 최솟값이고 bc가 최댓값일 때, a^2-bc는 최솟값을 갖는다.

a^2의 최솟값은 $a=5i$일 때 -25이고,

bc의 최댓값은 $b=-4i$, $c=5i$ 또는 $b=5i$, $c=-4i$일 때 20이다.

따라서 a^2-bc의 최솟값은 -45이다.

답 ③

07
$3x+(2+i)y=1+2i$에서 $(3x+2y)+yi=1+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x+2y=1$, $y=2$

따라서 $x=-1$, $y=2$이므로 $x+y=1$

답 ①

08
$(3+ai)(2-i)=(6+a)+(2a-3)i=13+bi$

에서 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$6+a=13$, $2a-3=b$

따라서 $a=7$, $b=11$이므로

$a+b=18$

답 18

09
$\frac{2a}{1-i}+3i=2+bi$에서 $\frac{2a(1+i)}{(1-i)(1+i)}+3i=2+bi$

$a(1+i)+3i=2+bi$, $a+(a+3)i=2+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=2$, $a+3=b$

따라서 $a=2$, $b=5$이므로 $a+b=7$

답 ②

10
$z=2+\sqrt{2}i$이므로 $z-2=\sqrt{2}i$

$(z-2)^2=(\sqrt{2}i)^2$

$z^2-4z+4=-2$

따라서 $z^2-4z=-6$

답 ④

11
$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$

$x=2+i$, $y=2-i$에서 $x+y=4$, $xy=5$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6$

따라서

$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$

$=6^2-5^2=11$

답 ③

12

$\alpha=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\beta=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

이므로 $\alpha+\beta=(-i)+i=0$, $\alpha\beta=-i^2=1$

따라서

$(1-2\alpha)(1-2\beta)=1-2(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=1-2\times0+4\times1=5$

답 ⑤

13

ㄱ. $z_1\overline{z_1}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=10$ (참)

ㄴ. $a^2+b^2=10$에서

$a=1$이면 $b=3$

$a=2$이면 $b^2=6$인 자연수 b는 존재하지 않는다.

$a=3$이면 $b=1$

$a\geq4$이면 $a^2\geq16$이므로 자연수 b는 존재하지 않는다.

$z_1+\overline{z_2}=(a+bi)+(c-di)=(a+c)+(b-d)i=3$

이므로 $a+c=3$, $b-d=0$

$a+c=3$에서 $a<3$

따라서 $a=1$, $c=2$, $b=d=3$이므로 $c+d=5$ (참)

ㄷ. $(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})$

$=\{(a+c)+(b+d)i\}\{(a+c)-(b+d)i\}$

$=(a+c)^2+(b+d)^2=41$

$a+c=2$이면 $(b+d)^2=37$인 자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.

$a+c=3$이면 $(b+d)^2=32$인 자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.

$a+c=4$이면 $b+d=5$이다.

$a+c=5$이면 $b+d=4$이다.

$a+c=6$이면 $(b+d)^2=5$인 자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.

$a+c\geq7$이면 $(a+c)^2\geq49$이므로 자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.

(i) $a+c=4$일 때

$a=1$이면 $c=3$이고 $b=3$에서 $d=2$

$a=3$이면 $c=1$이고 $b=1$에서 $d=4$

(ii) $a+c=5$일 때

$a=1$이면 $c=4$이고 $b=3$에서 $d=1$

$a=3$이면 $c=2$이고 $b=1$에서 $d=3$

(i), (ii)에서 $z_2\overline{z_2}=c^2+d^2$의 값은 13 또는 17이므로 $z_2\overline{z_2}$의 최댓값은 17이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

14

$z=x^2-(5-i)x+4-2i=(x^2-5x+4)+(x-2)i$에서

$\overline{z}=(x^2-5x+4)-(x-2)i$

$\overline{z}=-z$에서

$(x^2-5x+4)-(x-2)i=-(x^2-5x+4)-(x-2)i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$x=1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$1+4=5$

답 ⑤

15

ㄱ. z^2-z는 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다. (참)

ㄴ. $z=a+bi$ $(b\neq0)$에 대하여

$z^2-z=a^2+2abi-b^2-a-bi$

$=(a^2-a-b^2)+(2a-1)bi$

z^2-z가 실수이고, $b\neq0$이므로 $2a-1=0$, 즉 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $z=\frac{1}{2}+bi$이고 $\overline{z}=\frac{1}{2}-bi$이므로 $z+\overline{z}=1$ (참)

ㄷ. $z=\frac{1}{2}+bi$이고 $\overline{z}=\frac{1}{2}-bi$이므로 $z\overline{z}=\frac{1}{4}+b^2$

$b\neq0$이므로 $z\overline{z}>\frac{1}{4}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이

ㄴ. $\overline{z^2-z}$가 실수이고, $\overline{z^2-z}=(\overline{z})^2-\overline{z}$이므로

$z^2-z=(\overline{z})^2-\overline{z}$가 성립한다.

$z^2-z-\{(\overline{z})^2-\overline{z}\}=0$의 좌변을 인수분해하면

$(z-\overline{z})(z+\overline{z}-1)=0$이고 z는 실수가 아니므로 $z\neq\overline{z}$

따라서 $z+\overline{z}=1$ (참)

보충 개념

복소수 z의 켤레복소수를 $\overline{z}$라 할 때

(1) $z+\overline{z}=$(실수)
(2) $z\overline{z}=$(실수)
(3) $z=\overline{z}$ ➡ z는 실수
(4) $z=-\overline{z}$ ➡ z는 실수부분이 0

16

$i+2i^2+3i^3+4i^4+5i^5=i-2-3i+4+5i=2+3i$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $3a+2b=12$

답 12

17

$(1-i)^{2n}=\{(1-i)^2\}^n=(-2i)^n=2^n(-i)^n$

이므로 $2^n(-i)^n=2^ni$에서 $(-i)^n=i$를 만족시키는 n의 값은

$n=4k+3$ $(k=0, 1, 2, \cdots, 24)$

따라서 100 이하의 모든 자연수 n의 개수는 25이다.

답 25

18

$z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$라 하면

$z_1{}^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\dfrac{2}{2i}=-i$

$z_1{}^4=(z_1{}^2)^2=(-i)^2=-1$

$z_1{}^8=(z_1{}^4)^2=(-1)^2=1$

$z_2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$라 하면

$z_2{}^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$z_2{}^3=z_2{}^2\times z_2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{4i}{4}=i$

$z_2{}^6=(z_2{}^3)^2=i^2=-1$

$z_2{}^{12}=(z_2{}^6)^2=(-1)^2=1$

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n+\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=2$를 만족시키려면 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n=1$과

$\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=1$을 동시에 만족시키는 자연수 n을 찾아야 한다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 8, 12의 최소공배수인 24이다.

답 24

19

$\sqrt{-2}\sqrt{-18}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{2}i\times\sqrt{18}i+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=\sqrt{36}i^2+\dfrac{2i}{i^2}$

$=-6-2i$

답 ⑤

20

$\sqrt{2}\times\sqrt{-2}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}i+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}=2i+\dfrac{1}{i}=2i+\dfrac{i}{i^2}$

$=2i-i=i$

답 ④

21

조건 (나)에서 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$이므로 $a<0$, $b>0$

즉, $a<b$ ······ ㉠

조건 (가)에서 $b+c<a$이고 $b>0$이므로

$c<b+c<a$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $c<a<b$

답 ④

22

이차방정식 $2x^2-2x+1=0$의 근은

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-2\times1}}{2}=\dfrac{1\pm i}{2}$

이때 $\alpha=\dfrac{1+i}{2}$라 하면 $\alpha^2=\dfrac{1}{2}i$, $\alpha^4=\left(\dfrac{1}{2}i\right)^2=-\dfrac{1}{4}$이므로

$\alpha^4-\alpha^2+\alpha=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}i+\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{4}$

마찬가지로 $\alpha=\dfrac{1-i}{2}$인 경우에도 성립한다.

따라서 $\alpha^4-\alpha^2+\alpha=\dfrac{1}{4}$

답 ①

다른 풀이

α는 이차방정식 $2x^2-2x+1=0$의 근이므로

$2\alpha^2-2\alpha+1=0$, $\alpha^2=\alpha-\dfrac{1}{2}$

양변을 제곱하면 $\alpha^4=\alpha^2-\alpha+\dfrac{1}{4}$이므로

$\alpha^4-\alpha^2+\alpha=\dfrac{1}{4}$

23

주어진 방정식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 1을 근으로 가지므로

$x=1$을 대입하면

$1+k(2p-3)-(p^2-2)k+q+2=0$

$-(p^2-2p+1)k+q+3=0$이 실수 k에 대한 항등식이므로

$p^2-2p+1=0$, $q+3=0$에서

$p=1$, $q=-3$

따라서 $p+q=-2$

답 ②

24

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=16$

이차방정식 $f(2020-8x)=0$의 두 근을 α', β'이라 하면

$2020-8\alpha'=\alpha$, $2020-8\beta'=\beta$에서

$\alpha'=\dfrac{2020-\alpha}{8}$, $\beta'=\dfrac{2020-\beta}{8}$

따라서 이차방정식 $f(2020-8x)=0$의 두 근의 합은

$\alpha'+\beta'=505-\dfrac{1}{8}(\alpha+\beta)=505-2=503$

답 503

25

이차방정식 $x^2-(k+2)x+k+5=0$의 판별식을 D라 하면

이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지기 위해서는

$D=\{-(k+2)\}^2-4(k+5)<0$

$k^2-16<0$, $-4<k<4$

따라서 모든 정수 k는

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

이므로 그 개수는 7 답 7

26

이차방정식 $x^2-2(m+a)x+m^2+m+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(m+a)\}^2-(m^2+m+b)=0$

$(2a-1)m+a^2-b=0$

이 등식이 실수 m의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a-1=0,\ a^2-b=0$

따라서 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$이므로 $12(a+b)=12\times\frac{3}{4}=9$

답 ①

27

$\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4=x^2-3ax+2a^2+4$

x에 대한 이차방정식 $x^2-3ax+2a^2+4=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=(3a)^2-4(2a^2+4)=0$

이어야 한다.

$(3a)^2-4(2a^2+4)=9a^2-8a^2-16=a^2-16=0$

이므로 $a=4$ 또는 $a=-4$

(i) $a=4$일 때,

$\{P(x)+2\}^2=x^2-12x+36=(x-6)^2$

이므로 $P(x)+2=x-6$ 또는 $P(x)+2=-x+6$에서

$P(x)=x-8$ 또는 $P(x)=-x+4$

(ii) $a=-4$일 때,

$\{P(x)+2\}^2=x^2+12x+36=(x+6)^2$

이므로 $P(x)+2=x+6$ 또는 $P(x)+2=-x-6$에서

$P(x)=x+4$ 또는 $P(x)=-x-8$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 일차다항식 $P(x)$는 $x-8,\ -x+4,\ x+4,\ -x-8$이고 모든 $P(1)$의 값은 $-7,\ 3,\ 5,\ -9$이다.

따라서 모든 $P(1)$의 값의 합은

$(-7)+3+5+(-9)=-8$

답 ②

다른 풀이

$\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4$

에서 다항식 $P(x)$는 일차식이다.

$P(x)=px+q$ ($p,\ q$는 상수, $p\neq0$)이라 하자.

$(px+q+2)^2=(x-a)(x-2a)+4$에서

$p^2x^2+(2pq+4p)x+q^2+4q+4=x^2-3ax+2a^2+4$이므로

$p^2=1,\ 2pq+4p=-3a,\ q^2+4q+4=2a^2+4$

(i) $p=1$일 때,

$2q+4=-3a,\ q^2+4q=2a^2$에서 $(q-4)(q+8)=0$이므로

$q=4$ 또는 $q=-8$

따라서 $P(x)=x+4$ 또는 $P(x)=x-8$

(ii) $p=-1$일 때,

$-2q-4=-3a,\ q^2+4q=2a^2$에서 $(q-4)(q+8)=0$이므로

$q=4$ 또는 $q=-8$

따라서 $P(x)=-x+4$ 또는 $P(x)=-x-8$

(i), (ii)에서 $P(x)$는 $x+4,\ x-8,\ -x+4,\ -x-8$이고 모든 $P(1)$의 값은 $5,\ -7,\ 3,\ -9$이다.

따라서 모든 $P(1)$의 값의 합은

$5+(-7)+3+(-9)=-8$

28

이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 서로 다른 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=k$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2k=8$

따라서 $k=-2$ 답 ④

29

이차방정식 $x^2+ax-2=0$의 두 근이 1과 b이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+b=-a,\ 1\times b=-2$

즉, $a=1,\ b=-2$

따라서 $a-b=3$ 답 ③

30

이차방정식 $x^2-ax-4=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-4$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{a^2+8}{-4}=-6$$

$a^2=16$

이때 a가 양수이므로 $a=4$ 답 ②

31

이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=k$

$\alpha^2-3\alpha+k=0,\ \beta^2-3\beta+k=0$에서

$\alpha^2-\alpha+k=2\alpha,\ \beta^2-\beta+k=2\beta$이므로

$$\frac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\frac{1}{\beta^2-\beta+k}=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}$$

$$=\frac{3}{2k}=\frac{1}{4}$$

따라서 $2k=12$이므로 $k=6$ 답 6

32

x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx-k+20=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식

$\frac{D}{4}=k^2-(-k+20)=k^2+k-20=(k+5)(k-4)>0$

에서 $k<-5$ 또는 $k>4$

이때 k는 자연수이므로

$k>4$ …… ㉠

두 근의 곱 $\alpha\beta>0$이므로

$\alpha\beta=-k+20>0$

$k<20$ …… ㉡

㉠과 ㉡에 의하여 k의 값의 범위는 $4<k<20$

이를 만족시키는 자연수 k의 값은 5, 6, …, 19이므로 그 개수는 15이다.

답 ②

33

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$ …… ㉠

$\alpha\beta=b$ …… ㉡

이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 서로 다른 두 근이 $\alpha+2$, $\beta+2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+2)+(\beta+2)=-3a$ …… ㉢

$(\alpha+2)(\beta+2)=3b$ …… ㉣

㉠, ㉢에서

$-a+4=-3a$, $a=-2$

㉠, ㉡을 ㉣에 대입하면

$b+2\times2+4=3b$, $b=4$

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$

$\alpha^2-2\alpha+4=0$에서 $\alpha^3=-8$,

$\beta^2-2\beta+4=0$에서 $\beta^3=-8$이므로

$\alpha+\beta=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times4=-4$

$\alpha^3+\beta^3=(-8)+(-8)=-16$

$\alpha^4+\beta^4=\alpha^3\times\alpha+\beta^3\times\beta=-8(\alpha+\beta)=-16$

$\alpha^5+\beta^5=\alpha^3\times\alpha^2+\beta^3\times\beta^2=-8(\alpha^2+\beta^2)=32$

$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^3)^2+(\beta^3)^2=(-8)^2+(-8)^2=128$

$\alpha^7+\beta^7=(\alpha^3)^2\times\alpha+(\beta^3)^2\times\beta=64(\alpha+\beta)$
$=128$

따라서 $\alpha^6+\beta^6=\alpha^7+\beta^7=128$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6

답 6

34

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고,

한 근이 $\frac{b}{2}+i$로 허수이므로 다른 근은 $\frac{b}{2}-i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근의 합은 $-a$이고 두 근의 곱은 b이다.

(두 근의 합)$=\left(\frac{b}{2}+i\right)+\left(\frac{b}{2}-i\right)=-a$

$b=-a$ …… ㉠

(두 근의 곱)$=\left(\frac{b}{2}+i\right)\left(\frac{b}{2}-i\right)=b$

$\frac{b^2}{4}+1=b$, $b^2-4b+4=0$, $(b-2)^2=0$

$b=2$

㉠에서 $a=-2$

따라서 $ab=(-2)\times2=-4$

답 ③

35

조건 (가)에서 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 1이므로 나머지 정리에 의하여

$f(1)=1+p+q=1$, 즉 $p+q=0$ …… ㉠

조건 (나)에서 계수가 실수인 이차방정식 $f(x)=0$의 근이 $a+i$이므로 켤레복소수인 $a-i$도 이차방정식의 근이다.

이차방정식 $x^2+px+q=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=(a+i)+(a-i)=-p$

(두 근의 곱)$=(a+i)(a-i)=q$

즉, $p=-2a$, $q=a^2+1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $-2a+a^2+1=0$

$(a-1)^2=0$, $a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $p=-2$, $q=2$

따라서 $p+2q=-2+2\times2=2$

답 ①

36

$t=\sqrt{3}x$라 하면 주어진 방정식은

$\frac{a}{3}t^2+bt+c=0$, 즉 $at^2+3bt+3c=0$

이 방정식은 한 근이 $t=\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=3+2\sqrt{3}$이고 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $t=3-2\sqrt{3}$이다.

따라서 $\beta=\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})=0$

답 ③

다른 풀이

$\alpha=2+\sqrt{3}$에서 $\alpha-\sqrt{3}=2$

양변을 제곱하여 정리하면 $\alpha^2-2\sqrt{3}\alpha-1=0$

따라서 α는 이차방정식 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+\beta=2\sqrt{3}$

즉, $\beta=-2+\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})=0$

37

이차함수 $y=2x^2+ax-1$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 이차방정식 $2x^2+ax-1=0$의 두 실근과 같다.

이때 이차함수 $y=2x^2+ax-1$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표의 합이 -1이므로 이차방정식 $2x^2+ax-1=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$(두 근의 합)=-\dfrac{a}{2}=-1$

따라서 $a=2$

답 ⑤

38

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(1, 0)$에서 x축과 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 중근 $x=1$을 갖는다.

$y=x^2+ax+b=(x-1)^2=x^2-2x+1$

이므로 $a=-2$, $b=1$

이차함수 $y=x^2+x-2$의 그래프가 x축과 만나는 두 점은

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$에서

$(-2, 0)$, $(1, 0)$

따라서 두 점 사이의 거리는

$|1-(-2)|=3$

답 ③

39

$y=-x^2-2x-7=-(x+1)^2-6$

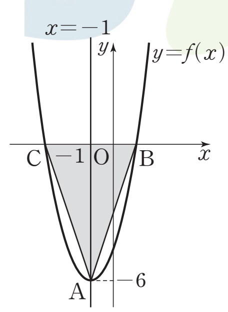
이므로 이차함수 $y=-x^2-2x-7$의 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 $(-1, -6)$이다.

즉, $f(x)=a(x+1)^2-6$ (a는 상수, $a\neq0$)으로 놓을 수 있다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나려면 $a>0$이어야 한다.

조건 (나)에서 삼각형 ABC의 넓이가 12이고 꼭짓점의 y좌표가 -6이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times6=12$에서 $\overline{BC}=4$



이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이므로

B$(1, 0)$, C$(-3, 0)$ 또는 B$(-3, 0)$, C$(1, 0)$

함수 $f(x)=a(x+1)^2-6$의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=a(1+1)^2-6$, $a=\dfrac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{2}(x+1)^2-6$이므로

$f(3)=24-6=18$

답 18

40

이차함수 $y=x^2+4x+a$의 그래프가 x축과 접하므로 이차방정식 $x^2+4x+a=0$의 판별식을 D라 할 때

$\dfrac{D}{4}=2^2-a=0$

따라서 $a=4$

답 ①

41

이차함수 $y=x^2+2(a-1)x+2a+13$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+2(a-1)x+2a+13=0$의 판별식을 D라 할 때

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-(2a+13)<0$

$a^2-4a-12<0$, $(a+2)(a-6)<0$

$-2<a<6$

따라서 정수 a의 값은 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 모든 정수 a의 값의 합은

$-1+0+1+2+3+4+5=14$

답 ②

42

두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=4^2-4(-3k^2-12k+40)$

$\quad=12(k-2)(k+6)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$D_2=(-12)^2-4(3k^2-36k+96)$

$\quad=-12(k-10)(k-2)$ $\cdots\cdots$ ㉡

(i) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수가 0으로 같은 경우

㉠, ㉡에서 $\begin{cases}12(k-2)(k+6)<0\\-12(k-10)(k-2)<0\end{cases}$의 해가 $-6<k<2$이므로

정수 k는 -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1이고 그 개수는 7

(ii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수가 1로 같은 경우

㉠, ㉡에서 $\begin{cases}12(k-2)(k+6)=0\\-12(k-10)(k-2)=0\end{cases}$의 해가 $k=2$이므로 정수 k의 개수는 1

(iii) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수가 2로 같은 경우

㉠, ㉡에서 $\begin{cases} 12(k-2)(k+6)>0 \\ -12(k-10)(k-2)>0 \end{cases}$의 해가 $2<k<10$이므로

정수 k는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로 그 개수는 7

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 모든 정수 k의 개수는 15

답 ③

43

이차함수 $y=x^2+6x-3$의 그래프와 직선 $y=kx-7$이 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+6x-3=kx-7$, 즉 $x^2+(6-k)x+4=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(6-k)^2-4\times1\times4<0$, $k^2-12k+20<0$

$(k-2)(k-10)<0$

$2<k<10$

따라서 자연수 k의 값은 3, 4, $\cdots$, 9이므로 그 개수는 7이다.

답 ⑤

44

이차함수 $y=x^2+x$의 그래프와 직선 $y=mx-4$가 오직 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+x=mx-4$, 즉 $x^2+(1-m)x+4=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(1-m)^2-16=0$

$m^2-2m-15=0$, $(m+3)(m-5)=0$

따라서 $m=-3$ 또는 $m=5$

그런데 m은 양수이므로 $m=5$

답 ③

45

이차함수 $y=x^2+5x+2$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+5x+2=-x+k$, 즉 $x^2+6x+2-k=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=3^2-(2-k)>0$, $7+k>0$

$k>-7$

따라서 정수 k의 최솟값은 -6이다.

답 ③

46

점 $(-1, 0)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m\{x-(-1)\}$, 즉 $y=mx+m$

직선 $y=mx+m$이 곡선 $y=x^2+x+4$에 접하려면 이차방정식 $mx+m=x^2+x+4$, 즉 $x^2+(1-m)x+4-m=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(1-m)^2-4(4-m)=0$

$m^2+2m-15=0$, $(m+5)(m-3)=0$

$m=-5$ 또는 $m=3$

그런데 $m>0$이므로 $m=3$

답 ④

47

직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x+4$의 그래프와 만나려면 이차방정식 $x^2-2x+4=x+k$, 즉 $x^2-3x+4-k=0$의 판별식을 D_1이라 할 때

$D_1=(-3)^2-4(4-k)\ge0$, $4k-7\ge0$

$k\ge\frac{7}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉠

직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=x^2-5x+15$의 그래프와 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2-5x+15=x+k$, 즉 $x^2-6x+15-k=0$의 판별식을 D_2라 할 때

$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-(15-k)<0$, $k-6<0$

$k<6$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{7}{4}\le k<6$

따라서 정수 k의 값은 2, 3, 4, 5이므로 그 개수는 4이다.

답 ②

48

x에 대한 이차함수 $y=x^2-4kx+4k^2+k$의 그래프와 직선 $y=2ax+b$가 접하려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-4kx+4k^2+k=2ax+b$, 즉 $x^2-2(2k+a)x+4k^2+k-b=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=\{-(2k+a)\}^2-(4k^2+k-b)=0$

$(4a-1)k+a^2+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a-1=0$, $a^2+b=0$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{16}$이므로 $a+b=\frac{3}{16}$

답 ②

49

곡선 $y=2x^2-5x+a$와 직선 $y=x+12$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 하자.

이차방정식 $2x^2-5x+a=x+12$, 즉 $2x^2-6x+a-12=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=\frac{a-12}{2}$

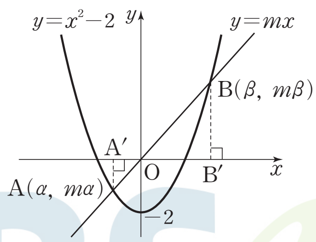
문제의 조건에서 $\alpha\beta=-4$이므로

$\frac{a-12}{2}=-4$, $a-12=-8$

따라서 $a=4$

답 ②

50



오른쪽 그림과 같이 두 점 A', B'의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<0<\beta)$라 하면 α, β가 이차방정식 $x^2-2=mx$, 즉 $x^2-mx-2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$

$\overline{\mathrm{AA}'}=-m\alpha$, $\overline{\mathrm{BB}'}=m\beta$이고 선분 AA'과 선분 BB'의 길이의 차가 16이므로

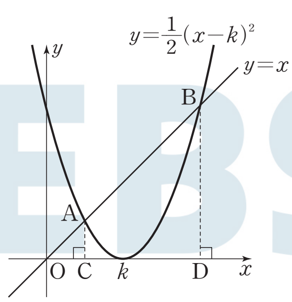
$|\overline{\mathrm{AA}'}-\overline{\mathrm{BB}'}|=|-m\alpha-m\beta|$

$=|m(\alpha+\beta)|=m^2=16$

$m>0$이므로 $m=4$

답 4

51



점 C의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면 선분 CD의 길이는 6이므로 점 D의 좌표는 $(\alpha+6,\ 0)$

직선 $y=x$ 위의 두 점

$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha)$, $\mathrm{B}(\alpha+6,\ \alpha+6)$

은 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x-k)^2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이므로

$\frac{1}{2}(x-k)^2=x$, $x^2-2(k+1)x+k^2=0$

이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+6)=2(k+1)$, $\alpha=k-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha(\alpha+6)=k^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(k-2)(k+4)=k^2$, $2k-8=0$

따라서 $k=4$

답 ②

52

이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-3x+1=x+2$, $x^2-4x-1=0$에서

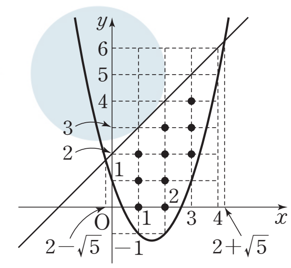
$x=2\pm\sqrt{5}$

이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=x+2$로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점의 x좌표를 p, y좌표를 q라 하면

$2-\sqrt{5}<p<2+\sqrt{5}$

이때 $-1<2-\sqrt{5}<0$이고 $4<2+\sqrt{5}<5$이므로 $2-\sqrt{5}<p<2+\sqrt{5}$를 만족시키는 정수 p의 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

따라서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 $(p,\ q)$는 다음과 같다.



(i) $p=0$일 때, $1<q<2$이므로 존재하지 않는다.

(ii) $p=1$일 때, $-1<q<3$이므로 $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$이다.

(iii) $p=2$일 때, $-1<q<4$이므로 $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$이다.

(iv) $p=3$일 때, $1<q<5$이므로 $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $(3,\ 4)$이다.

(v) $p=4$일 때, $5<q<6$이므로 존재하지 않는다.

(i)~(v)에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 10이다.

답 ⑤

53

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-x-k=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-k$ $\cdots\cdots$ ㉠

두 점 A, B는 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로

$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$

두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발이 각각 C, D이므로

$\mathrm{C}(\alpha,\ 0)$, $\mathrm{D}(\beta,\ 0)$

$\alpha>0$이므로 삼각형 AOC의 넓이 S_1은

$S_1=\frac{1}{2}\times\alpha\times\alpha^2=\frac{1}{2}\alpha^3$

$\beta<0$이므로 삼각형 DOB의 넓이 S_2는

$S_2=\frac{1}{2}\times(-\beta)\times\beta^2=-\frac{1}{2}\beta^3$

이때 $S_1-S_2=20$이므로

$\frac{1}{2}(\alpha^3+\beta^3)=20$

$\alpha^3+\beta^3=40$ $\cdots\cdots$ ㉡

이때 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$이므로 ㉠, ㉡에서

$40=1^3-3\times(-k)\times1$

따라서 $k=13$

답 13

54

$y=x^2+2x+3+4k$

$=(x+1)^2+2+4k$

이차함수 $y=x^2+2x+3+4k$의 최솟값이 30이므로

$2+4k=30$, $4k=28$

따라서 $k=7$

답 7

55

두 점 $\mathrm{A}(2t,\ -3)$과 $\mathrm{B}(-1,\ 2t)$에 대하여

$l=\sqrt{(-1-2t)^2+\{2t-(-3)\}^2}=\sqrt{8t^2+16t+10}$

$l^2=8t^2+16t+10=8(t+1)^2+2$

따라서 $t=-1$일 때, l^2의 최솟값은 2

답 2

56

$f(x)=x^2+ax-(b-7)^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-(b-7)^2$

이고, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 가지므로

$-\frac{a}{2}=-1$에서 $a=2$

조건 (나)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=cx$가 한 점에서 만나므로 x에 대한 방정식 $x^2+ax-(b-7)^2=cx$, 즉

$x^2+(a-c)x-(b-7)^2=0$이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a-c)^2+4(b-7)^2=0$

이때 $(a-c)^2\geq 0$, $4(b-7)^2\geq 0$이므로

$(a-c)^2=0$, $4(b-7)^2=0$

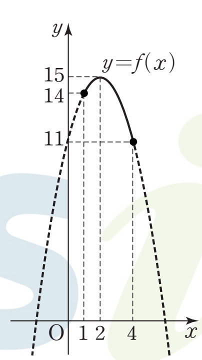
따라서 $a=c=2$, $b=7$이므로

$a+b+c=11$

답 11

57

$1\leq x\leq 4$에서 이차함수 $f(x)=-(x-2)^2+15$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 꼭짓점의 x좌표 2는 $1\leq x\leq 4$에 속한다.



$f(1)=-(-1)^2+15=14$

$f(2)=15$

$f(4)=-2^2+15=11$

따라서 이차함수 $f(x)$의 최솟값은 $x=4$일 때 11이다.

답 11

58

이차함수 $f(x)=x^2-2ax+2a^2=(x-a)^2+a^2$

(ⅰ) $0<a<2$일 때

$f(x)$의 최솟값은 $f(a)=a^2$

$0<a^2<4$이므로 $f(x)$의 최솟값이 10이 되도록 하는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a\geq 2$일 때

$f(x)$의 최솟값은 $f(2)=2a^2-4a+4$

$2a^2-4a+4=10$, $a^2-2a-3=0$

$(a-3)(a+1)=0$, $a=3$

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=2a^2=18$

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 18

답 18

59

$\overline{\mathrm{PQ}}=x$이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}^2=\overline{\mathrm{CQ}}^2=1^2+x^2$

$\overline{\mathrm{AQ}}^2+\overline{\mathrm{BQ}}^2+\overline{\mathrm{CQ}}^2=(\sqrt{3}-x)^2+2(1+x^2)$

$=3x^2-2\sqrt{3}x+5$

$=3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+4$

$\overline{\mathrm{AQ}}^2+\overline{\mathrm{BQ}}^2+\overline{\mathrm{CQ}}^2$은 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 최솟값 4를 가진다.

따라서 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $m=4$이므로 $\frac{m}{a}=4\sqrt{3}$

답 ③

60

$f(x)=ax^2+bx+5=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+5$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 $x=-\frac{b}{2a}$이고,

조건 (가)에 의하여 $a<0$, $b<0$이므로 $-\frac{b}{2a}<0$이 되어 꼭짓점의 x좌표는 $1\leq x\leq 2$에 속하지 않는다.

또, 이차함수 $f(x)$에서 x^2의 계수 a가 음수이므로 조건 (나)에 의하여 $1\leq x\leq 2$일 때, 이차함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=3$이다.

즉, $a+b+5=3$이므로 $a+b=-2$

이때 조건 (가)에서 a, b는 음의 정수이므로

$a=-1$, $b=-1$

따라서 $f(x)=-x^2-x+5$이므로 $f(-2)=3$

답 3

61

ㄱ. $a=\frac{3}{2}$일 때,

$f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+b$이고 $x=\frac{3}{2}$에서 최솟값 5를 가지므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=b=5$이다. (참)

ㄴ. $a\leq 1$일 때,

$f(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 가지므로 $f(1)=(1-a)^2+b=5$이고 $b=-a^2+2a+4$이다. (참)

ㄷ. (ⅰ) $a\le 1$일 때,

ㄴ에서 $b=-a^2+2a+4$이므로

$a+b=-a^2+3a+4=-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

따라서 $a+b$는 $a=1$에서 최댓값 6을 갖는다.

(ⅱ) $1<a\le 2$일 때,

$f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $b=5$를 가지므로

$6<a+b\le 7$이고 $a+b$는 $a=2$에서 최댓값 7을 갖는다.

(ⅲ) $a>2$일 때,

$f(x)$는 $x=2$에서 최솟값을 가지고

$f(2)=(2-a)^2+b=5$, $b=-a^2+4a+1$에서

$a+b=-a^2+5a+1=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{29}{4}$

따라서 $a+b$는 $a=\frac{5}{2}$에서 최댓값 $\frac{29}{4}$를 갖는다.

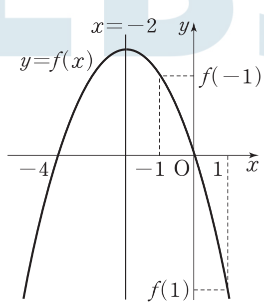
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a+b$의 최댓값은 $\frac{29}{4}$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

62

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $f(x)=ax(x+4)$ $(a<0)$이라 할 수 있고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



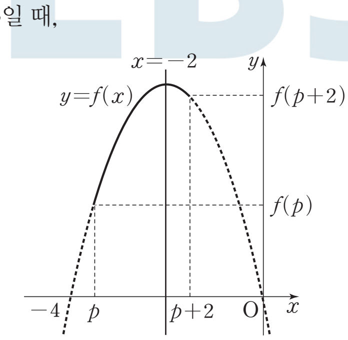
ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=-2$이므로

$f(0)=0$ (참)

ㄴ. 위의 그림과 같이 $-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이다. (참)

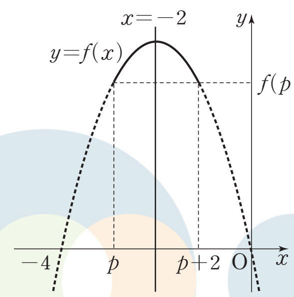
ㄷ. 함수 $f(x)$에서

(ⅰ) $p<-3$일 때,



$f(p)<f(p+2)$이므로 $g(p)=f(p)$

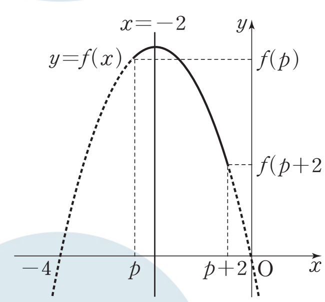
(ⅱ) $p=-3$일 때,



$f(p)=f(p+2)$이므로

$g(p)=f(p)$

(ⅲ) $p>-3$일 때,



$f(p)>f(p+2)$이므로

$g(p)=f(p+2)$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $g(p)$는 다음과 같다.

$$g(p)=\begin{cases} f(p) & (p\le -3) \\ f(p+2) & (p>-3) \end{cases}$$

$p\le -3$인 모든 p에 대하여 $g(p)\le f(-3)$이고

$p>-3$인 모든 p에 대하여 $g(p)<f(-3)$이므로

$g(p)$의 최댓값은 $f(-3)$이다.

$f(-3)=1$에서 $a=-\frac{1}{3}$이므로

$f(-2)=-\frac{1}{3}\times(-2)\times(-2+4)=\frac{4}{3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

63

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$ 위의 점이므로

$b=-\frac{1}{4}a+1$

$b=-\frac{1}{4}a+1$을 a^2+8b에 대입하면

$a^2+8b=a^2+8\left(-\frac{1}{4}a+1\right)=a^2-2a+8=(a-1)^2+7$

그런데 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$에서 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$을 따라 점 $\mathrm{B}(4,\ 0)$까지 움직이므로 $0\le a\le 4$

따라서 a^2+8b의 최솟값은 $a=1$일 때 7이다.

답 ④

다른 풀이

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$ 위의 점이므로

$b=-\frac{1}{4}a+1$, 즉 $a=-4b+4$

$a=-4b+4$를 a^2+8b에 대입하면

$a^2+8b=(-4b+4)^2+8b=16b^2-24b+16=16\left(b-\frac{3}{4}\right)^2+7$

그런데 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$에서 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$을 따라 점 $\mathrm{B}(4,\ 0)$까지 움직이므로 $0\le b\le 1$

따라서 a^2+8b의 최솟값은 $b=\frac{3}{4}$일 때 7이다.

64

$z^2=(a+2bi)^2=(a^2-4b^2)+4abi$,

$(\overline{z})^2=(a-2bi)^2=(a^2-4b^2)-4abi$

이므로 $z^2+(\overline{z})^2=0$에서 $2(a^2-4b^2)=0$, $a^2=4b^2$

따라서

$6a+12b^2+11=3a^2+6a+11=3(a+1)^2+8$

이므로 $6a+12b^2+11$의 최솟값은 $a=-1$일 때 8이다.

답 ③

65

$y=x^2-4ax+4a^2+b=(x-2a)^2+b$이므로 $2\le x\le 4$에서 이차함수 $y=(x-2a)^2+b$의 그래프는 축 $x=2a$의 위치에 따라 최솟값을 갖는 x좌표가 달라진다.

(i) $2a<2$, 즉 $a<1$인 경우

이차함수의 최솟값은 $x=2$일 때, $(2-2a)^2+b=4$이므로

$b=-4(a-1)^2+4$

(ii) $2\le 2a<4$, 즉 $1\le a<2$인 경우

이차함수의 최솟값은 그래프의 꼭짓점의 y좌표이므로 $b=4$

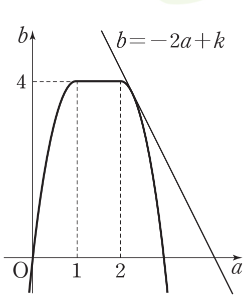
(iii) $4\le 2a$, 즉 $a\ge 2$인 경우

이차함수의 최솟값은 $x=4$일 때, $(4-2a)^2+b=4$이므로

$b=-4(a-2)^2+4$

(i), (ii), (iii)에서

$$b=\begin{cases} -4(a-1)^2+4 & (a<1) \\ 4 & (1\le a<2) \\ -4(a-2)^2+4 & (a\ge 2) \end{cases}$$



$2a+b=k$라 하면

오른쪽 그림과 같이

함수 $b=-4(a-2)^2+4$의 그래프와 직선 $b=-2a+k$가 접할 때 k는 최댓값을 갖는다.

이차방정식 $-4(a-2)^2+4=-2a+k$,

즉 $4a^2-18a+12+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-9)^2-4(12+k)=0$, $33-4k=0$

$k=\frac{33}{4}$

따라서 $M=\frac{33}{4}$이므로 $4M=33$

답 33

66

이차함수 $y=x^2-(a+4)x+3a+3$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 $x^2-(a+4)x+3a+3=0$에서

$(x-3)\{x-(a+1)\}=0$이므로

$x=3$ 또는 $x=a+1$

$0<a<2$이므로

$\mathrm{A}(a+1,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 3a+3)$

$\overline{\mathrm{AB}}=2-a$, $\overline{\mathrm{OC}}=3a+3$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

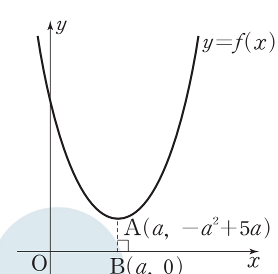
$S=\frac{1}{2}(2-a)(3a+3)=-\frac{3}{2}(a-2)(a+1)$

$\quad=-\frac{3}{2}(a^2-a-2)=-\frac{3}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$

따라서 $0<a<2$에서 삼각형 ABC의 넓이 S의 최댓값은 $a=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{27}{8}$이다.

답 ②

67



$y=x^2-2ax+5a$

$\quad=(x-a)^2-a^2+5a$

이므로 꼭짓점 A의 좌표는

$(a,\ -a^2+5a)$이고,

점 B의 좌표는 $(a,\ 0)$이다.

$0<a<5$이므로

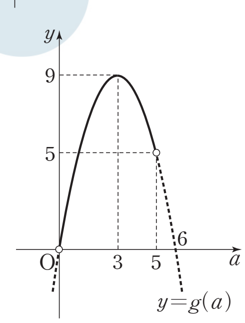
$\overline{\mathrm{OB}}=a$, $\overline{\mathrm{AB}}=-a^2+5a$

$\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{AB}}=g(a)$라 하면

$g(a)=a+(-a^2+5a)$

$\quad=-a^2+6a$

$\quad=-(a-3)^2+9$



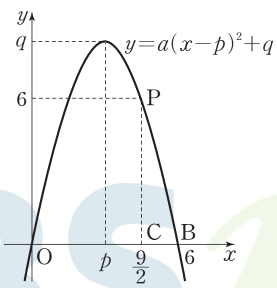
$0<a<5$에서 이차함수 $y=g(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $g(a)$는 $a=3$에서 최댓값 9를 갖는다.

따라서 $0<a<5$에서 $\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{AB}}$의 최댓값은 9이다.

답 ⑤

68

오른쪽 그림과 같이 A지점을 원점 O, 지면을 x축, 원점 O를 지나고 지면과 수직인 직선을 y축에 오도록 좌표평면 위에 놓으면 세 지점 B, C, P의 좌표는 각각 $B(6, 0)$, $C\left(\frac{9}{2}, 0\right)$, $P\left(\frac{9}{2}, 6\right)$이다.



세 점 O, B, P를 지나는 포물선의 식을

$y=a(x-p)^2+q$ (a, p, q는 상수, $a<0$)

이라 하면 이 그래프의 축의 방정식은 $x=3$이므로 $p=3$

즉, 이차함수 $y=a(x-3)^2+q$의 그래프는 원점을 지나므로

$0=a(0-3)^2+q$

$0=9a+q$ …… ㉠

이차함수 $y=a(x-3)^2+q$의 그래프는 점 $P\left(\frac{9}{2}, 6\right)$을 지나므로

$6=a\left(\frac{9}{2}-3\right)^2+q$

$6=\frac{9}{4}a+q$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{8}{9}$, $q=8$

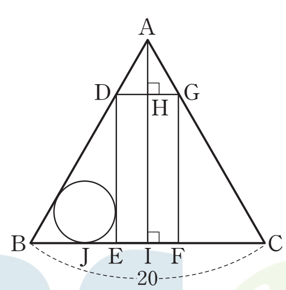
이차함수 $y=-\frac{8}{9}(x-3)^2+8$은 $x=3$에서 최댓값 8을 갖는다.

따라서 공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 8 m이다.

답 ②

69

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 DG, 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 원과 선분 BC와의 교점을 J라 하자.



$\overline{DH}=a$ $(0<a<10)$이라 하면

$\overline{AH}=\sqrt{3}a$, $\overline{DE}=10\sqrt{3}-\sqrt{3}a$

직사각형 DEFG의 넓이를 S라 하면

$S=2a(10\sqrt{3}-\sqrt{3}a)=-2\sqrt{3}a^2+20\sqrt{3}a$

$\quad=-2\sqrt{3}(a-5)^2+50\sqrt{3}$

이므로 $a=5$일 때, 직사각형 DEFG의 넓이는 최대이다.

원의 반지름의 길이를 b라 하면 $\overline{EI}=a$, $\overline{JE}=b$, $\overline{BJ}=\sqrt{3}b$이므로

$a+(1+\sqrt{3})b=10$

$a=5$일 때, $b=\frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$이므로 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times\frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}=5(\sqrt{3}-1)\pi$

따라서 $p=5$, $q=-5$이므로

$p^2+q^2=25+25=50$

답 ⑤

서술형 연습

본문 38쪽

01 $m=2$, $n=4$ **02** 5

01

이차방정식 $x^2-2(m+k)x+(k^2+4k+n)=0$이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=\{-(m+k)\}^2-1\times(k^2+4k+n)=0$

$(2m-4)k+(m^2-n)=0$ …… ㉮

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2m-4=0$, $m^2-n=0$ …… ㉯

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=2$, $n=4$ …… ㉰

답 $m=2$, $n=4$

단계	채점 기준	비율
㉮	주어진 이차방정식이 중근을 가질 조건을 이용하여 k에 대한 식을 세운 경우	40%
㉯	m, n에 대한 두 식을 세운 경우	40%
㉰	m, n의 값을 구한 경우	20%

02

이차함수 $y=x^2-x+2a$의 그래프가 직선 $y=-4x+a+2$보다 항상 위쪽에 있으려면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 한다. …… ㉮

이차방정식 $x^2-x+2a=-4x+a+2$, 즉 $x^2+3x+a-2=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$D=3^2-4\times1\times(a-2)<0$, $17-4a<0$

$a>\frac{17}{4}$ …… ㉯

따라서 정수 a의 최솟값은 5이다. …… ㉰

답 5

단계	채점 기준	비율
㉮	이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한 경우	30%
㉯	판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구한 경우	50%
㉰	정수 a의 최솟값을 구한 경우	20%

1등급 도전

본문 39~41쪽

01 ③ **02** 27 **03** ⑤ **04** ①
05 11 **06** 31 **07** ③ **08** 225
09 74

01

풀이 전략 복소수의 거듭제곱을 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 z의 거듭제곱을 이용하여 z^3을 구한 후 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여

$$z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\text{이므로}$$

$$z^3=z^2\times z=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)=1\ (\text{참})$$

$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$는 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로 $(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 $x^3-1=0$을 유도하여 $z^3=1$로도 구할 수 있다.

STEP 2 ㄱ을 이용하여 z^4, z^5을 구한 후 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. ㄱ에 의하여

$$z^4+z^5=z+z^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1\ (\text{참})$$

STEP 3 ㄱ을 이용하여 z가 거듭제곱일 때 나타나는 규칙을 찾아 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. ㄱ에 의하여 자연수 k에 대하여

$$z=z^4=z^7=\cdots=z^{3k-2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2=z^5=z^8=\cdots=z^{3k-1}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^3=z^6=z^9=\cdots=z^{3k}=1$$

(i) $n=3k-2$일 때,

$$z^n=z^{3k-2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},$$

$$z^{2n}=z^{3(2k-1)-1}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ z^{3n}=z^{3(3k-2)}=1,$$

$$z^{4n}=z^{3(4k-2)-2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ z^{5n}=z^{3(5k-3)-1}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

이므로 $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$을 만족시키는 100 이하의 모든 자연수 n은 $1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 100$이므로 그 개수는 34이다.

n이 100 이하의 자연수가 나올 때까지 $n=3k-2$의 k에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입한 값이다.

(ii) $n=3k-1$일 때,

$$z^n=z^{3k-1}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},$$

$$z^{2n}=z^{3\times 2k-2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ z^{3n}=z^{3(3k-1)}=1,$$

$$z^{4n}=z^{3(4k-1)-1}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ z^{5n}=z^{3(5k-1)-2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

이므로 $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$을 만족시키는 100 이하의 모든 자연수 n은 $2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 98$이므로 그 개수는 33이다.

n이 100 이하의 자연수가 나올 때까지 $n=3k-1$의 k에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입한 값이다.

(iii) $n=3k$일 때,

$$z^n=z^{2n}=z^{3n}=z^{4n}=z^{5n}=1,\ z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=5$$

이므로 $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=-1$을 만족시키는 100 이하의 자연수는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 n의 개수는 $34+33=67$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

02

풀이 전략 주어진 조건을 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표를 a에 대한 식으로 나타내어 이차함수 $y=f(x)$의 식을 구한다.

문제 풀이

STEP 1 세 점 A, B, C의 좌표를 구한 후 이차함수 $f(x)$를 a를 이용하여 나타낸다.

$$y=2x^2-2ax=2(x^2-ax)=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}$$

이므로 이차함수 $y=2x^2-2ax$의 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는

$\left(\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{2}\right)$이다.

또, 이차함수 $y=2x^2-2ax$의 그래프가 x축과 만나는 점 B의 x좌표는 $2x^2-2ax=0$에서 $2x(x-a)=0$이므로 $x=a$

즉, 점 B의 좌표는 $(a,\ 0)$이다.

이때 $\overline{BC}=3$이므로 점 C의 좌표는 $(a+3,\ 0)$이다.

x^2의 계수가 -1이고 x축과 두 점 $B(a,\ 0)$, $C(a+3,\ 0)$에서 만나는 이차함수 $y=f(x)$의 식은

$f(x)=-(x-a)(x-a-3)$

STEP 2 a의 값을 구하고 삼각형 ACB의 넓이를 구한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $A\left(\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{2}\right)$을 지나므로

$$-\frac{a^2}{2}=-\left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}-3\right)$$

이차함수 $y=f(x)$의 식에 $x=\dfrac{a}{2}$, $y=-\dfrac{a^2}{2}$을 대입한다.

$a^2-6a=0,\ a(a-6)=0$

$a>0$이므로 $a=6$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 3\times 18=27$$

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times|(\text{점 A의 }y\text{좌표})|$

답 27

03

풀이 전략 함수 $y=f(x)$의 식을 구한 후 세 점 P, Q, R의 x좌표를 a, m에 대한 식으로 나타낸다.

문제 풀이

STEP 1 두 점 A, B를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 식을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $1,\ a$이므로

$f(x)=(x-1)(x-a)$

두 점 $A(1,\ 0)$, $B(a,\ 0)$을 지나므로 $f(1)=f(a)=0$

따라서 $f(2)=2-a$ (참)

STEP 2 점 P의 x좌표를 구한 후 직선 AQ의 방정식을 이용하여 $\overline{AR}$를 a, m에 대한 식으로 나타내어 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\dfrac{a+1}{2}$이므로

점 P의 x좌표는 $\dfrac{a+1}{2}$ …… ㉠

기울기가 m이고 점 $B(a,\ 0)$을 지나는 직선 PB의 방정식은

$y=m(x-a)$

두 점 P, B의 x좌표는 이차함수 $y=f(x)$의 식과 직선 PB의 방정식을 연립한 이차방정식의 두 실근과 같다.

$(x-1)(x-a)=m(x-a)$에서

$(x-a)(x-1-m)=0$

$x=a$ 또는 $x=m+1$

따라서 점 P의 x좌표는 $m+1$ …… ㉡

점 B의 x좌표는 a이다.

㉠, ㉡에서 $\dfrac{a+1}{2}=m+1$, 즉 $a=2m+1$ …… ㉢

기울기가 m이고 점 $A(1,\ 0)$을 지나는 직선 AQ의 방정식은

$y=m(x-1)$

직선 PB와 직선 AQ는 평행하므로 직선 AQ의 기울기는 m이다.

두 점 A, Q의 x좌표는 이차함수 $y=f(x)$의 식과 직선 AQ의 방정식을 연립한 이차방정식의 두 실근과 같다.

$(x-1)(x-a)=m(x-1)$에서

$(x-1)(x-m-a)=0$

$x=1$ 또는 $x=m+a$

따라서 두 점 Q, R의 x좌표는 $m+a$이다.

점 R는 점 Q를 x축에 내린 수선의 발이므로 두 점 Q, R의 x좌표는 같다.

㉢에 의하여

$\overline{AR}=(m+a)-1$ (점 R의 x좌표) $-$ (점 A의 x좌표)

$=m+2m+1-1=3m$ (참)

STEP 3 삼각형 BRQ의 넓이를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $\overline{BR}=(m+a)-a=m$, (점 R의 x좌표) $-$ (점 B의 x좌표)

$\overline{QR}=m(m+a-1)=m\times 3m=3m^2$이고,

삼각형 BRQ의 넓이가 $\dfrac{81}{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times m\times 3m^2=\dfrac{81}{2}$, $m^3=27$

m은 실수이므로 $m=3$이고 이것을 ㉢에 대입하면 $a=7$

따라서 $a+m=10$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

04

풀이 전략 S_1-S_3, S_2-S_4를 k에 대한 식으로 나타내어 주어진 식의 최솟값을 구한다.

문제 풀이

STEP 1 점 E의 좌표를 k를 이용하여 나타낸다.

두 점 $O(0,\ 0)$, $B(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=2x$이므로

y좌표가 k인 점 E의 좌표는 $\left(\dfrac{k}{2},\ k\right)$이다.

STEP 2 S_1, S_3을 k에 대한 식으로 나타낸 후 S_1-S_3의 값을 구한다.

삼각형 OED의 넓이 S_1은

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{k}{2}\times k=\dfrac{k^2}{4}$

$\overline{DE}=$ (점 E의 x좌표)

삼각형 EFB의 넓이 S_3은

$S_3=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{k}{2}\right)\times(2-k)=\dfrac{k^2}{4}-k+1$

$S_3=\dfrac{1}{2}\times\overline{EF}\times\overline{BF}$

따라서 $S_1-S_3=\dfrac{k^2}{4}-\left(\dfrac{k^2}{4}-k+1\right)=k-1$

STEP 3 S_2, S_4를 k에 대한 식으로 나타낸 후 S_2-S_4의 값을 구한다.

$S_1+S_2=k$이므로 사각형 OAFE의 넓이 S_2는

$S_1+S_2=$ (사각형 OAFD의 넓이)

$=\overline{OA}\times\overline{AF}=1\times k=k$

$S_2=k-\dfrac{k^2}{4}$

$S_1+S_4=\dfrac{1}{2}$이므로 사각형 DEBC의 넓이 S_4는

$S_1+S_4=$ (삼각형 OBC의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{OC}\times$ (점 B의 x좌표) $=\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$

$S_4=\dfrac{1}{2}-\dfrac{k^2}{4}$

따라서 $S_2-S_4=\left(k-\dfrac{k^2}{4}\right)-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{k^2}{4}\right)=k-\dfrac{1}{2}$

STEP 4 $(S_1-S_3)^2+(S_2-S_4)^2$의 최솟값을 구한다.

$$(S_1-S_3)^2+(S_2-S_4)^2=(k-1)^2+\left(k-\frac{1}{2}\right)^2=2k^2-3k+\frac{5}{4}$$

$$=2\left(k-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$$

$0<k<1$이므로 $(S_1-S_3)^2+(S_2-S_4)^2$의 최솟값은

$k=\dfrac{3}{4}$일 때 $\dfrac{1}{8}$이다.

답 ①

05

풀이 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

문제 풀이

STEP 1 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식을 구한다.

$f(0)=f(4)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=2$이다.

STEP 2 a의 부호에 따라 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린 후 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$를 구한다.

$f(x)=a(x-2)^2+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)이라 하자.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=2$이므로

$f(-1)\neq f(4)$

따라서 $f(-1)+|f(4)|=0$에서 $f(-1)=f(4)=0$이 성립하지 않으므로

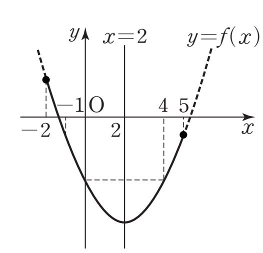
$f(-1)=-|f(4)|<0$이고 $|f(-1)|=|f(4)|$ …… ㉠

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 a의 부호에 따라 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a>0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록한 모양이다.

$f(4)<f(-1)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.



(ii) $a<0$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록한 모양이다.

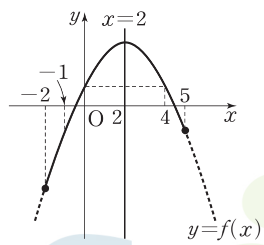
㉠에서 $f(-1)<0$이므로

$f(4)>0$

그러므로 $f(-1)+|f(4)|=0$에서

$f(-1)+f(4)=0$

즉, $13a+2b=0$ …… ㉡



$-2\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -19이므로

축의 방정식 $x=2$로부터 가장 멀리 떨어진 x의 값이 -2이므로 최솟값은 $f(-2)$이다.

$f(-2)=-19$

즉, $16a+b=-19$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=13$

(i), (ii)에서 $f(x)=-2(x-2)^2+13$이므로

$f(3)=-2\times1^2+13=11$

답 11

06

풀이 전략 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계를 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 조건 (가)를 만족시키는 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 꼴을 파악한다.

조건 (가)에 의하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 대칭축은 각각 $x=0$으로 같고 조건 (나)에 의하여 $f(0)$이 정수이므로 $g(0)$도 정수이다.

STEP 2 p의 값의 범위를 나누어 조건을 만족시키는 것을 찾는다.

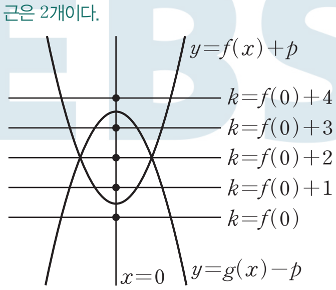
(i) $0\le p<1$인 경우

$k=f(0)+1$, $k=f(0)+2$, $k=f(0)+3$일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$의 서로 다른 실근의 개수가 각각 2로 같고

$k\le f(0)$, $k\ge f(0)+4$일 때, $f(x)+p=k$의 근은 2개, $g(x)-p=k$의 근은 없다.

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$의 서로 다른 실근의 개수는 다르다. $f(x)+p=k$의 근은 없고 $g(x)-p=k$의 근은 2개이다.



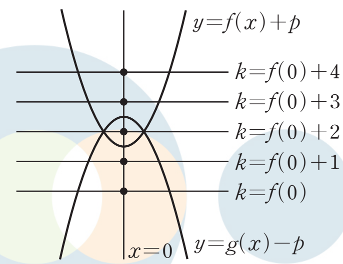
(ii) $1\le p<2$인 경우

$k=f(0)+2$일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$의 서로 다른 실근의 개수가 각각 2로 같고

$k\le f(0)+1$, $k\ge f(0)+3$일 때, $f(x)+p=k$의 근은 2개, $g(x)-p=k$의 근은 없다.

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$의 서로 다른 실근의 개수는 다르다. $f(x)+p=k$의 근은 없고 $g(x)-p=k$의 근은 2개이다.



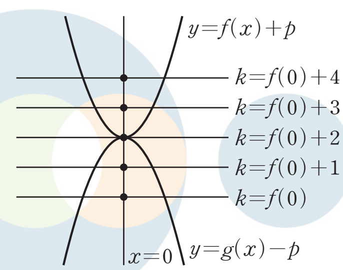
(iii) $p=2$인 경우

$k=f(0)+2$일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$의 서로 다른 실근의 개수가 각각 1로 같고

$k\ne f(0)+2$일 때, $k<f(0)+2$일 때, $f(x)+p=k$의 근은 없고 $g(x)-p=k$의 근은 2개이다. $k>f(0)+2$일 때, $f(x)+p=k$의 근은 2개, $g(x)-p=k$의 근은 없다.

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$의 서로 다른 실근의 개수는 다르다.



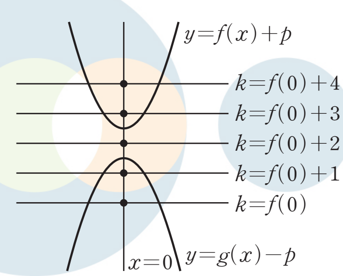
(iv) $2<p\le3$인 경우

$k=f(0)+2$일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$의 서로 다른 실근의 개수가 각각 0으로 같고

$k\ne f(0)+2$일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$의 서로 다른 실근의 개수는 다르다.



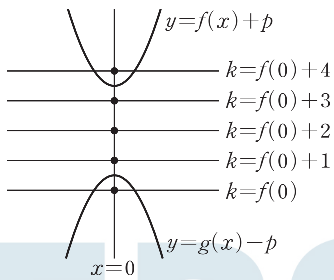
(v) $p>3$인 경우

모든 실수 x에 대하여 $g(x)-p<f(x)+p$이므로

$g(0)-p<k<f(0)+p$인 정수 k에 대하여

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$의 서로 다른 실근의 개수가 각각 0으로 같다.

이때 정수 k의 개수는 3 이상이다.



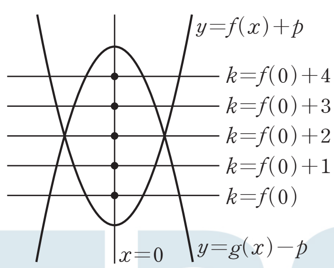
(vi) $p<0$인 경우

$g(0)-p-\{f(0)+p\}>4$이므로

$f(0)+p<k<g(0)-p$인 정수 k에 대하여

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$의 서로 다른 실근의 개수가 각각 2로 같다.

이때 정수 k의 개수는 5 이상이다.



STEP 3 p의 최댓값과 최솟값을 구하여 $m+10M$의 값을 구한다.

(i)~(vi)에서 두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$의 서로 다른 실근의 개수가 같게 되도록 하는 정수 k의 개수가 1일 때, 모든 실수 p의 값의 범위는 $1\le p\le 3$이므로 실수 p의 최솟값은 1, 최댓값은 3이다.

따라서 $m+10M=1+30=31$

답 31

07

풀이 전략 $2<t<\frac{11}{2}$, $\frac{11}{2}<t<10$인 경우로 나누어 각각의 경우의 직사각형의 최댓값을 구한다.

문제 풀이

STEP 1 선분 AB의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

$A(t,\ -t+10)$이고, 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 B의 x좌표는 t이므로

$B(t,\ -t^2+11t-10)$

그러므로 선분 AB의 길이는

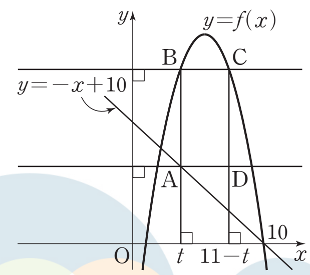
$\overline{AB}=(-t^2+11t-10)-(-t+10)$

$\quad=-t^2+12t-20$

STEP 2 $2<t<\frac{11}{2}$일 때의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구한다.

(i) $2<t<\frac{11}{2}$인 경우

점 A는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축인 직선 $x=\frac{11}{2}$의 왼쪽에 있다.



$\overline{BC}=2\left(\frac{11}{2}-t\right)=11-2t$이므로 직사각형 BADC의 둘레의 길이는

$=-2t^2+20t-18=-2(t^2-10t+25-25)-18$
$=-2(t-5)^2+32$

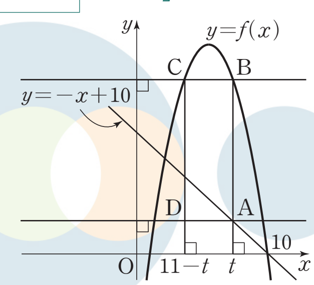
$2(-t^2+10t-9)=-2(t-5)^2+32$

$2<t<\frac{11}{2}$에서 직사각형 BADC의 둘레의 길이의 최댓값은 32이다.

STEP 3 $\frac{11}{2}<t<10$일 때의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구한다.

(ii) $\frac{11}{2}<t<10$인 경우

점 A는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축인 직선 $x=\frac{11}{2}$의 오른쪽에 있다.



$\overline{BC}=2\left(t-\frac{11}{2}\right)=2t-11$이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$=-2t^2+28t-62$
$=-2(t^2-14t+49-49)-62$
$=-2(t-7)^2+36$

$2(-t^2+14t-31)=-2(t-7)^2+36$

$\frac{11}{2}<t<10$에서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 36이다.

(i), (ii)에서 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 36이다.

답 ③

08

풀이 전략 함수 $y=g(t)$의 그래프를 그린 후, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=-4x+a$가 네 점에서 만날 때를 생각한다.

문제 풀이

STEP 1 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 위치에 따라 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하여 $g(t)$를 구한다.

$f(x)=x^2-4tx+10t=(x-2t)^2-4t^2+10t$

(i) $t\le 2t\le t+3$, 즉 $0\le t\le 3$인 경우

함수 $f(x)$의 최솟값은 $x=2t$일 때 $-4t^2+10t$이다.

① $2t-t\le t+3-2t$, 즉 $0\le t\le \frac{3}{2}$인 경우

함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=t+3$일 때, $-3t^2+4t+9$이므로

$g(t)=\underline{-7t^2+14t+9}$

$(f(x)$의 최댓값$)+(f(x)$의 최솟값$)$
$=(-3t^2+4t+9)+(-4t^2+10t)$

② $2t-t>t+3-2t$, 즉 $\frac{3}{2}<t\le 3$인 경우

함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=t$일 때, $-3t^2+10t$이므로

$g(t)=\underline{-7t^2+20t}$

$(f(x)$의 최댓값$)+(f(x)$의 최솟값$)$
$=(-3t^2+10t)+(-4t^2+10t)$

(ii) $2t>t+3$, 즉 $t>3$인 경우

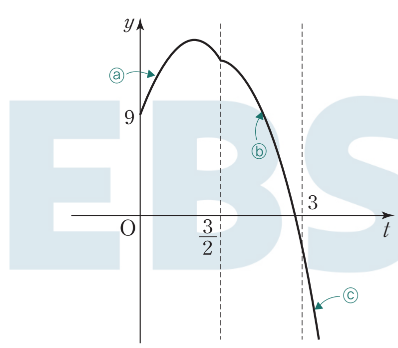
함수 $f(x)$의 최솟값은 $x=t+3$일 때 $-3t^2+4t+9$이고,

함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=t$일 때 $-3t^2+10t$이다.

그러므로 $g(t)=-6t^2+14t+9$

(i), (ii)에서 함수 $g(t)$와 그 그래프는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}-7t^2+14t+9 & \left(0\le t\le \frac{3}{2}\right) \quad \cdots\cdots ⓐ\\ -7t^2+20t & \left(\frac{3}{2}<t\le 3\right) \quad \cdots\cdots ⓑ\\ -6t^2+14t+9 & (t>3) \quad \cdots\cdots ⓒ\end{cases}$$



STEP 2 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=-4x+a$가 세 점에서 만날 때와 접할 때의 a의 값을 구한다.

함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=-4t+a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이려면 직선 $y=-4t+a$가 점 $\left(\frac{3}{2}, \frac{57}{4}\right)$을 지날 때이므로

$\frac{57}{4}=-6+a$, $a=\frac{81}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉠

또한, 함수 $g(t)=-7t^2+14t+9$ $\left(0\le t\le \frac{3}{2}\right)$의 그래프와 직선 $y=-4t+a$가 접할 때, 이차방정식 $-7t^2+14t+9=-4t+a$, 즉 $7t^2-18t+a-9=0$의 판별식을 D_1이라 하면

이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식이 중근을 가져야 한다. 즉, $D_1=0$

$\frac{D_1}{4}=(-9)^2-7(a-9)=0$, $a=\frac{144}{7}$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\left(0\le t\le \frac{3}{2}\right.$에서 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=-4t+\frac{144}{7}$가 점 $\left(\frac{9}{7}, \frac{108}{7}\right)$에서 접한다.$\Big)$

$-7t^2+14t+9=-4t+\frac{144}{7}$에서
$49t^2-126t+81=0$, $(7t-9)^2=0$이므로 $t=\frac{9}{7}$

함수 $g(t)=-7t^2+20t$ $\left(\frac{3}{2}<t\le 3\right)$의 그래프와 직선 $y=-4t+a$가 접할 때, 이차방정식 $-7t^2+20t=-4t+a$, 즉 $7t^2-24t+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-12)^2-7a=0$, $a=\frac{144}{7}$ $\cdots\cdots$ ㉢

$\left(\frac{3}{2}<t\le 3\right.$에서 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=-4t+\frac{144}{7}$가 점 $\left(\frac{12}{7}, \frac{96}{7}\right)$에서 접한다.$\Big)$

$-7t^2+20t=-4t+\frac{144}{7}$에서
$49t^2-168t+144=0$, $(7t-12)^2=0$이므로 $t=\frac{12}{7}$

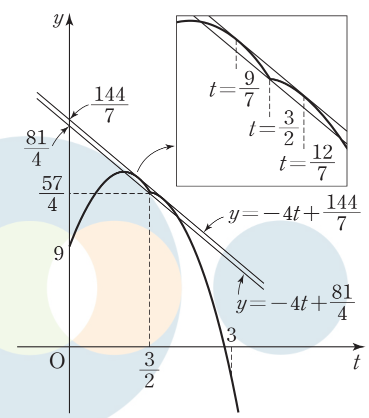
STEP 3 p, q의 값을 구한다.

㉠, ㉡, ㉢에서 방정식 $g(t)=-4t+a$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 a의 값의 범위는

$\frac{81}{4}<a<\frac{144}{7}$

따라서 $p=\frac{81}{4}$, $q=\frac{144}{7}$이므로

$4p+7q=81+144$
$=225$



답 225

09

풀이 전략 제한된 범위에서의 이차함수의 최댓값을 생각한다.

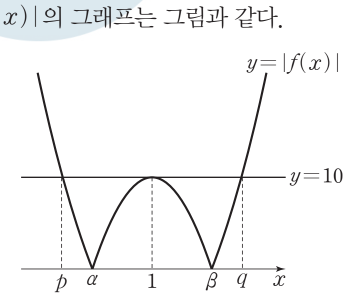
문제 풀이

STEP 1 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 파악한다.

방정식 $f(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$$|f(x)|=\begin{cases}f(x) & (x<\alpha \text{ 또는 } x>\beta)\\ -f(x) & (\alpha\le x\le \beta)\end{cases}$$

이고 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=10$이 만나는 서로 다른 세 점 중 x좌표가 1이 아닌 두 점의 x좌표를 각각 p, q $(p<q)$라 하면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

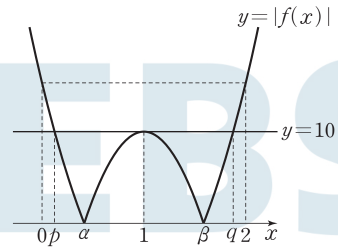


STEP 2 주어진 조건을 이용하여 이차함수 $f(x)$의 식을 구한다.

1은 방정식 $f(k-1)=f(k+1)$의 한 실근이고

$q-p<2$이면 $(k+1)-(k-1)>q-p$이므로

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



$k<1$이면 $g(k)=f(k-1)>10$,

$k\ge1$이면 $g(k)=f(k+1)>10$

이므로 $g(k)=10$을 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

따라서 $q-p\ge2$

$k+1=q$이면 $k-1=q-2\ge p$이고

$g(k)=|f(k+1)|=f(k+1)=f(q)=10$

$k+1>q$이면 $g(k)=|f(k+1)|=f(k+1)>10$

이므로 $g(k)=10$을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $q-1$이다.

조건에서 $q-1=\sqrt{10}$, $q=\sqrt{10}+1$이므로

$f(q)=f(\sqrt{10}+1)=10$

$f(\sqrt{10}+1)=a(\sqrt{10}+1-1)^2-10=10a-10=10$에서 $a=2$

그러므로 $f(x)=2(x-1)^2-10=2x^2-4x-8$

STEP 3 방정식 $f(x)=0$의 근을 이용하여 k의 값의 범위에 따른 함수 $|f(x)|$의 최댓값 $g(k)$를 구한다.

방정식 $f(x)=0$의 실근은 $\alpha=1-\sqrt{5}$, $\beta=1+\sqrt{5}$

함수 $|f(x)|$에서 두 실수 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$에 대하여

$x_1<x_2<1-\sqrt{5}$이면 $|f(x_1)|>|f(x_2)|$ …… ㉠

$1-\sqrt{5}\le x_1<x_2<1$이면 $|f(x_1)|<|f(x_2)|$ …… ㉡

$1\le x_1<x_2<1+\sqrt{5}$이면 $|f(x_1)|>|f(x_2)|$ …… ㉢

$1+\sqrt{5}\le x_1<x_2$이면 $|f(x_1)|<|f(x_2)|$ …… ㉣

$k-1\le x\le k+1$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값 $g(k)$는 다음과 같다.

(ⅰ) $k+1<1-\sqrt{5}$일 때,

$k<-\sqrt{5}$이고 ㉠에서 $g(k)=|f(k-1)|$

(ⅱ) $k-1<1-\sqrt{5}\le k+1$일 때,

$-\sqrt{5}\le k<2-\sqrt{5}$

이고 ㉠, ㉡에서 $g(k)$의 값은 $|f(k-1)|$과 $|f(k+1)|$ 중 큰 값이다.

$|f(k-1)|=f(k-1)=2k^2-8k-2$,

$|f(k+1)|=-f(k+1)=-2k^2+10$이므로

① $|f(k-1)|>|f(k+1)|$에서

$2k^2-8k-2>-2k^2+10$, $4(k-3)(k+1)>0$

$k<-1$ 또는 $k>3$

② $|f(k-1)|=|f(k+1)|$에서

$k=-1$ 또는 $k=3$

③ $|f(k-1)|<|f(k+1)|$에서

$-1<k<3$

①, ②, ③에서

$-\sqrt{5}\le k<-1$일 때, $g(k)=|f(k-1)|$,

$-1\le k<2-\sqrt{5}$일 때, $g(k)=|f(k+1)|$

(ⅲ) $1-\sqrt{5}\le k-1<k+1<1$일 때,

$2-\sqrt{5}\le k<0$이고 ㉡에서 $g(k)=|f(k+1)|$

(ⅳ) $k-1<1\le k+1$일 때,

$0\le k<2$이고 $g(k)=10$

(ⅴ) $1\le k-1<k+1<1+\sqrt{5}$일 때,

$2\le k<\sqrt{5}$이고 ㉢에서 $g(k)=|f(k-1)|$

(ⅵ) $k-1<1+\sqrt{5}\le k+1$일 때,

$\sqrt{5}\le k<2+\sqrt{5}$

이고 ㉢, ㉣에서 $g(k)$의 값은 $|f(k-1)|$과 $|f(k+1)|$ 중 큰 값이다.

$|f(k-1)|=-f(k-1)=-2k^2+8k+2$,

$|f(k+1)|=f(k+1)=2k^2-10$이므로

① $|f(k-1)|>|f(k+1)|$에서

$-2k^2+8k+2>2k^2-10$, $4(k-3)(k+1)<0$

$-1<k<3$

② $|f(k-1)|=|f(k+1)|$에서

$k=-1$ 또는 $k=3$

③ $|f(k-1)|<|f(k+1)|$에서

$k<-1$ 또는 $k>3$

①, ②, ③에서

$\sqrt{5}\le k<3$일 때, $g(k)=|f(k-1)|$,

$3\le k<2+\sqrt{5}$일 때, $g(k)=|f(k+1)|$

(ⅶ) $1+\sqrt{5}\le k-1$일 때,

$2+\sqrt{5}\le k$이고 ㉣에서 $g(k)=|f(k+1)|$

(ⅰ)~(ⅶ)에서

$$g(k)=\begin{cases} |f(k-1)|=2(k-2)^2-10 & (k<-1) \\ |f(k+1)|=-2k^2+10 & (-1\le k<0) \\ 10 & (0\le k<2) \\ |f(k-1)|=-2(k-2)^2+10 & (2\le k<3) \\ |f(k+1)|=2k^2-10 & (k\ge3) \end{cases}$$

STEP 4 $g(k)$의 최솟값을 구하여 $b^2+c^2+m^2$의 값을 구한다.

따라서 함수 $g(k)$는 $k=-1$과 $k=3$에서 최솟값 8을 가지므로

$b^2+c^2+m^2=(-1)^2+3^2+8^2=74$

답 74

03 방정식과 부등식(2)

개념 확인 문제

본문 43쪽

01 (1) $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

(2) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm2$

(3) $x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

(4) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

02 -1, $2-i$

03 (1) $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=-\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$

04 (1) $x>3$　(2) 해는 없다.

05 (1) $1<x<3$　(2) $-2<x\le0$

06 (1) $-8<x<2$　(2) $x\le-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x\ge3$

07 (1) $-2\le x\le5$　(2) $x<-3$ 또는 $x>\dfrac{11}{3}$

08 (1) $x<1$ 또는 $x>4$　(2) $-1\le x\le\dfrac{5}{2}$

(3) 해는 없다.　(4) $x=\dfrac{3}{2}$

(5) 모든 실수

09 (1) $3<x\le6$　(2) $-1<x\le3$

내신&학평 유형 연습

본문 44~53쪽

01 ③	02 ③	03 ③	04 ③	05 ⑤	06 ②
07 ②	08 ②	09 ⑤	10 7	11 ⑤	12 12
13 15	14 ⑤	15 ④	16 ③	17 ③	18 ①
19 ②	20 ②	21 ③	22 39	23 ③	24 ①
25 ①	26 ⑤	27 60	28 21	29 ⑤	30 ⑤
31 9	32 59	33 ⑤	34 ①	35 ①	36 ③
37 ⑤	38 4	39 ①	40 ③	41 ③	42 ⑤
43 ①	44 ①	45 ②	46 22	47 ②	48 13
49 ⑤	50 ⑤	51 ⑤	52 ⑤	53 ④	54 10
55 ④					

01

$P(x)=x^3+2x^2-3x-10$이라 하면

$P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -3 & -10 \\ & & 2 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=x^3+2x^2-3x-10=(x-2)(x^2+4x+5)$

삼차방정식 $x^3+2x^2-3x-10=0$의 두 허근은 이차방정식 $x^2+4x+5=0$의 두 허근이고

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=5$

따라서

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-4)^3-3\times5\times(-4)=-4$

답 ③

02

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면 $P(1)=0$, $P(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline 3 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \\ & & 3 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x-3)(x+2)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x-3)(x+2)=0$이므로

$x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

$\alpha<\beta<\gamma$이므로 $\alpha=-2$, $\beta=1$, $\gamma=3$

따라서 $\alpha+\beta+2\gamma=-2+1+2\times3=5$

답 ③

03

$(x^2-3x)^2+5(x^2-3x)+6=0$에서 $x^2-3x=X$로 놓으면

$X^2+5X+6=0$, $(X+3)(X+2)=0$, $X=-3$ 또는 $X=-2$

(i) $X=-3$, 즉 $x^2-3x=-3$일 때,

$x^2-3x+3=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times3=-3<0$

즉, 방정식 $x^2-3x+3=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=-2$, 즉 $x^2-3x=-2$일 때,

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$, $x=1$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 모든 실근의 곱은 $1\times2=2$

답 ③

04

$P(x)=x^3+x-2$라 하면 $P(1)=0$이므로 조립제법에 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+x+2)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+x+2)=0$

이때 삼차방정식 $x^3+x-2=0$의 두 허근이 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 두 허근이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=2$

따라서

$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{1-4}{2}=-\dfrac{3}{2}$

답 ③

05

다항식 $2x^3+x^2+x-1$을 일차식 $x-a$로 나누었을 때 몫은 $Q(x)$, 나머지는 3이므로

$2x^3+x^2+x-1=(x-a)Q(x)+3$

위 식의 양변에 $x=a$를 대입하면 $2a^3+a^2+a-1=3$

$2a^3+a^2+a-4=0$, $(a-1)(2a^2+3a+4)=0$

이때 이차방정식 $2a^2+3a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times2\times4=-23<0$이므로 실근을 갖지 않는다.

그러므로 $a=1$

다항식 $2x^3+x^2+x-1$을 일차식 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하면 구하면 오른쪽과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ & & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 2 & 3 & 4 & \boxed{3} \end{array}$$

$2x^3+x^2+x-1=(x-1)(2x^2+3x+4)+3$

따라서 $Q(x)=2x^2+3x+4$이므로 $Q(a)=Q(1)=9$ 답 ⑤

06

삼차방정식 $x^3+(k-1)x^2-k=0$의 한 허근이 z이면 켤레복소수 $\overline{z}$도 주어진 삼차방정식의 근이다.

$P(x)=x^3+(k-1)x^2-k$라 하면 $P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & k-1 & 0 & -k \\ & & 1 & k & k \\ \hline & 1 & k & k & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+kx+k)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+kx+k)=0$

이때 삼차방정식 $x^3+(k-1)x^2-k=0$의 두 허근이 z, $\overline{z}$이므로 z, $\overline{z}$는 이차방정식 $x^2+kx+k=0$의 두 허근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$z+\overline{z}=-k=-2$

그러므로 $k=2$ 답 ②

07

삼차방정식 $x^3+2x^2-3x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$x^3+2x^2-3x+4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

위 식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$-27+18+9+4=(-3-\alpha)(-3-\beta)(-3-\gamma)$

$4=-(3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)$

양변에 -1을 곱하면 $(3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)=-4$ 답 ②

08

조건 (가)에서

$P(x)=x^3-3x^2+9x+13$이라 하면 $P(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & -3 & 9 & 13 \\ & & -1 & 4 & -13 \\ \hline & 1 & -4 & 13 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-4x+13)$

즉, $x^3-3x^2+9x+13=0$에서 $(x+1)(x^2-4x+13)=0$

$x+1=0$ 또는 $x^2-4x+13=0$

이때 $z=-1$이면 $\overline{z}=-1$이므로 $\dfrac{z-\overline{z}}{i}=\dfrac{-1-(-1)}{i}=0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 방정식 $x^3-3x^2+9x+13=0$의 근 중 z는 이차방정식 $x^2-4x+13=0$의 근이다.

이차방정식 $x^2-4x+13=0$의 근은

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times13}=2\pm3i$

조건 (나)에서 $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$이므로

$\dfrac{z-\overline{z}}{i}=\dfrac{(a+bi)-(a-bi)}{i}=\dfrac{2bi}{i}=2b$

이때 $\dfrac{z-\overline{z}}{i}$가 음의 실수이므로 b는 음수이다.

따라서 $z=2-3i$이므로 $a=2$, $b=-3$

즉, $a+b=-1$ 답 ②

09

ㄱ. $P(\sqrt{n})=(\sqrt{n})^4+(\sqrt{n})^2-n^2-n$

$=n^2+n-n^2-n=0$ (참)

ㄴ. $P(x)=x^4+x^2-n^2-n=x^4+x^2-n(n+1)$

$=(x^2-n)(x^2+n+1)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 실근은 $x=\sqrt{n}$, $x=-\sqrt{n}$이므로 그 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 모든 정수 k에 대하여 $P(k)=(k^2-n)(k^2+n+1)$에서 $k^2+n+1>0$이고, $P(k)\neq0$을 만족시키려면 $n\neq k^2$이어야 하므로 n은 완전제곱수가 아닌 정수이다.

따라서 모든 n의 값의 합은

$2+3+5+6+7+8=31$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

10

주어진 사차방정식은 $x=\alpha$를 근으로 가지면 $x=-\alpha$도 근으로 가지므로 양의 실근 2개, 음의 실근 2개를 가짐을 알 수 있고 서로 다른 네 실근을 α, β, $-\beta(=\gamma)$, $-\alpha(=\delta)$ $(\alpha<\beta<0)$으로 놓을 수 있다.

$x^2=X$라 하면 주어진 사차방정식은

$X^2-(2a-9)X+4=0$

이고 두 근은 α^2, β^2이다.

따라서 $\alpha^2+\beta^2=2a-9=5$이므로

$a=7$ 답 7

11

$x^3-x^2-kx+k=0$에서

$x^2(x-1)-k(x-1)=0$, $(x-1)(x^2-k)=0$

$x=1$ 또는 $x^2=k$

0이 아닌 실수 k에 대하여 $k>0$이면 주어진 방정식의 모든 근이 실수이므로 α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$k<0$이면 주어진 방정식의 실근은 $x=1$ 뿐이고, α, β 중에서 실수가 존재하므로 $\alpha=1$ 또는 $\beta=1$이다.

(i) $\alpha=1$일 때,

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\beta=-\frac{1}{2}\alpha^2=-\frac{1}{2}$이므로 α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\beta=1$일 때,

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\alpha^2=-2$

이때 α, γ는 방정식 $x^2=k$의 근이므로

$k=\alpha^2=-2$이고 $\gamma^2=k=-2$

(i), (ii)에서 $\beta=1$, $\gamma^2=-2$

따라서 $\beta^2+\gamma^2=1^2+(-2)=-1$

답 ⑤

12

$x^4+(2a+1)x^3+(3a+2)x^2+(a+2)x=0$

$x(x+1)(x^2+2ax+a+2)=0$

이므로 사차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되기 위해서는 주어진 사차방정식이 한 개의 중근을 가져야 한다.

(i) $x=0$이 사차방정식의 중근인 경우

$x=0$은 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 해이므로

$0^2+2a\times0+a+2=0$, $a=-2$

사차방정식의 서로 다른 세 실근은

$x=-1$, $x=0$(중근), $x=4$

(ii) $x=-1$이 사차방정식의 중근인 경우

$x=-1$은 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 해이므로

$(-1)^2+2a\times(-1)+a+2=0$, $a=3$

사차방정식의 서로 다른 세 실근은

$x=-5$, $x=-1$(중근), $x=0$

(iii) 사차방정식이 $x\neq0$이고 $x\neq-1$인 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$이 중근을 가져야 하므로

이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2a)^2-4(a+2)=0$

$4a^2-4a-8=0$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

$a=-1$ 또는 $a=2$

① $a=-1$인 경우

사차방정식의 서로 다른 세 실근은

$x=-1$, $x=0$, $x=1$(중근)

② $a=2$인 경우

사차방정식의 서로 다른 세 실근은

$x=-2$(중근), $x=-1$, $x=0$

(i), (ii), (iii)에서 실수 a는

-2, -1, 2, 3

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$(-2)\times(-1)\times2\times3=12$

답 12

13

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

$\omega^3=1$이므로

$\omega=\omega^4=\omega^7=\cdots=\omega^{28}$, $\omega^2=\omega^5=\omega^8=\cdots=\omega^{29}$,

$\omega^3=\omega^6=\omega^9=\cdots=\omega^{30}$

따라서

$\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}+\cdots+\frac{1}{\omega^{30}+1}$

$=10\left(\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}\right)$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\omega^2+\omega+1=0$이므로 $\omega+1=-\omega^2$, $\omega^2+1=-\omega$

㉠에서

$$(\text{주어진 식})=10\left(\frac{1}{-\omega^2}+\frac{1}{-\omega}+\frac{1}{1+1}\right)$$

$$=10\left(\frac{-1-\omega}{\omega^2}+\frac{1}{2}\right)=10\left(\frac{\omega^2}{\omega^2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=10\left(1+\frac{1}{2}\right)=15$$

답 15

14

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로

ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이다.

그러므로 $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\times\overline{\omega}=1$

ㄱ. ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$는 $x^3=1$의 다른 한 허근이므로

$\overline{\omega}^3=1$ (참)

ㄴ. $\omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$이므로

$$\frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$$

$$\frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2=\frac{1}{\overline{\omega}}+\frac{1}{\overline{\omega}^2}=\frac{\overline{\omega}+1}{\overline{\omega}^2}=\frac{-\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}^2}=-1$$

따라서 $\frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2$ (참)

ㄷ. $\omega^2+\omega+1=0$이므로 $(-\omega-1)^n=(\omega^2)^n$

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\times\overline{\omega}=1$이므로

$$\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n=(-\overline{\omega})^n=\left(-\frac{1}{\omega}\right)^n$$

$$=(-1)^n\times\left(\frac{1}{\omega}\right)^n=(-1)^n\times(\omega^2)^n$$

$(-\omega-1)^n=\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$에서

$(\omega^2)^n=(-1)^n\times(\omega^2)^n$

양변을 $(\omega^2)^n$으로 나누면 $1=(-1)^n$

따라서 이를 만족시키는 n은 짝수이므로 100 이하의 짝수 n의 개수는 50이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

$\begin{cases} 2x-3y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=\frac{2x+1}{3}$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2-2\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2=-1$, $x^2-8x+7=0$

$(x-1)(x-7)=0$, $x=1$ 또는 $x=7$

이를 ㉢에 대입하면 $x=1$일 때 $y=1$, $x=7$일 때 $y=5$

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$

이때 $\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha=7$, $\beta=5$

따라서 $\alpha+\beta=12$

답 ④

16

$\begin{cases} x-y+1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2y^2-2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x+1$을 ㉡에 대입하면

$x^2-2(x+1)^2-2=0$, $(x+2)^2=0$

$x=-2$, $y=-1$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-1$이므로

$\alpha+\beta=(-2)+(-1)=-3$

답 ③

17

$\begin{cases} 3x-2y=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $(2x+y)(3x-2y)=0$이고

$3x-2y=7$이므로

$2x+y=0$, $y=-2x$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$3x+4x=7$, $7x=7$

$x=1$, $y=-2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=-2$이므로

$\alpha-\beta=3$

답 ③

18

$\begin{cases} 2x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2-x-y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $4x^2-x-(2x-1)^2=5$, $x=2$

$x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=3$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=3$이므로 $\alpha\beta=6$

답 ①

다른 풀이

$4x^2-x-y^2=5$에서

$(2x+y)(2x-y)-x=5$ ······ ㉠

$2x-y=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x+y=5$

두 식 $2x-y=1$, $x+y=5$를 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=3$이므로 $\alpha\beta=6$

19

두 연립방정식 $\begin{cases} 3x+y=a \\ 2x+2y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ x-y=b \end{cases}$의 일치하는 해는

연립방정식 $\begin{cases} 2x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠에서 $y=\frac{1}{2}-x$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=-1$, $x=-\frac{3}{4}$

$x=-\frac{3}{4}$을 ㉢에 대입하면 $y=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

$x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{5}{4}$를 $3x+y=a$, $x-y=b$에 대입하면

$a=-1$, $b=-2$

따라서 $ab=2$

답 ②

20

$\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-ky=-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=1-2x$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$x^2-k(1-2x)=-6$, $x^2+2kx+6-k=0$ ······ ㉢

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 하므로

$D=(2k)^2-4\times1\times(6-k)=0$

$k^2+k-6=0$, $(k+3)(k-2)=0$

$k>0$이므로 $k=2$

답 ②

21

$\overline{AB}=a$, $\overline{EF}=b$이고 $\overline{AF}=5$, $\overline{EB}=1$이므로

$\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{EF}-\overline{EB}$에서 $5=a+b-1$

$a=6-b$ ······ ㉠

직사각형 EBCI의 넓이는 $1\times a=a$,

한 변의 길이가 b인 정사각형 EFGH의 넓이는 b^2이고

직사각형 EBCI의 넓이가 정사각형 EFGH의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$a=\frac{1}{4}b^2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $b^2+4b-24=0$

$b=-2\pm\sqrt{2^2-1\times(-24)}=-2\pm2\sqrt{7}$

㉠과 $a<b$에 의하여 $6-b<b$이므로 $b>3$

따라서 $b=-2+2\sqrt{7}$ 답 ③

22

두 삼각형 ABC와 DBA에서 $\angle BCA=\angle BAD$, $\angle B$는 공통이므로

두 삼각형 ABC와 DBA는 서로 닮음이다.

$\overline{CD}=x$, $\overline{AC}=x-1$, $\overline{AB}=y$라 하면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{DB}:\overline{DA}$이므로 $y:(x-1)=8:6$에서

$6y=8(x-1)$, $x=\frac{3}{4}y+1$ …… ㉠

또, $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DB}:\overline{BA}$이므로 $y:(8+x)=8:y$에서

$y^2=8(8+x)$, $y^2=8x+64$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $y^2-6y-72=0$, $(y+6)(y-12)=0$

$y>0$이므로 $y=12$

$y=12$를 ㉠에 대입하면 $x=10$

따라서 $\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=8+10=18$, $\overline{CA}=10-1=9$이므로

삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=39$ 답 39

23

$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x-3y)(x+y)=0$

$x=3y$ 또는 $x=-y$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 $x=3y$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(3y)^2+y^2=20$, $y^2=2$

$y>0$이므로 $y=\sqrt{2}$

㉢에서 $x=3\sqrt{2}$

따라서 $a=3\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$이므로 $a+b=4\sqrt{2}$ 답 ③

24

$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-2y)=0$

$x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면 $y^2-y^2=9$에서 $0\times y^2=9$이므로 이 식을 만족시키는 y의 값은 없다.

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면 $(2y)^2-y^2=9$, $y^2=3$, $y=\pm\sqrt{3}$

$y=\sqrt{3}$일 때 $x=2\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$일 때 $x=-2\sqrt{3}$

$\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

(i), (ii)에서 $\alpha_1<\alpha_2$이므로

$\alpha_1=-2\sqrt{3}$, $\beta_1=-\sqrt{3}$, $\alpha_2=2\sqrt{3}$, $\beta_2=\sqrt{3}$

따라서 $\beta_1-\beta_2=-\sqrt{3}-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$ 답 ①

25

$\begin{cases} x+y+xy=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+2y-xy=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $3(x+y)=12$

$x+y=4$이고 ㉠에 대입하면 $xy=4$

따라서 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=4$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=4^2-2\times4=8$

답 ①

26

$(3+2i)x^2-5(2y+i)x=8+12i$에서

$3x^2-10xy+(2x^2-5x)i=8+12i$

두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\begin{cases} 3x^2-10xy=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-5x=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $2x^2-5x-12=0$

좌변을 인수분해하면 $(2x+3)(x-4)=0$

이때 x는 정수이므로 $x=4$

$x=4$를 ㉠에 대입하면 $48-40y=8$, $y=1$

따라서 $x+y=4+1=5$ 답 ⑤

27

남아 있는 입체도형의 겉넓이가 $216+16\pi$이므로

$6a^2-2\pi b^2+2\pi ab=216+16\pi$

$6a^2+2\pi(ab-b^2)=216+16\pi$

이때 a, b가 유리수이므로 $6a^2=216$, $ab-b^2=8$

$6a^2=216$에서 $a^2=36$

$a>0$이므로 $a=6$

$a=6$을 $ab-b^2=8$에 대입하면 $6b-b^2=8$, $b^2-6b+8=0$

$(b-2)(b-4)=0$

$b=2$ 또는 $b=4$

그런데 $a>2b$이므로 $b=2$

따라서 $15(a-b)=15\times(6-2)=60$ 답 60

28

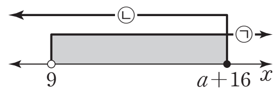
$x-1>8$ …… ㉠

$2x-16\le x+a$ …… ㉡

㉠에서 $x>9$

㉡에서 $x \le a+16$

두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$9 < x \le a+16$

$a+16=28$에서 $a=12$, $b=9$

따라서 $a+b=12+9=21$

답 21

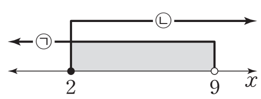
29

$\begin{cases} 2x < x+9 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+5 \le 5x-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x-x<9$이므로 $x<9$

㉡에서 $-4x \le -8$이므로 $x \ge 2$

두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$2 \le x < 9$

따라서 정수 x의 값은 2, 3, 4, …, 8이므로 그 개수는 7이다.

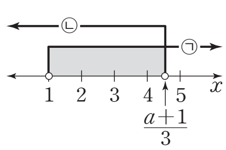
답 ⑤

30

$\begin{cases} x+2>3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x<a+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>1$, ㉡에서 $x<\dfrac{a+1}{3}$

두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 동시에 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$4<\dfrac{a+1}{3} \le 5$, $12<a+1 \le 15$

$11<a \le 14$

따라서 자연수 a의 최댓값은 14이다.

답 ⑤

31

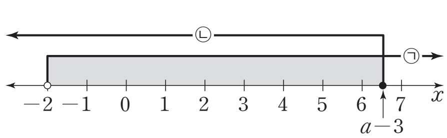
연립부등식 $3x-1<5x+3 \le 4x+a$의 해는 연립부등식

$\begin{cases} 3x-1<5x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+3 \le 4x+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해와 같다.

㉠에서 $-2x<4$이므로 $x>-2$

㉡에서 $x \le a-3$

두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 8이 되도록 두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $6 \le a-3 < 7$에서 $9 \le a < 10$이므로 자연수 a의 값은 9이다.

답 9

보충 개념

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

32

상자의 개수를 x라 하면 한 상자에 초콜릿을 10개씩 담으면 초콜릿이 42개 남게 되므로 초콜릿의 개수는 $10x+42$이다.

또, 한 상자에 초콜릿을 13개씩 담으면 빈 상자가 3개 남고, 한 상자는 13개가 되지 않으므로 $(x-4)$개의 상자에는 초콜릿이 13개씩 담겨 있고 아직 상자에 들어가지 않은 초콜릿이 남아 있다.

그러므로 $13(x-4)<10x+42$, $3x<94$

$x<\dfrac{94}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, 주어진 조건에서 $(x-3)$개의 상자에 초콜릿을 13개씩 담으면 한 개의 상자는 13개가 되지 않으므로

$10x+42<13(x-3)$, $3x>81$

$x>27$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $27<x<\dfrac{94}{3}$

따라서 $M=31$, $m=28$이므로 $M+m=59$

답 59

33

$|x-2|<5$에서 $-5<x-2<5$

$-3<x<7$

따라서 정수 x의 값은 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 개수는 9이다.

답 ⑤

다른 풀이

(i) $x<2$일 때,

$-x+2<5$이므로 $x>-3$

따라서 $-3<x<2$

(ii) $x \ge 2$일 때,

$x-2<5$이므로 $x<7$

따라서 $2 \le x<7$

(i), (ii)에서 $-3<x<7$

따라서 정수 x의 값은 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 개수는 9이다.

34

$|2x+1|<7$에서

$-7<2x+1<7$, $-4<x<3$

따라서 $a=-4$, $b=3$이므로

$ab=-4\times3=-12$

답 ①

35

$|x-a|<2$에서 $-2<x-a<2$, $-2+a<x<2+a$

a가 자연수이므로 이 부등식을 만족시키는 정수 x는

$-1+a$, a, $1+a$이다.

따라서 모든 정수 x의 값의 합이 33이므로

$(-1+a)+a+(1+a)=33$, $3a=33$

그러므로 $a=11$

답 ①

36

$|x-7|\le a+1$에서 $-(a+1)\le x-7\le a+1$, $-a+6\le x\le a+8$

이때 $-a+6$, $a+8$이 모두 정수이므로 모든 정수 x의 개수는

$(a+8)-(-a+6)+1=2a+3$

즉, $2a+3=9$이므로 $a=3$

답 ③

보충 개념

$m<n$이고, m, n이 정수일 때, 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 다음과 같다.

(1) $m<x<n$ ➡ $(n-m-1)$개

(2) $m\le x<n$ 또는 $m<x\le n$ ➡ $(n-m)$개

(3) $m\le x\le n$ ➡ $(n-m+1)$개

37

부등식 $x>|3x+1|-7$을 $x<-\frac{1}{3}$, $x\ge-\frac{1}{3}$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<-\frac{1}{3}$일 때, $|3x+1|=-(3x+1)$이므로

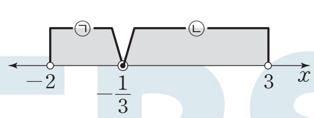
$x>-(3x+1)-7$에서 $4x>-8$, $x>-2$

그런데 $x<-\frac{1}{3}$이므로 $-2<x<-\frac{1}{3}$ …… ㉠

(ii) $x\ge-\frac{1}{3}$일 때, $|3x+1|=3x+1$이므로

$x>3x+1-7$에서 $-2x>-6$, $x<3$

그런데 $x\ge-\frac{1}{3}$이므로 $-\frac{1}{3}\le x<3$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<3$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$-1+0+1+2=2$

답 ⑤

38

부등식 $|x+1|+|x-2|<5$를 $x<-1$, $-1\le x<2$, $x\ge2$일 때로 나누어 푼다.

(i) $x<-1$일 때, $|x+1|=-(x+1)$, $|x-2|=-(x-2)$이므로

$-(x+1)-(x-2)<5$에서 $-2x+1<5$, $x>-2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2<x<-1$ …… ㉠

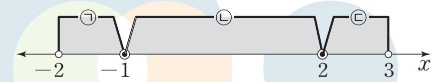
(ii) $-1\le x<2$일 때, $|x+1|=x+1$, $|x-2|=-(x-2)$이므로

$(x+1)-(x-2)<5$에서 $3<5$이므로 부등식은 주어진 범위에서 항상 성립한다. 즉, $-1\le x<2$ …… ㉡

(iii) $x\ge2$일 때, $|x+1|=x+1$, $|x-2|=x-2$이므로

$(x+1)+(x-2)<5$에서 $2x-1<5$, $x<3$

그런데 $x\ge2$이므로 $2\le x<3$ …… ㉢



㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<3$

따라서 정수 x의 값은 -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 4이다.

답 4

보충 개념

$|x-a|+|x-b|<c$ $(a<b)$ 꼴의 부등식은 x의 값의 범위를

$x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$

로 나누어 푼다.

39

$x^2-7x+12\ge0$에서 $(x-3)(x-4)\ge0$

$x\le3$ 또는 $x\ge4$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=4$이므로 $\beta-\alpha=1$

답 ①

40

$x^2-4x-21<0$에서 $(x+3)(x-7)<0$

$-3<x<7$

따라서 정수 x의 값은 -2, -1, 0, $\cdots$, 6이므로 그 개수는 9이다.

답 ③

41

라면 한 그릇의 가격을 $100x$원만큼 내리면 라면 한 그릇의 가격은 $(2000-100x)$원이고, 라면 판매량은 $20x$그릇이 늘어나므로 하루의 라면 판매량은 $(200+20x)$그릇이다.

하루의 라면 판매액의 합계가 442000원 이상이 되려면

$(2000-100x)(200+20x)\ge442000$

$2000x^2-20000x+42000\le0$, $x^2-10x+21\le0$

$(x-3)(x-7)\le0$, $3\le x\le7$

$3\le x\le7$에서 $2000-100x$의 최댓값은 $x=3$일 때

$2000-100\times3=1700$

따라서 라면 한 그릇의 가격의 최댓값은 1700원이다.

답 ③

42

이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $-4<x<3$이므로

$$\begin{aligned}x^2+ax+b&=(x+4)(x-3)\\&=x^2+x-12\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-12$이므로
$a-b=1-(-12)=13$

답 ⑤

43
해가 $b\le x\le 6$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-b)(x-6)\le 0$, 즉 $x^2-(b+6)x+6b\le 0$
이 이차부등식이 $x^2-8x+a\le 0$과 같으므로
$b+6=8$, $6b=a$
즉, $b=2$, $a=12$
따라서 $a+b=14$

답 ①

44
조건 (가)에 의하여
$P(x)+2x+3\ge 0$의 해가 $0\le x\le 1$이므로
$P(x)+2x+3=ax(x-1)$ $(a<0)$
$P(x)=ax^2-(a+2)x-3$
조건 (나)에 의하여 방정식
$ax^2-(a+2)x-3=-3x-2$
가 중근을 가지므로
$ax^2-(a-1)x-1=0$
의 판별식을 D라 하면
$D=(a-1)^2-4a\times(-1)=(a+1)^2=0$
에서 $a=-1$
따라서 $P(x)=-x^2-x-3$이므로
$P(-1)=-3$

답 ①

45
모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2kx+2k+15\ge 0$이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-2kx+2k+15$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나거나 x축과 만나지 않아야 한다.
이차방정식 $x^2-2kx+2k+15=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(-k)^2-(2k+15)\le 0$
$k^2-2k-15\le 0$, $(k+3)(k-5)\le 0$
$-3\le k\le 5$
따라서 정수 k의 값은 -3, -2, -1, $\cdots$, 5이므로 그 개수는 9이다.

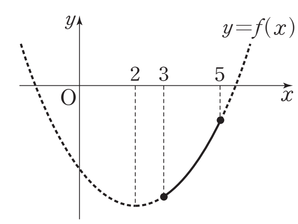
답 ②

46
이차부등식 $x^2+8x+(a-6)<0$이 해를 갖지 않으려면 이차함수 $y=x^2+8x+(a-6)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나거나 x축과 만나지 않아야 한다.
이차방정식 $x^2+8x+(a-6)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=4^2-(a-6)\le 0$
$a\ge 22$
따라서 실수 a의 최솟값은 22이다.

답 22

참고
이차부등식 $x^2+8x+(a-6)<0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+8x+(a-6)\ge 0$이 성립해야 한다.

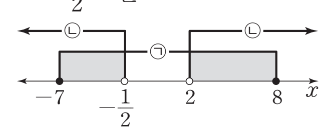
47
$f(x)=x^2-4x-4k+3$
$\quad=(x-2)^2-4k-1$
이라 하면 $3\le x\le 5$에서 $f(x)\le 0$이 항상 성립하려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$3\le x\le 5$에서 $f(x)$는 $x=5$일 때 최대이므로 $f(5)\le 0$에서
$8-4k\le 0$, $k\ge 2$
따라서 상수 k의 최솟값은 2이다.

답 ②

48
$$\begin{cases} x^2-x-56\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-3x-2>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$
㉠에서 $(x+7)(x-8)\le 0$이므로 $-7\le x\le 8$
㉡에서 $(x-2)(2x+1)>0$이므로 $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$
두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-7\le x<-\frac{1}{2}$ 또는 $2<x\le 8$
따라서 정수 x의 값은 -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 그 개수는 13이다.

답 13

49
$$\begin{cases} x^2-3x-18\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-8x+15\ge 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$
㉠에서 $(x+3)(x-6)\le 0$이므로 $-3\le x\le 6$
㉡에서 $(x-3)(x-5)\ge 0$이므로 $x\le 3$ 또는 $x\ge 5$
연립부등식의 해는
$-3\le x\le 3$ 또는 $5\le x\le 6$
따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6이므로 모든 정수 x의 값의 합은
$(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+5+6=11$

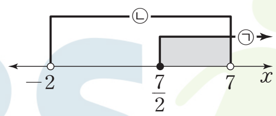
답 ⑤

50

$$\begin{cases} 2x-7\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-5x-14<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x\ge\frac{7}{2}$, ㉡에서 $(x+2)(x-7)<0$이므로 $-2<x<7$

두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$\frac{7}{2}\le x<7$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $4+5+6=15$

답 ⑤

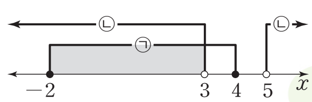
51

$$\begin{cases} |x-1|\le 3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-8x+15>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-3\le x-1\le 3$이므로 $-2\le x\le 4$

㉡에서 $(x-3)(x-5)>0$이므로 $x<3$ 또는 $x>5$

두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-2\le x<3$

따라서 정수 x의 값은 -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 5이다.

답 ⑤

52

$$\begin{cases} (x-a)^2<a^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+a<(a+1)x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

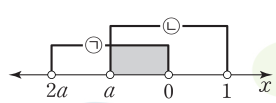
㉠에서 $x^2-2ax+a^2<a^2$이므로 $x(x-2a)<0$

이때 $a<0$이므로 $2a<x<0$

㉡에서 $x^2-(a+1)x+a<0$이므로 $(x-1)(x-a)<0$

이때 $a<0$이므로 $a<x<1$

두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



주어진 연립부등식의 해가 $b<x<b+1$이므로

$a=b$, $b+1=0$에서 $a=-1$, $b=-1$

따라서 $a+b=-2$

답 ⑤

53

$$\begin{cases} x^2-2x-3\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-(5+k)x+5k\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

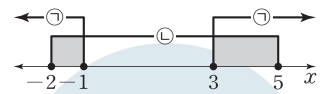
㉠에서 $(x-3)(x+1)\ge 0$

$x\le -1$ 또는 $x\ge 3$

㉡에서 $(x-5)(x-k)\le 0$

(i) $k<5$일 때,

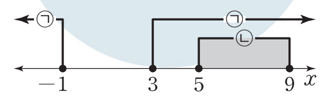
$k\le x\le 5$이므로 두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 정수 x의 개수가 5가 되도록 하는 k의 값은 -2

(ii) $k\ge 5$일 때

$5\le x\le k$이므로 두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 정수 x의 개수가 5가 되도록 하는 k의 값은 9

(i), (ii)에서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 5가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 곱은

$(-2)\times 9=-18$

답 ④

54

$$\begin{cases} x^2-(a^2-3)x-3a^2<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+(a-9)x-9a>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x-a^2)(x+3)<0$이므로 $-3<x<a^2$

$a>2$이므로 ㉡에서 $(x+a)(x-9)>0$

$x>9$ 또는 $x<-a$

$a^2>10$이면 연립부등식의 해에 $x=10$이 포함되므로 정수 x가 존재한다.

그러므로 정수 x가 존재하지 않기 위한 a의 값의 범위는

$a^2\le 10$

따라서 $2<a\le\sqrt{10}$이므로 a의 최댓값 $M=\sqrt{10}$이고

$M^2=10$

답 10

55

$$\begin{cases} |x-k|\le 5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x-12>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

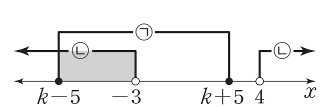
㉠에서 $-5\le x-k\le 5$

$k-5\le x\le k+5$

㉡에서 $(x+3)(x-4)>0$

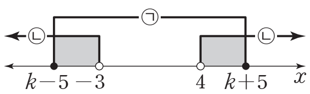
$x<-3$ 또는 $x>4$

(i) $k+5\le 4$, 즉 $k\le -1$일 때,



㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 모두 -3보다 작으므로 그 합은 7보다 작게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

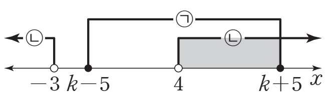
(ii) $k-5<-3$이고 $k+5>4$, 즉 $-1<k<2$일 때,



$k=0$이면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 -5, -4, 5이고 그 합은 -4가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$k=1$이면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 -4, 5, 6이고 그 합은 7이 되어 조건을 만족시킨다.

(iii) $k-5\geq-3$, 즉 $k\geq2$일 때,



㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 두 개 이상이고 모두 4보다 크므로 그 합은 7보다 크게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $k=1$

답 ④

서술형 연습

본문 54쪽

01 최댓값: 3, 최솟값: -3　　**02** 6 cm 이상 7 cm 이하

01

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+3xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡의 좌변을 인수분해하면 $(x+2y)(2x-y)=0$

$x=-2y$ 또는 $y=2x$ ………… ㉮

(i) $x=-2y$를 ㉠에 대입하면 $4y^2+y^2=5$, $y=\pm1$

$y=1$일 때 $x=-2$, $y=-1$일 때 $x=2$ ………… ㉯

(ii) $y=2x$를 ㉠에 대입하면 $x^2+4x^2=5$, $x=\pm1$

$x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$ ………… ㉰

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$의 최댓값은 $1+2=3$,

최솟값은 $-1+(-2)=-3$ ………… ㉱

답 최댓값: 3, 최솟값: -3

단계	채점 기준	비율
㉮	$2x^2+3xy-2y^2=0$의 좌변을 인수분해한 경우	30%
㉯	$x=-2y$를 ㉠에 대입하여 x, y의 값을 구한 경우	25%
㉰	$y=2x$를 ㉠에 대입하여 x, y의 값을 구한 경우	25%
㉱	$\alpha+\beta$의 최댓값과 최솟값을 구한 경우	20%

02

두 종이 A, B의 가로의 길이를 x cm라 하면

A의 세로의 길이는 $(x+3)$ cm이므로 A의 넓이는

$x(x+3)\geq54$, $x^2+3x-54\geq0$, $(x+9)(x-6)\geq0$

$x\leq-9$ 또는 $x\geq6$

그런데 $x>0$이므로 $x\geq6$ $\cdots\cdots$ ㉠ ………… ㉮

B의 세로의 길이는 $(x-2)$ cm이므로 B의 넓이는

$x(x-2)\leq35$, $x^2-2x-35\leq0$, $(x+5)(x-7)\leq0$

$-5\leq x\leq7$

그런데 $x>2$이므로 $2<x\leq7$ $\cdots\cdots$ ㉡ ………… ㉯

㉠, ㉡의 공통부분은 $6\leq x\leq7$이므로 가로의 길이의 범위는 6 cm 이상 7 cm 이하이다. ………… ㉰

답 6 cm 이상 7 cm 이하

단계	채점 기준	비율
㉮	두 종이의 가로의 길이를 x cm로 놓고 A의 넓이를 이용하여 x의 값의 범위를 구한 경우	40%
㉯	B의 넓이를 이용하여 x의 값의 범위를 구한 경우	40%
㉰	종이의 가로의 길이의 범위를 구한 경우	20%

1등급 도전

본문 55~57쪽

01 ④　**02** 16　**03** ②　**04** 38
05 ⑤　**06** ⑤　**07** 164　**08** ⑤
09 2　**10** ①

01

풀이 전략 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계를 알고 주어진 조건을 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해한다.

삼차방정식 $x^3-5x^2+(k-9)x+k-3=0$의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & k-9 & k-3 \\ & & -1 & 6 & -k+3 \\ \hline & 1 & -6 & k-3 & 0 \end{array}$$

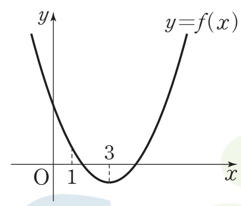
$x^3-5x^2+(k-9)x+k-3=(x+1)(x^2-6x+k-3)$

즉, 주어진 삼차방정식은 $(x+1)(x^2-6x+k-3)=0$이므로

$x=-1$은 주어진 삼차방정식의 해이다.

[STEP 2] 이차함수의 그래프를 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

방정식 $x^2-6x+k-3=0$은 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로



$f(x)=x^2-6x+k-3$이라 하면

$f(1)=1-6+k-3>0$에서

$k>8$ …… ㉠

또, 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(k-3)>0$, $k<12$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $8<k<12$

따라서 정수 k의 값은 9, 10, 11이므로 그 합은

$9+10+11=30$

답 ④

02

풀이 전략 주어진 등식의 우변이 이차다항식의 완전제곱식이 되는 조건을 구한다.

문제 풀이

[STEP 1] $(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$가 이차다항식의 완전제곱식이 되도록 하는 a의 값을 구한다.

$P(x)$가 이차다항식이므로 $P(x)+x$도 이차다항식이다.

또, $\{P(x)+x\}^2=(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$이므로

$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$는 이차다항식의 완전제곱식이다.

$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$

$=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

$=\left\{x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}\right\}-\frac{(5-a^2)^2}{4}-5a^2+9$

$=\left(x^2+\frac{5-a^2}{2}\right)^2-\frac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$

에서 $(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)=0$

$a^4+10a^2-11=0$, $(a^2+11)(a^2-1)=0$

$(a^2+11)(a+1)(a-1)=0$

$a>0$이므로 $a=1$

$a^2+11=0$을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

[STEP 2] 주어진 등식에 $a=1$을 대입하여 다항식 $P(x)$를 구한다.

$a=1$을 주어진 등식에 대입하면

$\{P(x)+x\}^2=(x^2+2)^2$이므로

$a=1$을 주어진 등식에 대입하면
(우변)$=(x-1)(x+1)(x^2+5)+9$
$=(x^2-1)(x^2+5)+9$
$=x^4+4x^2+4=(x^2+2)^2$

$P(x)=x^2-x+2$ 또는 $P(x)=-x^2-x-2$

그런데 $P(x)$의 이차항의 계수가 음수이므로

$P(x)=-x^2-x-2$

따라서 $\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=(-4)^2=16$

답 16

다른 풀이

$\{P(x)+x\}^2=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$에서

$\{P(x)+x\}^2=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

이때 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로

$P(x)+x=-x^2+px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$(-x^2+px+q)^2=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

$x^4-2px^3+(p^2-2q)x^2+2pqx+q^2=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

이 식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$-2p=0$, $p^2-2q=5-a^2$, $2pq=0$, $q^2=-5a^2+9$

따라서 $-2p=0$에서 $p=0$이므로

$p^2-2q=5-a^2$에서 $a^2=2q+5$

$q^2=-5a^2+9$에서 $q^2=-5(2q+5)+9$이므로

$q^2+10q+16=0$, $(q+8)(q+2)=0$

$q=-8$ 또는 $q=-2$

$q=-8$이면 $a^2=-11<0$이므로 모순이다.

그러므로 $q=-2$이고, $q=-2$를 $a^2=2q+5$에 대입하면 $a^2=1$

$a>0$이므로 $a=1$

따라서 $P(x)+x=-x^2-2$, 즉 $P(x)=-x^2-x-2$이므로

$\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=(-4)^2=16$

03

풀이 전략 부등식 $A\le B\le C$를 두 부등식 $A\le B$, $B\le C$로 나누어 이차방정식의 판별식을 이용한다.

문제 풀이

[STEP 1] 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$ $(a>0)$이 성립하는 경우를 생각한다.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^2+3x+2\le mx+n$, 즉

$x^2+(m-3)x+n-2\ge0$이 성립하므로 이차방정식

$x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m-3)^2-4(n-2)\le0$

$4n\ge m^2-6m+17$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여 부등식 $mx+n\le x^2-x+4$, 즉

$x^2-(m+1)x+4-n\ge0$이 성립하므로

이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의

판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(m+1)\}^2-4(4-n)\le0$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$ $(a>0)$이 성립하려면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D\le0$이어야 한다.

$4n\le -m^2-2m+15$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$m^2-6m+17\le4n\le -m^2-2m+15$ …… ㉢

$m^2-6m+17\le -m^2-2m+15$에서

$2m^2-4m+2\le0$, $2(m-1)^2\le0$

$m=1$

$a>0$일 때, $a(m-a)^2\le0$의 해는 $m=a$이다.

$m=1$을 ㉢에 대입하면 $12\le4n\le12$이므로 $n=3$

따라서 $m^2+n^2=1^2+3^2=10$

답 ②

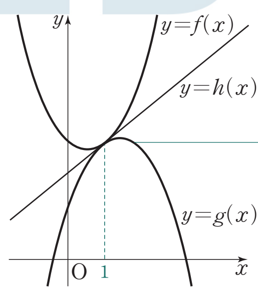
다른 풀이

$f(x)=x^2-x+4$, $g(x)=-x^2+3x+2$, $h(x)=mx+n$이라 하면 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le h(x)\le f(x)$가 성립하면 된다.

$f(x)-g(x)=2x^2-4x+2=2(x-1)^2$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 서로 접한다.

그러므로 $g(x)\le h(x)\le f(x)$가 성립하기 위해서는 다음 그림과 같이 함수 $y=h(x)$의 그래프가 두 함수 $y=g(x)$와 $y=f(x)$의 그래프에 동시에 접해야 한다.



$f(x)=g(x)$에서 $f(x)-g(x)=0$, 즉 $2(x-1)^2=0$이므로 $x=1$

즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 1뿐이므로 이 두 그래프는 $x=1$에서 접한다.

따라서 $f(x)=h(x)$에서 이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=\{-(m+1)\}^2-4(4-n)=0$

$4n=-m^2-2m+15$ ...... ㉠

$g(x)=h(x)$에서 이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(m-3)^2-4(n-2)=0$

$4n=m^2-6m+17$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=1$, $n=3$

따라서 $m^2+n^2=10$

04

풀이 전략 이차방정식 $\omega^2+\omega+1=0$의 한 허근이 ω일 때, $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$임을 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 이차방정식 $\omega^2+\omega+1=0$의 한 허근을 ω라 하면 $P_n(\omega)=0$임을 알아본다.

다항식 $P_n(x)$를 x^2+x+1로 나눌 때의 몫을 $A_n(x)$라 하면

$P_n(x)$가 x^2+x+1로 나누어떨어지므로

$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)-64$

$=(x^2+x+1)A_n$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라 하면

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

즉, $x^3-1=0$이므로 $x^3=1$

따라서 ω는 $x^3=1$의 한 근이므로 $\omega^3=1$

ω는 방정식 $P_n(x)=0$의 근이므로

$P_n(\omega)=0$

STEP 2 $Q_n(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)$이라 할 때, $Q_n(\omega)=64$가 되는 n의 값을 구한다.

$Q_n(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)$이라 할 때,

$P_n(\omega)=0$이 되려면 $Q_n(\omega)=64$이어야 한다.

$Q_5(\omega)=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$

$\quad=(-\omega^2)\times(-\omega)\times 2\times(-\omega^2)\times(-\omega)=2$

$Q_6(\omega)=Q_5(\omega)\times(1+\omega^6)=2\times 2=4$

$Q_7(\omega)=Q_6(\omega)\times(1+\omega^7)=4\times(-\omega^2)=-4\omega^2$

$Q_8(\omega)=Q_7(\omega)\times(1+\omega^8)=(-4\omega^2)\times(-\omega)=4\omega^3=4$

$Q_9(\omega)=Q_8(\omega)\times(1+\omega^9)=4\times 2=8$

$Q_{10}(\omega)=Q_9(\omega)\times(1+\omega^{10})=8\times(-\omega^2)=-8\omega^2$

$Q_{11}(\omega)=Q_{10}(\omega)\times(1+\omega^{11})=(-8\omega^2)\times(-\omega)=8\omega^3=8$

⋮

$Q_{18}(\omega)=64$

$Q_{19}(\omega)=-64\omega^2$

$Q_{20}(\omega)=64$

$n\ge 2$인 자연수일 때 $Q_{3n}(\omega)=Q_{3n+2}(\omega)=2^n$, $Q_{3n+1}(\omega)=-2^n\omega^2$이므로 $Q_{18}(\omega)=Q_{20}(\omega)=2^6=64$, $Q_{19}(\omega)=-2^6\omega^2=-64\omega^2$

따라서 $n=18$ 또는 $n=20$이므로 모든 자연수 n의 값의 합은

$18+20=38$

답 38

05

풀이 전략 인수분해를 이용하여 주어진 사차방정식의 해를 구한다.

문제 풀이

STEP 1 $a=1$일 때의 사차방정식의 해를 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $x^4+(3-2a)x^2+a^2-3a-10=0$에서 $a=1$이면

$x^4+x^2-12=0$

$(x^2+4)(x^2-3)=0$

$x^2=-4$ 또는 $x^2=3$

$x=-2i$ 또는 $x=2i$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

이때 실근은 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$이므로 모든 실근의 곱은

$(-\sqrt{3})\times\sqrt{3}=-3$ (참)

STEP 2 주어진 방정식이 실근과 허근을 모두 가질 때의 a의 값의 범위를 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $x^4+(3-2a)x^2+a^2-3a-10=0$에서

$x^4+(3-2a)x^2+(a-5)(a+2)=0$

$(x^2-a+5)(x^2-a-2)=0$

$x^2=a-5$ 또는 $x^2=a+2$

$x^2=a-5$에서 $a-5\ge 0$이면 실근을 갖고, $a-5<0$이면 허근을 갖는다.

또, $x^2=a+2$에서 $a+2\ge 0$이면 실근을 갖고, $a+2<0$이면 허근을 갖는다.

이때 방정식 $x^4+(3-2a)x^2+a^2-3a-10=0$이 실근과 허근을 모두 가지므로 $a+2\ge 0$, $a-5<0$에서

$-2\le a<5$

$-2<a<5$일 때 방정식의 실근은

$x=-\sqrt{a+2}$ 또는 $x=\sqrt{a+2}$이고,

$a=-2$일 때 $x=0$

또, $-2\le a<5$일 때 방정식의 허근은

$x=-\sqrt{5-a}i$ 또는 $x=\sqrt{5-a}i$

이때 모든 실근의 곱이 -4이면

$(-\sqrt{a+2})\times\sqrt{a+2}=-4$, $a+2=4$, $a=2$

방정식의 허근은 $x=-\sqrt{3}i$ 또는 $x=\sqrt{3}i$이므로

따라서 모든 허근의 곱은

$(-\sqrt{3}i)\times\sqrt{3}i=3$ (참)

STEP 3 ㄴ을 이용하여 정수인 근을 갖도록 하는 실수 a의 값을 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$-2\le a<5$에서
$0\le a+2<7$이므로
$0\le\sqrt{a+2}<\sqrt{7}$

ㄷ. ㄴ에서 $-2\le a<5$이므로 $0\le\sqrt{a+2}<\sqrt{7}$

주어진 방정식이 가질 수 있는 정수인 근은 $\sqrt{a+2}$의 값이 0, 1, 2일 때이다.

$\sqrt{a+2}=0$일 때, $a+2=0$이므로 $a=-2$

$\sqrt{a+2}=1$일 때, $a+2=1$이므로 $a=-1$

$\sqrt{a+2}=2$일 때, $a+2=4$이므로 $a=2$

따라서 정수인 근을 갖도록 하는 실수 a의 값은 -2, -1, 2이므로 그 합은 $(-2)+(-1)+2=-1$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

06

풀이 전략 삼차식 $f(x)$를 인수분해한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계와 판별식을 이용한다.

문제 풀이

다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$일 때 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.

STEP 1 인수정리를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $f(1)=1+(2a-1)+(b^2-2a)-b^2=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. (참)

STEP 2 삼차식 $f(x)$를 인수분해한 후 서로 다른 실근의 개수를 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $f(x)=x^3+(2a-1)x^2+(b^2-2a)x-b^2$을 인수분해하면

$f(x)=(x-1)(x^2+2ax+b^2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2a-1 & b^2-2a & -b^2 \\ & & 1 & 2a & b^2 \\ \hline & 1 & 2a & b^2 & 0 \end{array}$$

x에 대한 이차방정식

$x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

(음수)×(음수)=(양수)

이때 $a<b<0$이면 $a-b<0$, $a+b<0$이므로 $D>0$이 되어 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

한편, 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$이 $x=1$을 근으로 가져야 하므로 $1+2a+b^2=0$이어야 한다.

세 근 중 두 근이 중복되므로 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 서로 다른 실근 중 하나는 $x=1$이다.

그런데 $a=-2$, $b=-\sqrt{3}$이면

$a<b<0$이고 $1+2a+b^2=0$을 만족시킨다.

이때 $f(x)=(x-1)(x^2-4x+3)=(x-1)^2(x-3)$이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

따라서 $a<b<0$인 어떤 두 실수 a, b에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

STEP 3 이차방정식의 근과 계수의 관계와 판별식을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$, 즉 $(x-1)(x^2+2ax+b^2)=0$은 $x=1$을 근으로 가지므로 이 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$이 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-2a$이다.

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 서로 다른 두 실근의 합이 $-2a$이고, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 합이 7이므로

$1+(-2a)=7$, $a=-3$

한편, 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-b^2>0$, $b^2<a^2$, 즉 $b^2<9$ …… ㉠

또, $x=1$이 방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 근이 아니어야 하므로

$1+2a+b^2\ne0$, 즉 $b^2\ne5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 정수 b의 값은 -2, -1, 0, 1, 2이다.

따라서 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(-3, -2)$, $(-3, -1)$, $(-3, 0)$, $(-3, 1)$, $(-3, 2)$이므로 그 개수는 5이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

07

풀이 전략 삼차방정식을 활용한다.

문제 풀이

STEP 1 두 원의 반지름의 길이가 같고 한 점에서 만나는 조건을 이용하기 위한 길이들을 구한다.

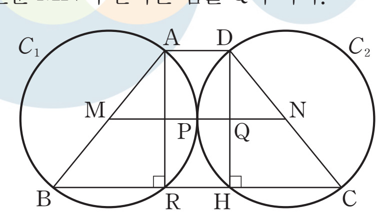
선분 AB를 지름으로 하는 원을 C_1이라 하고 선분 CD를 지름으로 하는 원을 C_2라 하자.

두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면 두 점 M, N은 각각 두 원 C_1, C_2의 중심이다.

$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 서로 같고 원 C_1과 원 C_2는 오직 한 점에서 만나므로 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점은 선분 MN의 중점이다.

$\overline{MP}=\overline{NP}$

선분 MN의 중점을 P, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 DH와 선분 MN이 만나는 점을 Q라 하자.



두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{QN}=\overline{PN}-\overline{PQ}=r-2$

$\overline{HC}=2\times\overline{QN}=2r-4$이므로

$\overline{HC}:\overline{QN}=\overline{DC}:\overline{DN}=2:1$이므로
$\overline{HC}=2\times\overline{QN}$

$\overline{DH}^2=\overline{CD}^2-\overline{HC}^2=16r-16$ …… ㉠ $(2r)^2-(2r-4)^2=4r^2-4r^2+16r-16=16r-16$

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\overline{BR}=\overline{HC}=2r-4$, $\overline{RH}=4$이므로

$\overline{BC}=\overline{BR}+\overline{RH}+\overline{HC}=4r-4$ …… ㉡

[STEP 2] 주어진 조건을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구하여 $\overline{BD}^2$의 값을 구한다.

㉠, ㉡에서

$S^2=\left\{\frac{1}{2}\times(\overline{BC}+\overline{AD})\times\overline{DH}\right\}^2$

$=\frac{1}{4}\times(\overline{BC}+\overline{AD})^2\times\overline{DH}^2$

$=\frac{1}{4}\times\{(4r-4)+4\}^2\times(16r-16)$

$=64r^2(r-1)$

$l=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$

$=2r+(4r-4)+2r+4=8r$

$S^2+8l=6720$에서

$64r^2(r-1)+64r=6720$

$r^3-r^2+r-105=0$, $(r-5)(r^2+4r+21)=0$

$r=5$ 또는 $r^2+4r+21=0$

이차방정식 $x^2+4x+21=0$의 판별식을 D라 하면

$D=4^2-4\times1\times21=-68<0$

이므로 $r^2+4r+21=0$을 만족시키는 실수 r의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $r=5$이고

$\overline{BH}=\overline{BR}+\overline{RH}=6+4=10$,

$\overline{DH}^2=80-16=64$이므로

$\overline{BD}^2=\overline{BH}^2+\overline{DH}^2=100+64=164$

답 164

08

풀이 전략 이차부등식의 해와 이차방정식의 판별식을 이용한다.

문제 풀이

[STEP 1] $\frac{1-x}{4}=t$로 놓고, 조건 (가)를 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 구한다.

조건 (가)에서 $\frac{1-x}{4}=t$라 하면 $x=1-4t$이고,

부등식 $f\left(\frac{1-x}{4}\right)\leq0$의 해가 $-7\leq x\leq9$이므로

$-7\leq1-4t\leq9$, $-2\leq t\leq2$

따라서 부등식 $f(t)\leq0$의 해가 $-2\leq t\leq2$이므로

$f(t)=k(t-2)(t+2)$ $(k>0)$

으로 놓을 수 있다. 즉,

최고차항의 계수가 a이고 해가 $\alpha\leq x\leq\beta$인 이차부등식은 $a(x-\alpha)(x-\beta)\leq0$

$f(x)=k(x-2)(x+2)=k(x^2-4)$ $(k>0)$ …… ㉠

[STEP 2] 조건 (나)를 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

조건 (나)의 $f(x)\geq2x-\frac{13}{3}$에 ㉠을 대입하면

$kx^2-2x-4k+\frac{13}{3}\geq0$

$k(x^2-4)\geq2x-\frac{13}{3}$에서 $kx^2-4k\geq2x-\frac{13}{3}$, $kx^2-2x-4k+\frac{13}{3}\geq0$

즉, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $kx^2-2x-4k+\frac{13}{3}\geq0$이 성립하므로 이차방정식 $kx^2-2x-4k+\frac{13}{3}=0$의 판별식을 D라 하면

이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$이 항상 성립할 조건은 $a>0$이고 $b^2-4ac\leq0$이다.

$\frac{D}{4}=(-1)^2-k\left(-4k+\frac{13}{3}\right)\leq0$

$12k^2-13k+3\leq0$, $(3k-1)(4k-3)\leq0$

$\frac{1}{3}\leq k\leq\frac{3}{4}$

[STEP 3] $f(3)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

㉠에서 $f(3)=5k$이므로

$\frac{5}{3}\leq f(3)\leq\frac{15}{4}$

따라서 $f(3)$의 최댓값 $M=\frac{15}{4}$, 최솟값 $m=\frac{5}{3}$이므로

$M-m=\frac{15}{4}-\frac{5}{3}=\frac{45}{12}-\frac{20}{12}=\frac{25}{12}$

답 ⑤

09

풀이 전략 주어진 그래프와 이차부등식의 관계를 이용한다.

문제 풀이

[STEP 1] 함수 $y=\frac{|f(x)|}{3}-f(x)$의 그래프와 직선 $y=m(x-2)$를 그려 본다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$x^2+2x-8=0$에서

$(x+4)(x-2)=0$

$x=-4$ 또는 $x=2$

부등식 $\frac{|f(x)|}{3}-f(x)\geq m(x-2)$에서

(i) $f(x)\geq0$, 즉 $x\leq-4$ 또는 $x\geq2$일 때,

$\frac{f(x)}{3}-f(x)\geq m(x-2)$이므로

$-\frac{2}{3}f(x)\geq m(x-2)$

(ii) $f(x)<0$, 즉 $-4<x<2$일 때,

$-\frac{f(x)}{3}-f(x)\geq m(x-2)$이므로

$-\frac{4}{3}f(x)\geq m(x-2)$

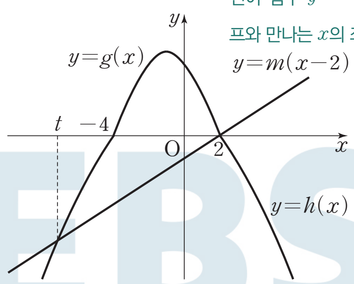
여기서 $g(x)=-\frac{4}{3}f(x)$, $h(x)=-\frac{2}{3}f(x)$라 하면

$\frac{|f(x)|}{3}-f(x)=\begin{cases} g(x) & (-4<x<2) \\ h(x) & (x\leq-4 \text{ 또는 } x\geq2) \end{cases}$

한편, 직선 $y=m(x-2)$는 m의 값에 관계없이 점 $(2,\ 0)$을 지나고 기울기 m이 양수이므로 함수 $y=\frac{|f(x)|}{3}-f(x)$의 그래프와 직선

$y=m(x-2)$의 점 $(2,\ 0)$이 아닌 교점의 x좌표를 $t\ (t<-4)$라 하고 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

m이 양수이므로 점 $(2,\ 0)$을 지나는 직선이 함수 $y=\frac{|f(x)|}{3}-f(x)$의 그래프와 만나는 x의 좌표는 -4보다 작다.



[STEP 2] 그래프를 이용하여 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 10이 되는 경우를 파악한다.

위의 그림에서 부등식 $\frac{|f(x)|}{3}-f(x)\geq m(x-2)$의 해는

$t\leq x\leq 2$

함수 $y=\frac{|f(x)|}{3}-f(x)$의 그래프가 직선 $y=m(x-2)$와 만나거나 위쪽에 있는 부분을 의미한다.

이때 $t\leq x\leq 2$인 정수 x의 개수가 10이 되려면 $-8<t\leq -7$이어야 하므로 m의 값의 범위는 직선 $y=m(x-2)$가 점 $(-7,\ h(-7))$을 지날 때보다 크거나 같고, 점 $(-8,\ h(-8))$을 지날 때보다 작다.

[STEP 3] 양수 m의 최솟값을 구한다.

$h(-7)=-\frac{2}{3}f(-7)=-\frac{2}{3}\{(-7)^2+2\times(-7)-8\}=-18$

이므로

$m=\frac{0-(-18)}{2-(-7)}=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

두 점 $(2,\ 0)$, $(-7,\ -18)$을 지나는 직선의 기울기이다.

$h(-8)=-\frac{2}{3}f(-8)=-\frac{2}{3}\{(-8)^2+2\times(-8)-8\}=-\frac{80}{3}$

이므로

$m=\frac{0-\left(-\frac{80}{3}\right)}{2-(-8)}=\frac{8}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡

두 점 $(2,\ 0)$, $\left(-8,\ -\frac{80}{3}\right)$을 지나는 직선의 기울기이다.

㉠, ㉡에서 $2\leq m<\frac{8}{3}$

따라서 양수 m의 최솟값은 2이다.

답 2

10

풀이 전략 각각의 부등식을 푼 후, a의 값에 따라 x의 값의 범위에 포함되는 정수의 개수를 구한다.

문제 풀이

[STEP 1] 주어진 연립부등식에서 각각의 부등식의 해를 구한다.

$$\begin{cases} x^2-a^2x\geq 0 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ x^2-4ax+4a^2-1<0 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$$

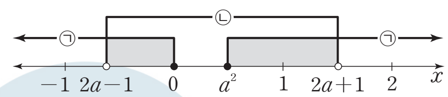
㉠에서 $x(x-a^2)\geq 0$이므로 $x\leq 0$ 또는 $x\geq a^2$

㉡에서 $\{x-(2a-1)\}\{x-(2a+1)\}<0$이므로 $2a-1<x<2a+1$

[STEP 2] a의 값에 따라 연립부등식의 해를 구하여 정수 x의 개수를 구한다.

(i) $0<a<\frac{1}{2}$일 때,

$0<a^2<\frac{1}{4}$, $-1<2a-1<0$, $1<2a+1<2$이므로 두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 연립부등식의 해 중 정수 x의 값은 0, 1로 2개의 정수해가 존재한다.

(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때,

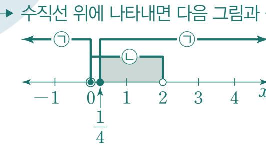
$a^2=\frac{1}{4}$, $2a-1=0$,

$2a+1=2$이므로

연립부등식의 해는

$\frac{1}{4}\leq x<2$

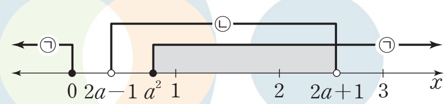
수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 이 중 정수 x의 값은 1로 1개의 정수해가 존재한다.

(iii) $\frac{1}{2}<a<1$일 때,

$\frac{1}{4}<a^2<1$, $0<2a-1<1$, $2<2a+1<3$이므로 두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 연립부등식의 해 중 정수 x의 값은 1, 2로 2개의 정수해가 존재한다.

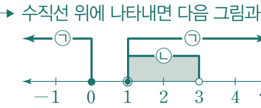
(iv) $a=1$일 때,

$a^2=1$, $2a-1=1$, $2a+1=3$이므로

연립부등식의 해는

$1<x<3$

수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



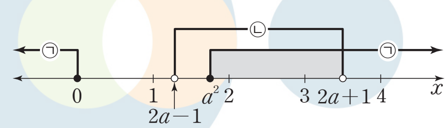
따라서 이 중 정수 x의 값은 2로 1개의 정수해가 존재한다.

(v) $1<a<\sqrt{2}$일 때,

$\sqrt{2}=1.4\cdots$ 이므로

$2\sqrt{2}-1=1.8\cdots$, $2\sqrt{2}+1=3.8\cdots$

$1<a^2<2$, $1<2a-1<2\sqrt{2}-1$, $3<2a+1<2\sqrt{2}+1$이므로 두 부등식 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 연립부등식의 해 중 정수 x의 값은 2, 3으로 2개의 정수해가 존재한다.

[STEP 3] 정수 x의 개수가 1이 되기 위한 모든 실수 a의 값을 구한다.

(i)~(v)에서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$일 때, 주어진 연립부등식은 1개의 정수해가 존재하므로 모든 실수 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

답 ①

04 도형의 방정식(1)

개념 확인 문제

본문 59쪽

01 (1) 9 (2) 6
02 (1) 5 (2) 5
03 (1) 1 (2) -23 (3) 2
04 (1) $(-3,\ 2)$ (2) $(-15,\ 10)$ (3) $\left(-\frac{3}{2},\ 1\right)$
05 $(2,\ 1)$
06 (1) $y=3x+9$ (2) $y=3$
07 (1) $y=-x+5$ (2) $y=\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}$ (3) $y=4$ (4) $x=3$
08 (1) $y=-x+2$ (2) $y=\frac{2}{3}x-3$
09 (1) $y=2x$ (2) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$
10 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
11 $\frac{\sqrt{10}}{2}$
12 (1) $3x-4y+5=0$ 또는 $3x-4y-5=0$
(2) $2x+y+3\sqrt{5}-1=0$ 또는 $2x+y-3\sqrt{5}-1=0$

내신 & 학평 유형 연습

본문 60~68쪽

01 ③	02 ②	03 29	04 ③	05 19	06 ②
07 ②	08 30	09 ②	10 ⑤	11 ④	12 ③
13 ④	14 ③	15 160	16 ①	17 14	18 ⑤
19 ③	20 7	21 ⑤	22 ①	23 ④	24 ④
25 ①	26 ①	27 ⑤	28 ①	29 ④	30 ③
31 ③	32 ③	33 ③	34 ④	35 125	36 ②
37 ④	38 ②	39 ①	40 ③	41 ②	

01

$\overline{AB}=\sqrt{13}$이므로 $\sqrt{(0-2)^2+(a-0)^2}=\sqrt{13}$

양변을 제곱하면 $4+a^2=13,\ a^2=9$

$a>0$이므로 $a=3$

답 ③

02

$\overline{OA}=\sqrt{(5-0)^2+(-5-0)^2}=\sqrt{50}$

$\overline{OB}=\sqrt{(1-0)^2+(a-0)^2}=\sqrt{1+a^2}$

$\overline{OA}=\overline{OB}$이므로

$50=1+a^2,\ a^2=49$

a는 양수이므로 $a=7$

답 ②

03

$\overline{AB}=\sqrt{\{4-(-1)\}^2+(1-3)^2}=\sqrt{29}$

따라서 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$\overline{AB}^2=29$

답 29

04

$\angle ABC$의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지나므로 삼각형 ABC는 $\overline{BA}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{BA}=\overline{BC}$에서 $\sqrt{(-3-0)^2+(0-a)^2}=4$

양변을 제곱하면 $9+a^2=16,\ a^2=7$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{7}$

답 ③

05

마름모 OABC에서 $\overline{OA}=\overline{OC}$이므로

$\sqrt{a^2+7^2}=\sqrt{5^2+5^2},\ a^2=1$

$a>0$이므로 $a=1$

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 선분 AC의 중점은 선분 OB의 중점과 같다.

$\frac{1+5}{2}=\frac{0+b}{2},\ \frac{7+5}{2}=\frac{0+c}{2}$

에서 $b=6,\ c=12$

따라서 $a+b+c=1+6+12=19$

답 19

06

$f(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점 P의 좌표는 $(-2,\ -1)$이다.

직선 $y=2x+k$가 점 $\mathrm{P}(-2,\ -1)$을 지나므로

$-1=-4+k,\ k=3$

함수 $f(x)=x^2+4x+3$의 그래프와 직선 $y=2x+3$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+4x+3=2x+3$의 실근과 같다.

$x^2+4x+3=2x+3$에서 $x^2+2x=0,\ x(x+2)=0$

$x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 $\mathrm{Q}(0,\ 3)$이므로 선분 PQ의 길이는

$\overline{PQ}=\sqrt{\{0-(-2)\}^2+\{3-(-1)\}^2}=2\sqrt{5}$

답 ②

07

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(-2)^2=(a-6)^2+(-3)^2$

$a^2-2a+5=a^2-12a+45,\ 10a=40$

따라서 $a=4$

답 ②

08

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-4)^2+b^2=a^2+(b-2)^2,\ -8a+4b=-12$

$2a-b=3$ …… ㉠

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $l:2x+3y=12$ 위의 점이므로

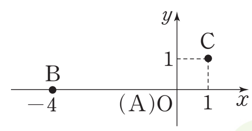
$2a+3b=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{21}{8},\ b=\frac{9}{4}$

따라서 $8a+4b=21+9=30$

답 30

09



오른쪽 그림과 같이 A지점이 원점, B지점이 x축 위에 오도록 좌표평면을 정하면

B$(-4,\ 0)$, C$(1,\ 1)$

물류창고를 지으려는 지점을 P$(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서

$x^2+y^2=(x+4)^2+y^2$, $8x=-16$

$x=-2$ ...... ㉠

$\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$에서

$(x+4)^2+y^2=(x-1)^2+(y-1)^2$, $10x+2y+14=0$

$y=-5x-7$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $y=3$

따라서 P$(-2,\ 3)$이므로 물류창고를 지으려는 지점에서 A지점에 이르는 거리는

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}(\mathrm{km})$

답 ②

10

선분 OA를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times3-1\times0}{2-1},\ \dfrac{2\times1-1\times0}{2-1}\right)$, 즉 $(6,\ 2)$

따라서 $a=6$, $b=2$이므로 $a\times b=12$

답 ⑤

11

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

$\left(\dfrac{2\times5+1\times(-4)}{2+1},\ \dfrac{2\times3+1\times0}{2+1}\right)$, 즉 $(2,\ 2)$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로

$a+b=2+2=4$

답 ④

12

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times6+2\times0}{1+2},\ \dfrac{1\times0+2\times a}{1+2}\right)$, 즉 $\left(2,\ \dfrac{2}{3}a\right)$

이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$\dfrac{2}{3}a=-2$

따라서 $a=(-2)\times\dfrac{3}{2}=-3$

답 ③

13

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 y좌표가 0이어야 하므로

$\dfrac{2\times a-1\times7}{2-1}=0$, $2a-7=0$

따라서 $a=\dfrac{7}{2}$

답 ④

14

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times2+1\times a}{3+1},\ \dfrac{3\times(-4)+1\times0}{3+1}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{6+a}{4},\ -3\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로 $\dfrac{6+a}{4}=0$에서

$a=-6$

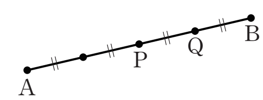
따라서 점 A의 좌표는 $(-6,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{2-(-6)\}^2+(-4-0)^2}$

$=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

답 ③

15



선분 AB의 중점을 P, 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 Q라 하면 점 Q는 선분 PB의 중점이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{PB}}=4\overline{\mathrm{PQ}}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{10}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=160$

답 160

16

삼각형 BOC와 삼각형 OAC는 각각 선분 BO와 선분 OA를 밑변으로 할 때, 두 삼각형의 높이가 같으므로 두 삼각형의 밑변의 길이의 비는 두 삼각형의 넓이의 비와 같다.

즉, 삼각형 BOC와 삼각형 OAC의 넓이의 비가 2 : 1이므로

$\overline{\mathrm{BO}}:\overline{\mathrm{OA}}=2:1$

따라서 원점 O는 선분 BA를 2 : 1로 내분하는 점이므로

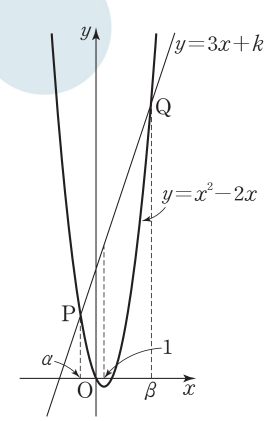
$\dfrac{2\times3+1\times a}{2+1}=0$, $\dfrac{2\times1+1\times b}{2+1}=0$

즉, $a=-6$, $b=-2$이므로

$a+b=-8$

답 ①

17



오른쪽 그림에서 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하자.

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=3x+k$가 만나는 두 점이 P, Q이므로 두 식 $y=x^2-2x$, $y=3x+k$를 연립하여 얻은 이차방정식

$x^2-2x=3x+k$, 즉

$x^2-5x-k=0$

의 두 실근이 α, β이어야 한다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$ ...... ㉠

$\alpha\beta=-k$ ...... ㉡

선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점의 x좌표가 1이므로

$\dfrac{1\times\beta+2\times\alpha}{1+2}=1$

$2\alpha+\beta=3$ ...... ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha=-2$, $\beta=7$

㉡에서 $-k=\alpha\beta=-14$

따라서 $k=14$

답 14

18

두 선분 AB, BC의 길이가 모두 3이므로

$\overline{AP}=\overline{BQ}=\dfrac{3(1-k)}{(1-k)+k}=\boxed{3-3k}$

$\overline{AP'}:\overline{P'B}=\overline{AP'}:(\overline{AP'}+3)=k:(k+1)$

$\overline{AP'}=\overline{BQ'}=3k$

이다. 두 점 P, P′에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 두 삼각형 PBH와 P′BH′에서

$\overline{PH}:\overline{P'H'}=\overline{PB}:\overline{P'B}$

$=(3-\overline{AP}):(\overline{AP'}+3)$

$=\{3-(\boxed{3-3k})\}:(\boxed{3k+3})$

이므로

$S_1:S_2=\left(\dfrac{1}{2}\times\overline{BQ}\times\overline{PH}\right):\left(\dfrac{1}{2}\times\overline{BQ'}\times\overline{P'H'}\right)$

$=(\overline{BQ}\times\overline{PB}):(\overline{BQ'}\times\overline{P'B})$

$=(3-3k)\times3k:3k(3+3k)$

$=(1-k):(1+k)=1:4$

이다. 따라서 $k=\boxed{\dfrac{3}{5}}$이다.

$f(k)=3-3k$, $g(k)=3k+3$, $p=\dfrac{3}{5}$이므로

$f(p)\times g(p)=\dfrac{6}{5}\times\dfrac{24}{5}=\dfrac{144}{25}$

답 ⑤

19

세 점 A$(a, 3)$, B$(-2, 5)$, C$(3, b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1, 2)$이므로

$\dfrac{a+(-2)+3}{3}=1$, $\dfrac{3+5+b}{3}=2$

즉, $a+1=3$, $8+b=6$이므로 $a=2$, $b=-2$

따라서 $a+b=0$

답 ③

20

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2+4+8}{3}, \dfrac{6+1+a}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{14}{3}, \dfrac{7+a}{3}\right)$

이 점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\dfrac{14}{3}=\dfrac{7+a}{3}$

따라서 $a=7$

답 7

21

$\overline{AC}=\sqrt{\{a-(-2)\}^2+(b-0)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2+4a+4}$

$\overline{BC}=\sqrt{(a-0)^2+(b-4)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2-8b+16}$

$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$a^2+b^2+4a+4=a^2+b^2-8b+16$, $4a+8b=12$

$a+2b=3$ ...... ㉠

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+0+a}{3}, \dfrac{0+4+b}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{-2+a}{3}, \dfrac{4+b}{3}\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$\dfrac{-2+a}{3}=0$, $a=2$

㉠에서 $2+2b=3$, $b=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a+b=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

답 ⑤

22

점 A의 좌표를 (x_1, y_1), 점 B의 좌표를 (x_2, y_2)라 하면

점 P는 선분 OA를 2 : 1로 외분하는 점이므로

$\dfrac{2\times x_1-1\times0}{2-1}=2x_1$, $\dfrac{2\times y_1-1\times0}{2-1}=2y_1$

점 P의 좌표는 $(2x_1, 2y_1)$

점 Q는 선분 OB를 2 : 1로 외분하는 점이므로

$\dfrac{2\times x_2-1\times0}{2-1}=2x_2$, $\dfrac{2\times y_2-1\times0}{2-1}=2y_2$

점 Q의 좌표는 $(2x_2, 2y_2)$

선분 PQ의 중점의 좌표가 $(4, 5)$이므로

$\dfrac{2x_1+2x_2}{2}=x_1+x_2=4$,

$\dfrac{2y_1+2y_2}{2}=y_1+y_2=5$

삼각형 OAB의 무게중심의 좌표 (a, b)는

$a=\dfrac{0+x_1+x_2}{3}=\dfrac{4}{3}$, $b=\dfrac{0+y_1+y_2}{3}=\dfrac{5}{3}$

따라서 $a+b=\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{3}=3$

답 ①

23

두 점 A, B의 좌표를 각각 (a_1, b_1), (a_2, b_2)라 하면 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 $(5, 4)$이므로

$\frac{0+a_1+a_2}{3}=5$, $\frac{0+b_1+b_2}{3}=4$

$a_1+a_2=15$, $b_1+b_2=12$ ······ ㉠

선분 OA를 $2:1$로 외분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{2a_1-0}{2-1}, \frac{2b_1-0}{2-1}\right)$, 즉 $(2a_1, 2b_1)$

선분 OB를 $2:1$로 외분하는 점 D의 좌표는

$\left(\frac{2a_2-0}{2-1}, \frac{2b_2-0}{2-1}\right)$, 즉 $(2a_2, 2b_2)$

이때 두 선분 AD, BC는 모두 삼각형 OCD의 중선이므로 두 중선의 교점 E는 삼각형 OCD의 무게중심이다.

점 E의 좌표는 (p, q)이므로 ㉠에 의하여

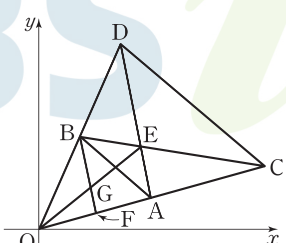
$p=\frac{0+2a_1+2a_2}{3}=\frac{2(a_1+a_2)}{3}=\frac{2\times 15}{3}=10$

$q=\frac{0+2b_1+2b_2}{3}=\frac{2(b_1+b_2)}{3}=\frac{2\times 12}{3}=8$

따라서 $p+q=18$

답 ④

다른 풀이



두 선분 AD, BC는 모두 삼각형 OCD의 중선이므로 두 중선의 교점 E는 삼각형 OCD의 무게중심이다.

즉, 점 E는 선분 DA를 $2:1$로 내분하는 점이다.

선분 OA의 중점을 F라 하고, 삼각형 OAB의 무게중심을 G라 하면 점 G는 선분 BF를 $2:1$로 내분하는 점이므로 세 점 O, G, E는 한 직선 위에 있다.

이때 $\overline{OF}:\overline{OA}=1:2$이므로 두 삼각형 OFG, OAE는 닮음비가 $1:2$인 닮은 도형이다.

따라서 $\overline{OG}:\overline{OE}=1:2$이고 점 G의 좌표가 $(5, 4)$이므로

$p=2\times 5=10$, $q=2\times 4=8$

그러므로 $p+q=18$

24

두 점 $(-1, 2)$, $(2, a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{a-2}{2+1}\{x-(-1)\}$, 즉 $y=\frac{a-2}{3}x+\frac{a+4}{3}$

y축과 만나는 점의 좌표가 $(0, 5)$이므로

$5=\frac{a+4}{3}$

따라서 $a=11$

답 ④

25

점 $(3, 9)$를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2(x-3)+9$

$\quad=2x+3$

따라서 직선의 y절편은 3

답 ①

26

직선 $3x+2y-5=0$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$의 기울기가 $-\frac{3}{2}$이므로

이 직선과 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이다.

기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 점 $(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{3}{2}(x-2)+3$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x+6$

이므로 구하는 y절편은 6

답 ①

27

두 직선 $3x+2y-5=0$, $3x+y-1=0$의 교점의 좌표는 $(-1, 4)$

직선 $2x-y+4=0$의 기울기는 2이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 2이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=2\{x-(-1)\}+4=2x+6$

이므로 이 직선의 y절편은 6

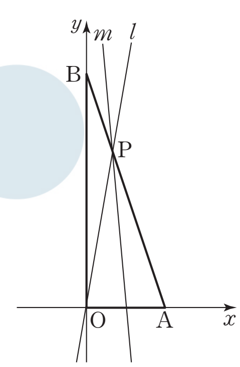
답 ⑤

28

조건 (가)에서 직선 l이 삼각형 OAB의 점 O를 지나므로 조건 (나), (다)에 의하여 점 P는 선분 AB를 $2:1$ 또는 $1:2$로 내분하는 점이어야 한다.

(i) 점 P가 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점일 때,

점 P의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$이므로



직선 l의 기울기는

$\frac{4-0}{\frac{2}{3}-0}=6$

조건 (다)에서 직선 m은 삼각형 OAP의 넓이를 이등분하여야 하므로 선분 OA의 중점 $(1, 0)$을 지난다.

직선 m의 기울기는

$\frac{4-0}{\frac{2}{3}-1}=-12$

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 합은 -6이다.

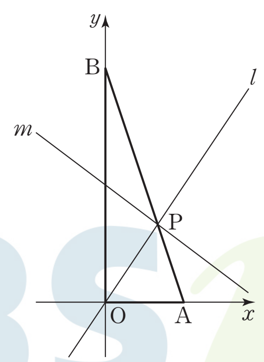
(ii) 점 P가 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점일 때,

점 P의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$이므로

직선 l의 기울기는

$\frac{2-0}{\frac{4}{3}-0}=\frac{3}{2}$

조건 (다)에서 직선 m은 삼각형 OPB의 넓이를 이등분하여야 하므로 선분 OB의 중점 $(0, 3)$을 지난다.



직선 m의 기울기는

$\frac{2-3}{\frac{4}{3}-0}=-\frac{3}{4}$

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 합은 $\frac{3}{4}$이다.

(i), (ii)에서 두 직선 l, m의 기울기의 합의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이다. 답 ①

29

두 직선 $y=-2x+3$과 $y=ax+1$이 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

따라서 $(-2)\times a=-1$이므로 $a=\frac{1}{2}$ 답 ④

30

두 직선 $y=7x-1$과 $y=(3k-2)x+2$가 서로 평행하므로 기울기는 서로 같고 y절편은 서로 다르다.

따라서 $7=3k-2$이므로 $k=3$ 답 ③

31

ㄱ. $a=0$일 때, $l : y=2$, $m : x=-2$

두 직선 l과 m은 각각 x축, y축에 평행하므로 두 직선 l과 m이 서로 수직이다. (참)

ㄴ. 직선 l의 방정식 $ax-y+a+2=0$을 a에 대하여 정리하면

$a(x+1)-y+2=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 성립하려면

$x+1=0$, $-y+2=0$, 즉 $x=-1$, $y=2$

따라서 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$를 지난다. (거짓)

ㄷ. (i) $a=0$일 때,

ㄱ에 의하여 두 직선 l과 m은 서로 수직이다.

(ii) $a\neq0$일 때,

$l : ax-y+a+2=0$에서 $l : y=ax+(a+2)$

$m : 4x+ay+3a+8=0$에서 $m : y=-\frac{4}{a}x-3-\frac{8}{a}$

두 직선 l, m의 기울기는 각각 a, $-\frac{4}{a}$이므로 두 직선 l과 m이 평행이 되기 위해서는 $a=-\frac{4}{a}$이어야 한다. 즉, $a^2=-4$

그런데 이를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않으므로 평행이 되기 위한 a의 값은 존재하지 않는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

32

두 식 $2x+y+2=0$, $x-2y-4=0$을 연립하여 풀면

$x=0$, $y=-2$

이므로 두 직선 l_1, l_2의 교점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(0, -2)$

직선 l_1이 x축과 만나는 점 B는

$2x+0+2=0$, $x=-1$에서 $\mathrm{B}(-1, 0)$

직선 l_2가 x축과 만나는 점 C는

$x-0-4=0$, $x=4$에서 $\mathrm{C}(4, 0)$

ㄱ. 두 직선 l_1, l_2의 기울기는 각각 -2, $\frac{1}{2}$이고, 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이다. (참)

ㄴ. 점 Q가 삼각형 PBC의 무게중심이므로 삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 QBC의 넓이의 3배이다.

조건 (나)에서 삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 3배이므로 두 삼각형 QBC, ABC의 넓이는 서로 같다.

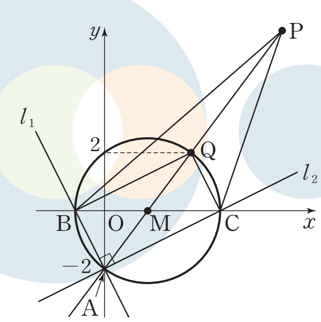
두 삼각형 QBC, ABC에서 선분 BC가 공통이므로 점 Q와 직선 BC 사이의 거리는 점 A와 직선 BC 사이의 거리인 2이다. 즉, 점 Q의 y좌표는 2 또는 -2이다.

제1사분면에 있는 점 P에 대하여 세 점 P, B, C의 x좌표의 합과 y좌표의 합은 모두 양수이므로 점 Q도 제1사분면에 있는 점이다. 따라서 점 Q의 y좌표는 2이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이므로 삼각형 ABC의 외접원의 지름은 선분 BC이다.

원의 중심은 선분 BC의 중점 M이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$



점 A의 y좌표는 -2, 점 Q의 y좌표는 2이고, 점 Q는 제1사분면에 있으므로 두 점 Q, A는 점 M에 대하여 서로 대칭이다.

따라서 세 점 A, M, Q는 한 직선 위에 있다.

점 Q는 삼각형 PBC의 무게중심이므로 세 점 M, Q, P도 한 직선 위에 있다.

그러므로 네 점 A, M, Q, P는 모두 한 직선 위에 있다.

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MQ}}$이고 $\overline{\mathrm{MQ}}:\overline{\mathrm{QP}}=1:2$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{MP}}=4:3$

점 P는 선분 AM을 $4:3$으로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{4\times\frac{3}{2}-3\times0}{4-3}, \dfrac{4\times0-3\times(-2)}{4-3}\right)$, 즉 $(6, 6)$

따라서 점 P의 x좌표와 y좌표의 합은 12이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

다른 풀이

ㄴ. 세 점 $\mathrm{A}(0, -2)$, $\mathrm{B}(-1, 0)$, $\mathrm{C}(4, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는 점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발이 원점 O이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\times5\times2=5$

그러므로 조건 (나)에서 삼각형 PBC의 넓이는 15이다.

점 P의 좌표를 (a, b) $(a>0, b>0)$이라 하고 점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PBC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}\times5\times b=\dfrac{5}{2}b$

$\dfrac{5}{2}b=15$에서 $b=6$이고 점 P의 좌표는 $(a, 6)$

이때 삼각형 PBC의 무게중심 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{a+(-1)+4}{3}, \dfrac{6+0+0}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{a}{3}+1, 2\right)$

따라서 점 Q의 y좌표는 2이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이므로 삼각형 ABC의 외접원의 지름은 선분 BC이다. 원의 중심은 선분 BC의 중점 M이므로 그 좌표는

$\left(\dfrac{-1+4}{2}, \dfrac{0+0}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

$\overline{\mathrm{BC}}=|4-(-1)|=5$이므로 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{5}{2}$이다. 즉, 삼각형 ABC의 외접원의 방정식은

$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{25}{4}$

점 Q가 이 원 위의 점이므로

$\left(\dfrac{a}{3}+1-\dfrac{3}{2}\right)^2+2^2=\dfrac{25}{4}$

$\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

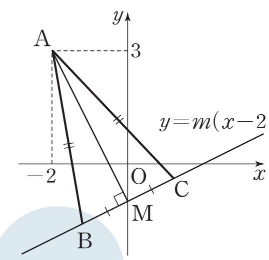
$\dfrac{a}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ 또는 $\dfrac{a}{3}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$

$a=6$ 또는 $a=-3$

$a>0$이므로 $a=6$이고 점 P의 좌표는 $(6, 6)$

따라서 점 P의 x좌표와 y좌표의 합은 $6+6=12$이다. (거짓)

33



오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이므로 두 직선 AM, BC는 서로 수직이다.

이때 점 M은 직선 $y=m(x-2)$와 y축이 만나는 점이므로 $\mathrm{M}(0, -2m)$이다.

직선 AM의 기울기는 $\dfrac{-2m-3}{0-(-2)}=\dfrac{-2m-3}{2}$이고, 직선 BC의 기울기는 m이므로

$\dfrac{-2m-3}{2}\times m=-1$, $2m^2+3m-2=0$, $(m+2)(2m-1)=0$

$m>0$이므로 $m=\dfrac{1}{2}$

답 ③

34

점 $\mathrm{A}(a, 4)$는 직선 $l: y=\dfrac{1}{m}x+2$ 위의 점이므로

$4=\dfrac{a}{m}+2$, $a=\boxed{2m}$

직선 BH는 직선 l에 수직이므로 직선 BH의 기울기는 $-m$이고, 직선 BH의 방정식은

$y=-m(x-\boxed{2m})$

직선 l과 직선 BH가 만나는 점 H의 x좌표는

$\dfrac{1}{m}x+2=-m(x-2m)$에서 $x+2m=-m^2(x-2m)$

$(m^2+1)x=2m^3-2m$이므로 $x=\dfrac{2m^3-2m}{m^2+1}$

$x=\dfrac{2m^3-2m}{m^2+1}$을 $y=\dfrac{1}{m}x+2$에 대입하면

$y=\dfrac{1}{m}\times\dfrac{2m^3-2m}{m^2+1}+2=\dfrac{2m^2-2}{m^2+1}+2=\dfrac{4m^2}{m^2+1}$

즉, 점 H의 좌표는

$\mathrm{H}\left(\dfrac{2m^3-2m}{\boxed{m^2+1}}, \dfrac{4m^2}{\boxed{m^2+1}}\right)$

선분 OH의 길이는

$\sqrt{\left(\dfrac{2m^3-2m}{\boxed{m^2+1}}\right)^2+\left(\dfrac{4m^2}{\boxed{m^2+1}}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{(2m)^2\{(m^2-1)^2+(2m)^2\}}{(m^2+1)^2}}$

$=\dfrac{|2m|}{\boxed{m^2+1}}\sqrt{m^4+\boxed{2}\times m^2+1}=\dfrac{|2m|}{m^2+1}\sqrt{(m^2+1)^2}$

$=\dfrac{|2m|}{m^2+1}\times(m^2+1)=|\boxed{2m}|$

이므로 선분 OH의 길이와 선분 OB의 길이가 서로 같다.

따라서 삼각형 OBH는 m의 값에 관계없이 이등변삼각형이다.
즉, $f(m)=2m$, $g(m)=m^2+1$, $k=2$이므로
$f(k)\times g(k)=f(2)\times g(2)=4\times5=20$

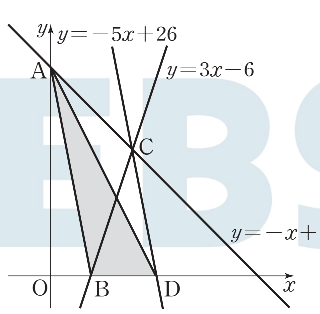
답 ④

35

직선 l_1의 기울기를 m이라 하면 직선 l_1의 방정식은
$y-1=m(x-1)$, 즉 $y=m(x-1)+1$
직선 l_1이 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 접하므로 이차방정식
$x^2=m(x-1)+1$, 즉 $x^2-mx+m-1=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=(-m)^2-4(m-1)=0$, $(m-2)^2=0$, $m=2$
직선 l_1의 방정식은 $y=2x-1$이므로 직선 l_1이 y축과 만나는 점 Q의 좌표는 $(0,\ -1)$이다.
두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이므로 직선 l_2의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
즉, 직선 l_2의 방정식은 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
직선 l_2와 이차함수 $y=x^2$의 그래프의 교점 R의 x좌표는
$x^2=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$에서 $2x^2+x-3=0$, $(2x+3)(x-1)=0$
$x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=1$
그러므로 점 R의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}\right)$이다.
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$,
$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{9}{4}-1\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$
이므로 삼각형 PRQ의 넓이 S는
$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{5\sqrt{5}}{4}=\frac{25}{8}$
따라서 $40S=40\times\frac{25}{8}=125$

답 125

36



x축 위의 점 $\mathrm{D}(a,\ 0)\ (a>2)$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ABD의 넓이가 같으려면 $\overline{\mathrm{AB}}$를 밑변으로 할 때, 삼각형 ABC의 높이인 직선 AB와 점 C 사이의 거리와 삼각형 ABD의 높이인 직선 AB와 점 D 사이의 거리가 같아야 한다. 즉, 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선 위에 점 D가 있어야 한다.
직선 $y=-x+10$의 y절편이 10이므로 점 A의 좌표는 $(0,\ 10)$이고, 직선 $y=3x-6$의 x절편이 2이므로 점 B의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.
직선 AB의 기울기는 $\frac{0-10}{2-0}=-5$
두 직선 $y=-x+10$, $y=3x-6$의 교점 C의 x좌표는
$-x+10=3x-6$에서 $-4x=-16$이므로 $x=4$
$x=4$를 $y=-x+10$에 대입하면 $y=6$
즉, 점 C의 좌표는 $(4,\ 6)$이다.
그러므로 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선의 방정식은
$y-6=-5(x-4)$, 즉 $y=-5x+26$
이때 점 $\mathrm{D}(a,\ 0)$이 직선 $y=-5x+26$ 위의 점이므로
$0=-5a+26$
따라서 $a=\frac{26}{5}$

답 ②

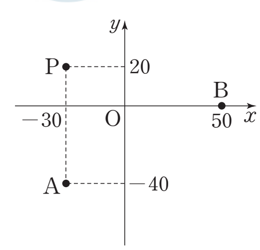
37

점 $(\sqrt{3},\ 1)$과 직선 $y=\sqrt{3}x+n$, 즉 $\sqrt{3}x-y+n=0$ 사이의 거리가 3이므로
$\frac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1\times1+n|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=3$, $|2+n|=6$
$2+n=6$ 또는 $2+n=-6$
$n=4$ 또는 $n=-8$
따라서 양수 n의 값은 4이다.

답 ④

38

오른쪽 그림과 같이 레이더의 위치를 원점으로 하고 동서를 x축, 남북을 y축으로 좌표평면을 정하자.



본부가 있는 지점을 P라 하면
$\mathrm{P}(-30,\ 20)$, A, B지점의 좌표는 각각
$\mathrm{A}(-30,\ -40)$, $\mathrm{B}(50,\ 0)$이다.
물체가 지나간 경로의 직선 AB의 방정식은
$y-0=\frac{0-(-40)}{50-(-30)}(x-50)$, 즉 $x-2y-50=0$
이 물체가 본부와 가장 가까워졌을 때의 레이더 화면상의 거리는 점 $(-30,\ 20)$과 직선 $x-2y-50=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\frac{|1\times(-30)-2\times20-50|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{120}{\sqrt{5}}=24\sqrt{5}(\mathrm{cm})$
따라서 $a=24\sqrt{5}$

답 ②

39

세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(8,\ 4)$, $\mathrm{B}(7,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{0+8+7}{3},\ \frac{0+4+a}{3}\right)$, 즉 $\left(5,\ \frac{4+a}{3}\right)$
이 점이 $\mathrm{G}(5,\ b)$와 일치하므로

$b=\dfrac{4+a}{3}$ ...... ㉠

한편, 직선 OA의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$

점 $G(5,\ b)$와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|5-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$, $|5-2b|=5$

$5-2b=5$ 또는 $5-2b=-5$

$b=0$ 또는 $b=5$

$a>0$이므로 ㉠에서 $b>0$

따라서 $a=11$, $b=5$이므로 $a+b=16$

답 ①

40

두 점 $O(0,\ 0)$, $A(8,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{3}{4}x$, 즉 $3x-4y=0$

점 B의 좌표를 $(a,\ 0)$ $(0<a<8)$이라 하면 점 B와 직선 $3x-4y=0$ 사이의 거리는

$\overline{BI}=\dfrac{|3\times a-4\times 0|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{3a}{5}$

또한, $\overline{BH}=8-a$이므로 $\overline{BH}=\overline{BI}$에서

$8-a=\dfrac{3a}{5}$, $a=5$

그러므로 점 B의 좌표는 $(5,\ 0)$이다.

두 점 $A(8,\ 6)$, $B(5,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\dfrac{6-0}{8-5}(x-5)$, 즉 $y=2x-10$

따라서 $m=2$, $n=-10$이므로 $m+n=-8$

답 ③

다른 풀이

점 $A(8,\ 6)$, $H(8,\ 0)$이므로 $\overline{AH}=6$, $\overline{OH}=8$

직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$\overline{BH}=\overline{BI}=k$라 하면 $\overline{OB}=\overline{OH}-\overline{BH}=8-k$

두 삼각형 OBI와 OAH에서

$\angle OIB=\angle OHA=90^\circ$, $\angle IOB=\angle HOA$(공통)이므로

두 삼각형 OBI와 OAH가 서로 닮음이다.

즉, $\overline{OB}:\overline{BI}=\overline{OA}:\overline{AH}$에서 $(8-k):k=10:6$

$6(8-k)=10k$, $16k=48$, $k=3$

그러므로 점 B의 좌표는 $(5,\ 0)$이다.

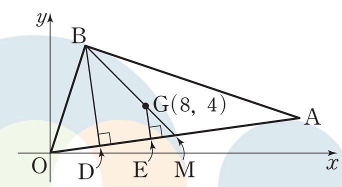
두 점 $A(8,\ 6)$, $B(5,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\dfrac{6-0}{8-5}(x-5)$, 즉 $y=2x-10$

따라서 $m=2$, $n=-10$이므로 $m+n=-8$

41

다음 그림과 같이 선분 OA의 중점을 M이라 하고, 두 점 B, G에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.



점 G가 삼각형 OAB의 무게중심이므로 $\overline{BG}:\overline{GM}=2:1$

두 삼각형 MBD와 MGE에서

$\angle BDM=\angle GEM=90^\circ$, $\angle BMD=\angle GME$는 공통이므로

두 삼각형 MBD와 MGE는 서로 닮음이다.

$\overline{BD}:\overline{GE}=\overline{BM}:\overline{GM}=3:1$이고, 점 B와 직선 OA 사이의 거리 $\overline{BD}$가 $6\sqrt{2}$이므로

$\overline{GE}=\dfrac{1}{3}\overline{BD}=\dfrac{1}{3}\times 6\sqrt{2}=\boxed{2\sqrt{2}}$

직선 OA의 기울기를 m이라 하면 직선 OA의 방정식은 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$이므로 점 G와 직선 OA 사이의 거리는

$\dfrac{\boxed{|8m-4|}}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$

이고 $\boxed{2\sqrt{2}}$와 같다. 즉,

$\dfrac{|8m-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$, $\boxed{|8m-4|}=\boxed{2\sqrt{2}}\times\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$7m^2-8m+1=0$, $(7m-1)(m-1)=0$

$m=\boxed{\dfrac{1}{7}}$ 또는 $m=\boxed{1}$

이때 직선 OG의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로 $m<\dfrac{1}{2}$을 만족시키는 직선 OA의 기울기는 $\boxed{\dfrac{1}{7}}$이다.

따라서 $p=2\sqrt{2}$, $q=\dfrac{1}{7}$, $f(m)=|8m-4|$이므로

$\dfrac{f(q)}{p^2}=\dfrac{\left|8\times\dfrac{1}{7}-4\right|}{(2\sqrt{2})^2}=\dfrac{\dfrac{20}{7}}{8}=\dfrac{5}{14}$

답 ②

서술형 연습

본문 69쪽

01 $(3,\ 0)$, $(-5,\ 0)$ **02** -1

01

x축 위의 점의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 점 $(a,\ 0)$과 직선

$x+y+1=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{|a+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$ ······ ㉮

$|a+1|=4$

$a+1=4$ 또는 $a+1=-4$

$a=3$ 또는 $a=-5$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이다. ······ ㉯

답 $(3,\ 0)$, $(-5,\ 0)$

단계	채점 기준	비율
㉮	점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한 경우	50%
㉯	x축 위의 점의 좌표를 모두 구한 경우	50%

02

(ⅰ) 직선 $ax+2y+1=0$이 직선 $x+3y=0$ 또는 직선 $x-y-4=0$과 평행할 때,

직선 $ax+2y+1=0$의 기울기가 $-\dfrac{a}{2}$, 직선 $x+3y=0$의 기울기가 $-\dfrac{1}{3}$, 직선 $x-y-4=0$의 기울기가 1이므로

$-\dfrac{a}{2}=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $-\dfrac{a}{2}=1$

$a=\dfrac{2}{3}$ 또는 $a=-2$ ······ ㉮

(ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

$x+3y=0$, $x-y-4=0$을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-1$

직선 $ax+2y+1=0$이 두 직선 $x+3y=0$, $x-y-4=0$의 교점 $(3,\ -1)$을 지나야 하므로

$3a-2+1=0$

$a=\dfrac{1}{3}$ ······ ㉯

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$\dfrac{2}{3}+(-2)+\dfrac{1}{3}=-1$ ······ ㉰

답 -1

단계	채점 기준	비율
㉮	어느 두 직선이 서로 평행한 경우를 구한 경우	40%
㉯	세 직선이 한 점에서 만나는 경우를 구한 경우	40%
㉰	모든 a의 값의 합을 구한 경우	20%

1등급 도전

본문 70~71쪽

01 ①	02 ⑤	03 162	04 96
05 ①	06 ⑤		

01

풀이 전략 중선정리와 무게중심의 성질을 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 삼각형 ABC에서 중선정리를 이용하여 $\overline{AC}$의 길이를 구한다.

점 D가 선분 BC의 중점이므로 중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)$ $\overline{BC}=2$이므로 $\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=1$

$(2\sqrt{3})^2+\overline{AC}^2=2\{(\sqrt{7})^2+1^2\}$, $\overline{AC}^2=4$

$\overline{AC}>0$이므로 $\overline{AC}=2$

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

STEP 2 점 P가 삼각형 ABC의 무게중심임을 이용한다.

이등변삼각형 CAB에서 선분 CE가 $\angle$ACB의 이등분선이므로 선분 CE는 선분 AB의 수직이등분선이다.

이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직 이등분한다.

직각삼각형 BCE에서

$\overline{CE}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{BE}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

또한, 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{AP}:\overline{PD}=2:1$에서 $\overline{AP}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$, $\overline{PD}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ $\overline{AP}=\dfrac{2}{3}\overline{AD}$, $\overline{PD}=\dfrac{1}{3}\overline{AD}$

$\overline{CP}:\overline{PE}=2:1$에서 $\overline{CP}=\dfrac{2}{3}$, $\overline{PE}=\dfrac{1}{3}$ $\overline{CP}=\dfrac{2}{3}\overline{CE}$, $\overline{PE}=\dfrac{1}{3}\overline{CE}$

STEP 3 각의 이등분선의 성질을 이용하여 $\overline{AR}$와 $\overline{ER}$의 비, $\overline{DQ}$와 $\overline{CQ}$의 비를 구한 후 S_1과 S_2를 삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 구한다.

삼각형 EPA에서 선분 PR가 각 APE의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\triangle PAE=\triangle PBE=\triangle PBD=\triangle PCD=\dfrac{1}{6}\triangle ABC$

$\overline{AR}:\overline{ER}=\overline{PA}:\overline{PE}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}:\dfrac{1}{3}=2\sqrt{7}:1$

이때 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 삼각형 EPA의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\dfrac{1}{6}$이므로 삼각형 PRE의 넓이 S_1은

$S_1=S\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2\sqrt{7}+1}$ $\triangle PAR:\triangle PRE=\overline{AR}:\overline{ER}=2\sqrt{7}:1$

같은 방법으로 삼각형 CPD에서

$\overline{DQ}:\overline{CQ}=\overline{PD}:\overline{PC}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}:\dfrac{2}{3}=\sqrt{7}:2$

삼각형 CPD의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\dfrac{1}{6}$이므로

삼각형 PQC의 넓이 S_2는

$S_2=S\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{\sqrt{7}+2}$ $\triangle PDQ:\triangle PQC=\overline{DQ}:\overline{CQ}=\sqrt{7}:2$

STEP 4 $\dfrac{S_2}{S_1}$의 값을 구하여 a, b의 값을 구한다.

$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{S\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{\sqrt{7}+2}}{S\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2\sqrt{7}+1}}=\dfrac{2(2\sqrt{7}+1)}{\sqrt{7}+2}$ $=\dfrac{2(2\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}=\dfrac{2(12-3\sqrt{7})}{3}=8-2\sqrt{7}$

$=8-2\sqrt{7}$

따라서 $a=8$, $b=-2$이므로 $ab=-16$

답 ①

02

풀이 전략 직선의 방정식을 활용한다.

문제 풀이

STEP 1 $k=1$일 때, 점 A의 좌표를 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $k=1$일 때, $f(x)=(x-1)^2-2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 $(1,\ -2)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ (참)

STEP 2 주어진 식을 k에 대하여 정리한 후 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $y=k(x-1)^2-4k+2$를 k에 대하여 정리하면

$k\{(x-1)^2-4\}+2-y=0$

이 등식이 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 성립하려면

$(x-1)^2=4,\ 2-y=0$이어야 하므로

$(x-1)^2=4$에서 $x^2-2x-3=0$이므로 $(x+1)(x-3)=0$ $x=-1$ 또는 $x=3$

$x=-1,\ y=2$ 또는 $x=3,\ y=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 점 $(-1,\ 2)$, $(3,\ 2)$를 지난다. (참)

STEP 3 직선 AB의 방정식을 k에 대하여 정리한 후 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $\mathrm{A}(1,\ -4k+2)$, $\mathrm{B}(0,\ -3k+2)$이고 직선 AB의 기울기는

$f(0)=k\times(-1)^2-4k+2$ $=-3k+2$ 이므로 점 B의 y좌표는 $-3k+2$이다.

$$\frac{(-3k+2)-(-4k+2)}{0-1}=-k$$

이므로 직선 AB의 방정식은

$y=-kx-3k+2$

이 식을 k에 대하여 정리하면

$k(x+3)+y-2=0$

이 등식이 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 성립하려면

$x+3=0,\ y-2=0$이어야 하므로

$x=-3,\ y=2$

따라서 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 직선 AB는 항상 점 $(-3,\ 2)$를 지난다. (참)

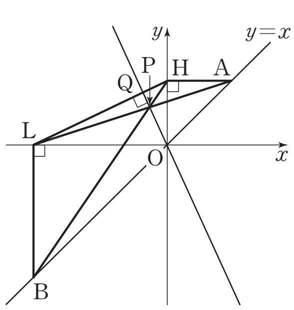
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

03

풀이 전략 직선의 방정식과 두 직선의 위치 관계를 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 $\mathrm{A}(a,\ a)(a>0)$로 놓고 직선 AL과 직선 BH의 방정식을 구한 후, 점 P의 좌표를 구한다.



제 1사분면 위의 점 A는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $\mathrm{A}(a,\ a)\ (a>0)$이라 하면 조건 (가), (나)에 의하여

$\mathrm{B}(-2a,\ -2a)$

$\mathrm{H}(0,\ a)$

$\mathrm{L}(-2a,\ 0)$

$\triangle\mathrm{OAH}\backsim\triangle\mathrm{BOL}$이므로 $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{BO}}=\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{OL}}=\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{BL}}=1:2$ 따라서 $\overline{\mathrm{OL}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2a$, $\overline{\mathrm{BL}}=2\overline{\mathrm{OH}}=2a$이고 점 B는 제3사분면 위의 점이므로 $\mathrm{B}(-2a,\ -2a)$

직선 AL의 방정식은

$$y-0=\frac{0-a}{-2a-a}\{x-(-2a)\},\ \text{즉 } y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 BH의 방정식은

$$y-a=\frac{a-(-2a)}{0-(-2a)}(x-0),\ \text{즉 } y=\frac{3}{2}x+a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-\frac{2}{7}a,\ y=\frac{4}{7}a$

그러므로 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{2}{7}a,\ \frac{4}{7}a\right)$이다.

STEP 2 두 직선의 위치 관계와 원의 성질을 이용하여 $\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$의 길이를 구한다.

직선 OP의 기울기는 $\dfrac{\frac{4}{7}a}{-\frac{2}{7}a}=-2$

직선 LH의 기울기는 $\dfrac{a-0}{0-(-2a)}=\dfrac{1}{2}$

이때 직선 OP의 기울기와 직선 LH의 기울기의 곱은 -1이므로 이 두 직선은 서로 수직이다. 즉, $\angle\mathrm{LQO}=90^\circ$이므로 선분 OL은 세 점 O, Q, L을 지나는 원의 지름이다.

$\overline{\mathrm{OL}}=2a$이고, 세 점 O, Q, L을 지나는 원의 넓이는 $\frac{81}{2}\pi$이므로

$\pi a^2=\frac{81}{2}\pi,\ a^2=\frac{81}{2}$

$a>0$이므로 $a=\frac{9}{\sqrt{2}}$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}a$

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}a=9$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}a=18$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(-2a)^2+(-2a)^2}=\sqrt{8a^2}=2\sqrt{2}a$

$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=162$

답 162

04

풀이 전략 직선의 방정식과 원의 성질을 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 두 직선 AC, BD가 서로 수직임을 이용하여 점 F의 좌표를 구한다.

직선 AC의 기울기는

$$\frac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$$

직선 AC와 직선 BD는 서로 수직이므로 직선 BD의 방정식은

$y=(\sqrt{2}-1)(x+2)$

직선 BD의 기울기는 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$이다.

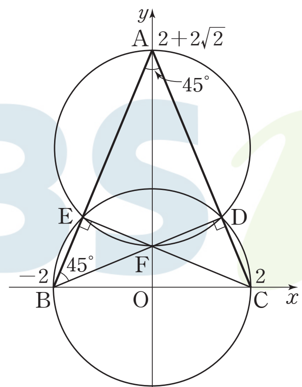
그러므로 점 F의 좌표는 $(0,\ -2+2\sqrt{2})$이다.

STEP 2 원의 성질을 이용하여 l^2을 구한 후 a, b의 값을 구한다.

선분 AF의 길이는

$2+2\sqrt{2}-(-2+2\sqrt{2})=4$

마주보는 두 각의 크기의 합이 180°이다.



오른쪽 그림과 같이 사각형 AEFD는 지름이 $\overline{\mathrm{AF}}$인 원에 내접하고, 사각형 BCDE는 지름이 $\overline{\mathrm{BC}}$인 원에 내접한다.

이 두 원의 지름의 길이가 같고, $\angle$EAD와 $\angle$DBE가 모두 호 ED에 대한 원주각이므로

$\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{DBE}$

또, $\angle\mathrm{BDA}=\angle\mathrm{BEF}=90^\circ$이므로

삼각형 ABD와 삼각형 BFE는 직각이등변삼각형이고, $\triangle\mathrm{AEF}\equiv\triangle\mathrm{ADF}$, $\triangle\mathrm{BFE}\equiv\triangle\mathrm{CFD}$이다.

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{DC}}$이므로 사각형 AEFD의 둘레의 길이 l은

$l=\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}+\overline{\mathrm{DA}}=\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{EB}}+\overline{\mathrm{DC}}+\overline{\mathrm{DA}}$

$\quad=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(-2-0)^2+\{0-(2+2\sqrt{2})\}^2=16+8\sqrt{2}$

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

이므로

$l^2=4\overline{\mathrm{AB}}^2=4(16+8\sqrt{2})=64+32\sqrt{2}$

따라서 $a=64$, $b=32$이므로 $a+b=96$

답 96

다른 풀이

선분 AD의 길이를 c, 선분 FD의 길이를 d라 하면

사각형 AEFD의 둘레의 길이는

$l=2(c+d)$

삼각형 AFD가 직각삼각형이고, 선분 AF의 길이가 4이므로

$c^2+d^2=16$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 BD의 방정식은

$y=(\sqrt{2}-1)(x+2)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

또한, 직선 AC의 방정식은

$y=\dfrac{-(2+2\sqrt{2})}{2}(x-2)$

즉, $y=(-1-\sqrt{2})(x-2)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$(\sqrt{2}-1)(x+2)=(-1-\sqrt{2})(x-2)$에서
$(\sqrt{2}-1)x+2\sqrt{2}-2=(-1-\sqrt{2})x+2+2\sqrt{2}$
$2\sqrt{2}x=4$, $x=\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$

즉, 점 D의 좌표는 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$이므로 삼각형 AFD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}cd=\dfrac{1}{2}\times4\times\sqrt{2}$

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{FD}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF}}\times$(점 D의 x좌표)

$cd=4\sqrt{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉠, ㉣에 의하여

$l^2=4(c+d)^2=4(c^2+2cd+d^2)$

$\quad=4(16+8\sqrt{2})=64+32\sqrt{2}$

따라서 $a=64$, $b=32$이므로 $a+b=96$

05

풀이 전략 점과 직선 사이의 거리를 활용한다.

문제 풀이

STEP 1 점 P와 직선 $y=2x-12a$ 사이의 거리가 최소일 때를 파악한다.

$x^2-2ax-20=2x-12a$에서

$x^2-2(a+1)x+12a-20=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=\{-(a+1)\}^2-(12a-20)$

$\quad=a^2-10a+21$

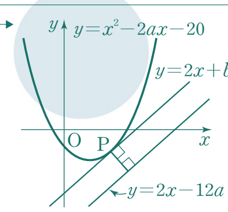
$\quad=(a-3)(a-7)$

$3<a<7$일 때, $\dfrac{D_1}{4}<0$이므로 이차방정식 ㉠의 실근이 존재하지 않는다.

따라서 $3<a<7$일 때, 이차함수 $y=x^2-2ax-20$의 그래프와 직선 $y=2x-12a$가 만나지 않으므로 기울기가 2인 직선이 이차함수 $y=x^2-2ax-20$에 접할 때의 접점이 점 P일 때, 점 P와 직선 $y=2x-12a$ 사이의 거리가 최소가 된다.

STEP 2 $f(a)$의 값의 의미를 파악한다.

이차함수 $y=x^2-2ax-20$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+b$ (b는 상수)라 하자.



이차방정식 $x^2-2ax-20=2x+b$, 즉

$x^2-2(a+1)x-20-b=0$의 판별식을

D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=\{-(a+1)\}^2-(-20-b)=0$

$b=-a^2-2a-21$

따라서 $f(a)$는 두 직선 $y=2x-12a$와 $y=2x-a^2-2a-21$ 사이의 거리와 같다.

STEP 3 $f(a)$의 최댓값을 구한다.

$f(a)$는 직선 $y=2x-12a$ 위의 점 $(6a, 0)$과 직선 $y=2x-a^2-2a-21$, 즉 $2x-y-a^2-2a-21=0$ 사이의 거리와 같으므로

평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

$f(a)=\dfrac{|12a-a^2-2a-21|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$\quad=\dfrac{|-a^2+10a-21|}{\sqrt{5}}$

$\quad=\dfrac{|-(a-5)^2+4|}{\sqrt{5}}$ $(3<a<7)$

따라서 $f(a)$의 최댓값은

$f(5)=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

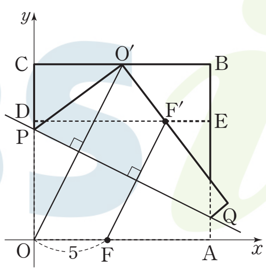
답 ①

06

풀이 전략 두 직선의 위치 관계와 두 점의 중점을 이용하여 직선의 방정식을 구한다.

문제 풀이

STEP 1 네 점 A, B, C, F의 좌표를 구한다.



정사각형 OABC의 한 변의 길이가 12이므로

O$(0, 0)$, A$(12, 0)$, B$(12, 12)$, C$(0, 12)$

또, $\overline{\text{OF}}=5$이므로

F$(5, 0)$

STEP 2 직선 OO′과 직선 FF′이 서로 평행함을 이용한다.

이때 점 O′은 선분 BC 위의 점이므로 점 O′의 좌표를 $(a, 12)$ $(0\le a\le 12)$로 놓을 수 있다.

또, 점 F′은 선분 DE 위의 점이고, 두 점 D, E는 각각 두 선분 OC, AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 F′의 좌표를 $(b, 8)$ $(0\le b\le 12)$로 놓을 수 있다.

두 직선 OO′과 FF′은 모두 직선 PQ와 수직이므로 직선 OO′과 직선 FF′은 서로 평행하다.

즉, 직선 OO′과 직선 FF′은 기울기가 같으므로

$\dfrac{12-0}{a-0}=\dfrac{8-0}{b-5}$

→ 두 점 O$(0, 0)$, O′$(a, 12)$를 지나는 직선의 기울기

→ 두 점 F$(5, 0)$, F′$(b, 8)$을 지나는 직선의 기울기

$2a=3b-15$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{\text{O'F'}}=\overline{\text{OF}}=5$이므로

$\sqrt{(b-a)^2+(8-12)^2}=5$

$(b-a)^2=9$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 $0\le a\le 12$, $0\le b\le 12$의 범위에서 해를 구하면

$a=6$, $b=9$

→ ㉠에서 $a=\dfrac{3b-15}{2}$를 ㉡에 대입하여 풀면 $(b-15)^2=36$, $b-15=-6$ 또는 $b-15=6$ 이때 $0\le b\le 12$이므로 $b=9$

그러므로 O′$(6, 12)$, F′$(9, 8)$

STEP 3 직선 PQ의 방정식을 구한 후 m, n의 값을 구한다.

직선 PQ는 선분 OO′의 중점 $(3, 6)$과 선분 FF′의 중점 $(7, 4)$를 지나므로 직선 PQ의 방정식은

$y-6=\dfrac{4-6}{7-3}(x-3)$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{2}$

따라서 $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{15}{2}$이므로

$m+n=7$

답 ⑤

05 도형의 방정식(2)

개념 확인 문제

본문 73쪽

01 (1) $x^2+(y-2)^2=1$ (2) $x^2+y^2=25$

02 $(x+1)^2+(y+2)^2=41$

03 (1) 중심의 좌표: $(3, 0)$, 반지름의 길이: 3

(2) 중심의 좌표: $(1, 4)$, 반지름의 길이: $3\sqrt{3}$

04 $x^2+y^2-3x+y=0$

05 (1) $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ (2) $(x+4)^2+(y-5)^2=16$

(3) $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

06 (1) $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ (2) $k=\pm\sqrt{5}$

(3) $k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$

07 (1) $y=x\pm 2\sqrt{3}$ (2) $x-\sqrt{3}y=4$

(3) $x+y=-2$, $7x+y=10$

08 (1) $(1, 3)$ (2) $(6, -6)$

09 (1) $2x-y-11=0$ (2) $(x-5)^2+(y+3)^2=5$

10 (1) $(3, 7)$ (2) $(-3, -7)$

(3) $(-3, 7)$ (4) $(-7, 3)$

11 (1) $(x-5)^2+(y-6)^2=9$ (2) $(x+5)^2+(y+6)^2=9$

(3) $(x+5)^2+(y-6)^2=9$ (4) $(x+6)^2+(y-5)^2=9$

12 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$

내신&학평 유형 연습

본문 74~83쪽

01 25	02 10	03 14	04 1	05 24	06 ②
07 50	08 80	09 ④	10 ④	11 ④	12 31
13 22	14 ①	15 ①	16 256	17 ④	18 ①
19 ⑤	20 ⑤	21 ⑤	22 ④	23 18	24 ③
25 87	26 7	27 ⑤	28 ③	29 ②	30 ①
31 14	32 12	33 11	34 26	35 ①	36 ④
37 ⑤	38 ①	39 ⑤	40 56	41 ①	42 ②
43 ①	44 ④	45 ②	46 ②	47 ⑤	48 12
49 ④	50 ②				

01

$x^2+y^2-8x+6y=0$에서

$(x^2-8x+16)+(y^2+6y+9)=25$, $(x-4)^2+(y+3)^2=5^2$

즉, 원의 중심의 좌표가 $(4, -3)$이고 반지름의 길이가 5이므로 원의 넓이는 $\pi\times 5^2=25\pi$

따라서 $k=25$

답 25

02

구하는 원의 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ (a, b, c는 상수)라 하자.

이 원이 세 점 $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(-4, 4)$를 지나므로

$c=0$, $36+6a+c=0$, $32-4a+4b+c=0$

$c=0$을 대입한 후 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=-14$

그러므로 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x-14y=0$, 즉 $(x-3)^2+(y-7)^2=58$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(3, 7)$이므로 $p+q=3+7=10$ 　답 10

03

$\mathrm{A}(t, 0)$이라 하면 조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OA}}=4$이므로

$\mathrm{B}(0, t+4)$

$\angle\mathrm{AOB}=90°$이므로 선분 AB는 원의 지름이다.

따라서 원의 중심 C는 선분 AB의 중점이므로 원의 중심 C의 좌표는 $\left(\frac{t}{2}, \frac{t+4}{2}\right)$이다.

조건 (나)에 의하여 점 C가 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$\frac{t+4}{2}=\frac{3}{2}t$, $t=2$

$\mathrm{C}(1, 3)$이므로 $a=1$, $b=3$

또, $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(0, 6)$이므로 원의 반지름의 길이는

$r=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+6^2}=\sqrt{10}$

따라서 $a+b+r^2=1+3+(\sqrt{10})^2=14$ 　답 14

다른 풀이

원의 중심 $\mathrm{C}(a, b)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 $\mathrm{H}(a, 0)$, $\mathrm{I}(0, b)$

두 삼각형 COA, CBO는 이등변삼각형이므로 $\mathrm{A}(2a, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2b)$

조건 (가)에서 $2b-2a=4$ 　…… ㉠

조건 (나)에서 $b=3a$ 　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$이므로 $r^2=a^2+b^2=10$

따라서 $a+b+r^2=1+3+10=14$

04

원의 중심이 제2사분면에 있고 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(-r, r)$이다.

원의 중심이 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로

$r=r^2+r-1$, $r^2=1$

$r>0$이므로 $r=1$

중심이 $(-1, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$, 즉 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=1$이므로

$a+b+c=2+(-2)+1=1$

답 1

다른 풀이

원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$의 중심을 A라 하면 점 A는 제2사분면에 있고 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 점 A는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

또, 점 A는 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로

$x^2-x-1=-x$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

점 A의 x좌표는 음수이므로 $\mathrm{A}(-1, 1)$이다.

따라서 주어진 원의 방정식은

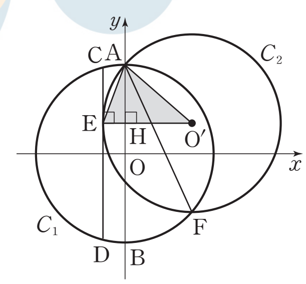
$(x+1)^2+(y-1)^2=1$, 즉 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=1$이므로

$a+b+c=2+(-2)+1=1$

05

점 O를 중심으로 하는 원을 C_1, 점 O′을 중심으로 하는 원을 C_2라 하고 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



직선 AB와 직선 EO′이 만나는 점을 H라 하면 직선 AB와 직선 CD가 평행하고, 직선 CD와 직선 EO′은 서로 수직이므로 직선 AB와 직선 EO′이 서로 수직이다.

삼각형 AEO′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EO'}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\times6\times(6-b)=12$

$6-b=4$, $b=2$

따라서 원 C_2는 중심이 $\mathrm{O'}(a, 2)$이고 반지름의 길이가 6인 원이므로 원 C_2의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2)^2=36$

원 C_2는 점 $\mathrm{A}(0, 6)$을 지나므로 $a^2+16=36$, $a^2=20$

따라서 $a^2+b^2=20+2^2=24$

답 24

06

직선 $x+2y+5=0$이 원 $(x-1)^2+y^2=r^2$에 접하므로 원의 중심 $(1, 0)$과 직선 $x+2y+5=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r와 같다. 즉,

$r=\frac{|1\times1+2\times0+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 　답 ②

다른 풀이

$x+2y+5=0$에서 $x=-2y-5$

$x=-2y-5$를 $(x-1)^2+y^2=r^2$에 대입하면

$\{(-2y-5)-1\}^2+y^2=r^2$, $5y^2+24y+36-r^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$\frac{D}{4}=12^2-5(36-r^2)=0$

$5r^2-36=0$, $r^2=\frac{36}{5}$

$r>0$이므로 $r=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

07

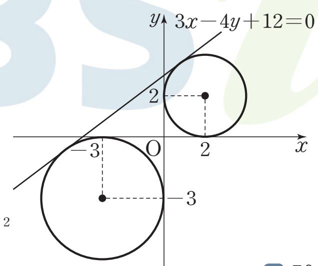
원의 중심의 좌표를 $(a,\ a)$라 하면 점 $(a,\ a)$와 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $|a|$와 같으므로

$$\frac{|3a-4a+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|a|,\ |-a+12|=5|a|$$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2+a-6=0$, $(a+3)(a-2)=0$

$a=-3$ 또는 $a=2$

두 원의 중심 A, B의 좌표가 $(2,\ 2)$, $(-3,\ -3)$이므로 두 원과 직선을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



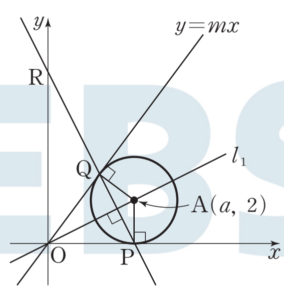
따라서

$\overline{AB}^2=\{2-(-3)\}^2+\{2-(-3)\}^2$

$=50$

답 50

08



원의 중심을 A라 하자.

점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 점 A의 좌표는 $(a,\ 2)$

원점 O와 점 A를 지나는 직선을 l_1이라 하면

직선 l_1의 방정식은 $y=\frac{2}{a}x$

직선 PQ는 점 P를 지나고 직선 l_1과 수직이므로

직선 PQ의 방정식은 $y=-\frac{a}{2}(x-a)$

직선 PQ가 y축과 만나는 점 R의 좌표는 $\left(0,\ \frac{a^2}{2}\right)$

삼각형 ROP의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{4}=16$, $a^3=64$, $a=4$

점 A$(4,\ 2)$와 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2,\ m(3m-4)=0$$

$m>0$이므로 $m=\frac{4}{3}$

따라서 $60m=60\times\frac{4}{3}=80$

답 80

다른 풀이

원의 중심을 A$(a,\ 2)$라 하자.

삼각형 ROP와 삼각형 OPA에서

$\angle\mathrm{ROP}=\angle\mathrm{OPA}=90^\circ$,

$\angle\mathrm{PRO}=\angle\mathrm{AOP}=90^\circ-\angle\mathrm{RPO}$이므로

삼각형 ROP와 삼각형 OPA는 닮음이다.

따라서 $\overline{RO}:\overline{OP}=\overline{OP}:\overline{PA}$

삼각형 ROP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times a\times\overline{RO}=16$, $\overline{RO}=\frac{32}{a}$

이므로

$\frac{32}{a}:a=a:2$

$a^2=\frac{64}{a}$, $a^3=64$, $a=4$

점 A$(4,\ 2)$와 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2,\ m(3m-4)=0$$

$m>0$이므로 $m=\frac{4}{3}$

따라서 $60m=60\times\frac{4}{3}=80$

09

원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=ax$가 만나는 점 A의 x좌표를 구하기 위해 $y=ax$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$x^2+(ax)^2=1,\ (a^2+1)x^2=1,\ x^2=\frac{1}{a^2+1},\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

점 A의 x좌표는 양수이므로 점 A의 좌표는

$$\mathrm{A}\left(\boxed{\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}},\ a\times\boxed{\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}}\right)$$

점 A를 지나고 직선 $y=ax$에 수직인 직선을 l이라 하자.

직선 l의 방정식은

$$y=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)+\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}=-\frac{1}{a}x+\boxed{\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}}$$

점 C는 직선 l과 x축이 만나는 점이므로 점 C의 좌표는 C$(\sqrt{a^2+1},\ 0)$이다.

점 D$(0,\ -1)$과 직선 AB, 즉 $ax-y=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|a\times0-(-1)|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times d=\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$이고

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{a^2+1}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$

이므로 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2}\times\sqrt{a^2+1}=\dfrac{a^2+1}{2}$

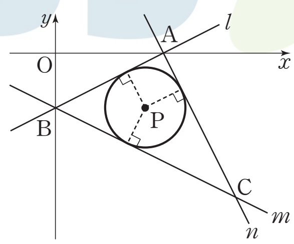
따라서 $\dfrac{S_2}{S_1}=2$를 만족시키는 양수 a의 값은 $a=\boxed{\sqrt{3}}$이다.

즉, $f(a)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $g(a)=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$, $k=\sqrt{3}$이므로

$f(k)\times g(k)=f(\sqrt{3})\times g(\sqrt{3})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 답 ④

10

두 점 A(6, 0), B(0, -3)을 지나는 직선을 l이라 하면



$l:y=\dfrac{-3-0}{0-6}(x-6)$

즉, $l:x-2y-6=0$

두 점 B(0, -3), C(10, -8)을 지나는 직선을 m이라 하면

$m:y-(-3)=\dfrac{-8-(-3)}{10-0}x$, 즉 $m:x+2y+6=0$

두 점 A(6, 0), C(10, -8)을 지나는 직선을 n이라 하면

$n:y=\dfrac{-8-0}{10-6}(x-6)$, 즉 $n:2x+y-12=0$

삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심 P의 좌표를 (a, b) $(0<a<10)$이라 하자.

점 P와 직선 l 사이의 거리와 점 P와 직선 m 사이의 거리가 같으므로

$\dfrac{|a-2b-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|a+2b+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}$, $|a-2b-6|=|a+2b+6|$

(i) $a-2b-6=a+2b+6$일 때, $4b=-12$에서 $b=-3$

(ii) $a-2b-6=-(a+2b+6)$일 때, $2a=0$에서 $a=0$

(i), (ii)에서 $0<a<10$이므로 $b=-3$ ······ ㉠

또한, 점 P와 직선 m 사이의 거리와 점 P와 직선 n 사이의 거리가 같으므로

$\dfrac{|a+2b+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|2a+b-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

이 식에 ㉠을 대입하면 $|a|=|2a-15|$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2-20a+75=0$, $(a-5)(a-15)=0$

$0<a<10$이므로 $a=5$

따라서 P(5, -3)이므로 선분 OP의 길이는

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$ 답 ④

11

두 점 A(0, $\sqrt{3}$), B(1, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{0-\sqrt{3}}{1-0}x+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$

원 C의 중심 (1, 10)과 직선 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|\sqrt{3}+10-\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}=5$

이고, 원 C의 반지름의 길이는 3이므로 원 C 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리를 h라 하면

$2\le h\le 8$

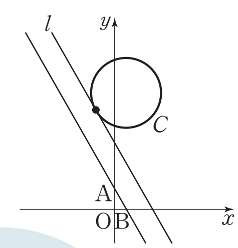
선분 AB의 길이는 $\sqrt{1+3}=2$이므로 삼각형 ABP의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times2\times h=h$

S가 자연수이려면 h가 자연수이어야 한다.

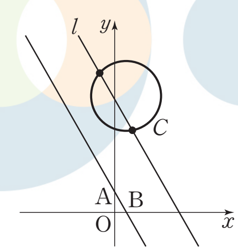
직선 AB와 평행한 직선 중에서 원 C의 중심으로부터의 거리가 $|5-h|$이고 직선 AB와의 거리가 h인 직선을 l이라 하자.

(i) $h=2$일 때



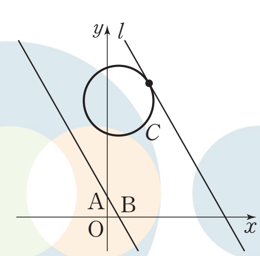
직선 l과 원 C는 한 점에서 만나므로 점 P의 개수는 1

(ii) $3\le h\le 7$일 때



직선 l과 원 C는 서로 다른 두 점에서 만나므로 점 P의 개수는 $5\times2=10$

(iii) $h=8$일 때



직선 l과 원 C는 한 점에서 만나므로 점 P의 개수는 1

(i), (ii), (iii)에서 모든 점 P의 개수는 $1+10+1=12$

답 ④

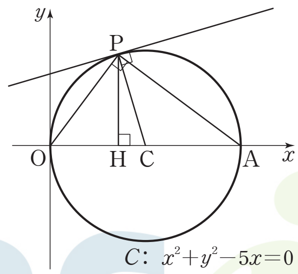
12

원의 방정식 $C:x^2+y^2-5x=0$을 변형하면

$\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$

즉, 원 C의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{5}{2}$이다.

오른쪽 그림과 같이 원 C가 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



점 P가 원 C 위의 점이고 선분 OA가 원 C의 지름이므로

$\angle \mathrm{OPA}=90^\circ$

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OP}}=3$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=5$이므로 직각삼각형 OAP에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

두 삼각형 OAP와 OPH에서

$\angle \mathrm{OPA}=\angle \mathrm{OHP}=90^\circ$, $\angle \mathrm{AOP}=\angle \mathrm{POH}$(공통)이므로

두 삼각형 OAP와 OPH는 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OH}}$에서 $5:3=3:\overline{\mathrm{OH}}$

$5\overline{\mathrm{OH}}=9$, $\overline{\mathrm{OH}}=\frac{9}{5}$

또, $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{HP}}$에서 $3:4=\frac{9}{5}:\overline{\mathrm{HP}}$

$3\overline{\mathrm{HP}}=\frac{36}{5}$, $\overline{\mathrm{HP}}=\frac{12}{5}$

그러므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$이다.

두 점 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, $\mathrm{P}\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$를 지나는 직선 CP의 기울기는

$$\frac{\frac{12}{5}-0}{\frac{9}{5}-\frac{5}{2}}=-\frac{24}{7}$$

점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{7}{24}$이다.

따라서 $p=24$, $q=7$이므로 $p+q=31$ 답 31

참고

점 P의 좌표를 구한 후, 평행이동을 이용하거나 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 점 P에서의 접선의 기울기를 구할 수도 있다.

[점과 직선 사이의 거리 공식 이용]

점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m\left(x-\frac{9}{5}\right)+\frac{12}{5}$, 즉 $5mx-5y-9m+12=0$

이 직선이 원 $C:\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$에 접하므로 원의 중심 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{2}, 0\right)$과 직선 $5mx-5y-9m+12=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\frac{5}{2}$와 같다. 즉,

$$\frac{\left|\frac{25}{2}m-9m+12\right|}{\sqrt{(5m)^2+(-5)^2}}=\frac{5}{2},\ 25\sqrt{m^2+1}=|7m+24|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$576m^2-336m+49=0$, $(24m-7)^2=0$

$m=\frac{7}{24}$

따라서 $p=24$, $q=7$이므로 $p+q=31$

[평행이동 이용]

원 $C:\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$과 점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$를 x축의 방향으로 $-\frac{5}{2}$만큼 평행이동한 원과 점을 각각 C_1, P_1이라 하면

$C_1: x^2+y^2=\frac{25}{4}$, $\mathrm{P}_1\left(-\frac{7}{10}, \frac{12}{5}\right)$

원 C_1 위의 점 P_1에서의 접선을 l이라 하면 직선 l의 방정식은

$-\frac{7}{10}x+\frac{12}{5}y=\frac{25}{4}$이므로 직선 l의 기울기는 $\frac{7}{24}$이다.

이때 직선 l은 원 C 위의 점 P에서의 접선과 서로 평행하므로 원 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{7}{24}$이다.

따라서 $p=24$, $q=7$이므로 $p+q=31$

13

점 $(3, 4)$를 지나면서 원점에서의 거리가 최대인 직선 l은 원점과 점 $(3, 4)$를 지나는 직선과 수직으로 만나야 한다.

원점과 점 $(3, 4)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

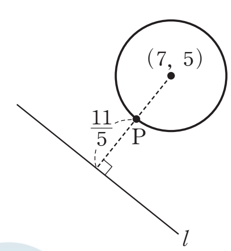
기울기가 $-\frac{3}{4}$이고 점 $(3, 4)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$, 즉 $3x+4y-25=0$

원 $(x-7)^2+(y-5)^2=1$의 중심 $(7, 5)$와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|3\times7+4\times5-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 오른쪽 그림과 같이 원 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값 m은



$m=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$

따라서 $10m=22$

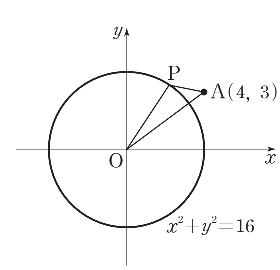
답 22

14

점 A의 좌표가 $(4, 3)$이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

점 P는 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=4$

오른쪽 그림과 같이 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}\le\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PA}}$가 성립하므로

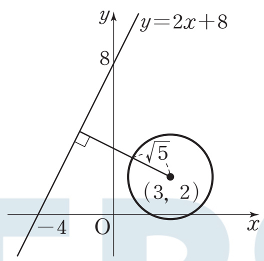


$\overline{\mathrm{AP}}\ge\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OP}}=5-4=1$

따라서 선분 AP의 길이의 최솟값은 1이다.

답 ①

15



점 $(3, 2)$와 직선 $2x-y+8=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2\times3+(-1)\times2+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원 위의 점과 직선 $2x-y+8=0$ 사이의 거리의 최솟값은

$\dfrac{12\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

답 ①

16

두 점 $A(5, 12)$, $B(a, b)$에 대하여 선분 AB의 길이가 3이므로

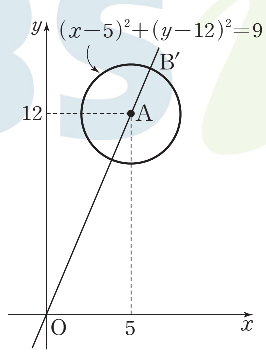
$\sqrt{(a-5)^2+(b-12)^2}=3$

$(a-5)^2+(b-12)^2=9$

즉, $\overline{AB}=3$을 만족시키는 점 B는 원 $(x-5)^2+(y-12)^2=9$ 위의 점이다.

원점 O에 대하여 $a^2+b^2=\overline{OB}^2$이므로 $\overline{OB}$의 길이가 최대일 때 a^2+b^2의 값이 최댓값을 갖는다.

직선 OA가 원과 만나는 두 점 중 원점에서 더 멀리 있는 점을 B′이라 하면 선분 OB의 길이의 최댓값은 선분 OB′의 길이와 같다.



$\overline{OB'}=\overline{OA}+\overline{AB'}$

$=\sqrt{5^2+12^2}+3$

$=13+3=16$

이므로 선분 OB의 길이의 최댓값은 16이다.

따라서 a^2+b^2의 최댓값은 $16^2=256$이다.

답 256

17

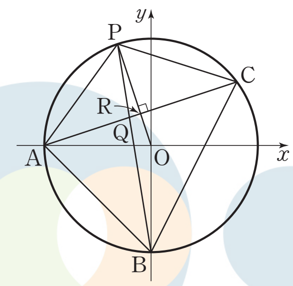
ㄱ. 직선 AC의 방정식은 $x-3y+5=0$이므로 점 B와 직선 AC 사이의 거리는 $2\sqrt{10}$ (참)

ㄴ. 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 AC와 평행할 때, 사각형 PABC의 넓이가 최대가 된다. …… (*)

선분 AC와 두 선분 PB, PO가 만나는 점을 각각 Q, R라 하자.

원 위의 점 P에서의 접선과 직선 AC는 평행하고, 원의 반지름 OP와 각각 서로 수직이다.

삼각형 PQR에서 $\angle R=90°$, $\angle Q<90°$이므로 직선 PB와 직선 AC는 서로 수직이 아니다. (거짓)



ㄷ. 사각형 PABC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ACP의 넓이의 합과 같다.

삼각형 ABC의 넓이는 $\overline{AC}=3\sqrt{10}$이고 ㄱ에 의하여

$\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{10}\times2\sqrt{10}=30$ …… ㉠

삼각형 ACP의 넓이의 최댓값은 (*)에 의하여

$\overline{OR}=\dfrac{|1\times0+(-3)\times0+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\overline{PR}=5-\overline{OR}=5-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{10}\times\left(5-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)=\dfrac{15(\sqrt{10}-1)}{2}$ …… ㉡

사각형 PABC의 넓이의 최댓값은 ㉠, ㉡에 의하여

$\dfrac{15(3+\sqrt{10})}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

답 ④

18

원의 방정식 $x^2+y^2-2x-4y+k=0$을 변형하면

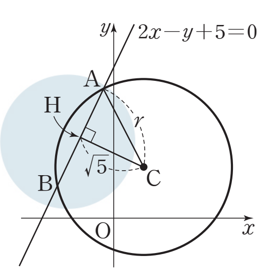
$(x-1)^2+(y-2)^2=5-k$

이 원의 중심을 C, 반지름의 길이를 r라 하면 $C(1, 2)$이고

$r^2=5-k$ …… ㉠

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AB}=4$이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=2$



점 $C(1, 2)$와 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리는

$\overline{CH}=\dfrac{|2\times1-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

따라서 직각삼각형 CAH에서

$\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{CH}^2$

$r^2=2^2+(\sqrt{5})^2=9$

㉠에서 $9=5-k$이므로

$k=-4$

답 ①

19

조건 ㈎에서 원 $C : x^2+y^2-4x-2ay+a^2-9=0$이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$a^2-9=0$, $a^2=9$

$a=-3$ 또는 $a=3$

(i) $a=-3$일 때, 원 C의 방정식은

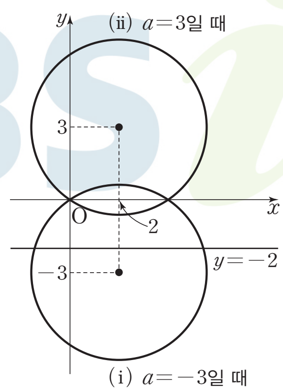
$x^2+y^2-4x+6y=0$

즉, $(x-2)^2+(y+3)^2=13$

(ii) $a=3$일 때, 원 C의 방정식은

$x^2+y^2-4x-6y=0$

즉, $(x-2)^2+(y-3)^2=13$

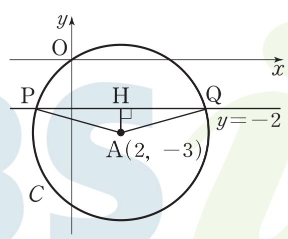


이때 $a=3$이면 원 C는 직선 $y=-2$와 만나지 않으므로 조건 ㈏에 의하여

$a=-3$

따라서 원 C의 중심은 $\mathrm{A}(2, -3)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 $\mathrm{A}(2, -3)$에서 직선 $y=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 C와 직선 $y=-2$가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.



$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{AH}}=1$이므로

직각삼각형 AHP에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=2\sqrt{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PH}}=4\sqrt{3}$

답 ⑤

참고

원 $C : (x-2)^2+(y+3)^2=13$과 직선 $y=-2$가 만나는 두 점의 좌표를 직접 구해 다음과 같은 방법으로도 원 C와 직선이 만나는 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

$(x-2)^2+(y+3)^2=13$에 $y=-2$를 대입하면

$(x-2)^2+(-2+3)^2=13$, $(x-2)^2=12$

$x=2\pm2\sqrt{3}$

따라서 원 C와 직선 $y=-2$가 만나는 두 점의 좌표는 각각 $(2-2\sqrt{3}, -2)$, $(2+2\sqrt{3}, -2)$이므로 이 두 점 사이의 거리는

$(2+2\sqrt{3})-(2-2\sqrt{3})=4\sqrt{3}$

20

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식은 $3x+y=10$

이 직선이 점 $(1, a)$를 지나므로

$3+a=10$

따라서 $a=7$

답 ⑤

21

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) $(x_1>0, y_1>0)$이라 하자.

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1$

이 직선이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3y_1=1$, $y_1=\dfrac{1}{3}$

또, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=1$ ...... ㉠

$y_1=\dfrac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $x_1^2=\dfrac{8}{9}$

$x_1>0$이므로 $x_1=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 점 P의 x좌표는 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

답 ⑤

다른 풀이 1

점 P에서의 접선의 기울기를 m이라 하면 이 직선이 점 $(0, 3)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y=mx+3$

원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=mx+3$, 즉 $mx-y+3=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\dfrac{|3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $\sqrt{m^2+1}=3$

양변을 제곱하여 정리하면 $m^2=8$

직선이 원 $x^2+y^2=1$과 제1사분면에서 접하므로 $m<0$

그러므로 $m=-2\sqrt{2}$

점 P의 x좌표를 구하기 위해 $y=-2\sqrt{2}x+3$을 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(-2\sqrt{2}x+3)^2=1$, $9x^2-12\sqrt{2}x+8=0$

$(3x-2\sqrt{2})^2=0$

$x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 점 P의 x좌표는 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

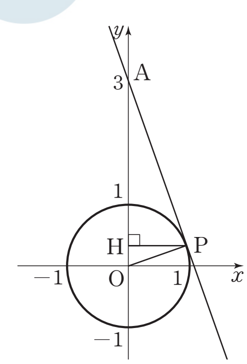
다른 풀이 2

$\mathrm{A}(0, 3)$이라 하고, 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

직선 AP가 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 접하므로

$\angle\mathrm{OPA}=90°$

직각삼각형 OPA에서 $\overline{\mathrm{OA}}=3$, $\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로



$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

이때 삼각형 OPA의 넓이를 이용하면

$\overline{OA}\times\overline{PH}=\overline{OP}\times\overline{AP}$

$3\overline{PH}=2\sqrt{2}$

$\overline{PH}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

22

원 $C: x^2+y^2=4$ 위의 제1사분면 위의 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) $(x_1>0, y_1>0)$이라 하자.

원 C 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 x축과 만나는 점 B의 좌표는 $\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$이고, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서 x축에 내린 수선의 발이 H이므로 점 H의 x좌표는 x_1이다.

$2\overline{AH}=\overline{HB}$에서

$2(x_1+2)=\frac{4}{x_1}-x_1,\ 3{x_1}^2+4x_1-4=0$

$(x_1+2)(3x_1-2)=0$

$x_1>0$이므로 $x_1=\frac{2}{3}$에서 $\mathrm{B}(6, 0)$

또, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 원 C 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=4$

$x_1=\frac{2}{3}$를 ${x_1}^2+{y_1}^2=4$에 대입하면 ${y_1}^2=\frac{32}{9}$

$y_1>0$이므로 $y_1=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times8\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

답 ④

23

점 $(0, 3)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3y_1=1,\ y_1=\frac{1}{3}$

또, 접점 (x_1, y_1)이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=1$

$y_1=\frac{1}{3}$을 ${x_1}^2+{y_1}^2=1$에 대입하면

$x_1^2=\frac{8}{9},\ x_1=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

즉, 접선의 방정식은 ㉠에서

$\frac{2\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{3}y=1,\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{3}y=1$

이므로 이 두 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 각각

$x=-\frac{3}{2\sqrt{2}},\ x=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

따라서 $k=-\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 또는 $k=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 이므로

$16k^2=16\times\frac{9}{8}=18$

답 18

다른 풀이 1

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(0, 3)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=mx+3$, 즉 $mx-y+3=0$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y+3=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\frac{|3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ \sqrt{m^2+1}=3$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2=8,\ m=\pm2\sqrt{2}$

즉, 접선의 방정식은

$y=2\sqrt{2}x+3,\ y=-2\sqrt{2}x+3$

이므로 이 두 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 각각

$x=-\frac{3}{2\sqrt{2}},\ x=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

따라서 $k=-\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 또는 $k=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 이므로

$16k^2=16\times\frac{9}{8}=18$

다른 풀이 2

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(0, 3)$을 지나는 접선의 방정식은

$y=mx+3$

이 식을 $x^2+y^2=1$에 대입하여 정리하면

$(m^2+1)x^2+6mx+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$\frac{D}{4}=(3m)^2-8(m^2+1)=0$

$m^2-8=0,\ m=\pm2\sqrt{2}$

즉, 접선의 방정식은

$y=2\sqrt{2}x+3,\ y=-2\sqrt{2}x+3$

이므로 이 두 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 각각

$x=-\frac{3}{2\sqrt{2}},\ x=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

따라서 $k=-\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 또는 $k=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 이므로

$16k^2=16\times\frac{9}{8}=18$

보충 개념

원 밖의 점 P에서 원에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 방법을 이용한다.

(1) 원 위의 점에서의 접선의 방정식 이용

➡ 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 할 때, 이 점에서의 접선이 점 P를 지남을 이용한다.

(2) 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

➡ 접선의 기울기를 m이라 할 때, 기울기가 m이고 점 P를 지나는 접선과 원의 중심 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

(3) 판별식 이용

➡ 접선의 기울기를 m이라 할 때, 기울기가 m이고 점 P를 지나는 접선의 방정식과 원의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 D가 $D=0$임을 이용한다.

24

점 $(2, -4)$에서 원 $x^2+y^2=2$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=2$ …… ㉠

이 직선이 점 $(2, -4)$를 지나므로

$2x_1-4y_1=2$

$x_1=2y_1+1$ …… ㉡

또, 접점 (x_1, y_1)이 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=2$

㉡을 $x_1^2+y_1^2=2$에 대입하여 정리하면

$5y_1^2+4y_1-1=0$, $(y_1+1)(5y_1-1)=0$

$y_1=-1$ 또는 $y_1=\frac{1}{5}$

$y_1=-1$을 ㉡에 대입하면 $x_1=-1$, $y_1=\frac{1}{5}$을 ㉡에 대입하면 $x_1=\frac{7}{5}$

즉, 접선의 방정식은 ㉠에서

$-x-y=2$, $\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}y=2$

이므로 이 두 접선이 y축과 만나는 두 점의 좌표는 각각

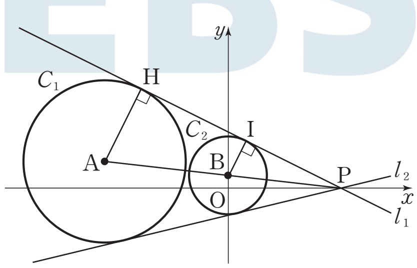
$(0, -2)$, $(0, 10)$

따라서 $a=-2$, $b=10$ 또는 $a=10$, $b=-2$이므로

$a+b=8$ 답 ③

25

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 A, B라 하면 A$(-7, 2)$, B$(0, b)$이다.



위의 그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}$는 원 C_1의 반지름의 길이이고, $\overline{\mathrm{BI}}$는 원 C_2의 반지름의 길이이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BI}}=\sqrt{5}$

두 삼각형 PAH와 PBI에서

$\angle\mathrm{PHA}=\angle\mathrm{PIB}=90^\circ$, $\angle\mathrm{APH}=\angle\mathrm{BPI}$(공통)이므로

두 삼각형 PAH와 PBI는 서로 닮음이고,

닮음비는 $\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{BI}}=2\sqrt{5}:\sqrt{5}=2:1$이다.

점 B는 선분 AP의 중점이므로

$\frac{(-7)+a}{2}=0$, $\frac{2+0}{2}=b$에서 $a=7$, $b=1$

즉, B$(0, 1)$, P$(7, 0)$이다.

점 P$(7, 0)$을 지나고 두 원 C_1, C_2에 모두 접하는 직선의 방정식을 $y=m(x-7)$ (m은 상수)라 하면 점 B$(0, 1)$과 직선 $y=m(x-7)$, 즉 $mx-y-7m=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|m\times0-1\times1-7m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|-7m-1|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$22m^2+7m-2=0$, $(2m+1)(11m-2)=0$

$m=-\frac{1}{2}$ 또는 $m=\frac{2}{11}$

그러므로 두 직선 l_1, l_2의 기울기의 곱은

$c=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{11}=-\frac{1}{11}$

따라서

$11(a+b+c)=11\left\{7+1+\left(-\frac{1}{11}\right)\right\}=87$ 답 87

26

점 $(-4, 3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(-4+a, 3+b)$이므로

$-4+a=1$, $3+b=5$

즉, $a=5$, $b=2$

따라서 $a+b=7$ 답 7

27

점 P(a, a^2)을 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는 $\left(a-\frac{1}{2}, a^2+2\right)$이다.

점 $\left(a-\frac{1}{2}, a^2+2\right)$가 직선 $y=4x$ 위에 있으므로

$a^2+2=4\left(a-\frac{1}{2}\right)$, $(a-2)^2=0$

따라서 $a=2$ 답 ⑤

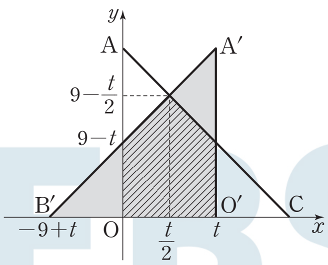
28

직선 AB의 방정식은 $y=x+9$

직선 AC의 방정식은 $y=-x+9$

직선 A′B′의 방정식은 $y=x-t+9$

(i) $0<t<9$일 때, 삼각형 OCA의 내부와 삼각형 O′A′B′의 내부의 공통부분은 [그림 1]의 빗금 친 부분과 같다.

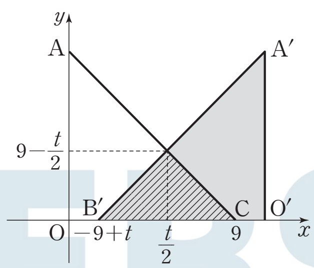


[그림 1]

$S(t)=2\times\left\{\left(\frac{1}{2}\times\left(9-t+9-\frac{t}{2}\right)\times\frac{t}{2}\right\}=-\frac{3}{4}(t-6)^2+27$

따라서 $t=6$일 때, $S(t)$의 최댓값은 27이다.

(ii) $9\le t<18$일 때, 삼각형 OCA의 내부와 삼각형 O′A′B′의 내부의 공통부분은 [그림 2]의 빗금 친 부분과 같다.



[그림 2]

$S(t)=\frac{1}{2}\times(18-t)\times\left(9-\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{4}(t-18)^2$

따라서 $t=9$일 때, $S(t)$의 최댓값은 $\frac{81}{4}$이다.

(i), (ii)에서 $S(t)$의 최댓값은 27이다.

답 ③

29

직선 $2x+y+5=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-2)+(y+1)+5=0$, 즉 $2x+y+2=0$

이 직선이 직선 $2x+y+a=0$과 일치하므로 $a=2$

답 ②

30

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$은 중심의 좌표가 (a, b)이고 반지름의 길이가 b이므로 원 C는 중심의 좌표가 $(a+3, b-8)$이고 반지름의 길이가 b이다.

원 C가 x축과 y축에 동시에 접하므로

$a+3=|b-8|=b$

$b-8\neq b$이므로 $-b+8=b$에서 $b=4$

$a+3=4$이므로 $a=1$

따라서 $a+b=5$

답 ①

31

직선 $y=2x+k$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=2(x-2)+k$, 즉 $2x-y-7+k=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=5$와 한 점에서 만나므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x-y-7+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같다. 즉, $\frac{|-7+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|-7+k|=5$

$-7+k=-5$ 또는 $-7+k=5$

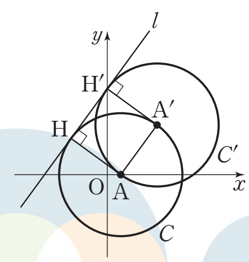
$k=2$ 또는 $k=12$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 14이다.

답 14

32

두 원 C, C'에 대하여 조건 (가)에 의하여 그래프는 그림과 같다.



두 원 C, C'의 중심을 각각 A, A′이라 하자.

원 C의 중심은 $A(1, 0)$이므로 조건 (나)에 의하여

$r=\frac{|4\times1-3\times0+21|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$

원 C'의 방정식은 $(x-a-1)^2+(y-b)^2=25$이고 조건 (가)에서 점 $A(1, 0)$을 지나므로

$(1-a-1)^2+(0-b)^2=25$

$a^2+b^2=25$ ...... ㉠

직선 $4x-3y+21=0$을 l이라 하고 두 점 A, A′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면

$\overline{AH}=\overline{A'H'}$, $\overline{AH}\perp l$, $\overline{A'H'}\perp l$

이므로 직선 AA′은 직선 l과 평행하다.

직선 l의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로

$\frac{b-0}{(1+a)-1}=\frac{4}{3}$, $b=\frac{4}{3}a$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2+\left(\frac{4}{3}a\right)^2=25$, $\frac{25}{9}a^2=25$, $a^2=9$

$a>0$, $b>0$이므로

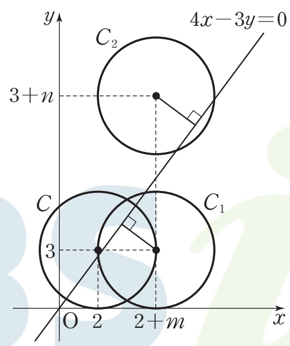
$a=3$, $b=4$

따라서

$a+b+r=3+4+5=12$

답 12

33



원 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=9$의 중심의 좌표는 $(2,\ 3)$이고 반지름의 길이는 3이므로 원 C를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 원 C_1의 중심의 좌표는 $(2+m,\ 3)$이고 반지름의 길이는 3이다.

조건 ㈎에서 원 C_1은 직선 l과 서로 다른 두 점에서 만나므로 점 $(2+m,\ 3)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다. 즉,

$$\frac{|4(2+m)-3\times3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3,\ |4m-1|<15$$

$$-15<4m-1<15,\ -14<4m<16,\ -\frac{7}{2}<m<4$$

따라서 조건 ㈎를 만족시키는 자연수 m의 값은 1, 2, 3이다.

한편, 원 C_1을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원 C_2의 중심의 좌표는 $(2+m,\ 3+n)$이고 반지름의 길이는 3이다.

이때 조건 ㈏에서 원 C_2는 직선 l과 서로 다른 두 점에서 만나므로 점 $(2+m,\ 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다. 즉,

$$\frac{|4(2+m)-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3,\ |4m-3n-1|<15$$

$$-15<4m-3n-1<15$$

$$\frac{4m-16}{3}<n<\frac{4m+14}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

m의 값에 따라 나누어 생각해 보면 다음과 같다.

(ⅰ) $m=1$일 때, ㉠에서 $-4<n<6$이므로 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5이고, 이때의 $m+n$의 최댓값은 6이다.

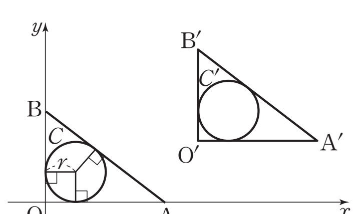
(ⅱ) $m=2$일 때, ㉠에서 $-\frac{8}{3}<n<\frac{22}{3}$이므로 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이고, 이때의 $m+n$의 최댓값은 9이다.

(ⅲ) $m=3$일 때, ㉠에서 $-\frac{4}{3}<n<\frac{26}{3}$이므로 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이고, 이때의 $m+n$의 최댓값은 11이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $m+n$의 최댓값은 11이다.

답 11

34



위의 그림과 같이 두 삼각형 OAB, O′A′B′에 내접하는 원을 각각 C, C'이라 하자.

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 원 C는 x축, y축에 모두 접하고 제1사분면에 중심이 있으므로 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이다.

한편, 두 점 A$(4,\ 0)$, B$(0,\ 3)$을 지나는 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1,\ 즉\ 3x+4y-12=0$$

원 C가 직선 AB에 접하므로 원의 중심 $(r,\ r)$와 직선 AB 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r와 같다. 즉,

$$\frac{|3r+4r-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r,\ |7r-12|=5r$$

$7r-12=5r$ 또는 $7r-12=-5r$

$r=6$ 또는 $r=1$

$0<r<3$이므로 $r=1$

그러므로 원 C의 방정식은 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

점 A$(4,\ 0)$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 A′$(9,\ 2)$가 되므로 이 평행이동에 의하여 원 C가 평행이동한 원 C'의 방정식은

$\{(x-5)-1\}^2+\{(y-2)-1\}^2=1$

$(x-6)^2+(y-3)^2=1$

$x^2+y^2-12x-6y+44=0$

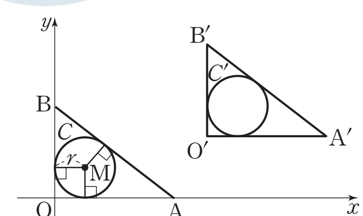
따라서 $a=-12$, $b=-6$, $c=44$이므로

$a+b+c=26$

답 26

참고

내접원 C의 반지름의 길이 r를 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.



삼각형 OAB에 내접하는 원의 중심을 M이라 하면 점 M에서 세 변 OA, OB, AB에 내린 수선의 길이는 원의 반지름의 길이 r와 같으므로

$\triangle$OAB$=\triangle$MOA$+\triangle$MAB$+\triangle$MBO

$$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times r$$

$$6=\frac{1}{2}(4+5+3)r,\ 6r=6,\ r=1$$

35

점 $(3,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는 $(2,\ 3)$

점 A$(2,\ 3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 $(-2,\ -3)$

따라서 선분 AB의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(-3-3)^2}=2\sqrt{13}$

답 ①

36

직선 OA의 기울기는 $\frac{3-0}{1-0}=3$이고 직선 OB의 기울기를 m이라 하면

조건 (가)에서 두 직선 OA, OB가 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱이 -1이어야 한다.

$3m=-1$에서 $m=-\frac{1}{3}$

즉, $a\neq0$이고 직선 OB의 기울기는 $\frac{5-0}{a-0}=\frac{5}{a}$이므로

$\frac{5}{a}=-\frac{1}{3}$, $a=-15$

그러므로 점 B의 좌표는 $(-15,\ 5)$이다.

또한, 조건 (나)에서 두 점 B, C가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 $b=5$, $c=-15$

$A(1,\ 3)$, $C(5,\ -15)$이므로 직선 AC의 방정식은

$y-3=\frac{-15-3}{5-1}(x-1)$, 즉 $y=-\frac{9}{2}x+\frac{15}{2}$

따라서 직선 AC의 y절편은 $\frac{15}{2}$이다.

답 ④

37

직선 $3x+4y-12=0$이 x축, y축과 만나는 점은 각각 $A(4,\ 0)$, $B(0,\ 3)$이므로 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times0+1\times4}{2+1},\ \frac{2\times3+1\times0}{2+1}\right)$, 즉 $\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$

점 $P\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$를 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점은 각각

$Q\left(\frac{4}{3},\ -2\right)$, $R\left(-\frac{4}{3},\ 2\right)$이므로 삼각형 RQP의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}}{3},\ \frac{2-2+2}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{3}\right)$

따라서 $a=\frac{4}{9}$, $b=\frac{2}{3}$이므로 $a+b=\frac{10}{9}$

답 ⑤

38

직선 $y=ax-6$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=ax-6$, 즉 $y=-ax+6$

이 직선이 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$4=-2a+6$, $2a=2$

따라서 $a=1$

답 ①

39

직선 $3x-2y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-3x+2y+a=0$

이 직선이 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$-9+4+a=0$

따라서 $a=5$

답 ⑤

40

원의 방정식 $x^2+y^2+10x-12y+45=0$을 변형하면

$(x+5)^2+(y-6)^2=16$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(-5,\ 6)$이다.

원 C_1의 중심은 점 $(-5,\ 6)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(5,\ -6)$이다.

원 C_2의 중심은 점 $(5,\ -6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(5,\ 6)$이다.

따라서 $a=5$, $b=6$이므로 $10a+b=50+6=56$

답 56

41

직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y-2x=9$, 즉 $2x-y+9=0$ …… ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$에 접하므로 원의 중심 $(3,\ -5)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{k}$와 같다.

즉, $\frac{|2\times3-1\times(-5)+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{20}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}=\sqrt{k}$

따라서 $k=(4\sqrt{5})^2=80$

답 ①

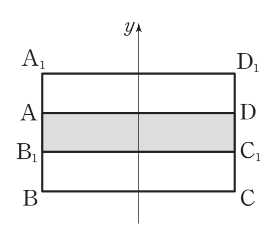
42

네 점 A, B, C, D를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 네 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1이라 하고, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 네 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 하자.

이때 제1사분면 위의 점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$A(-a,\ b)$, $B(-a,\ -b)$, $C(a,\ -b)$

직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 원점이고 각 변은 x축 또는 y축에 평행하며, 조건 (가)에서 $\overline{AD}>\overline{AB}>2$이므로 두 직사각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$은 [그림 1]과 같다.

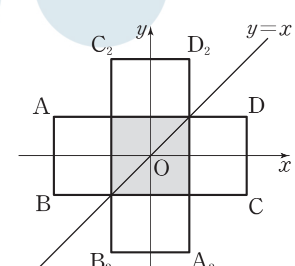


[그림 1]

$\overline{AD}=2a$, $\overline{AB_1}=2b-2$이고, 조건 (나)에서 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 직사각형 ABCD의 내부와의 공통부분의 넓이가 18이므로

$2a\times(2b-2)=18$, $a(b-1)=\frac{9}{2}$ …… ㉠

한편, 직사각형 $A_2D_2C_2B_2$는 직사각형 ABCD를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이므로 두 직사각형 ABCD, $A_2D_2C_2B_2$는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

조건 (다)에서 직사각형 $A_2D_2C_2B_2$의 내부와 직사각형 ABCD의 내부와의 공통부분의 넓이가 16이고, [그림 2]에서 공통부분은 한 변의 길이가 선분 AB의 길이와 같은 정사각형

이므로

$(2b)^2=16$, $b^2=4$

$b>0$이므로 $b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=\frac{9}{2}$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AB}}=2a\times 2b=4ab$

$=4\times\frac{9}{2}\times 2=36$

답 ②

43

직선 $y=-\frac{1}{2}x-3$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}(x-a)-3$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l의 방정식은

$x=-\frac{1}{2}(y-a)-3$, 즉 $2x+y-a+6=0$

직선 l이 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=5$에 접하려면 원의 중심 $(-1,\ 3)$과 직선 l 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$와 같아야 한다.

즉, $\frac{|2\times(-1)+1\times 3-a+6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$, $|7-a|=5$

$7-a=5$ 또는 $7-a=-5$

$a=2$ 또는 $a=12$

따라서 모든 a의 값의 합은 $2+12=14$

답 ①

44

점 $\mathrm{A}(-3,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 $(4,\ -3)$

점 $\mathrm{B}(4,\ -3)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점 C의 좌표는 $(6,\ -3+k)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-3-4}{4-(-3)}\{x-(-3)\}$

$y=-x+1$ ⋯⋯ ㉠

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 점 C는 직선 ㉠ 위의 점이다.

$-3+k=-5$

따라서 $k=-2$

답 ④

45

원 O_1은 중심이 $(4,\ 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 원 O_1의 방정식은

$(x-4)^2+(y-2)^2=4$

원 O_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4)^2=4$

이 원을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4-a)^2=4$

이므로 원 O_2의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4-a)^2=4$

원 O_1과 원 O_2의 중심을 각각 C, D라 하면 두 원 O_1, O_2가 만나는 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 선분 AB는 선분 CD에 의하여 수직이등분된다.

선분 AB와 선분 CD가 만나는 점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$

원 O_1과 원 O_2의 반지름의 길이가 2이므로 직각삼각형 ACH에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$, $\overline{\mathrm{CD}}=2\,\overline{\mathrm{CH}}=2$

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{(2-4)^2+(a+4-2)^2}=2$

양변을 제곱하여 정리하면

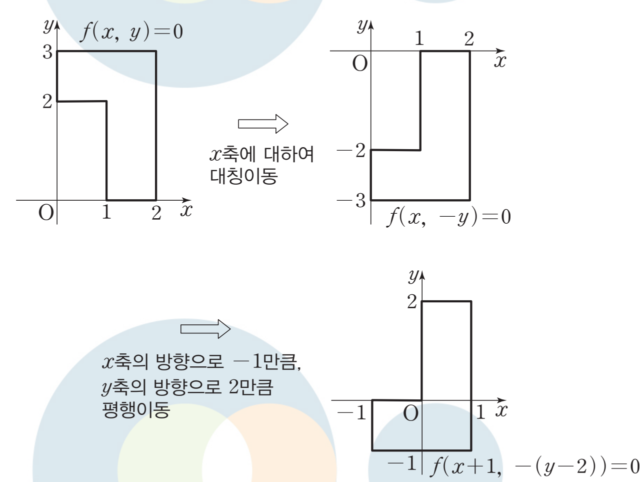
$(a+2)^2=0$

따라서 $a=-2$

답 ②

46

방정식 $f(x+1,\ 2-y)=0$, 즉 $f(x+1,\ -(y-2))=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 이를 순서대로 나타내면 다음 그림과 같다.



답 ②

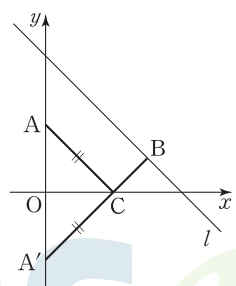
다른 풀이

방정식 $f(x+1,\ -y+2)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 도형이다.

47

점 B가 직선 $l:y=-x+2$ 위의 점이므로 점 B의 좌표는 $(a,\ -a+2)$이다.

오른쪽 그림과 같이 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′$(0,\ -1)$



$\overline{AC}=\overline{A'C}$이므로

$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{A'C}+\overline{BC}\ge\overline{A'B}$이고,

$\overline{A'B}$가 최소일 때 $\overline{A'B}^2$도 최소이다.

$$\begin{aligned}\overline{A'B}^2&=a^2+(-a+3)^2\\&=2a^2-6a+9\\&=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

이때 $0<a<2$이므로 $a=\frac{3}{2}$에서 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 값은 최소이다.

따라서 $b=-a+2=\frac{1}{2}$이므로

$a^2+b^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

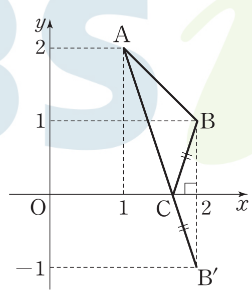
답 ⑤

48

삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $\overline{AC}+\overline{CB}+\overline{BA}$이고

$\overline{BA}=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$로 일정하므로 $\overline{AC}+\overline{CB}$의 값이 최소가 되면 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 최소가 된다.

오른쪽 그림과 같이 점 B$(2,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



B′$(2,\ -1)$

$\overline{CB}=\overline{CB'}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AC}+\overline{CB}&=\overline{AC}+\overline{CB'}\\&\ge\overline{AB'}\\&=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}\end{aligned}$$

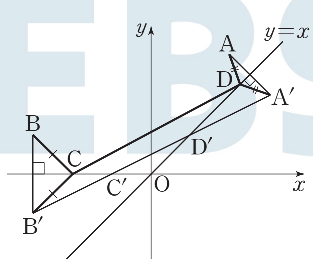
따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}+\sqrt{10}$이므로

$a=2,\ b=10$ 또는 $a=10,\ b=2$

그러므로 $a+b=12$

답 12

49



점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 점 A′의 좌표는 $(3,\ 2)$

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(-3,\ -1)$

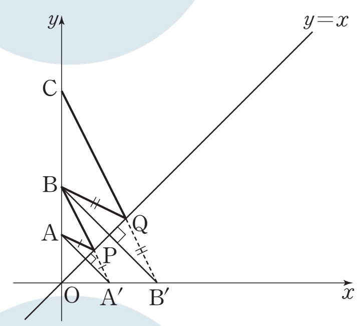
$\overline{AD}=\overline{A'D}$, $\overline{BC}=\overline{B'C}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC}&=\overline{A'D}+\overline{DC}+\overline{CB'}\\&\ge\overline{A'D'}+\overline{D'C'}+\overline{C'B'}\\&=\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(-3-3)^2+(-1-2)^2}\\&=3\sqrt{5}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC}$의 최솟값은 $3\sqrt{5}$

답 ④

50



위의 그림과 같이 두 점 A$(0,\ 1)$, B$(0,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A′, B′이라 하면

A′$(1,\ 0)$, B′$(2,\ 0)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}&=\overline{A'P}+\overline{PB}+\overline{B'Q}+\overline{QC}\\&\ge\overline{A'B}+\overline{B'C}\end{aligned}$$

즉, $\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}$의 값이 최소일 때는 점 P가 두 점 A′, B를 지나는 직선 위에 있고, 점 Q가 두 점 B′, C를 지나는 직선 위에 있을 때이다.

두 점 A′$(1,\ 0)$, B$(0,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{2-0}{0-1}(x-0)$, 즉 $y=-2x+2$

두 점 B′$(2,\ 0)$, C$(0,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{4-0}{0-2}(x-0)$, 즉 $y=-2x+4$

두 직선 $y=x$, $y=-2x+2$의 교점 P의 x좌표는

$x=-2x+2$에서 $x=\frac{2}{3}$이므로 P$\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

두 직선 $y=x$, $y=-2x+4$의 교점 Q의 x좌표는

$x=-2x+4$에서 $x=\frac{4}{3}$이므로 Q$\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

답 ②

서술형 연습

본문 84쪽

01 $10+5\sqrt{5}$ **02** $\left(0,\ \dfrac{13}{5}\right)$

01

삼각형 ABC에서 선분 AB의 길이는 일정하므로 원 위의 점 C와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형 ABC의 넓이가 최대이다. ······ ㉮

두 점 $A(0,\ 5)$ $B(-4,\ 3)$을 지나는 직선 AB의 방정식은

$y-5=\dfrac{3-5}{-4-0}(x-0)$, 즉 $x-2y+10=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원 위의 점 C와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은 $5+2\sqrt{5}$이다. ······ ㉯

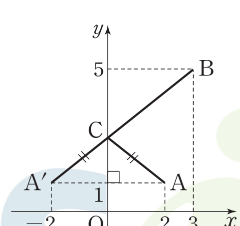
따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(-4-0)^2+(3-5)^2}=2\sqrt{5}$이므로 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times(5+2\sqrt{5})=10+5\sqrt{5}$ ······ ㉰

답 $10+5\sqrt{5}$

단계	채점 기준	비율
㉮	삼각형 ABC의 넓이가 최대일 때의 조건을 파악한 경우	30%
㉯	원 위의 점 C와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값을 구한 경우	50%
㉰	삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구한 경우	20%

02



오른쪽 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$A'(-2,\ 1)$ ······ ㉮

이때 $\overline{AC}=\overline{A'C}$이므로

$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{A'C}+\overline{BC}$

$\geq \overline{A'B}$

즉, $\overline{AC}+\overline{BC}$의 값이 최소일 때는 점 C가 두 점 A′, B를 지나는 직선 위에 있을 때이다. ······ ㉯

두 점 $A'(-2,\ 1)$, $B(3,\ 5)$를 지나는 직선 A′B의 방정식은

$y-1=\dfrac{5-1}{3-(-2)}\{x-(-2)\}$, 즉 $y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{13}{5}$ ······ ㉰

따라서 직선 A′B의 y절편이 $\dfrac{13}{5}$이므로 구하는 점 C의 좌표는

$\left(0,\ \dfrac{13}{5}\right)$이다. ······ ㉱

답 $\left(0,\ \dfrac{13}{5}\right)$

단계	채점 기준	비율
㉮	점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점 A′의 좌표를 구한 경우	10%
㉯	$\overline{AC}+\overline{BC}$의 값이 최소일 때의 점 C의 조건을 파악한 경우	40%
㉰	직선 A′B의 방정식을 구한 경우	30%
㉱	점 C의 좌표를 구한 경우	20%

1등급 도전

본문 85~87쪽

01 32 **02** 23 **03** ③ **04** 128
05 ④ **06** 16 **07** 35 **08** 28
09 ① **10** 640

01

풀이 전략 삼각형 ABP의 넓이가 $8\sqrt{2}$가 되도록 하는 3개의 점의 위치를 좌표평면 위에 나타낸다.

문제 풀이

STEP 1 $\overline{AB}$의 길이를 a를 이용하여 나타낸다.

원 $(x-a)^2+(y+a)^2=9a^2$을 C라 하자.

원 C의 방정식에 $y=0$을 대입하여 풀면

$x=a\pm 2\sqrt{2a}$

$(x-a)^2+(0+a)^2=9a^2$에서 $(x-a)^2=8a^2$
$x-a=\pm 2\sqrt{2}a$

그러므로 원 C와 x축이 만나는 두 점 A, B 사이의 거리는

$\overline{AB}=(a+2\sqrt{2}a)-(a-2\sqrt{2}a)$

$=4\sqrt{2}a$

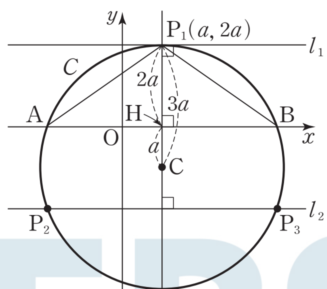
STEP 2 삼각형 ABP의 넓이가 $8\sqrt{2}$가 되도록 하는 원 위의 점 P_1, P_2, P_3의 위치를 알아본다.

한편, 원 C의 중심을 C라 하면 $C(a,\ -a)$이다.

삼각형 ABP에서 선분 AB를 밑변으로 할 때 높이를 h라 하고, 직선 AB에 평행하면서 직선 AB와의 거리가 h인 두 직선을 y절편이 큰 것부터 차례로 l_1, l_2라 하자.

삼각형 ABP의 넓이가 $8\sqrt{2}$가 되도록 하는 원 C 위의 점 P의 개수가 3이 되려면 원과 직선 l_1 또는 직선 l_2가 만나는 점의 개수가 3이어야 한다.

이때 선분 AB는 x축 위에 있고 점 C의 y좌표가 음수이므로 직선 l_1은 원 C와 한 점에서 만나고, 직선 l_2는 원 C와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. 직선 l_1과 원 C가 만나는 점을 P_1, 직선 l_2와 원 C가 만나는 점을 P_2, P_3이라 하자.



STEP 3 a의 값을 구한다.

점 P_1의 좌표는 $(a,\ 2a)$이므로 점 P_1에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{P_1H}=2a$ → $\overline{P_1H}=\overline{CP_1}-\overline{CH}=$(원 C의 반지름의 길이)$-$|점 C의 y좌표|

이때 삼각형 ABP_1의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{P_1H}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}a\times2a$

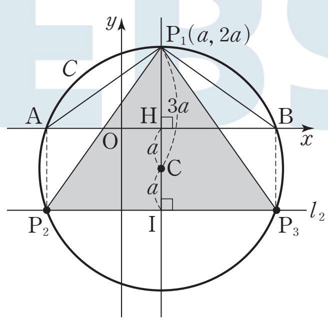
$=4\sqrt{2}a^2$

즉, $4\sqrt{2}a^2=8\sqrt{2}$이므로

$a^2=2$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{2}$

STEP 4 S의 값을 구한 후 $a\times S$의 값을 구한다.



점 P가 될 수 있는 나머지 두 점 P_2, P_3에 대하여 점 C에서 선분 P_2P_3에 내린 수선의 발을 I라 하자.

삼각형 ABP_2와 삼각형 ABP_3의 넓이가 모두 $8\sqrt{2}$이려면

$\overline{HI}=\overline{HP_1}=2a$이어야 한다.

이때 $\overline{CH}=\overline{CI}=a$이므로 $\overline{P_2P_3}=\overline{AB}=4\sqrt{2}a$

삼각형 $P_1P_2P_3$의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{P_2P_3}\times\overline{P_1I}$

$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}a\times4a$

$=8\sqrt{2}a^2=16\sqrt{2}$

따라서 $a\times S=\sqrt{2}\times16\sqrt{2}=32$

답 32

02

풀이 전략 두 원 C_1, C_2의 중심에서 직선 l에 수선의 발을 내린 후 원과 직선의 위치 관계를 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 두 원 C_1, C_2의 중심에서 직선 l에 내린 수선의 발의 좌표를 구한다.

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하자.

또, 점 $O_1(-6,\ 0)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 R, 점 $O_2(5,\ -3)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 S라 하자.

직선 O_1R와 직선 l이 서로 수직이므로 직선 O_1R의 방정식은 → 직선 l의 기울기는 1이므로 직선 O_1R의 기울기는 -1이다.

$y=-x-6$ → 기울기가 -1이고 점 $O_1(-6,\ 0)$을 지나는 직선

직선 l과 직선 O_1R가 만나는 점 R의 x좌표는

$x-2=-x-6$에서

$2x=-4$이므로 $x=-2$

그러므로 점 R의 좌표는 $(-2,\ -4)$이다. → $x=-2$를 $y=-x-6$에 대입하면 $y=-4$

직선 O_2S와 직선 l이 서로 수직이므로 직선 O_2S의 방정식은

$y=-x+2$ → 기울기가 -1이고 점 $O_2(5,\ -3)$을 지나는 직선

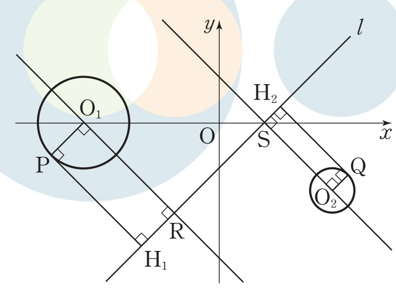
직선 l과 직선 O_2S가 만나는 점 S의 x좌표는

$x-2=-x+2$에서

$2x=4$이므로 $x=2$

그러므로 점 S의 좌표는 $(2,\ 0)$이다. → $x=2$를 $y=-x+2$에 대입하면 $y=0$

STEP 2 선분 H_1H_2의 길이의 최댓값 M, 최솟값 m의 값을 구한다.



[그림 1]

$\overline{RS}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{0-(-4)\}^2}$

$=\sqrt{32}$

$=4\sqrt{2}$

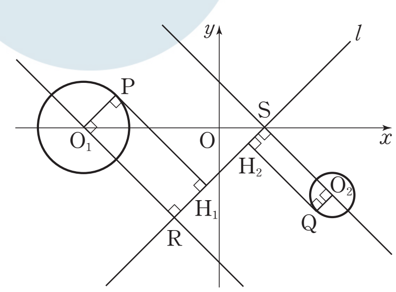
[그림 1]에서 선분 H_1H_2의 길이의 최댓값 M은

$M=\overline{RH_1}+\overline{RS}+\overline{SH_2}$

$=r_1+\overline{RS}+r_2$ → $\overline{O_1R}/\!/\overline{PH_1}$, $\overline{O_2S}/\!/\overline{QH_2}$이므로 $\overline{RH_1}=\overline{O_1P}$, $\overline{SH_2}=\overline{O_2Q}$

$=2+4\sqrt{2}+1$

$=4\sqrt{2}+3$



[그림 2]

[그림 2]에서 선분 $\mathrm{H_1H_2}$의 길이의 최솟값 m은

$$\begin{aligned} m&=\overline{\mathrm{RS}}-\overline{\mathrm{RH_1}}-\overline{\mathrm{SH_2}} \\ &=\overline{\mathrm{RS}}-r_1-r_2 \\ &=4\sqrt{2}-2-1 \\ &=4\sqrt{2}-3 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} Mm&=(4\sqrt{2}+3)(4\sqrt{2}-3) \\ &=32-9 \\ &=23 \end{aligned}$$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

답 23

03

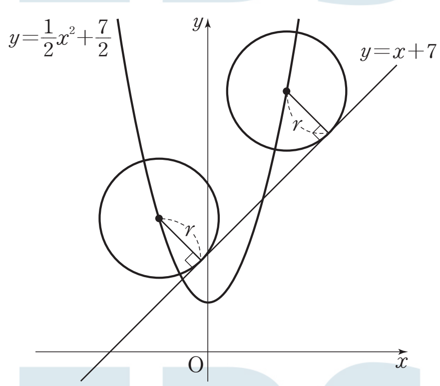
풀이 전략 m이 홀수인 경우를 파악한 후 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

문제 풀이

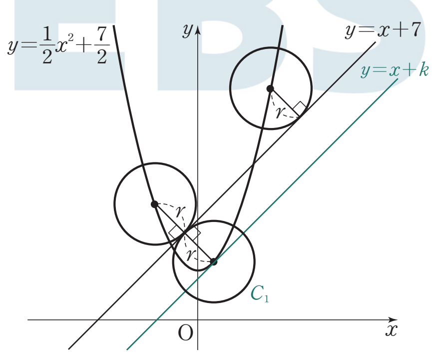
STEP 1 원의 반지름의 길이 r에 따라 m이 홀수가 되는 경우를 알아본다.

반지름의 길이가 r이고 중심이 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}$의 그래프 위에 있는 원 중에서 직선 $y=x+7$에 접하는 원의 개수 m은 반지름의 길이 r에 따라 다음과 같은 세 가지 경우가 있다.

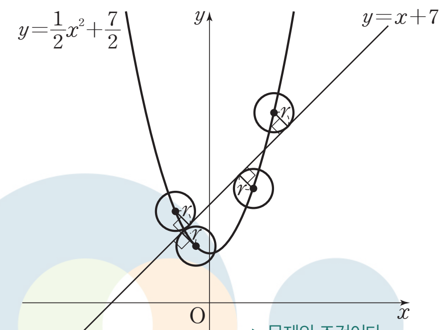
(i) $m=2$일 때,



(ii) $m=3$일 때,



(iii) $m=4$일 때,



(i), (ii), (iii)에서 m이 홀수인 경우는 $m=3$일 때이므로 이 경우는 직선 $y=x+7$에 접하는 원 중 직선 $y=x+7$의 아래쪽에 위치한 원이 한 개일 때이다.

문제의 조건이다.

STEP 2 $m=3$일 때의 직선 $y=x+7$과 평행한 직선의 방정식을 구하여 r의 값을 구한다.

(ii)에서 원을 C_1이라 하면 원 C_1의 반지름의 길이 r는 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선과 직선 $y=x+7$ 사이의 거리와 같다.

이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선을 $y=x+k$ (k는 상수)라 하면 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}=x+k$, 즉 $x^2-2x+7-2k=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 $D=b^2-4ac$
(1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근
(2) $D=0$이면 중근
(3) $D<0$이면 서로 다른 두 허근

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-(7-2k)=0$$

$$-6+2k=0$$

$$k=3$$

두 직선 $y=x+7$과 $y=x+3$ 사이의 거리는 직선 $y=x+3$ 위의 점 $(0,\ 3)$과 직선 $y=x+7$, 즉 $x-y+7=0$ 사이의 거리와 같으므로

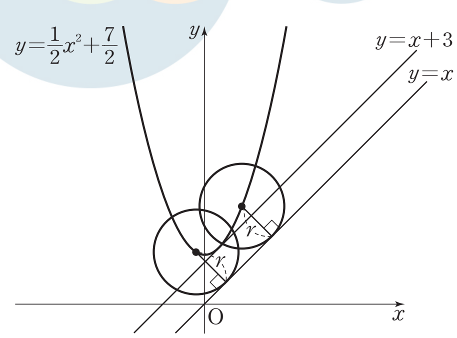
$$\frac{|-3+7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2},\ \text{즉}\ r=2\sqrt{2}$$

STEP 3 직선 $y=x$와 직선 $y=x+3$ 사이의 거리와 원의 반지름의 길이 r를 비교하여 n의 값을 구한다.

직선 $y=x$와 직선 $y=x+3$ 사이의 거리는 직선 $y=x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$r=2\sqrt{2}>\frac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 $n=2$



따라서

$m+n+r^2=3+2+(2\sqrt{2})^2$

$=3+2+8=13$

답 ③

04

풀이 전략 대칭이동과 두 점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 선분 OD의 길이를 구한다.

문제 풀이

STEP 1 대칭이동을 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.

점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 C는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 C의 좌표는 $(b,\ a)$이다.

→ x좌표와 y좌표를 서로 바꾼다.

이때 점 $\mathrm{C}(b,\ a)$는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

$a=2b$

즉, 점 A의 좌표는 $(2b,\ b)$이고 $\overline{\mathrm{AO}}=2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(2b)^2+b^2}=2\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$5b^2=20,\ b^2=4$

$b>0$이므로 $b=2$

그러므로 두 점 A, C의 좌표는 $\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{C}(2,\ 4)$이다.

y축 위의 점 B의 좌표를 $(0,\ c)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-0)^2+(2-c)^2}=2\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$c^2-4c=0,\ c(c-4)=0$

$c>0$이므로 $c=4$

그러므로 점 B의 좌표는 $(0,\ 4)$이다.

STEP 2 직선 AB의 방정식을 구하여 점 D의 좌표를 구한다.

두 점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\dfrac{4-2}{0-4}(x-0)$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$

직선 AB와 직선 $y=x$의 교점 D의 x좌표는

$x=-\dfrac{1}{2}x+4$에서 $x=\dfrac{8}{3}$

그러므로 점 D의 좌표는 $\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$이다.

STEP 3 삼각형 ODE의 외접원의 둘레의 길이를 구한다.

직선 AB의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이고 직선 $y=2x$의 기울기는 2이므로 두 직선은 서로 수직이다.

→ 직선 AB와 직선 $y=2x$의 기울기의 곱은 -1이다.

따라서 삼각형 ODE는 $\angle\mathrm{OED}=90^\circ$인 직각삼각형이고, 삼각형 ODE의 외접원의 지름의 길이는 선분 OD의 길이와 같다.

이때 $\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$이므로 삼각형 ODE의 외접원의 둘레의 길이는 $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$이다.

→ 원의 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

따라서 $k=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$이므로

$9k^2=9\times\left(\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2=9\times\dfrac{128}{9}=128$

답 128

05

풀이 전략 대칭이동을 이용하여 선분이 한 직선에 놓이도록 한 후 선분의 길이를 구한다.

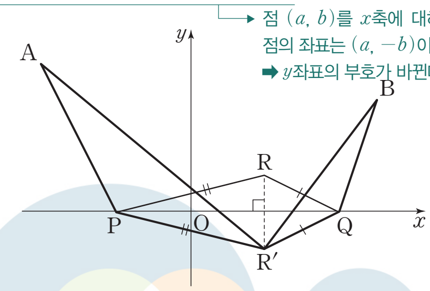
문제 풀이

STEP 1 점 R를 적당히 대칭이동하여 생각한다.

점 R는 직선 $y=1$ 위에 있으므로 점 R의 좌표를 $(a,\ 1)$이라 하자.

점 R를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 R′이라 하면 $\mathrm{R}'(a,\ -1)$

→ 점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a,\ -b)$이다.
➡ y좌표의 부호가 바뀐다.



[그림 1]

[그림 1]과 같이 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PR'}}$, $\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{R'Q}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR'}}\ge\overline{\mathrm{AR'}}$,

$\overline{\mathrm{RQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{R'Q}}+\overline{\mathrm{QB}}\ge\overline{\mathrm{R'B}}$

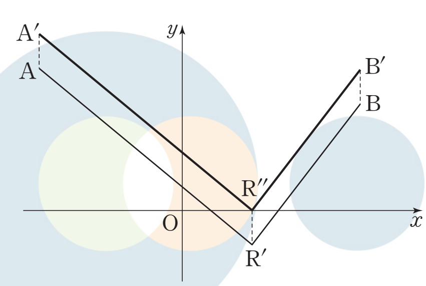
그러므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RQ}}+\overline{\mathrm{QB}}\ge\overline{\mathrm{AR'}}+\overline{\mathrm{R'B}}$

$\overline{\mathrm{AR'}}+\overline{\mathrm{R'B}}$의 값은 점 $\mathrm{R'}(a,\ -1)$의 위치에 따라 변하므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AR'}}+\overline{\mathrm{R'B}}$의 최솟값과 같다.

STEP 2 $\overline{\mathrm{AR'}}+\overline{\mathrm{R'B}}$가 최솟값일 때를 생각한다.



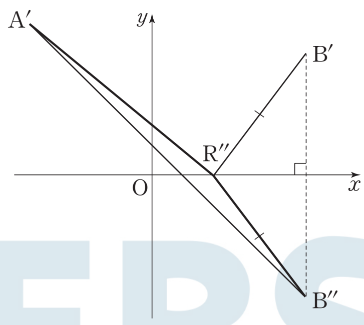
[그림 2]

[그림 2]와 같이 세 점 $\mathrm{A}(-4,\ 4)$, $\mathrm{B}(5,\ 3)$, $\mathrm{R'}(a,\ -1)$을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 각각 A′, B′, R″이라 하면

$\mathrm{A'}(-4,\ 5)$, $\mathrm{B'}(5,\ 4)$, $\mathrm{R''}(a,\ 0)$이고

$\overline{\mathrm{AR'}}+\overline{\mathrm{R'B}}=\overline{\mathrm{A'R''}}+\overline{\mathrm{R''B'}}$

STEP 3 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 구한다.



[그림 3]

[그림 3]과 같이 점 B′을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B″이라 하면

B″$(5,\ -4)$

$\overline{\mathrm{A'R''}}+\overline{\mathrm{R''B'}}=\overline{\mathrm{A'R''}}+\overline{\mathrm{R''B''}}\geq\overline{\mathrm{A'B''}}$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B''}}$과 같다.

두 점 A′$(-4,\ 5)$, B″$(5,\ -4)$에 대하여

$\overline{\mathrm{A'B''}}=\sqrt{\{5-(-4)\}^2+(-4-5)^2}$

$=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 $9\sqrt{2}$이다.

답 ④

06

풀이 전략 평행이동을 이용하여 사각형 ABDC가 직사각형임을 확인한 후 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 평행이동을 이용하여 두 직선 AC, BD의 기울기를 구하여 사각형 ABDC가 직사각형임을 보인다.

두 점 A, B를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점은 각각 C, D이므로 직선 AC와 직선 BD의 기울기는 모두 $-\frac{3}{4}$이다.

이때 $4x-3y-6=0$에서 $y=\frac{4}{3}x-2$이므로 직선 $4x-3y-6=0$의 기울기는 $\frac{4}{3}$이다.

따라서 직선 AC와 직선 $4x-3y-6=0$이 서로 수직이고, 직선 BD와 직선 $4x-3y-6=0$이 서로 수직이다.

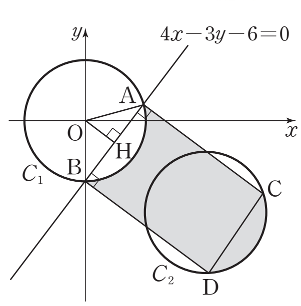
두 직선 l, l'의 기울기의 곱이 -1이면 두 직선 l, l'이 서로 수직이다.

즉, 사각형 ABDC는 직사각형이다.

STEP 2 선분 AC의 길이와 선분 AB의 길이를 구한다.

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

오른쪽 그림과 같이 원점 O에서 직선 $4x-3y-6=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|-6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$

$=\frac{6}{5}$

직각삼각형 AOH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}$

선분 OA의 길이는 원 $C_1 : x^2+y^2=2^2$의 반지름의 길이 2와 같다.

$=\sqrt{2^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2}$

$=\frac{8}{5}$

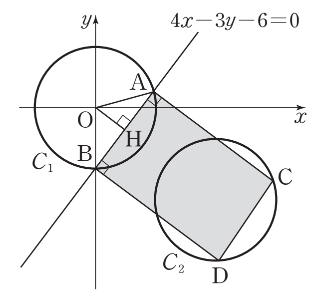
이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=\frac{16}{5}$

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

STEP 3 색칠한 부분의 넓이를 구한다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 직사각형 ABDC의 넓이와 같으므로



$\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{16}{5}\times5$

$=16$

답 16

07

풀이 전략 이차함수의 그래프를 활용한다.

문제 풀이

STEP 1 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 식을 구한다.

함수 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 $g(x)$는

$g(x)=-x^2+ax-b$

$-y=(-x)^2+a\times(-x)+b$
$y=-x^2+ax-b$

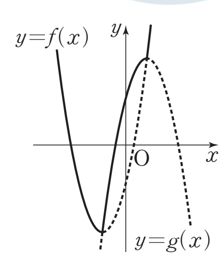
STEP 2 두 그래프의 꼭짓점과 교점을 이용하여 구간을 나누어 함수 $h(x)$를 파악한다.

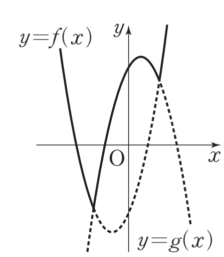
곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $-\frac{a}{2}$

곡선 $y=g(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{a}{2}$

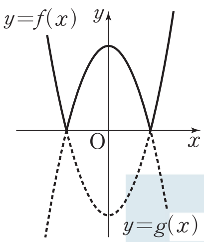
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표 α, β와 $-\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$의 대소 관계에 의하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 다음과 같다.

① $-\frac{a}{2}\leq\alpha<\beta\leq\frac{a}{2}$ ② $\alpha<-\frac{a}{2}<\frac{a}{2}<\beta$

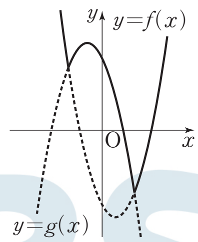




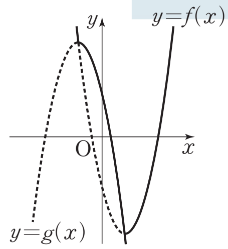
③ $\alpha<-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}<\beta$



④ $\alpha<\frac{a}{2}<-\frac{a}{2}<\beta$



⑤ $\frac{a}{2}\le\alpha<\beta\le-\frac{a}{2}$



$-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$에서 $a=0$, 즉 꼭짓점의 x좌표가 0이므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

STEP 3 조건 (가)를 만족시키는 경우에 대하여 α, β의 값을 구한다.

(ⅰ) ①, ③인 경우

방정식 $h(x)=h(\beta)$의 서로 다른 실근의 개수는 2

(ⅱ) ②인 경우

방정식 $h(x)=h(\beta)$의 서로 다른 실근의 개수는 3

(ⅲ) ④인 경우

방정식 $h(x)=h(\beta)$의 서로 다른 실근의 개수는 1

(ⅳ) ⑤인 경우

방정식 $h(x)=h(\beta)$의 서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2

(ⅰ)~(ⅳ)에서 ②인 경우만 서로 다른 실근의 개수가 3이다.

방정식 $f(x)=g(x)$의 두 실근이 α, β이므로

$f(\alpha)=g(\alpha)$, $f(\beta)=g(\beta)$이고

$f(x)-g(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)=2x^2+2b$

$\alpha+\beta=0$이므로 $\alpha=-\beta$ …… ㉠

$\alpha\beta=b$

ⓐ $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$일 때,

방정식 $h(x)=h(\beta)$는 $f(x)=h(\beta)$이고 $x^2+ax+b-h(\beta)=0$의 한 근이 β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 나머지 한 근은 $-a-\beta$

ⓑ $\alpha\le x\le\beta$일 때,

방정식 $h(x)=h(\beta)$는 $g(x)=h(\beta)$이고 $-x^2+ax-b-h(\beta)=0$의 한 근이 β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 나머지 한 근은 $a-\beta$

ⓐ, ⓑ에서 방정식 $h(x)=h(\beta)$의 서로 다른 세 실근은

$-a-\beta$, $a-\beta$, β

조건 (가)에 의하여

$(-a-\beta)+(a-\beta)+\beta=-4$

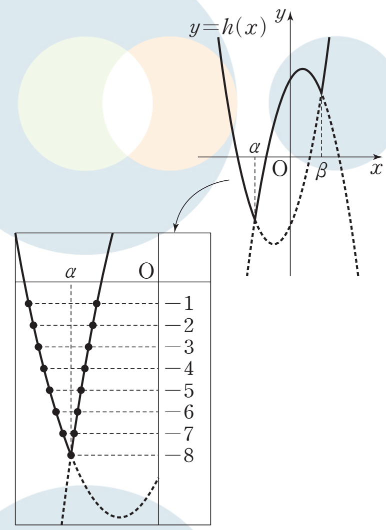
$\beta=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\alpha=-4$

이므로 $b=-16$ …… ㉢

STEP 4 조건 (나)를 이용하여 $f(x)$, $g(x)$를 구하여 $h(2)+h(5)$의 값을 구한다.



$\alpha\le x\le\beta$에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 $g(\alpha)$이고 조건 (나)에 의하여

$g(\alpha)=g(-4)=-16-4a+16=-8$

$a=2$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$f(x)=x^2+2x-16$, $g(x)=-x^2+2x+16$

이므로

$$h(x)=\begin{cases}x^2+2x-16 & (x<-4 \text{ 또는 } x>4)\\ -x^2+2x+16 & (-4\le x\le 4)\end{cases}$$

따라서 $h(2)+h(5)=16+19=35$

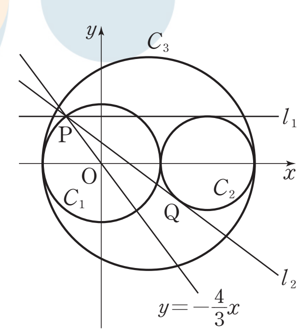
답 35

08

풀이 전략 주어진 세 원과 직선을 좌표평면 위에 나타내어 세 원과 직선의 위치 관계를 파악한다.

문제 풀이

STEP 1 a, b 사이의 관계식을 구하고 $\overline{PQ}$의 길이를 구한다.



직선 $y=-\frac{4}{3}x$와

원 $C_1 : x^2+y^2=a^2$이 만나는 점의

x좌표를 구하기 위해 $y=-\frac{4}{3}x$를

$x^2+y^2=a^2$에 대입하면

$x^2+\left(-\frac{4}{3}x\right)^2=a^2$, $\frac{25}{9}x^2=a^2$

$x^2=\left(\frac{3}{5}a\right)^2$

$x=\pm\frac{3}{5}a$

이때 점 P는 직선 $y=-\frac{4}{3}x$와 원 C_1이 만나는 점 중 제2사분면 위에 있으므로

(x좌표)<0, (y좌표)>0

$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{5}a,\ \frac{4}{5}a\right)$

$x=-\frac{3}{5}a$를 $y=-\frac{4}{3}x$에 대입하면

$y=-\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{5}a\right)=\frac{4}{5}a$

한편, 점 P에서 원 C_2에 그은 두 접선 l_1, l_2 중 직선 l_1은 x축에 평행하므로 직선 l_1과 원 C_2가 만나는 점의 y좌표는 점 P의 y좌표와 같다.

즉, $b-a=\frac{4}{5}a$에서 $b=\frac{9}{5}a$ …… ㉠

점 P에서 원 C_2에 그은 두 접선의 길이가 같으므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{9}{5}a-\left(-\frac{3}{5}a\right)=\frac{12}{5}a$

STEP 2 원과 직선의 관계를 이용하여 직선 l_2의 방정식을 구한다.

직선 l_2의 기울기를 m이라 할 때, 직선 l_2는 점 P를 지나므로 직선 l_2의 방정식은

$y=m\left(x+\frac{3}{5}a\right)+\frac{4}{5}a$

점 P를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식이다.

즉, $5mx-5y+(3m+4)a=0$ …… ㉡

원 C_2의 중심 $\left(\frac{9}{5}a,\ 0\right)$과 직선 l_2 사이의 거리는 원 C_2의 반지름의 길이 $\frac{4}{5}a$와 같으므로

$$\frac{\left|5m\times\frac{9}{5}a+(3m+4)a\right|}{\sqrt{(5m)^2+(-5)^2}}=\frac{4}{5}a$$

$|12m+4|=4\sqrt{m^2+1}$

$|3m+1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$8m^2+6m=0$

$m(4m+3)=0$

$m\neq0$이므로 $m=-\frac{3}{4}$

$m=0$이면 직선은 l_1이다.

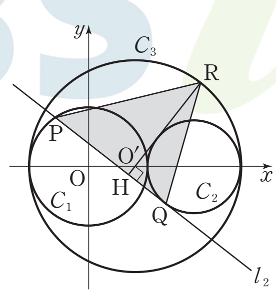
㉡에서 직선 l_2의 방정식은

$15x+20y-7a=0$

$-\frac{15}{4}x-5y+\frac{7}{4}a=0$

STEP 3 삼각형 PQR의 넓이가 최대가 되는 경우를 파악한 후 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 원 C_3의 중심을 O′이라 하고, 점 R에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 RH가 점 O′을 지날 때 삼각형 PQR의 넓이가 최대이다.



점 $\mathrm{O'}\left(\frac{4}{5}a,\ 0\right)$과 직선 l_2 사이의 거리는

$$\frac{\left|15\times\frac{4}{5}a-7a\right|}{\sqrt{15^2+20^2}}=\frac{|5a|}{25}=\frac{1}{5}a\ (a>0)$$

따라서 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은 240이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}a\times\left(\frac{1}{5}a+\frac{9}{5}a\right)=240$

(삼각형 PQR의 넓이) $=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times(\overline{\mathrm{O'H}}+\overline{\mathrm{RO'}})$

$\frac{12}{5}a^2=240$, $a^2=100$

$a>0$이므로 $a=10$

$a=10$을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{9}{5}\times10=18$

따라서 $a+b=10+18=28$

답 28

09

풀이 전략 평행이동한 점의 좌표를 구한 후 두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형이 될 때의 조건을 파악한다.

문제 풀이

STEP 1 세 점 O, A, B를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 점의 좌표와 세 점 O, C, D를 y축의 방향으로 $2t$만큼 평행이동한 점의 좌표를 구한다.

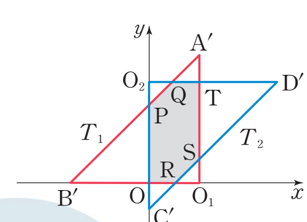
세 점 O, A, B를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 점을 각각 $\mathrm{O_1}$, A′, B′이라 하면

$\mathrm{O_1}(t,\ 0)$, $\mathrm{A'}(t,\ 1)$, $\mathrm{B'}(-1+t,\ 0)$

세 점 O, C, D를 y축의 방향으로 $2t$만큼 평행이동한 점을 각각 $\mathrm{O_2}$, C′, D′이라 하면

$\mathrm{O_2}(0,\ 2t)$, $\mathrm{C'}(0,\ -1+2t)$, $\mathrm{D'}(1,\ 2t)$

STEP 2 두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 될 때의 조건을 파악하여 a의 값을 구한다.



두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되려면 선분 A′B′이 두 선분 $\mathrm{O_2C'}$, $\mathrm{O_2D'}$과 두 점 A′, B′이 아닌 두 점에서 만나야 한다.

또, 선분 C′D′이 두 선분 $\mathrm{O_1B'}$, $\mathrm{O_1A'}$과 두 점 C′, D′이 아닌 두 점에서 만나야 한다.

선분 A′B′이 두 선분 $\mathrm{O_2C'}$, $\mathrm{O_2D'}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하면

$\mathrm{P}(0,\ 1-t)$, $\mathrm{Q}(3t-1,\ 2t)$

직선 A′B′: $y=x+1-t$
직선 $\mathrm{O_2C'}$: y축, 직선 $\mathrm{O_2D'}$: $y=2t$

선분 C′D′이 두 선분 $\mathrm{O_1B'}$, $\mathrm{O_1A'}$과 만나는 점을 각각 R, S라 하면

$\mathrm{R}(1-2t,\ 0)$, $\mathrm{S}(t,\ 3t-1)$

직선 C′D′: $y=x-1+2t$
직선 $\mathrm{O_1B'}$: x축, 직선 $\mathrm{O_1A'}$: $x=t$

따라서 조건을 만족시키는 육각형 모양이 되려면 다음과 같아야 한다.

(i) (점 P의 y좌표)$<$(점 $\mathrm{O_2}$의 y좌표)$<$(점 A′의 y좌표)이어야 하므로

$1-t<2t<1$

A<B<C 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

$1-t<2t$에서 $-3t<-1$, $t>\dfrac{1}{3}$ …… ㉠

$2t<1$에서 $t<\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 t의 값의 범위는

$\dfrac{1}{3}<t<\dfrac{1}{2}$

(ii) (점 C′의 y좌표)<(점 O_1의 y좌표)<(점 S의 y좌표)이어야 하므로

$-1+2t<0<3t-1$

$-1+2t<0$에서 $2t<1$

$t<\dfrac{1}{2}$ …… ㉢

$0<3t-1$에서 $-3t<-1$

$t>\dfrac{1}{3}$ …… ㉣

㉢, ㉣을 모두 만족시키는 t의 값의 범위는

$\dfrac{1}{3}<t<\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 t의 값의 범위는

$\dfrac{1}{3}<t<\dfrac{1}{2}$

그러므로 $a=\dfrac{1}{2}$

STEP 3 육각형의 넓이를 t에 대한 식으로 나타내어 최댓값을 구한다.

이때 두 선분 $A'O_1$, O_2D'이 만나는 점을 T라 하고, 육각형의 넓이를 $f(t)$ $\left(\dfrac{1}{3}<t<\dfrac{1}{2}\right)$이라 하면

$f(t)=$(직사각형 OO_1TO_2의 넓이)$-2\times$(삼각형 O_1SR의 넓이)

$=t\times 2t-2\times\dfrac{1}{2}(3t-1)^2$

$=-7t^2+6t-1$

$=-7\left(t-\dfrac{3}{7}\right)^2+\dfrac{2}{7}$

$\triangle O_1SR\equiv\triangle O_2PQ$이고

$\triangle O_1SR=\dfrac{1}{2}\times\overline{RO_1}\times\overline{SO_1}$

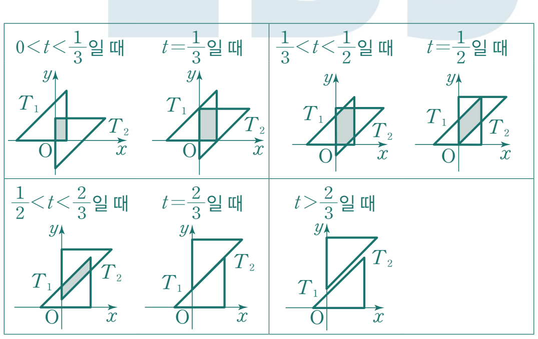
$=\dfrac{1}{2}\times\{t-(1-2t)\}\times(3t-1)$

$=\dfrac{1}{2}(3t-1)^2$

이므로 $f(t)$는 $t=\dfrac{3}{7}$일 때 최대이고, 최댓값 M은 $M=\dfrac{2}{7}$

따라서 $a+M=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{11}{14}$

답 ①



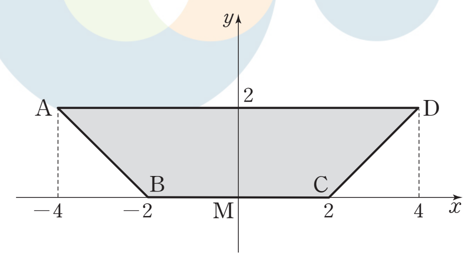
10

풀이 전략 좌표평면 위에 주어진 그림을 놓고 직선 A′M의 방정식을 구한 후 d의 값을 구한다.

문제 풀이

STEP 1 점 M이 원점에 오도록 주어진 그림을 좌표평면 위에 놓고 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.

점 M을 원점, 직선 BC를 x축 위에 오도록 주어진 [그림 1]을 좌표평면 위에 놓으면 A$(-4, 2)$, B$(-2, 0)$, C$(2, 0)$, D$(4, 2)$



선분 AD를 $1:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times4+3\times(-4)}{1+3}, \dfrac{1\times2+3\times2}{1+3}\right)$

즉, $(-2, 2)$

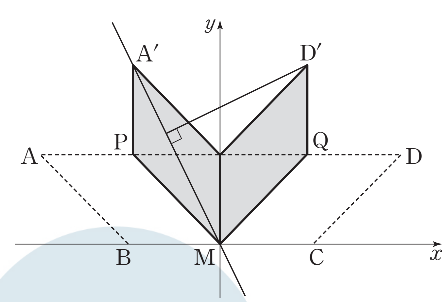
선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times4+1\times(-4)}{3+1}, \dfrac{3\times2+1\times2}{3+1}\right)$

즉, $(2, 2)$

좌표평면 위의 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)에 대하여 선분 AB를 $m:n(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

STEP 2 두 점 A′, D′의 좌표를 구한 후 점 D′과 직선 A′M 사이의 거리 d를 구한다.



점 D′은 점 D를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 D′의 좌표는 $(2, 4)$이다.

점 A′은 점 D′을 y축에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 A′의 좌표는 $(-2, 4)$이다.

직선 A′M의 방정식은

$y=\dfrac{0-4}{0-(-2)}x$, 즉 $2x+y=0$

점 D′$(2, 4)$와 직선 A′M, 즉 $2x+y=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|2\times2+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

따라서 $50d^2=50\times\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=50\times\dfrac{64}{5}=640$

답 640

06 집합과 명제(1)

개념 확인 문제

본문 89쪽

01 집합 : (1), (3)

(1)의 원소는 1, 2, 3, 4, 6, 12

(3)의 원소는 1, 3

02 (1) $\in$ (2) $\in$ (3) $\not\in$

03 (1) $\{x|x$는 4의 양의 약수$\}$ (2) $\{x|x$는 3의 배수$\}$

(3) $\{-1, 1\}$ (4) $\{2, 4, 6, \cdots, 100\}$

04 (1) 3 (2) 0 **05** (1) $A\subset B$ (2) $A=B$

06 (1) $A\cup B=\{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $A\cap B=\{2, 4, 8\}$

(2) $A\cup B=\{x|x$는 정수$\}$, $A\cap B=\{-5, 3\}$

07 3 **08** $\{1, 2, 3, 4\}$

09 (1) $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ (2) $\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$

10 (1) $\{a, c, d\}$ (2) $\{8, 10\}$

11 (1) $\varnothing$ (2) $B-A$ **12** 15

내신&학평 유형 연습

본문 90~99쪽

01 5	02 5	03 48	04 ⑤	05 ②	06 ③
07 16	08 ④	09 8	10 8	11 ④	12 ③
13 ③	14 ③	15 ②	16 ④	17 ③	18 ③
19 ②	20 8	21 ⑤	22 ②	23 ③	24 ③
25 ⑤	26 ④	27 ⑤	28 ⑤	29 ⑤	30 ①
31 ①	32 ⑤	33 16	34 ②	35 ④	36 ②
37 ④	38 8	39 ②	40 ③	41 22	42 36
43 ⑤	44 ②	45 24	46 ②	47 11	48 34
49 ②	50 ⑤	51 29	52 ②	53 ②	54 ④
55 56	56 85				

01

$A\subset B$이고 $5\in A$이므로

$5\in B$

따라서 $a=5$ 답 5

02

집합 A에서 $(x-5)(x-a)=0$이므로 $x=5$ 또는 $x=a$

즉, $A=\{5, a\}$

$A\subset B$가 성립하려면 $a\in B$이어야 하고, a는 양수이므로

$a=5$ 답 5

03

$\sqrt{25}=5$이므로 $A_{25}=\{x|x$는 5 이하의 홀수$\}=\{1, 3, 5\}$

$A_n\subset A_{25}$를 만족시키려면 집합 A_n의 원소는 5 이하의 홀수로만 이루어져야 한다.

즉, $1\le\sqrt{n}<7$이므로 $1\le n<49$

따라서 자연수 n의 최댓값은 48이다. 답 48

04

$A=B$이므로 $a+2=2$ 또는 $a+2=6-a$

즉, $a=0$ 또는 $a=2$

(i) $a=0$일 때,

$A=\{-2, 2\}$, $B=\{2, 6\}$이므로 $A\neq B$

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{2, 4\}$, $B=\{2, 4\}$이므로 $A=B$

(i), (ii)에서 $a=2$ 답 ⑤

다른 풀이

(i) $a+2=2$, $a^2-2=6-a$일 때,

이를 동시에 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a^2-2=2$, $a+2=6-a$일 때,

$a^2-2=2$에서 $a^2=4$, $a=\pm2$

$a+2=6-a$에서 $2a=4$, $a=2$

(i), (ii)에서 $a=2$

05

$A=B$이므로 두 집합 A, B의 원소가 서로 같아야 한다.

$4\in B$이므로 $4\in A$, 즉 $a=4$

$2\in A$이므로 $2\in B$, 즉 $b=2$

따라서 $a\times b=4\times2=8$ 답 ②

06

$A\subset B$이고 $B\subset A$이면 $A=B$이므로 두 집합 A, B의 원소가 서로 같아야 한다.

$5\in B$이므로 $5\in A$, 즉 $a=5$

$20\in A$이므로 $20\in B$, 즉 $a+b=20$

따라서 $b=15$ 답 ③

07

$A=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 집합 A의 모든 부분집합의 개수는

$2^4=16$ 답 16

08

집합 A의 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는 $2^5=32$

이 중에서 홀수인 원소 1, 3, 5를 제외한 원소로 이루어진 부분집합의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

따라서 홀수가 한 개 이상 속해 있는 부분집합의 개수는

$32-4=28$ 답 ④

09

$\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

답 8

10

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

따라서 $\{1, 2, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$에서 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$의 부분집합 중에서 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$

답 8

11

집합 X는 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합이고,

$\{1, 2\} \subset X$이므로

$\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

답 ④

12

집합 X의 부분집합 중 n을 최소의 원소로 가지려면 n보다 작은 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 원소로 갖지 않고 n을 반드시 원소로 가져야 하므로

$f(n)=2^{10-(n-1)-1}=2^{10-n}$

ㄱ. $f(8)=2^{10-8}=2^2=4$ (참)

ㄴ. [반례] $a=9$, $b=10$이면 $9 \in X$, $10 \in X$이고 $9<10$이지만

$f(9)=2^{10-9}=2^1=2$, $f(10)=2^{10-10}=2^0=1$이므로

$f(9)>f(10)$ (거짓)

ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$

$=2^{10-1}+2^{10-3}+2^{10-5}+2^{10-7}+2^{10-9}$

$=2^9+2^7+2^5+2^3+2^1$

$=512+128+32+8+2=682$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

13

$A \cup B=\{1, 2, 3\} \cup \{3, 5\}=\{1, 2, 3, 5\}$

따라서 집합 $A \cup B$의 모든 원소의 합은

$1+2+3+5=11$

답 ③

14

$A \cap B=\{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\}=\{2, 4, 6\}$

따라서 $n(A \cap B)=3$

답 ③

15

$A \cap B=\{1, 2, 4, 6\} \cap \{2, 4, 5\}=\{2, 4\}$

따라서 집합 $A \cap B$의 모든 원소의 합은

$2+4=6$

답 ②

16

$A \cup B=\{1, 3\} \cup \{2, 3, 4\}=\{1, 2, 3, 4\}$

따라서 집합 $A \cup B$의 원소의 개수는 4이다.

답 ④

17

$A \cap B=\{1, 2, 4, 8, 16\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\}=\{1, 2, 4\}$

따라서 집합 $A \cap B$의 원소의 개수는 3이다.

답 ③

18

$A \cup B=\{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{3, 4, 5, 6\}=\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

따라서 $n(A \cup B)=7$

답 ③

19

두 집합 $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{1, 3, a\}$에서

$3 \in (A \cap B)$이고 $1 \notin (A \cap B)$

집합 $A \cap B$의 모든 원소의 합이 8이려면

$a \in (A \cap B)$, 즉 $A \cap B=\{3, a\}$이고

$3+a=8$

따라서 $a=5$

답 ②

20

$10 \notin A$이고 $A \cup B=\{6, 8, 10\}$이므로 $10 \in B$

(i) $a=10$인 경우

$B=\{10, 12\}$이고 $A \cup B=\{6, 8, 10, 12\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+2=10$인 경우

$B=\{8, 10\}$이고 $A \cup B=\{6, 8, 10\}$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a+2=10$이므로 $a=8$

답 8

21

조건 (가)에서 $X \cap \{1, 2, 3\}=\{2\}$이므로

$1 \notin X$, $2 \in X$, $3 \notin X$

조건 (나)에서 집합 X의 모든 원소의 합 $S(X)$의 값이 홀수이므로 집합 X는 집합 A의 원소 중 홀수인 1, 3, 5, 7 중에서 1개 또는 3개를 원소로 가져야 한다. $1 \notin X$, $3 \notin X$이므로 집합 X는 5, 7 중에서 1개만을 원소로 가져야 한다.

두 조건 (가), (나)를 만족시키면서 $S(X)$의 값이 최대가 될 때는 집합

A의 원소 중 짝수인 4, 6을 원소로 갖고, 홀수인 7을 원소로 가질 때이다. 즉, $X=\{2, 4, 6, 7\}$일 때 $S(X)$가 최대가 된다.

따라서 $S(X)$의 최댓값은

$2+4+6+7=19$

답 ⑤

22

$S(X)$의 값이 최대, $S(Y)$의 값이 최소일 때, $S(X)-S(Y)$는 최댓값을 갖는다.

조건 (나)에서 집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소가 서로 나누어떨어지지 않으려면 $k\in X$일 때, k를 제외한 k의 약수와 배수가 집합 X의 원소가 아니어야 한다.

11, 12, 13, $\cdots$, 21은 서로 나누어떨어지지 않으므로 $S(X)$가 최댓값을 가지려면 집합 X는 11, 12, 13, $\cdots$, 21을 원소로 가져야 한다.

이때 1, 3, 7은 21의 약수이고, 2, 4, 5, 10은 20의 약수, 6, 9는 18의 약수, 8은 16의 약수이므로 1, 2, 3, $\cdots$, 10은 집합 X의 원소가 될 수 없다.

조건 (가)에서 $n(X\cap Y)=1$이므로 $S(Y)$가 최솟값을 가지려면 집합 Y는 집합 X의 원소 중 가장 작은 값인 11을 원소로 가져야 한다.

또한, $n(X\cup Y)=17$이므로 집합 Y는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11을 원소로 가져야 한다.

따라서 $X=\{11, 12, 13, \cdots, 21\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 11\}$일 때, $S(X)-S(Y)$가 최댓값을 가지고, 그 최댓값은

$(11+12+13+\cdots+20+21)-(1+2+3+4+5+6+11)$

$=176-32=144$

답 ②

23

$A^C=U-A$

$\quad=\{1, 2, 3, 4, 5\}-\{1, 2\}=\{3, 4, 5\}$

따라서 $n(A^C)=3$

답 ③

24

두 집합 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $A\cap B=\{2, 6\}$이므로

$(A\cup B)-(A\cap B)=\{1, 3, 4, 8\}$

따라서 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$의 모든 원소의 합은

$1+3+4+8=16$

답 ③

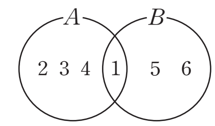
25

$B-A=\{5, 6\}$이므로 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은

$5+6=11$

$B=(B-A)\cup(A\cap B)$, $(B-A)\cap(A\cap B)=\varnothing$이고

$A=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합이 12이려면 $A\cap B=\{1\}$이어야 한다.



따라서 $A-B=A-(A\cap B)=\{2, 3, 4\}$이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$2+3+4=9$

답 ⑤

다른 풀이

$A\cup B=A\cup(B-A)$

$\quad=\{1, 2, 3, 4\}\cup\{5, 6\}$

$\quad=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

이므로 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

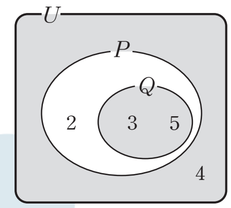
$1+2+3+4+5+6=21$

$A-B=(A\cup B)-B$, $(A\cup B)\cap B=B$이고, 집합 B의 모든 원소의 합이 12이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$21-12=9$

26

전체집합 $U=\{2, 3, 4, 5\}$의 두 부분집합 P, Q에 대하여 $P=\{2, 3, 5\}$, $Q=\{3, 5\}$이므로 이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



c전등이 점등되는 모든 입력값은 오른쪽 벤다이어그램에서 색칠된 부분에 있는 원소이다.

따라서 $\{3, 4, 5\}=P^C\cup Q$

답 ④

27

집합 $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합이 집합 $\{1, 2\}$와 서로소가 되어야 하므로 집합 $\{1, 2\}$와 교집합이 공집합인 집합 S의 부분집합을 찾으면 된다.

그러므로 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 원소 1과 2를 제외한 집합 $\{3, 4, 5\}$의 부분집합을 구하면 다음과 같다.

$\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}$

따라서 집합 S의 부분집합 중에서 $\{1, 2\}$와 서로소인 집합의 개수는 8이다.

답 ⑤

다른 풀이

집합 $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 $\{1, 2\}$와 서로소인 집합은 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 원소 1과 2를 제외한 집합 $\{3, 4, 5\}$의 부분집합이므로 구하는 집합의 개수는 $2^3=8$

28

집합 A에서 $(x-1)(x-26)>0$, $x<1$ 또는 $x>26$

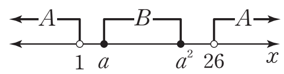
즉, $A=\{x\mid x<1 \text{ 또는 } x>26\}$

집합 B에서 $(x-a)(x-a^2)\le 0$

a는 정수이므로 $a \le x \le a^2$

즉, $B=\{x \mid a \le x \le a^2\}$

$A \cap B = \varnothing$이 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉, $1 \le a \le a^2 \le 26$이므로 $1 \le a \le \sqrt{26}$

따라서 정수 a의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 개수는 5이다. 답 ⑤

29

$A=\{x \mid x$는 6의 약수$\}=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$에 대하여

ㄱ. $A \cap B = \{2, 3\}$이므로 $5 \notin A \cap B$ (참)

ㄴ. $B-A=\{5, 7\}$이므로 $n(B-A)=2$ (참)

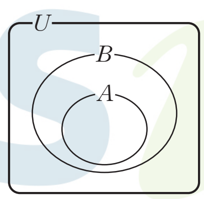
ㄷ. 전체집합 U의 부분집합 중에서 집합 $A \cup B$와 서로소인 집합은 집합 $(A \cup B)^C$의 부분집합이다.
이때 $(A \cup B)^C = \{4, 8, 9, 10\}$이므로 $(A \cup B)^C$의 부분집합의 개수는 $2^4=16$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

30

두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$이므로 A와 B 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $A \cap B = A$



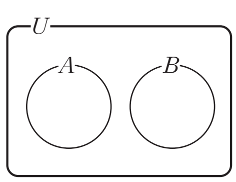
답 ①

31

두 집합 A, B가 서로소이므로 $A \cap B = \varnothing$

A와 B 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$A \subset B^C$

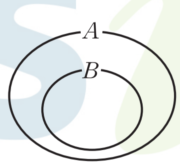


답 ①

32

두 집합 A, B에 대하여

$A \cup B = A$이면 $B \subset A$



집합 B에서

$mx+1=x$, $(m-1)x=-1$

(i) $m=1$일 때,
$0 \times x = -1$이므로 집합 B는 원소를 갖지 않는다.
즉, $B=\varnothing$이고, 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로
$B \subset A$

(ii) $m \ne 1$일 때,
$x=-\dfrac{1}{m-1}$, 즉 $B=\left\{-\dfrac{1}{m-1}\right\}$
$B \subset A$이려면 $-\dfrac{1}{m-1} \in A$이어야 하므로
$-\dfrac{1}{m-1}=-1$ 또는 $-\dfrac{1}{m-1}=2$
$m=2$ 또는 $m=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 모든 실수 m의 값의 합은

$1+2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$ 답 ⑤

33

$(X-A) \subset (A-X)$에서 $(X-A) \cap (A-X) = X-A$이고

$$(X-A) \cap (A-X) = (X \cap A^C) \cap (A \cap X^C) = (A \cap A^C) \cap (X \cap X^C) = \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$$

즉, $X-A=\varnothing$이므로 $X \subset A$

이때 $A=\{1, 2, 5, 10\}$이고 집합 X는 집합 A의 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^4=16$

답 16

34

$\{3, 4, 5\} \cap A = \varnothing$이므로 집합 A는 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 3, 4, 5를 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 A의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$ 답 ②

35

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이고 $A \cap B = \varnothing$이므로 집합 B는 전체집합 U의 부분집합 중에서 2, 3, 5, 6을 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 B의 개수는

$2^{10-4}=2^6=64$

답 ④

36

$A \cup X = A$에서 $X \subset A$이고 $B \cap X = \varnothing$이므로 집합 X는 집합 $A-B$의 부분집합이다.

집합 $A-B$는 50 이하의 6의 배수 중 4의 배수가 아닌 수의 집합이므로

$A-B=\{6, 18, 30, 42\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $A-B$의 부분집합의 개수인

$2^4=16$

답 ②

37

$\{1, 2\} \cap A \ne \varnothing$이므로 집합 A는 1, 2 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 A는 전체집합 U의 부분집합 중에서 1, 2를 모두 원소로 갖지 않는 부분집합, 즉 집합 $\{3, 4\}$의 부분집합을 제외하면 된다.
따라서 집합 A의 개수는
(전체집합 U의 부분집합의 개수)$-$(집합 $\{3, 4\}$의 부분집합의 개수)
$=2^4-2^2=16-4=12$

답 ④

38

두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 3, 5, 9\}$에 대하여
$A-B=\{2, 4\}$
이때 $(A-B)\cap C=\varnothing$이므로 $2\notin C$, $4\notin C$이고,
$A\cap C=C$이므로 $C\subset A$이다.
즉, 집합 C는 집합 A의 부분집합 중에서 2, 4를 원소로 갖지 않는 집합이다.
따라서 집합 C의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$

답 8

39

집합 X가 6을 원소로 갖는 경우와 갖지 않는 경우로 나누어 생각해 보자.
(i) $6\in X$인 경우
집합 X는 6을 원소로 가지면서 조건 (가)에 의하여 원소의 개수가 2 이상이어야 하므로 집합 A의 모든 부분집합 X의 개수는
$2^4-1=15$
(ii) $6\notin X$인 경우
집합 X가 6을 원소로 갖지 않으면서 조건 (나)에 의하여 모든 원소의 곱이 6의 배수이려면 3, 4를 원소로 반드시 가져야 하므로
$\{3, 4\}\subset X\subset\{3, 4, 5, 7\}$
따라서 집합 A의 모든 부분집합 X의 개수는
$2^{4-2}=2^2=4$
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는
$15+4=19$

답 ②

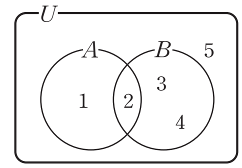
40

조건 (가)에서 $A-X=\varnothing$이므로 $A\subset X$
조건 (나)에서 $B\cap X=\varnothing$이므로 집합 X는 집합 B의 원소 4, 5, 6을 원소로 갖지 않는다. 즉, $\{1, 2, 3\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$
따라서 집합 X는 $\{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$의 부분집합 중에서 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖는 집합이므로 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는
$2^{7-3}=2^4=16$

답 ③

41

주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$A\cap B=\{2\}$이므로 다음과 같은 경우로 나누어 생각해 보자.
(i) $2\in X$인 경우
$X\cap A\neq\varnothing$, $X\cap B\neq\varnothing$을 만족시키므로 집합 X는 전체집합 U의 2가 아닌 원소인 1, 3, 4, 5의 일부 또는 전부를 원소로 갖거나 어느 것도 원소로 갖지 않을 수 있다.
따라서 U의 부분집합 X의 개수는 집합 $\{1, 3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^4=16$
(ii) $2\notin X$인 경우
2를 제외한 집합 A의 원소는 1이고, 2를 제외한 집합 B의 원소는 3, 4이므로 $X\cap A\neq\varnothing$, $X\cap B\neq\varnothing$을 만족시키려면 집합 X는 1을 반드시 원소로 갖고 3 또는 4를 원소로 가져야 한다.
이때 $1\in X$, $3\in X$, $4\notin X$인 경우와 $1\in X$, $3\notin X$, $4\in X$인 경우와 $1\in X$, $3\in X$, $4\in X$인 경우의 3가지 경우가 있다.
이때 각 경우에서 집합 X는 집합 $(A\cup B)^C$의 원소인 5를 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있다.
따라서 U의 부분집합 X의 개수는 $3\times2=6$
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는
$16+6=22$

답 22

42

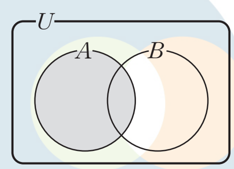
$A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
드모르간의 법칙에 의하여
$(A^C\cup B)^C=(A^C)^C\cap B^C=A\cap B^C=A-B=\{8, 12, 16\}$
따라서 집합 $(A^C\cup B)^C$의 모든 원소의 합은 $8+12+16=36$ 답 36

43

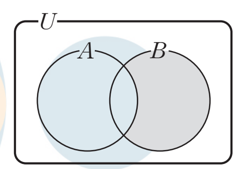
$A\cup(A^C\cap B)=(A\cup A^C)\cap(A\cup B)$
$=U\cap(A\cup B)=A\cup B$

답 ⑤

다른 풀이



A

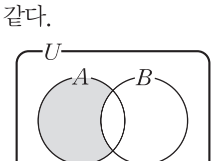


$A^C\cap B$

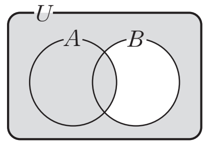
따라서 $A\cup(A^C\cap B)=A\cup B$

44

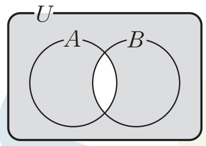
각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.
① $A\cap B^C=A-B$



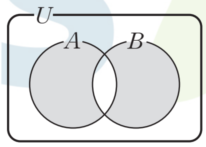
② $(A\cap B)\cup B^C$
$=(A\cup B^C)\cap(B\cup B^C)$
$=(A\cup B^C)\cap U$
$=A\cup B^C$



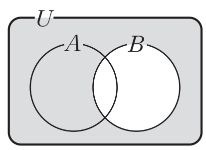
③ $(A\cap B^C)\cup A^C$
$=(A\cup A^C)\cap(B^C\cup A^C)$
$=U\cap(A\cap B)^C=(A\cap B)^C$



④ $(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$



⑤ $(A-B)\cup(A^C\cap B^C)$
$=(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)$
$=(A\cup A^C)\cap B^C$
$=U\cap B^C=B^C$



따라서 어두운 부분을 나타낸 집합과 같은 집합은 ②이다.

답 ②

45

조건 (가)에서 $A\cap B=\{3,\ 5\}$이므로 $S(A\cap B)=3+5=8$
조건 (나)에서 $A^C\cap B^C=\{1,\ 7\}$이므로 드모르간의 법칙에 의하여
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{1,\ 7\}$
$A\cup B=U-(A\cup B)^C$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}-\{1,\ 7\}$
$=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$
이므로 $S(A\cup B)=2+3+4+5+6+8=28$
$S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)=28+8=36$
이고 $S(A)+S(B)=\frac{3}{2}S(A)$이므로 $\frac{3}{2}S(A)=36$
따라서 $S(A)=24$

답 24

46

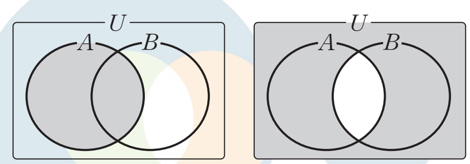
$A-X\subset A$, $B-X\subset B$이고,
조건 (나)에서 $A-X=B-X$이므로
$A-X=B-X\subset A\cap B=\{3,\ 4,\ 5\}$
$A-X\subset\{3,\ 4,\ 5\}$에서 $\{1,\ 2\}\subset X$이고
$B-X\subset\{3,\ 4,\ 5\}$에서 $\{6,\ 7\}\subset X$이므로
$\{1,\ 2,\ 6,\ 7\}\subset X$ …… ㉠
조건 (다)에서
$(X-A)\cap(X-B)$
$=(X\cap A^C)\cap(X\cap B^C)$
$=X\cap(A^C\cap B^C)$
$=X\cap(A\cup B)^C$
$=X\cap\{8,\ 9,\ 10\}\neq\varnothing$ …… ㉡

조건 (가)에서 $n(X)=6$이고 ㉠에 의하여
$n(X\cap\{3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10\})=2$ …… ㉢
㉡에 의하여 세 원소 8, 9, 10 중 적어도 하나의 원소는 집합 X에 속해야 한다.
집합 X의 모든 원소의 합이 최소이려면 $8\in X$이고 ㉢에 의하여 다섯 원소 3, 4, 5, 9, 10 중 가장 작은 원소는 집합 X에 속해야 하므로 $3\in X$
따라서 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$일 때 모든 원소의 합이 최소이고 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은
$1+2+3+6+7+8=27$

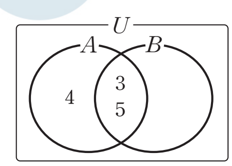
답 ②

47

조건 (가)에 의하여
$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C=\{1,\ 2,\ 4\}$
두 집합 A, $(A\cap B)^C$을 벤다이어그램으로 나타내면 각각 다음 그림과 같다.



두 집합 A, $(A\cap B)^C$의 공통인 원소는 4이므로
$A-B=\{4\}$



또, $A\cap B=A-(A-B)=\{3,\ 5\}$이고
$U=(A\cap B)\cup(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
이때 $4\notin B$이고 $3\in B$, $5\in B$이다.
조건 (나)에서 집합의 분배법칙에 의하여
$(A\cup X)-B=(A\cup X)\cap B^C=(A\cap B^C)\cup(X\cap B^C)$
$=(A-B)\cup(X-B)=\{4\}\cup(X-B)$
집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수가 1이 되려면 집합 $X-B$가 공집합이 되거나 집합 $\{4\}$가 되어야 한다.
(i) $X=\{1\}$, $X=\{2\}$, $X=\{3\}$, $X=\{5\}$일 때,
모든 집합 X에 대하여 집합 $X-B$는 공집합이어야 하므로 1, 2, 3, 5 모두 집합 B의 원소이어야 한다.
(ii) $X=\{4\}$일 때,
$X-B=\{4\}$이므로 집합 $\{4\}\cup(X-B)$는 집합 $\{4\}$가 되어 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에서 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$
따라서 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
$1+2+3+5=11$

답 11

48

$n(A^C \cup B^C) = n((A \cap B)^C) = n(U) - n(A \cap B)$

$= 40 - 6 = 34$

답 34

49

집합 A의 원소는 20 이하의 자연수 n에 대하여

$f(n) = (n^2 - 7n + 11)(n^2 + 3n + 3)$이고, 집합 B의 원소는 100 이하의 소수이므로 집합 $A \cap B$의 원소는

$f(n) = (n^2 - 7n + 11)(n^2 + 3n + 3)$ $(n \le 20)$ 중에서 100 이하의 소수이다.

집합 $A \cap B$의 원소는 두 수 $n^2 - 7n + 11$, $n^2 + 3n + 3$의 곱으로 나타낼 수 있고, $n^2 + 3n + 3$이 1보다 큰 자연수이므로

$n^2 - 7n + 11 = 1$, $n^2 + 3n + 3 = p$ (p는 소수)

가 되어야 한다.

$n^2 - 7n + 11 = 1$에서 $n^2 - 7n + 10 = 0$, $(n-2)(n-5) = 0$

$n = 2$ 또는 $n = 5$

(i) $n = 2$일 때, $f(2) = 1 \times (2^2 + 3 \times 2 + 3) = 13$

(ii) $n = 5$일 때, $f(5) = 1 \times (5^2 + 3 \times 5 + 3) = 43$

(i), (ii)에서 13과 43이 모두 100 이하의 소수이므로

$A \cap B = \{13, 43\}$

따라서 $n(A \cap B) = 2$

답 ②

50

드모르간의 법칙에 의하여

$A \cup B^C = (A^C \cap B)^C = (B - A)^C$이므로 조건 (가)에서

$n(A \cup B^C) = n((B - A)^C) = 7$

$B - A = \{4, 7\}$에서 $n(B - A) = 2$

$(B - A) \cup (B - A)^C = U$, $(B - A) \cap (B - A)^C = \varnothing$

이므로

$n(U) = n(B - A) + n((B - A)^C)$

$= n(B - A) + n(A \cup B^C)$

$= 2 + 7 = 9$

그러므로 $k = 9$이고

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

조건 (가)에서 $B - A = \{4, 7\}$이고 조건 (나)에서 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 서로 같으므로 집합 $A - B$의 모든 원소의 합은 집합 $B - A = \{4, 7\}$의 모든 원소의 합인 11이다.

따라서 m은 4와 7 중 어느 수도 약수로 갖지 않고, 모든 약수의 합이 11 이상이어야 하므로 m이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.

(i) $m = 6$일 때

집합 A는 $\{1, 2, 3, 6\}$이다.

이때 $A - B = \{2, 3, 6\}$이면 집합 $A - B$의 원소의 합이 11이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m = 9$일 때

집합 A는 $\{1, 3, 9\}$이다.

이때 집합 $A - B$의 원소의 합이 11인 경우는 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

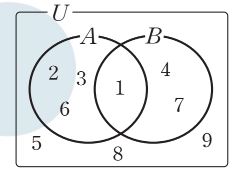
(i), (ii)에서 $m = 6$이고 $B = \{1, 4, 7\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 4, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = \{5, 8, 9\}$

이므로 집합 $A^C \cap B^C$의 모든 원소의 합은

$5 + 8 + 9 = 22$



답 ⑤

51

두 동아리 A, B에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면 조건 (가), (나)에 의하여

$n(A \cup B) = 56$, $n(A) = 35$, $n(B) = 27$

두 동아리 A, B에 모두 가입한 학생의 집합은 $A \cap B$이므로

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 35 + 27 - 56 = 6$

동아리 A에만 가입한 학생의 집합은 $A - B$이므로

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$= 35 - 6 = 29$

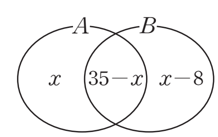
따라서 동아리 A에만 가입한 학생의 수는 29이다.

답 29

다른 풀이

두 동아리 A, B에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B라 하자.

동아리 A에만 가입한 학생의 수를 x라 하면 각 영역에 속하는 원소의 개수는 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x + (35 - x) + (x - 8) = 56$이므로 $x = 29$

52

두 은행 A, B를 이용하는 고객의 집합을 각각 A, B라 하면 조건 (가)에 의하여

$n(A) + n(B) = 82$

은행 A 또는 은행 B를 이용하는 고객 중 남자는 35명, 여자는 30명이므로

$n(A \cup B) = 65$

두 은행 A, B를 모두 이용하는 고객의 집합은 $A \cap B$이므로

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 82 - 65 = 17$

두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 고객의 수는

$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 65 - 17 = 48$

이때 조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 여자 고객의 수는 서로 같으므로 그 수를 x라 하면

$x + x = 48$, $x = 24$

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는

$30-24=6$ 답 ②

다른 풀이

조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 여자 고객의 수가 서로 같으므로 그 수를 x라 하면 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 남자 고객의 수는 $35-x$이고, 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30-x$이다.

조건 (가)에 의하여 $\{x+2(35-x)\}+\{x+2(30-x)\}=82$

$2x+(70-2x)+(60-2x)=82$, $x=24$

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는

$30-24=6$

53

자원봉사 활동 신청 여부를 조사한 100명의 사람의 집합을 전체집합 U, 동계 올림픽 대회의 자원봉사 활동을 신청한 사람의 집합을 A, 동계 패럴림픽 대회의 자원봉사 활동을 신청한 사람의 집합을 B라 하면

$n(U)=100$, $n(A)=51$, $n(B)=42$, $n(A^C\cap B^C)=25$

그런데 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A^C\cap B^C)$

$=100-25=75$

또, 동계 올림픽 대회와 동계 패럴림픽 대회에 모두 자원봉사 활동을 신청한 사람의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=51+42-75=18$

그러므로

$n(A\cup B)-n(A\cap B)=75-18=57$

따라서 두 대회의 자원봉사 활동 중에서 하나만 신청한 사람의 수는 57이다. 답 ②

다른 풀이

자원봉사 활동 신청 여부를 조사한 100명의 사람의 집합을 전체집합 U, 동계 올림픽 대회의 자원봉사 활동을 신청한 사람의 집합을 A, 동계 패럴림픽 대회의 자원봉사 활동을 신청한 사람의 집합을 B라 하면 $n(U)=100$, $n(A)=51$, $n(B)=42$, $n(A^C\cap B^C)=25$이므로

$n(A\cup B)=n(U)-n(A^C\cap B^C)=100-25=75$

두 대회의 자원봉사 활동 중에서 하나만 신청한 사람의 집합은 $(A-B)\cup(B-A)$이다.

$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=75-42=33$

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=75-51=24$

두 집합 $A-B$, $B-A$는 서로소이므로

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)=33+24=57$

따라서 두 대회의 자원봉사 활동 중에서 하나만 신청한 사람의 수는 57이다.

54

봉사 활동 A, B를 신청한 학생을 원소로 하는 집합을 각각 A, B라 하면 봉사 활동 A를 신청한 학생 수와 봉사 활동 B를 신청한 학생 수의 합이 36이므로

$n(A)+n(B)=36$

봉사 활동 A, B를 모두 신청한 학생의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=36-n(A\cap B)$

학급의 학생 수가 30이므로 $n(A\cup B)\le30$에서

$36-n(A\cap B)\le30$, $n(A\cap B)\ge6$ …… ㉠

또, $n(A\cap B)\le n(A\cup B)$이므로

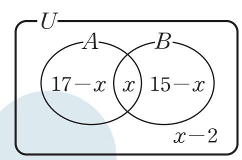
$n(A\cap B)\le36-n(A\cap B)$, $n(A\cap B)\le18$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $6\le n(A\cap B)\le18$

따라서 $M=18$, $m=6$이므로 $M+m=24$ 답 ④

55

학급 학생 전체의 집합을 U, 지역 A를 방문한 학생의 집합을 A, 지역 B를 방문한 학생의 집합을 B라 하자.



지역 A와 지역 B를 모두 방문한 학생의 수 $n(A\cap B)$를 x라 하고, 각 영역에 속하는 원소의 개수를 벤다이어그램에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

각 영역에 속하는 원소의 개수는 0 이상의 정수이므로

$x\ge0$, $x-2\ge0$, $15-x\ge0$, $17-x\ge0$

그러므로 $2\le x\le15$

한편, 지역 A, B 중 어느 한 지역만 방문한 학생의 수는

$n((A-B)\cup(B-A))=32-2x$이므로

$2\le32-2x\le28$

따라서 $M=28$, $m=2$이므로 $Mm=56$ 답 56

56

학교 학생 전체의 집합을 U라 하고, 체험 활동 A, B를 신청한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면 어느 체험 활동도 신청하지 않은 학생의 집합은 $A^C\cap B^C$이고, 하나 이상의 체험 활동을 신청한 학생의 집합은 $A\cup B$이다.

$n(U)=200$ …… ㉠

$n(A)=n(B)+20$ …… ㉡

$n(A^C\cap B^C)=n(A\cup B)-100$ …… ㉢

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)$

㉠, ㉢에서 $n(A\cup B)=\frac{1}{2}\{n(U)+100\}=150$

이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$150=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로 ㉡에서

$2\times n(A)-20-n(A\cap B)=150$

$n(A)=\frac{1}{2}\{n(A\cap B)+170\}$

한편, 체험 활동 A만 신청한 학생의 집합은 $A-B$이므로

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=\frac{1}{2}\{170-n(A\cap B)\}$

$n(A-B)$이 최대일 때는 $n(A\cap B)=0$일 때이므로

$n(A-B)$의 최댓값은 $\frac{170}{2}=85$

따라서 체험 활동 A만 신청한 학생 수의 최댓값은 85이다. 답 85

서술형 연습

본문 100쪽

01 $\{0, 1, 4, 6\}$ **02** $\{1, 9\}$

01

$A\cap B=\{0, 4\}$이므로 $4\in A$이고 $4\in B$

$4\in B$이면

$a^2-3a=4$, $a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$a=-1$ 또는 $a=4$ ········· ㉮

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{-5, -1, 1\}$, $B=\{0, 1, 4\}$이므로 $A\cap B=\{1\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=4$일 때,

$A=\{0, 4, 6\}$, $B=\{0, 1, 4\}$이므로 $A\cap B=\{0, 4\}$ ········· ㉯

(i), (ii)에서 $a=4$이고 $A=\{0, 4, 6\}$, $B=\{0, 1, 4\}$이므로

$A\cup B=\{0, 1, 4, 6\}$ ········· ㉰

답 $\{0, 1, 4, 6\}$

단계	채점 기준	비율
㉮	$4\in B$일 때, a의 값을 구한 경우	30%
㉯	a의 값에 따라 집합 $A\cap B$를 구한 경우	50%
㉰	집합 $A\cup B$를 구한 경우	20%

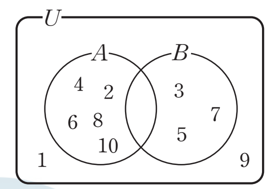
02

$A-B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ ········· ㉮

$(A\cup B)-A=(A\cup B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$

$=\varnothing\cup(B-A)=B-A=\{3, 5, 7\}$ ········· ㉯

각 원소를 벤다이어그램에 나타내면 다음 그림과 같이 집합 $(A\cup B)^C$에 두 원소 1, 9가 모두 속할 때, 집합 A의 원소의 개수가 최소이다.



따라서 집합 A의 원소의 개수가 최소일 때,

$(A\cup B)^C=\{1, 9\}$ ········· ㉰

답 $\{1, 9\}$

단계	채점 기준	비율
㉮	집합 $A-B$를 구한 경우	20%
㉯	집합 $(A\cup B)-A$를 구한 경우	50%
㉰	집합 $(A\cup B)^C$를 구한 경우	30%

1등급 도전

본문 101쪽

01 ② **02** 50 **03** ③ **04** ⑤

01

풀이 전략 집합 B를 구한 후 집합 $A_k\cap B^C$에 속하는 원소를 생각한다.

문제 풀이

STEP 1 집합 A_k의 포함 관계와 집합 B를 구한다.

집합 A_k는 전체집합 U의 부분집합이므로 x는 20 이하의 자연수이다.

또한, 집합 A_k에서 $x(y-k)=30$이므로 $y-k$는 30의 약수이다.

$y\in U$이므로 $y-k<30$이고 $x\neq 1$

$x\in U$이므로 $x\neq 30$

$y-k$와 x 사이의 관계는 다음 표와 같다.

$y-k$	2	3	5	6	10	15
x	15	10	6	5	3	2

즉, $A_k\subset\{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$

집합 B에서 $\frac{30-x}{5}\in U$이므로 $30-x$는 5의 배수이다.

즉, $B=\{5, 10, 15, 20\}$

STEP 2 집합 $A_k\cap B^C$에 속하는 원소에 따라 k의 값의 범위를 구한다.

$(A_k\cap B^C)\subset\{2, 3, 6\}$이고 $n(A_k\cap B^C)=1$이므로

문제의 조건이다.

다음과 같은 경우로 나누어 생각해 보자.

(i) $2\in(A_k\cap B^C)$일 때,

$x=2$, $y-k=15$이고 $y=15+k\leq 20$

$k\leq 5$

(ii) $3\in(A_k\cap B^C)$일 때,

$x=3$, $y-k=10$이고 $y=10+k\leq 20$

$k\leq 10$

(iii) $6\in(A_k\cap B^C)$일 때,

$x=6$, $y-k=5$이고 $y=5+k\leq 20$

$k\leq 15$

$y\in U$이고 집합 U의 원소는 20 이하의 자연수이므로 $y\leq 20$

[STEP 3] $n(A_k\cap B^C)=1$이 되도록 하는 모든 자연수 k의 개수를 구한다.

(i), (ii), (iii)에서

$k\leq 5$일 때, $A_k\cap B^C=\{2, 3, 6\}$

$5<k\leq 10$일 때, $A_k\cap B^C=\{3, 6\}$

$10<k\leq 15$일 때, $A_k\cap B^C=\{6\}$

즉, $n(A_k\cap B^C)=1$이 되도록 하는 k의 값의 범위는 $10<k\leq 15$

따라서 자연수 k의 값은 11, 12, 13, 14, 15이므로 그 개수는 5이다.

답 ②

02

풀이 전략 집합의 원소가 방정식의 실근임을 이용한다.

문제 풀이

[STEP 1] 주어진 집합을 이용하여 방정식 $f(x)=1$, $g(x)=1$의 실근의 집합을 구한다.

$\alpha\in A$, $\alpha\in B$이므로 $f(\alpha)=g(\alpha)=1$

또한 $\beta\in A$, $\beta\notin B$이므로

$f(\beta)=1$, $g(\beta)\neq 1$ 또는 $f(\beta)\neq 1$, $g(\beta)=1$

즉, 방정식 $f(x)=1$의 모든 실근의 집합을 C, 방정식 $g(x)=1$의 모든 실근의 집합을 D라 하면

$C=\{\alpha, \beta\}$, $D=\{\alpha\}$ 또는 $C=\{\alpha\}$, $D=\{\alpha, \beta\}$

[STEP 2] 경우를 나누어 조건을 만족시키는 것을 찾는다.

(i) $C=\{\alpha, \beta\}$, $D=\{\alpha\}$일 때

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식은

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+1$, $g(x)=(x-\alpha)^2+1$ …… ㉠

이때 $\beta+3\in B$에서 $f(\beta+3)=g(\beta+3)$이므로

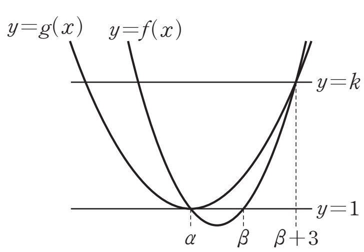
$2(\beta+3-\alpha)\times 3+1=(\beta+3-\alpha)^2+1$

$\beta+3-\alpha=0$ 또는 $\beta+3-\alpha=6$

즉, $\beta-\alpha=-3$ 또는 $\beta-\alpha=3$

$\alpha<\beta$이므로 $\beta-\alpha=3$ …… ㉡

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=1$은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

[그림 1]에서 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 k의 값은

$k=g(\beta+3)$ …… ㉢

곡선 $y=f(x)$의 축의 방정식은 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 $\alpha-3$, $\beta+3$이다.

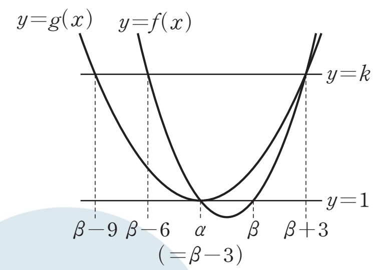
이때 ㉡에 의하여

$\alpha-3=(\beta-3)-3=\beta-6$

또한, 곡선 $y=g(x)$의 축의 방정식은 $x=\alpha$이므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 $2\alpha-\beta-3$, $\beta+3$이다.

이때 ㉡에 의하여

$2\alpha-\beta-3=2(\beta-3)-\beta-3=\beta-9$



[그림 2]

[그림 2]에서 방정식 $\{f(x)-k\}\{g(x)-k\}=0$의 서로 다른 실근은 $\beta-9$, $\beta-6$, $\beta+3$이고 그 합이 12이므로

$(\beta-9)+(\beta-6)+(\beta+3)=12$, $\beta=8$

㉡에서 $\alpha=5$

㉠에서 $f(x)=2(x-5)(x-8)+1$, $g(x)=(x-5)^2+1$

㉢에서 $k=g(\beta+3)=g(11)=(11-5)^2+1=37$

(ii) $C=\{\alpha\}$, $D=\{\alpha, \beta\}$일 때

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식은

$f(x)=2(x-\alpha)^2+1$, $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)+1$

이때 $\beta+3\in B$에서 $f(\beta+3)=g(\beta+3)$이므로

$2(\beta+3-\alpha)^2+1=(\beta+3-\alpha)\times 3+1$

$\beta+3-\alpha=0$ 또는 $\beta+3-\alpha=\dfrac{3}{2}$

즉, $\beta-\alpha=-3$ 또는 $\beta-\alpha=-\dfrac{3}{2}$

이때 두 경우 모두 $\alpha<\beta$라는 조건을 만족시키지 않는다.

[STEP 3] $\alpha+\beta+k$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서 $\alpha=5$, $\beta=8$, $k=37$

따라서 $\alpha+\beta+k=5+8+37=50$

답 50

03

풀이 전략 두 집합 A_l, A_m이 서로소가 아니면 $A_l\cap A_m\neq\varnothing$임을 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 세 집합 A_1, A_2, A_3을 각각 구하여 공통된 원소를 찾아 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x | 0 \le x \le 2\} \cap \{x | 1 \le x \le 3\} \cap \{x | 2 \le x \le 4\}$
$= \{2\}$ (참)

STEP 2 $l \le m$이라 하고 $|l-m|=0$, $|l-m|=1$, $|l-m|=2$일 때 집합 $A_l \cap A_m$를 구해 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $|l-m| \le 2$를 만족시키는 9 이하의 두 자연수 l, m에 대하여 $l \le m$이라 하여도 일반성을 잃지 않는다.

(i) $|l-m|=0$일 때, $m=l$이고
$A_l \cap A_m = A_l \ne \varnothing$

(ii) $|l-m|=1$일 때, $m=l+1$이고
$A_l \cap A_m = A_l \cap A_{l+1} = \{x | l \le x \le l+1\} \ne \varnothing$

(iii) $|l-m|=2$일 때, $m=l+2$이고
$A_l \cap A_m = A_l \cap A_{l+2} = \{l+1\} \ne \varnothing$

(i), (ii), (iii)에서 9 이하의 두 자연수 l, m에 대하여 $|l-m| \le 2$이면 두 집합 A_l과 A_m은 서로소가 아니다. (참)

→ 두 집합이 공통인 원소가 하나도 없을 때, 이 두 집합을 서로소라 한다. 그런데 $A_l \cap A_m \ne \varnothing$, 즉 두 집합 A_l과 A_m은 공통인 원소가 존재하므로 서로소가 아니다.

STEP 3 모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합을 구해 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 9 이하인 자연수 n에 대하여 집합 $\{p\}(n-1 \le p \le n+1)$이 $\{p\} \cap A_n \ne \varnothing$을 만족시키므로 집합 $\{p\}$는 A_n과 서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

8 이하인 자연수 n에 대하여 $A_n \cap A_{n+1} = \{x | n \le x \le n+1\}$이고, 집합 $\{p\}(n \le p \le n+1)$이 $\{p\} \cap \{A_n \cap A_{n+1}\} \ne \varnothing$을 만족시키므로 집합 $\{p\}$는 A_n, A_{n+1}과 서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

7 이하인 자연수 n에 대하여
$A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} = \{n+1\}$이고
$\{n+1\} \cap (A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2}) \ne \varnothing$이므로 집합 $\{n+1\}$은 A_n, A_{n+1}, A_{n+2}와 서로소가 아니고 원소의 개수가 최소인 집합이다.

6 이하인 자연수 n에 대하여
$A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap A_{n+3} = \varnothing$이므로
A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}과 서로소가 아닌 집합 중 원소의 개수가 1인 집합은 존재하지 않는다.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\}$, $A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{3\}$,
$A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \{4\}$, $\cdots$,
$A_7 \cap A_8 \cap A_9 = \{8\}$

→ 7 이하의 자연수 n에 대하여 $A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} = \{n+1\}$

$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이라 하면 집합 X는 모든 A_k와 서로소가 아니다.

모든 A_k와 서로소가 아니고 원소가 유한개인 집합 중 원소의 개수가 최소인 집합을 B라 하면 $B \subset X$

$2 \notin B$이면 $A_1 \cap B = \varnothing$이므로 $2 \in B$이어야 한다.

$8 \notin B$이면 $A_9 \cap B = \varnothing$이므로 $8 \in B$이어야 한다.

$\{2, 8\} \cap A_4 = \varnothing$, $\{2, 8\} \cap A_5 = \varnothing$, $\{2, 8\} \cap A_6 = \varnothing$이고
$A_4 \cap A_5 \cap A_6 = \{5\}$이므로 $5 \in B$이어야 한다.

$B = \{2, 5, 8\}$에 대하여 집합 B의 원소의 개수는 3이고 집합 B는 모든 A_k와 서로소가 아니다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

04

풀이 전략 각 집합의 원소의 의미를 파악한다.

문제 풀이

STEP 1 주어진 집합의 의미를 파악하여 세 원의 관계를 파악한다.

세 원
$(x+2)^2+(y+1)^2=1$, $(x-a-1)^2+(y-a)^2=a^2$,
$(x-b-1)^2+(y-b)^2=b^2$ 을 차례로 O_1, O_2, O_3이라 하자.

집합 A, B, C는 좌표평면에서 직선 $y=\frac{4}{3}x$가 세 원 O_1, O_2, O_3과 각각 만나는 점의 집합이다.

원 O_1의 중심 $(-2, -1)$과 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 사이의 거리가
$\frac{|-8+3|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$이고 원 O_1의 반지름의 길이가 1이므로
원 O_1과 직선 $y=\frac{4}{3}x$는 한 점에서 만난다.

그러므로 $n(A)=1$

세 원 O_1, O_2, O_3은 모두 x축에 접하고 원 O_1의 중심은 제3사분면, 두 원 O_2, O_3의 중심은 제1사분면 위에 있으므로 원 O_1은 두 원 O_2, O_3과 만나지 않는다.

STEP 2 $n(A \cup B \cup C)=3$인 조건을 만족시키는 집합 B를 구한다.

그러므로 $A \cap (B \cup C) = \varnothing$

$n(A)=1$, $A \cap (B \cup C) = \varnothing$이므로

$n(A \cup B \cup C)=3$이려면 $n(B \cup C)=2$ …… ㉠

두 원 O_2, O_3의 중심 $(a+1, a)$, $(b+1, b)$는 모두 직선 $y=x-1$ 위의 점이다.

직선 $y=x-1$ 위의 점 $(k+1, k)$ $(k \ge 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 원에 대하여 원의 중심 $(k+1, k)$와 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 사이의 거리는

$\frac{|4k+4-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{k+4}{5}$

이므로 점 $(k+1, k)$ $(k \ge 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 원과 직선 $y=\frac{4}{3}x$는 $k=1$이면 $k=\frac{k+4}{5}$이므로 서로 접하고 $k>1$이면 $k>\frac{k+4}{5}$이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

$1 \le a < b$에서

$a\geq 1$이므로 $n(B)\geq 1$

$b>1$이므로 $n(C)=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $B\subset C$이고 $a\neq b$이면 $B\neq C$이므로

$n(B)<n(C)=2$

$1\leq n(B)<2$에서 $n(B)=1$

원 O_2와 직선 $y=\frac{4}{3}x$는 서로 접하므로 $a=1$

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$에 $y=\frac{4}{3}x$를 대입하면

$(x-2)^2+\left(\frac{4}{3}x-1\right)^2=1$

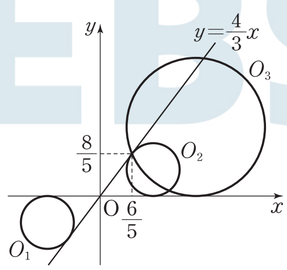
$\frac{25}{9}x^2-\frac{20}{3}x+4=0$, $\left(\frac{5}{3}x-2\right)^2=0$

$x=\frac{6}{5}$, $y=\frac{8}{5}$이므로 $B=\left\{\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)\right\}$

STEP 3 집합 B와 C의 포함 관계를 이용하여 a, b의 값을 구하고 $a+b$의 값을 구한다.

$B\subset C$이므로 $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)\in C$

점 $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$이 원 O_3 위의 점이어야 하므로 세 원 O_1, O_2, O_3과 직선 $y=\frac{4}{3}x$는 그림과 같다.



$(x-b-1)^2+(y-b)^2=b^2$에 $x=\frac{6}{5}$, $y=\frac{8}{5}$을 대입하면

$\left(\frac{6}{5}-b-1\right)^2+\left(\frac{8}{5}-b\right)^2=b^2$

$b^2-\frac{18}{5}b+\frac{13}{5}=0$, $(b-1)\left(b-\frac{13}{5}\right)=0$

$b=1$ 또는 $b=\frac{13}{5}$

$b>a$이므로 $b=\frac{13}{5}$

따라서 $a+b=1+\frac{13}{5}=\frac{18}{5}$

답 ⑤

07 집합과 명제(2)

개념 확인 문제

본문 103쪽

01 명제: (1), (3), (4)
(1) 참 (3) 거짓 (4) 참

02 (1) 2는 소수가 아니다. (거짓)
(2) $3>\sqrt{3}$ (참)

03 조건 p의 진리집합을 P라 하면 $P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{x|x>7$인 자연수$\}$

04 (1) 거짓 (2) 참

05 (1) 참 (2) 거짓

06 (1) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2-x+1\geq 0$이다. (참)
(2) 모든 직사각형은 정사각형이 아니다. (거짓)

07 (1) 역: $\sqrt{x}>3$이면 $x>9$이다.
대우: $\sqrt{x}\leq 3$이면 $x\leq 9$이다.
(2) 역: 평행사변형은 사다리꼴이다.
대우: 평행사변형이 아니면 사다리꼴이 아니다.

08 (1) 충분조건 (2) 필요충분조건

09 (가) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (나) $\geq$

내신&학평 유형 연습

본문 104~111쪽

01 ②	02 ②	03 ④	04 ⑤	05 ③	06 ③
07 ③	08 ②	09 ②	10 ①	11 ③	12 9
13 9	14 ③	15 ①	16 ①	17 ①	18 ①
19 ③	20 ③	21 ②	22 ⑤	23 ⑤	24 24
25 ④	26 ⑤	27 5	28 ③	29 ⑤	30 ①
31 ③	32 ②	33 ⑤	34 ④	35 15	36 ②
37 ②	38 ③	39 ①	40 ⑤	41 ②	

01

조건 p의 진리집합을 P라 하자.

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 원소 중 짝수는 2, 4, 6, 8이고 6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로

$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로

$P^C=U-P=\{5, 7\}$

따라서 조건 $\sim p$의 진리집합의 모든 원소의 합은

$5+7=12$

답 ②

02

실수 x에 대한 조건

'x는 1보다 크다'

의 부정은

'x는 1보다 크지 않다' 즉 '$x\le 1$'

답 ②

03

$U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$

조건 'p : x는 4의 약수이다.'이므로 조건 p의 진리집합은

$P=\{1,\ 2,\ 4\}$

'q : $2x-17\le 0$'에서 $x\le\frac{17}{2}$이므로 조건 q의 진리집합은

$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

$P\subset X\subset Q$이므로 집합 X는 집합 Q의 부분집합 중에서 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{8-3}=2^5=32$

답 ④

04

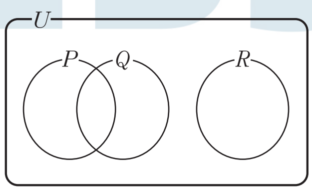
주어진 벤다이어그램에서 두 집합 P, R의 포함 관계는 $R\subset P$이다.

⑤ $P^C\subset R^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$는 항상 참이다.

답 ⑤

05

$(P\cup Q)\cap R=\varnothing$이므로 세 집합 P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



③ $(P\cup Q)\subset R^C$이므로 $P\subset R^C$

따라서 명제 'p이면 $\sim r$이다.'는 항상 참이다.

답 ③

06

ㄱ. $P\cap Q=P$이므로 $P\subset Q$

따라서 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다. (참)

ㄴ. $R^C\cup Q=U$이므로 $(R^C\cup Q)^C=U^C=\varnothing$에서

$R\cap Q^C=R-Q=\varnothing$

따라서 $R\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다. (참)

ㄷ. [반례] $P\cap R\ne\varnothing$일 때, $P\not\subset R^C$

따라서 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 거짓이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

07

ㄱ. $\sim p \Longrightarrow r$이므로 $P^C\subset R$ (참)

ㄴ. $\sim p \Longrightarrow r$이고 $r \Longrightarrow \sim q$이므로 $\sim p \Longrightarrow \sim q$

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 $Q\subset P$ (거짓)

ㄷ. $r \Longrightarrow \sim q$에서 $q \Longrightarrow \sim r$이므로 $Q\subset R^C$ ...... ㉠

$\sim p \Longrightarrow r$에서 $\sim r \Longrightarrow p$이므로 $R^C\subset P$ ...... ㉡

$\sim r \Longrightarrow q$이므로 $R^C\subset Q$ ...... ㉢

㉠, ㉡에 의하여 $Q\subset R^C\subset P$이므로 $Q\subset P$

즉, $P\cap Q=Q$

㉠, ㉢에서 $Q=R^C$

따라서 $P\cap Q=Q=R^C$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

보충 개념

세 조건 p, q, r에 대하여 '$p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이면 $p \Longrightarrow r$이다.'라고 결론짓는 방법을 삼단논법이라 한다.

08

ㄱ. $a=0$이면 p : $0\times(x-1)(x-2)<0$이므로 부등식

$a(x-1)(x-2)<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

따라서 $P=\varnothing$ (참)

ㄴ. $a>0$, $b=0$이면

조건 p : $a(x-1)(x-2)<0$에서 $a>0$이므로

$(x-1)(x-2)<0$, $1<x<2$

조건 p의 진리집합은 $P=\{x\,|\,1<x<2\}$이고

조건 q의 진리집합은 $Q=\{x\,|\,x>0\}$이므로

$P\subset Q$ (참)

ㄷ. $a<0$, $b=3$이면

조건 p : $a(x-1)(x-2)<0$에서 $a<0$이므로

$(x-1)(x-2)>0$, $x<1$ 또는 $x>2$

조건 p의 진리집합은 $P=\{x\,|\,x<1$ 또는 $x>2\}$이므로

$\sim p$의 진리집합은

$P^C=\{x\,|\,1\le x\le 2\}$

조건 q의 진리집합은 $Q=\{x\,|\,x>3\}$이므로

$P^C\not\subset Q$

따라서 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 거짓이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

09

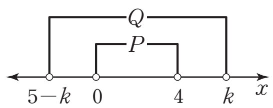
p : $|x-2|<2$에서 $-2<x-2<2$이므로 $0<x<4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,0<x<4\}$, $Q=\{x\,|\,5-k<x<k\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.

이를 만족시키도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$5-k\le0$이고 $k\ge4$이므로

$k\ge5$

따라서 실수 k의 최솟값은 5이다.

답 ②

10

명제 '$x=a$이면 $x^2+6x-7=0$이다.'가 참이 되려면 $x=a$가 이차방정식 $x^2+6x-7=0$의 근이어야 한다.

따라서 $a^2+6a-7=0$의 좌변을 인수분해하면

$(a+7)(a-1)=0$

$a>0$이므로 $a=1$

답 ①

11

p : $|x-a|\le1$에서

$-1\le x-a\le1$이므로 $a-1\le x\le a+1$

q : $x^2-2x-8>0$에 대하여 $\sim q$: $x^2-2x-8\le0$

$x^2-2x-8\le0$에서

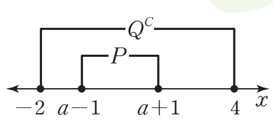
$(x+2)(x-4)\le0$이므로 $-2\le x\le4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|a-1\le x\le a+1\}$, $Q^C=\{x|-2\le x\le4\}$

명제 $p\longrightarrow\sim q$가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 한다.

이를 만족시키도록 두 집합 P, Q^C을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$-2\le a-1$이고 $a+1\le4$이므로 $-1\le a\le3$

따라서 실수 a의 최댓값은 3이다.

답 ③

12

조건 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+6x+k\ge0$이다.'가 참인 명제가 되려면 이차함수 $y=x^2+6x+k$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나거나 x축과 만나지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2+6x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-k\le0$, $k\ge9$

따라서 k의 최솟값은 9이다.

답 9

다른 풀이

$f(x)=x^2+6x+k$라 하면 함수 $y=f(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같으면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+6x+k\ge0$이다.

$f(x)=x^2+6x+k=(x+3)^2+k-9$

함수 $y=f(x)$는 $x=-3$일 때, 최솟값 $k-9$를 가지므로

$k-9\ge0$, $k\ge9$

따라서 k의 최솟값은 9이다.

13

명제

'어떤 실수 x에 대하여 $x^2+8x+2k-1\le0$이다.'

가 거짓이려면 이 명제의 부정

'모든 실수 x에 대하여 $x^2+8x+2k-1>0$이다.'

가 참이어야 한다.

따라서 이차함수 $y=x^2+8x+2k-1$의 그래프가 x축과 만나지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2+8x+2k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-(2k-1)<0$, $-2k<-17$, $k>\frac{17}{2}$

따라서 정수 k의 최솟값은 9이다.

답 9

14

명제

'모든 실수 x에 대하여 $2x^2+6x+a\ge0$이다.'

가 거짓이면 이 명제의 부정

'어떤 실수 x에 대하여 $2x^2+6x+a<0$이다.'

는 참이다.

따라서 이차함수 $y=2x^2+6x+a$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

이차방정식 $2x^2+6x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-2a>0$, $a<\frac{9}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 4이다.

답 ③

15

$f(x)=x^2-8x+n$이라 하자.

$2\le x\le5$인 어떤 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이려면 $2\le x\le5$이고 $f(x)\ge0$인 실수 x가 적어도 하나 존재해야 하므로 이 범위에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 0 이상이어야 한다.

$f(x)=x^2-8x+n=(x-4)^2+n-16$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 4는 $2\le x\le5$에 속한다.

$f(2)=n-12$, $f(4)=n-16$, $f(5)=n-15$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $n-12$를 갖는다.

즉, $f(2)=n-12\ge0$이므로 $n\ge12$

따라서 자연수 n의 최솟값은 12이다.

답 ①

16

주어진 명제가 참이 되려면 그 명제의 대우

'$x-a=0$이면 $x^2-6x+5=0$이다.'

가 참이 되어야 한다.

$x=a$를 $x^2-6x+5=0$에 대입하면

$a^2-6a+5=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a의 값의 합은 6이다.

답 ①

17

ㄱ. 역: $x=1$이면 $x^3=1$이다. (참)

ㄴ. 역: $x+y\ge2$이면 $x\ge1$이고 $y\ge1$이다.

[반례] $x=0$, $y=3$이면 $x+y=3\ge2$이지만 $x<1$이고 $y\ge1$이다. (거짓)

ㄷ. 역: 자연수 x, y에 대하여 xy가 짝수이면 x^2+y^2은 홀수이다.

[반례] $x=2$, $y=4$이면 $xy=8$로 짝수이지만 $x^2+y^2=20$으로 짝수이다. (거짓)

이상에서 명제의 역이 참인 것은 ㄱ이다.

답 ①

18

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.

명제 $q \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다.

그러므로 $R^C\subset Q^C$

또, 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 $P\subset R^C$

따라서 $P\subset R^C\subset Q^C$이므로 $P\subset Q^C$

그러므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 항상 참이다.

답 ①

19

$\sqrt{n^2-1}$이 유리수라고 가정하면 $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $p^2(n^2-1)=q^2$이다.

q^2이 p의 배수이므로 $\dfrac{q^2}{p}$은 자연수이다.

p가 1이 아닌 자연수이면 p, q가 서로소이므로 $\dfrac{q^2}{p}$은 자연수가 아니다.

그러므로 $p=1$

$p=1$을 $p^2(n^2-1)=q^2$에 대입하면 $n^2-1=q^2$

즉, $n^2=\boxed{q^2+1}$

$n\ge2$이고 $q^2=n^2-1\ge2^2-1=4-1=3$

그러므로 $q^2\ge3$에서 $q>1$

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때

$n^2=(2k)^2+1$이므로 $(2k)^2<n^2<\boxed{(2k+1)^2}$

즉, $2k<n<2k+1$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때

$n^2=(2k+1)^2+1$이므로 $\boxed{(2k+1)^2}<n^2<(2k+2)^2$

즉, $2k+1<n<2k+2$를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i)과 (ii)에 의하여 $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

즉, $f(q)=q^2+1$, $g(k)=(2k+1)^2$이므로

$f(2)+g(3)=5+49=54$

답 ③

20

정사각형의 넓이가 p^2, 직각삼각형의 넓이가 $\dfrac{1}{2}ab$이고 두 도형의 넓이가 같으므로 $ab=\boxed{2p^2}$이다.

직각삼각형에서 $a^2+b^2=c^2$이므로

$b^2=c^2-a^2=(a+2)^2-a^2=\boxed{4a+4}$이고

$8p^2=4ab=b(b^2-4)=\boxed{b(b+2)(b-2)}$이다.

여기서 a, b, p가 모두 정수라 하면,

$b^2=\boxed{4a+4}$에서 b는 짝수이므로 $b=2b'$(b'은 자연수)라 할 때,

$p^2=\dfrac{2b'}{2}\times\dfrac{2b'+2}{2}\times\dfrac{2b'-2}{2}=b'(b'+1)(b'-1)$이 된다.

우변은 연속된 세 자연수의 곱이므로 제곱수가 될 수 없다.

따라서 모순이다. 그러므로 a, b, p 중 적어도 하나는 정수가 아니다.

즉, $f(p)=2p^2$, $g(a)=4a+4$, $h(b)=b(b+2)(b-2)$이므로

$f(1)+g(2)+h(3)=2+12+15=29$

답 ③

21

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

ㄱ. q : $x^2+x-6=0$에서

$(x+3)(x-2)=0$이므로 $x=-3$ 또는 $x=2$

$P=\{2\}$, $Q=\{-3, 2\}$이므로 $P\subset Q$, $Q\not\subset P$

따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄴ. $P=\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $Q=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

$Q\subset P$, $P\not\subset Q$

따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 조건 p는 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄷ. $P=\{-1, 1\}$, $Q=\{-1, 1\}$이므로 $P=Q$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 조건 p는 조건 q이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄴ이다.

답 ②

22

ㄱ. p : $a^2+b^2=0$에서 $a=0$, $b=0$

q : $a=b$

따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은

아니다.

ㄴ. $p : ab<0$에서 $a>0,\ b<0$ 또는 $a<0,\ b>0$

$q : a<0$ 또는 $b<0$

따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아니다.

ㄷ. $p : a^3-b^3=0$에서 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$이므로

$a-b=0$ 또는 $a^2+ab+b^2=0$

이때 $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$이고 $a,\ b$는 실수이므로

$a^2+ab+b^2=0$에서 $a=b=0$

즉, $a=b$ 또는 $a=b=0$이므로 $a=b$

$q : a^2-b^2=0$에서 $(a+b)(a-b)=0$이므로

$a=-b$ 또는 $a=b$

따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

이상에서 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

23

$p : |a|+|b|=0$에서 $a=0,\ b=0$

$q : a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0$이므로 $a=b$

$r : |a+b|=|a-b|$에서 $|a+b|^2=|a-b|^2$이므로

$a=0$ 또는 $b=0$

ㄱ. p는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄴ. $\sim p : a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$

$\sim r : a\neq 0$이고 $b\neq 0$

따라서 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다. (참)

ㄷ. q이고 r이면 $a=b=0$이므로

q이고 r는 p이기 위한 필요충분조건이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

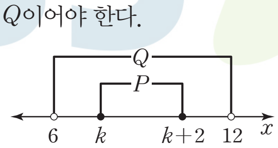
24

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{x|k\le x\le k+2\},\ Q=\{x|6<x<12\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.

이를 만족시키도록 두 집합 $P,\ Q$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$k>6$이고 $k+2<12$이므로

$6<k<10$

따라서 정수 k의 값은 7, 8, 9이므로 그 합은

$7+8+9=24$

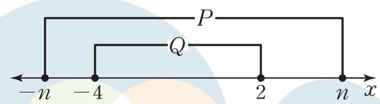
답 24

25

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{x|-n\le x\le n\},\ Q=\{x|-4\le x\le 2\}$

p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$



$-n\le -4,\ n\ge 2$이므로 $n\ge 4$

따라서 자연수 n의 최솟값은 4

답 ④

26

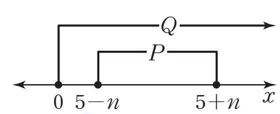
$p : |x-5|\le n$에서 $5-n\le x\le 5+n$

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{x|5-n\le x\le 5+n\},\ Q=\{x|x\ge 0\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.

이를 만족시키도록 두 집합 $P,\ Q$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$5-n\ge 0$이므로 $n\le 5$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 개수는 5이다.

답 ⑤

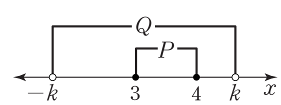
27

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{x|3\le x\le 4\},\ Q=\{x|-k<x<k\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.

이를 만족시키도록 두 집합 $P,\ Q$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$-k<3$이고 $k>4$이므로 $k>4$

따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다.

답 5

28

$p : x^2-7x+10\le 0$에서

$(x-2)(x-5)\le 0$이므로 $2\le x\le 5$

$q : (x+1)(x-a)\le 0$이고

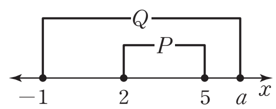
a는 자연수이므로 $-1\le x\le a$

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{x|2\le x\le 5\},\ Q=\{x|-1\le x\le a\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.

이를 만족시키도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $a\ge5$이므로 자연수 a의 최솟값은 5이다.

답 ③

29

$p : a<x<5$에 대하여

$\sim p : x\le a$ 또는 $x\ge5$

$q : x^2-x-2<0$에서

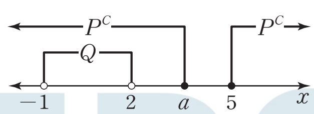
$(x+1)(x-2)<0$이므로 $-1<x<2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x\mid x\le a$ 또는 $x\ge5\}$, $Q=\{x\mid -1<x<2\}$

$\sim p$가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P^C$이어야 한다.

이를 만족시키도록 두 집합 P^C, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $2\le a<5$이므로 정수 a의 최솟값은 2이다.

답 ⑤

30

실수 전체의 집합을 U라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

'모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참인 명제가 되려면 $P=U$이어야 한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+1\ge0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=a^2-1\le0$$

$(a+1)(a-1)\le0$, $-1\le a\le1$

그러므로 정수 a는 -1, 0, 1이다.

이때 'p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.'가 참인 명제가 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하고 $P=U$이므로

$Q^C=U$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2bx+9>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0$$

$(b+3)(b-3)<0$, $-3<b<3$

그러므로 정수 b는 -2, -1, 0, 1, 2이다.

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3\times5=15$

답 ①

31

$p : x^2-4x-12=0$에서

$(x+2)(x-6)=0$이므로 $x=-2$ 또는 $x=6$

$q : |x-3|>k$에 대하여

$\sim q : |x-3|\le k$이고 k는 자연수이므로

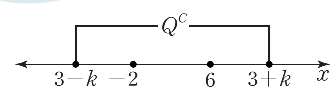
$-k\le x-3\le k$, $3-k\le x\le3+k$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{-2, 6\}$, $Q^C=\{x\mid 3-k\le x\le3+k\}$

p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 한다.

이를 만족시키도록 두 집합 P, Q^C을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$3-k\le-2$이고 $3+k\ge6$이므로 $k\ge5$

따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다.

답 ③

32

양의 실수 a, b, c에 대하여

$$(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab$$

$$=a^2-2ab+b^2$$

$$=\boxed{(a-b)^2}\ge0$$

이므로 $4ab\le(a+b)^2$이고,

같은 방법으로 $4bc\le(b+c)^2$, $4ca\le(c+a)^2$이므로

$$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$=\frac{4ab}{a+b}c+\frac{4bc}{b+c}a+\frac{4ca}{c+a}b$$

$$\le\frac{(a+b)^2}{a+b}c+\frac{(b+c)^2}{b+c}a+\frac{(c+a)^2}{c+a}b$$

$$=\boxed{2(ab+bc+ca)} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 곱셈 공식에 의하여 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge0$에서

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\ge0$

$$ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{\boxed{3}} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡으로부터

$$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\le\frac{2}{3}(a+b+c)^2 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

이때 ㉢의 양변을 $4abc$로 나누면

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\le\frac{(a+b+c)^2}{6abc}$$

따라서 (가): $(a-b)^2$, (나): $2(ab+bc+ca)$, (다): 3

답 ②

33

$|ap+bq|^2-(\sqrt{a^2p+b^2q})^2$

$=a^2p^2+2abpq+b^2q^2-(a^2p+b^2q)$

$=a^2p(p-1)+b^2q\boxed{(q-1)}+2abpq$

조건에서 $p+q=1$이므로 $q=1-p$를 위의 식에 대입하면

$a^2p(p-1)+b^2(1-p)(-p)+2abp(1-p)$

$=p(p-1)(a^2+b^2-2ab)$

$=\boxed{(a-b)^2}\,p(p-1)$

주어진 조건에서 $p\geq 0$, $p-1=-q\leq 0$이므로

$p(p-1)\boxed{\leq}0$이고, $(a-b)^2\geq 0$

$(a-b)^2p(p-1)\leq 0$

따라서 $|ap+bq|^2-(\sqrt{a^2p+b^2q})^2\leq 0$

그러므로 $|ap+bq|\leq\sqrt{a^2p+b^2q}$이다.

따라서 (가): $(q-1)$, (나): $(a-b)^2$, (다): $\leq$

답 ⑤

34

ㄱ. [반례] $a=2$, $b=-1$이면 $ab<0$이지만 $a+b>0$이다. (거짓)

ㄴ. a, b의 부호가 서로 다르므로 $|a-b|=|a|+|b|$

이때 $|a|+|b|>|a+b|$이므로

$|a-b|>|a+b|$ (참)

ㄷ. $\dfrac{a-b}{a}-\dfrac{a+b}{b}=1-\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}-1=\dfrac{-(a^2+b^2)}{ab}>0$이므로

$\dfrac{a-b}{a}>\dfrac{a+b}{b}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

35

$a>1$일 때, $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9a+\frac{1}{a-1}=9(a-1)+\frac{1}{a-1}+9$$

$$\geq 2\sqrt{9(a-1)\times\frac{1}{a-1}}+9=2\times 3+9=15$$

$\left(\text{단, 등호는 } 9(a-1)=\dfrac{1}{a-1}\text{, 즉 } a=\dfrac{4}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $9a+\dfrac{1}{a-1}$의 최솟값은 15이다.

답 15

36

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{xy}$ …… ㉠

$xy>0$, $x+y=3$에서 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)

$(x+y)^2\geq 4xy$

$\dfrac{1}{xy}\geq\dfrac{4}{(x+y)^2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{xy}\geq\dfrac{12}{(x+y)^2}=\dfrac{12}{3^2}=\dfrac{4}{3}$

따라서 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$의 최솟값은 $\dfrac{4}{3}$이다.

답 ②

37

$xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(4x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+16y\right)=4+64xy+\frac{1}{xy}+16$$

$$=20+64xy+\frac{1}{xy}$$

$$\geq 20+2\sqrt{64xy\times\frac{1}{xy}}$$

$$=20+16=36$$

$\left(\text{단, 등호는 } 64xy=\dfrac{1}{xy}\text{, 즉 } xy=\dfrac{1}{8}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\left(4x+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+16y\right)$의 최솟값은 36이다.

답 ②

38

$\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{AC}}=b$라 하면 직각삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}ab$이므로

$\dfrac{1}{2}ab=16$, $ab=32$

선분 AB가 직각삼각형 ABC의 빗변이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=a^2+b^2$

$a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

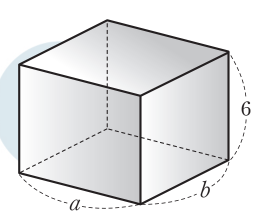
$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a^2=b^2$일 때 성립한다.)

$a^2+b^2\geq 64$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2$의 최솟값은 64

답 ③

39

오른쪽 그림과 같이 직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a, b, 6이라 하면 직육면체의 부피가 108이므로



$6ab=108$에서 $ab=18$

또한, 직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+6^2}=\sqrt{a^2+b^2+36}$

$a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a^2=b^2$일 때 성립한다.)

그런데 $ab=18$이므로

$a^2+b^2\geq 36$

따라서 $\sqrt{a^2+b^2+36}\geq 6\sqrt{2}$이므로 직육면체의 대각선의 길이의 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

답 ①

40

점 A는 직선 $y=mx+2m+3$이 x축과 만나는 점이므로
점 A의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면

$0=ma+2m+3$에서 $a=-\dfrac{2m+3}{m}$

즉, $\mathrm{A}\left(-\dfrac{2m+3}{m},\ 0\right)$

점 B는 직선 $y=mx+2m+3$이 y축과 만나는 점이므로
점 B의 좌표를 $(0,\ b)$라 하면

$b=2m+3$

즉, $\mathrm{B}(0,\ 2m+3)$

이때 $-\dfrac{2m+3}{m}<0$, $2m+3>0$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{2m+3}{m}\times(2m+3)=\frac{1}{2}\left(4m+\frac{9}{m}+12\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(4m+\frac{9}{m}\right)+6$$

$m>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2}\left(4m+\frac{9}{m}\right)+6\geq\frac{1}{2}\left(2\sqrt{4m\times\frac{9}{m}}\right)+6$$
$$=6+6=12$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 4m=\frac{9}{m},\ \text{즉 } m=\frac{3}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 12이다.

답 ⑤

41

직선 OP의 기울기는 $\dfrac{b}{a}$이므로 직선 OP에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$이다.

그러므로 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{a}{b}(x-a)+b$

$x=0$일 때, $y=b+\dfrac{a^2}{b}$이므로 점 Q의 좌표는 $\left(0,\ b+\dfrac{a^2}{b}\right)$이다.

이때 $a>0$, $b>0$이므로 삼각형 OQR의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{a}\times\left(b+\frac{a^2}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

$\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq\frac{1}{2}\times2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=1$$
$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{b}{a}=\frac{a}{b},\ \text{즉 } a=b\text{일 때 성립한다.}\right)$$

따라서 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.

답 ②

서술형 연습

본문 112쪽

01 7　　**02** $-3\leq a<2$

01

$p: x^2<a$에서 $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$

$q: x^2<x+6$에서 $x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0$, $-2<x<3$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\mid-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}\}$

$Q=\{x\mid-2<x<3\}$

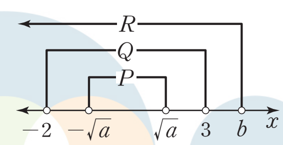
$R=\{x\mid x<b\}$ ······ ㈎

이때 $p\Longrightarrow q$이고 $q\Longrightarrow r$이므로

$P\subset Q$이고 $Q\subset R$

그러므로 $P\subset Q\subset R$

이를 만족시키도록 세 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$-2\leq-\sqrt{a}$, $\sqrt{a}\leq3$이고 $b\geq3$이므로

$0<a\leq4$, $b\geq3$ ······ ㈏

따라서 a의 최댓값 M은 4, b의 최솟값 m은 3이므로

$M+m=7$ ······ ㈐

답 7

단계	채점 기준	비율
㈎	세 조건 p, q, r의 진리집합을 구한 경우	30%
㈏	a, b의 값의 범위를 구한 경우	50%
㈐	$M+m$의 값을 구한 경우	20%

02

$x+a-2<0$에서 $x<2-a$이므로 명제 ㈎가 참이 되려면
$2-a>0$이어야 한다.

즉, $a<2$　······ ㉠ ······ ㈎

$(x-1)(x-a-3)\geq0$에서

$x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $x-1<0$이므로

$x-a-3\leq0$

$x\leq a+3$

명제 ㈏가 참이 되려면 $a+3\geq0$이어야 한다.

즉, $a\geq-3$　······ ㉡ ······ ㈏

㉠, ㉡에서 명제 ㈎, ㈏가 모두 참이 되도록 하는 a의 값의 범위는

$-3\leq a<2$ ······ ㈐

답 $-3\leq a<2$

단계	채점 기준	비율
㉮	명제 (가)가 참이 되도록 하는 a의 값의 범위를 구한 경우	40%
㉯	명제 (나)가 참이 되도록 하는 a의 값의 범위를 구한 경우	40%
㉰	명제 (가), (나)가 모두 참이 되도록 하는 a의 값의 범위를 구한 경우	20%

1등급 도전

본문 113쪽

01 ③ 02 ①

01

풀이 전략 세 진리집합 P, Q, R의 벤다이어그램을 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 세 조건 p, q, r를 이용하여 세 진리집합 P, Q, R의 포함 관계를 알아본다.

$p \Longrightarrow q$이므로 $P \subset Q$ …… ㉠

$\sim p \Longrightarrow q$이므로 $P^C \subset Q$ …… ㉡

$\sim p \Longrightarrow r$이므로 $P^C \subset R$, 즉 $R^C \subset P$ …… ㉢

~p는 조건 p의 부정이므로 ~p의 진리집합은 P^C이다.

㉠, ㉡에서

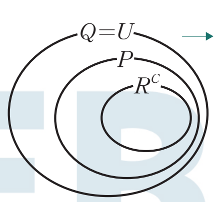
명제 $p \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow r$가 참이다.

$(P \cup P^C) \subset Q \subset U$

그런데 $P \cup P^C = U$이므로 $Q = U$ …… ㉣

STEP 2 세 진리집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타낸다.

세 진리집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.

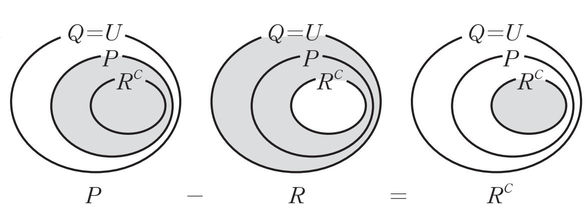


R^C도 집합이므로 그림과 같이 나타낼 수 있다.

STEP 3 벤다이어그램을 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. ㉣에서 $Q - R^C = U - R^C = R$ (참)

ㄴ.



$R^C \neq \varnothing$인 경우에는

$P - R = R^C \neq \varnothing$ (거짓)

ㄷ. ㉢, ㉣에서

$Q - P = U - P = P^C \subset R$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

02

풀이 전략 점 C의 x좌표를 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 점 C의 좌표를 a에 대한 식으로 나타낸다.

이차함수 $f(x) = x^2 - 2ax$의 그래프와 직선 $g(x) = \frac{1}{a}x$가 만나는 점 A의 x좌표는 $x^2 - 2ax = \frac{1}{a}x$에서

$x^2 - \left(2a + \frac{1}{a}\right)x = 0$, $x\left(x - 2a - \frac{1}{a}\right) = 0$

$x > 0$이므로

원점의 x좌표보다 점 A의 x좌표가 더 크다.

$x = 2a + \frac{1}{a}$

그러므로 점 A의 좌표는 $\left(2a + \frac{1}{a},\ 2 + \frac{1}{a^2}\right)$이다.

한편, 이차함수 $f(x) = x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$이므로 이 그래프의 꼭짓점 B의 좌표는 $(a,\ -a^2)$이다.

따라서 선분 AB의 중점 C의 좌표는

$\left(\frac{2a + \frac{1}{a} + a}{2},\ \frac{2 + \frac{1}{a^2} + (-a^2)}{2}\right)$

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

즉, $\left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2a},\ 1 + \frac{1}{2a^2} - \frac{a^2}{2}\right)$

STEP 2 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 선분 CH의 길이의 최솟값을 구한다.

점 H는 점 C에서 y축에 내린 수선의 발이고 $a > 0$이므로 선분 CH의 길이는 점 C의 x좌표와 같다.

즉, $\overline{CH} = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2a}$

이때 $a > 0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{3}{2}a + \frac{1}{2a} \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}a \times \frac{1}{2a}} = \sqrt{3}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{3}{2}a = \frac{1}{2a},\ \text{즉 } a = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 선분 CH의 길이의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

답 ①

08 함수의 그래프(1)

개념 확인 문제

본문 115쪽

01 (2)

02 (1), (2), (4)

03 정의역: $\{-1, 0, 1, 2\}$, 공역: $\{-1, 0, 1, 3, 5\}$, 치역: $\{-1, 0, 3\}$

04 ㄱ, ㄹ

05 일대일대응: ㄴ, ㄷ, 항등함수: ㄴ, 상수함수: ㄱ

06 (1) $(g\circ f)(x)=-x^2-4x-4$ (2) $(f\circ g)(x)=-x^2+2$ (3) 6 (4) -16

07 (1) 3 (2) 2 (3) 5 (4) 6

08 (1) -1 (2) 1 (3) -3 (4) -13

09 (1) $y=x-4$ (2) $y=-3x+6$

10 2

내신&학평 유형 연습

본문 116~123쪽

01 10	02 ④	03 ③	04 7	05 17	06 ③
07 ②	08 ④	09 12	10 ②	11 ③	12 ②
13 ②	14 ⑤	15 ②	16 ①	17 4	18 ①
19 6	20 ①	21 ①	22 4	23 ③	24 ③
25 23	26 ②	27 ④	28 13	29 ②	30 ③
31 7	32 ③	33 28	34 ④	35 ①	36 ③
37 ⑤	38 ⑤	39 ④	40 ③	41 ③	42 ②

01

함수 f의 치역은 $\{4, 6\}$이므로 치역의 모든 원소의 합은

$4+6=10$

답 10

02

두 함수 f와 g가 서로 같으려면 $x=0, 1, 2$일 때의 각 원소에 대한 함숫값이 서로 같아야 한다.

$f(0)=g(0)$에서 $3=a+b$

$f(1)=g(1)$에서 $1=b$

$f(2)=g(2)$에서 $3=a+b$

$b=1$을 $a+b=3$에 대입하면 $a=2$

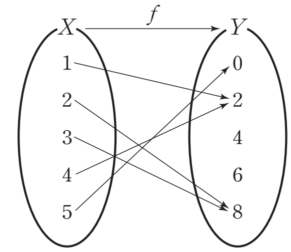
따라서 $2a-b=2\times2-1=3$

답 ④

03

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 집합 $Y=\{0, 2, 4, 6, 8\}$로의 함수 f가 $f(x)=(2x^2$의 일의 자리의 숫자$)$이므로 $f(1)=2$, $f(2)=8$, $f(3)=8$, $f(4)=2$, $f(5)=0$이다.

함수의 대응 관계를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.



함숫값이 2인 정의역 X의 원소는 1과 4이므로 $f(a)=2$인 X의 원소 a는

$a=1$ 또는 $a=4$

함숫값이 8인 정의역 X의 원소는 2와 3이므로 $f(b)=8$인 X의 원소 b는

$b=2$ 또는 $b=3$

순서쌍 (a, b)로 가능한 것은 $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$이므로 $a+b$의 값은 3, 4, 6, 7이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 7이다.

답 ③

04

조건 (가)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 7이므로 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족하는 집합 X의 원소 n은 한 개 있다. 이때 집합 X의 원소 중 함숫값으로 사용되지 않은 원소를 m이라 하자.

조건 (나)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$

$=1+2+3+4+5+6+7+8+n-m$

$=36+n-m=42$

이므로 $n-m=6$

집합 X의 두 원소 n, m에 대하여 $n-m=6$인 경우는 다음의 두 가지이다.

(i) $n=8$, $m=2$일 때,

함수 f의 치역은 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이다.

함수 f의 치역의 원소 중 최댓값은 8, 최솟값은 1이므로 그 차는 7이다. 이것은 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $n=7$, $m=1$일 때,

함수 f의 치역은 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이다.

함수 f의 치역의 원소 중 최댓값은 8, 최솟값은 2이므로 그 차는 6이다. 이것은 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $n=7$

답 7

05

$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

에서 이 함수가 일대일대응이 되기 위해서는 $a\geq2$이어야 한다.

$a\geq2$일 때, 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\geq f(a)\}$이고 치역이 집합 $Y=\{y\,|\,y\geq b\}$와 같아야 하므로 $b=f(a)$

$a-b=a-f(a)$

$=-a^2+5a-3$

$=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

$a\geq 2$에서 $a-b$의 최댓값은 $a=\frac{5}{2}$일 때 $\frac{13}{4}$ 이다.

따라서 $p=4$, $q=13$이므로

$p+q=17$

답 17

06

함수 $f(x)$가 일대일함수이고 $f(2)=4$이므로 4가 아닌 집합 Y의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(1)=a$, $f(3)=b$로 놓을 수 있다.

$f(1)+f(3)$의 최댓값은 $a+b$의 최댓값과 같다.

그런데 $a+b$의 최댓값은 $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$일 때 $2+3=5$이다.

따라서 $f(1)+f(3)$의 최댓값은 5이다.

답 ③

07

함수 $f(x)=2x+b$가 일대일대응이므로 치역과 공역이 같다.

$|y|\leq a$에서 $-a\leq y\leq a$이므로

$Y=\{y|-a\leq y\leq a,\ a>0\}$

직선 $y=f(x)$의 기울기가 양수이므로

$f(-3)=-a$에서 $-6+b=-a$ …… ㉠

$f(5)=a$에서 $10+b=a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=-2$

따라서 $a^2+b^2=64+4=68$

답 ②

보충 개념

함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면

(1) x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 증가하거나 감소해야 한다.

(2) 정의역의 양 끝 값에서의 함숫값이 공역의 양 끝 값과 같아야 한다.

08

함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 직선 $y=(a+3)x+1$의 기울기 $a+3$의 부호와 직선 $y=(2-a)x+1$의 기울기 $2-a$의 부호가 같아야 한다.

즉, $(a+3)(2-a)>0$이므로

$(a+3)(a-2)<0$

$-3<a<2$

따라서 정수 a의 값은 -2, -1, 0, 1이므로 그 개수는 4이다.

답 ④

09

$3\leq n\leq 5$인 자연수 n에 대하여 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수이므로 $f(3)\times f(5)$, $f(4)\times f(6)$, $f(5)\times f(7)$의 값은 모두 짝수이다.

이때 $f(4)$ 또는 $f(6)$은 적어도 하나가 짝수이고, 집합 X의 원소 중 짝수인 것은 4, 6뿐이므로 $f(3)\times f(5)$와 $f(5)\times f(7)$의 값이 모두 짝수이려면 $f(5)$는 짝수가 되어야 한다.

따라서 $f(3)$, $f(7)$은 모두 홀수이므로 $f(3)+f(7)$의 최댓값은 $f(3)=5$, $f(7)=7$ 또는 $f(3)=7$, $f(7)=5$일 때 $5+7=12$이다.

답 12

10

함수 $f(x)$가 항등함수이므로 $f(-3)=-3$, $f(1)=1$이다.

(i) $x<0$일 때, $f(x)=2x+a$이므로

$f(-3)=-3$에서 $-6+a=-3$, $a=3$

(ii) $x\geq 0$일 때, $f(x)=x^2-2x+b$이므로

$f(1)=1$에서 $1-2+b=1$, $b=2$

(i), (ii)에서 $a\times b=3\times 2=6$

답 ②

11

함수 $f(x)$가 항등함수가 되려면 $f(-2)=-2$, $f(-1)=-1$, $f(3)=3$이어야 한다.

(i) $x<0$일 때, $f(x)=ax^2+bx-2$이므로

$f(-2)=-2$에서 $4a-2b-2=-2$

$2a-b=0$ …… ㉠

$f(-1)=-1$에서 $a-b-2=-1$

$a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

(ii) $x\geq 0$일 때, $f(3)=3$을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a+b=-1+(-2)=-3$

답 ③

12

$g(x)$가 항등함수이므로 $g(3)=3$

조건 (가)에 의하여 $f(2)=h(6)=3$

$h(x)$가 상수함수이므로

$h(x)=3$, 즉 $h(2)=3$

한편, $f(x)$가 일대일대응이고

조건 (나)에서 $f(2)f(3)=f(6)$이고 $f(2)=3$이므로

$f(3)=2$, $f(6)=6$

따라서 $f(3)+h(2)=2+3=5$

답 ②

13

$f(x)=2x+3$에서 $f(3)=2\times 3+3=9$이므로

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(9)=9-2=7$ 답 ②

다른 풀이

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(2x+3)-2=2x+1$이므로

$(g\circ f)(3)=2\times 3+1=7$

14

주어진 그림에서 $f(2)=3$, $g(3)=5$이므로

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=5$

답 ⑤

15

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(a^2-1)$

$=2(a^2-1)-1=2a^2-3$

이므로 $(f\circ g)(a)=5$에서

$2a^2-3=5$, $a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$

답 ②

다른 풀이

함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

$(f\circ g)(a)=5$에서 $f(g(a))=5$이고 $f(3)=5$이므로

$g(a)=3$

즉, $a^2-1=3$이므로 $a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$

16

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=\frac{1}{2}h(x)+1$이고

$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$\frac{1}{2}h(x)+1=-x^2+5$

즉, $h(x)=-2x^2+8$

따라서 $h(3)=-2\times 3^2+8=-10$

답 ①

다른 풀이

$h(3)=k$라 하면

$f(h(3))=g(3)$이고 $g(3)=-3^2+5=-4$이므로

$f(k)=-4$

즉, $\frac{1}{2}k+1=-4$이므로 $k=-10$

따라서 $h(3)=-10$

17

함수 $g\circ f$가 항등함수이므로

$(g\circ f)(2)=2$에서

$g(f(2))=g(-a)=2$

$a^2-2a+b=2$ …… ㉠

$(g\circ f)(3)=3$에서

$g(f(3))=g(0)=3$

$b=3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2-2a+3=2$, $a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로

$a+b=1+3=4$

답 4

18

$f(x)=x^2-2x+a$에서

$f(2)=2^2-4+a=a$, $f(4)=4^2-8+a=a+8$

$(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$에서

$f(f(2))=f(f(4))$, $f(a)=f(a+8)$

이때 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

$a\neq a+8$이므로 $f(a)=f(a+8)$이려면

$\frac{a+(a+8)}{2}=1$, $a=-3$

따라서 $f(x)=x^2-2x-3$이므로

$f(6)=6^2-2\times 6-3=21$

답 ①

다른 풀이

$f(x)=x^2-2x+a$에서

$f(2)=2^2-4+a=a$, $f(4)=4^2-8+a=a+8$

$(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$에서

$f(f(2))=f(f(4))$, $f(a)=f(a+8)$

즉, $a^2-2a+a=(a+8)^2-2(a+8)+a$이므로

$16a=-48$, $a=-3$

따라서 $f(x)=x^2-2x-3$이므로

$f(6)=6^2-2\times 6-3=21$

19

$(f\circ f)(a)=f(a)$에서

$f(a)=t$로 치환하면 $f(t)=t$

$t<2$일 때, $2t+2=t$에서 $t=-2$

$t\geq 2$일 때, $t^2-7t+16=t$, $(t-4)^2=0$에서 $t=4$

(i) $t=-2$인 경우

$f(a)=-2$에서

$a<2$일 때, $2a+2=-2$, $a=-2$

$a\geq 2$일 때, $a^2-7a+16=-2$, $a^2-7a+18=0$

$a^2-7a+18=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\times 1\times 18=-23<0$

이므로 $a\geq 2$일 때, $f(a)=-2$를 만족시키는 실수 a의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $t=4$인 경우

$f(a)=4$에서

$a<2$일 때, $2a+2=4$, $a=1$

$a\geq 2$일 때, $a^2-7a+16=4$

$a^2-7a+12=0$, $(a-3)(a-4)=0$

$a=3$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에서 $(f\circ f)(a)=f(a)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은

$-2+1+3+4=6$

답 6

20

주어진 그림에서

$(h\circ f)(3)=h(f(3))=h(2)$ …… ㉠

한편, $f\circ h=g$이므로 $(f\circ h)(2)=f(h(2))=g(2)$

즉, $f(h(2))=3$

이때 $f(1)=3$이므로 $h(2)=1$

따라서 ㉠에서 $(h\circ f)(3)=h(2)=1$

답 ①

21

함수 $f(x)=x^2-(k+1)x+2k$ (k는 2가 아닌 실수)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)-x=x^2-(k+2)x+2k$

$=(x-k)(\boxed{x-2})$

이때 $f(k)-k=0$, $f(2)-2=0$에서 $f(k)=k$, $f(2)=2$이므로

함수 $g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$에 대하여

$g(k)=f(f(k))=f(k)=\boxed{k}$

$g(2)=f(f(2))=f(2)=\boxed{2}$

$g(k)-k=0$, $g(2)-2=0$에서 다항식 $g(x)-x$는 $x-k$와 $\boxed{x-2}$를 인수로 가지므로 다항식 $g(x)-x$는 다항식 $(x-k)(x-2)$, 즉 $f(x)-x$로 나누어떨어진다.

따라서 $p(x)=x-2$, $q(k)=k$, $a=2$이므로

$p(5)+q(4)+a=3+4+2=9$

답 ①

22

$f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$3k-7=5$, $k=4$

따라서 $f^{-1}(5)=4$

답 4

다른 풀이

$y=3x-7$로 놓고 x에 대하여 풀면

$3x=y+7$, $x=\frac{1}{3}y+\frac{7}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$이므로

$f^{-1}(5)=\frac{1}{3}\times5+\frac{7}{3}=4$

보충 개념

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 주어진 함수 $y=f(x)$가 일대일대응인지 확인한다.
(ii) $y=f(x)$를 x에 대하여 푼다. 즉, $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 고친다.
(iii) $x=f^{-1}(y)$에서 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

23

주어진 그림에서 $f(3)=1$, $f(7)=3$

함수 f는 일대일대응이므로 $f^{-1}(3)=7$

따라서 $f(3)+f^{-1}(3)=1+7=8$

답 ③

24

$f^{-1}(5)=1$에서 $f(1)=5$이므로

$2+k=5$

따라서 $k=3$

답 ③

25

함수 $f(x)$는 일차함수이므로 그 역함수 $g(x)$도 일차함수이다.

$g(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하자.

$f(14)=3$에서 $g(3)=14$이므로 $3a+b=14$ …… ㉠

$g(2)=11$이므로 $2a+b=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=5$

따라서 $g(x)=3x+5$이므로

$g(6)=3\times6+5=23$

답 23

26

함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다.

$f(1)+2f(3)=12$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(1)=2$, $f(3)=5$ …… ㉠

$f^{-1}(1)-f^{-1}(3)=2$에서 $f^{-1}(1)\in X$, $f^{-1}(3)\in X$이므로

$f^{-1}(1)=3$, $f^{-1}(3)=1$ 또는 $f^{-1}(1)=4$, $f^{-1}(3)=2$ 또는

$f^{-1}(1)=5$, $f^{-1}(3)=3$

㉠에서 $f^{-1}(2)=1$, $f^{-1}(5)=3$이고 함수 f^{-1}도 일대일대응이므로

$f^{-1}(1)=4$, $f^{-1}(3)=2$

즉, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=1$이고 함수 f는 일대일대응이므로

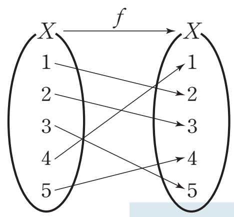
$f(5)=4$

즉, $f^{-1}(4)=5$

따라서 $f(4)+f^{-1}(4)=1+5=6$

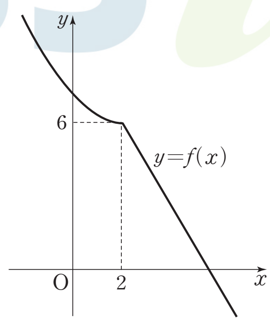
답 ②

참고



27

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같아야 한다.



직선 $y=-2x+10$은 점 $(2,\ 6)$을 지나므로 곡선 $y=a(x-2)^2+b$가 점 $(2,\ 6)$을 지나야 한다.
즉, $6=a(2-2)^2+b$이므로 $b=6$
또, $x \geq 2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 기울기가 음수인 직선이므로 $x<2$일 때, 곡선 $y=a(x-2)^2+b$의 모양은 아래로 볼록해야 한다.
즉, $a>0$
따라서 정수 a의 최솟값은 1이므로 $a+b$의 최솟값은
$1+6=7$

답 ④

28

$(g \circ f^{-1})(2)=g(f^{-1}(2))$에서
$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$
즉, $\frac{1}{2}k=2$이므로 $k=4$
따라서
$(g \circ f^{-1})(2)=g(f^{-1}(2))=g(4)$
$=2\times4+5=13$

답 13

다른 풀이

$f(x)=\frac{1}{2}x$에서 $y=\frac{1}{2}x$로 놓고 x에 대하여 풀면
$x=2y$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x$
즉, $f^{-1}(x)=2x$이므로
$(g \circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))=g(2x)$
$=2\times2x+5$
$=4x+5$
따라서 $(g \circ f^{-1})(2)=4\times2+5=13$

29

주어진 그림에서 $g(4)=6$
또, $f^{-1}(6)=k$라 하면 $f(k)=6$이므로 $k=2$
따라서 $(f^{-1} \circ g)(4)=f^{-1}(g(4))=f^{-1}(6)=2$

답 ②

30

$(f \circ g^{-1})(k)=7$에서 $f(g^{-1}(k))=7$
$g^{-1}(k)=a$라 하면 $f(a)=7$이므로
$4a-5=7,\ a=3$
따라서 $g^{-1}(k)=3$이므로
$k=g(3)=3\times3+1=10$

답 ③

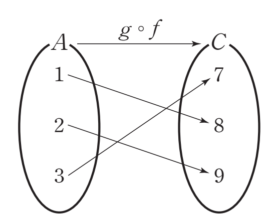
31

함수 g의 역함수가 존재하므로 함수 g는 일대일대응이다.
$g^{-1}(1)=3$에서 $g(3)=1$
$(g \circ f)(2)=g(f(2))=2$이고
주어진 그림에서 $f(2)=1$이므로 $g(1)=2$
따라서 $g(2)=3,\ g(3)=1,\ g(1)=2$이므로
$g(4)=4$에서 $g^{-1}(4)=4$
그러므로
$g^{-1}(4)+(f \circ g)(2)=4+f(g(2))=4+f(3)$
$=4+3=7$

답 7

32

주어진 그림에서



$(g \circ f)^{-1}(8)=1$이므로
$(g \circ f)(1)=8$, 즉 $g(f(1))=8$
$(g \circ f)^{-1}(9)=2$이므로
$(g \circ f)(2)=9$, 즉 $g(f(2))=9$
$(g \circ f)^{-1}(7)=3$이므로
$(g \circ f)(3)=7$, 즉 $g(f(3))=7$
$g(6)=9$이고 함수 g는 일대일대응이므로
$g(f(2))=9$에서 $f(2)=6$
또한, $f(1)=4,\ f(2)=6$이고 함수 f는 일대일대응이므로
$f(3)=5$
$g(f(3))=7$에서 $f(3)=5$이므로 $g(5)=7$
따라서 $f(2)+g(5)=6+7=13$

답 ③

33

$f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 실수 a에 대하여
$(f \circ f^{-1})(a)=f(f^{-1}(a))=a$

따라서

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(f\circ f^{-1})(a))$

$=f^{-1}(f(f^{-1}(a)))$

$=f^{-1}(a)$

이때 $f^{-1}(a)=3$이므로

$a=f(3)=3^3+1=28$

답 28

34

$y=f(2x+3)$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=f(2y+3)$, 즉 $f^{-1}(x)=2y+3$

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(x)=2y+3$

즉, $y=\frac{1}{2}g(x)-\frac{3}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$이므로 $a+b=-1$

답 ④

35

주어진 그래프에서 $f(c)=b$이므로

$g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)$

$g^{-1}(b)=k$라 하면 $g(k)=b$

주어진 그래프에서 $g(a)=b$이므로 $k=a$

따라서 $g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)=a$

답 ①

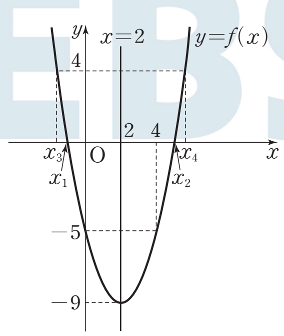
36

함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -9)$이므로 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

또한, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ -5)$를 지나므로 방정식 $f(x)=-5$를 만족시키는 한 근이 $x=0$이고, 다른 한 근은 $x=4$이다.

즉, $f(0)=f(4)=-5$이므로 $f(f(x))=-5$에서

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=4$



방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 x_1, x_2라 하고, 방정식 $f(x)=4$를 만족시키는 x의 값을 x_3, x_4라 하면 x_1과 x_2, x_3과 x_4는 각각 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$x_1+x_2=4$, $x_3+x_4=4$

따라서 방정식 $f(f(x))=-5$를 만족시키는 모든 실근의 합은

$x_1+x_2+x_3+x_4=4+4=8$

답 ③

37

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=2$이고 $f(1)=2$이므로

$g(1)=1$

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=1$이고 $f(5)=1$이므로

$g(2)=5$

$(g\circ f)^{-1}(1)=(f^{-1}\circ g^{-1})(1)=f^{-1}(g^{-1}(1))$

이때 $g(1)=1$에서 $g^{-1}(1)=1$이므로

$(g\circ f)^{-1}(1)=f^{-1}(1)=5$

따라서

$g(2)+(g\circ f)^{-1}(1)=5+5=10$

답 ⑤

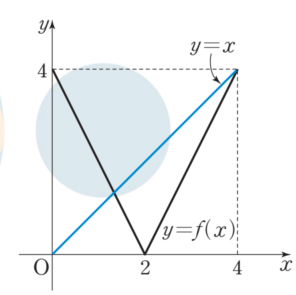
38

ㄱ. $f(1)=|2\times1-4|=|-2|=2$이므로

$f(f(1))=f(2)=|2\times2-4|=0$ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 개수와 같다.

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=x$의 실근의 개수는 2이다. (참)



ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 놓으면 방정식 $f(t)=t$를 만족시키는 해를 구해 보면

$|2t-4|=t$에서 $t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=4$

즉, $f(x)=\frac{4}{3}$ 또는 $f(x)=4$

(i) $f(x)=\frac{4}{3}$인 경우

$|2x-4|=\frac{4}{3}$에서

$x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=\frac{8}{3}$

(ii) $f(x)=4$인 경우

$|2x-4|=4$에서

$x=0$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은

$\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+0+4=8$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이

ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근은 함수 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표와 같다.

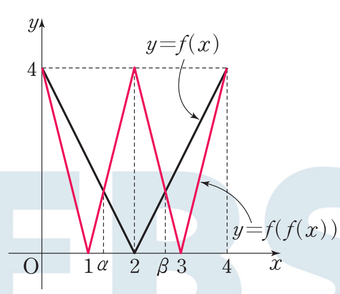
$f(f(x))=|2f(x)-4|$

$$=\begin{cases} 2f(x)-4 & (f(x)\geq 2) \\ 4-2f(x) & (f(x)<2) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2|2x-4|-4 & (0\leq x\leq 1 \text{ 또는 } 3\leq x\leq 4) \\ 4-2|2x-4| & (1<x<3) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -4x+4 & (0\leq x\leq 1) \\ 4x-4 & (1<x<2) \\ -4x+12 & (2\leq x<3) \\ 4x-12 & (3\leq x\leq 4) \end{cases}$$

그러므로 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근은 다음 그림과 같이 0, α, β, 4이다.



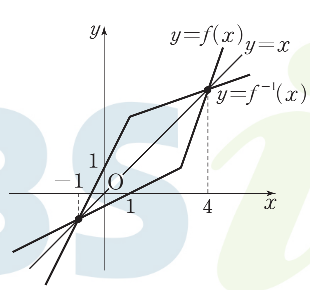
한편, 함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$\alpha+\beta=4$

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근의 합은 8이다. (참)

39

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\{f(x)\}^2=f(x)f^{-1}(x)$에서

$f(x)\{f(x)-f^{-1}(x)\}=0$

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=f^{-1}(x)$

(i) $f(x)=0$에서 $x=1$

(ii) $f(x)=f^{-1}(x)$를 만족시키는 x의 값은 $f(x)=x$를 만족시키는 x의 값과 같으므로

$x=-1$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 모든 실수 x의 값의 합은

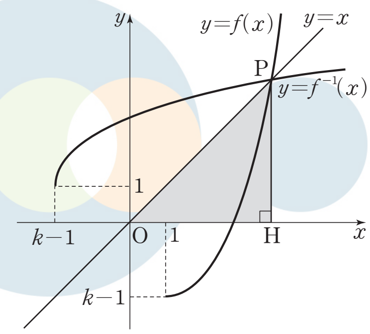
$1+(-1)+4=4$

답 ④

40

$f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$ $(x\geq 1)$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점 P는 직선 $y=x$ 위에 있다.

점 P의 좌표를 $(t,\ t)$라 하면 삼각형 POH의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times t\times t=8$, $t^2=16$

$t\geq 1$이므로 $t=4$

한편, 점 $\mathrm{P}(4,\ 4)$는 함수 $f(x)=x^2-2x+k$의 그래프 위의 점이므로

$f(4)=4^2-2\times 4+k=4$

따라서 $k=-4$

답 ③

41

ㄱ. $x\geq 0$일 때, $f(x)=x$이므로

$f(f(10))=f(10)=10$ (참)

ㄴ. 주어진 그래프에서 $f(-1)=-2$이므로

$f^{-1}(-2)=-1$ (참)

ㄷ. $f(x)=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ 2x & (x<0) \end{cases}$에서 $f^{-1}(x)=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ \frac{1}{2}x & (x<0) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $x\geq 0$인 구간에서 일치한다.

따라서 두 그래프의 교점은 무수히 많다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

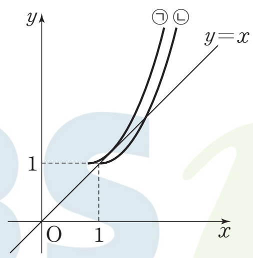
답 ③

42

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점과 같다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

이때 $f(x)=x^2-2kx+k^2+1=(x-k)^2+1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 항상 점 $(k, 1)$을 지난다.
오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 ㉠과 같이 직선 $y=x$에 접할 때의 k의 값을 a, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 ㉡과 같이 점 $(1, 1)$을 지날 때의 k의 값을 b라 하면 $a<k\le b$일 때 두 그래프는 서로 다른 두 점에서 만나므로 k의 최댓값은 b이다.



함수 $y=f(x)$의 그래프가 ㉡일 때 점 $(1, 1)$을 지나므로
$1-2b+b^2+1=1$, $(b-1)^2=0$
$b=1$
따라서 k의 최댓값은 1이다.

답 ②

서술형 연습

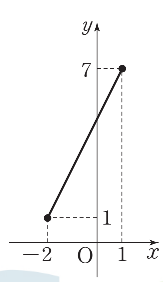
본문 124쪽

01 $(2, 5)$, $(-2, 3)$ **02** 5

01

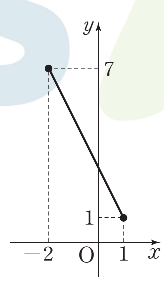
(i) $a=0$일 때, $f(x)=b$가 되어 일대일대응이 될 수 없다. ······ ㉮

(ii) $a>0$일 때, 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이 되려면 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-2)=1$, $f(1)=7$
$-2a+b=1$, $a+b=7$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=5$
따라서 순서쌍 (a, b)는 $(2, 5)$이다. ······ ㉯

(iii) $a<0$일 때, 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이 되려면 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-2)=7$, $f(1)=1$
$-2a+b=7$, $a+b=1$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-2$, $b=3$
따라서 순서쌍 (a, b)는 $(-2, 3)$이다. ······ ㉰

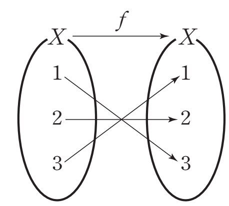
(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)는 $(2, 5)$, $(-2, 3)$이다. ······ ㉱

답 $(2, 5)$, $(-2, 3)$

단계	채점 기준	비율
㉮	$a=0$일 때, 함수 $f(x)$가 일대일대응이 될 수 없음을 구한 경우	30%
㉯	$a>0$일 때, 순서쌍 (a, b)를 구한 경우	30%
㉰	$a<0$일 때, 순서쌍 (a, b)를 구한 경우	30%
㉱	답을 구한 경우	10%

02

조건 (가)에서 g가 항등함수이므로 $g(x)=x$
이때 조건 (나)에 의하여 $f(2)=g(2)=2$이므로
$f^{-1}(2)=2$ ······ ㉮
또, $g(1)=1$, $g(3)=3$이므로 조건 (다)에 의하여
$3f(1)\neq f(3)$
이때 조건 (가)에서 f는 일대일함수이므로



$f(1)=3$
$f(3)=1$
따라서 $(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=3$이므로 ······ ㉯
$(f\circ f)(3)+f^{-1}(2)=3+2=5$ ······ ㉰

답 5

단계	채점 기준	비율
㉮	$f^{-1}(2)$의 값을 구한 경우	40%
㉯	$(f\circ f)(3)$의 값을 구한 경우	50%
㉰	$(f\circ f)(3)+f^{-1}(2)$의 값을 구한 경우	10%

1등급 도전

본문 125쪽

01 ② **02** ① **03** ⑤

01

풀이 전략 합성함수의 성질을 이용하여 정육각형 위을 움직이는 점의 위치를 추론한다.

문제 풀이

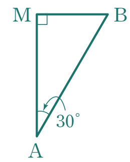
STEP 1 x의 값의 범위를 구하여 $f(x)=\frac{9}{32}$를 만족시키는 x의 값을 구한다.

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=\frac{9}{32}$에서 $f(a)=b$라 하면
$f(b)=\frac{9}{32}$
이다. 함수 $f(x)$가 삼각형 PFA의 넓이이므로 함수 $f(x)$는 점 P가 선분 CD에 있을 때 최댓값을 갖는다.
선분 AC의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 MAB에서 $\angle MAB=30^\circ$이므로

$\overline{AC}=2\overline{AM}$

$\quad=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

△MAB에서
$\overline{AM}=\overline{AB}\cos 30^\circ$
$=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}$



함수 $f(x)$의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{FA}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

이므로 $0<b\le\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$이다.

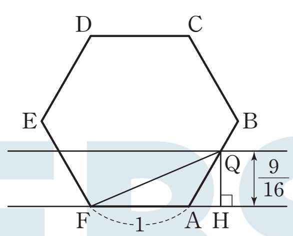
$0<b\le\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}<1$이고
점 Q는 점 A에서 출발하므로
$\overline{AB}$ 위에 있다.

점 P가 점 A로부터 움직인 거리가 b인 점을 Q라 하면 점 Q는 선분 AB 위에 있고, 삼각형 QFA의 넓이는 $\frac{9}{32}$이다.

점 Q에서 직선 FA에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 QFA의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{FA}\times\overline{QH}=\frac{1}{2}\times1\times\overline{QH}=\frac{9}{32}$

이므로 $\overline{QH}=\frac{9}{16}$



[그림 1]

[그림 1]의 직각삼각형 QAH에서 $\angle QAH=60^\circ$이므로

$b=\overline{AQ}=\overline{QH}\times\frac{1}{\sin 60^\circ}$

$\quad=\frac{9}{16}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{8}}$

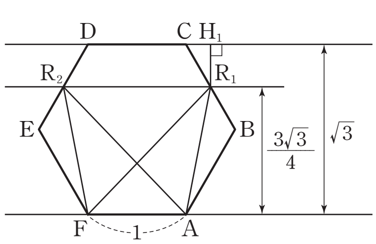
STEP 2 합성함수의 정의를 이용하여 $(f\circ f)(x)=\frac{9}{32}$를 만족시키는 x의 값을 구한다.

점 P가 점 A로부터 움직인 거리가 a인 점을 R라 하고, 점 R에서 직선 FA에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 RFA의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{FA}\times\overline{RI}$이므로

$f(a)=\frac{1}{2}\times1\times\overline{RI}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$에서 $\overline{RI}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\overline{RI}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이 되는 점 R의 위치는 [그림 2]의 R_1과 R_2이다.



[그림 2]

점 R의 위치가 R_1일 때, $a=\overline{AB}+\overline{BR_1}$

점 R_1에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 직각삼각형 R_1CH_1에서 $\angle R_1CH_1=60^\circ$이므로

$a=\overline{AB}+\overline{BR_1}$

$\quad=\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{R_1C}$

$\quad=1+1-\overline{R_1H_1}\times\frac{1}{\sin 60^\circ}$

$\quad=2-\left(\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\times\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\quad=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$0<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(5-x)$가 성립하므로 점 R의 위치가 R_2일 때의 실수 a의 값은

$5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

즉, $a=\boxed{\frac{3}{2}}$ 또는 $a=\boxed{\frac{7}{2}}$

따라서 $(f\circ f)(a)=\frac{9}{32}$를 만족시키는 모든 실수 a $(0<a<5)$의 값의 곱은

$\frac{3}{2}\times\frac{7}{2}=\boxed{\frac{21}{4}}$

이다.

STEP 3 p, q, r의 값을 구하여 $\frac{r}{p\times q}$의 값을 구한다.

따라서 $p=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $q=\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $r=\frac{21}{4}$이므로

$$\frac{r}{p\times q}=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{8}}=\frac{28}{3}$$

답 ②

02

풀이 전략 일대일대응과 합성함수를 이용하여 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수를 알아본다.

문제 풀이

STEP 1 조건을 이용하여 함수 $g\circ f$의 치역을 구해 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 함수 f는 일대일대응이고, 집합 $X\cap Y=\{2, 3, 4\}$의 모든 원소 x에 대하여 $g(x)-f(x)=1$이므로 $f(x)=5$인 x가 존재하면 $g(x)=6$이 되어 모순이다.

$Z=\{3, 4, 5\}$이므로 $6\notin Z$

그러므로 집합 $X\cap Y=\{2, 3, 4\}$의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\le4$이고, 함수 f는 일대일대응이므로

$\{f(2), f(3), f(4)\}=\{2, 3, 4\}$

$g(x)=f(x)+1$에서

조건 (나)에서 $g(x)-f(x)=1$이므로

$\{g(2), g(3), g(4)\}=\{3, 4, 5\}$

따라서 함수 $g\circ f$의 치역은 Z이다. (참)

[STEP 2] ㄱ과 조건을 이용하여 $f^{-1}(5)$의 값을 구해 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. ㄱ에서 $\{f(2), f(3), f(4)\}=\{2, 3, 4\}$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(1)=5$

함수 f는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

따라서 $f^{-1}(5)=1$ (거짓)

[STEP 3] ㄴ과 조건을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. ㄴ에서 $f(1)=5$이므로

$f(3)<g(2)<f(1)$에서

$f(3)<g(2)<5$ …… ㉠

(ⅰ) $g(2)=3$인 경우

$f(2)=g(2)-1=2$

함수 f는 일대일대응이므로 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=4$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $g(2)=4$인 경우

$f(2)=g(2)-1=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(3)<4$이므로 $f(3)=2$

함수 f는 일대일대응이므로 $f(4)=4$

따라서 $f(4)+g(2)=4+4=8$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(4)+g(2)=8$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

03

풀이 전략 함수 $g(x)$가 일대일대응임을 알고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

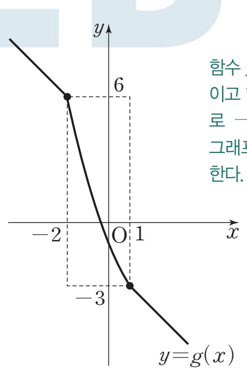
문제 풀이

[STEP 1] 함수 $g(x)$가 일대일대응이 되도록 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

함수 $g(x)$의 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이고 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $g(x)$는 일대일대응이다.

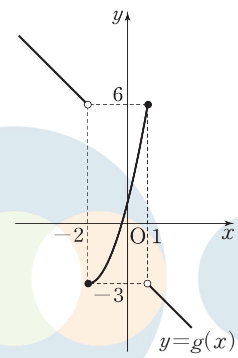
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 두 가지이다.

(ⅰ) $g(-2)=f(-2)=6$, $g(1)=f(1)=-3$일 때,



함수 $f(x)$는 치역이 $-3\le y\le 6$이고 함수 $g(x)$는 일대일대응이므로 $-2\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 증가하거나 감소하여야 한다.

(ⅱ) $g(-2)=f(-2)=-3$, $g(1)=f(1)=6$일 때,



[STEP 2] (ⅰ), (ⅱ)를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. (ⅰ), (ⅱ)에서 $f(-2)+f(1)=3$ (참)

[STEP 3] ㄴ의 조건인 $g(0)=-1$, $g(1)=-3$을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $g(0)=f(0)=-1$, $g(1)=f(1)=-3$을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 (ⅰ)과 같다.

$f(x)=ax^2+bx-1$ (a, b는 상수, $a>0$)이라 하면

$f(1)=-3$, $f(-2)=6$이어야 하므로

$a+b-1=-3$, $4a-2b-1=6$

$f(x)$에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=a+b-1$

즉, $a+b=-2$, $4a-2b=7$

$f(x)$에 $x=-2$를 대입하면 $f(-2)=a\times(-2)^2+b\times(-2)-1=4a-2b-1$

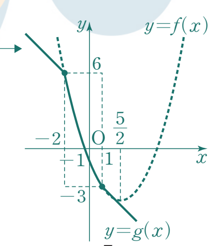
위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$

따라서

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-1$

$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{8}$



이므로 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다. (참)

[STEP 4] ㄷ의 조건인 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 -2임을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 -2이면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 (ⅱ)와 같다.

$f(x)=c(x+2)^2+d$ (c, d는 상수, $c>0$)이라 하면

$f(-2)=-3$, $f(1)=6$이어야 하므로

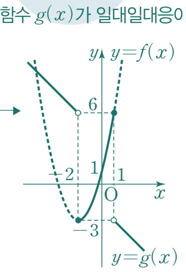
함수 $g(x)$가 일대일대응이어야 한다.

$d=-3$, $9c+d=6$에서 $c=1$

따라서 $f(x)=(x+2)^2-3$이고

$g(0)=f(0)=1$이므로

$g^{-1}(1)=0$ (참)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

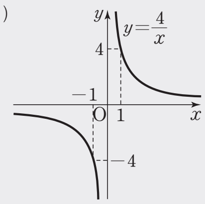
09 함수의 그래프(2)

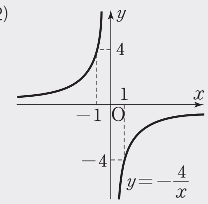
개념 확인 문제

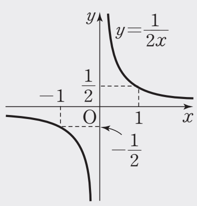
본문 127쪽

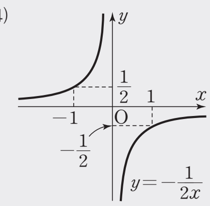
01 (1) $\dfrac{3x}{(x-2)(x+1)}$ (2) $\dfrac{x^2+2x+3}{x(x+1)(x-1)}$

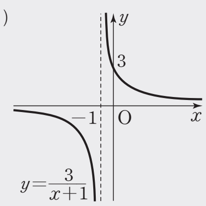
02 (1) $\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$ (2) $(x+1)^2$

03 (1)


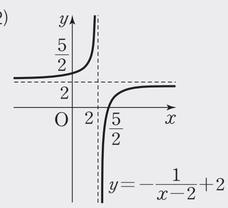
(2)


(3)


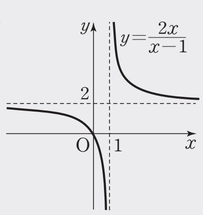
(4)


04 (1)


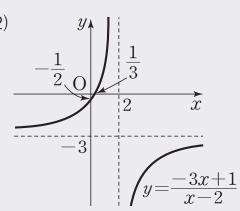
정의역: $\{x|x\neq-1\}$
치역: $\{y|y\neq0\}$
점근선: $x=-1$, $y=0$

(2)


정의역: $\{x|x\neq2\}$
치역: $\{y|y\neq2\}$
점근선: $x=2$, $y=2$

05 (1)


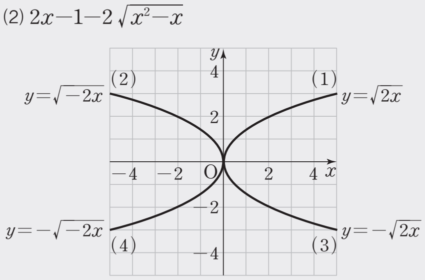
정의역: $\{x|x\neq1\}$
치역: $\{y|y\neq2\}$
점근선: $x=1$, $y=2$

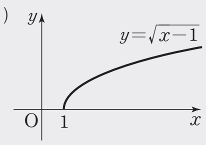
(2)


정의역: $\{x|x\neq2\}$
치역: $\{y|y\neq-3\}$
점근선: $x=2$, $y=-3$

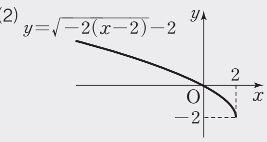
06 (1) $x-3$ (2) $\dfrac{2x+2}{x-1}$

07 (1) $-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}$
(2) $2x-1-2\sqrt{x^2-x}$

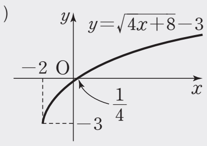
08


09 (1)


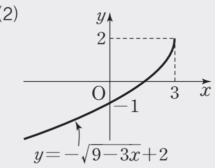
정의역: $\{x|x\geq1\}$
치역: $\{y|y\geq0\}$

(2)


정의역: $\{x|x\leq2\}$
치역: $\{y|y\geq-2\}$

10 (1)


정의역: $\{x|x\geq-2\}$
치역: $\{y|y\geq-3\}$

(2)


정의역: $\{x|x\leq3\}$
치역: $\{y|y\leq2\}$

내신&학평 유형 연습

본문 128~136쪽

01 10	02 ③	03 ③	04 12	05 ③	06 ②
07 ①	08 ⑤	09 ②	10 ③	11 ②	12 ④
13 ④	14 ②	15 ③	16 ③	17 ①	18 ③
19 ⑤	20 ①	21 ①	22 ①	23 ④	24 18
25 ①	26 ②	27 ④	28 ③	29 ④	30 ③
31 ③	32 ③	33 ①	34 ⑤	35 ②	36 ②
37 ③	38 ③	39 ②	40 11	41 27	42 7
43 ③	44 ②	45 ⑤	46 ③	47 ②	48 16

01

$a\neq b$이므로

$$\frac{(a-5)^2}{a-b}+\frac{(b-5)^2}{b-a}=\frac{(a-5)^2-(b-5)^2}{a-b}=\frac{a^2-b^2-10a+10b}{a-b}$$
$$=\frac{(a+b)(a-b)-10(a-b)}{a-b}$$
$$=\frac{(a+b-10)(a-b)}{a-b}$$
$$=a+b-10$$

즉, $a+b-10=0$이므로 $a+b=10$

답 10

02

$$\frac{1-\dfrac{1}{x+1}}{1+\dfrac{1}{x-1}}=\frac{\dfrac{x+1-1}{x+1}}{\dfrac{x-1+1}{x-1}}=\frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x-1}}=\frac{x-1}{x+1}$$

모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{px+q}{x+1}$가 성립하므로

$x-1=px+q$에서 $p=1$, $q=-1$

따라서 $p+q=0$

답 ③

03

$a+b+c=0$이므로

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-3$$

답 ③

04

$m\neq-3$이므로

$$\frac{3m+9}{m^2-9}=\frac{3(m+3)}{(m+3)(m-3)}=\frac{3}{m-3}$$

위의 식의 값이 정수가 되려면 $m-3$의 값은 -3, -1, 1, 3이어야 하므로 m의 값은 0, 2, 4, 6이다.

따라서 모든 m의 값의 합은

$0+2+4+6=12$

답 12

05

$$\begin{cases} x-y+z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3y+z=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡$-$㉠을 하면 $x-2y=0$, $x=2y$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $2y-y+z=0$, $z=-y$

따라서

$$\frac{x^2-y^2+2z^2}{2xy+yz-3zx}=\frac{(2y)^2-y^2+2(-y)^2}{2(2y)y+y(-y)-3(-y)(2y)}$$

$$=\frac{4y^2-y^2+2y^2}{4y^2-y^2+6y^2}=\frac{5y^2}{9y^2}=\frac{5}{9}$$

답 ③

06

$$y=\frac{3x-1}{x-1}=\frac{3(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+3$$

이므로 함수 $y=\frac{3x-1}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=1$, $b=3$이므로 $a+b=4$

답 ②

다른 풀이

함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$$y=\frac{2}{x-a}+b=\frac{2+b(x-a)}{x-a}=\frac{bx+2-ab}{x-a}$$

이 함수의 그래프는 함수 $y=\frac{3x-1}{x-1}$의 그래프와 일치하므로

$a=1$, $b=3$

따라서 $a+b=4$

07

함수 $y=\frac{1}{x+1}-3$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

$$y=\frac{1}{x+1}-3+a$$

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$$0=\frac{1}{0+1}-3+a$$

따라서 $a=2$

답 ①

08

함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면

$$y=\frac{3}{x-4}+5$$

이 함수의 그래프가 점 $(5,\ a)$를 지나므로

$$a=\frac{3}{5-4}+5=8$$

답 ⑤

09

$$y=\frac{bx-5}{x+a}=\frac{b(x+a)-5-ab}{x+a}=\frac{-ab-5}{x+a}+b$$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=b$이므로

$-a=-1$, $b=2$

즉, $a=1$, $b=2$이므로 $a+b=3$

답 ②

다른 풀이

점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=2$이므로 주어진 함수를

$y=\frac{k}{x+1}+2=\frac{2x+2+k}{x+1}$ $(k\neq0)$으로 놓을 수 있다.

즉, $\frac{2x+2+k}{x+1}=\frac{bx-5}{x+a}$이므로 $a=1$, $b=2$

따라서 $a+b=3$

10

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-k}=\frac{3(x-k)+1+3k}{x-k}=\frac{3k+1}{x-k}+3$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=k$, $y=3$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표가 $(k,\ 3)$이고, 이 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$k=3$

답 ③

11

$$y=\frac{ax+1}{bx+1}=\frac{a\left(x+\frac{1}{b}\right)-\frac{a}{b}+1}{b\left(x+\frac{1}{b}\right)}=\frac{-\frac{a}{b}+1}{b\left(x+\frac{1}{b}\right)}+\frac{a}{b}$$

이 함수의 그래프의 한 점근선이 직선 $y=2$이므로

$\frac{a}{b}=2$, 즉 $a=2b$ ······ ㉡

함수 $y=\frac{ax+1}{bx+1}$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$3=\frac{2a+1}{2b+1}$, 즉 $a=3b+1$ ······ ㉠

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-1$

따라서 $a^2+b^2=4+1=5$

답 ②

12

곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$이 x축과 만나는 점 A의 x좌표는

$0=\frac{k}{x-2}+1$에서 $x=2-k$이므로 $A(2-k, 0)$

곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$이 y축과 만나는 점 B의 y좌표는

$y=\frac{k}{0-2}+1=-\frac{k}{2}+1$이므로 $B\left(0, -\frac{k}{2}+1\right)$

곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$의 두 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$이므로

$C(2, 1)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\frac{1-0}{2-(2-k)}=\frac{1-\left(-\frac{k}{2}+1\right)}{2-0}$, $\frac{1}{k}=\frac{k}{4}$, $k^2=4$

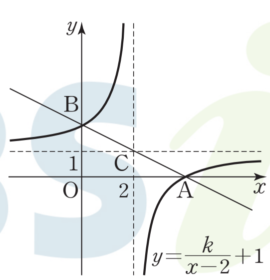
$k<0$이므로 $k=-2$

답 ④

다른 풀이

유리함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$ $(k<0)$의 두 점근선의 교점 $C(2, 1)$과 곡선 위의 두 점 A, B가 한 직선 위에 있으려면 두 점 A, B는 점 C에 대하여 대칭이어야 한다.



두 점 A, B가 각각 x축, y축 위의 점이므로 두 점의 좌표가 각각 $(a, 0)$, $(0, b)$로 놓을 수 있다.

점 C가 선분 AB의 중점이므로

$\frac{a+0}{2}=2$, $\frac{0+b}{2}=1$, 즉 $a=4$, $b=2$

따라서 곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$이 점 $A(4, 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{4-2}+1=\frac{k}{2}+1$, $k=-2$

13

$$f(x)=\frac{x+1}{2x-1}=\frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{2x-1}=\frac{\frac{3}{2}}{2x-1}+\frac{1}{2}=\frac{\frac{3}{4}}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

$p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$

따라서 $p+q=1$

답 ④

14

$$y=\frac{3x-14}{x-5}=\frac{3(x-5)+1}{x-5}=\frac{1}{x-5}+3$$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=5$, $y=3$

따라서 주어진 함수의 그래프가 직선 $y=x+k$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+k$는 점근선의 교점 $(5, 3)$을 지난다.

즉, $3=5+k$이므로 $k=-2$

답 ②

15

$$y=\frac{3x+b}{x+a}=\frac{3(x+a)+b-3a}{x+a}=\frac{-3a+b}{x+a}+3$$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=3$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점근선의 교점 $(-a, 3)$에 대하여 대칭이므로

$a=2$, $c=3$

즉, 함수 $y=\frac{3x+b}{x+2}$의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1=\frac{6+b}{4}$, $b=-2$

따라서 $a+b+c=2+(-2)+3=3$

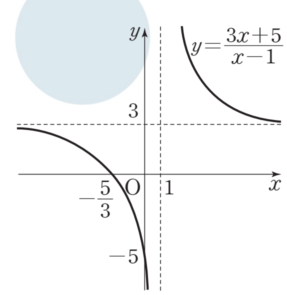
답 ③

16

$$y=\frac{3x+5}{x-1}=\frac{3(x-1)+8}{x-1}$$

$$=\frac{8}{x-1}+3$$

이므로 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=3$ 이다. (참)

ㄴ. 그래프는 제3사분면을 지난다. (참)

ㄷ. 그래프는 점근선의 교점 $(1, 3)$을 지나고 기울기가 1 또는 -1 인 직선에 대하여 대칭이다.

이때 이 직선의 방정식은 $y-3=\pm(x-1)$

즉, $y=x+2$ 또는 $y=-x+4$

따라서 그래프는 직선 $y=x+3$에 대하여 대칭이 아니다. (거짓)

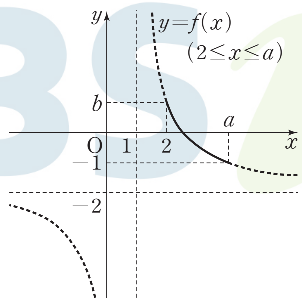
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

17

$f(x)=\dfrac{3}{x-1}-2$라 하면

$2\le x\le a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 정의역이 $\{x|2\le x\le a\}$,

치역이 $\{y|-1\le y\le b\}$이므로

$f(2)=\dfrac{3}{2-1}-2=b$,

$f(a)=\dfrac{3}{a-1}-2=-1$

즉, $a=4$, $b=1$이므로 $a+b=5$

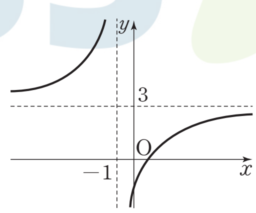
답 ①

18

$y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+k-13}{x+1}=\dfrac{k-13}{x+1}+3$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=3$

함수 $y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}$의 그래프가 제4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 y축과 만나는 점의 y좌표가 0보다 작아야 한다.



즉, $k-10<0$이므로 $k<10$

따라서 자연수 k의 값은 1, 2, 3, ⋯, 9이므로 그 개수는 9이다.

답 ③

19

$y=\dfrac{2x+5}{x+3}$로 놓고 x에 대하여 풀면

$(x+3)y=2x+5$, $(y-2)x=-3y+5$, $x=\dfrac{-3y+5}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{-3x+5}{x-2}$

즉, $f^{-1}(x)=\dfrac{-3x+5}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-3$이므로

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2,\ -3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=2$, $q=-3$이므로 $p-q=5$

답 ⑤

다른 풀이

$f(x)=\dfrac{2x+5}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-1}{x+3}=-\dfrac{1}{x+3}+2$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-3,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

또한, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 $(-3,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 점 $(2,\ -3)$이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2,\ -3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=2$, $q=-3$이므로 $p-q=5$

20

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=2$와 만나는 점의 개수와 직선 $y=-2$와 만나는 점의 개수의 합은 1이다.

곡선 $y=f(x)$가 x축과 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 모두 1이므로 두 직선 $y=2$, $y=-2$ 중 하나는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.

이때 곡선 $y=f(x)$의 점근선이 직선 $y=b$이므로

$b=2$ 또는 $b=-2$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)=\dfrac{a}{x}+b$, 즉 $y=\dfrac{a}{x}+b$에서

$\dfrac{a}{x}=y-b$, $x=\dfrac{a}{y-b}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{a}{x-b}$

$f^{-1}(x)=\dfrac{a}{x-b}$

조건 (나)에서 $f^{-1}(2)=f(2)-1$이므로

$\dfrac{a}{2-b}=\dfrac{a}{2}+b-1$ ⋯⋯ ㉡

㉡에서 $b\ne 2$이므로 ㉠에서 $b=-2$

$b=-2$를 ㉡에 대입하면

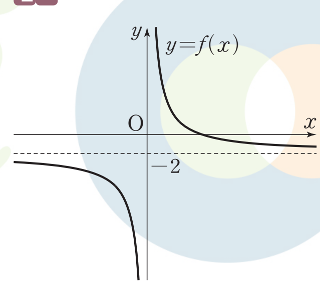
$\dfrac{a}{4}=\dfrac{a}{2}-3$, $a=12$

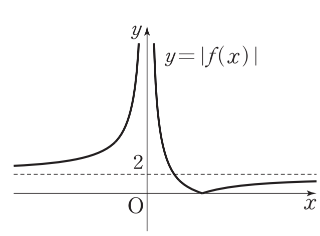
따라서 $f(x)=\dfrac{12}{x}-2$이므로

$f(8)=\dfrac{12}{8}-2=-\dfrac{1}{2}$

답 ①

참고





21

방정식 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=1$이므로 $g(x)$의 정의에 의하여 $f(x)$는 정수이다.

$f(x)=\dfrac{6x+12}{2x-1}=\dfrac{15}{2x-1}+3$이 정수가 되려면 $2x-1$은 15의 약수이어야 한다.

x가 자연수이므로 $2x-1$은 자연수이고, $2x-1$은 15의 양의 약수이다. 즉, $2x-1$의 값은 1, 3, 5, 15이므로 x의 값은 1, 2, 3, 8이다.

따라서 모든 자연수 x의 개수는 4이다. 답 ①

22

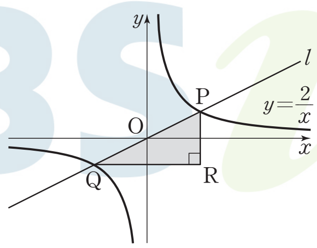
직선 l과 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프가 만나는 두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이고 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프 위의 점이므로 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$라 하면

$\mathrm{Q}\left(-a,\ -\dfrac{2}{a}\right)$

점 R는 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선과 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 만나는 점이므로

$\mathrm{R}\left(a,\ -\dfrac{2}{a}\right)$

따라서 오른쪽 그림에서



$\overline{\mathrm{QR}}=|a-(-a)|=|2a|$,

$\overline{\mathrm{PR}}=\left|\dfrac{2}{a}-\left(-\dfrac{2}{a}\right)\right|=\left|\dfrac{4}{a}\right|$

이므로 삼각형 PQR의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\overline{\mathrm{PR}}$

$=\dfrac{1}{2}\times|2a|\times\left|\dfrac{4}{a}\right|=4$ 답 ①

23

점 A에서 x축, y축에 이르는 거리는 각각 $\dfrac{4}{a}$, $a\ (a>0)$이므로 직사각형 ACDB의 둘레의 길이는 $4\left(a+\dfrac{4}{a}\right)$이다.

$a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+\dfrac{4}{a}\geq 2\sqrt{a\times\dfrac{4}{a}}=4$

$4\left(a+\dfrac{4}{a}\right)\geq 16$ $\left(\text{단, 등호는 } a=\dfrac{4}{a}\text{, 즉 } a=2\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 직사각형 ACDB의 둘레의 길이의 최솟값은 16이다.

답 ④

24

사각형 OAPB는 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$

점 P는 제1사분면 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ a)\ (a>0)$이라 하면

$f(a)=\dfrac{2a}{6a-9}=a$에서 $a=\dfrac{11}{6}$, 즉 $\mathrm{P}\left(\dfrac{11}{6},\ \dfrac{11}{6}\right)$

사각형 ODQC는 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{DQ}}$

점 Q는 제4사분면 위의 점이므로 점 Q의 좌표를 $(b,\ -b)\ (b>0)$이라 하면

$f(b)=\dfrac{2b}{6b-9}=-b$에서 $b=\dfrac{7}{6}$, 즉 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{7}{6},\ -\dfrac{7}{6}\right)$

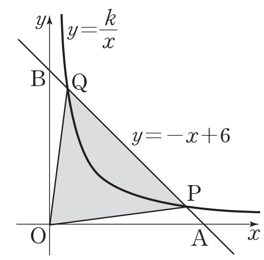
두 정사각형 OAPB, ODQC는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{11}{6}:\dfrac{7}{6}=11:7$

따라서 $m=11$, $n=7$이므로 $m+n=18$ 답 18

25

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+6$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 A(6, 0), B(0, 6)이므로 삼각형 OAB의 넓이는



$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\times6\times6$

$=18$

함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+6$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 삼각형 OAP와 삼각형 OQB의 넓이는 서로 같다.

이때 삼각형 OPQ의 넓이가 14이므로

(삼각형 OAP의 넓이)

=(삼각형 OQB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times$ {(삼각형 OAB의 넓이)−(삼각형 OPQ의 넓이)}

$=\dfrac{1}{2}\times(18-14)=2$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{OA}}=6$이므로

(삼각형 OAP의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times6\times b=2$에서 $b=\dfrac{2}{3}$

점 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{2}{3}\right)$는 직선 $y=-x+6$ 위의 점이므로

$\dfrac{2}{3}=-a+6$에서 $a=\dfrac{16}{3}$

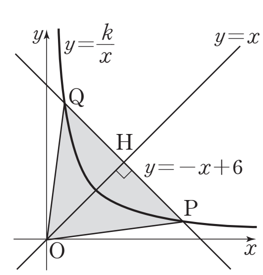
또한, 점 P는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$k=ab=\dfrac{16}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{32}{9}$

답 ①

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 원점에서 직선 $y=-x+6$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OH와 직선 $y=-x+6$은 서로 수직이므로 직선 OH의 방정식은 $y=x$이다.



따라서 점 H의 좌표는 (3, 3)이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

한편, 삼각형 OPQ의 넓이가 14이므로 삼각형 OPH의 넓이는 7이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{PH}=7$에서 $\overline{PH}=\frac{7\sqrt{2}}{3}$

점 P의 좌표를 $(a,\ -a+6)$이라 하면 점 P와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는 선분 PH의 길이와 같으므로

$\frac{|a+a-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{3}$

$|2a-6|=\frac{14}{3}$

$2a-6=\frac{14}{3}$ 또는 $2a-6=-\frac{14}{3}$

$a=\frac{16}{3}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

$a>3$이므로 $a=\frac{16}{3}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{16}{3},\ \frac{2}{3}\right)$이므로

$k=\frac{16}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{32}{9}$

26

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}=\frac{2\sqrt{x+1}}{(x+1)-x}=2\sqrt{x+1}$$
$$=2\sqrt{8+1}=2\times3=6$$

답 ②

27

$$\frac{1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{1}{b+\sqrt{ab}}=\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}$$
$$=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

답 ④

28

$$\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$$

을 이용하여 주어진 식을 간단히 하면

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}$$
$$=2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$$
$$=2+(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}+1$$

답 ③

29

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-kx+3}$의 값이 실수가 되려면 $kx^2-kx+3\geq0$이어야 한다.

(i) $k=0$일 때, $3\geq0$이므로 성립한다.

(ii) $k\neq0$일 때, $k>0$이고 이차방정식 $kx^2-kx+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\times k\times3\leq0,\ k(k-12)\leq0$

$0<k\leq12$

(i), (ii)에서 $0\leq k\leq12$

따라서 정수 k의 값은 0, 1, 2, ⋯, 12이므로 그 개수는 13이다.

답 ④

30

별 A, B의 표면 온도를 각각 T_A, T_B, 반지름의 길이를 각각 R_A, R_B, 광도를 각각 L_A, L_B라 하자.

별 A의 표면 온도는 별 B의 표면 온도의 $\frac{1}{2}$배이므로

$T_A=\frac{1}{2}T_B$

별 A의 반지름의 길이는 별 B의 반지름의 길이의 36배이므로

$R_A=36R_B$

별 A의 광도는 별 B의 광도의 k배이므로

$L_A=kL_B$

$T_A{}^2=\frac{1}{R_A}\sqrt{\frac{L_A}{4\pi\sigma}}$에서

$\left(\frac{1}{2}T_B\right)^2=\frac{1}{36R_B}\sqrt{\frac{kL_B}{4\pi\sigma}}$, $\frac{1}{4}T_B{}^2=\frac{1}{36R_B}\sqrt{\frac{kL_B}{4\pi\sigma}}$

$T_B{}^2=\frac{\sqrt{k}}{9}\times\frac{1}{R_B}\sqrt{\frac{L_B}{4\pi\sigma}}=\frac{\sqrt{k}}{9}\times T_B{}^2$

따라서 $\frac{\sqrt{k}}{9}=1$이므로 $k=81$

답 ③

31

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{x-a}+b$

이 함수의 그래프가 함수 $y=\sqrt{x+2}+9$의 그래프와 일치하므로

$a=-2,\ b=9$

따라서 $a+b=7$

답 ③

32

함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{2(x-1)}+3$

이 함수의 그래프가 점 $(9,\ a)$를 지나므로

$a=\sqrt{2\times(9-1)}+3=4+3=7$

답 ③

33

함수 $y=-\sqrt{x-a}+a+2$의 그래프가 점 $(a,\ -a)$를 지나므로

$-a=-\sqrt{a-a}+a+2$

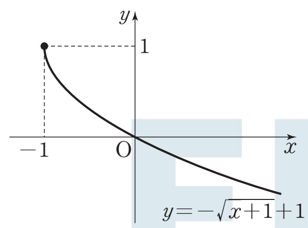
$2a=-2,\ a=-1$

함수 $y=-\sqrt{x}$의 치역은 $\{y\,|\,y\leq0\}$이고

함수 $y=-\sqrt{x+1}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의

방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=-\sqrt{x+1}+1$의 치역은 $\{y\,|\,y\le 1\}$이다. 답 ①

참고



34

함수 $f(x)$의 정의역이 $\{x\,|\,x\ge -2\}$이므로

$f(x)=-\sqrt{a(x+2)}+3=-\sqrt{ax+2a}+3$

이 식은 $f(x)=-\sqrt{ax+b}+3$과 일치하므로

$b=2a$ ⋯⋯ ㉠

함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1, 0)$을 지나므로

$-\sqrt{3a}+3=0$, $\sqrt{3a}=3$, $3a=9$, $a=3$

㉠에서 $b=2\times 3=6$

따라서 $ab=3\times 6=18$ 답 ⑤

35

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$a=2$, $b=-1$

따라서 $f(x)=\sqrt{x+2}-1$이므로 $f(7)=\sqrt{7+2}-1=2$ 답 ②

36

$y=-\sqrt{2x+a}+3=-\sqrt{2\left(x+\frac{a}{2}\right)}+3$

이므로 함수 $y=-\sqrt{2x+a}+3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

주어진 그래프에 의하여 $-\frac{a}{2}=2$, $b=3$이므로 $a=-4$, $b=3$

따라서 $a+b=-1$ 답 ②

37

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=\sqrt{-(x-2)}+1=\sqrt{-x+2}+1$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $a+b=3$ 답 ③

38

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$이므로

$f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나므로

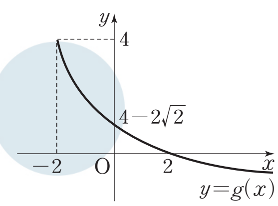
$\frac{1}{4}a+\frac{9}{2}=4$, $a=-2$

즉, $f(x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}=-2x^2+2x+4$이므로

$b=2$, $c=4$

따라서 $g(x)=-2\sqrt{x+2}+4$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -2\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\le 4\}$이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=-2x^2+2x+4$이므로 $f(x)=0$에서

$-2x^2+2x+4=0$, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

$\alpha<\beta$이므로 $\alpha=-1$, $\beta=2$

$-1\le x\le 2$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은

$g(-1)=-2\sqrt{-1+2}+4=2$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

보충 개념

정의역이 $\{x\,|\,p\le x\le q\}$인 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 최대, 최소

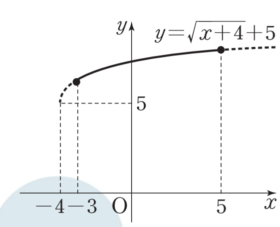
(1) $a>0$일 때, 최솟값은 $f(p)$, 최댓값은 $f(q)$이다.

(2) $a<0$일 때, 최솟값은 $f(q)$, 최댓값은 $f(p)$이다.

39

함수 $y=\sqrt{x+4}+5$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\le x\le 5$에서 함수 $y=\sqrt{x+4}+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



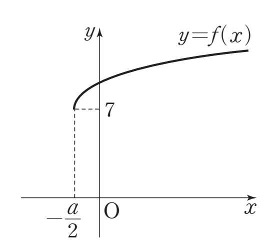
이때 주어진 함수는 $x=-3$일 때 최솟값 $\sqrt{-3+4}+5=6$을 갖는다.

답 ②

40

$f(x)=\sqrt{2x+a}+7=\sqrt{2\left(x+\frac{a}{2}\right)}+7$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{a}{2}$일 때 최솟값 7을 갖는다.

따라서 $-\frac{a}{2}=-2$에서 $a=4$이고 $m=7$이므로

$a+m=11$ 답 11

41

$f(x)=\sqrt{x-2}+2$에서 $f^{-1}(7)=k$라 하면

$f(k)=7$

즉, $\sqrt{k-2}+2=7$에서 $\sqrt{k-2}=5$

양변을 제곱하면 $k-2=25$에서 $k=27$

따라서 $f^{-1}(7)=27$ 답 27

42

함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 역함수의 그래프가 두 점 $(2, 0)$, $(5, 7)$을 지나므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 두 점 $(0, 2)$, $(7, 5)$를 지난다.

함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{b}$, $b=4$ …… ㉠

함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(7, 5)$를 지나므로

$5=\sqrt{7a+b}$, $7a+b=25$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a=3$

따라서 $a+b=3+4=7$ 답 7

43

$f^{-1}(g(x))=2x$에서

$f(f^{-1}(g(x)))=f(2x)$, $g(x)=f(2x)$

따라서 $g(3)=f(6)=\sqrt{3\times6-12}=\sqrt{6}$ 답 ③

다른 풀이

$y=\sqrt{3x-12}$로 놓으면 이 함수의 치역이 $\{y|y\geq0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\geq0\}$이다.

$y=\sqrt{3x-12}$의 양변을 제곱하면 $y^2=3x-12$

$x=\frac{1}{3}y^2+4$

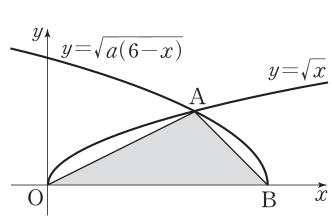
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x^2+4$, 즉 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x^2+4$ $(x\geq0)$

$f^{-1}(g(x))=2x$에서 $\frac{1}{3}\{g(x)\}^2+4=2x$

이때 $x\geq2$에서 $g(x)\geq0$이므로 $g(x)=\sqrt{6x-12}$

따라서 $g(3)=\sqrt{6\times3-12}=\sqrt{6}$

44



점 A의 좌표를 (p, q) $(p>0, q>0)$라 하자.

$\overline{OB}=6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times6\times q=6$에서 $q=2$

이때 점 $A(p, 2)$는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 점이므로

$2=\sqrt{p}$에서 $p=4$

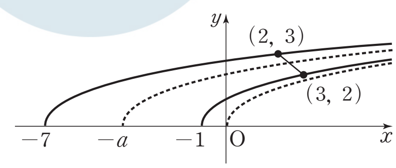
점 $A(4, 2)$는 함수 $y=\sqrt{a(6-x)}$의 그래프 위의 점이므로

$2=\sqrt{a(6-4)}=\sqrt{2a}$, $2a=4$

따라서 $a=2$ 답 ②

45

함수 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



(i) 함수 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지날 때,

실수 a는 최대이므로 $3=\sqrt{2+a}$, $2+a=9$, $a=7$

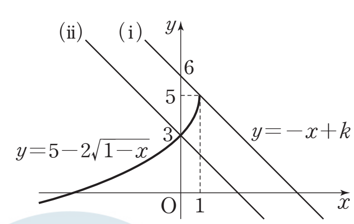
(ii) 함수 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프가 점 $(3, 2)$를 지날 때,

실수 a는 최소이므로 $2=\sqrt{3+a}$, $3+a=4$, $a=1$

(i), (ii)에서 $M=7$, $m=1$이므로 $M+m=8$ 답 ⑤

46

함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프는 함수 $y=-2\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1, 5)$를 지날 때,

$5=-1+k$에서 $k=6$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(0, 3)$을 지날 때,

$3=0+k$에서 $k=3$

(i), (ii)에서 함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$3<k\leq6$

따라서 정수 k의 값은 4, 5, 6이므로 그 합은

$4+5+6=15$ 답 ③

47

무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 한 점의 x좌표는 2이므로 방정식 $\sqrt{ax}=x$의 한 실근이 $x=2$이다.

$\sqrt{ax}=x$에 $x=2$를 대입하면

$\sqrt{2a}=2$, $2a=4$, $a=2$

함수 $y=\sqrt{2x+b}$의 그래프와 직선 $y=x$가 접하므로

$\sqrt{2x+b}=x$에서 양변을 제곱하면

$2x+b=x^2$, $x^2-2x-b=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로 이차방정식 $x^2-2x-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-b)=0$, $b=-1$

따라서 $ab=2\times(-1)=-2$ 답 ②

48

양수 a에 대하여 직선 $x=a$와 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{3x}$가 만나는 두 점 A, B의 좌표는 A$(a, \sqrt{a})$, B$(a, \sqrt{3a})$이다.

점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로 점 C의 x좌표는

$\sqrt{3a}=\sqrt{x}$에서 $x=3a$

그러므로 점 C의 좌표는 $(3a, \sqrt{3a})$이다.

점 C를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{3x}$와 만나는 점 D의 x좌표는 점 C의 x좌표와 같으므로 점 D의 y좌표는

$y=\sqrt{3\times 3a}=3\sqrt{a}$

그러므로 점 D의 좌표는 $(3a, 3\sqrt{a})$이다.

따라서 두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$이므로

$\frac{3\sqrt{a}-\sqrt{a}}{3a-a}=\frac{1}{4}$, $\frac{\sqrt{a}}{a}=\frac{1}{4}$, $4\sqrt{a}=a$

$16a=a^2$, $a(a-16)=0$

$a>0$이므로 $a=16$ 답 16

서술형 연습

본문 137쪽

01 3 **02** $\frac{7}{4}<k\le 2$

01

주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x-2)}+1$ $(a<0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다. ……… ㉮

㉠의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{-2a}+1$, $\sqrt{-2a}=2$

$-2a=4$, $a=-2$ ……… ㉯

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-2(x-2)}+1=\sqrt{-2x+4}+1$

이므로 $b=4$, $c=1$ ……… ㉰

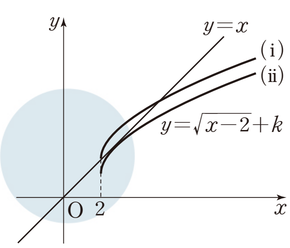
따라서 $a+b+c=(-2)+4+1=3$ ……… ㉱

답 3

단계	채점 기준	비율
㉮	평행이동을 이용하여 주어진 함수의 식을 구한 경우	30%
㉯	a의 값을 구한 경우	30%
㉰	b, c의 값을 구한 경우	30%
㉱	$a+b+c$의 값을 구한 경우	10%

02

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다. ……… ㉮



(i) 직선 $y=x$가 점 $(2, k)$를 지날 때,

$k=2$ ……… ㉯

(ii) 직선 $y=x$가 함수 $y=\sqrt{x-2}+k$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{x-2}+k=x$에서

$\sqrt{x-2}=x-k$

양변을 제곱하면

$x-2=x^2-2kx+k^2$

$x^2-(2k+1)x+k^2+2=0$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k+1)\}^2-4\times 1\times(k^2+2)=0$

$4k-7=0$

$k=\frac{7}{4}$ ……… ㉰

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{7}{4}<k\le 2$ ……… ㉱

답 $\frac{7}{4}<k\le 2$

단계	채점 기준	비율
㉮	함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 성질을 파악한 경우	20%
㉯	직선 $y=x$가 점 $(2, k)$를 지날 때, k의 값을 구한 경우	30%
㉰	직선 $y=x$가 함수 $y=\sqrt{x-2}+k$의 그래프에 접할 때, k의 값을 구한 경우	30%
㉱	k의 값의 범위를 구한 경우	20%

1등급 도전

본문 138~139쪽

01 10	02 ⑤	03 ④	04 192
05 42	06 ④	07 13	

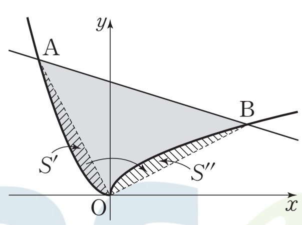
01

풀이 전략 역함수의 그래프의 성질을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구한다.

문제 풀이

STEP 1 두 직선 OA, OB와 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같음을 이용한다.

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 함수 $y=x^2\ (x\le 0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하므로 점 A는 점 B로 이동한다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면 오른쪽 그림과 같이 S'의 영역과 S''의 영역의 넓이는 서로 같으므로 넓이 S는 삼각형 OAB의 넓이와 같다.

삼각형 OAB에서 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 높이는 원점과 직선 $x+3y-10=0$ 사이의 거리이다.

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{10}$이고 높이는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$$

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

이므로 $S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$

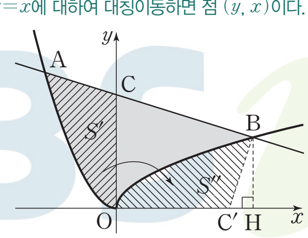
답 10

다른 풀이

구하는 부분의 넓이를 S라 하자.

직선 $x+3y-10=0$이 y축과 만나는 점을 C라 하면 $\mathrm{C}\left(0, \frac{10}{3}\right)$이다.

점 (x, y)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 점 (y, x)이다.



점 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{C}'\left(\frac{10}{3}, 0\right)$이라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 오른쪽 그림과 같이 S'의 영역과 S''의 영역의 넓이는 서로 같으므로 S의 값은 사다리꼴 COHB의 넓이에서 삼각형 BC′H의 넓이를 뺀 것과 같다.

$\overline{BH}=2$, $\overline{CO}=\frac{10}{3}$, $\overline{OH}=4$이므로

(사다리꼴 COHB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{10}{3}\right)\times 4=\frac{32}{3}$

$\mathrm{B}(4, 2)$, $\mathrm{C}\left(0, \frac{10}{3}\right)$이므로
$\overline{CO}=$(점 C의 y좌표)$=\frac{10}{3}$
$\overline{BH}=$(점 B의 y좌표)$=2$
$\overline{OH}=$(점 B의 x좌표)$=4$

(삼각형 BC′H의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\left(4-\frac{10}{3}\right)\times 2=\frac{2}{3}$

따라서 $S=\frac{32}{3}-\frac{2}{3}=10$

02

풀이 전략 두 점 P, Q의 좌표를 구하여 두 삼각형 POQ, PB′B의 넓이를 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

문제 풀이

STEP 1 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.

두 점 $\mathrm{A}(-1, -1)$, $\mathrm{B}\left(a, \frac{1}{a}\right)$ $(a>1)$을 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{\frac{1}{a}-(-1)}{a-(-1)}=\frac{\frac{1}{a}+1}{a+1}=\frac{\frac{a+1}{a}}{a+1}=\frac{1}{a}$$

이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=\frac{1}{a}\{x-(-1)\}$

기울기가 $\frac{1}{a}$이고 점 $\mathrm{A}(-1, -1)$을 지나는 직선

즉, $y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}-1$

이 직선이 x축, y축과 만나는 점이 각각 P, Q이므로 두 점 P, Q의 좌표는

$\mathrm{P}(a-1, 0)$, $\mathrm{Q}\left(0, \frac{1}{a}-1\right)$

STEP 2 두 삼각형의 넓이 S_1, S_2를 구한다.

$\overline{OP}=a-1$, $\overline{OQ}=1-\frac{1}{a}$이므로 삼각형 POQ의 넓이 S_1은

점 Q의 y좌표의 절댓값과 같다.
즉, $\overline{OQ}=\left|\frac{1}{a}-1\right|=1-\frac{1}{a}$

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}$$
$$=\frac{1}{2}\times(a-1)\times\left(1-\frac{1}{a}\right)$$
$$=\frac{a^2-2a+1}{2a}$$
$$=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a}$$

$\overline{PB'}=a-(a-1)=1$, $\overline{BB'}=\frac{1}{a}$이므로 삼각형 PB′B의 넓이 S_2는

$\overline{PB'}=\overline{OB'}-\overline{OP}$

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{PB'}\times\overline{BB'}$$
$$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}$$

STEP 3 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 S_1+S_2의 최솟값을 구한다.

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S_1+S_2=\left(\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a}\right)+\frac{1}{2a}=\frac{1}{a}+\frac{a}{2}-1$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{a}{2}}-1$$
$$=\sqrt{2}-1\ \left(\text{단, 등호는 }\frac{1}{a}=\frac{a}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$$

$a=\sqrt{2}$일 때 등호가 성립한다.

따라서 S_1+S_2의 최솟값은 $\sqrt{2}-1$이다.

답 ⑤

03

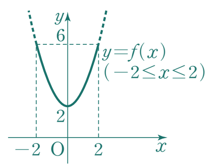
풀이 전략 함수 $y=\dfrac{ax}{x+2}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한 후 a의 값의 범위에 따른 함수 $y=\dfrac{ax}{x+2}$의 그래프를 그려 본다.

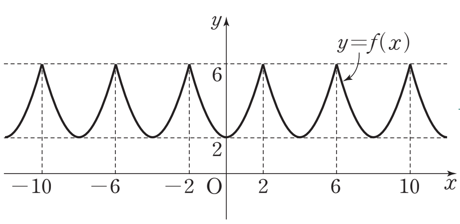
문제 풀이

STEP 1 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

조건 (가)에 의하여





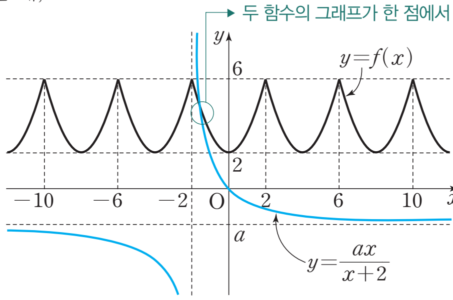
STEP 2 a의 값의 범위에 따른 두 함수의 그래프를 그린 후 조건을 만족시키는 a의 값을 구한다.

$y=\dfrac{ax}{x+2}=-\dfrac{2a}{x+2}+a$이므로 함수 $y=\dfrac{ax}{x+2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=a$

$=\dfrac{a(x+2)-2a}{x+2}$

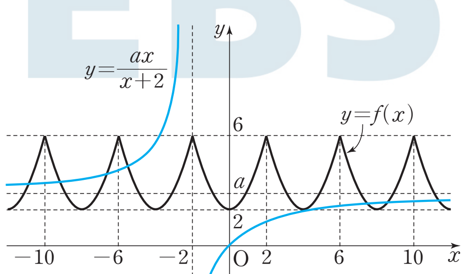
(i) $a<0$일 때,

두 함수의 그래프가 한 점에서 만난다.



위의 그림과 같이 a의 값에 관계없이 두 함수 $y=f(x)$, $y=\dfrac{ax}{x+2}$의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

(ii) $a>0$일 때,



두 함수 $y=f(x)$, $y=\dfrac{ax}{x+2}$의 그래프의 교점의 개수가 무수히 많으려면 위의 그림과 같아야 하므로

$2\le a\le 6$

(i), (ii)에서 정수 a의 값은 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 합은

$2+3+4+5+6=20$

답 ④

04

풀이 전략 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f(x+2a)+a$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한 후 $b>0$일 때와 $b<0$일 때로 나누어 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려 본다.

문제 풀이

STEP 1 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f(x+2a)+a$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.

$$f(x)=\frac{bx}{x-a}=\frac{b(x-a)+ab}{x-a}=\frac{ab}{x-a}+b$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=b$

이때 함수 $y=f(x+2a)+a$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-2a$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x+2a)+a$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a-2a=-a$, $y=b+a$, 즉 $x=-a$, $y=b+a$

STEP 2 $b>0$일 때의 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 t의 값의 범위가 조건을 만족시키는지 알아본다.

$\{t\,|\,h(t)=1\}$

$=\{t\,|\,-9\le t\le -8\}\cup\{t\,|\,t\ge k\}$ …… ㉠

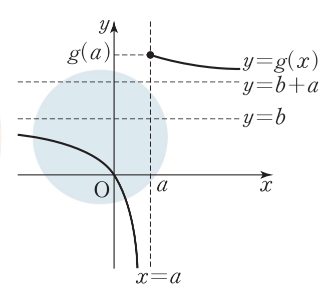
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 $h(t)$이므로 집합 $\{t\,|\,h(t)=1\}$은 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 집합을 나타낸다.

를 만족시키는 경우를 찾아보자.

이때 ㉠은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는 $-9\le t\le -8$ 또는 $t\ge k$임을 나타낸다.

(i) $b>0$인 경우

$ab>0$, $b+a>b>0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는 $t<b$ 또는 $b+a<t\le g(a)$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

STEP 3 $b<0$일 때의 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 t의 값의 범위가 조건을 만족시키는지 알아본다.

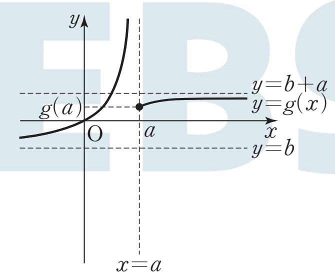
(ii) $b<0$인 경우

$ab<0$이고 $b<b+a$이다.

$g(a)=f(3a)+a=\frac{3}{2}b+a$ …… ㉡

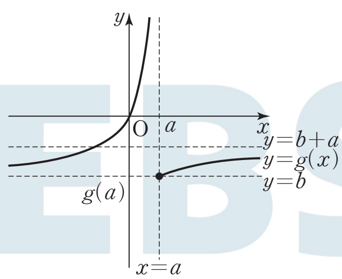
이므로 다음 세 가지 경우로 나누어 생각해 보자.

① $b<g(a)$인 경우, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



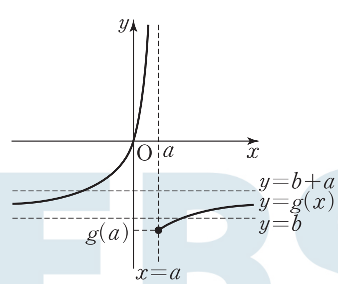
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는 $b<t<g(a)$ 또는 $t\geq b+a$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

② $b=g(a)$인 경우, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는 $b=g(a)$ 또는 $t\geq b+a$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

③ $b>g(a)$인 경우, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는 $g(a)\leq t\leq b$ 또는 $t\geq b+a$이므로 ㉠을 만족시키려면

$g(a)=-9$, $b=-8$, $b+a=k$

이어야 한다.

㉡에서 $g(a)=\frac{3}{2}\times(-8)+a=-9$이므로

$a=3$

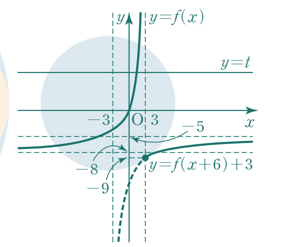
$k=b+a=(-8)+3=-5$

STEP 4 함수 $g(x)$를 구하여 $a\times b\times g(-k)$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서

$$g(x)=\begin{cases}\frac{-8x}{x-3} & (x<3)\\ \frac{-8(x+6)}{x+3}+3 & (x\geq 3)\end{cases}$$

함수 $f(x)=\frac{-8x}{x-3}$에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<3)\\ f(x+6)+3 & (x\geq 3)\end{cases}$의 그래프와 직선 $y=t$는 다음 그림과 같다.



따라서

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t<-9)\\ 1 & (-9\leq t\leq -8 \text{ 또는 } t\geq -5)\\ 2 & (-8<t<-5)\end{cases}$$

즉, $g(x)=\begin{cases}-\frac{24}{x-3}-8 & (x<3)\\ -\frac{24}{x+3}-5 & (x\geq 3)\end{cases}$

이므로

$g(-k)=g(5)=-\frac{24}{5+3}-5=-8$

따라서

$a\times b\times g(-k)=3\times(-8)\times(-8)$

$=192$

답 192

05

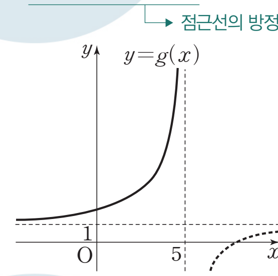
풀이 전략 제한된 범위에서 이차함수의 최솟값은 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 속하지 않는지에 따라 달라진다.

문제 풀이

STEP 1 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려 본다.

$x<5$에서 정의된 함수 $g(x)=1-\frac{2}{x-5}$의 그래프는 다음 그림과 같다.

점근선의 방정식은 $x=5$, $y=1$이다.



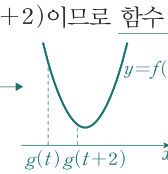
함수 $g(x)$는 $x<5$에서 x의 값이 커지면 $g(x)$의 값도 커지므로 $g(t)<g(t+2)$이다.

STEP 2 조건 (가)에 의하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구한다.

(i) $t<1$일 때,

$h(t)=f(g(t+2))$이고 $g(t)\leq x\leq g(t+2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=g(t+2)$에서 최솟값을 갖는다.

즉, $g(t)\leq x\leq g(t+2)$에서 x의 값이 커지면 $f(x)$의 값은 작아진다.



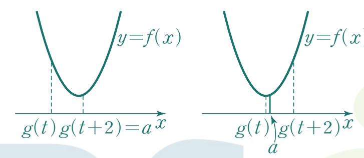
(ii) $1\leq t<3$일 때,

$h(t)=6$이므로 $g(t)\leq x\leq g(t+2)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 6으로 일정하다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 (a, b)라 하면

a는 $1 \le t < 3$인 모든 t에 대하여 $g(t) \le a \le g(t+2)$이어야 한다.
즉, $a=g(3)$이고 $b=6$

한편, $g(3)=2$이므로
이차함수 $y=f(x)$의
그래프의 꼭짓점의
좌표는 $(2,\ 6)$이다.



STEP 3 조건 (나)를 이용하여 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 구한 후 $f(5)$의 값을 구한다.

$f(x)=k(x-2)^2+6\ (k>0)$이라 하면 조건 (나)에서 $h(-1)=7$이므로

$h(-1)=f(g(1))=f\left(\frac{3}{2}\right)=7$ $g(1)=1-\frac{2}{1-5}=\frac{3}{2}$

즉, $k\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+6=7$에서 $\frac{k}{4}=1$, $k=4$

따라서 $f(x)=4(x-2)^2+6$이므로

$f(5)=4\times3^2+6=42$

답 42

06

풀이 전략 두 곡선 $y=-\sqrt{kx+2k}+4$, $y=\sqrt{-kx+2k}-4$의 개형을 그린 후 보기의 참, 거짓을 판별한다.

문제 풀이

STEP 1 $f(-x)=-g(x)$임을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

$f(x)=-\sqrt{kx+2k}+4$, $g(x)=\sqrt{-kx+2k}-4$라 하자.

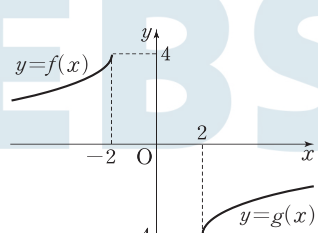
ㄱ. $f(-x)=-\sqrt{-kx+2k}+4$
$=-(\sqrt{-kx+2k}-4)$
$=-g(x)$
이므로 $g(x)=-f(-x)$

$y=f(x)$를
(1) x축에 대하여 대칭이동: $y=-f(x)$
(2) y축에 대하여 대칭이동: $y=f(-x)$
(3) 원점에 대하여 대칭이동: $y=-f(-x)$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

STEP 2 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 개형을 그려 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $k<0$이면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 개형은 다음 그림과 같다.

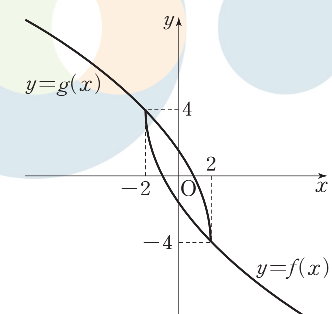


따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 만나지 않는다. (거짓)

STEP 3 ㄱ, ㄴ을 이용하여 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값을 구한다.

ㄷ. (i) $k<0$일 때,
ㄴ에 의하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 만나지 않는다.

(ii) $k>0$일 때,
ㄱ에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.
또한, k의 값이 커질수록 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=4$와 멀어지고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=-4$와 멀어진다.
따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값은 다음 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ -4)$를 지날 때이다. $f(2)=g(2)=-4$



$\sqrt{4k}=8$, $4k=64$
즉, $-4=-\sqrt{2k+2k}+4$이므로 $k=16$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

07

풀이 전략 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그린 후 $h(n)$의 값에 따른 n의 값 또는 n의 값의 범위를 구한다.

문제 풀이

STEP 1 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

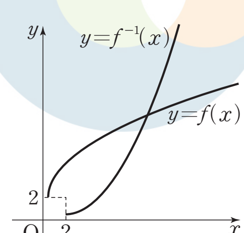
$f(x)=\sqrt{ax-3}+2\ \left(x\ge\frac{3}{a}\right)$에서

$f^{-1}(x)=\frac{1}{a}(x-2)^2+\frac{3}{a}\ (x\ge2)$

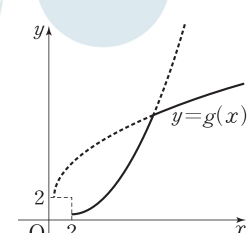
$y=\sqrt{ax-3}+2$로 놓으면 $y-2=\sqrt{ax-3}$
$(y-2)^2=ax-3$, $x=\frac{1}{a}(y-2)^2+\frac{3}{a}$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=\frac{1}{a}(x-2)^2+\frac{3}{a}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.

함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우}) \\ f^{-1}(x) & (f(x)\ge f^{-1}(x)\text{인 경우}) \end{cases}$는 $x\ge2$인 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$ 중 크지 않은 값이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

STEP 2 $f(x)\ge f^{-1}(x)$일 때, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수에 따라 n의 값 또는 n의 값의 범위를 구한다.

$f(x)<f^{-1}(x)$인 경우, 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수는 항상 1이다.

그러므로 $f(x)\geq f^{-1}(x)$일 때, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수와 이에 따른 $h(n)$은 다음과 같다.

(i) 교점의 개수가 1인 경우

① [그림 3]과 같이 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하는 경우

이차방정식 $\frac{1}{a}(x-2)^2+\frac{3}{a}=x-n$, 즉

$x^2-(a+4)x+an+7=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+4)\}^2-4(an+7)=0$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 $D=b^2-4ac$

그러므로 $n=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$

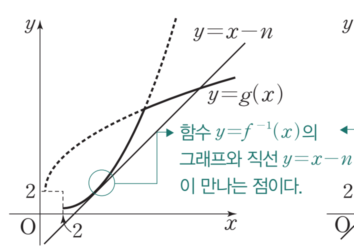
② [그림 4]와 같이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$이 직선 $y=x-n$의 아랫부분에 있는 경우

x좌표가 2일 때, 직선 $y=x-n$의 y좌표인 $2-n$이 $f^{-1}(2)=\frac{3}{a}$보다 크므로 $\frac{3}{a}<2-n$에서 $n<2-\frac{3}{a}$

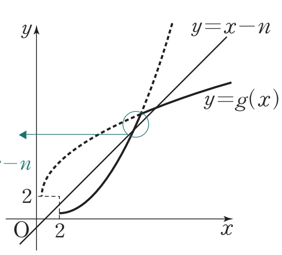
①, ②에서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 1인 자연수 n의 값의 범위는

$n=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$ 또는 $n<2-\frac{3}{a}$

이고, 이때 $h(n)=2$이다.



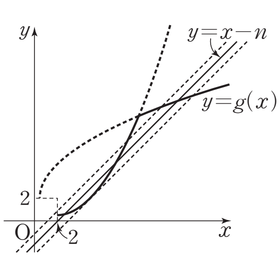
[그림 3]



[그림 4]

(ii) 교점의 개수가 2인 경우

[그림 5]와 같이 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선의 윗부분에 있고, 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$을 지나거나 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$이 직선 $y=x-n$의 윗부분에 있는 경우이다.



[그림 5]

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선 $y=x-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$의 y절편인 $-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$가 직선 $y=x-n$의 y절편인 $-n$보다 작으므로

$-n>-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$에서 $n<2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$

직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$을 지나면 $\frac{3}{a}=2-n$에서 $n=2-\frac{3}{a}$

점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$이 직선 $y=x-n$의 윗부분에 있는 경우는 x좌표가 2일 때, 직선 $y=x-n$의 y좌표인 $2-n$이 $f^{-1}(2)=\frac{3}{a}$보다 작으므로 $\frac{3}{a}>2-n$에서 $n>2-\frac{3}{a}$

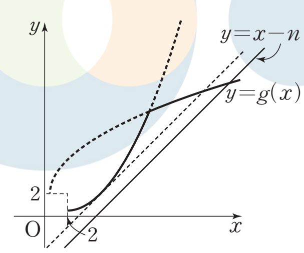
그러므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 2인 자연수 n의 값의 범위는

$2-\frac{3}{a}\leq n<2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$

이고, 이때 $h(n)=3$이다.

(iii) 교점이 없는 경우

[그림 6]과 같이 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선의 아랫부분에 있는 경우이다.



[그림 6]

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선 $y=x-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$의 y절편인 $-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$가 직선 $y=x-n$의 y절편인 $-n$보다 크므로 $-n<-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$에서 $n>2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$

그러므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 점이 없는 자연수 n의 값의 범위는

$n>2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$

이고, 이때 $h(n)=1$이다.

(i), (ii), (iii)에서

$$h(n)=\begin{cases} 2 & \left(0<n<2-\frac{3}{a}\right) \\ 3 & \left(2-\frac{3}{a}\leq n<2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}\right) \\ 2 & \left(n=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}\right) \\ 1 & \left(n>2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}\right) \end{cases}$$

STEP 3 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구한다.

$h(1)=h(3)<h(2)$를 만족시키려면 $h(1)=2$, $h(3)=2$, $h(2)=3$ 이어야 한다. 즉,

$0<1<2-\frac{3}{a}$ …… ㉠

$2-\frac{3}{a}\le 2<2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$ …… ㉡

$3=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$ …… ㉢

㉢에서 $a^2-4a-12=0$

$(a+2)(a-6)=0$

$\frac{a}{4}-\frac{3}{a}-1=0$의 양변에 $4a$를 곱하면

$a^2-12-4a=0$, 즉 $a^2-4a-12=0$

$a=-2$ 또는 $a=6$

이때 $a\ge\frac{3}{2}$이므로 $a=6$

문제의 조건이다.

$a=6$을 ㉠에 대입하면

$0<1<2-\frac{3}{6}=\frac{3}{2}$

이므로 ㉠을 만족시키고, $a=6$을 ㉡에 대입하면

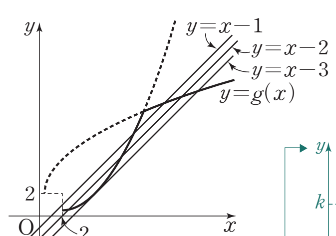
$2-\frac{3}{6}\le 2<2-\frac{3}{6}+\frac{6}{4}$, 즉 $\frac{3}{2}\le 2<3$

이므로 ㉡을 만족시킨다.

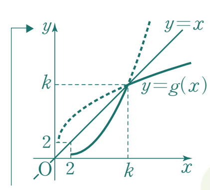
따라서 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$는 $a=6$일 때인

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{6x-3}+2 & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우})\\ \frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{1}{2} & (f(x)\ge f^{-1}(x)\text{인 경우})\end{cases}$$

이고, 이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 7]과 같다.



[그림 7]



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 k라 하면

$\frac{1}{6}(k-2)^2+\frac{1}{2}=k$

$k^2-4k+7=6k$, $k^2-10k+7=0$

$k>2$이므로 $k=5+3\sqrt{2}$

$k=-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-1\times 7}$
$=5\pm\sqrt{18}=5\pm 3\sqrt{2}$

따라서 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{6x-3}+2 & (x>5+3\sqrt{2})\\ \frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{1}{2} & (2\le x\le 5+3\sqrt{2})\end{cases}$$

이므로

$g(4)=\frac{1}{6}(4-2)^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

즉, $p=6$, $q=7$이므로 $p+q=13$

답 13

10 경우의 수

개념 확인 문제

본문 141쪽

01 9			02 15		03 10	
04 40			05 (1) 8	(2) 24	06 12	
07 (1) 30	(2) 24	(3) 210	(4) 9		(5) 120	(6) 1
08 (1) 48	(2) 12	09 60				
10 (1) 21	(2) 28	(3) 1	(4) 1			
11 (1) 28	(2) 210	(3) 35			12 (1) 28	(2) 40

내신 & 학평 유형 연습

본문 142~150쪽

01 ②	02 20	03 ①	04 ③	05 ④	06 ⑤
07 ②	08 ②	09 ①	10 36	11 ②	12 ③
13 18	14 16	15 24	16 307	17 ④	18 ⑤
19 ⑤	20 720	21 ⑤	22 480	23 576	24 24
25 ④	26 ③	27 ②	28 ④	29 ④	30 ⑤
31 ⑤	32 ③	33 ⑤	34 ④	35 130	36 ②
37 ①	38 ①	39 ④	40 ③	41 ⑤	42 ①
43 ①					

01

$1\le f(1)\le 6$, $1\le f(2)\le 6$이므로 $2\le f(1)+f(2)\le 12$

$f(1)+f(2)$가 4의 배수가 되려면

$f(1)+f(2)=4$ 또는 $f(1)+f(2)=8$ 또는 $f(1)+f(2)=12$

$f(1)=a$, $f(2)=b$라 하면

(i) $a+b=4$일 때,
순서쌍 (a, b)는 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3개

(ii) $a+b=8$일 때,
순서쌍 (a, b)는 $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$의 5개

(iii) $a+b=12$일 때,
순서쌍 (a, b)는 $(6, 6)$의 1개

(i), (ii), (iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 함수 f의 개수는

$3+5+1=9$

답 ②

02

(i) 꽃병 A에 장미를 꽂은 경우
꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 카네이션이 a송이, 백합이 b송이라 하면 (a, b)로 가능한 경우는 $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$의 6가지

(ii) 꽃병 A에 카네이션을 꽂은 경우
꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 장미가 a송이, 백합이 b송이라 하면 (a, b)로 가능한 경우는 $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$, $(7, 2)$, $(8, 1)$의 8가지

(iii) 꽃병 A에 백합을 꽂은 경우

꽃병 B에 꽃을 꽂 9송이 중 카네이션이 a송이, 장미가 b송이라 하면 (a, b)로 가능한 경우는 $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$의 6가지

(i), (ii), (iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$6+8+6=20$

답 20

03

(i) $z=1$일 때, $x+2y=12$이므로

순서쌍 (x, y)는 $(6, 3)$, $(4, 4)$, $(2, 5)$의 3개

(ii) $z=2$일 때, $x+2y=9$이므로

순서쌍 (x, y)는 $(5, 2)$, $(3, 3)$, $(1, 4)$의 3개

(iii) $z=3$일 때, $x+2y=6$이므로

순서쌍 (x, y)는 $(4, 1)$, $(2, 2)$의 2개

(iv) $z=4$일 때, $x+2y=3$이므로

순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$의 1개

(i)~(iv)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$3+3+2+1=9$

답 ①

보충 개념

(1) 방정식 $ax+by+cz=d$ (a, b, c, d는 상수)를 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수

➡ x, y, z 중 계수의 절댓값이 가장 큰 것을 기준으로 수를 대입하여 구한다.

(2) 부등식 $ax+by\le c$ (a, b, c는 자연수)를 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수

➡ 주어진 조건을 만족시키는 $ax+by$의 값을 찾은 후 $ax+by=d$ 꼴의 방정식을 만들어 이 방정식의 해의 개수를 구한다.

04

주사위의 눈의 최대 수는 6이므로 주사위를 세 번 던져 20번 칸까지 가려면 세 번 만에 15번(⦿) 칸에 도착해야 한다.

주사위를 세 번 던져 나온 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 세 눈의 수의 합이 15인 경우

$(6, 6, 3)$, $(6, 3, 6)$, $(3, 6, 6)$,

$(6, 5, 4)$, $(6, 4, 5)$, $(4, 5, 6)$, $(4, 6, 5)$의 7가지

(ii) 세 눈의 수의 합이 15를 넘는 경우

5번(★)에 도착하여 가는 경우이므로 $(5, 6, 6)$의 1가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$7+1=8$

답 ③

05

두 눈의 수의 합이 짝수가 되려면 두 눈의 수가 모두 홀수이거나 짝수이어야 한다.

주사위를 던졌을 때 홀수인 눈이 나오는 경우는 1, 3, 5의 3가지, 짝수인 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6의 3가지이므로

(i) 두 눈의 수가 모두 홀수인 경우의 수는

$3\times3=9$

(ii) 두 눈의 수가 모두 짝수인 경우의 수는

$3\times3=9$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$9+9=18$

답 ④

06

$(a+b+c)(p+q+r)$에서 a, b, c에 곱해지는 항이 각각 p, q, r의 3개이므로 항의 개수는 $3\times3=9$

$(a+b)(s+t)$에서 a, b에 곱해지는 항이 각각 s, t의 2개이므로 항의 개수는 $2\times2=4$

따라서 구하는 항의 개수는

$9+4=13$

답 ⑤

07

한 교시에는 1개 강좌만 수강할 수 있으므로

(i) 1, 2교시 강좌를 선택할 수 있는 경우의 수는

$2\times3=6$

(ii) 1, 3교시 강좌를 선택할 수 있는 경우의 수는

$2\times4=8$

(iii) 2, 3교시 강좌를 선택할 수 있는 경우의 수는

$3\times4=12$

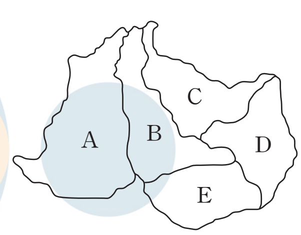
(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$6+8+12=26$

답 ②

08

다섯 개의 구역을 오른쪽 그림과 같이 A, B, C, D, E라 하면 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.



C, D, E는 어떤 순서로 칠해도 상관없다.

C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times3\times2\times2=144$

답 ②

다른 풀이

B → C → E → D → A 순으로 색을 칠하는 경우는 다음과 같다.

(i) C, E에 같은 색을 칠할 경우의 수는

$4\times3\times1\times2\times3=72$

(ii) C, E에 다른 색을 칠할 경우의 수는

$4\times3\times2\times1\times3=72$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$72+72=144$

09

비밀번호에 쓸 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 7, 8이다.

첫째 자리에 7, 8이 들어갈 수 있고 마지막 두 자리에 4의 배수가 들어가야 한다.

(i) 7□□□ 꼴의 수

마지막 두 자리에 들어갈 수 있는 4의 배수는 12, 28, 32의 3가지이고, 둘째 자리에 들어갈 수는 조건 (가)에 의하여 2가지이므로 경우의 수는

$3\times2=6$

(i) 8□□□ 꼴의 수

마지막 두 자리에 들어갈 수 있는 4의 배수는 12, 32, 72의 3가지이고, 둘째 자리에 들어갈 수는 조건 (가)에 의하여 2가지이므로 경우의 수는

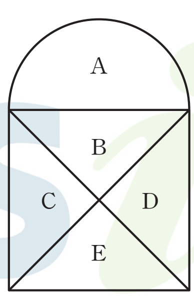
$3\times2=6$

(i), (ii)에서 비밀번호의 개수는

$6+6=12$

답 ①

10



다섯 개의 영역을 오른쪽 그림과 같이 A, B, C, D, E라 하면 A에 칠할 수 있는 색은 3가지, B에 칠할 수 있는 색은 2가지이다.

(i) C, D에 같은 색을 칠하고 E를 칠하는 경우

C에 칠할 수 있는 색은 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 C와 D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는

$3\times2\times2\times1\times2=24$

(ii) C, D에 다른 색을 칠하고 E를 칠하는 경우

C에 칠할 수 있는 색은 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 C와 D에 칠한 색을 제외한 1가지이므로 방법의 수는

$3\times2\times2\times1\times1=12$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$24+12=36$

답 36

11

2개의 HT와 2개의 □를 배열할 때, 2개의 □가 이웃하는 경우와 이웃하지 않는 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) HT가 2번 나오고 2개의 □가 이웃하는 경우

HTHT□□, HT□□HT, □□HTHT인 경우는 □□에 HT를 제외한 HH, TH, TT가 들어갈 수 있으므로 각각에 대하여 경우의 수는 3가지

따라서 HT가 2번 나오고 2개의 □가 이웃하는 경우의 수는

$3\times3=9$

(ii) HT가 2번 나오고 2개의 □가 이웃하지 않는 경우

HT□HT□, □HTHT□, □HT□HT인 경우는 2개의 □에 H와 T가 모두 들어갈 수 있으므로 각각에 대하여 경우의 수는

$2\times2=4$

따라서 HT가 2번 나오고 2개의 □가 이웃하지 않는 경우의 수는

$3\times4=12$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$9+12=21$

답 ②

12

1이 적힌 정사각형과 6이 적힌 정사각형에 같은 색을 칠해야 하고, 변을 공유하는 두 정사각형에는 서로 다른 색을 칠하므로 1, 6, 2, 3, 5, 4가 적힌 정사각형의 순서로 색을 칠한다고 생각하자.

서로 다른 4가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 색을 칠하므로

(i) 1이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지

(ii) 6이 적힌 정사각형에는 1이 적힌 정사각형에 칠한 색과 같은 색을 칠해야 하므로 칠할 수 있는 색은 1가지

(iii) 2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지

(iv) 3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

(v) 5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

(vi) 4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1, 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

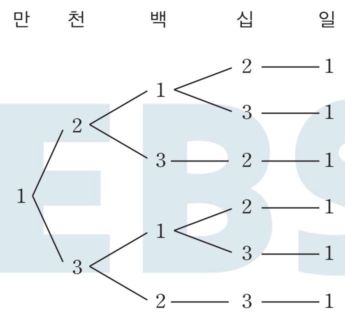
(i)~(vi)에서 조건을 만족시키도록 색을 칠하는 경우의 수는

$4\times1\times3\times2\times2\times2=96$

답 ③

13

만의 자리 숫자와 일의 자리 숫자가 1인 경우의 수형도를 그리면 다음과 같다.



이때 경우의 수는 6이고, 만의 자리 숫자와 일의 자리 숫자가 2 또는 3인 경우의 수도 각각 6이므로 구하는 경우의 수는

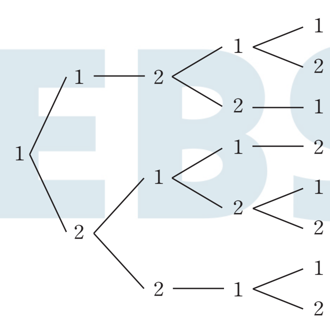
$3\times6=18$

답 18

14

(i) 5자리 자연수가 1로 시작되는 경우

조건 (나)를 만족시키는 수형도를 그리면 다음과 같다.



따라서 1로 시작되는 5자리 자연수의 개수는 8이다.

(ii) 5자리 자연수가 2로 시작되는 경우

(i)의 경우와 마찬가지로 2로 시작되는 5자리 자연수의 개수는 8이다.

(i), (ii)에서 5자리 자연수의 개수는

$8+8=16$

답 16

15

4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

${}_4P_4=4!=4\times3\times2\times1=24$

답 24

16

1□□꼴인 자연수의 개수는 ${}_9P_2=9\times8=72$

2□□꼴인 자연수의 개수는 ${}_9P_2=9\times8=72$

백의 자리 숫자가 1 또는 2인 자연수의 개수는 $72+72=144$이므로 150번째 수는 백의 자리의 수가 3이고, 작은 수부터 6번째 수인 307이다.

답 307

17

남자 3명 중 양 끝에 남자 2명이 서는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

양 끝의 남자 2명을 제외한 나머지 5명이 일렬로 서는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times120=720$

답 ④

참고

특정한 것의 자리가 정해진 순열의 수를 구할 때에는 특정한 자리에 오는 것의 위치를 고정시키고 나머지를 나열하는 방법의 수를 생각한다.

18

홀수 번호가 적힌 3개의 의자 중에서 2개의 의자를 택하여 아버지, 어머니가 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

나머지 3개의 의자에 할머니, 아들, 딸이 앉는 경우의 수는

${}_3P_3=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times6=36$

답 ⑤

19

학생 A, B가 앉는 줄을 선택하는 경우의 수는 2이고, 한 줄에 놓인 3개의 좌석에서 2개의 좌석을 택하여 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

이므로 A, B가 같은 줄의 좌석에 앉는 경우의 수는

$2\times6=12$

나머지 세 명이 맞은편 줄의 좌석에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times6=72$

답 ⑤

20

2개의 문자 e를 묶어 한 문자 E라고 생각하여 서로 다른 6개의 문자 c, h, E, r, u, p를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

위의 각 경우에 대하여 2개의 문자 e끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 1이므로 구하는 경우의 수는

$720\times1=720$

답 720

21

먼저 1, 3, 5가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

위의 각 경우에 대하여 1, 3, 5가 적혀 있는 세 장의 카드의 사이사이와 양 끝의 네 곳 중에서 두 곳을 선택하여 2, 4가 적혀 있는 카드를 하나씩 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times12=72$ 답 ⑤

다른 풀이

5장의 카드를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

2, 4가 적혀 있는 두 장의 카드를 한 묶음으로 생각하여 이 묶음과 1, 3, 5가 적혀 있는 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$이고, 이 각각에 대하여 2, 4가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수는 $2!$이므로 짝수가 적혀 있는 카드끼리 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$4!\times2!=48$

따라서 짝수가 적혀 있는 카드끼리 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는

$120-48=72$

22

빈 자리 1개와 남학생 3명을 우선 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 여학생 2명이 앉을 의자 2개가 있으면 되므로 경우의 수는

${}_5P_2=5\times4=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times20=480$ 답 480

다른 풀이

의자 6개에 5명의 학생이 앉는 경우의 수는

${}_6P_5=6\times5\times4\times3\times2=720$

여학생 2명을 한 사람으로 생각하여 4명과 빈 의자 1개를 배열하는 경우의 수는 $5!$이고, 그 각각에 대하여 여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로 여학생 2명이 이웃하여 앉는 경우의 수는

$5!\times2!=240$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-240=480$

23

조건 (가)에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 마부가 앉아 있는 의자를 제외한 3개이고, 두 사람은 자리를 서로 바꿔 앉을 수 있으므로 A와 B가 앉는 경우의 수는

$3\times2!=6$

조건 (나)에서 C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는 남은 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 경우의 수에서 C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하여 앉는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

남은 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 경우의 수는

${}_5P_2=5\times4=20$

이때 C와 D가 이웃하여 앉을 수 있는 2인용 의자는 A와 B가 앉아 있는 의자와 마부가 앉아 있는 의자를 제외한 나머지 2개이고, C와 D는 서로 자리를 바꿔 앉을 수 있으므로 C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하여 앉는 경우의 수는

$2\times2!=4$

즉, C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는

$20-4=16$

남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 모든 경우의 수는

$6\times16\times6=576$

답 576

24

${}_5P_2=5\times4=20$, ${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 ${}_5P_2+{}_4C_3=20+4=24$

답 24

25

$${}_5C_3\times3!=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times(3\times2\times1)$$
$$=5\times4\times3$$
$$=60$$

답 ④

26

${}_{10}C_3=\frac{{}_{10}P_3}{3!}=\frac{{}_{10}P_3}{6}$이므로

$n=\frac{{}_{10}P_3}{{}_{10}C_3}=6$

답 ③

27

${}_nP_2-{}_7C_2=21$에서

$n(n-1)-\frac{7\times6}{2\times1}=21$, $n^2-n-42=0$, $(n+6)(n-7)=0$

n은 자연수이므로 $n=7$

답 ②

28

${}_nC_2+{}_{n+1}C_3=2\cdot{}_nP_2$에서

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{6}=2n(n-1)$$

$n\geq 2$에서 $n(n-1)\neq 0$이므로 양변에 $\dfrac{6}{n(n-1)}$을 곱하면

$3+(n+1)=12$

따라서 $n=8$

답 ④

29

서로 다른 n개를 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$, $\boxed{n}$이라 하자.

(i) $\boxed{1}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다.

$\boxed{2}$를 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다.

$\boxed{3}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다.

⋮

$\boxed{n}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다.

이상을 모두 합하면 $n\times\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다. …… ㉠

(ii) 그런데 위의 ㉠에 있는 조합의 수 중에는 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$, $\boxed{r}$의 r개로 구성된 하나의 조합이 $\boxed{1}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합부터 $\boxed{r}$를 포함하여 r개를 선택하는 조합까지 1번씩 총 $\boxed{r}$번 반복되어 계산되었다.

(중략)

(i), (ii)로부터 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$는

${}_n\mathrm{C}_r=\boxed{\dfrac{n}{r}}\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

따라서 (가): ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$, (나): r, (다): $\dfrac{n}{r}$

답 ④

30

서로 다른 6개의 과목 중에서 서로 다른 3개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

답 ⑤

31

자연수의 첫 번째 자릿수는 0이 될 수 없으므로 1이다.

즉, 다음의 6개의 □ 중에서 3개를 선택하여 0을 넣으면 0끼리는 어느 것도 이웃하지 않는 아홉 자리의 자연수를 만들 수 있다.

1□1□1□1□1□1□

따라서 구하는 자연수의 개수는

${}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

답 ⑤

32

500보다 크고 700보다 작은 자연수의 백의 자리의 수는 5 또는 6이다.

(i) $a=5$일 때,

$c<b<5$이므로 1부터 4까지의 자연수 중 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c로 놓으면 된다.

따라서 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

(ii) $a=6$일 때,

$c<b<6$이므로 1부터 5까지의 자연수 중 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c로 놓으면 된다.

따라서 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+10=16$

답 ③

33

전체집합 U의 원소 5개 중에서 집합 $A\cup B$의 원소 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$ …… ㉠

집합 $A\cup B$의 원소 3개 중에서 집합 $A\cap B$의 원소 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$ …… ㉡

집합 $A\cup B$의 원소 3개 중에서 집합 $A\cap B$의 원소가 아닌 2개의 원소는 각각 집합 $A-B$와 집합 $B-A$ 중 반드시 한 집합에만 속하므로 그 경우의 수는

$2^2=4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$10\times3\times4=120$

답 ⑤

34

3개의 가로줄 중 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

택한 2개의 가로줄 중 한 가로줄에서 1개의 숫자를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

조건 (나)에 의하여 나머지 한 가로줄에서 이미 선택한 숫자와 다른 세로줄에 있는 1개의 숫자를 선택하는 경우의 수는

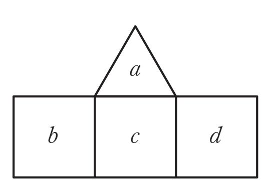
${}_2\mathrm{C}_1=2$

따라서 조건을 만족시키도록 2개의 숫자를 선택하는 경우의 수는

$3\times3\times2=18$

답 ④

35



그림과 같이 정삼각형에 적힌 수를 a, 정사각형에 적힌 수를 왼쪽부터 차례로 b, c, d라 하자.

조건 (가)에서 $a>b$, $a>c$, $a>d$

조건 (나)에서 $b\neq c$, $c\neq d$

(i) $b\neq d$일 때

a, b, c, d가 서로 다르다.

6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_4=15$

이 각각에 대하여 택한 4개의 수 중에서 가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 3개의 수를 b, c, d로 정하면 되므로 이 경우의 수는

$1\times 3!=6$

따라서 $b\neq d$인 경우의 수는

$15\times 6=90$

(ii) $b=d$일 때

$a>b=d$, $a>c$이므로 a, b, c, d 중 서로 다른 수의 개수는 3이다.

6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$

이 각각에 대하여 택한 3개의 수 중에서 가장 큰 수를 a라 하고, 나머지 2개의 수를 $b(=d)$, c로 정하면 되므로 이 경우의 수는

$1\times 2!=2$

따라서 $b=d$인 경우의 수는

$20\times 2=40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$90+40=130$

답 130

36

1부터 8까지의 모든 자연수의 합이 36으로 짝수이므로 선택한 카드에 적혀 있는 5개의 수의 합이 짝수인 경우의 수는 선택하지 않는 카드 3장에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수인 경우의 수와 같다.

남은 카드 3장에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수가 되려면 세 수가 모두 짝수이거나 세 수 중 짝수가 1개, 홀수가 2개이어야 한다.

(i) 세 수가 모두 짝수인 경우

2, 4, 6, 8이 적혀 있는 4장의 카드 중 3장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3=4$

(ii) 세 수 중 짝수가 1개, 홀수가 2개인 경우

2, 4, 6, 8이 적혀 있는 4장의 카드 중 1장의 카드를 꺼내고 1, 3, 5, 7이 적혀 있는 4장의 카드 중 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times {}_4\mathrm{C}_2=4\times\dfrac{4\times 3}{2\times 1}=4\times 6=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+24=28$

답 ②

37

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$B=\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$에서

$A-B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A\cap B=\{6, 7, 8, 9, 10\}$이므로

$n(A-B)=5$, $n(A\cap B)=5$

$X_1=X\cap(A-B)$, $X_2=X\cap(A\cap B)$라 하면

$X=X_1\cup X_2$이고 $X_1\cap X_2=\varnothing$이다.

(i) $n(X\cup B)=12$이고 $n(B)=10$이므로

$n(X_1)=\boxed{\ 2\ }$

집합 X_1은 집합 $A-B$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합이므로 가능한 집합 X_1의 개수는 ${}_5\mathrm{C}_2=\boxed{\ 10\ }$이다.

(ii) 집합 X_2는 집합 $A\cap B$의 부분집합이므로 가능한 집합 X_2의 개수는 $2^5=\boxed{\ 32\ }$이다.

(i), (ii)에 의하여 집합 X의 개수는 집합 X_1을 정하는 경우의 수와 집합 X_2를 정하는 경우의 수의 곱과 같으므로

${}_5\mathrm{C}_2\times 2^5=\boxed{\ 10\ }\times\boxed{\ 32\ }=320$

따라서 $p=2$, $q=10$, $r=32$이므로

$p+q+r=44$

답 ①

38

7개의 점 중에서 두 점을 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수는 7개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_7\mathrm{C}_2=\dfrac{7\times 6}{2\times 1}=21$

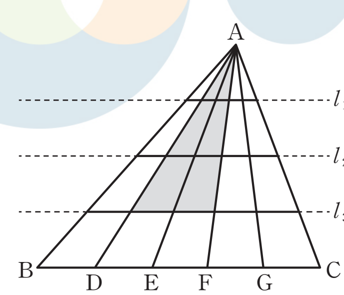
일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$이고, 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{4\times 3}{2\times 1}=6$이다.

이때 일직선 위에 있는 3개의 점으로 만들 수 있는 직선이 2개, 일직선 위에 있는 4개의 점으로 만들 수 있는 직선이 1개이므로 구하는 직선의 개수는

$21-(3+3+6)+2+1=12$

답 ①

39

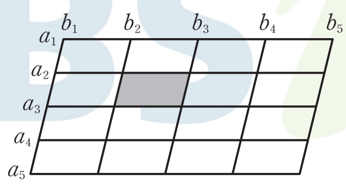


위의 그림에서 두 직선 AD, AF와 직선 l_3을 선택하면 색칠된 부분과 같은 삼각형이 만들어진다.

이와 같이 6개의 직선 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중 서로 다른 2개의 직선을 택하고, 4개의 직선 l_1, l_2, l_3, BC 중 1개의 직선을 택하면 삼각형이 1개 만들어진다.
따라서 이 도형의 선들로 만들 수 있는 삼각형의 개수는

${}_6C_2 \times {}_4C_1 = \frac{6\times5}{2\times1}\times4=60$ 답 ④

40



오른쪽 그림과 같이 각각의 가로 방향의 선을 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5라 하고, 세로 방향의 선을 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5라 하자.
색칠한 부분을 포함하는 평행사변형을 만들려면 가로 방향의 선은 a_1, a_2 중 한 개, a_3, a_4, a_5 중 한 개를 골라야 하므로 가로 방향의 선을 고르는 방법의 수는
${}_2C_1 \times {}_3C_1 = 2\times3=6$
마찬가지로 세로 방향의 선은 b_1, b_2 중 한 개, b_3, b_4, b_5 중 한 개를 골라야 하므로 세로 방향의 선을 고르는 방법의 수는
${}_2C_1 \times {}_3C_1 = 2\times3=6$
따라서 구하는 평행사변형의 개수는 $6\times6=36$ 답 ③

41

집합 Y의 모든 원소의 곱이 $1\times2\times3\times4\times6\times9=36^2$이므로 주어진 조건을 만족하는 경우는 $1\times4\times9=2\times3\times6$이다.
(i) 집합 X의 원소 x_1, x_3, x_5가 집합 Y의 원소 1, 4, 9에 대응하는 경우
집합 X의 원소 x_2, x_4, x_6이 집합 Y의 원소 2, 3, 6에 대응하므로 일대일대응인 f의 개수는
$3!\times3!=36$
(ii) 집합 X의 원소 x_2, x_4, x_6이 집합 Y의 원소 1, 4, 9에 대응하는 경우
집합 X의 원소 x_1, x_3, x_5가 집합 Y의 원소 2, 3, 6에 대응하므로 일대일대응인 f의 개수는
$3!\times3!=36$
(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는
$36+36=72$ 답 ⑤

42

조건 Ⅰ에 의하여 $f(4)=5$이고, 조건 Ⅱ에 의하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이므로
$f(5)=6$ 또는 $f(5)=7$
또, $f(1)<f(2)<f(3)<5$에서 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4 중 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 그 개수는
${}_4C_3={}_4C_1=4$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$2\times4=8$ 답 ①

43

(i) $f(1)=1$인 경우
$f(1)=1$이면 조건 (다)에 의하여 $f(2)=3$
$f(1)$, $f(2)$의 값이 정해졌으므로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값만 정하면 된다.
따라서 함수 f의 개수는 $4!=24$
(ii) $f(1)=2$인 경우
$f(1)=2$이면 조건 (나)에 의하여 $f(2)=1$
그런데 이는 조건 (다)를 만족시키지 못한다.
(iii) $f(1)=3$인 경우
$f(1)=3$이면 조건 (나)에 의하여 $f(3)=1$이고
조건 (다)에 의하여 $f(2)=5$
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 정해졌으므로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값만 정하면 된다.
따라서 함수 f의 개수는 $3!=6$
(iv) $f(1)=4$인 경우
$f(1)=4$이면 조건 (나)에 의하여 $f(4)=1$이고
조건 (다)에 의하여 $f(2)=6$
$f(1)$, $f(2)$, $f(4)$의 값이 정해졌으므로 $f(3)$, $f(5)$, $f(6)$의 값만 정하면 된다.
따라서 함수 f의 개수는 $3!=6$
(v) $f(1)=5$인 경우
$f(1)=5$이면 조건 (다)에 의하여 $f(2)=7$이므로 함수 f는 존재하지 않는다.
(vi) $f(1)=6$인 경우
$f(1)=6$이면 조건 (다)에 의하여 $f(2)=8$이므로 함수 f는 존재하지 않는다.
(i)~(vi)에서 구하는 함수 f의 개수는
$24+6+6=36$ 답 ①

서술형 연습

본문 151쪽

01 40   02 36

01

A를 B와 C보다 가까운 지점으로 출장을 보내려면 5개의 지점 중에서 3개의 지점을 택하여 A는 3개의 지점 중 가장 가까운 지점에 보

내고, B와 C는 나머지 2개의 지점에 보내면 된다.

5개의 지점 중 3개의 지점을 택하는 경우의 수는

$_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$

이때 B와 C는 지점을 바꿔도 상관없으므로 B, C가 지점을 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

그러므로 A, B, C를 3개의 지점에 출장을 보내는 경우의 수는

$10\times2=20$ ······ ㈎

D, E를 남은 2개의 지점에 출장을 보내는 경우의 수는

$2!=2$ ······ ㈏

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times2=40$ ······ ㈐

답 40

단계	채점 기준	비율
㈎	A, B, C를 3개의 지점에 출장을 보내는 경우의 수를 구한 경우	50%
㈏	D, E를 남은 2개의 지점에 출장을 보내는 경우의 수를 구한 경우	30%
㈐	조건을 만족시키는 경우의 수를 구한 경우	20%

02

$abc+a+b+c$의 값이 홀수가 되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) abc의 값이 홀수, $a+b+c$의 값이 짝수인 경우

abc의 값이 홀수이면 a, b, c가 모두 홀수이므로

$a+b+c$의 값이 짝수인 경우는 없다. ······ ㈎

(ⅱ) abc의 값이 짝수, $a+b+c$의 값이 홀수인 경우

a, b, c 중에서 한 개는 홀수, 나머지 두 개는 짝수이어야 하므로 순서쌍 (a, b, c)는 (홀수, 짝수, 짝수), (짝수, 홀수, 짝수), (짝수, 짝수, 홀수)의 3가지이다.

이때 (홀수, 짝수, 짝수)인 경우의 수는

$3\times2\times2=12$

마찬가지로 (짝수, 홀수, 짝수)인 경우의 수와 (짝수, 짝수, 홀수)인 경우의 수도 각각 12이므로 경우의 수는

$12\times3=36$ ······ ㈏

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 36이다. ······ ㈐

답 36

단계	채점 기준	비율
㈎	abc의 값이 홀수, $a+b+c$의 값이 짝수인 경우의 수를 구한 경우	40%
㈏	abc의 값이 짝수, $a+b+c$의 값이 홀수인 경우의 수를 구한 경우	50%
㈐	$abc+a+b+c$의 값이 홀수가 되는 경우의 수를 구한 경우	10%

1등급 도전

본문 152쪽

01 64 **02** 960 **03** ②

01

풀이 전략 $x>0$인 x에 대하여 $f(x)$의 값에 따라 $f(-x)$의 값을 구한다.

문제 풀이

STEP 1 조건 ㈎를 만족시키는 식을 정리한다.

조건 ㈎에서 집합 X의 모든 원소 x에 대하여

$|f(x)+f(-x)|=1$이므로

$f(x)+f(-x)=1$ 또는 $f(x)+f(-x)=-1$

STEP 2 조건 ㈏를 이용하여 $x>0$인 집합 X의 원소 x에 대하여 $f(x)=1$, $f(x)=2$, $f(x)=3$인 경우로 나누어 $f(-x)$의 값을 구한다.

조건 ㈏에서 $x>0$이면 $f(x)>0$이므로 $x>0$일 때 $f(x)>0$인 경우를 나누어 보면 다음과 같다.

(ⅰ) $f(x)=1$일 때,

$f(-x)=-2$

$1+f(-x)=1$에서 $f(-x)=0\notin X$

$1+f(-x)=-1$에서 $f(-x)=-2\in X$

(ⅱ) $f(x)=2$일 때,

$f(-x)=-3$ 또는 $f(-x)=-1$

(ⅲ) $f(x)=3$일 때,

$f(-x)=-2$

$3+f(-x)=1$에서 $f(-x)=-2\in X$

$3+f(-x)=-1$에서 $f(-x)=-4\notin X$

STEP 3 함수 $f(x)$의 개수를 구한다.

이상에서 $f(x)$의 값에 따라 $f(-x)$의 값이 정해진다.

따라서 $f(1)$과 $f(-1)$의 값을 정하는 경우의 수는 4이고, $f(2)$와 $f(-2)$의 값을 정하는 경우의 수도 4, $f(3)$과 $f(-3)$의 값을 정하는 경우의 수도 4이므로 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는

$4\times4\times4=64$

답 64

02

풀이 전략 5명의 학생 중 1명이 초콜릿 2개, 꽃 2송이, 초콜릿 1개와 꽃 1송이를 받는 경우로 나누어 각각의 경우의 수를 구하여 더한다.

문제 풀이

STEP 1 5명의 학생 중 1명이 초콜릿 2개 또는 꽃 2송이 또는 초콜렛 1개와 꽃 1송이를 받는 경우로 나누어 생각한다.

서로 다른 종류의 꽃 4송이와 같은 종류의 초콜릿 2개를 조건을 만족시키도록 5명의 학생에게 나누어 주는 경우는 다음과 같다.

꽃 4송이, 초콜릿 2개를 남김없이, 아무것도 받지 못하는 학생이 없도록 나누어 주려면 한 학생에게 꽃과 초콜릿 중 2개를 줘야 한다.

(ⅰ) 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우

초콜릿 2개를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5이고, 나머지 4명의 학생에게 꽃을 각각 한 송이씩 나누어 주는 경우의 수는

$4!=24$

$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times1$

이므로 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우의 수는

$5\times24=120$

(ii) 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우

4송이의 꽃 중에서 2송이의 꽃을 고르는 경우의 수는

${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$ 조합의 수: ${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

이고, 이 2송이의 꽃을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5, 남은 2송이의 꽃을 줄 학생을 정하는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$ 순열의 수: ${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

또한, 꽃을 받지 못한 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 1개씩 주는 경우의 수가 1이므로 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우의 수는

$6\times5\times12\times1=360$

(iii) 1명의 학생이 초콜릿 1개와 꽃 1송이를 받는 경우

4송이의 꽃을 4명의 학생에게 각각 1송이씩 주는 경우의 수는

${}_5P_4=5\times4\times3\times2=120$

이고, 꽃을 받지 못한 학생에게 초콜릿 1개를 주고 꽃을 받은 학생 중 1명을 택해 남은 초콜릿 1개를 주는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

이므로 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우의 수는

$120\times4=480$

STEP 2 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구한다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$120+360+480=960$

답 960

03

풀이 전략 A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉을 때와 좌석 번호가 25인 의자에 앉을 때로 나누어 각각의 경우를 구하여 더한다.

문제 풀이

STEP 1 규칙 (가)에 의하여 두 학생 A, B가 앉을 수 있는 의자의 좌석 번호를 알아본다.

다음 그림은 의자의 위치와 좌석 번호를 나타낸다.

11	12	13	14	15	16	17
		23	24	25		

A의 좌석 번호는 24 이상이다.

규칙 (가)에 의하여 A는 좌석 번호가 24 또는 25인 의자에 앉을 수 있고, B는 좌석 번호가 11 또는 12 또는 13 또는 14인 의자에 앉을 수 있다.

규칙 (나), (다)에 의하여 어느 두 학생도 양옆 또는 앞뒤로 이웃하여 앉지 않는다.

B의 좌석 번호는 14 이하이다.

STEP 2 A가 좌석 번호 24인 의자에 앉을 때와 좌석 번호 25인 의자에 앉을 때로 나누어 생각한다.

5명의 학생이 앉을 수 있는 5개의 의자를 선택한 후 규칙 (가)에 의하여 두 학생 A, B가 앉고 남은 3개의 의자에 나머지 3명의 학생이 앉는 것으로 경우의 수를 구해 보자.

(i) A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉을 때

11	12	13	14	15	16	17
		23	A	25		

14와 24의 차가 10이고 23과 24, 25와 24의 차는 각각 1이므로 나머지 4명은 좌석 번호가 14, 23, 25인 의자에 앉을 수 없다.

A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉으면 나머지 4명의 학생은 규칙 (나), (다)에 의하여 좌석 번호가 11, 13, 15, 17인 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

이때 B는 규칙 (가)에 의하여 좌석 번호가 11, 13인 2개의 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 선택하여 앉는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

위의 각 경우에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

이때의 경우의 수는

$2\times6=12$

(ii) A가 좌석 번호가 25인 의자에 앉을 때

11	12	13	14	15	16	17
		23	24	A		

15와 25의 차가 10이고 24와 25의 차는 1이므로 나머지 4명은 좌석 번호가 15, 24인 의자에 앉을 수 없다.

A가 좌석 번호가 25인 의자에 앉으면 나머지 4명의 학생은 규칙 (나), (다)에 의하여 좌석 번호가 11 또는 12인 의자 중 하나, 좌석 번호가 16 또는 17인 의자 중 하나, 좌석 번호가 14인 의자, 좌석 번호가 23인 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

좌석 번호가 11 또는 12인 의자 중 하나를 선택하고(㉠) 좌석 번호가 16 또는 17인 의자 중 하나를 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1=2\times2=4$

위의 각 경우에 대하여 B는 규칙 (가)에 의하여 ㉠에서 선택된 의자와 좌석 번호가 14인 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 선택하여 앉는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

위의 각 경우에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

이때의 경우의 수는

$4\times2\times6=48$

STEP 3 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+48=60$

답 ②