올림포스 유형편

수학(하)
정답과 풀이

IV. 집합과 명제

10 집합

개념 확인하기

본문 7~9쪽

01 $\in$ **02** $\in$ **03** $\notin$ **04** $\notin$ **05** $\notin$
06 $A=\{1, 2, 3, 6\}$ **07** $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
08 $C=\{3, 6, 9\}$ **09** $A=\{1, 3, 5, 7\}$
10 $A=\{x|x$는 1 이상 8 이하의 홀수$\}$
(또는 $A=\{2n-1|n=1, 2, 3, 4\}$)
11 5 **12** 5 **13** 0 **14** $B\subset A$ **15** $B\subset A$
16 $A\subset B$ **17** $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
18 $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ **19** $\{a, b, c\}$
20 $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$
21 $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
22 $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$ **23** $\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}$
24 4 **25** 16 **26** 8 **27** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
28 $\{3, 4, 5\}$ **29** $\{1, 2\}$ **30** $\{6, 7\}$ **31** $\{a\}$ **32** $\{d, e\}$
33 $\{d, e\}$ **34** $\{a\}$ **35** $\{1, 3\}$ **36** $\{1, 2, 3, 4\}$
37 $\varnothing$ **38** $\{2, 4\}$ **39** 참 **40** 거짓 **41** 참
42 참 **43** 거짓 **44** 참 **45** $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
46 $\{3\}$ **47** $\{1, 2\}$ **48** $\{4, 5\}$ **49** $\{4, 5, 6\}$
50 $\{1, 2, 6\}$ **51** $\{6\}$ **52** $\{1, 2, 4, 5, 6\}$
53 8 **54** 7 **55** 3

[01~05]
12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이므로 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

01 $1\boxed{\in}A$

답 $\in$

02 $3\boxed{\in}A$

답 $\in$

03 $5\boxed{\notin}A$

답 $\notin$

04 $7\boxed{\notin}A$

답 $\notin$

05 $9\boxed{\notin}A$

답 $\notin$

06 답 $A=\{1, 2, 3, 6\}$

07 답 $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

08 답 $C=\{3, 6, 9\}$

09 답 $A=\{1, 3, 5, 7\}$

10 답 $A=\{x|x$는 1 이상 8 이하의 홀수$\}$
(또는 $A=\{2n-1|n=1, 2, 3, 4\}$)

11 $n(A)=5$

답 5

12 $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 $n(B)=5$

답 5

13 $C=\varnothing$이므로 $n(C)=0$

답 0

14 답 $B\subset A$

15 $x^2-3x+2=0$에서
$(x-1)(x-2)=0$
$x=1$ 또는 $x=2$
따라서 $A=\{1, 2\}$이고 $B=\{1\}$이므로
$B\subset A$

답 $B\subset A$

16 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로
$A\subset B$

답 $A\subset B$

17 답 $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

18 답 $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

19 답 $\{a, b, c\}$

20 답 $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

21 답 $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

22 답 $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$

23 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합 중 원소 1을 포함하지 않는 부분집합은 집합 $A=\{1, 2, 3\}$에서 원소 1을 제외한 집합 $\{2, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 집합 $\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}$이다.

답 $\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}$

24 $2^2=4$

답 4

25 $2^{5-1}=2^4=16$

답 16

26 $2^{5-2}=2^3=8$

답 8

27 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

답 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

28 $A\cap B=\{3, 4, 5\}$

답 $\{3, 4, 5\}$

29 $A-B=\{1, 2\}$

답 $\{1, 2\}$

30 $B-A=\{6, 7\}$

답 $\{6, 7\}$

31 $A-B=\{a\}$

답 $\{a\}$

32 $B-A=\{d, e\}$

답 $\{d, e\}$

33 $A^C=\{d, e\}$

답 $\{d, e\}$

34 $B^C=\{a\}$

답 $\{a\}$

35 $A^C=\{1, 3\}$

답 $\{1, 3\}$

36 $A\cup A^C=U=\{1, 2, 3, 4\}$

답 $\{1, 2, 3, 4\}$

37 $A\cap A^C=\varnothing$

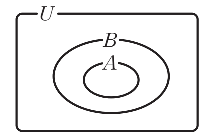
답 $\varnothing$

38 $(A^C)^C=A=\{2, 4\}$

답 $\{2, 4\}$

[39~44]

$A\subset B \Longleftrightarrow A\cap B=A \Longleftrightarrow A\cup B=B$
$\Longleftrightarrow A-B=\varnothing \Longleftrightarrow A\cap B^C=\varnothing$
$\Longleftrightarrow B^C\subset A^C \Longleftrightarrow B^C-A^C=\varnothing$



39 답 참

40 답 거짓

41 답 참

42 답 참

43 답 거짓

44 답 참

45 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

답 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

46 $A\cap B=\{3\}$

답 $\{3\}$

47 $A-B=\{1, 2\}$

답 $\{1, 2\}$

48 $B-A=\{4, 5\}$

답 $\{4, 5\}$

49 $A^C=\{4, 5, 6\}$

답 $\{4, 5, 6\}$

50 $B^C=\{1, 2, 6\}$

답 $\{1, 2, 6\}$

51 $(A\cup B)^C=\{6\}$

답 $\{6\}$

52 $(A\cap B)^C=\{1, 2, 4, 5, 6\}$

답 $\{1, 2, 4, 5, 6\}$

53 $n(A\cap B)=0$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=5+3=8$

답 8

54 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=5+3-1=7$

답 7

55 $n(A\cup B)=7$이므로
$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=10-7=3$

답 3

유형 완성하기

본문 10~25쪽

01 ①	02 ⑤	03 ③	04 ④	05 ③
06 ⑤	07 ④	08 ⑤	09 ①	10 ④
11 ③	12 ①	13 ⑤	14 ④	15 4
16 14	17 ②	18 ①	19 15	20 31
21 5	22 255	23 ①	24 4	25 ④
26 ③	27 ④	28 10	29 43	30 ⑤
31 ③	32 ③	33 ④	34 ③	35 ⑤
36 ④	37 ②	38 ⑤	39 ③	40 ①
41 ②	42 ②	43 ④	44 53	45 ①
46 ②	47 ④	48 ②	49 ③	50 ③
51 ④	52 ④	53 ④	54 8	55 6
56 ①	57 ⑤	58 ⑤	59 ①	60 ②
61 ⑤	62 18	63 ④	64 25	65 ③
66 ⑤	67 ⑤	68 ②	69 16	70 ⑤
71 ⑤	72 8	73 5	74 ④	75 ④
76 ③	77 ②	78 8	79 ④	80 ③
81 ②	82 ①	83 ⑤	84 ③	85 ⑤
86 12	87 ②	88 30	89 ③	90 ⑤

01 k는 집합 A의 원소 중에서 집합 B의 원소가 아닌 것이므로 k의 값은 1, 2이고, 그 합은
$1+2=3$

답 ①

02 양의 약수의 개수가 홀수인 자연수는 완전제곱수이므로
$4=2^2\in A$, $16=4^2\in A$
하지만 8, 12, 24는 완전제곱수가 아니므로 집합 A의 원소가 아니다.
$8\notin A$, $12\notin A$, $24\notin A$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

03 $(2, 3)\in A$이므로
$2a+3b=4$ ...... ㉠
또 $(4, 8)\in A$에서
$4a+8b=4$이므로
$a+2b=1$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=5$, $b=-2$
따라서
$a+b=5+(-2)=3$

답 ③

04 $x\in A$이므로 x가 될 수 있는 값은 0, 1이고, $y\in B$이므로 y가 될 수 있는 값은 0, 1, 2이다.
이때 $x+y$의 값은
$x=0$, $y=0$일 때, $x+y=0+0=0$
$x=0$, $y=1$일 때, $x+y=0+1=1$
$x=0$, $y=2$일 때, $x+y=0+2=2$
$x=1$, $y=0$일 때, $x+y=1+0=1$
$x=1$, $y=1$일 때, $x+y=1+1=2$
$x=1$, $y=2$일 때, $x+y=1+2=3$
따라서 $C=\{0, 1, 2, 3\}$이므로 집합 C의 원소의 개수는 4이다.

답 ④

05 2 이하의 자연수는 1, 2이므로
$m=1$, $n=1$일 때, $x=2^1\times3^1=6$
$m=1$, $n=2$일 때, $x=2^1\times3^2=18$
$m=2$, $n=1$일 때, $x=2^2\times3^1=12$
$m=2$, $n=2$일 때, $x=2^2\times3^2=36$
따라서 $A=\{6, 12, 18, 36\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은
$6+12+18+36=72$

답 ③

06 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 5\}$
$x\in A$, $y\in B$이므로 x가 될 수 있는 값은 1, 2, 4이고, y가 될 수 있는 값은 1, 5이다.
이때 xy의 값은
$x=1$, $y=1$일 때, $xy=1\times1=1$
$x=1$, $y=5$일 때, $xy=1\times5=5$
$x=2$, $y=1$일 때, $xy=2\times1=2$
$x=2$, $y=5$일 때, $xy=2\times5=10$
$x=4$, $y=1$일 때, $xy=4\times1=4$
$x=4$, $y=5$일 때, $xy=4\times5=20$
따라서 $C=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로 집합 C의 모든 원소의 합은
$1+2+4+5+10+20=42$

답 ⑤

07 $2x-3\le11$에서 $x\le7$이므로
$A=\{x|x$는 $x\le7$인 자연수$\}$
$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
또 6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이므로
$C=\{1, 2, 3, 6\}$

따라서

$B \subset C \subset A$

답 ④

08 $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$

① 5는 집합 A의 원소이므로

$5 \in A$

② 5는 집합 B의 원소이므로

$5 \in B$

③ 2와 5는 모두 집합 A의 원소이므로

$\{2, 5\} \subset A$

④ 2와 5는 모두 집합 B의 원소이므로

$\{2, 5\} \subset B$

⑤ 3, 7은 집합 A의 원소이지만 집합 B의 원소가 아니므로

$A \not\subset B$

답 ⑤

09 $3x-1=5$에서 $x=2$이므로

$A=\{2\}$

$3x+1<10$에서 $x<3$이므로

$B=\{1, 2\}$

$|2x|<8$에서 $|x|<4$이므로

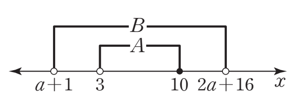
$C=\{1, 2, 3\}$

따라서

$A \subset B \subset C$

답 ①

10 $A \subset B$를 만족시키도록 수직선 위에 두 집합 A, B를 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $a+1 \le 3$, $10<2a+16$이어야 하므로

$a \le 2$, $a>-3$

따라서 $-3<a \le 2$이므로 정수 a의 값은

$-2, -1, 0, 1, 2$

이고, 최댓값과 최솟값의 차는

$2-(-2)=4$

답 ④

11 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소이어야 하므로

$a \in B$, $a+2 \in B$

가 성립해야 한다.

(i) $a=-1$이면 $a+2=1 \in B$이므로 $A \subset B$가 성립한다.

(ii) $a=0$이면 $a+2=2 \notin B$이므로 $A \not\subset B$이다.

(iii) $a=1$이면 $a+2=3 \in B$이므로 $A \subset B$가 성립한다.

(iv) $a=3$이면 $a+2=5 \notin B$이므로 $A \not\subset B$이다.

(i)~(iv)에서 $A \subset B$가 성립하도록 하는 모든 실수 a의 값은 -1, 1이고, 그 합은

$-1+1=0$

답 ③

12 ㄱ. $A \subset B$이고, $3 \notin A$이므로 집합 A는 집합 B의 진부분집합이다.

ㄴ. $A \not\subset B$이므로 집합 A는 집합 B의 진부분집합이 아니다.

ㄷ. $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 3, 5, 7\}$

즉, $A \not\subset B$이므로 집합 A는 집합 B의 진부분집합이 아니다.

이상에서 집합 A가 집합 B의 진부분집합인 것은 ㄱ이다.

답 ①

13 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 6이다.

$X \subset A$이므로 집합 X의 원소는 집합 A의 원소이어야 하고, $X \ne A$이므로 집합 X의 원소의 개수의 최댓값은 5이다.

답 ⑤

14 ① $\varnothing$는 집합 A의 원소이므로

$\varnothing \in A$

② 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로

$\varnothing \subset A$

③ a는 집합 A의 원소이므로

$\{a\} \subset A$

④ b는 집합 A의 원소가 아니므로 $\{a, b\}$는 집합 A의 부분집합이 아니다.

$\{a, b\} \not\subset A$

⑤ $\{a, b\}$는 집합 A의 원소이므로

$\{a, b\} \in A$

답 ④

15 $A=B$이므로

$a=1$, $b=3$

따라서

$a+b=1+3=4$

답 4

16 $A \subset B$, $B \subset A$이므로 $A=B$이다.

즉, $a-2=4$, $b-1=7$

따라서 $a=6$, $b=8$이므로

$a+b=6+8=14$

답 14

17 (i) $a+1=3$일 때, 즉 $a=2$이면 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 3, 5\}$이므로 $A=B$가 성립한다.

(ii) $3-a=3$일 때, 즉 $a=0$이면 $A=\{-1, 1, 3\}$, $B=\{1, 3\}$이므로 $A \ne B$이다.

(iii) $2a+1=3$일 때, 즉 $a=1$이면 $A=\{0, 2, 3\}$, $B=\{2, 3\}$이므로 $A \ne B$이다.

(i)~(iii)에서 $A=B$가 성립하도록 하는 상수 a의 값은 2이다.

답 ②

18 집합 A의 원소의 개수를 k라 하면 집합 A의 진부분집합의 개수는

2^k-1

따라서 $2^k-1=63$에서

$2^k=64=2^6$

즉, $k=6$이므로 집합 A의 원소의 개수는 6이다.

답 ①

19 $A=\{1, 3, 5, 15\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 4이다.

따라서 집합 A의 진부분집합의 개수는

$2^4-1=15$

답 15

20 $A=\{7, 14, 21, 28\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 4이다.

따라서 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^4=16$

집합 A의 진부분집합의 개수는

$2^4-1=15$

즉, $p+q=16+15=31$

답 31

21 집합 A의 원소의 개수가 n이므로 집합 A의 부분집합의 개수는

2^n

또 집합 B의 원소의 개수가 $n+2$이므로 집합 B의 진부분집합의 개수는

$2^{n+2}-1$

따라서

$2^n+2^{n+2}-1=159$에서

$(1+2^2)\times 2^n=160$

$2^n=32=2^5$

즉, $n=5$

답 5

22 20 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19이므로 집합 A의 부분집합 중에서 모든 원소가 소수인 집합은 집합 $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$의 부분집합에서 공집합을 제외한 집합이다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^8-1=255$

답 255

23 $n(A)=k$로 놓으면

$n(B)=k+1$

이때 집합 A의 부분집합의 개수는 2^k, 집합 B의 부분집합의 개수는 2^{k+1}이고, 그 차가 64이므로

$2^{k+1}-2^k=64$

$(2-1)\times 2^k=64$

$2^k=2^6$

따라서 $k=6$, 즉, $n(A)=6$

답 ①

24 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2는 원소로 갖고, 5는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 집합 $\{3, 4\}$의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^2=4$

답 4

25 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 12를 반드시 원소로 갖는 집합 A의 진부분집합의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$의 진부분집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^5-1=31$

답 ④

26 집합 X는 집합 B의 부분집합이고, 원소 1, 5를 반드시 포함한다.

따라서 집합 X는 원소 3, 7의 포함 여부에 따라 정해지므로

구하는 집합 X의 개수는

$2^2=4$

답 ③

27 집합 X는 집합 A의 부분집합이고, 1, 9를 반드시 원소로 가지므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

답 ④

28 조건 (가)에서 집합 X는 집합 A의 부분집합이다.

조건 (나)에서 1은 집합 X의 원소이고, 2, 3은 집합 X의 원소가 아니다.

집합 A의 원소의 개수가 k이므로 조건 (가), (나)를 만족시키는 집합 X의 개수는

2^{k-3}

따라서 $2^{k-3}=128$에서

$2^{k-3}=2^7$

즉, $k-3=7$에서 $k=10$

답 10

29 집합 X는 집합 A의 부분집합이고, 원소 1, 2를 반드시 포함한다.

따라서 집합 X는 원소 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_k의 포함 여부에 따라 정해지므로 집합 X의 개수는

2^k

따라서 $2^k=32$에서 $k=5$

이때 집합 A의 모든 원소의 합이 최대이려면 1, 2를 제외한 집합 A의 나머지 5개의 원소가 6, 7, 8, 9, 10이어야 한다.

즉, 집합 A의 모든 원소의 합의 최댓값은

$1+2+6+7+8+9+10=43$

답 43

30 $A\cap B=\{2, 5\}$에서 $5\in A$이므로
$a^2+1=5$, $a^2=4$
즉, $a=-2$ 또는 $a=2$
(i) $a=-2$인 경우
$A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{-3, -2, 2, 7\}$이므로 $A\cap B=\{2\}$가 되어 $A\cap B=\{2, 5\}$를 만족시키지 않는다.
(ii) $a=2$인 경우
$A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{-2, 2, 5, 7\}$이므로 $A\cap B=\{2, 5\}$가 되어 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에서 $a=2$

답 ⑤

31 $A\cap B=\{1, 3\}$이므로 집합 B는 1, 3을 반드시 원소로 갖고, 5, 7, 9는 원소로 갖지 않는다.
따라서 집합 B의 모든 원소의 합이 최대인 경우는 집합 B가 2, 4, 6, 8, 10을 모두 원소로 가질 때이므로 $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$일 때이다.
즉, 집합 B의 모든 원소의 합의 최댓값은
$1+2+3+4+6+8+10=34$

답 ③

32 ㄱ. $A_n=\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, 1\right\}$이므로 집합 A_n의 원소의 개수는 $n+1$이다. (참)
ㄴ. $A_2=\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $A_4=\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$이므로
$A_2\subset A_4$ (거짓)
ㄷ. $A_2=\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $A_3=\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$이므로
$A_2\cup A_3=\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$이고,
$A_6=\left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}$이므로
$(A_2\cup A_3)\subset A_6$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

33 ① $\{1, 2, 3\}\cap A=\{1, 2, 3\}$
② $\{1, 3, 5\}\cap A=\{1, 3\}$
③ $\{1\}\cap A=\{1\}$
④ $\{4, 5\}\cap A=\varnothing$
⑤ $\{3, 4, 5\}\cap A=\{3\}$
따라서 집합 A와 서로소인 집합은 ④ $\{4, 5\}$이다.

답 ④

34 조건을 만족시키는 집합은 집합 $\{3, 4, 5, 6\}$의 부분집합이므로 구하는 집합의 개수는
$2^4=16$

답 ③

35 두 집합 A, B가 전체집합 U의 부분집합이므로 k는 7 이하의 자연수이다.
이때 두 집합 A, B가 서로소이므로
$k+1<7$, $k<6$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2, 3, 4, 5이고, 그 합은
$1+2+3+4+5=15$

답 ⑤

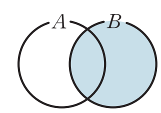
36 $A-B=\{3, 6\}$이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은
$3+6=9$

답 ④

37 $A=\{1, 3, 9\}$이므로
$A^C=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
따라서 집합 A^C의 원소의 개수는 7이다.

답 ②

38 $B=(A\cup B)-(A-B)$이므로
$B=\{3, 4, 5\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$3+4+5=12$



답 ⑤

39 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$이므로
$A-B=\{4, 6, 8\}$
따라서 집합 $A-B$의 원소의 개수는 3이다.

답 ③

40 $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C=\{1, 3, 9\}$이므로
$B-C=\{5, 7\}$
이때 $A^C=\{6, 7, 8, 9, 10\}$이므로
$(B-C)\cap A^C=\{7\}$
따라서 집합 $(B-C)\cap A^C$의 원소의 개수는 1이다.

답 ①

41 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 집합 A에서 집합 $B\cup C$를 제외한 부분이므로
$A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^C$
따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

답 ②

42 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 집합 A에서 집합 $B\cap C$를 제외한 부분이므로
$A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^C$
따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

답 ②

43 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 집합 A에서 집합 $B\cup C$를 제외한 부분이므로 항상 옳은 것은 ④ $A-(B\cup C)$이다.

답 ④

44 집합 B는 2와 3을 원소로 가져야 하므로

$b=3$

또 $B=\{2, 3, 5\}$이고, $A-B=\{1\}$이므로 집합 A는 5를 원소로 가져야 한다.

즉, $a=5$

따라서 $10a+b=10\times5+3=53$

답 53

45 $A\cap B=\{1, 3\}$에서 집합 A가 3을 원소로 가지므로

$a^2+2=3$에서 $a^2=1$

$a=-1$ 또는 $a=1$

(i) $a=-1$인 경우

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{-3, 1, 4\}$이므로

$A\cap B=\{1\}$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=1$인 경우

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{-2, 1, 3\}$이므로

$A\cap B=\{1, 3\}$이 되어 조건을 만족시킨다.

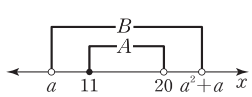
(i), (ii)에서 $a=1$

따라서 $A\cup B=\{-2, 1, 2, 3\}$이므로 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$-2+1+2+3=4$

답 ①

46 $A\cap B=A$에서 $A\subset B$이므로 이를 만족시키도록 수직선 위에 두 집합 A, B를 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $a<11$, $20\le a^2+a$이어야 한다.

$20\le a^2+a$에서

$a^2+a-20\ge0$

$(a+5)(a-4)\ge0$

$a\le-5$ 또는 $a\ge4$

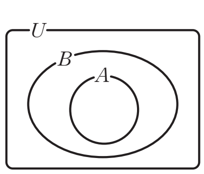
따라서 $4\le a<11$이므로 자연수 a의 값은

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

이고, 그 개수는 7이다.

답 ②

47



$A\subset B$이므로

① $A\cup B=B$

② $A\cap B=A$

③ $A-B=\varnothing$

④ $A\subset(A\cup B)$에서 $(A\cup B)^C\subset A^C$

⑤ $(A\cap B)\subset B$에서 $B^C\subset(A\cap B)^C$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

답 ④

48 $A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

$A\cap B^C=A-B$

$=\{1, 10\}$

따라서 집합 $A\cap B^C$의 원소의 개수는 2이다.

답 ②

49 $A\cap(A-B^C)^C=A\cap\{A\cap(B^C)^C\}^C$

$=A\cap(A\cap B)^C$

$=A-(A\cap B)$

$=A-B$

$=A\cap B^C$

답 ③

50 $A-C=\{1, 2, 3\}$

$B\cap C^C=B-C$

$=\{3\}$

따라서

$(A-C)\cup(B\cap C^C)=\{1, 2, 3\}$

이므로 구하는 원소의 개수는 3이다.

답 ③

51 $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$

$C-B=\varnothing$이므로 $C\subset B$

ㄱ. $A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C$

$=A\cap C$ (거짓)

ㄴ. $A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C$

$=B\cup C$

$=B$ (참)

ㄷ. $(A\cap C)\subset B$이므로

$(A\cap C)-B=\varnothing$ (참)

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

52 $A-X=A$이므로

$A\cap X=\varnothing$

즉, 집합 X는 1, 3, 5, 7을 모두 원소로 갖지 않는다.

따라서 전체집합 U의 원소의 개수가 8이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^{8-4}=2^4=16$

답 ④

53 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A-B=\{1, 2\}$

또 $(A\cup B)\cap X=X$에서 $X\subset(A\cup B)$이고,
$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$이므로
$(A-B)\subset X\subset(A\cup B)$
따라서 집합 X는 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합 $A\cup B$의 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는
$2^{7-2}=2^5=32$

답 ④

54 $A\cup X=X$에서 $A\subset X$
또 $B-A=\{4, 5\}$이므로 $(B-A)\cap X=\{5\}$에서
집합 X는 5를 원소로 갖고, 4를 원소로 갖지 않는다.
따라서 집합 X는 1, 2, 3, 5를 원소로 갖고 4를 원소로 갖지 않으므로 집합 X의 개수는 원소 6, 7, 8의 포함 여부에 따라 정해진다.
즉, 전체집합 U의 부분집합 X의 개수는
$2^3=8$

답 8

55 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{2, 4\}$
따라서 집합 $A^C\cap B^C$의 모든 원소의 합은
$2+4=6$

답 6

56 $A\cap(B\cup A^C)=(A\cap B)\cup(A\cap A^C)$
$=(A\cap B)\cup\varnothing$
$=A\cap B$

답 ①

57 $(A\cap B^C)^C=A^C\cup B$
$=\{2, 4, 6, 8, 9, 10\}\cup\{2, 3, 6, 9\}$
$=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$
따라서 집합 $(A\cap B^C)^C$의 원소의 개수는 7이다.

답 ⑤

58 $A\cup B=B^C$에서
$(A\cup B)^C=(B^C)^C=B$
이때 드모르간의 법칙에 의하여
$A^C\cap B^C=B$
즉, $B\subset A^C$이고 $B\subset B^C$
ㄱ. $B\subset B^C$에서 $B=\varnothing$ (참)
ㄴ. $B=\varnothing$이므로
$A\cup B=B^C=\varnothing^C=U$ (참)
ㄷ. $B=\varnothing$이므로
$A-B=A-\varnothing=A$이고 $B-A=\varnothing-A=\varnothing=B$이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

59 $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap B$
$=\{(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\}\cap B$
$=\{A\cap(B^C\cup B)\}\cap B$
$=(A\cap U)\cap B$
$=A\cap B$
따라서 $A\cap B=A$이므로
$A\subset B$

답 ①

60 $(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=A\cap(B\cup B^C)$
$=A\cap U$
$=A$
따라서
$(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$
$=A\cup(A^C\cap B)$
$=(A\cup A^C)\cap(A\cup B)$
$=U\cap(A\cup B)$
$=A\cup B$

답 ②

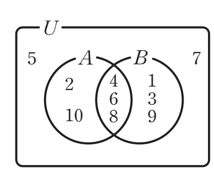
61 드모르간의 법칙에 의하여
$(A^C\cap B^C)^C=(A^C)^C\cup(B^C)^C$
$=A\cup B$
$\{A^C\cup(A^C\cap B^C)^C\}^C=\{A^C\cup(A\cup B)\}^C$
$=\{(A^C\cup A)\cup B\}^C$
$=(U\cup B)^C$
$=U^C$
$=\varnothing$

답 ⑤

62 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{4, 5\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$
이때 $B-A=\{3, 6, 9\}$이므로
$A=(A\cup B)-(B-A)=\{1, 2, 7, 8\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$1+2+7+8=18$

답 18

63 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{1, 2, 3, 9, 10\}$을 만족시키도록 집합 U, A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $B=\{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$이므로 집합 B의 원소의 개수는 6이다.

답 ④

64 조건 (나)에서

$A\cap(A-X)=A\cap(A\cap X^C)$

$=(A\cap A)\cap X^C$

$=A\cap X^C$

$=A-X$

이므로 $A-X=A$

즉, $A\cap X=\varnothing$

또 조건 (가)에서 $A\cup X=U$이므로

$X=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

따라서 집합 X의 모든 원소의 합은

$1+3+5+7+9=25$

답 25

65 조건 (가)에서

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

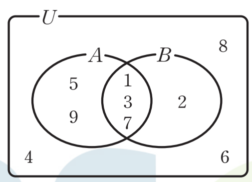
조건 (나)에서

$A-B=\{5,\ 9\}$, $B-A=\{2\}$

이때 $A\cap B=\{1,\ 3,\ 7\}$이므로

$B=(B-A)\cup(A\cap B)$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 7\}$



따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$1+2+3+7=13$

답 ③

66 $A-(B-C)=A-(B\cap C^C)$

$=A\cap(B\cap C^C)^C$

$=A\cap\{B^C\cup(C^C)^C\}$

$=A\cap(B^C\cup C)$

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)$

$=(A-B)\cup(A\cap C)$

$=\{3,\ 4,\ 5\}\cup\{4,\ 5,\ 6\}$

$=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

따라서 집합 $A-(B-C)$의 모든 원소의 합은

$3+4+5+6=18$

답 ⑤

67 $A_2\cap(A_4\cup A_5)=(A_2\cap A_4)\cup(A_2\cap A_5)$

이때 집합 $A_2\cap A_4$는 4의 배수를 원소로 갖는 집합이므로

$A_2\cap A_4=A_4$

또 집합 $A_2\cap A_5$는 10의 배수를 원소로 갖는 집합이므로

$A_2\cap A_5=A_{10}$

따라서 $p=4$, $q=10$ 또는 $p=10$, $q=4$이므로

$p+q=14$

답 ⑤

68 12, 18, 24의 최대공약수가 6이므로 집합 $A_{12}\cap A_{18}\cap A_{24}$는 6의 양의 약수를 원소로 갖는 집합이다.

따라서 $A_{12}\cap A_{18}\cap A_{24}=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로 구하는 모든 원소의 합은

$1+2+3+6=12$

답 ②

69 $A_2\cap(A_3\cup A_4)=(A_2\cap A_3)\cup(A_2\cap A_4)$

$=A_6\cup A_4$

$A_6=\{6,\ 12,\ 18,\ \cdots,\ 48\}$이므로 집합 A_6의 원소의 개수는 8이고,

$A_4=\{4,\ 8,\ 12,\ \cdots,\ 48\}$이므로 집합 A_4의 원소의 개수는 12이다.

이때 원소 12, 24, 36, 48이 두 집합 A_6, A_4에 모두 포함되므로

집합 $A_6\cup A_4$의 원소의 개수는

$8+12-4=16$

답 16

70 $x^2-9x+20=0$에서

$(x-4)(x-5)=0$

$x=4$ 또는 $x=5$

즉, $A=\{4,\ 5\}$

그런데 $A-B=\{4\}$이므로 집합 B는 5를 원소로 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 $x=5$를 근으로 가지므로

$5^2-4\times5+a=0$에서

$a=-5$

$x^2-4x+a=x^2-4x-5=0$에서

$(x+1)(x-5)=0$

$x=-1$ 또는 $x=5$

즉, $B=\{-1,\ 5\}$이므로

$B-A=\{-1\}$

따라서 $k=-1$이므로

$a+k=-5+(-1)=-6$

답 ⑤

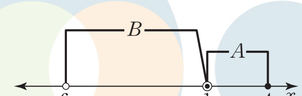
71 $x^2-5x+4\le0$에서

$(x-1)(x-4)\le0$

$1\le x\le4$

즉, $A=\{x\,|\,1\le x\le4\}$

이때 $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{x\,|\,-6<x\le4\}$를 만족시키도록 수직선 위에 두 집합 A, B를 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $B=\{x\,|\,-6<x<1\}$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 두 실근 $x=-6$, $x=1$을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=-6+1$, $b=(-6)\times1$

그러므로 $a=5$, $b=-6$이므로

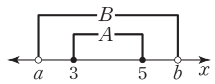
$a+b=5+(-6)=-1$

답 ⑤

72 $x^2-8x+15\le0$에서

$(x-3)(x-5)\le0$

$3 \le x \le 5$
즉, $A=\{x|3 \le x \le 5\}$
$A \cap B = A$에서 $A \subset B$이므로 이를 만족시키도록 수직선 위에 두 집합 A, B를 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $a<3$, $b>5$이어야 한다.
따라서 정수 a의 최댓값은 2, 정수 b의 최솟값은 6이므로 정수 a의 최댓값과 정수 b의 최솟값의 합은
$2+6=8$

답 8

73 $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$이므로
$20=15+10-n(A \cap B)$에서
$n(A \cap B)=5$

답 5

74 $n(A^C \cap B^C)=n((A \cup B)^C)=12$이므로
$n(A \cup B)=n(U)-n((A \cup B)^C)$
$=30-12$
$=18$
따라서 $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$이므로
$18=n(A)+n(B)-8$에서
$n(A)+n(B)=26$

답 ④

75 $n(A \cap B)=n(A)-n(A-B)$
$=35-7$
$=28$
따라서
$n((A \cap B)^C)=n(U)-n(A \cap B)$
$=50-28$
$=22$

답 ④

76 $n(A)=16$, $n(A-B)=9$이므로
$n(A \cap B)=n(A)-n(A-B)$
$=16-9$
$=7$
따라서
$n(B-A)=n(B)-n(A \cap B)$
$=20-7$
$=13$

답 ③

77 $A^C \cap B^C=(A \cup B)^C$이므로
$n(A \cup B)=n(U)-n((A \cup B)^C)$
$=100-25$
$=75$
따라서
$n(A^C \cap B)=n(B-A)$
$=n(A \cup B)-n(A)$
$=75-60$
$=15$

답 ②

78 $n(A \cup C)=n(A)+n(C)-n(A \cap C)$이므로
$7=3+5-n(A \cap C)$에서
$n(A \cap C)=1$
$n(B \cup C)=n(B)+n(C)-n(B \cap C)$이므로
$6=4+5-n(B \cap C)$에서
$n(B \cap C)=3$
또한 $n(A \cap B)=0$에서 두 집합 A, B가 서로소이므로
$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap C)-n(B \cap C)$
$=3+4+5-1-3$
$=8$

답 8

79 $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$
$=14+12-5$
$=21$
따라서
$n(C-(A \cup B))=n(A \cup B \cup C)-n(A \cup B)$
$=35-21$
$=14$

답 ④

80 여행동아리 회원 전체의 집합을 U라 하고, 이탈리아를 여행한 경험이 있다고 응답한 회원의 집합을 A, 스페인을 여행한 경험이 있다고 응답한 회원의 집합을 B라 하면
$n(U)=40$, $n(A)=30$, $n(B)=35$
이고, 이탈리아와 스페인을 모두 여행한 경험이 있다고 응답한 회원 수가 28이므로
$n(A \cap B)=28$
이다.
$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$
$=30+35-28$
$=37$
따라서 이탈리아를 여행한 경험도 없고 스페인을 여행한 경험도 없는 회원 수는
$n((A \cup B)^C)=n(U)-n(A \cup B)$
$=40-37=3$

답 ③

81 조사 대상인 학생 전체의 집합을 U라 하고, 축구를 좋아한다고 응답한 학생의 집합을 A, 야구를 좋아한다고 응답한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35$, $n(A)=21$, $n(B)=16$
이때 모든 학생이 적어도 한 종목은 좋아한다고 응답하였으므로
$n(A\cup B)=n(U)=35$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$35=21+16-n(A\cap B)$에서
$n(A\cap B)=2$
따라서 축구와 야구를 모두 좋아한다고 응답한 학생 수는 2이다.

답 ②

82 조사 대상인 학생 전체의 집합을 U라 하고, A 소설을 읽은 학생의 집합을 A, B 소설을 읽은 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=40$, $n(A)=25$, $n(B)=16$
A 소설과 B 소설을 모두 읽지 않은 학생의 집합이 $(A\cup B)^C$이므로
$n((A\cup B)^C)=5$
이다.
$$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=40-5=35$$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$35=25+16-n(A\cap B)$에서
$n(A\cap B)=6$
따라서 A 소설과 B 소설을 모두 읽은 학생 수는 6이다.

답 ①

83 조사 대상인 학생 전체의 집합을 U라 하고, A 프로그램을 시청한 학생의 집합을 A, B 프로그램을 시청한 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=30$, $n(A\cap B)=8$
A 프로그램과 B 프로그램을 모두 시청하지 않은 학생의 집합이 $(A\cup B)^C$이므로
$n((A\cup B)^C)=7$
이다.
$$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=30-7=23$$
따라서 A 프로그램과 B 프로그램 중 어느 한 프로그램만을 시청한 학생 수는
$$n(A\cup B)-n(A\cap B)=23-8=15$$

답 ⑤

84 조사 대상인 학생 전체의 집합을 U라 하고, A 공원을 방문한 적이 있는 학생의 집합을 A, B 공원을 방문한 적이 있는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=35$, $n(A)=16$, $n(B)=24$
A 공원과 B 공원을 모두 방문한 적이 없는 학생의 집합이 $(A\cup B)^C$이므로
$n((A\cup B)^C)=3$
이다.
$$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=35-3=32$$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$32=16+24-n(A\cap B)$에서
$n(A\cap B)=8$
따라서 A 공원만 방문한 적이 있는 학생 수는
$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=16-8=8$$

답 ③

다른 풀이
$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=32-24=8$

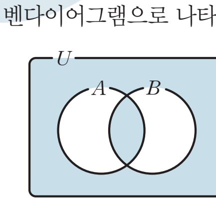
85 $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, $A\cap B=\{2, 7\}$이므로
$$A\bigstar B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}-\{2, 7\}=\{1, 3, 5, 6\}$$
이때
$(A\bigstar B)\cup C=\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $(A\bigstar B)\cap C=\{5, 6\}$이므로
$$(A\bigstar B)\bigstar C=\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}-\{5, 6\}=\{1, 3, 4, 7\}$$
따라서 집합 $(A\bigstar B)\bigstar C$의 모든 원소의 합은
$1+3+4+7=15$

답 ⑤

86 $A=\{1, 2, 3, 4\}$이고,
$A☆B=(A-B)\cup(B-A)=\{1, 2, 5\}$이므로
집합 $A☆B$의 원소 중 1, 2는 집합 $A-B$의 원소이고,
5는 집합 $B-A$의 원소이다.
즉, $A-B=\{1, 2\}$, $B-A=\{5\}$이므로 $A\cap B=\{3, 4\}$이다.
따라서
$$B=(B-A)\cup(A\cap B)=\{5\}\cup\{3, 4\}=\{3, 4, 5\}$$
이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
$3+4+5=12$

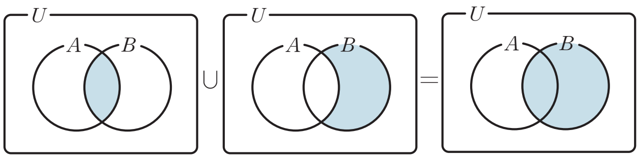
답 12

87
$$\begin{aligned}A\triangle B&=(A-B^C)\cup(B^C-A)\\&=\{A\cap(B^C)^C\}\cup(B^C\cap A^C)\\&=(A\cap B)\cup(B^C\cap A^C)\\&=(A\cap B)\cup(A\cup B)^C\end{aligned}$$
이므로 집합 $A\triangle B$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$A\triangle B$

$(A\triangle B)\triangle A=\{(A\triangle B)\cap A\}\cup\{(A\triangle B)\cup A\}^C$이므로
집합 $(A\triangle B)\triangle A$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$(A\triangle B)\cap A$　　$\{(A\triangle B)\cup A\}^C$　　$(A\triangle B)\triangle A$

따라서 집합 $(A\triangle B)\triangle A$와 같은 집합으로 항상 옳은 것은 집합 B이다.

답 ②

88 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=20+25-n(A\cap B)$
$=45-n(A\cap B)$
한편, $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로
$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=50-\{45-n(A\cap B)\}$
$=n(A\cap B)+5$
$(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$이므로
$n(A\cap B)\le n(A)$, $n(A\cap B)\le n(B)$에서
$0\le n(A\cap B)\le 20$
$5\le n(A\cap B)+5\le 25$
즉, $5\le n(A^C\cap B^C)\le 25$
따라서 $n(A^C\cap B^C)$의 최댓값과 최솟값의 합은
$25+5=30$

답 30

89 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=12+16-n(A\cap B)$
$=28-n(A\cap B)$
$(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$이므로
$n(A\cap B)\le n(A)$, $n(A\cap B)\le n(B)$에서 $n(A\cap B)\le 12$이고,
$n(A\cap B)\ge 6$이므로
$6\le n(A\cap B)\le 12$
$16\le 28-n(A\cap B)\le 22$
즉, $16\le n(A\cup B)\le 22$
따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합은
$22+16=38$

답 ③

90 진로 체험활동에 참여한 학생 전체의 집합을 U라 하고, A 활동에 참여한 학생의 집합을 A, B 활동에 참여한 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=40$, $n(A)=28$, $n(B)=22$
이고, A 활동과 B 활동에 모두 참여한 학생의 집합은 $A\cap B$이다.
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=28+22-n(A\cap B)$
$=50-n(A\cap B)$
이므로
$n(A\cup B)\le n(U)$에서
$50-n(A\cap B)\le 40$
즉, $n(A\cap B)\ge 10$ ······ ㉠
또 $(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$이므로
$n(A\cap B)\le n(A)$, $n(A\cap B)\le n(B)$에서
$n(A\cap B)\le 22$ ······ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서
$10\le n(A\cap B)\le 22$이므로
$M=22$, $m=10$
즉, $M-m=22-10=12$

답 ⑤

서술형 완성하기

본문 26~27쪽

01 9	**02** 37	**03** 15	**04** 4	**05** 6
06 4	**07** 16	**08** 14	**09** 3	**10** 13

01 $2a\le 2x-1\le 3a+1$에서
$\frac{2a+1}{2}\le x\le\frac{3a+2}{2}$이므로
$A=\left\{x\,\middle|\,\frac{2a+1}{2}\le x\le\frac{3a+2}{2}\right\}$ ······ ❶
또 $b\le 3x+1\le 4b$에서
$\frac{b-1}{3}\le x\le\frac{4b-1}{3}$이므로
$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{b-1}{3}\le x\le\frac{4b-1}{3}\right\}$ ······ ❷
이때 $A=B$이므로
$\frac{2a+1}{2}=\frac{b-1}{3}$, $\frac{3a+2}{2}=\frac{4b-1}{3}$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{4}{5}$, $b=\frac{1}{10}$ ······ ❸
따라서
$10(b-a)=10\times\left\{\frac{1}{10}-\left(-\frac{4}{5}\right)\right\}=9$ ······ ❹

답 9

단계	채점 기준	비율
❶	집합 A의 원소의 범위를 구한 경우	30 %
❷	집합 B의 원소의 범위를 구한 경우	30 %
❸	$A=B$임을 이용하여 a, b의 값을 구한 경우	30 %
❹	$10(b-a)$의 값을 구한 경우	10 %

02 $0<a<b$이므로 집합 A의 각 원소 사이의 대소 관계는
$-3<a-1<b-1$
집합 B의 각 원소 사이의 대소 관계는
$b-9a<b-6a<b-a$ ······ ❶
$A=B$이므로
$b-9a=-3$, $b-6a=a-1$, $b-a=b-1$
연립하여 풀면 $a=1$, $b=6$ ······ ❷

따라서

$a^2+b^2=1^2+6^2=37$ …… ❸

답 37

단계	채점 기준	비율
❶	두 집합 A, B의 각 원소 사이의 대소 관계를 파악한 경우	40 %
❷	$A=B$임을 이용하여 a, b의 값을 구한 경우	50 %
❸	a^2+b^2의 값을 구한 경우	10 %

03 $A^C=\{3\}$이므로

$A=\{1, 2, 4, 5, 6\}$ …… ❶

이때 $B\subset A$이고 $A-B=\{1, 2\}$이므로

$B=A-(A-B)=\{4, 5, 6\}$ …… ❷

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$4+5+6=15$ …… ❸

답 15

단계	채점 기준	비율
❶	집합 A를 구한 경우	40 %
❷	집합 B를 구한 경우	40 %
❸	집합 B의 모든 원소의 합을 구한 경우	20 %

04 조건 (가)에서

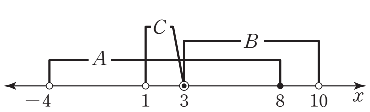
$(A\cap B)\cap C=\varnothing$

조건 (나)에서

$(A\cap B)\cup C=\{x\mid 1<x\le 8\}$ …… ❶

이때 $A\cap B=\{x\mid 3\le x\le 8\}$이므로 …… ❷

$C=\{x\mid 1<x<3\}$



따라서 $a=1$, $b=3$이므로

$a+b=1+3=4$ …… ❸

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	조건 (가)와 조건 (나)의 연산을 정리한 경우	45 %
❷	집합 $A\cap B$를 구한 경우	35 %
❸	$a+b$의 값을 구한 경우	20 %

05 $A\cap(B\cap C)^C=A\cap(B^C\cup C^C)$ …… ❶

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$ …… ❷

$=(A-B)\cup(A-C)$

$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ …… ❸

따라서 집합 $A\cap(B\cap C)^C$의 원소의 개수는 6이다. …… ❹

답 6

단계	채점 기준	비율
❶	드모르간의 법칙을 정확하게 사용한 경우	30 %
❷	분배법칙을 정확하게 사용한 경우	30 %
❸	집합 $A\cap(B\cap C)^C$을 구한 경우	30 %
❹	집합 $A\cap(B\cap C)^C$의 원소의 개수를 구한 경우	10 %

06 $A_{10}=\{10, 20, 30, \cdots, 100\}$ …… ❶

이때 $A_k\cup A_{10}=A_k$에서

$A_{10}\subset A_k$ …… ❷

따라서 k는 10의 양의 약수이어야 하므로 k의 값은

1, 2, 5, 10

이고, 그 개수는 4이다. …… ❸

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	집합 A_{10}을 구한 경우	30 %
❷	$A_{10}\subset A_k$임을 구한 경우	40 %
❸	자연수 k의 값과 그 개수를 구한 경우	30 %

07 조건 (가)에서 두 집합 A, X는 서로소이다.

또 조건 (나)에서 집합 $A\cup X$의 원소의 개수는 $10-2=8$이다.

이때 집합 A의 원소의 개수가 4이므로 집합 X의 원소의 개수는 4이다. …… ❶

즉, 집합 X는 집합 $A^C=\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 4인 집합이다.

따라서 집합 X의 모든 원소의 합이 최소일 때는

$X=\{1, 3, 5, 7\}$ …… ❷

일 때이므로 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은

$1+3+5+7=16$ …… ❸

답 16

단계	채점 기준	비율
❶	집합 X의 원소의 개수를 구한 경우	30 %
❷	집합 X를 구한 경우	50 %
❸	집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값을 구한 경우	20 %

08 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로 …… ❶

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$

$=30-6$

$=24$ …… ❷

따라서

$n(B)=n(A\cup B)-n(A-B)$

$=24-10$

$=14$ …… ❸

답 14

단계	채점 기준	비율
❶	드모르간의 법칙을 정확하게 사용한 경우	30 %
❷	집합 $A\cup B$의 원소의 개수를 구한 경우	30 %
❸	집합 B의 원소의 개수를 구한 경우	40 %

09 $(B^C-A^C)-C=\{B^C\cap(A^C)^C\}\cap C^C$

$=(B^C\cap A)\cap C^C$ …… ❶

$=A\cap(B^C\cap C^C)$

$=A\cap(B\cup C)^C$ …… ❷

$=A-(B\cup C)$

$=\{1,\ 2,\ 3\}$

따라서 집합 $(B^C-A^C)-C$의 원소의 개수는 3이다. …… ❸

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	차집합의 연산 법칙을 활용한 경우	40 %
❷	드모르간의 법칙을 정확하게 사용한 경우	40 %
❸	집합 $(B^C-A^C)-C$의 원소의 개수를 구한 경우	20 %

10 $A\triangledown B=A^C-B$

$=A^C\cap B^C$

$=(A\cup B)^C$ …… ❶

$A\triangledown B=\{3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$에서

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 10\}$

또 $A^C\triangledown A^C=(A^C\cup A^C)^C=(A^C)^C=A$이므로

$A=\{1,\ 2,\ 10\}$ …… ❷

따라서

$A\triangledown B^C=(A\cup B^C)^C$

$=A^C\cap(B^C)^C$

$=A^C\cap B$

$=B\cap A^C$

$=B-A$

$=(A\cup B)-A$

$=\{6,\ 7\}$

이므로 집합 $A\triangledown B^C$의 모든 원소의 합은

$6+7=13$ …… ❸

답 13

단계	채점 기준	비율
❶	연산 $A\triangledown B$를 간단히 정리한 경우	40 %
❷	집합 A와 집합 $A\cup B$를 구한 경우	40 %
❸	집합 $A\triangledown B^C$의 모든 원소의 합을 구한 경우	20 %

내신 + 수능 고난도 도전

본문 28~29쪽

01 ③	**02** ④	**03** 7	**04** ②	**05** ②
06 ①	**07** 18	**08** 23		

01 1이 집합 A의 원소이고, $A=B$가 성립해야 하므로 1이 집합 B의 원소이어야 한다.

(i) $a-1=1$, 즉 $a=2$일 때

$A=\{1,\ 3,\ 8\}$, $B=\{1,\ 2,\ 5\}$이므로 $A\neq B$이다.

(ii) $a=1$일 때

$A=\{1,\ 3\}$, $B=\{0,\ 1,\ 3\}$이므로 $A\neq B$이다.

(iii) $2a+1=1$, 즉 $a=0$일 때

$A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-1,\ 0,\ 1\}$이므로 $A=B$가 성립한다.

(i)~(iii)에서 $A=B$가 성립하도록 하는 상수 a의 값은 0이다.

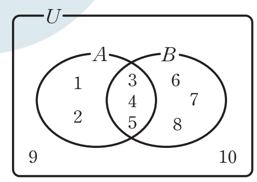
답 ③

02 $A\cap B=\{3,\ 4,\ 5\}$이고,

$A^C\cap B=B\cap A^C=B-A=\{6,\ 7,\ 8\}$이므로

$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

또 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{9,\ 10\}$이므로 집합 A는 1, 2를 원소로 갖는다.



즉, $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

따라서

$n(A)+n(B)=5+6=11$

답 ④

03 A, B, C 세 과목을 신청한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면 수강신청한 학생 30명을 대상으로 조사하였으므로

$n(A\cup B\cup C)=30$

또 $n(B)=17$, $n(C)=15$, $n(B\cap C)=9$이므로

$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$

$=17+15-9$

$=23$

따라서 A 과목만을 신청한 학생 수는

$n(A\cup B\cup C)-n(B\cup C)=30-23$

$=7$

답 7

04 조건 (가)에서

$a+b+c=21$

집합 B의 모든 원소의 합이 $21+3k$이므로 조건 (나)와 조건 (다)에서

$45=21+(21+3k)-9$

$3k=12$, $k=4$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$21+3k=21+3\times4$

$=33$

답 ②

05 $A_4=\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28\}$

이때 $A_k\cap A_4=A_k$에서 $A_k\subset A_4$이므로 k는 4의 배수이어야 한다.

따라서 30 이하의 자연수 k의 값은

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28

이고, 그 개수는 7이다.

답 ②

06 조건 (가)에서 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.

조건 (나)에서

$1\in X$이면 $6-1=5\in X$

$2\in X$이면 $6-2=4\in X$

$3\in X$이면 $6-3=3\in X$

$4\in X$이면 $6-4=2\in X$

$5\in X$이면 $6-5=1\in X$

이어야 한다.

따라서 집합 X가 될 수 있는 집합은 $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{3\}$과 이들의 합집합 중 집합 A가 아닌 집합이므로

$\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{3\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$

이고, 그 개수는 6이다.

답 ①

07 $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$이므로

$A◉\varnothing=A-\varnothing$

$\quad=A$

에서 $A=\{1, 3, 5, 7\}$

또 $\varnothing\cup B=B$, $\varnothing\cap B=\varnothing$이므로

$\varnothing◉B=B-\varnothing$

$\quad=B$

에서 $B=\{5, 6, 7, 8\}$

따라서 $A\cup B=\{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $A\cap B=\{5, 7\}$이므로

$A◉B=\{1, 3, 5, 6, 7, 8\}-\{5, 7\}=\{1, 3, 6, 8\}$

그러므로 집합 $A◉B$의 모든 원소의 합은

$1+3+6+8=18$

답 18

08 하루 휴대폰 사용 시간이 3시간 이상인 학생의 집합을 A, 하루 독서 시간이 3시간 이상인 학생의 집합을 B라 하면

$n(A)=10$, $n(B)=13$

또 하루 휴대폰 사용 시간이 3시간 이상이고 하루 독서 시간이 3시간 미만인 학생 수가 10이므로

$n(A\cap B^C)=10$

그런데 $n(A)=10$, $n(A\cap B^C)=n(A-B)=10$이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.

따라서 하루 휴대폰 사용 시간과 하루 독서 시간 중 적어도 하나가 3시간 이상인 학생 수는

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

$\quad=10+13$

$\quad=23$

답 23

11 명제

개념 확인하기

본문 31~33쪽

01 명제가 아니다.
02 명제이다.
03 명제이다.
04 명제가 아니다.
05 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
06 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
07 $\{2, 3, 5, 7\}$
08 $\{1, 2, 5, 10\}$
09 $\{2, 3\}$
10 $\{2, 3, 4, 5\}$
11 무리수는 실수가 아니다.
12 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.
13 5는 8의 약수가 아니다.
14 $\{1, 2, 3, 4\}$
15 x는 5 이상의 자연수이다.
16 $\{5, 6\}$
17 x는 5 미만의 자연수이다.
18 $\{1, 2, 3, 4\}$
19 참
20 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+1\le 0$이다.
21 참
22 모든 실수 x에 대하여 $x<x^2$이다.
23 가정: x가 정수이다. 결론: x는 자연수이다.
24 가정: x^2이 짝수이다. 결론: x는 홀수이다.
25 가정: $x<0$이다. 결론: $|x|>0$이다.
26 거짓 **27** 참 **28** 거짓
29 $P=\{1, 2, 3, 6\}$, $Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $R=\{1, 3, 5, 15\}$
30 참 **31** 거짓 **32** $ab=0$이면 $a=b=0$이다.
33 거짓 **34** $ab\ne 0$이면 $a\ne 0$ 또는 $b\ne 0$이다. **35** 참
36 $a>0$ 또는 $b>0$이면 $a+b>0$이다. **37** 거짓
38 $a\le 0$이고 $b\le 0$이면 $a+b\le 0$이다. **39** 참
40 (가) $a\ne 0$ (또는 $b\ne 0$) (나) $b\ne 0$ (또는 $a\ne 0$) (다) $a^2+b^2=0$
41 충분 **42** 충분 **43** 필요 **44** 필요충분
45 (가) $\sqrt{a}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (또는 $\sqrt{b}-\sqrt{a}$) (다) $a=b$
46 2 **47** 4

01 답 명제가 아니다.

02 삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이므로 거짓인 명제이다.

답 명제이다.

03 $2+5=7$이므로 거짓인 명제이다.

답 명제이다.

04 답 명제가 아니다.

05 10 이하의 자연수 중 짝수는 2, 4, 6, 8, 10이므로 조건 p의 진리집합은 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$이다.

답 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

06 10 이하의 자연수 중 홀수는 1, 3, 5, 7, 9이므로 조건 p의 진리집합은 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$이다.

답 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

07 10 이하의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7이므로 조건 p의 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$이다.

답 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

08 답 $\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

09 $x^2-5x+6=0$에서
$(x-2)(x-3)=0$
$x=2$ 또는 $x=3$
따라서 조건 p의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$이다.

답 $\{2,\ 3\}$

10 $x^2-7x+10\le 0$에서
$(x-2)(x-5)\le 0$
$2\le x\le 5$
따라서 10 이하의 자연수 x의 값은 2, 3, 4, 5이므로 조건 p의 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이다.

답 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

11 답 무리수는 실수가 아니다.

12 답 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

13 답 5는 8의 약수가 아니다.

14 답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

15 p: x는 5 미만의 자연수이다.
이므로
$\sim p$: x는 5 이상의 자연수이다.

답 x는 5 이상의 자연수이다.

16 6 이하의 자연수 중 5 이상인 자연수는 5, 6이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은 $\{5,\ 6\}$이다.

답 $\{5,\ 6\}$

17 $\sim p$: x는 5 이상의 자연수이다.
이므로
$\sim(\sim p)$: x는 5 미만의 자연수이다.

답 x는 5 미만의 자연수이다.

18 답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

19 모든 실수 x에 대하여 $x^2\ge 0$이므로 $x^2+1\ge 1$이다.
따라서 명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이다.'는 참이다.

답 참

20 답 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+1\le 0$이다.

21 $1\ge 1^2$이므로 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x\ge x^2$이다.'는 참이다.

답 참

22 답 모든 실수 x에 대하여 $x<x^2$이다.

23 답 가정: x가 정수이다.
결론: x는 자연수이다.

24 답 가정: x^2이 짝수이다.
결론: x는 홀수이다.

25 답 가정: $x<0$이다.
결론: $|x|>0$이다.

26 실수 중 무리수는 유리수가 아니므로 주어진 명제는 거짓이다.

답 거짓

27 홀수와 홀수의 곱은 홀수, 홀수와 짝수의 곱은 짝수, 짝수와 짝수의 곱은 짝수이므로 주어진 명제는 참이다.

답 참

28 [반례] 직각이등변삼각형은 정삼각형이 아니다.

답 거짓

29 답 $P=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$,
$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$,
$R=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$

30 $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

답 참

31 $P\not\subset R$이므로 명제 $p \longrightarrow r$는 거짓이다.

답 거짓

32 답 $ab=0$이면 $a=b=0$이다.

33 [반례] $a=1,\ b=0$이면 $ab=0$이지만 $a\ne 0$이다.

답 거짓

34 답 $ab\ne 0$이면 $a\ne 0$ 또는 $b\ne 0$이다.

35 $ab\ne 0$이면 $a\ne 0$이고 $b\ne 0$이므로 $a\ne 0$ 또는 $b\ne 0$이 성립한다.

답 참

36 답 $a>0$ 또는 $b>0$이면 $a+b>0$이다.

37 [반례] $a=1$, $b=-2$이면 $a>0$ 또는 $b>0$이지만 $a+b=-1<0$이다.

답 거짓

38 답 $a\le 0$이고 $b\le 0$이면 $a+b\le 0$이다.

39 답 참

40 결론을 부정하여 $\boxed{a\ne 0}$ 또는 $\boxed{b\ne 0}$이라 하면
$a^2>0$ 또는 $b^2>0$
이므로 $a^2+b^2>0$이다.
이것은 $\boxed{a^2+b^2=0}$이라는 가정에 모순이다.
따라서 두 실수 a, b에 대하여 명제
'$a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$이다.'
는 참이다.

답 (가) $a\ne 0$ (또는 $b\ne 0$)
(나) $b\ne 0$ (또는 $a\ne 0$)
(다) $a^2+b^2=0$

41 $p : a=b$
$q : a=b$ 또는 $c=0$
이므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 충분

42 $p : a=2$
$q : a=-2$ 또는 $a=2$
이므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 충분

43 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 4, 8\}$, $Q=\{1, 2, 4\}$
이므로 $Q\subset P$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

답 필요

44 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{-1, 1\}$, $Q=\{-1, 1\}$
이므로 $P=Q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 필요충분

45 $$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$
$$=\frac{(\boxed{\sqrt{a}})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}{2}$$
$$=\frac{(\boxed{\sqrt{a}-\sqrt{b}})^2}{2}\ge 0$$

따라서 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$이고, 등호는 $\boxed{a=b}$일 때 성립한다.

답 (가) $\sqrt{a}$
(나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (또는 $\sqrt{b}-\sqrt{a}$)
(다) $a=b$

46 $x>0$이므로 $\frac{1}{x}>0$
따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{1}{x}\text{, 즉 } x=1\text{일 때 성립한다.}\right)$$
$$=2$$
이므로 $x+\frac{1}{x}$의 최솟값은 2이다.

답 2

47 $x>0$이므로 $8x>0$, $\frac{1}{2x}>0$
따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$8x+\frac{1}{2x}\ge 2\sqrt{8x\times\frac{1}{2x}}$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 8x=\frac{1}{2x}\text{, 즉 } x=\frac{1}{4}\text{일 때 성립한다.}\right)$$
$$=2\times 2=4$$
이므로 $8x+\frac{1}{2x}$의 최솟값은 4이다.

답 4

유형 완성하기

본문 34~48쪽

01 ③	02 ②	03 ④	04 ③	05 ④
06 ⑤	07 ④	08 ⑤	09 ③	10 ③
11 ④	12 ①	13 ⑤	14 ②	15 ⑤
16 ②	17 5	18 ①	19 90	20 ③
21 ⑤	22 ①	23 ⑤	24 ③	25 ④
26 4	27 ③	28 ④	29 ②	30 ①
31 ①	32 5	33 ②	34 ②	35 ③
36 ①	37 ④	38 ②	39 ⑤	40 ⑤
41 ③	42 ②	43 ⑤	44 ③	45 ⑤
46 ①	47 ②	48 ①	49 ⑤	50 ③
51 ④	52 ③	53 ③	54 ②	55 ⑤
56 ⑤	57 ③	58 ④	59 ②	60 ④
61 ⑤	62 ②	63 ④	64 ④	65 ⑤
66 ③	67 ⑤	68 ⑤	69 ②	70 ③
71 144	72 ③			

01 ①, ④는 거짓인 명제이고,
②, ⑤는 참인 명제이다.

답 ③

02 $7^2<50$이고, $8^2>50$이므로 조건 p가 참이 되도록 하는 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이고, 그 개수는 7이다.

답 ②

03 ①, ②는 참인 명제이고,
③, ⑤는 거짓인 명제이다.
④는 x의 값에 따라 참일 수도 있고 거짓일 수도 있으므로 명제가 아니다.

답 ④

04 15의 양의 약수는 1, 3, 5, 15이고,
전체집합이 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$이므로
주어진 조건의 진리집합은 $\{1, 3, 5\}$이다.
따라서 진리집합의 원소의 개수는 3이다.

답 ③

05 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$x^2+x-20=0$에서
$(x+5)(x-4)=0$
$x=-5$ 또는 $x=4$
즉, $P=\{-5, 4\}$
또 $Q=\{x|x>0\}$
조건 'p 그리고 q'의 진리집합이 $P\cap Q$이므로 $P\cap Q=\{4\}$에서 구하는 진리집합의 원소는 4이다.

답 ④

06 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
$Q=\{4, 8, 12, 16, 20\}$
이때 조건 '$\sim p$ 그리고 q'의 진리집합은
$P^C\cap Q=Q\cap P^C$
$=Q-P$
$=\{4, 8, 16, 20\}$
이므로 모든 원소의 합은
$4+8+16+20=48$

답 ⑤

07 '$x>0$이고 $y\ge0$이다.'의 부정은
'$x\le0$이거나 $y<0$이다.'

답 ④

08 $\sim p$: $(x-1)(x-4)=0$
따라서 조건 $\sim p$를 참이 되게 하는 x의 값이 1, 4이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은
$\{1, 4\}$
즉, 조건 $\sim p$의 진리집합의 모든 원소의 합은
$1+4=5$

답 ⑤

09 조건 '$a^2+b^2+c^2=0$'의 부정은
'$a^2+b^2+c^2\ne0$'
세 실수 a, b, c가 $a^2+b^2+c^2\ne0$을 만족시키려면 a, b, c 중 적어도 하나는 0이 아니어야 한다.
따라서 구하는 부정으로 옳은 것은 ③이다.

답 ③

10 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
ㄱ. $P=\{1, 2, 3, 6\}$,
$Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
이므로 $P\subset Q$
즉, 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
ㄴ. $P=\{2, 4, 6, \cdots\}$,
$Q=\{4, 8, 12, \cdots\}$
이므로 $P\not\subset Q$
즉, 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
ㄷ. $P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$Q=\{x|x\le6\}$
이므로 $P\subset Q$
즉, 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
이상에서 명제 $p \longrightarrow q$가 참인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

11 조건 q의 $x^2-5x+4\le0$에서
$(x-1)(x-4)\le0$
$1\le x\le4$
그러므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{k\}$, $Q=\{x|1\le x\le4\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이려면 $P\subset Q$이어야 하므로
$1\le k\le4$
따라서 정수 k의 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 개수는 4이다.

답 ④

12 ㄱ. π는 무리수이다. (참)
ㄴ. $ac>bc$이면 $c(a-b)>0$
즉, $c>0$, $a>b$ 또는 $c<0$, $a<b$
따라서 명제 '$ac>bc$이면 $a>b$이다.'는 거짓이다.
ㄷ. $a=0$이면 $\sqrt{3}a$는 유리수이므로
명제 'a가 유리수이면 $\sqrt{3}a$는 무리수이다.'는 거짓이다.
이상에서 참인 명제는 ㄱ이다.

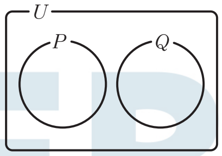
답 ①

13 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $P\subset Q$이다.
① $Q\subset P$인지 알 수 없다.
② $P\cap Q=P$
③ $P\cup Q=Q$
④ $P^C\cap Q=Q-P$이고, $P\ne Q$이면 $Q-P\ne\varnothing$이다.
⑤ $P^C\cup P=U$이고 $P\subset Q\subset U$이므로 $P^C\cup Q=U$이다.

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

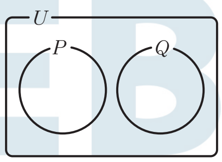
14 두 조건 p, $\sim q$의 진리집합은 각각 P, Q^C이고, 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $P \subset Q^C$이다.
두 집합 P, Q를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, 두 집합 P, Q는 서로소이다.
ㄱ. $P \cap Q = \varnothing$ (참)
ㄴ. $P \subset Q^C$에서 $P^C \supset (Q^C)^C$
   즉, $Q \subset P^C$ (참)
ㄷ. 집합 $P \cup Q^C$에는 집합 Q가 포함되지 않는다.
   즉, $P \cup Q^C \neq U$ (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

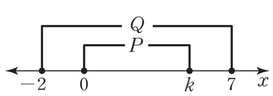
15 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 $Q \subset P^C$이다.
두 집합 P, Q를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



① $P \subset Q^C$이므로 $P \cup Q^C = Q^C$
② $P \subset Q^C$이므로 $P \cap Q^C = P$
③ $P - Q^C = P \cap (Q^C)^C = P \cap Q = \varnothing$
④ $P \cap (Q^C - P) = P \cap (Q^C \cap P^C) = (P \cap P^C) \cap Q^C = \varnothing \cap Q^C = \varnothing$
⑤ $P - Q = P$이므로
   $P \cup (P - Q) = P \cup P = P$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

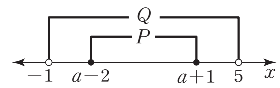
16 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P = \{x \mid 0 \le x \le k\}$,
$Q = \{x \mid (x+2)(x-7) \le 0\} = \{x \mid -2 \le x \le 7\}$
이때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$가 성립해야 한다.



따라서 $0 \le k \le 7$이므로 실수 k의 최댓값은 7이다.

답 ②

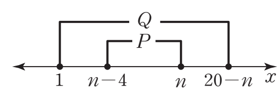
17 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P = \{x \mid a-2 \le x \le a+1\}$,
$Q = \{x \mid -1 < x < 5\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$가 성립해야 한다.



즉, $-1 < a-2$, $a+1 < 5$이므로
$1 < a < 4$
따라서 정수 a의 값은 2, 3이고, 그 합은
$2+3=5$

답 5

18 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P = \{x \mid n-4 \le x \le n\}$,
$Q = \{x \mid 1 \le x \le 20-n\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$가 성립해야 한다.



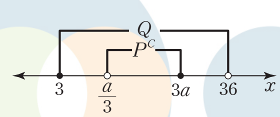
즉, $1 \le n-4$, $n \le 20-n$이므로
$1 \le n-4$에서 $n \ge 5$
$n \le 20-n$에서 $n \le 10$
따라서 $5 \le n \le 10$이므로 자연수 n의 값은 5, 6, 7, 8, 9, 10이고, 그 개수는 6이다.

답 ①

19 주어진 명제가 거짓임을 보이는 자연수 n의 값은 3의 배수이면서 5의 배수인 50 이하의 자연수이므로 구하는 n의 값은 15, 30, 45이고, 그 합은
$15+30+45=90$

답 90

20 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C \subset Q$가 성립해야 한다.
$P^C = \left\{x \,\middle|\, \frac{a}{3} < x \le 3a\right\}$, $Q = \{x \mid 3 \le x < 36\}$이므로 두 집합 P^C, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $3 \le \frac{a}{3}$, $3a < 36$이므로
$9 \le a < 12$
따라서 양의 정수 a의 값은 9, 10, 11이고, 그 합은
$9+10+11=30$

답 ③

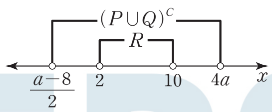
21 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면
$P = \left\{x \,\middle|\, x \le \frac{a-8}{2}\right\}$, $Q = \{x \mid x \ge 4a\}$, $R = \{x \mid 2 < x < 10\}$
조건 $\sim(p$ 또는 $q)$의 진리집합이 $(P \cup Q)^C$이므로

$(P\cup Q)^C = P^C \cap Q^C$

$= \left\{x \,\middle|\, x > \dfrac{a-8}{2}\right\} \cap \{x \mid x < 4a\}$

$= \left\{x \,\middle|\, \dfrac{a-8}{2} < x < 4a\right\}$

이때 명제 $r \longrightarrow \sim(p$ 또는 $q)$가 참이 되려면 $R \subset (P\cup Q)^C$이 성립해야 한다.



즉, $\dfrac{a-8}{2} \le 2$, $10 \le 4a$이므로

$\dfrac{5}{2} \le a \le 12$

따라서 자연수 a의 값은 3, 4, 5, $\cdots$, 12이고, 그 개수는 10이다.

답 ⑤

22 ㄱ. 모든 자연수 x에 대하여 $x+1$은 항상 자연수이므로 명제 '모든 자연수 x에 대하여 $x+1$은 자연수이다.'는 참이다.

ㄴ. 모든 자연수 x에 대하여 $1-x$는 항상 자연수가 아니므로 명제 '어떤 자연수 x에 대하여 $1-x$는 자연수이다.'는 거짓이다.

ㄷ. 무리수 $\sqrt{2}+1$에 대하여 $(\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$도 무리수이므로 명제 '모든 무리수 x에 대하여 x^2은 유리수이다.'는 거짓이다.

이상에서 참인 명제는 ㄱ이다.

답 ①

23 명제 '모든 고등학교 남학생은 A 과목과 B 과목 중 적어도 어느 한 과목은 좋아한다.'의 부정은 '어떤 고등학교 남학생은 A 과목과 B 과목을 모두 좋아하지 않는다.'이다.

답 ⑤

24 $2x-7 \le k$에서 $x \le \dfrac{k+7}{2}$

이므로 주어진 명제가 참이 되려면 집합 A의 모든 원소 x에 대하여

$x \le \dfrac{k+7}{2}$이어야 한다.

따라서

$5 \le \dfrac{k+7}{2}$

이 성립해야 하므로

$k \ge 3$

그러므로 실수 k의 최솟값은 3이다.

답 ③

25 ① $a=5$일 때 $a+2>6$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

② $a=6$일 때 $a^2>30$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

③ $a=6$일 때 $a^2-6a=0$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

④ $a=6$일 때 $a^2 \ge 30$이므로 주어진 명제는 참이다.

⑤ 모든 a에 대하여 $|a| \le 6$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

따라서 참인 명제는 ④이다.

답 ④

26 주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $2x^2-5x+a>0$이다.'

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $2x^2-5x+a>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2-5x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

$D=25-8a<0$에서 $a>\dfrac{25}{8}$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 4이다.

답 4

27 명제 $p \longrightarrow q$의 대우는 $\sim q \longrightarrow \sim p$이다.

명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$, 즉 '$x=1$이고 $y=2$이면 $xy=2$'는 참이므로

ㄱ, ㄷ은 모두 참인 명제이다.

명제 $q \longrightarrow p$의 대우는 $\sim p \longrightarrow \sim q$이다.

명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$, 즉 '$xy=2$이면 $x=1$이고 $y=2$'에서

[반례] $x=\dfrac{1}{2}$, $y=4$일 때 $xy=2$이지만 $x\ne1$, $y\ne2$

이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

따라서 ㄴ은 거짓인 명제이다.

이상에서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

28 주어진 벤다이어그램에서 $P \subset R$이므로 명제 $p \longrightarrow r$는 참이고, 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

답 ④

29 ㄱ. 역 : $ab=0$이면 $a=0$이다.

[반례] $a=1$, $b=0$이면 $ab=0$이지만 $a\ne0$이다.

따라서 역은 거짓인 명제이다.

ㄴ. 역: $a\ne0$ 또는 $b\ne0$이면 $a^2+b^2>0$이다.

$a\ne0$이면 $a^2>0$이고, $b\ne0$이면 $b^2>0$이므로 $a\ne0$ 또는 $b\ne0$이면 $a^2+b^2>0$이다.

따라서 역은 참인 명제이다.

ㄷ. 역: $a+b\le2$이면 $a\le1$이고 $b\le1$이다.

[반례] $a=-4$, $b=3$이면 $a+b\le2$이지만 $b>1$이다.

따라서 역은 거짓인 명제이다.

이상에서 역이 참인 명제는 ㄴ이다.

답 ②

30 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$의 역은 $\sim q \longrightarrow \sim p$이다.

명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p \longrightarrow q$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ①이다.

답 ①

31 명제가 참이면 그 대우도 참이므로 주어진 명제와 역의 참, 거짓을 판별하면 된다.

ㄱ. $a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$이므로 주어진 명제는 참이다.

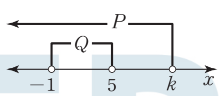
역: $a=b=0$이면 $a^2+b^2=0$이다.

$a=b=0$이면 $a^2+b^2=0$이므로 역도 참이다.

ㄴ. $a=2$이면 $a^2=4$이므로 주어진 명제는 참이다.
역: $a^2=4$이면 $a=2$이다.
$a^2=4$이면 $a=-2$ 또는 $a=2$이므로 역은 거짓이다.
ㄷ. ab가 홀수이면 a와 b는 모두 홀수이고, $a+b$는 짝수이다.
즉, 주어진 명제는 참이다.
역: $a+b$가 짝수이면 ab는 홀수이다.
$a+b$가 짝수이면 a와 b는 모두 짝수이거나 a와 b는 모두 홀수이므로 ab는 짝수 또는 홀수이다.
즉, 역은 거짓이다.
이상에서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ㄱ이다.

답 ①

32 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 그 대우 $q \longrightarrow p$도 참이 되어야 하고 $Q \subset P$가 성립해야 한다.
조건 q의 $x^2-4x-5<0$에서
$(x+1)(x-5)<0$
$-1<x<5$
따라서 $P=\{x|x<k\}$, $Q=\{x|-1<x<5\}$이므로 $Q \subset P$가 성립하도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $k \geq 5$이므로 실수 k의 최솟값은 5이다.

답 5

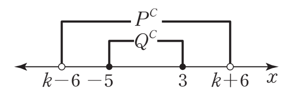
33 주어진 명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이 된다.
주어진 명제의 대우 '$x=n$이면 $x^2-5x-14=0$이다.'가 참이 되어야 하므로
$n^2-5n-14=0$
$(n+2)(n-7)=0$
$n=-2$ 또는 $n=7$
따라서 주어진 명제가 참이 되도록 하는 자연수 n의 값은 7이다.

답 ②

34 주어진 명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이 된다.
주어진 명제의 대우 '$x-2=0$이면 $x^2+ax-8=0$이다.'가 참이 되어야 하므로
$x=2$를 $x^2+ax-8=0$에 대입하면
$4+2a-8=0$에서
$a=2$

답 ②

35 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이고 $Q^C \subset P^C$이 성립해야 한다.
$P^C=\{x||x-k|<6\}$
$=\{x|k-6<x<k+6\}$
$Q^C=\{x||x+1|\leq 4\}$
$=\{x|-5\leq x\leq 3\}$
이므로 $Q^C \subset P^C$이 성립하도록 두 집합 P^C, Q^C을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $k-6<-5$, $3<k+6$이므로
$-3<k<1$
따라서 정수 k의 값은 -2, -1, 0이고, 그 개수는 3이다.

답 ③

36 주어진 명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이 된다.
주어진 명제의 대우 '$a=-2$, $b=3$이면 $a^2+b^2+c^2-abc=29$이다.'가 참이 되어야 하므로
$a=-2$, $b=3$을 $a^2+b^2+c^2-abc=29$에 대입하면
$4+9+c^2+6c=29$
$c^2+6c-16=0$
$(c+8)(c-2)=0$
$c=-8$ 또는 $c=2$
따라서 구하는 모든 c의 값의 합은
$-8+2=-6$

답 ①

37 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
또 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow r$도 참이다.
이때 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$도 참이다.
또 두 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제가 아닌 것은 ④이다.

답 ④

38 ① 명제 $r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
따라서 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이다.
그런데 명제 $p \longrightarrow r$의 참, 거짓은 알 수 없다.
② 명제 $r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.
따라서 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.
③ 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p \longrightarrow \sim q$도 참이다.
따라서 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.
그런데 명제 $\sim p \longrightarrow r$의 참, 거짓은 알 수 없다.
④ 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow r$도 참이다.
따라서 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.
그런데 명제 $\sim p \longrightarrow r$의 참, 거짓은 알 수 없다.

⑤ 두 명제 $p \longrightarrow q$, $p \longrightarrow r$가 참이라는 사실로부터 두 조건 q, r 사이의 관계를 알 수 없다.
그러므로 항상 옳은 것은 ②이다.

답 ②

39 ① 명제 $p \longrightarrow q$와 명제 $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.
② 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
③ 명제 $q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim q$도 참이다.
④ 명제 $r \longrightarrow \sim q$와 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
⑤ 명제 $\sim p \longrightarrow r$의 참, 거짓은 알 수 없다.
따라서 항상 참인 명제가 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

40 조건 (가)에서 명제 $q \longrightarrow p$의 역 $p \longrightarrow q$가 참이다.
조건 (나)에서 명제 $\sim p \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $\sim r \longrightarrow p$도 참이다.
이때 두 명제 $\sim r \longrightarrow p$, $p \longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $\sim r \longrightarrow q$가 참이다.
따라서 명제 $\sim r \longrightarrow q$의 대우 $\sim q \longrightarrow r$도 참이다.
그러므로 항상 참인 명제는 ⑤이다.

답 ⑤

41 (가)의 '표정이 밝은 사람은 호감을 주는 사람이다.'가 참이므로 '호감을 주지 못하는 사람은 표정이 밝지 않은 사람이다.'가 참이다.
(나)의 '명랑한 사람은 표정이 밝은 사람이다.'가 참이므로 '표정이 밝지 않은 사람은 명랑하지 않은 사람이다.'가 참이다.
또 (가), (나)가 참이므로 '명랑한 사람은 호감을 주는 사람이다.'가 참이고, '호감을 주지 못하는 사람은 명랑하지 않은 사람이다.'도 참이다.
따라서 항상 참인 문장은 ③이다.

답 ③

42 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
또 명제 $\sim s \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow s$도 참이다.
이때 참인 두 명제 $r \longrightarrow s$, $q \longrightarrow \sim p$에 대하여 명제 $s \longrightarrow q$가 참이면 명제 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 반드시 필요한 참인 명제는 ② $s \longrightarrow q$이다.

답 ②

43 조건 (가)에 의하여 1이 적힌 카드와 5가 적힌 카드 중 적어도 한 장을 선택해야 한다.
(i) 1이 적힌 카드를 선택하는 경우
조건 (라)를 만족시키려면 1인 적힌 카드를 선택하면 2가 적힌 카드를 선택해야 한다.
조건 (나)에 의하여 3이 적힌 카드도 선택해야 한다.
이는 2장의 카드만을 선택한다는 조건에 맞지 않으므로 1이 적힌 카드는 선택할 수 없다.
(ii) 5가 적힌 카드를 선택하는 경우
조건 (나)에 의하여 2가 적힌 카드를 선택하면 3이 적힌 카드도 선택해야 하고, 이는 2장의 카드만을 선택한다는 조건에 맞지 않으므로 2가 적힌 카드를 선택할 수 없다.
조건 (다)에 의하여 4가 적힌 카드를 선택하면 2가 적힌 카드도 선택해야 하고, 이는 2장의 카드만을 선택한다는 조건에 맞지 않으므로 4가 적힌 카드를 선택할 수 없다.
즉, 선택할 수 있는 카드는 3이 적힌 카드뿐이다.
(i), (ii)에 의하여 선택한 2장의 카드에 적힌 수의 합은
$5+3=8$

답 ⑤

44 ㄱ. 명제 '$a=b=0$이면 $a^2+b^2=0$'은 참이고, 명제 '$a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$'도 참이다.
즉, $a^2+b^2=0$은 $a=b=0$이기 위한 필요충분조건이다.
ㄴ. 명제 '$a=b=0$이면 $ab=0$'은 참이다.
하지만 $a=1$, $b=0$일 때 $ab=0$이지만 $a\neq0$이므로 명제 '$ab=0$이면 $a=b=0$'은 거짓이다.
즉, $ab=0$은 $a=b=0$이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. 명제 '$a=b=0$이면 $|a|+|b|=0$'은 참이고, 명제 '$|a|+|b|=0$이면 $a=b=0$'도 참이다.
즉, $|a|+|b|=0$은 $a=b=0$이기 위한 필요충분조건이다.
이상에서 $a=b=0$이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

45 ⑤ $a=1$, $b=-1$일 때 $a+b=0$이지만 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 명제 '$a+b=0$이면 $a=b=0$'은 거짓이다.
즉, $a+b=0$은 $a=b=0$이기 위한 충분조건이 아니다.
한편, 명제 '$a=b=0$이면 $a+b=0$'은 참이다.
따라서 $a+b=0$은 $a=b=0$이기 위한 필요조건이다.

답 ⑤

46 ㄱ. a, b가 실수이므로 $a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$이고, $a=b=0$이면 $a^2+b^2=0$이다. 즉, $p \Longleftrightarrow q$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
ㄴ. a, b가 짝수이면 $a+b$는 짝수이다. 즉, $p \Longrightarrow q$
그러나 $a=1$, $b=1$일 때 $a+b$는 짝수이지만 a, b는 홀수이다.
즉, 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. a, b가 실수이므로 $ab>0$이면 $|a+b|=|a|+|b|$이다.
즉, $p \Longrightarrow q$
그러나 $a=b=0$일 때 $|a+b|=|a|+|b|$이지만 $ab=0$이다.
즉, 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
이상에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ이다.

답 ①

47 ㄱ. $\sqrt{a^2}=|a|$이므로 $\sqrt{a^2}=-a$이면 $a\le 0$이다. 즉, $p \Longrightarrow q$

또 $a\le 0$이면 $\sqrt{a^2}=-a$이다. 즉, $q \Longrightarrow p$

따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. $A=\varnothing$이면 $B-A=B$이다. 즉, $p \Longrightarrow q$

하지만 $B-A=B$이면 $A\cap B=\varnothing$이므로 항상 $A=\varnothing$인 것은 아니다. 즉, 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. a, b가 유리수이면 $a+b$, ab는 모두 유리수이다. 즉, $q \Longrightarrow p$

하지만 $a=-\sqrt{3}$, $b=\sqrt{3}$일 때, $a+b$, ab는 모두 유리수이지만 a, b는 유리수가 아니다. 즉, 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

이상에서 p가 q이기 위한 충분조건이고 필요조건이 아닌 것은 ㄴ이다.

답 ②

48 p가 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow q$이고, $P\subset Q$가 성립한다.

ㄱ. $P\cap Q=P$ (참)

ㄴ. $Q\subset P$가 성립하지 않으면 $P\ne Q$ (거짓)

ㄷ. $P\subset Q$이므로 $P\ne Q$이면 $Q-P\ne\varnothing$ (거짓)

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ이다.

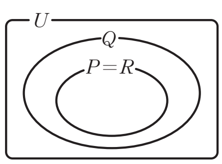
답 ①

49 $P-Q=\varnothing$이므로 $P\subset Q$

$P\subset Q$이므로 $P\cap Q=P$

그런데 $P\cap Q=R$이므로 $P=R$

즉, 세 집합 P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



ㄱ. $P\subset Q$이므로 $p \Longrightarrow q$이고, p는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄴ. $P=R$이므로 $p \Longleftrightarrow r$이고, r는 p이기 위한 필요충분조건이다. (참)

ㄷ. $R\subset Q$이므로 $r \Longrightarrow q$이고, q는 r이기 위한 필요조건이다. (참)

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

50 p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow \sim q$이고, $P\subset Q^C$이 성립한다.

ㄱ. $P\subset Q^C$에서 두 집합 P, Q는 서로소이므로

$P\cap Q=\varnothing$ (참)

ㄴ. 집합 $P\cup Q^C$은 집합 Q를 포함하지 않으므로

$P\cup Q^C\ne U$ (거짓)

ㄷ. $P\subset Q^C$이므로 $P^C\supset(Q^C)^C$

즉, $Q\subset P^C$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

51 $P\subset(Q\cap R)$이므로 $P\subset Q$이고, $P\subset R$이다.

즉, $p \Longrightarrow q$, $p \Longrightarrow r$이다.

ㄱ. $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다. (거짓)

ㄴ. $p \Longrightarrow q$이므로 $\sim q \Longrightarrow \sim p$

즉, $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다. (참)

ㄷ. $p \Longrightarrow r$이므로 $\sim r \Longrightarrow \sim p$

즉, $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다. (참)

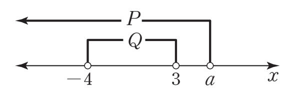
이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

52 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$가 성립해야 한다.

$P=\{x|x<a\}$, $Q=\{x|-4<x<3\}$이므로 $Q\subset P$가 성립하도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $3\le a$이므로 정수 a의 최솟값은 3이다.

답 ③

53 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 $Q^C\subset P^C$이 성립해야 한다.

$P^C=\{x|x^2-6x+k=0\}$, $Q^C=\{x|x=2\}$

이므로 $Q^C\subset P^C$에서 $x=2$가 이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 근이어야 한다.

즉, $4-12+k=0$

따라서 $k=8$

답 ③

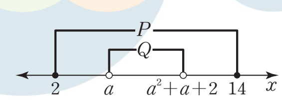
54 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$가 성립해야 한다.

$P=\{x||x-8|\le 6\}=\{x|2\le x\le 14\}$,

$Q=\{x|a<x<a^2+a+2\}$

이므로 $Q\subset P$가 성립하도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $2\le a$, $a^2+a+2\le 14$이어야 한다.

이때 $a^2+a+2\le 14$에서

$a^2+a-12\le 0$

$(a+4)(a-3)\le 0$

$-4\le a\le 3$

따라서 $2\le a\le 3$이므로 정수 a의 값은 2, 3이고, 그 개수는 2이다.

답 ②

55 q는 r이기 위한 충분조건이므로 $q \Longrightarrow r$이고, $\sim r \Longrightarrow \sim q$이다.
또 $\sim r$는 p이기 위한 필요조건이므로 $p \Longrightarrow \sim r$이고, $r \Longrightarrow \sim p$이다.
ㄱ. $q \longrightarrow r$는 참인 명제이다.
ㄴ. $r \longrightarrow \sim p$는 참인 명제이다.
ㄷ. $p \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$이므로 $p \Longrightarrow \sim q$
즉, $p \longrightarrow \sim q$는 참인 명제이다.
이상에서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

56 조건 (가)에서 $p \Longrightarrow \sim q$이고 $q \Longrightarrow \sim p$이다.
조건 (나)에서 $\sim r \Longrightarrow p$이고 $\sim p \Longrightarrow r$이다.
조건 (다)에서 $r \Longrightarrow \sim s$이고 $s \Longrightarrow \sim r$이다.
ㄱ. $s \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow p$이므로 $s \Longrightarrow p$
즉, $s \longrightarrow p$는 참인 명제이다.
ㄴ. $q \Longrightarrow \sim p$, $\sim p \Longrightarrow r$이므로 $q \Longrightarrow r$
즉, $q \longrightarrow r$는 참인 명제이다.
ㄷ. $s \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow \sim q$이므로 $s \Longrightarrow \sim q$
즉, $s \longrightarrow \sim q$는 참인 명제이다.
이상에서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

57 주어진 명제의 대우는
'$\boxed{a \geq 3\text{이고 } b \geq 3}$이면 $ab \geq 9$이다.'
이다.
$\boxed{a \geq 3\text{이고 } b \geq 3}$이면
$a-3 \geq 0$이고 $b-3 \geq 0$이므로
$(a-3)\times(b-3) \geq 0$에서
$ab-3(a+b)+9 \geq 0$
$ab \geq 3(a+b)-9$
그런데 $(a-3)+(b-3) \geq 0$에서
$a+b \geq \boxed{6}$이므로
$ab \geq 3\times 6-9=9$
즉, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 ③

58 주어진 명제의 대우는
'n이 3의 배수가 아니면 n^2은 3의 배수가 아니다.'
이다.
(i) 음이 아닌 정수 k_1에 대하여
$n=3k_1+1$이면
$n^2=(3k_1+1)^2$
$=9k_1^2+6k_1+1$
$=3(\boxed{3k_1^2+2k_1})+1$
이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.
(ii) 음이 아닌 정수 k_2에 대하여
$n=3k_2+2$이면
$n^2=(3k_2+2)^2$
$=9k_2^2+12k_2+4$
$=3(\boxed{3k_2^2+4k_2+1})+1$
이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.
(i), (ii)에서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
이상에서 $f(k_1)=3k_1^2+2k_1$, $g(k_2)=3k_2^2+4k_2+1$이므로
$f(2)+g(3)=(12+4)+(27+12+1)$
$=16+40$
$=56$

답 ④

59 결론을 부정하여 mn이 홀수라고 하면 m과 n이 모두 홀수이므로 음이 아닌 두 정수 a, b에 대하여
$m=2a+1$, $n=2b+\boxed{1}$
로 놓을 수 있다. 이때
$m^2+n^2=(2a+1)^2+(2b+1)^2$
$=4(a^2+b^2)+4(a+b)+\boxed{2}$
이므로 m^2+n^2은 $\boxed{2}$의 배수이다.
따라서 m^2+n^2은 짝수이고, 이는 가정에 모순이므로 mn은 짝수이다.
이상에서 $p=1$, $q=2$, $r=2$이므로
$\frac{p+q}{r}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

답 ②

60 결론을 부정하여 a, b가 모두 3의 배수가 아니라고 하고, 3으로 나누었을 때의 나머지가 0, 1, 2인 자연수의 집합을 각각 S_0, S_1, S_2라 하자.
(i) $a \in S_1$, $b \in S_1$인 경우
음이 아닌 두 정수 m, n에 대하여
$a=3m+1$, $b=3n+1$로 놓으면
$a^2+b^2=(3m+1)^2+(3n+1)^2$
$=3(3m^2+3n^2+2m+2n)+2$
즉, $a^2+b^2 \in S_2$
(ii) $a \in S_2$, $b \in S_2$인 경우
음이 아닌 두 정수 m, n에 대하여
$a=3m+2$, $b=3n+2$로 놓으면
$a^2+b^2=(3m+2)^2+(3n+2)^2$
$=3(3m^2+3n^2+4m+4n+2)+2$
즉, $a^2+b^2 \in S_2$
(iii) $a \in S_1$, $b \in S_2$ 또는 $a \in S_2$, $b \in S_1$인 경우
음이 아닌 두 정수 m, n에 대하여
(a) $a=3m+1$, $b=3n+2$로 놓으면
$a^2+b^2=(3m+1)^2+(3n+2)^2$
$=3(3m^2+3n^2+2m+4n+1)+2$
(b) $a=3m+2$, $b=3n+1$로 놓으면
$a^2+b^2=(3m+2)^2+(3n+1)^2$
$=3(3m^2+3n^2+4m+2n+1)+2$
(a), (b)에서 $a^2+b^2 \in \boxed{S_2}$
(i)~(iii)에서 $a^2+b^2 \in S_2$
그런데 c가 3의 배수이면 $c^2 \in \boxed{S_0}$이고, c가 3의 배수가 아니면 $c^2 \in \boxed{S_1}$이다.

즉, 이는 $a^2+b^2=c^2$이라는 가정에 모순이다.
따라서 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.

답 ④

61 $4a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$4a+b\ge 2\sqrt{4a\times b}$ (단, 등호는 $4a=b$일 때 성립한다.)
$=2\sqrt{4ab}$
$=2\sqrt{4\times 9}$
$=2\times 6$
$=12$
따라서 $4a+b$의 최솟값은 12이다.

답 ⑤

62 $3a>0$, $2b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$3a+2b\ge 2\sqrt{3a\times 2b}$ (단, 등호는 $3a=2b$일 때 성립한다.)
$3a+2b=18$이므로
$18\ge 2\sqrt{6}\sqrt{ab}$
$\frac{3\sqrt{6}}{2}\ge\sqrt{ab}$
즉, $\frac{27}{2}\ge ab$
따라서 ab의 최댓값은 $\frac{27}{2}$이다.

답 ②

63 $x>0$, $\frac{9}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x+\frac{9}{x}\ge 2\sqrt{x\times\frac{9}{x}}$ $\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{9}{x}\text{, 즉 } x=3\text{일 때 성립한다.}\right)$
$=2\times 3$
$=6$
따라서 $x+\frac{9}{x}$는 $x=3$일 때 최솟값 6을 갖는다.
즉, $a=3$, $b=6$이므로
$a+b=3+6=9$

답 ④

64 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$의 x절편과 y절편이 모두 양수이므로
$a>0$, $b>0$
또 점 $(2, 3)$이 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로
$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$ …… ㉠
이때 $\frac{2}{a}>0$, $\frac{3}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\ge 2\sqrt{\frac{2}{a}\times\frac{3}{b}}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{2}{a}=\frac{3}{b}\text{일 때 성립한다.}\right)$
이때 ㉠에 의하여
$1\ge 2\sqrt{\frac{6}{ab}}$이므로
$\sqrt{ab}\ge 2\sqrt{6}$

즉, $ab\ge 24$
따라서 ab의 최솟값은 24이다.

답 ④

65 $\left(4a+\frac{1}{b}\right)\left(2b+\frac{1}{a}\right)=8ab+4+2+\frac{1}{ab}$
$=8ab+\frac{1}{ab}+6$
이때 $a>0$, $b>0$에서 $8ab>0$, $\frac{1}{ab}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$8ab+\frac{1}{ab}\ge 2\sqrt{8ab\times\frac{1}{ab}}$ $\left(\text{단, 등호는 } 8ab=\frac{1}{ab}\text{일 때 성립한다.}\right)$
$=2\times 2\sqrt{2}$
$=4\sqrt{2}$
그러므로
$\left(4a+\frac{1}{b}\right)\left(2b+\frac{1}{a}\right)=8ab+\frac{1}{ab}+6\ge 4\sqrt{2}+6$
따라서 구하는 최솟값은 $6+4\sqrt{2}$이다.

답 ⑤

66 $(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=2+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+2$
$=\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+4$
이때 $a>0$, $b>0$에서 $\frac{4a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{4a}{b}\times\frac{b}{a}}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{4a}{b}=\frac{b}{a}\text{일 때 성립한다.}\right)$
$=2\times 2$
$=4$
그러므로
$(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+4\ge 4+4=8$
따라서 구하는 최솟값은 8이다.

답 ③

67 $(3x+y)\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{y}\right)=9+\frac{12x}{y}+\frac{3y}{x}+4$
$=\frac{12x}{y}+\frac{3y}{x}+13$
이때 $\frac{12x}{y}>0$, $\frac{3y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{12x}{y}+\frac{3y}{x}\ge 2\sqrt{\frac{12x}{y}\times\frac{3y}{x}}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{12x}{y}=\frac{3y}{x}\text{일 때 성립한다.}\right)$
$=2\times 6=12$
그러므로
$(3x+y)\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{y}\right)=\frac{12x}{y}+\frac{3y}{x}+13$
$\ge 12+13=25$
따라서 구하는 최솟값은 25이다.

답 ⑤

68 $\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)=ab+1+2+\frac{2}{ab}$

$$=ab+\frac{2}{ab}+3$$

이때 $ab>0$, $\frac{2}{ab}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$ab+\frac{2}{ab}\geq 2\sqrt{ab\times\frac{2}{ab}}\ \left(\text{단, 등호는 } ab=\frac{2}{ab}\text{일 때 성립한다.}\right)$$
$$=2\times\sqrt{2}$$
$$=2\sqrt{2}$$

그러므로

$$\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)=ab+\frac{2}{ab}+3\geq 2\sqrt{2}+3$$

따라서 $3+2\sqrt{2}\geq k$이어야 하므로 실수 k의 최댓값은 $3+2\sqrt{2}$이다.

답 ⑤

69

$$f(x)=x^4-2x^3+2x^2-x+16$$
$$=x^4-x^3+x^2-x^3+x^2-x+16$$
$$=x^2(x^2-x+1)-x(x^2-x+1)+16$$
$$=(x^2-x+1)(x^2-x)+16$$

$x^2-x+1>0$이므로

$$\frac{f(x)}{x^2-x+1}=(x^2-x)+\frac{16}{x^2-x+1}$$
$$=(x^2-x+1)+\frac{16}{x^2-x+1}-1$$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{f(x)}{x^2-x+1}$$
$$\geq 2\sqrt{(x^2-x+1)\times\frac{16}{x^2-x+1}}-1$$
$$\left(\text{단, 등호는 } x^2-x+1=4\text{, 즉 } x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$$
$$=2\times 4-1=7$$

따라서 $\frac{f(x)}{x^2-x+1}$의 최솟값은 7이다.

답 ②

70 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 a, b라 하면

직사각형의 넓이는 ab이고, 대각선의 길이가 20이므로

$a^2+b^2=20^2=400$

$a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2\times b^2}\ (\text{단, 등호는 } a^2=b^2\text{일 때 성립한다.})$$
$$=2\sqrt{(ab)^2}$$
$$=2ab$$

즉, $400\geq 2ab$에서 $ab\leq 200$

따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 200이다.

답 ③

71 $S_1+S_2=(1+2+3+4+5)+(4+5)=24$

$A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$이므로 $S_1>0$, $S_2>0$이고,

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$S_1+S_2\geq 2\sqrt{S_1\times S_2}$ (단, 등호는 $S_1=S_2$일 때 성립한다.)

$24\geq 2\sqrt{S_1\times S_2}$에서

$\sqrt{S_1\times S_2}\leq 12$

즉, $S_1\times S_2\leq 144$

따라서 $S_1\times S_2$의 최댓값은 144이다.

답 144

72 삼각형 PAB는 $\angle\text{APB}=90°$인 직각삼각형이므로

삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$

또 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\text{AB}}^2=8^2+6^2=100$

한편, 삼각형 AQB에서 $\overline{\text{AQ}}=x$, $\overline{\text{BQ}}=y$ $(x>0,\ y>0)$이라 하면

삼각형 AQB는 $\angle\text{AQB}=90°$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+y^2=100$

이고, 삼각형 AQB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times x\times y=\frac{1}{2}xy$이다.

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)

즉, $100\geq 2xy$에서 $xy\leq 50$

따라서 사각형 PAQB의 넓이는

$24+\frac{1}{2}xy\leq 24+\frac{1}{2}\times 50=49$

이므로 구하는 최댓값은 49이다.

답 ③

서술형 완성하기

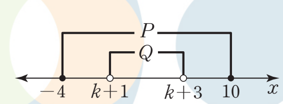
본문 49~50쪽

01 2	**02** 35	**03** 갑, 정	**04** 9	**05** 9
06 960	**07** 6	**08** 10	**09** 17	**10** 8

01 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid -4\leq x\leq 10\}$, $Q=\{x\mid k+1<x<k+3\}$ …… ❶

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$가 성립해야 한다.



즉, $-4\leq k+1$, $k+3\leq 10$이므로

$-5\leq k\leq 7$ …… ❷

따라서 정수 k의 최댓값은 7, 최솟값은 -5이므로 그 합은

$7+(-5)=2$ …… ❸

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	두 조건 p, q의 진리집합을 구한 경우	40 %
❷	정수 k의 값의 범위를 구한 경우	40 %
❸	정수 k의 최댓값, 최솟값과 그 합을 구한 경우	20 %

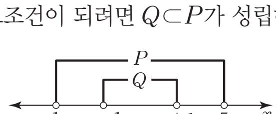
02 x에 대한 두 조건 p, q를
p: $x^2-5x-6\le0$
q: $|x-a|\le b$
라 하자.
명제 $p \longrightarrow q$의 역 $q \longrightarrow p$가 참이고,
명제 $p \longrightarrow q$의 대우가 참이므로 명제 $p \longrightarrow q$도 참이다.
즉, p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=Q$ …… ❶
조건 p의 $x^2-5x-6\le0$에서
$(x+1)(x-6)\le0$
$-1\le x\le6$
조건 q의 $|x-a|\le b$에서
$-b\le x-a\le b$
$a-b\le x\le a+b$
즉, $P=\{x|-1\le x\le6\}$, $Q=\{x|a-b\le x\le a+b\}$이므로
$P=Q$가 되려면
$a-b=-1$ …… ㉠
$a+b=6$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{7}{2}$ …… ❷
따라서 $4ab=4\times\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}=35$ …… ❸
답 35

단계	채점 기준	비율
❶	$P=Q$임을 구한 경우	40 %
❷	a, b의 값을 구한 경우	40 %
❸	$4ab$의 값을 구한 경우	20 %

03 (나)에서 을이 A 팀이면 병은 B 팀이고,
(다)의 대우에서 병이 B 팀이면 정은 A 팀이고, …… ❶
(가)의 대우에서 정이 A 팀이면 갑은 A 팀이다. …… ❷
즉, 갑, 을, 정은 A 팀, 병은 B 팀이다.
따라서 을과 같은 팀인 사람은 갑, 정이다. …… ❸
답 갑, 정

단계	채점 기준	비율
❶	(다)의 대우를 활용한 경우	40 %
❷	(가)의 대우를 활용한 경우	40 %
❸	을과 같은 팀인 사람을 구한 경우	20 %

04 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|1<x<5\}$
$Q=\{x|a-1<x<a+1\}$ …… ❶
p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$가 성립해야 한다. …… ❷



즉, $1\le a-1$, $a+1\le5$이므로
$2\le a\le4$
따라서 정수 a의 값은 2, 3, 4이고, 그 합은
$2+3+4=9$ …… ❸
답 9

단계	채점 기준	비율
❶	두 조건 p, q의 진리집합을 구한 경우	40 %
❷	$Q\subset P$임을 구한 경우	40 %
❸	정수 a의 값과 그 합을 구한 경우	20 %

05 사각형 ABCD는 한 변의 길이가 4인 정사각형이므로 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의해 넓이가 이등분된다. 즉, 점 (a, b)는 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이다. …… ❶
정사각형의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 점 (a, b)는 정사각형 ABCD의 대각선 AC의 중점인 점 $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$, 즉 점 $(3, 3)$이다. …… ❷
따라서 $a=3$, $b=3$이므로
$a\times b=3\times3=9$ …… ❸
답 9

단계	채점 기준	비율
❶	점 (a, b)의 위치를 파악한 경우	60 %
❷	점 (a, b)를 구한 경우	20 %
❸	$a\times b$의 값을 구한 경우	20 %

06 10의 양의 약수는 1, 2, 5, 10이므로 집합 X는 1, 2, 5, 10 중 적어도 한 개를 포함하고 있는 집합이다. …… ❶
즉, 집합 X의 개수는 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 부분집합의 개수에서 집합 $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$의 부분집합의 개수를 빼서 구하면 된다. …… ❷
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{10}-2^6=1024-64=960$ …… ❸
답 960

단계	채점 기준	비율
❶	명제의 의미를 파악한 경우	40 %
❷	포함 관계를 이용하여 집합 X의 개수를 구하는 방법을 파악한 경우	40 %
❸	집합 X의 개수를 구한 경우	20 %

07 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
조건 p의 $x^2-(a+b)x+ab\le0$에서
$(x-a)(x-b)\le0$
$a\le x\le b$
즉, $P=\{x|a\le x\le b\}$
조건 q의 $x^2-x-6<0$에서

$(x+2)(x-3)<0$
$-2<x<3$
즉, $Q=\{x|-2<x<3\}$ …… ❶
p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$가 성립해야 한다.
즉, $-2<a$이고 $b<3$이므로
$-2<a<b<3$ …… ❷
a, b는 정수이므로
$a=-1$일 때 $b=0, 1, 2$
$a=0$일 때 $b=1, 2$
$a=1$일 때 $b=2$
따라서 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는
$3+2+1=6$ …… ❸

답 6

단계	채점 기준	비율
❶	두 조건 p, q의 진리집합을 구한 경우	40 %
❷	a, b 사이의 관계를 구한 경우	40 %
❸	순서쌍 (a, b)의 개수를 구한 경우	20 %

08 $x^2+6x+y^2-2y+k=(x+3)^2+(y-1)^2+k-10$
이므로 주어진 부등식은
$(x+3)^2+(y-1)^2\geq 10-k$ …… ❶
이때 $(x+3)^2\geq 0$, $(y-1)^2\geq 0$이므로 모든 실수 x, y에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 $10-k\leq 0$이어야 한다. …… ❷
따라서 $k\geq 10$이므로 실수 k의 최솟값은 10이다. …… ❸

답 10

단계	채점 기준	비율
❶	완전제곱식으로 변형한 경우	40 %
❷	k의 값의 범위를 구한 경우	40 %
❸	k의 최솟값을 구한 경우	20 %

09 $x>2$이므로 $x^2-4>0$, $\dfrac{25}{x^2-4}>0$
그러므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x^2+\dfrac{25}{x^2-4}$
$=x^2-4+\dfrac{25}{x^2-4}+4$ …… ❶
$\geq 2\sqrt{(x^2-4)\times\dfrac{25}{x^2-4}}+4$
$\left(\text{단, 등호는 } x^2-4=\dfrac{25}{x^2-4}\text{일 때 성립한다.}\right)$
$=2\times 5+4$
$=14$ …… ❷
이때 $x^2-4=\dfrac{25}{x^2-4}$에서
$x^2-4=5$, $x^2=9$
$x>2$이므로 $x=3$
따라서 $x^2+\dfrac{25}{x^2-4}$는 $x=3$일 때 최솟값 14를 갖는다.
즉, $a=3$, $b=14$이므로
$a+b=3+14=17$ …… ❸

답 17

단계	채점 기준	비율
❶	식을 변형한 경우	30 %
❷	산술평균과 기하평균의 관계를 이용한 경우	40 %
❸	$a+b$의 값을 구한 경우	30 %

10 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.) …… ㉠ …… ❶
$b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$b+c\geq 2\sqrt{bc}$ (단, 등호는 $b=c$일 때 성립한다.) …… ㉡ …… ❷
$c>0$, $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$c+a\geq 2\sqrt{ca}$ (단, 등호는 $c=a$일 때 성립한다.) …… ㉢ …… ❸
㉠, ㉡, ㉢에서
$(a+b)(b+c)(c+a)$
$\geq 2\sqrt{ab}\times 2\sqrt{bc}\times 2\sqrt{ca}$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.)
$=8\sqrt{a^2b^2c^2}$
$=8abc$
이므로
$\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\geq 8$
따라서 $k\leq 8$이어야 하므로 실수 k의 최댓값은 8이다. …… ❹

답 8

단계	채점 기준	비율
❶	a, b에 대하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한 경우	20 %
❷	b, c에 대하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한 경우	20 %
❸	c, a에 대하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한 경우	20 %
❹	세 식에서 k의 최댓값을 구한 경우	40 %

내신 + 수능 고난도 도전

본문 51~52쪽

01 ⑤ **02** ④ **03** 64 **04** ⑤ **05** ④
06 8 **07** ③ **08** ③

01 $(a-b)^2+(a-4)^2=0$에서
$a=b$이고 $a=4$이므로
$a=b=4$
따라서 조건 '$(a-b)^2+(a-4)^2=0$'의 부정은 $a\neq b$ 또는 $a\neq 4$이므로 'a, b 중 적어도 하나는 4가 아니다.'이다.

답 ⑤

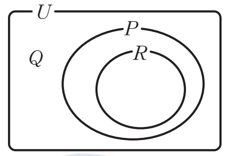
02 p가 $\sim q$이기 위한 필요충분조건이므로

$P=Q^C$

또 p는 r이기 위한 필요조건이므로

$R\subset P$

세 집합 P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $P-Q=P$ (거짓)

ㄴ. $P\cap R=R$ (참)

ㄷ. $Q\cap R=\varnothing$ (참)

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

03 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면

$P^C\subset Q$가 성립해야 한다.

이때 $P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로

$P^C=\{5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$

즉, $\{5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}\subset Q\subset U$

따라서 전체집합 U의 부분집합 Q는 5, 7, 8, 9, 10, 11을 반드시 원소로 가지므로 구하는 집합 Q의 개수는

$2^{12-6}=2^6=64$

답 64

04 ㄱ. 두 조건 'p: $x=1$', 'q: $x^2=1$'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1\}$, $Q=\{-1,\ 1\}$

이므로 $P\subset Q$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄴ. 두 조건 'p: $x>2$', 'q: $x>3$'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x>2\}$, $Q=\{x|x>3\}$

이므로 $Q\subset P$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다. (참)

ㄷ. 명제 '$a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$'은 참이고, 명제 '$a=b=0$이면 $a^2+b^2=0$'도 참이므로 $a^2+b^2=0$은 $a=b=0$이기 위한 필요충분조건이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

05 (가)에서

'노력하지 않는 학생은 과학을 좋아하지 않는다.'

는 참이고, (나)에서

'과학을 좋아하지 않는 학생은 수학을 좋아하지 않는다.'

도 참이므로

'노력하지 않는 학생은 수학을 좋아하지 않는다.'

도 참이다.

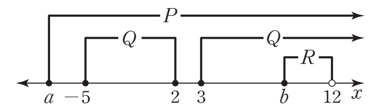
답 ④

06 명제 $q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q\subset P$가 성립해야 한다.

또 명제 $r \longrightarrow q$가 참이므로 $R\subset Q$가 성립해야 한다.

즉, $R\subset Q\subset P$

이를 만족시키도록 세 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $a\le -5$이고 $3\le b<12$

따라서 $b-a$의 값이 최소일 때는 b의 값이 최소이고 a의 값이 최대일 때이므로 $b-a$의 최솟값은

$3-(-5)=8$

답 8

07 ㄱ. $R\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다.

ㄴ. 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$의 대우는 $q \longrightarrow p$이고, $Q\not\subset P$이므로 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

따라서 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

ㄷ. $P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

이상에서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

08 x^2+y^2-2kxy

$=(x^2-2kxy+k^2y^2)+y^2-k^2y^2$

$=(x-ky)^2+(1-k^2)y^2$

임의의 두 실수 x, y와 정수 k에 대하여 $(x-ky)^2\ge 0$이므로

$x^2+y^2-2kxy\ge 0$이 성립하려면 $(1-k^2)y^2\ge 0$이어야 한다.

이때 $y^2\ge 0$이므로

$1-k^2\ge 0$에서 $-1\le k\le 1$

따라서 정수 k의 값은 -1, 0, 1이고, 그 개수는 3이다.

답 ③

V. 함수와 그래프

12 함수

개념 확인하기 본문 55~59쪽

01 ○ 02 × 03 × 04 ○ 05 ×
06 ○ 07 ○ 08 ×
09 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{a, b, c, d\}$, 치역: $\{b, d\}$
10 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{1, 2, 3\}$, 치역: $\{1, 2, 3\}$
11 정의역: 실수 전체의 집합, 공역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y|y\geq1\}$
12 정의역: $\{x|x\geq1\}$, 공역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y|y\geq2\}$
13 정의역: 실수 전체의 집합, 공역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y|y\geq0\}$
14 정의역: $\{x|x\neq0$, x는 실수$\}$, 공역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y|y\neq0$, y는 실수$\}$
15 ○ 16 × 17 ○ 18 ○
19 풀이 참조 20 풀이 참조
21 ○ 22 × 23 ○ 24 × 25 ㄱ, ㄴ, ㄷ
26 ㄴ, ㄷ 27 ㄷ 28 ㄹ 29 ㄱ, ㄴ 30 ㄱ, ㄴ
31 ㄱ 32 ㄹ 33 ㄷ, ㄹ 34 ㄷ, ㄹ 35 ㄷ
36 ㄱ 37 풀이 참조 38 풀이 참조
39 6 40 16 41 3 42 1
43 $(f\circ g)(x)=x^2+2$ 44 $(g\circ f)(x)=(x+2)^2$
45 $(f\circ f)(x)=x+4$ 46 $(g\circ g)(x)=x^4$
47 ㄱ, ㄷ 48 2 49 8 50 $y=-\frac{1}{2}x+2$
51 $y=3x-3$ 52 3 53 4 54 5
55 8 56 풀이 참조 57 풀이 참조
58 풀이 참조 59 풀이 참조
60 풀이 참조 61 풀이 참조

01 답 ○

02 $x=3$에 대응하는 y가 없으므로 함수가 아니다.

답 ×

03 $x=3$에 대응하는 y가 2개이므로 함수가 아니다.

답 ×

04 답 ○

05 x에 대응하는 y가 2개인 경우가 있으므로 함수가 아니다.
[반례] $x=1$에 대응하는 y는 ±1로 2개이다.

답 ×

06 답 ○

07 답 ○

08 x에 대응하는 y가 2개인 경우가 있으므로 함수가 아니다.
[반례] $x=1$에 대응하는 y는 ±1로 2개이다.

답 ×

09 답 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{a, b, c, d\}$, 치역: $\{b, d\}$

10 답 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{1, 2, 3\}$, 치역: $\{1, 2, 3\}$

11 답 정의역: 실수 전체의 집합, 공역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y|y\geq1\}$

12 답 정의역: $\{x|x\geq1\}$, 공역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y|y\geq2\}$

13 답 정의역: 실수 전체의 집합, 공역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y|y\geq0\}$

14 답 정의역: $\{x|x\neq0$, x는 실수$\}$, 공역: 실수 전체의 집합, 치역: $\{y|y\neq0$, y는 실수$\}$

15 $f(-1)=g(-1)=3$, $f(0)=g(0)=1$이므로 $f=g$

답 ○

16 $f(-1)=-1$, $g(-1)=1$이므로 $f\neq g$

답 ×

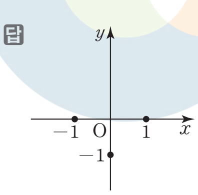
17 $f(-1)=g(-1)=1$, $f(0)=g(0)=1$이므로 $f=g$

답 ○

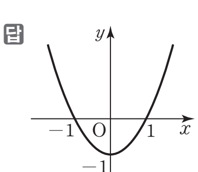
18 $f(-1)=g(-1)=-2$, $f(0)=g(0)=0$이므로 $f=g$

답 ○

19 답



20 답



21 답 ○

22 $x=2$에 대응하는 y가 무수히 많으므로 함수가 아니다.

답 ×

23 답 ○

24 x에 대응하는 y가 2개인 경우가 있으므로 함수가 아니다.

답 ×

25 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

26 답 ㄴ, ㄷ

27 답 ㄷ

28 답 ㄹ

29 답 ㄱ, ㄴ

30 답 ㄱ, ㄴ

31 답 ㄱ

32 답 ㄹ

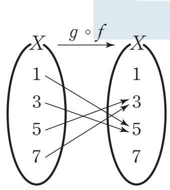
33 답 ㄷ, ㄹ

34 답 ㄷ, ㄹ

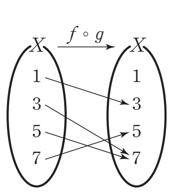
35 답 ㄷ

36 답 ㄱ

37 답



38 답



39 $(f \circ g)(2)=f(g(2))=f(4)=6$

답 6

40 $(g \circ f)(2)=g(f(2))=g(4)=16$

답 16

41 $(f \circ f)(-1)=f(f(-1))=f(1)=3$

답 3

42 $(g \circ g)(-1)=g(g(-1))=g(1)=1$

답 1

43 $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2+2$

답 $(f \circ g)(x)=x^2+2$

44 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x+2)=(x+2)^2$

답 $(g \circ f)(x)=(x+2)^2$

45 $(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(x+2)=x+4$

답 $(f \circ f)(x)=x+4$

46 $(g \circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2)=x^4$

답 $(g \circ g)(x)=x^4$

47 역함수가 존재하기 위한 필요충분조건은 일대일대응이므로 일대일대응인 함수를 찾으면 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

48 $f^{-1}(5)=a$에서 $5=f(a)$

$f(a)=3a-1=5$

따라서 $a=2$

답 2

49 $f^{-1}(b)=3$에서 $b=f(3)=3\times3-1=8$

답 8

50 $y=-2x+4$에서 $x=-\frac{1}{2}y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{1}{2}x+2$

답 $y=-\frac{1}{2}x+2$

51 $y=\frac{1}{3}x+1$에서 $x=3y-3$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=3x-3$

답 $y=3x-3$

52 $f^{-1}(2)=a$라 하면 $2=f(a)$

따라서 $a=3$이므로 $f^{-1}(2)=3$

답 3

53 $(f^{-1})^{-1}(1)=f(1)=4$

답 4

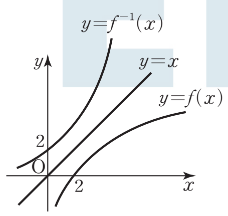
54 $(f^{-1}\circ f)(5)=f^{-1}(f(5))=f^{-1}(8)=5$

답 5

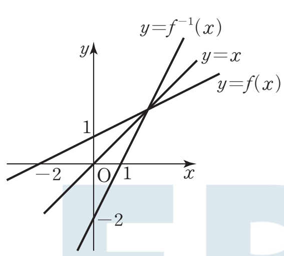
55 $(f\circ f^{-1})(8)=f(f^{-1}(8))=f(5)=8$

답 8

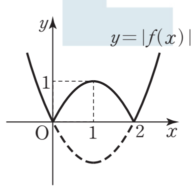
56 답



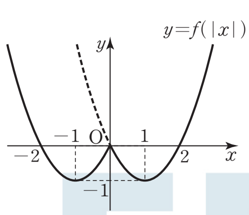
57 답



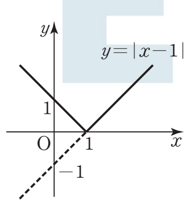
58 답



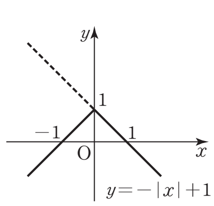
59 답



60 답



61 답



유형 완성하기

본문 60~75쪽

01 ③	02 ④	03 ⑤	04 9	05 ①
06 ②	07 8	08 ②	09 ③	10 ②
11 ④	12 ⑤	13 ③	14 ②	15 ③
16 ⑤	17 7	18 ②	19 ①	20 ②
21 ②	22 6	23 ②	24 ①	25 ④
26 ①	27 ②	28 ④	29 ②	30 ⑤
31 ②	32 ⑤	33 36	34 30	35 81
36 ③	37 ⑤	38 ①	39 ④	40 14
41 ④	42 ③	43 ③	44 ①	45 ⑤
46 ②	47 ④	48 ③	49 ⑤	50 ③
51 15	52 ⑤	53 ③	54 ②	55 4
56 ⑤	57 1024	58 ①	59 29	60 ②
61 ②	62 ③	63 ④	64 ②	65 ③
66 ②	67 ①	68 ④	69 ④	70 ①
71 ②	72 ②	73 ②	74 ①	75 ⑤
76 ②	77 7	78 ⑤	79 ①	80 ②
81 ③	82 ③	83 ④	84 ②	85 ④
86 ⑤	87 ④	88 ⑤	89 ④	90 6
91 ⑤	92 $15\le a<16$		93 ①	94 ⑤
95 4	96 3	97 ④	98 ③	99 4
100 ①				

01 ㄱ. $f(-1)=3$, $f(0)=2$, $f(1)=1$이므로 함수이다.

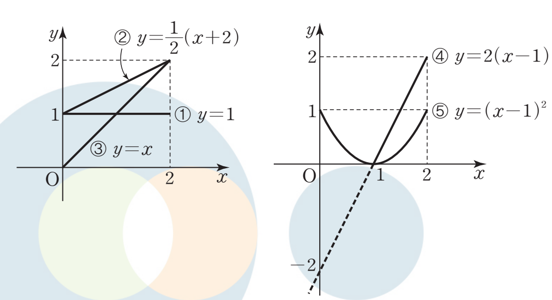
ㄴ. $g(0)=0\not\in Y$이므로 함수가 아니다.

ㄷ. $h(-1)=1$, $h(0)=1$, $h(1)=4$이므로 함수이다.

이상에서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

02



④ $y=2(x-1)$에서

$0\le x<1$일 때, $-1\le x-1<0$, $-2\le 2(x-1)<0$

$0\le x<1$인 x에 대응하는 값이 공역에 없으므로 함수가 아니다.

답 ④

03 $f(x)=ax+b$ (a, b는 자연수)의 그래프는 직선이므로

$1\le x\le 3$인 x에 대응하는 $f(x)$의 범위가 $1\le f(x)\le 7$이면

$f(x)=ax+b$는 함수이다.

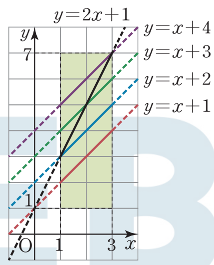
$1\le f(1)\le 7$에서

$1 \le a+b \le 7$ ...... ㉠

$1 \le f(3) \le 7$에서

$1 \le 3a+b \le 7$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$로 5개이다.



답 ⑤

04 $f(-1)=-(-1)^2+4=3$

$f(1)=-1^2+4=3$

$f(3)=3\times3-6=3$

따라서

$f(-1)+f(1)+f(3)=3+3+3$

$=9$

답 9

05 $f(2)=2^2+2\times2-5=3$

$g(3)=-2\times3+3=-3$

따라서

$f(2)g(3)=3\times(-3)$

$=-9$

답 ①

06 $5=7\times0+5$이므로 $f(5)=5$

$10=7\times1+3$이므로 $f(10)=3$

$15=7\times2+1$이므로 $f(15)=1$

$20=7\times2+6$이므로 $f(20)=6$

따라서

$f(5)+f(10)+f(15)+f(20)=5+3+1+6$

$=15$

답 ②

07 $f(3)=2\times3=6$

$f(6)=f(6-5)-3$

$=f(1)-3$

$=2\times1-3$

$=-1$

$f(9)=f(9-5)-3$

$=f(4)-3$

$=2\times4-3$

$=5$

$f(12)=f(12-5)-3$

$=f(7)-3$

$=\{f(7-5)-3\}-3$

$=f(2)-6$

$=2\times2-6$

$=-2$

따라서

$f(3)+f(6)+f(9)+f(12)=6+(-1)+5+(-2)$

$=8$

답 8

08 함수 $f(x)=2x+k$의 그래프는 기울기가 2인 직선이므로 함숫값 $f(x)$의 집합, 즉 치역이 공역의 부분집합이 되도록 k의 값의 범위를 잡으면 된다.

$1 \le f(2) \le 7$에서

$1 \le 4+k \le 7$

$-3 \le k \le 3$ ...... ㉠

$1 \le f(4) \le 7$에서

$1 \le 8+k \le 7$

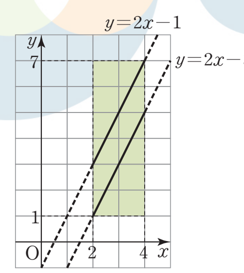
$-7 \le k \le -1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족해야 하므로

$-3 \le k \le -1$

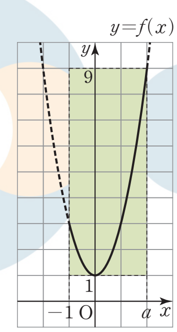
따라서 $a=-3$, $b=-1$이므로

$a+b=-4$



답 ②

09



함수 $f(x)=2x^2+1$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=0$이므로

$f(x)$의 최솟값 $b=f(0)=1$

$f(-1)=3$이므로

$f(x)$의 최댓값 $9=f(a)$

$9=2a^2+1$, $a^2=4$

$a>-1$이므로 $a=2$

따라서 $a+b=2+1=3$

답 ③

10 $f(x)=-x^2+4x+b$

$=-(x-2)^2+b+4$

$f(1)=b+3$

$f(2)=b+4$

$f(4)=b$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=2$이므로

$f(0)=f(4)$, $f(1)=f(3)$

조건 (가)에서 집합 A의 원소의 개수는 3이므로

$a=0$ 또는 $a=3$

그런데 a는 자연수이므로 $a=3$

이때 $A=\{b, b+3, b+4\}$이므로

조건 (나)에 의하여

$b+(b+3)+(b+4)=3b+7=22$

$3b=15$, $b=5$

따라서 $a+b=3+5=8$

답 ②

11 $f(x+y)=f(x)f(y)$ …… ㉠

㉠에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)f(1)=2\times2=4$

㉠에 $x=2$, $y=2$를 대입하면

$f(4)=f(2)f(2)=4\times4=16$

답 ④

12 $f(x)=4-f(6-x)$에서

$f(x)+f(6-x)=4$ …… ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+f(5)=4$

㉠에 $x=2$를 대입하면

$f(2)+f(4)=4$

㉠에 $x=3$을 대입하면

$f(3)+f(3)=4$

$2f(3)=4$, $f(3)=2$

따라서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$

$=\{f(1)+f(5)\}+f(3)+\{f(2)+f(4)\}$

$=4+2+4$

$=10$

답 ⑤

13 $f(x+4)=f(x)+3$에서

$f(x)=f(x+4)-3$ …… ㉠

㉠에 $x=13$을 대입하면

$f(13)=f(17)-3=15-3=12$

㉠에 $x=9$를 대입하면

$f(9)=f(13)-3=12-3=9$

㉠에 $x=5$를 대입하면

$f(5)=f(9)-3=9-3=6$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=f(5)-3=6-3=3$

답 ③

14 $f(-1)=0$, $g(-1)=1-a+b$

$f(-1)=g(-1)$이어야 하므로

$1-a+b=0$

$a-b=1$ …… ㉠

$f(1)=4$, $g(1)=1+a+b$

$f(1)=g(1)$이어야 하므로

$1+a+b=4$

$a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

따라서 $ab=2\times1=2$

답 ②

15 $f(-1)=3$, $g(-1)=a-b$

$f(-1)=g(-1)$이어야 하므로

$a-b=3$ …… ㉠

$f(1)=3$, $g(1)=a+b$

$f(1)=g(1)$이어야 하므로

$a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=0$

따라서 $2a+b=2\times3+0=6$

답 ③

16 $f(-1)=-3$, $g(-1)=b-8$에서

$f(-1)=g(-1)$이어야 하므로

$b-8=-3$

$b=5$

$f(a)=3a|a|$, $g(a)=5a^2-8$에서

$f(a)=g(a)$이어야 하므로

$3a|a|=5a^2-8$

(i) $a\ge0$인 경우

$3a^2=5a^2-8$, $2a^2=8$

$a^2=4$

$a\ge0$이므로 $a=2$

(ii) $a<0$인 경우

$-3a^2=5a^2-8$, $8a^2=8$

$a^2=1$

$a<0$이므로 $a=-1$

그런데 $a\ne-1$이므로 이 경우는 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $a=2$, $b=5$이므로

$a+b=7$

답 ⑤

17 $f(x)=g(x)$를 만족하는 x를 구하면

$x^3-6x^2+5x-3=-6x+3$

$x^3-6x^2+11x-6=0$

$(x-1)(x-2)(x-3)=0$

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 조건을 만족시키는 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 그 개수는

$2^3-1=7$

답 7

18 $f(x)=ax+b$에서

$f(1)=a+b=5$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=2a+b=3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=7$

$g(x)=bx+a=7x-2$

따라서 $g(2)=7\times2-2=12$

답 ②

19 $f(x)=ax^2+bx+c$에서

$f(0)=c=3$

$f(1)=a+b+c=a+b+3=1$

$a+b=-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=9a+3b+c$

$=9a+3b+3=9$

$9a+3b=6$

$3a+b=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-4$

$g(x)=ax+b+c$

$=2x+(-4)+3$

$=2x-1$

따라서 $g(5)=2\times5-1=9$

답 ①

20 $f(0)=f(4)=0$이므로

$f(x)=ax^2+bx+c=ax(x-4)$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=2$이고 함수 $g(x)$의 치역의 최솟값이 -2이므로

$g(2)=f(2)=a\times2\times(-2)=-2$

에서 $a=\frac{1}{2}$

즉, $f(x)=\frac{1}{2}x(x-4)=\frac{1}{2}x^2-2x$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$, $c=0$이므로

$a+b+c=-\frac{3}{2}$

답 ②

21 f가 일대일함수이므로 $f(6)\neq2$, $f(6)\neq3$이다.

즉, $f(6)=1$ 또는 $f(6)=4$

따라서 $f(6)$이 될 수 있는 모든 값의 합은

$1+4=5$

답 ②

22 1의 함숫값을 $f(1)$, 2의 함숫값을 $f(2)$라 하면 일대일함수가 되는 $f(1)$, $f(2)$의 순서쌍 $(f(1), f(2))$는

(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)

따라서 구하는 함수의 개수는 6이다.

답 6

23 일대일함수의 그래프는 치역의 각 원소 b에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=b$와 오직 한 점에서 만난다.

따라서 일대일함수의 그래프는 ㄱ, ㄴ이다.

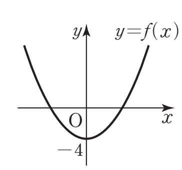
답 ②

24 일대일함수의 그래프는 ㄱ, ㄴ이고 이 중 공역과 치역이 같은 것은 ㄱ뿐이다.

따라서 일대일대응의 그래프는 ㄱ이다.

답 ①

25 ㄱ. [반례] $f(x)=x^2-4$에서



$x_1=-2$, $x_2=2$라 하면 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=f(x_2)=0$

즉, $f(x)=x^2-4$는 일대일함수가 아니므로 일대일대응이 아니다.

ㄴ. $g(x)=-2x-3$은 일대일함수이고 치역과 공역이 모두 실수 전체의 집합으로 서로 같으므로 일대일대응이다.

ㄷ. $h(x)=\begin{cases} 3x+1 & (x\leq0) \\ 2x^2+1 & (x>0) \end{cases}$은 일대일함수이고 치역과 공역이 실수 전체의 집합으로 서로 같으므로 일대일대응이다.

이상에서 일대일대응은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

26 $f(-1)=1+b$, $f(0)=b$, $f(a)=a^2+b$

$a\neq-1$, $a\neq0$이므로 $b\neq a^2+b$, $b+1\neq a^2+b$

즉, $f(x)$는 일대일함수이므로

$\{b, b+1, a^2+b\}=\{3, 4, 7\}$ $\cdots\cdots$ ㉠

이면 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

(ⅰ) $b=3$인 경우

$\{b,\ b+1,\ a^2+b\}=\{3,\ 4,\ a^2+3\}=\{3,\ 4,\ 7\}$

에서 $a^2+3=7$

$a^2=4$

즉, $a=2$ 또는 $a=-2$

(ⅱ) $b=4$인 경우

$\{b,\ b+1,\ a^2+b\}=\{4,\ 5,\ a^2+4\}\neq\{3,\ 4,\ 7\}$

즉, ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $b=7$인 경우

$\{b,\ b+1,\ a^2+b\}=\{7,\ 8,\ a^2+7\}\neq\{3,\ 4,\ 7\}$

즉, ㉠을 만족시키지 않는다.

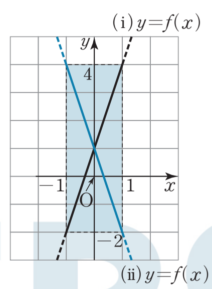
(ⅰ)~(ⅲ)에서

$a+b=2+3=5$ 또는 $a+b=-2+3=1$

따라서 $a+b$의 최댓값은 5이다.

답 ①

27



(ⅰ) $f(x)$가 증가하는 함수인 경우

$f(-1)=-2,\ f(1)=4$이어야 하므로

$-a+b=-2$ ⋯⋯ ㉠

$a+b=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=1$

즉, $ab=3$

(ⅱ) $f(x)$가 감소하는 함수인 경우

$f(-1)=4,\ f(1)=-2$이어야 하므로

$-a+b=4$ ⋯⋯ ㉢

$a+b=-2$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=1$

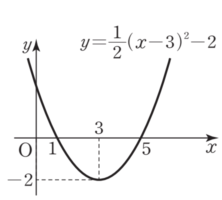
즉, $ab=-3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 ab의 최솟값은 -3이다.

답 ②

28 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}$

$=\frac{1}{2}(x-3)^2-2$

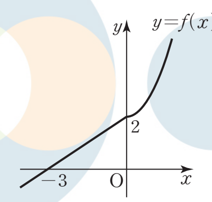


$x\geq3$에서 $f(x)$는 증가하는 함수이므로 $a\geq3$일 때 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

따라서 a의 최솟값은 3이다.

답 ④

29 $a>0$이고, 직선 $y=a(x+3)$이 점 $(0,\ 2)$를 지나야 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이고, 치역과 공역이 같은 일대일대응이 된다.



따라서 $3a=2$에서

$a=\frac{2}{3}$

답 ②

30 ㄱ. $f(x)=x$에서

$f(-1)=-1$,

$f(1)=1$

이므로 $f(x)$는 항등함수이다.

ㄴ. $g(x)=x|x|$에서

$g(-1)=(-1)\times|-1|=-1$,

$g(1)=1\times|1|=1$

이므로 $g(x)$는 항등함수이다.

ㄷ. $h(x)=x^2+x-1$에서

$h(-1)=1-1-1=-1$,

$h(1)=1+1-1=1$

이므로 $h(x)$는 항등함수이다.

이상에서 항등함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

31 $g(x)=c$ (c는 상수)라 하면

$f(1)+f(2)+g(3)+g(4)=1+2+c+c=10$

$2c=7,\ c=\frac{7}{2}$

따라서 $g(x)=\frac{7}{2}$이므로

$g(5)=\frac{7}{2}$

답 ②

32 $f(x)=x^3-x^2-3x+4=x$를 만족하는 x의 값을 구하면

$x^3-x^2-4x+4=0$

$x^2(x-1)-4(x-1)=0$

$(x^2-4)(x-1)=0$

$(x+2)(x-1)(x-2)=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 집합 X는 집합 $\{-2, 1, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 $X=\{1, 2\}$일 때, $S(X)=3$으로 최대이다.

답 ⑤

33 (i) X에서 X로의 함수 f의 개수
$f(1)$이 될 수 있는 값은 1, 3, 5로 3개
$f(3)$이 될 수 있는 값은 1, 3, 5로 3개
$f(5)$가 될 수 있는 값은 1, 3, 5로 3개
따라서 $a=3\times3\times3=3^3=27$
(ii) X에서 X로의 일대일대응 f의 개수
$f(1)$이 될 수 있는 값은 1, 3, 5로 3개
$f(3)$이 될 수 있는 값은 $f(1)$을 제외한 2개
$f(5)$가 될 수 있는 값은 $f(1)$과 $f(3)$을 제외한 1개
따라서 $b=3\times2\times1=6$
(iii) X에서 X로의 상수함수 f의 개수
$f(x)=1$, $f(x)=3$, $f(x)=5$
따라서 $c=3$
(i)~(iii)에서 $a+b+c=27+6+3=36$

답 36

34 집합 Y의 원소의 개수를 k라 하면
(X에서 Y로의 함수의 개수)$=k^2=36$에서
$k=6$
따라서 X에서 Y로의 일대일함수의 개수는
$6\times5=30$

답 30

35 X에서 Y로의 상수함수의 개수가 3이므로 집합 Y의 원소의 개수는 3이다.
따라서 X에서 Y로의 함수의 개수는
$3^4=81$

답 81

36 $(f\circ g)(1)=f(g(1))$
$=f(1)$
$=1-2+3$
$=2$
$(g\circ f)(2)=g(f(2))$
$=g(4-4+3)$
$=g(3)$
$=5$
따라서
$(f\circ g)(1)+(g\circ f)(2)=2+5$
$=7$

답 ③

37 $(f\circ g)(1)=f(g(1))$
$=f(2)$
$=2+4$
$=6$
$(f\circ g)(3)=f(g(3))$
$=f(-2)$
$=-4+6+1$
$=3$
따라서
$(f\circ g)(1)+(f\circ g)(3)=6+3$
$=9$

답 ⑤

38 $(f\circ g)(1)=f(g(1))$
$=f(b+1)$
$=-3(b+1)+a$
$=-4$
에서 $a=3b-1$ $\cdots\cdots$ ㉠
$(g\circ f)(2)=g(f(2))$
$=g(-6+a)$
$=b(-6+a)+1$
$=-1$
에서 $ab-6b+2=0$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$(3b-1)b-6b+2=0$
$3b^2-7b+2=0$
$(b-2)(3b-1)=0$
$b=2$ 또는 $b=\frac{1}{3}$
$b=2$일 때, $a=3\times2-1=5$
$b=\frac{1}{3}$일 때, $a=3\times\frac{1}{3}-1=0$
그런데 $a\neq0$이므로 $a=5$, $b=2$
따라서 $a+b=7$

답 ①

39 ㄱ. 일반적으로 합성함수의 교환법칙은 성립하지 않는다.
$g\circ f\neq f\circ g$ (거짓)
ㄴ. 일반적으로 합성함수의 결합법칙은 성립한다.
$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ (참)
ㄷ. I가 항등함수이므로
$(f\circ I)(x)=f(I(x))=f(x)$
$(I\circ f)(x)=I(f(x))=f(x)$
$f\circ I=I\circ f=f$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

40 조건 (나)에서 정의역의 임의의 원소 x에 대하여
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x)$
조건 (가)에서 f가 일대일대응이므로
$f(g(x))=f(x)$이면 $g(x)=x$
$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(3)=5$

$(g\circ f)(5)=g(f(5))=g(9)=9$

따라서

$(f\circ g)(3)+(g\circ f)(5)=5+9$

$=14$

답 14

41 $((f\circ g)\circ h)(1)=(f\circ(g\circ h))(1)$

$=f((g\circ h)(1))$

$=f(3+b)$

$=a(3+b)+1$

$=3$

에서 $ab+3a-2=0$ …… ㉠

$(g\circ(h\circ f))(-1)=((g\circ h)\circ f)(-1)$

$=(g\circ h)(f(-1))$

$=(g\circ h)(-a+1)$

$=3(-a+1)+b$

$=5$

에서 $b=3a+2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a(3a+2)+3a-2=0$

$3a^2+5a-2=0$

$(a+2)(3a-1)=0$

$a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

그런데 a는 정수이므로 $a=-2$

$a=-2$를 ㉡에 대입하면

$b=-4$

따라서 $ab=(-2)\times(-4)=8$

답 ④

42 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(ax+1)$

$=-3(ax+1)+2$

$=-3ax-1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(-3x+2)$

$=a(-3x+2)+1$

$=-3ax+2a+1$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$-3ax-1=-3ax+2a+1$에서

$-1=2a+1$, $2a=-2$

따라서 $a=-1$

답 ③

43 $(f\circ g)(-3)=f(g(-3))$

$=f(9+b)$

$=2(9+b)+1$

$=2b+19$

$(g\circ f)(-3)=g(f(-3))$

$=g(-5)$

$=25+b$

$(f\circ g)(-3)=(g\circ f)(-3)$이므로

$2b+19=25+b$에서 $b=6$

즉, $g(x)=x^2+6$

$(f\circ g)(a)=f(g(a))$

$=f(a^2+6)$

$=2(a^2+6)+1$

$=2a^2+13$

$(g\circ f)(a)=g(f(a))$

$=g(2a+1)$

$=(2a+1)^2+6$

$=4a^2+4a+7$

$(f\circ g)(a)=(g\circ f)(a)$이므로

$2a^2+13=4a^2+4a+7$에서

$2a^2+4a-6=0$

$a^2+2a-3=0$

$(a-1)(a+3)=0$

$a=1$ 또는 $a=-3$

그런데 $a\neq-3$이므로 $a=1$

따라서 $a+b=1+6=7$

답 ③

44 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(2x-1)$

$=a(2x-1)+b$

$=2ax-a+b$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(ax+b)$

$=2(ax+b)-1$

$=2ax+2b-1$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$2ax-a+b=2ax+2b-1$에서

$-a+b=2b-1$

$a+b=1$

따라서 $f(1)=a+b=1$

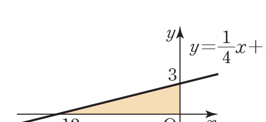
답 ①

45 $(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=f\left(\frac{1}{2}x+2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+2\right)+2$

$=\frac{1}{4}x+3$



직선 $y=\frac{1}{4}x+3$의 x절편이 -12, y절편이 3이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times 12\times 3=18$

답 ⑤

46 $(f\circ f\circ f)(-1)=f(f(f(-1)))$
$=f(f(-1-1+3))$
$=f(f(1))$
$=f(-1+1+3)$
$=f(3)$
$=\frac{1}{3}\times 3-3$
$=-2$

답 ②

47 $(f\circ f)(-3)=f(f(-3))$
$=f\left(\frac{1}{2}\times(-3)+1\right)$
$=f\left(-\frac{1}{2}\right)$
$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1$
$=\frac{3}{4}$

$(f\circ f)(-1)=f(f(-1))$
$=f\left(\frac{1}{2}\times(-1)+1\right)$
$=f\left(\frac{1}{2}\right)$
$=2\times\frac{1}{2}+1$
$=2$

$(f\circ f)(1)=f(f(1))$
$=f(2\times 1+1)$
$=f(3)$
$=2\times 3+1$
$=7$

따라서 구하는 값은

$\frac{3}{4}+2+7=\frac{39}{4}$

답 ④

48 $(f\circ f)(x)=f(f(x))$
$=\frac{1}{4}x+4$ ······ ㉠

㉠에 $x=8$을 대입하면

$f(f(8))=\frac{1}{4}\times 8+4=6$

그런데 $f(8)=4$이므로

$f(f(8))=f(4)$

따라서 $f(4)=6$

답 ③

49 $f(h(x))=g(x)$에서

$2h(x)-1=4x^2-6x+3$

$2h(x)=4x^2-6x+4$

$h(x)=2x^2-3x+2$

답 ⑤

50 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=g(x)$이므로

$f(h(-2))=g(-2)$에서

$h(-2)=k$라 하면

$f(k)=g(-2)$

$k^2+k-2=4\times(-2)^2-6\times(-2)$

$k^2+k-30=0$

$(k+6)(k-5)=0$

$k=-6$ 또는 $k=5$

따라서 $h(-2)$가 될 수 있는 모든 값의 합은

$-6+5=-1$

답 ③

51 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=x^2+4x+3$

이므로 $g(1)$의 값을 구하기 위하여 $f(a)=1$이라 하면

$g(1)=g(f(a))=a^2+4a+3$

$f(a)=\frac{3a-2}{4}=1$에서

$3a-2=4$, $3a=6$

$a=2$

즉, $f(2)=1$

따라서

$g(1)=g(f(2))=2^2+4\times 2+3=15$

답 15

52 $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(3)=5$

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(5)=3$

따라서

$(f\circ f)(1)+(f\circ f)(2)+(f\circ f)(3)$

$=3+5+3$

$=11$

답 ⑤

53 $(f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))$
$=f(f(2))$
$=f(4)$
$=3$

답 ③

54 $(g\circ f)(a)=g(f(a))=2$

에서 $f(a)=k$라 하면

$g(k)=2$ ······ ㉠

주어진 $y=g(x)$의 그래프에서 ㉠을 만족하는 k의 값은 3뿐이므로

$f(a)=3$ ...... ㉡

주어진 $y=f(x)$의 그래프에서 ㉡을 만족하는 a의 값은 1뿐이므로

$a=1$

$b=(g\circ f\circ g)(3)$

$=g(f(g(3)))$

$=g(f(2))$

$=g(5)$

$=1$

따라서 $a+b=1+1=2$

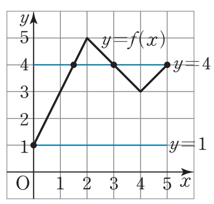
답 ②

55 $(f\circ f)(a)=f(f(a))=3$

에서 $f(a)=k$라 하면

$f(k)=3$ ...... ㉠

주어진 그래프에서 ㉠을 만족하는 k의 값은 1, 4이다.



(i) $f(a)=1$인 경우

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점은 위의 그림과 같이 1개이므로 $f(a)=1$을 만족시키는 a의 값은 1개이다.

(ii) $f(a)=4$인 경우

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$가 만나는 점은 위의 그림과 같이 3개이므로 $f(a)=4$를 만족시키는 a의 값은 3개이다.

(i), (ii)에서 구하는 a의 개수는

$1+3=4$

답 4

56 $(f\circ f)(a)=f(f(a))=2$

에서 $f(a)=k$라 하면

$f(k)=2$ ...... ㉠

㉠을 만족시키는 k의 값을 구하면

(i) $0\le k\le 2$일 때

$-2k+4=2$, $2k=2$

즉, $k=1$

(ii) $2<k\le 4$일 때

$2k-4=2$, $2k=6$

즉, $k=3$

(i), (ii)에서 $f(a)=1$, $f(a)=3$

$f(a)=1$을 만족하는 a의 값을 구해 보자.

$0\le a\le 2$일 때,

$-2a+4=1$, $a=\frac{3}{2}$

$2<a\le 4$일 때,

$2a-4=1$, $a=\frac{5}{2}$

$f(a)=3$을 만족시키는 a의 값을 구해 보자.

$0\le a\le 2$일 때,

$-2a+4=3$, $a=\frac{1}{2}$

$2<a\le 4$일 때,

$2a-4=3$, $a=\frac{7}{2}$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}=8$

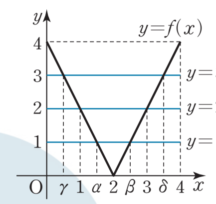
답 ⑤

참고

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $f(a)=1$을 만족하는 a의 값을 α, β라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=2$, $\alpha+\beta=4$

같은 방법으로 $f(a)=3$을 만족하는 a의 값을 γ, δ라 하면 $\gamma+\delta=4$이다.



따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=4+4=8$

57 $f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(2)=2^2$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(2^2)=2^3$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(2^3)=2^4$

⋮

이므로 $f^{10}(1)=2^{10}=1024$

답 1024

58 $f^1(1)=f(1)=-1$

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(-1)=3$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(3)=3$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(3)=3$

⋮

이므로 $f^{10}(1)=3$

답 ①

59 $f^1(1)=f(1)=3$

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(3)=7$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(7)=15$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(15)=f(0)=1$

$f^5(1)=(f\circ f^4)(1)=f(f^4(1))=f(1)=3=f^1(1)$

$f^6(1)=(f\circ f^5)(1)=f(f^5(1))=f(3)=7=f^2(1)$
$f^7(1)=(f\circ f^6)(1)=f(f^6(1))=f(7)=15=f^3(1)$
$f^8(1)=(f\circ f^7)(1)=f(f^7(1))=f(15)=f(0)=1=f^4(1)$
$\vdots$
이므로 3, 7, 15, 1이 차례대로 반복된다.
따라서
$f^5(1)+f^{10}(1)+f^{15}(1)+f^{20}(1)+f^{25}(1)$
$=f^1(1)+f^2(1)+f^3(1)+f^4(1)+f^1(1)$
$=3+7+15+1+3$
$=29$

답 29

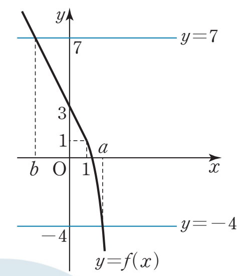
60 $f(3)=-1$에서
$3a-2=-1$, $3a=1$
$a=\frac{1}{3}$
즉, $f(x)=\frac{1}{3}x-2$
$f^{-1}(1)=b$에서 $f(b)=1$
$\frac{1}{3}b-2=1$, $\frac{1}{3}b=3$
$b=9$
따라서 $ab=\frac{1}{3}\times 9=3$

답 ②

61 $2x-1=3$에서 $x=2$이므로
$f(3)=f(2\times 2-1)$
$=\frac{2+a}{3}=\frac{4}{3}$
에서 $a=2$
즉, $f(2x-1)=\frac{x+2}{3}$
$f^{-1}(b)=7$에서 $f(7)=b$
$2x-1=7$에서 $x=4$이므로
$f(7)=f(2\times 4-1)$
$=\frac{4+2}{3}$
$=2=b$
따라서 $a+b=2+2=4$

답 ②

62 (i) $x\le 1$일 때
$-2x\ge -2$, $-2x+3\ge 1$
즉, $f(x)\ge 1$
(ii) $x>1$일 때
$f(x)=-x^2-2x+4$
$=-(x+1)^2+5$
$x>1$에서 $(x+1)^2>4$이므로
$-(x+1)^2<-4$
$-(x+1)^2+5<1$
즉, $f(x)<1$



$f^{-1}(-4)=a$라 하면 $f(a)=-4$
이때 $f(a)<1$이므로 $a>1$
즉, $f(a)=-a^2-2a+4=-4$
$a^2+2a-8=0$
$(a-2)(a+4)=0$
$a>1$이므로 $a=2$
$f^{-1}(7)=b$라 하면 $f(b)=7$
이때 $f(b)\ge 1$이므로 $b\le 1$
즉, $f(b)=-2b+3=7$
$2b=-4$
$b=-2$
따라서
$f^{-1}(-4)+f^{-1}(7)=a+b$
$=2+(-2)$
$=0$

답 ③

63 역함수가 존재하기 위해서는 일대일대응이어야 한다.
ㄱ. 함수 $y=x^2-4$는 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.
ㄴ. 함수 $y=-4x+2$는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
ㄷ. 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x\le 0) \\ x^2 & (x>0)\end{cases}$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
이상에서 역함수가 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

64 함수 $f(x)=-2x+b$가 감소하는 함수이고 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응, 즉 공역과 치역이 같다.
그러므로 $f(-1)=5$, $f(2)=a$이다.
$f(-1)=5$에서 $2+b=5$
$b=3$
즉, $f(x)=-2x+3$
$a=f(2)=-4+3=-1$
따라서 $a+b=-1+3=2$

답 ②

65 $f(x)=ax+b$는 일대일함수이므로 함수 f의 공역과 치역이 같아야 역함수가 존재한다.
(i) $a>0$일 때
$f(x)=ax+b$는 증가하는 함수이므로
$f(0)=a$에서 $a=b$

$f(2)=b$에서 $2a+b=b$, $a=0$

즉, $a=b=0$이 되어 $a>0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

$f(x)=ax+b$는 감소하는 함수이므로

$f(0)=b$에서 $b=b$

$f(2)=a$에서 $2a+b=a$, $a+b=0$

따라서 $f(1)=a+b=0$

답 ③

66 $f(x)=x^2-4x+7=(x-2)^2+3$

이므로 $a\geq 2$이어야 정의역이 $X=\{x|x\geq a\}$, 공역이 $Y=\{y|y\geq f(a)\}$인 함수 $f(x)=x^2-4x+7$은 일대일대응이 되어 역함수가 존재한다.

따라서 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

67 $f(x)=x^2-x-8$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{33}{4}$

이므로 $a\leq\frac{1}{2}$이어야 $x\leq a$에서 f는 감소하는 함수가 된다.

공역과 치역이 같아야 하므로 $f(a)=a$에서

$a^2-a-8=a$

$a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0$

$a=-2$ 또는 $a=4$

그런데 $a\leq\frac{1}{2}$이므로 $a=-2$

답 ①

68 함수 f는 일대일대응, 즉 치역이 실수 전체의 집합이고 연속으로 이어진 증가하는 함수이어야 한다.

$g(x)=x^2+ax+b$라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=-\frac{a}{2}$이므로 $-\frac{a}{2}\leq 1$이어야 한다.

즉, $a\geq -2$ …… ㉠

또 $f(1)=2\times 1+1=3$이므로 $g(1)=3$이어야 한다.

$1+a+b=3$, $b=2-a$

이때 ㉠에 의해 $-a\leq 2$, $2-a\leq 4$이므로

$b=2-a\leq 4$

따라서 구하는 자연수 b는 1, 2, 3, 4로 4개이다.

답 ④

69 $y=\frac{1}{2}x-2$에서 $x=2y+4$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x+4$

$f^{-1}(x)=2x+4$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로

$ab=8$

답 ④

70 $y=ax+2$에서 $x=\frac{1}{a}y-\frac{2}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$

$f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+b=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$이므로

$-\frac{1}{3}=\frac{1}{a}$에서 $a=-3$

$b=-\frac{2}{a}=\frac{2}{3}$

따라서 $ab=-2$

답 ①

71 $y=ax+2$에서 $x=\frac{1}{a}y-\frac{2}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$

$f^{-1}(x)=ax+2=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$이므로

$a=\frac{1}{a}$에서 $a^2=1$

$a=1$ 또는 $a=-1$ …… ㉠

$2=-\frac{2}{a}$에서 $a=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$이므로

$f(x)=f^{-1}(x)=-x+2$

따라서 직선 $y=-x+2$의 x절편은 2, y절편은 2이므로

구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

답 ②

72 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x+2$가 역함수가 존재하는 증가하는 함수이므로 $f(a)=3$이다.

즉, $\frac{1}{4}a+2=3$이므로 $a=4$

$y=\frac{1}{4}x+2$에서 $x=4y-8$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=4x-8$

$f^{-1}(x)=4x+b=4x-8$ $(x\geq 3)$이므로

$b=-8$

따라서 $a+b=4+(-8)=-4$

답 ②

73 $y=\frac{1}{3}x+2$에서 $x=3y-6$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3x-6$

그런데 $x\geq 0$에서 $f(x)\geq 2$이므로

$f^{-1}(x)=3x+a$ $(x\geq b)$

$=3x-6$ $(x\geq 2)$

따라서 $a=-6$, $b=2$이므로

$a+b=-4$

답 ②

74 (i) $x\le 2$일 때

$y=2x-3$에서 $x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

그런데 $x\le 2$에서 $f(x)\le 1$이므로

$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\ (x\le 1)$

(ii) $x>2$일 때

$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$에서 $x=4y-2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=4x-2$

그런데 $x>2$에서 $f(x)>1$이므로

$f^{-1}(x)=4x-2\ (x>1)$

따라서 $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & (x\le 1)\\ 4x-2 & (x>1)\end{cases}$이므로

$a=\frac{1}{2},\ b=1,\ c=-2$

즉, $a+b+c=-\frac{1}{2}$

답 ①

75 $f(4x+1)=6x-\frac{1}{2}$에서

$4x+1=t$라 하면 $x=\frac{t-1}{4}$

$f(t)=6\times\frac{t-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}t-2$

즉, $f(x)=\frac{3}{2}x-2$

$y=\frac{3}{2}x-2$에서 $x=\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

$f^{-1}(x)=ax+b=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$이므로

$a=\frac{2}{3},\ b=\frac{4}{3}$

따라서 $a+b=2$

답 ⑤

76 $(f^{-1}\circ g)(1)=f^{-1}(g(1))=9$에서

$g(1)=f(9)$이므로

$2+a=\frac{1}{3}\times 9+2$

따라서 $a=3$

답 ②

77 $(f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(g(3))$

$=f^{-1}(2)$

$=4$

$(f\circ g^{-1})(4)=f(g^{-1}(4))$

$=f(1)$

$=3$

따라서

$(f^{-1}\circ g)(3)+(f\circ g^{-1})(4)=4+3$

$=7$

답 7

78 $(f\circ g^{-1})(a)=f(g^{-1}(a))=5$에서

$g^{-1}(a)=k$라 하면

$a=g(k)=k-3$

$k=a+3$이므로

$f(g^{-1}(a))=f(k)=f(a+3)=5$에서

$\frac{a+3}{2}-1=5$

$\frac{a+3}{2}=6$

$a+3=12$

따라서 $a=9$

답 ⑤

79 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(ax-3)$

$=2(ax-3)+a$

$=2ax-6+a$

$4x+b=2ax-6+a$에서

$4=2a,\ a=2$

$b=-6+a=-6+2=-4$

$g(x)=2x-3$

$g^{-1}(c)=4$에서

$c=g(4)=2\times 4-3=5$

따라서 $a+b+c=2+(-4)+5=3$

답 ①

80 $(g\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g^{-1})(3)$

$=f^{-1}(g^{-1}(3))=4$

에서 $g^{-1}(3)=f(4)$

그런데 $g(2)=3$이므로 $g^{-1}(3)=f(4)=2$

$(f\circ g^{-1})(3)=f(g^{-1}(3))=4$에서

$g^{-1}(3)=2$이므로 $f(2)=4$

$(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(f(3))=4$에서

$f(3)=g(4)=1$

$f(2)=4,\ f(3)=1,\ f(4)=2$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$f(1)=3$

따라서 $f(1)+g(4)=3+1=4$

답 ②

81 조건 (나)에서 $f(g^{-1}(x))=g^{-1}(f(x))$ …… ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(g^{-1}(1))=g^{-1}(f(1))$

그런데 $f(1)=3$이고, $g(2)=1$, 즉 $g^{-1}(1)=2$이므로

$f(2)=g^{-1}(3)$

(ⅰ) $f(2)=1$인 경우

$f(2)=g^{-1}(3)=1$에서 $g(1)=3$

$f(1)=3$, $f(2)=1$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(3)=2$

$g(1)=3$, $g(2)=1$이고 함수 g는 일대일대응이므로

$g(3)=2$

이때 $f=g$

(ⅱ) $f(2)=2$인 경우

$f(2)=g^{-1}(3)=2$에서 $g(2)=3$

그런데 조건 (가)에서 $g(2)=1$이므로 이 경우 g는 함수가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 두 일대일대응 f, g는 (ⅰ)의 경우만 가능하다.

따라서

$f(3)+g(3)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=2f(3)+f^{-1}(f^{-1}(2))$

$=2\times2+f^{-1}(3)$

$=4+1$

$=5$

답 ③

82 $((f\circ g)^{-1}\circ f)(4)=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(4)$

$=(g^{-1}\circ(f^{-1}\circ f))(4)$

$=g^{-1}((f^{-1}\circ f)(4))$

$=g^{-1}(4)$

$g^{-1}(4)=k$라 하면 $g(k)=4$

$g(k)=3k-5=4$에서

$3k=9$, $k=3$

따라서 $((f\circ g)^{-1}\circ f)(4)=3$

답 ③

83 $g(x)=f^{-1}(x)$이므로

$g^{-1}(8)=(f^{-1})^{-1}(8)$

$=f(8)$

$=-\frac{1}{4}\times8+6$

$=4$

답 ④

84 $(g\circ f^{-1})^{-1}(5)=((f^{-1})^{-1}\circ g^{-1})(5)$

$=(f\circ g^{-1})(5)$

$=f(g^{-1}(5))$

$g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$

$g(k)=4k-3=5$에서

$4k=8$, $k=2$

따라서

$f(g^{-1}(5))=f(2)$

$=-3\times2+2$

$=-4$

답 ②

85 $((g\circ f)^{-1}\circ(g\circ f^{-1}))(2)$

$=(f^{-1}\circ g^{-1}\circ g\circ f^{-1})(2)$

$=(f^{-1}\circ f^{-1})(2)$

$=f^{-1}(f^{-1}(2))$

$y=3x+5$에서 $x=\frac{1}{3}y-\frac{5}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$

즉, $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$이므로

$f^{-1}(f^{-1}(2))=f^{-1}(-1)=-2$

답 ④

86 $(f\circ g^{-1})(7)=k$라 하면

$(f\circ g^{-1})^{-1}(k)=7$

그런데 $(f\circ g^{-1})^{-1}(k)=(g\circ f^{-1})(k)$이므로

$(g\circ f^{-1})(k)=7$에서

$4k-3=7$, $4k=10$, $k=\frac{5}{2}$

따라서 $(f\circ g^{-1})(7)=\frac{5}{2}$

답 ⑤

87 $(f^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(g(4))=3\times4-2=10$

이므로

$g(4)=f(10)=\frac{1}{2}\times10+3=8$

답 ④

88 $(f^{-1}\circ g^{-1}\circ h)(1)=f^{-1}(g^{-1}(h(1)))=2$에서

$g^{-1}(h(1))=f(2)$

$h(1)=g(f(2))=g(-3)=-9-6-2=-17$

이므로

$a+b=-17$ ······ ㉠

$(f^{-1}\circ g^{-1}\circ h)(6)=f^{-1}(g^{-1}(h(6)))=-1$에서

$g^{-1}(h(6))=f(-1)$

$h(6)=g(f(-1))=g(3)=6-3=3$

이므로

$6a+b=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=-21$

따라서 $h(x)=4x-21$이므로

$h(5)=-1$

답 ⑤

89 $f(1)=2$, $g(3)=2$이고 두 함수 f, g가 서로 역함수 관계이므로

$g(2)=1$, $f(2)=3$

$(f\circ f)(1)+(g\circ g)(3)=f(f(1))+g(g(3))$

$=f(2)+g(2)$

$=3+1=4$

답 ④

90 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 교점의 좌표는 $(a,\ a)$이다.

$f(a)=\frac{1}{3}a+2=a$에서

$\frac{2}{3}a=2,\ a=3$

따라서 $a+b=2a=6$

답 6

91 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

(i) $x\le 1$에서

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=x,\ \frac{1}{2}x=-\frac{1}{2},\ x=-1$

즉, 교점의 좌표는 $(-1,\ -1)$이다.

(ii) $x>1$에서

$2(x-1)^2=x,\ 2x^2-4x+2=x$

$2x^2-5x+2=0,\ (2x-1)(x-2)=0$

$x>1$이므로 $x=2$

즉, 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.

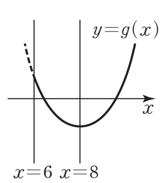
따라서 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(-1-2)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

답 ⑤

92 $x\ge 6$에서 이차방정식 $\frac{1}{4}x^2-3x+a=x$, 즉 $\frac{1}{4}x^2-4x+a=0$의 실근이 2개이어야 한다.

이때 $g(x)=\frac{1}{4}x^2-4x+a$라 하면 $g(x)=\frac{1}{4}(x-8)^2+a-16$이므로 $g(8)<0,\ g(6)\ge 0$이어야 한다.



$g(8)=a-16<0$에서

$a<16$ ...... ㉠

$g(6)=9-24+a\ge 0$에서

$a\ge 15$ ...... ㉡

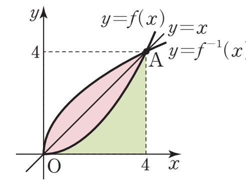
㉠, ㉡에서 $15\le a<16$

답 $15\le a<16$

93 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 두 함수의 그래프의 교점 A의 x좌표는 방정식 $\frac{1}{4}x^2=x\ (x>0)$의 실근과 같다.

$\frac{1}{4}x(x-4)=0$에서

$x=4$, 즉 $t=4$



따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\left(4\times 4-\frac{16}{3}\right)=\frac{16}{3}$

답 ①

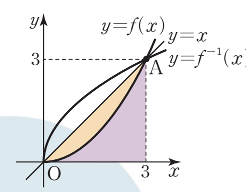
94 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 A의 좌표를 구해 보자.

$\frac{1}{3}x^2=x$에서

$\frac{1}{3}x(x-3)=0$

$x>0$이므로 $x=3$

즉, $a=b=3$이므로 $\mathrm{A}(3,\ 3)$



두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=3$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

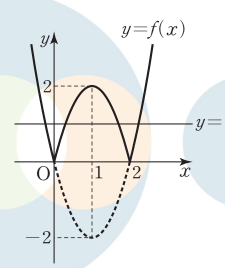
$\frac{1}{2}\times 3\times 3-\frac{3}{2}=3$

답 ⑤

95 $f(x)=2|x^2-2x|=|2x(x-2)|$에서

$$f(x)=\begin{cases} 2x(x-2) & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -2x(x-2) & (0<x<2) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(a)=1$을 만족시키는 실수 a의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표이다.

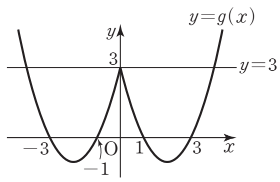
$f(1)=2$이므로 구하는 a의 값은 4개이다.

답 4

96 $f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$$g(x)=f(|x|)=\begin{cases} f(-x) & (x<0) \\ f(x) & (x\ge 0) \end{cases}$$

$x \geq 0$일 때의 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시키면
$x<0$일 때의 $y=f(-x)$의 그래프가 된다.
그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$g(a)=3$을 만족시키는 실수 a의 값은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=3$의 교점의 x좌표이다.
따라서 구하는 a의 값은 3개이다.

답 3

97 $f(x)=|2x+3|-|2x-3|$에서

$x \leq -\frac{3}{2}$일 때,

$f(x)=-(2x+3)+(2x-3)=-6$

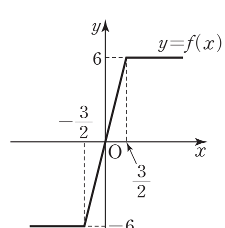
$-\frac{3}{2}<x\leq\frac{3}{2}$일 때,

$f(x)=(2x+3)+(2x-3)=4x$

$x>\frac{3}{2}$일 때,

$f(x)=(2x+3)-(2x-3)=6$

즉, $f(x)=\begin{cases} -6 & \left(x\leq-\frac{3}{2}\right) \\ 4x & \left(-\frac{3}{2}<x\leq\frac{3}{2}\right) \\ 6 & \left(x>\frac{3}{2}\right) \end{cases}$



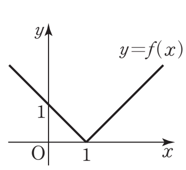
따라서 함수 $y=f(x)$의 치역은 $\{y \mid -6\leq y\leq 6\}$이므로
$b-a=6-(-6)=12$

답 ④

98 $f(x)=|x-1|$에서

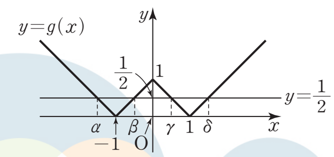
$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x\leq 1) \\ x-1 & (x>1) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$g(x)=f(|x|)=\begin{cases} f(-x) & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$

$x\geq 0$일 때의 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시키면
$x<0$일 때의 $y=f(-x)$의 그래프가 된다.
그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$g(a)=\frac{1}{2}$을 만족시키는 a의 값은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표이므로 위의 그림과 같이 4개가 있고, 이를 각각 α, β, γ, δ $(\alpha<-1<\beta<\gamma<1<\delta)$라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=-1$에서 $\alpha+\beta=-2$

$\frac{\gamma+\delta}{2}=1$에서 $\gamma+\delta=2$

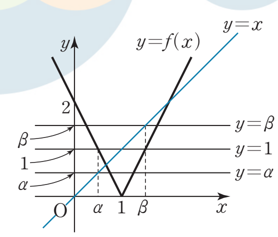
따라서 구하는 모든 a의 값의 합은
$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-2+2=0$

답 ③

99 $f(x)=2|x-1|$에서

$f(x)=\begin{cases} -2x+2 & (x\leq 1) \\ 2x-2 & (x>1) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

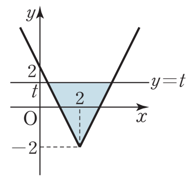


$(f\circ f)(a)=f(f(a))=1$에서 $f(a)=k$라 하면
$f(f(a))=f(k)=1$
$f(k)=1$을 만족시키는 k의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표이므로 2개이고 그 값을 각각
α, β $(0<\alpha<1<\beta<2)$라 하자.
(i) $k=\alpha$, 즉 $f(a)=\alpha$를 만족시키는 a의 값은
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$ $(0<\alpha<1)$의 교점의 x좌표이므로 2개이다.
(ii) $k=\beta$, 즉 $f(a)=\beta$를 만족시키는 a의 값은
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\beta$ $(1<\beta<2)$의 교점의 x좌표이므로 2개이다.
(i), (ii)에서 구하는 a의 개수는
$2+2=4$

답 4

100 $f(x)=\begin{cases} -2x+2 & (x\leq 2) \\ 2x-6 & (x>2) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



두 직선 $y=-2x+2$, $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$-2x+2=t$

$x=\frac{2-t}{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$$g(t)=\frac{1}{2}\times 2\times\left(2-\frac{2-t}{2}\right)\times\{t-(-2)\}$$
$$=\left(\frac{t}{2}+1\right)(t+2)$$
$$=\frac{1}{2}(t+2)^2\ (\text{단, } t>-2)$$

$g^{-1}(8)=k$라 하면 $g(k)=8$

$\frac{1}{2}(k+2)^2=8$, $(k+2)^2=16$

$k^2+4k-12=0$, $(k+6)(k-2)=0$

$k>-2$이므로 $k=2$

따라서 $g^{-1}(8)=2$

답 ①

서술형 완성하기

본문 76쪽

01 10	**02** 7	**03** $a\ge 1$	**04** $a=3$, $b=2$
05 3	**06** $a=-6$, $b=10$		

01 조건 (가)에서 $f(2)=2$, $f(4)=3$ …… ❶

조건 (나)에서 $f(1)=f(4)$, $f(2)=f(5)$ …… ❷

즉, $f(1)=f(4)=3$, $f(2)=f(5)=2$이므로

(i) $f(3)=2$ 또는 $f(3)=3$인 경우

함수 f의 치역은 $\{2, 3\}$

(ii) $f(3)\ne 2$ 그리고 $f(3)\ne 3$인 경우

함수 f의 치역은 $\{2, 3, f(3)\}$ …… ❸

따라서 함수 f의 치역의 모든 원소의 합의 최댓값은

$f(3)=5$일 때 $2+3+5=10$ …… ❹

답 10

단계	채점 기준	비율
❶	조건 (가)를 만족시키는 식을 구한 경우	30 %
❷	조건 (나)를 만족시키는 식을 구한 경우	30 %
❸	$f(3)$의 값에 따라 치역이 결정됨을 밝힌 경우	30 %
❹	함수 f의 치역의 모든 원소의 합의 최댓값을 구한 경우	10 %

02 함수 $y=f(x)$가 항등함수이면 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=x$가 성립한다.

즉, 방정식 $x^3+x^2-5x=x$의 실근을 원소로 하는 집합이 정의역이 될 수 있다. …… ❶

$x^3+x^2-6x=0$

$x(x+3)(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=2$ …… ❷

이므로 구하는 집합 X는 집합 $\{-3, 0, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이다. …… ❸

따라서 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$ …… ❹

답 7

단계	채점 기준	비율
❶	정의역이 방정식 $f(x)=x$의 실근을 원소로 하는 집합임을 밝힌 경우	30 %
❷	방정식 $f(x)=x$의 실근을 구한 경우	30 %
❸	집합 X가 집합 $\{-3, 0, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합임을 밝힌 경우	20 %
❹	집합 X의 개수를 구한 경우	20 %

03 f가 일대일함수이려면 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$이어야 한다. 그래프로 설명하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 치역의 각 원소 b에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=b$와 오직 한 점에서 만나야 한다. …… ㉠

(i) $x\le a$에서 $f(x)=2x+5$가 증가하는 함수이므로

$x>a$에서 $f(x)=2x^2+4x+a$도 증가하는 함수이어야 한다.

이차함수 $y=2x^2+4x+a$의 그래프의 축이 직선 $x=-1$이므로

$a\ge -1$ …… ❶

(ii) $g(x)=2x^2+4x+a$라 할 때

$g(a)\ge f(a)$이어야 ㉠을 만족시키므로

$2a^2+4a+a\ge 2a+5$

$2a^2+3a-5\ge 0$

$(a-1)(2a+5)\ge 0$

$a\le -\frac{5}{2}$ 또는 $a\ge 1$ …… ❷

(i), (ii)에서 공통 범위를 구하면 $a\ge 1$ …… ❸

답 $a\ge 1$

단계	채점 기준	비율
❶	이차함수의 그래프의 축에 따른 a의 값의 범위를 구한 경우	40 %
❷	$x=a$에서의 함숫값에 따른 a의 값의 범위를 구한 경우	40 %
❸	함수 f가 일대일함수가 되도록 하는 a의 값의 범위를 구한 경우	20 %

04 조건 (가)에서

$$(f\circ g)(1)=f(g(1))$$
$$=f(b+1)$$
$$=a(b+1)+2$$
$$=11$$

에서 $a(b+1)-9=0$ …… ㉠ …… ❶

한편,

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$\qquad =f(bx+1)$

$\qquad =a(bx+1)+2$

$\qquad =abx+a+2$ …… ❷

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$\qquad =g(ax+2)$

$\qquad =b(ax+2)+1$

$\qquad =abx+2b+1$ …… ❸

이므로 조건 (나)에 의해

$a+2=2b+1$

$a=2b-1$ …… ㉡ …… ❹

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2b-1)(b+1)-9=0$, $2b^2+b-10=0$

$(b-2)(2b+5)=0$

b는 정수이므로 $b=2$ …… ❺

$b=2$를 ㉡에 대입하면

$a=3$ …… ❻

답 $a=3$, $b=2$

단계	채점 기준	비율
❶	조건 (가)를 만족시키는 식을 구한 경우	20 %
❷	$(f\circ g)(x)$를 구한 경우	20 %
❸	$(g\circ f)(x)$를 구한 경우	20 %
❹	$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$를 만족시키는 식을 구한 경우	10 %
❺	b의 값을 구한 경우	20 %
❻	a의 값을 구한 경우	10 %

05 $(f\circ g)(x)=x$이므로

$g(x)=f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)=f(x)$ …… ❶

$(g\circ f^{-1}\circ g^{-1})(5)=(g\circ f^{-1}\circ f)(5)$ …… ❷

$\qquad =g(5)$

$\qquad =f^{-1}(5)$ …… ❸

$f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$

$3k-4=5$, $k=3$

따라서 $(g\circ f^{-1}\circ g^{-1})(5)=f^{-1}(5)=3$ …… ❹

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	두 함수 f, g가 서로 역함수 관계임을 밝힌 경우	20 %
❷	g^{-1}를 f로 바꿔 표현한 경우	20 %
❸	합성함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 정리한 경우	30 %
❹	$(g\circ f^{-1}\circ g^{-1})(5)$의 값을 구한 경우	30 %

06 함수 f의 역함수가 존재하려면

(i) 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프의 축이 직선 $x=-\frac{a}{2}$이므로

$-\frac{a}{2}\le 3$이어야 한다.

즉, $a\ge -6$ …… ㉠ …… ❶

(ii) 함수 f가 일대일대응이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times 3-\frac{1}{2}=3^2+3a+b$

$3a+b=-8$ …… ㉡ …… ❷

(i), (ii)에서 함수 f의 역함수가 존재하기 위한 조건은

$a\ge -6$, $3a+b=-8$

$x\le 3$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=x$에서

$\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}$, $x=-1$

즉, $x\le 3$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은

점 $(-1, -1)$뿐이다. …… ❸

따라서 다른 한 교점은 $x>3$에 존재한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 교점 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$이므로 또 다른 한 교점의 좌표는 $(5, 5)$이어야 한다. …… ❹

즉, $x>3$에서 $f(5)=5^2+5a+b=5$이어야 하므로

$5a+b=-20$ …… ㉢ …… ❺

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=10$ …… ㉣

㉣이 ㉠을 만족시키므로 $a=-6$, $b=10$ …… ❻

답 $a=-6$, $b=10$

단계	채점 기준	비율
❶	이차함수의 그래프의 축을 이용하여 역함수가 존재하기 위한 조건식을 구한 경우	10 %
❷	함숫값을 이용하여 역함수가 존재하기 위한 조건식을 구한 경우	20 %
❸	$x\le 3$에서의 교점을 구한 경우	20 %
❹	$x>3$에서의 교점을 구한 경우	20 %
❺	$f(5)=5$를 이용한 식을 구한 경우	10 %
❻	a, b의 값을 구한 경우	20 %

내신 + 수능 고난도 도전

본문 77쪽

01 ④ **02** 31 **03** 8 **04** 2

01 조건 (가)에서 $f(1)f(4)$와 $f(2)f(5)$는 모두 짝수이다. …… ㉠

조건 (나)에서 $f(1)f(5)$는 홀수이므로 $f(1)$과 $f(5)$는 모두 홀수이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(4)$와 $f(2)$는 모두 짝수이다.

공역의 원소 중에서 짝수는 6과 8뿐이므로 $f(1)$, $f(5)$, $f(3)$은 모두 홀수이다.

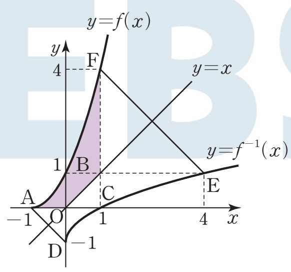
함수 f가 일대일함수이므로 구하는 최댓값은

$f(4)=8$, $\{f(3), f(5)\}=\{5, 7\}$일 때

$f(3)+f(4)+f(5)=5+8+7=20$

답 ④

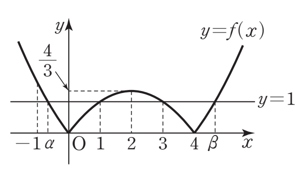
02 A$(-1,\ 0)$, B$(0,\ 1)$, C$(1,\ 0)$, D$(0,\ -1)$이고
$t=1$이므로 $f(1)=4$, F$(1,\ 4)$이다.
두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 E$(4,\ 1)$이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{8}{3}$이므로 다음 그림의 색칠한 부분의 넓이는
$\frac{8}{3}-\frac{1}{2}=\frac{16-3}{6}=\frac{13}{6}$



그러므로 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\times1\times1+2\times$(색칠한 부분의 넓이)$+\frac{1}{2}\times(4-1)\times(4-1)$
$=\frac{1}{2}+2\times\frac{13}{6}+\frac{9}{2}$
$=5+\frac{13}{3}=\frac{28}{3}$
따라서 $p=3$, $q=28$이므로
$p+q=31$

답 31

03 $f(x)=\frac{1}{3}|x^2-4x|=\frac{1}{3}|x(x-4)|$
$=\frac{1}{3}|(x-2)^2-4|$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$(f\circ f)(a)=f(f(a))=1$에서 $f(a)=k$라 하면
$f(f(a))=f(k)=1$
$f(k)=1$을 만족하는 k의 값을 구해 보자.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x(x-4) & (x\le0 \text{ 또는 } x\ge4)\\ -\frac{1}{3}x(x-4) & (0<x<4)\end{cases}$$

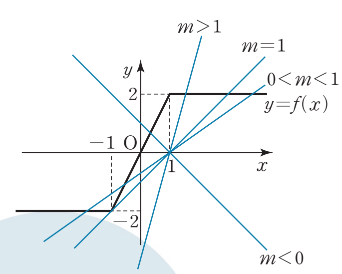
$0<x<4$에서 $-\frac{1}{3}x(x-4)=1$
$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$
$x=1$ 또는 $x=3$
$x\le0$ 또는 $x\ge4$에서 $\frac{1}{3}x(x-4)=1$을 만족하는 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고 $f(-1)=\frac{5}{3}>1$이므로
$x\le0$에서 $f(\alpha)=1$일 때, $-1<\alpha<0$
$x\ge4$에서 $f(\beta)=1$일 때, $4<\beta<5$
즉, $f(k)=1$을 만족하는 k의 값은 α, 1, 3, β이므로 각각의 k의 값에 대하여 $f(a)=k$를 만족하는 a의 개수를 구해 보자.
(i) $k=\alpha$, 즉 $f(a)=\alpha$인 경우
$-1<\alpha<0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이므로 $f(a)=\alpha$를 만족하는 a의 값은 없다.
(ii) $k=1$, 즉 $f(a)=1$인 경우
a의 값은 α, 1, 3, β의 4개이다.
(iii) $k=3$, 즉 $f(a)=3$인 경우
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 점의 x좌표가 a이므로 이를 만족하는 a의 값은 2개이다.
(iv) $k=\beta$, 즉 $f(a)=\beta$인 경우
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\beta$ $(4<\beta<5)$가 만나는 점의 x좌표가 a이므로 이를 만족하는 a의 값은 2개이다.
(i)~(iv)에서 구하는 a의 개수는
$0+4+2+2=8$

답 8

04 $f(x)=|x+1|-|x-1|$에서
$x\le-1$일 때, $f(x)=-(x+1)+(x-1)=-2$
$-1<x\le1$일 때, $f(x)=(x+1)+(x-1)=2x$
$x>1$일 때, $f(x)=(x+1)-(x-1)=2$

즉, $f(x)=\begin{cases}-2 & (x\le-1)\\ 2x & (-1<x\le1)\\ 2 & (x>1)\end{cases}$

함수 $f(x)=|x+1|-|x-1|$의 그래프와 점 $(1,\ 0)$을 항상 지나는 직선 $y=m(x-1)$은 다음 그림과 같다.



$g(m)=\begin{cases}1 & (m\le0 \text{ 또는 } m>1)\\ 2 & (m=1)\\ 3 & (0<m<1)\end{cases}$

따라서 $g(g(4))=g(1)=2$

답 2

13 유리함수와 무리함수

개념 확인하기

본문 79~81쪽

01 ㄱ, ㄴ, ㅂ

02 ㄷ, ㄹ, ㅁ

03 $\frac{1}{x+1}$

04 $\frac{2x-1}{x^2+2x+4}$

05 $\frac{2x}{x^2-1}$

06 $\frac{x+2}{x^3-1}$

07 $\frac{1}{x^2-3x}$

08 $\frac{x+1}{x^2+2x}$

09 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$

10 $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)$

11 $\frac{3}{7}$

12 $\frac{12}{5}$

13 ㄱ, ㄷ, ㄹ

14 ㄴ, ㅁ, ㅂ

15 $\{x \mid x \neq 3$인 실수$\}$

16 $\{x \mid x \neq -2,\ x \neq 2$인 실수$\}$

17 풀이 참조

18 풀이 참조

19 그래프는 풀이 참조, 점근선의 방정식: $x=1,\ y=2$

20 그래프는 풀이 참조, 점근선의 방정식: $x=2,\ y=-2$

21 $x \geq 2$

22 $1 \leq x \leq 3$

23 $-2 < x \leq 4$

24 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

25 $\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{4}$

26 $\frac{x-4\sqrt{x-4}}{x-8}$

27 ㄱ, ㄷ, ㄹ

28 $\{x \mid x \geq 2\}$

29 $\{x \mid x \leq 3\}$

30 $\{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$

31 $\{x \mid -2 < x < 2\}$

32 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x \mid x \geq 0\}$, 치역: $\{y \mid y \geq 0\}$

33 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x \mid x \leq 0\}$, 치역: $\{y \mid y \geq 0\}$

34 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x \mid x \geq 0\}$, 치역: $\{y \mid y \leq 0\}$

35 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x \mid x \leq 0\}$, 치역: $\{y \mid y \leq 0\}$

36 $y=-\sqrt{3x}$

37 $y=\sqrt{-3x}$

38 $y=-\sqrt{-3x}$

39 $y=\sqrt{5(x-2)}-3$

40 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x \mid x \geq 2\}$, 치역: $\{y \mid y \geq -1\}$

41 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x \mid x \leq 3\}$, 치역: $\{y \mid y \geq 1\}$

42 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x \mid x \geq 1\}$, 치역: $\{y \mid y \leq 2\}$

43 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x \mid x \leq 2\}$, 치역: $\{y \mid y \leq 2\}$

01 답 ㄱ, ㄴ, ㅂ

02 답 ㄷ, ㄹ, ㅁ

03 $$\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}$$

답 $\frac{1}{x+1}$

04 $$\frac{2x^2-5x+2}{x^3-8}=\frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{2x-1}{x^2+2x+4}$$

답 $\frac{2x-1}{x^2+2x+4}$

05 $$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x}{x^2-1}$$

답 $\frac{2x}{x^2-1}$

06 $$\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{(x^2+x+1)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{(x^2+x+1)-(x^2-1)}{x^3-1}$$
$$=\frac{x+2}{x^3-1}$$

답 $\frac{x+2}{x^3-1}$

07 $$\frac{2x+1}{x^2-2x}\times\frac{x-2}{2x^2-5x-3}$$
$$=\frac{2x+1}{x(x-2)}\times\frac{x-2}{(2x+1)(x-3)}$$
$$=\frac{1}{x(x-3)}$$
$$=\frac{1}{x^2-3x}$$

답 $\frac{1}{x^2-3x}$

08 $$\frac{x-3}{x^2-x}\div\frac{x^2-x-6}{x^2-1}=\frac{x-3}{x^2-x}\times\frac{x^2-1}{x^2-x-6}$$
$$=\frac{x-3}{x(x-1)}\times\frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-3)}$$
$$=\frac{x+1}{x(x+2)}$$
$$=\frac{x+1}{x^2+2x}$$

답 $\frac{x+1}{x^2+2x}$

09 $$\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{(x+2)-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$$

답 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$

10 $\dfrac{1}{(x+1)(x+4)}$

$=\dfrac{1}{(x+4)-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

답 $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

11 $a:b=2:3$이므로

$a=2k,\ b=3k\ (k\neq0)$이라 하면

$\dfrac{3a-b}{2a+b}=\dfrac{6k-3k}{4k+3k}=\dfrac{3k}{7k}=\dfrac{3}{7}$

답 $\dfrac{3}{7}$

12 $x:y=3:4$이므로

$x=3k,\ y=4k\ (k\neq0)$이라 하면

$\dfrac{xy}{x^2+xy-y^2}=\dfrac{3k\times4k}{9k^2+3k\times4k-16k^2}$

$=\dfrac{12k^2}{5k^2}=\dfrac{12}{5}$

답 $\dfrac{12}{5}$

13 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

14 답 ㄴ, ㅁ, ㅂ

15 답 $\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$

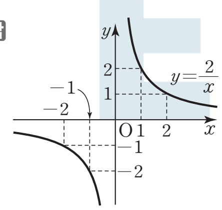
16 (분모)$\neq0$이어야 하므로

$x^2-4\neq0$에서 $x^2\neq4,\ x\neq\pm2$

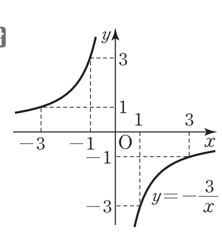
따라서 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-2,\ x\neq2$인 실수$\}$이다.

답 $\{x\,|\,x\neq-2,\ x\neq2$인 실수$\}$

17 답



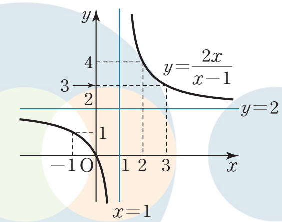
18 답



19 $y=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$

따라서 유리함수 $y=\dfrac{2x}{x-1}$의 그래프는 유리함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

또 점근선의 방정식은 $x=1,\ y=2$이다.

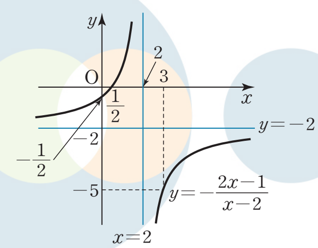


답 그래프는 풀이 참조, 점근선의 방정식: $x=1,\ y=2$

20 $y=-\dfrac{2x-1}{x-2}=-\dfrac{2(x-2)+3}{x-2}=-2-\dfrac{3}{x-2}$

따라서 유리함수 $y=-\dfrac{2x-1}{x-2}$의 그래프는 유리함수 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

또 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=-2$이다.



답 그래프는 풀이 참조, 점근선의 방정식: $x=2,\ y=-2$

21 답 $x\geq2$

22 $\sqrt{x-1}$에서 $x-1\geq0,\ x\geq1$ ······ ㉠

$\sqrt{3-x}$에서 $3-x\geq0,\ x\leq3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $1\leq x\leq3$

답 $1\leq x\leq3$

23 $\sqrt{4-x}$에서 $4-x\geq0,\ x\leq4$ ······ ㉠

$\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$에서 $x+2>0,\ x>-2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $-2<x\leq4$

답 $-2<x\leq4$

24 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(x+1)-x}$

$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

답 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

25 $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{(x+2)-(x-2)}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{4}$

답 $\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{4}$

26 $\dfrac{\sqrt{x-4}-2}{\sqrt{x-4}+2}=\dfrac{(\sqrt{x-4}-2)^2}{(\sqrt{x-4}+2)(\sqrt{x-4}-2)}$

$=\dfrac{(x-4)-4\sqrt{x-4}+4}{(x-4)-4}$

$=\dfrac{x-4\sqrt{x-4}}{x-8}$

답 $\dfrac{x-4\sqrt{x-4}}{x-8}$

27 ㄴ. $y=\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$이므로 무리함수가 아니다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

28 $2x-4\geq 0$에서 $x\geq 2$
따라서 정의역은 $\{x|x\geq 2\}$이다.

답 $\{x|x\geq 2\}$

29 $3-x\geq 0$에서 $x\leq 3$
따라서 정의역은 $\{x|x\leq 3\}$이다.

답 $\{x|x\leq 3\}$

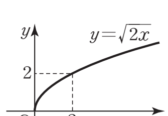
30 $9-x^2\geq 0$에서 $x^2-9\leq 0$
$(x-3)(x+3)\leq 0$
$-3\leq x\leq 3$
따라서 정의역은 $\{x|-3\leq x\leq 3\}$이다.

답 $\{x|-3\leq x\leq 3\}$

31 $4-x^2>0$에서 $x^2-4<0$
$(x-2)(x+2)<0$
$-2<x<2$
따라서 정의역은 $\{x|-2<x<2\}$이다.

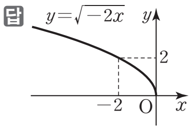
답 $\{x|-2<x<2\}$

32 답



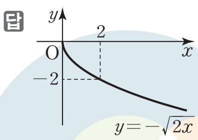
정의역: $\{x|x\geq 0\}$, 치역: $\{y|y\geq 0\}$

33 답



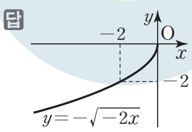
정의역: $\{x|x\leq 0\}$, 치역: $\{y|y\geq 0\}$

34 답



정의역: $\{x|x\geq 0\}$, 치역: $\{y|y\leq 0\}$

35 답



정의역: $\{x|x\leq 0\}$, 치역: $\{y|y\leq 0\}$

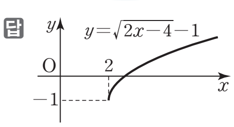
36 답 $y=-\sqrt{3x}$

37 답 $y=\sqrt{-3x}$

38 답 $y=-\sqrt{-3x}$

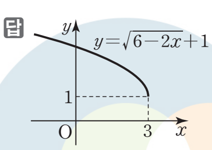
39 답 $y=\sqrt{5(x-2)}-3$

40 답



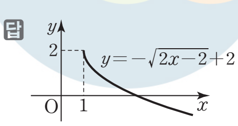
정의역: $\{x|x\geq 2\}$, 치역: $\{y|y\geq -1\}$

41 답



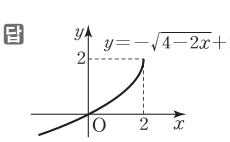
정의역: $\{x|x\leq 3\}$, 치역: $\{y|y\geq 1\}$

42 답



정의역: $\{x|x\geq 1\}$, 치역: $\{y|y\leq 2\}$

43 답



정의역: $\{x|x\leq 2\}$, 치역: $\{y|y\leq 2\}$

유형 완성하기

본문 82~97쪽

01 $\dfrac{x^2-x-4}{(x+2)(x-2)}$		**02** $\dfrac{2x}{(x+2)(x+1)}$		**03** $\dfrac{9}{7}$
04 ⑤	**05** ③	**06** ④	**07** ①	**08** ②
09 ②	**10** ③	**11** ④	**12** ⑤	**13** 151
14 ③	**15** 76	**16** 43	**17** ⑤	**18** ③
19 ②	**20** ⑤	**21** ③	**22** ⑤	**23** ②
24 ③	**25** ②	**26** ①	**27** ②	**28** ④
29 ④	**30** ③	**31** ⑤	**32** ②	**33** ②
34 ⑤	**35** $k>2$	**36** ④	**37** ③	**38** ④
39 ③	**40** ②	**41** ①	**42** $-13<k<-1$	
43 $0\le m<2$		**44** 15	**45** ③	**46** 10
47 ⑤	**48** ⑤	**49** 20	**50** ⑤	**51** ⑤
52 ⑤	**53** $x\le -4$ 또는 $x\ge\dfrac{3}{2}$		**54** ④	**55** ②
56 ③	**57** ②	**58** ③	**59** 408	**60** ③
61 14	**62** ②	**63** 정의역: $\{x\mid x\le 4\}$, 치역: $\{y\mid y\le 3\}$		
64 ④	**65** ①	**66** 30	**67** ②	**68** ④
69 ⑤	**70** ①	**71** ⑤	**72** ①	**73** ③
74 ②	**75** ②	**76** ⑤	**77** ③	**78** ④
79 ③	**80** ⑤	**81** 10	**82** $-1\le k<-\dfrac{1}{2}$	
83 ④	**84** 4	**85** ③	**86** 704	**87** $a\ge 3$
88 ①	**89** ④	**90** ③	**91** ④	**92** ②
93 ①	**94** ①	**95** 17	**96** 19	**97** ⑤
98 ⑤				

01 $\dfrac{3x}{x^2-4}+\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{2}{x-2}$

$=\dfrac{3x+x(x-2)-2(x+2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{x^2-x-4}{(x+2)(x-2)}$

답 $\dfrac{x^2-x-4}{(x+2)(x-2)}$

02 $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{2x-6}{x^2+x-2}\div\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$

$=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{2x-6}{x^2+x-2}\times\dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$

$=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{2(x-3)}{(x+2)(x-1)}\times\dfrac{x-1}{(x+1)(x-3)}$

$=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{2}{(x+2)(x+1)}$

$=\dfrac{2(x+1)-2}{(x+2)(x+1)}$

$=\dfrac{2x}{(x+2)(x+1)}$

답 $\dfrac{2x}{(x+2)(x+1)}$

03 $f(x)=\dfrac{\dfrac{2x+2-2}{x+1}}{\dfrac{x-1+1}{x-1}}=\dfrac{\dfrac{2x}{x+1}}{\dfrac{x}{x-1}}$

$=\dfrac{2x}{x+1}\div\dfrac{x}{x-1}$

$=\dfrac{2x}{x+1}\times\dfrac{x-1}{x}$

$=\dfrac{2(x-1)}{x+1}$

$f(a)=\dfrac{2(a-1)}{a+1}=\dfrac{1}{4}$에서

$8a-8=a+1$, $7a=9$

따라서 $a=\dfrac{9}{7}$

답 $\dfrac{9}{7}$

04 $x:y=1:2=3:6$

$y:z=3:4=6:8$

이므로 $x:y:z=3:6:8$

이때 $x=3k$, $y=6k$, $z=8k$ $(k\ne 0)$이라 하면

$\dfrac{4x+2y-z}{2x+y-z}=\dfrac{12k+12k-8k}{6k+6k-8k}$

$=\dfrac{16k}{4k}$

$=4$

답 ⑤

05 $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{(a+b)x+(2a+b)}{x^2+3x+2}$

이므로

$\dfrac{5x+7}{x^2+3x+2}=\dfrac{(a+b)x+(2a+b)}{x^2+3x+2}$에서

$a+b=5$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2a+b=7$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$

따라서 $ab=6$

답 ③

06 $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x+1}$

$=\dfrac{ax(x+1)+b(x-1)(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x^3-x}$

이므로

$\dfrac{5x+1}{x^3-x}=\dfrac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x^3-x}$에서

$a+b+c=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a-c=5$ $\cdots\cdots$ ㉡

$-b=1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-1,\ c=-2$

따라서 $abc=6$

답 ④

07 $\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{bx+c}{x^2-2x+4}$

$=\dfrac{a(x^2-2x+4)+(bx+c)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$

$=\dfrac{(a+b)x^2+(-2a+2b+c)x+4a+2c}{x^3+8}$

이므로

$\dfrac{x^2+20}{x^3+8}=\dfrac{(a+b)x^2+(-2a+2b+c)x+4a+2c}{x^3+8}$에서

$a+b=1$ ⋯⋯ ㉠

$-2a+2b+c=0$ ⋯⋯ ㉡

$4a+2c=20$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-1,\ c=6$

따라서 $a+b+c=7$

답 ①

08 $\dfrac{2x+5}{x+3}+\dfrac{3x-8}{x-3}$

$=\dfrac{2(x+3)-1}{x+3}+\dfrac{3(x-3)+1}{x-3}$

$=2+\dfrac{-1}{x+3}+3+\dfrac{1}{x-3}$

$=5+\dfrac{-(x-3)+(x+3)}{(x+3)(x-3)}$

$=5+\dfrac{6}{x^2-9}$

따라서 $a=5,\ b=6$이므로

$a+b=11$

답 ②

09 $\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x}+\dfrac{3x^2-15}{x^2-4}$

$=\dfrac{2(x^2+2x)+3}{x^2+2x}+\dfrac{3(x^2-4)-3}{x^2-4}$

$=2+\dfrac{3}{x^2+2x}+3+\dfrac{-3}{x^2-4}$

$=5+\dfrac{3}{x(x+2)}+\dfrac{-3}{(x+2)(x-2)}$

$=5+\dfrac{3(x-2)-3x}{x(x+2)(x-2)}$

$=5+\dfrac{-6}{x^3-4x}$

따라서 $a=5,\ b=-6$이므로

$a+b=-1$

답 ②

10 $x^3+2x^2-5x-5=x(x^2+x-6)+x^2+x-5$

$=x(x^2+x-6)+(x^2+x-6)+1$

$=(x+1)(x^2+x-6)+1$

이므로

$\dfrac{x^3+2x^2-5x-5}{x^2+x-6}=\dfrac{(x+1)(x^2+x-6)+1}{x^2+x-6}$

$=x+1+\dfrac{1}{x^2+x-6}$ ⋯⋯ ㉠

$x^3+x^2-4x-5=x(x^2-4)+x^2-5$

$=x(x^2-4)+(x^2-4)-1$

$=(x+1)(x^2-4)-1$

이므로

$\dfrac{x^3+x^2-4x-5}{x^2-4}=\dfrac{(x+1)(x^2-4)-1}{x^2-4}$

$=x+1+\dfrac{-1}{x^2-4}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{x^3+2x^2-5x-5}{x^2+x-6}+\dfrac{x^3+x^2-4x-5}{x^2-4}$

$=x+1+\dfrac{1}{x^2+x-6}+x+1+\dfrac{-1}{x^2-4}$

$=2x+2+\dfrac{1}{(x+3)(x-2)}+\dfrac{-1}{(x+2)(x-2)}$

$=2x+2+\dfrac{x+2-(x+3)}{(x+3)(x-2)(x+2)}$

$=2x+2+\dfrac{-1}{(x+3)(x+2)(x-2)}$

따라서 $a=2,\ b=2,\ c=-1$이므로

$a+b+c=3$

답 ③

11 $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$

$=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)+\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+4}$

$=\dfrac{4}{x(x+4)}$

따라서 $a=4$

답 ④

12 $\dfrac{2}{x(x-2)}+\dfrac{3}{x(x+3)}+\dfrac{4}{(x+3)(x+7)}$

$=\dfrac{2}{x-(x-2)}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{3}{(x+3)-x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$+\dfrac{4}{(x+7)-(x+3)}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+7}\right)$

$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+7}$

$=\frac{9}{(x-2)(x+7)}$

따라서 $a=9$

답 ⑤

13 $f(x)=\frac{1}{4x^2-1}$

$=\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{101}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{100}{101}$

$=\frac{50}{101}$

따라서 $p=101$, $q=50$이므로

$p+q=151$

답 151

14 $x^2-3x+1=0$에서 $x\neq0$이므로

$x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0$

$x+\frac{1}{x}=3$

따라서

$2x^2-3x+5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+5$

$=2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+5$

$=2(3^2-2)-3\times3+5$

$=10$

답 ③

15 $x^2+4xy-y^2=0$의 양변을 xy로 나누면

$\frac{x}{y}+4-\frac{y}{x}=0$

$\frac{y}{x}-\frac{x}{y}=4$

따라서

$\frac{y^3}{x^3}-\frac{x^3}{y^3}=\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)^3+3\times\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)$

$=4^3+3\times4$

$=76$

답 76

16 $\frac{x+y}{6}=\frac{y+z}{5}=\frac{z+x}{3}=k\ (k\neq0)$이라 하면

$x+y=6k$ …… ㉠

$y+z=5k$ …… ㉡

$z+x=3k$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 더하면

$2(x+y+z)=14k$

$x+y+z=7k$ …… ㉣

㉣에 ㉠, ㉡, ㉢을 각각 대입하면

$x=2k$, $y=4k$, $z=k$

그러므로

$\frac{xy+2yz+3zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{8k^2+8k^2+6k^2}{4k^2+16k^2+k^2}$

$=\frac{22k^2}{21k^2}$

$=\frac{22}{21}$

따라서 $p=21$, $q=22$이므로

$p+q=43$

답 43

17 ㄱ. 제2사분면과 제4사분면을 지난다. (참)

ㄴ. $x<0$에서 함수 f는 증가하는 함수이므로 $x_2<x_1<0$이면

$f(x_2)<f(x_1)$이다. (참)

ㄷ. $y=-\frac{1}{x}$에서 x와 y를 서로 바꾸면 $x=-\frac{1}{y}$, 즉 $y=-\frac{1}{x}$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

18 함수 $f(x)=\frac{4}{x}$의 그래프와 직선 $y=x$의 두 교점 A, B의 좌표를 구해 보자.

$\frac{4}{x}=x$에서 $x^2=4$

$x=-2$ 또는 $x=2$

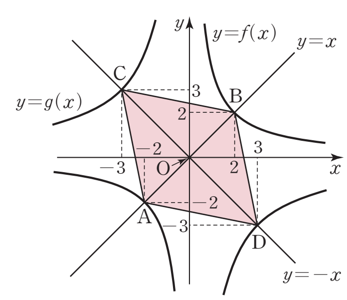
즉, A$(-2, -2)$, B$(2, 2)$

함수 $g(x)=-\frac{9}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x$의 두 교점 C, D의 좌표를 구해 보자.

$-\frac{9}{x}=-x$에서 $x^2=9$

$x=-3$ 또는 $x=3$

즉, C$(-3, 3)$, D$(3, -3)$



두 직선 $y=x$, $y=-x$가 서로 수직이므로 두 선분 AB, CD도 서로 수직이다.
또 두 점 A, B와 두 점 C, D가 각각 원점에 대하여 대칭이므로 사각형 ADBC는 마름모이다.
따라서 사각형 ADBC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{(2+2)^2+(2+2)^2}\times\sqrt{(3+3)^2+(-3-3)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times6\sqrt{2}$$
$$=24$$

답 ③

19 $f(x)=\frac{2}{x}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
함수 f의 역함수 f^{-1}는 f 자신이다. 따라서

$$(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(8)=(f\circ f\circ f^{-1})(8)$$
$$=f(8)$$
$$=\frac{1}{4}$$

답 ②

20 $\frac{ax+b}{x+2}=\frac{1}{x+2}+3$

$$=\frac{1+3(x+2)}{x+2}$$
$$=\frac{3x+7}{x+2}$$

따라서 $a=3$, $b=7$이므로
$a+b=10$

답 ⑤

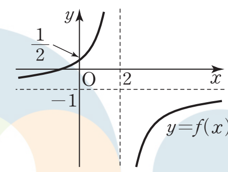
21 $g(x)=-\frac{2}{x-a}-1$이므로
$g(4)=-\frac{2}{4-a}-1=-3$
$\frac{2}{4-a}=2$, $4-a=1$
따라서 $a=3$

답 ③

22 $g(x)=\frac{3}{x-a}+b$
조건 (나)에서 $b=3$
조건 (가)에서 $g(5)=\frac{3}{5-a}+3=4$
$\frac{3}{5-a}=1$, $5-a=3$
$a=2$
따라서 $a+b=2+3=5$

답 ⑤

23 ㄱ. 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-1$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\neq-1$인 실수$\}$이다. (참)
ㄴ. $x<2$에서 증가하는 함수이므로 $x_2<x_1<2$이면 $f(x_2)<f(x_1)$이다. (참)
ㄷ. $f(0)=\frac{1}{2}>0$이므로 제2사분면을 지난다. (거짓)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

24 ㄱ. 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=-2$이므로 직선 $y=-2$와 만나지 않는다. (참)
ㄴ. 점 $(-2, -2)$에 대하여 대칭이다. (거짓)
ㄷ. 점 $(-2, -2)$를 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 f의 역함수는 자기 자신이다.
즉, $f^{-1}=f$이므로 $(f\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

25 $f(x)=\frac{3x-8}{x-2}$

$$=\frac{3(x-2)-2}{x-2}$$
$$=-\frac{2}{x-2}+3$$

ㄱ. $\frac{3x-8}{x-2}=0$을 만족하는 x의 값을 구하면
$x=\frac{8}{3}$
따라서 함수 $f(x)=\frac{3x-8}{x-2}$의 그래프는 x축과 점 $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$에서 만난다. (거짓)
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선인 두 직선 $x=2$, $y=3$의 교점이 점 $(2, 3)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2, 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선 $y=-x+5$에 대하여 대칭이다. (참)
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이므로 평행이동에 의해 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

26 $y=\frac{3x-5}{x-2}$

$$=\frac{3(x-2)+1}{x-2}$$
$$=3+\frac{1}{x-2}$$

이므로 함수 $y=\frac{3x-5}{x-2}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=3$

즉, $a=2$, $b=3$

이때

$$\begin{aligned} y&=\frac{ax+b}{x+1} \\ &=\frac{2x+3}{x+1} \\ &=\frac{2(x+1)+1}{x+1} \\ &=2+\frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=\frac{ax+b}{x+1}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=2$

즉, $c=-1$, $d=2$

따라서

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=2+3+(-1)+2 \\ &=6 \end{aligned}$$

답 ①

27 함수 $f(x)=\frac{ax+b}{3x+c}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=\frac{2}{3}$, $y=2$이므로 $f(x)=\frac{k}{3x-2}+2\ (k\neq0)$이라 하면

$f(1)=k+2=9$에서 $k=7$

그러므로

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{7}{3x-2}+2 \\ &=\frac{7+2(3x-2)}{3x-2} \\ &=\frac{6x+3}{3x-2} \end{aligned}$$

따라서 $a=6$, $b=3$, $c=-2$이므로

$a+b+c=7$

답 ②

28 함수 $f(x)=\frac{ax+b}{x+3}$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(-3,\ -2)$이므로 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=-2$이다.

$f(x)=\frac{k}{x+3}-2\ (k\neq0)$이라 하면

$f(-2)=k-2=1$에서 $k=3$

그러므로

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{3}{x+3}-2 \\ &=\frac{3-2(x+3)}{x+3} \\ &=\frac{-2x-3}{x+3} \end{aligned}$$

따라서 $a=-2$, $b=-3$이므로

$ab=6$

답 ④

29 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=-1$이므로

$p=3$, $q=-1$

함수 $y=\frac{a}{x-3}-1$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\frac{a}{-3}-1$에서

$a=-3$

따라서

$$\begin{aligned} apq&=-3\times3\times(-1) \\ &=9 \end{aligned}$$

답 ④

30 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=2$이므로 함수의 식을 $y=\frac{k}{x-3}+2\ (k\neq0)$이라 하자.

그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{-1}+2$에서 $k=2$

그러므로

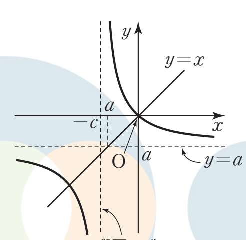
$$\begin{aligned} y&=\frac{2}{x-3}+2 \\ &=\frac{2+2(x-3)}{x-3} \\ &=\frac{2x-4}{x-3} \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-4$, $c=-3$이므로

$a+b+c=-5$

답 ③

31
$$\begin{aligned} y&=\frac{ax+b}{x+c} \\ &=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c} \\ &=a+\frac{b-ac}{x+c} \end{aligned}$$



ㄱ. 함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 원점을 지나므로 $0=\frac{b}{c}$

그런데 직선 $x=-c$가 점근선이고 $c\neq0$이므로 $b=0$ (참)

ㄴ. 점근선의 방정식이 $x=-c$, $y=a$이므로

그래프에서 $-c<0$, $a<0$, 즉 $c>0$, $a<0$

따라서 $ac<0$ (참)

ㄷ. 위의 그림과 같이 두 직선 $y=x$, $y=a$의 교점의 x좌표인 a가 $-c$보다 크므로 $a>-c$, 즉 $a+c>0$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

32 $y=\dfrac{-2x+3}{x-4}$

$=\dfrac{-2(x-4)-5}{x-4}$

$=-2-\dfrac{5}{x-4}$

이므로 함수 $y=\dfrac{-2x+3}{x-4}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=4$, $y=-2$이다.

점 (p, q)는 두 점근선의 교점이므로

$p=4$, $q=-2$

또 직선 $y=-x+k$도 점 (p, q), 즉 점 $(4, -2)$를 지나야 하므로

$-2=-4+k$에서 $k=2$

따라서

$k+p+q=2+4+(-2)$

$=4$

답 ②

33 두 직선 $y=x+2$, $y=-x-4$의 교점이 두 점근선의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구하면

$x+2=-x-4$, $2x=-6$

$x=-3$, $y=-1$

즉, $(-3, -1)$ …… ㉠

함수 $y=\dfrac{ax+2}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-b$, $y=a$이므로

두 점근선의 교점의 좌표는

$(-b, a)$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치해야 하므로

$a=-1$, $b=3$

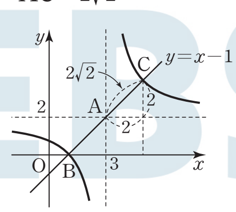
따라서 $ab=-3$

답 ②

34 점 A$(3, 2)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x-1$

$\overline{BC}=4\sqrt{2}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}=2\sqrt{2}$



두 점 B, C의 x좌표는 $3-2=1$ 또는 $3+2=5$이므로

B$(1, 0)$, C$(5, 4)$라 하자.

점근선의 방정식이 $x=3$, $y=2$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-3}+2$ $(k\neq0)$이라 하면 이 함수의 그래프가 점 C$(5, 4)$를 지나므로

$4=\dfrac{k}{2}+2$, $k=4$

그러므로

$y=\dfrac{4}{x-3}+2$

$=\dfrac{4+2(x-3)}{x-3}$

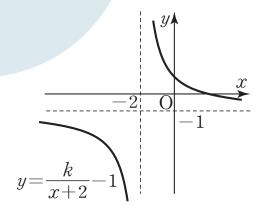
$=\dfrac{2x-2}{x-3}$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=-3$이므로

$abc=12$

답 ⑤

35 함수 $f(x)=\dfrac{k}{x+2}-1$ $(k\neq0)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=-1$이므로 $k<0$이면 제1사분면을 지나지 않는다.



그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제1사분면을 지나려면

$k>0$, $f(0)>0$이어야 한다.

$f(0)=\dfrac{k}{2}-1>0$에서 $k>2$

따라서 구하는 k의 값의 범위는

$k>2$

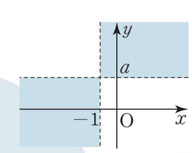
답 $k>2$

36 함수 $f(x)=\dfrac{5}{x+1}+a$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=a$

(i) $a\geq0$인 경우

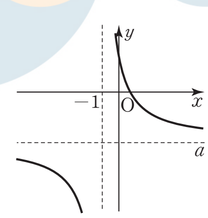
다음 그림의 색칠한 부분에 그래프가 그려지므로 제4사분면을 지날 수 없다.



(ii) $a<0$인 경우

$f(0)=5+a>0$, $a>-5$

그러므로 $-5<a<0$



(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$-5<a<0$

따라서 구하는 정수 a는 -4, -3, -2, -1로 4개이다.

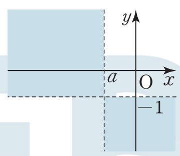
답 ④

37 함수 $f(x)=-\dfrac{4}{x-a}-1$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=-1$

(i) $a\le 0$인 경우

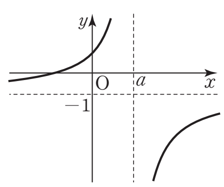
다음 그림의 색칠한 부분에 그래프가 그려지므로 제1사분면을 지날 수 없다.



(ii) $a>0$인 경우

$f(0)=\dfrac{4}{a}-1>0$, $\dfrac{4}{a}>1$, $a<4$

그러므로 $0<a<4$



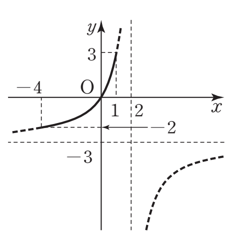
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$0<a<4$

따라서 구하는 정수 a는 1, 2, 3이고, 그 합은 6이다.

답 ③

38 함수 $f(x)=-\dfrac{6}{x-2}-3$ $(-4\le x\le 1)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$M=f(1)=3$, $m=f(-4)=-2$

따라서 $M+m=1$

답 ④

39 $f(x)=\dfrac{-x+6}{x+2}$

$=\dfrac{-(x+2)+8}{x+2}$

$=\dfrac{8}{x+2}-1$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=-1$이므로 함수 $f(x)$는 $x>-2$에서 감소하는 함수이다.

그러므로 정의역이 $\{x|0\le x\le a\}$일 때, 치역은 $\{y|f(a)\le y\le f(0)\}$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값이 1이므로

$f(a)=\dfrac{-a+6}{a+2}=1$

$a+2=-a+6$, $2a=4$, $a=2$

함수 $f(x)$의 최댓값은

$M=f(0)=3$

따라서 $a+M=2+3=5$

답 ③

40 함수 $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+2$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=2$

(i) $a>0$인 경우

$0\le x\le 3$에서 $f(x)>2$이므로 최댓값이 1이 될 수 없다.

(ii) $a<0$인 경우

$0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$는 증가하는 함수이므로 최댓값은 $f(3)$이다.

즉, $f(3)=1$에서

$\dfrac{a}{4}+2=1$, $\dfrac{a}{4}=-1$

$a=-4$

(i), (ii)에서 $a=-4$

답 ②

41 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이므로

$m=0$이면 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프와 직선 $y=m(x-2)$는 만나지 않는다.

$\dfrac{3}{x}=m(x-2)$에서 $x\ne 0$이므로

$mx^2-2mx-3=0$

이차방정식 $mx^2-2mx-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=m^2+3m=m(m+3)=0$

$m\ne 0$이므로 $m=-3$

답 ①

42 $\dfrac{2x-9}{x-3}=3x+k$에서 $x\ne 3$이므로

$(3x+k)(x-3)=2x-9$

$3x^2+(k-11)x+9-3k=0$ …… ㉠

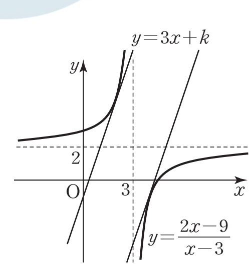
이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(k-11)^2-4\times 3(9-3k)<0$

$k^2+14k+13<0$

$(k+1)(k+13)<0$

$-13<k<-1$



답 $-13<k<-1$

43 $y=mx+1-2m=m(x-2)+1$

이므로 이 직선은 점 $(2, 1)$을 항상 지난다.

$f(x)=\dfrac{x-2}{x}=-\dfrac{2}{x}+1$

이므로 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=1$이다.

(i) $m=0$일 때

직선 $y=mx+1-2m$, 즉 $y=1$은 함수 $f(x)=\dfrac{x-2}{x}$의 그래프의 점근선 중 하나이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=mx+1-2m$은 만나지 않는다. 그러므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m\neq 0$일 때

$\dfrac{x-2}{x}=mx+1-2m$에서 $x\neq 0$이므로

$mx^2+(1-2m)x=x-2$

$mx^2-2mx+2=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=m^2-2m=m(m-2)<0$

$0<m<2$

(i), (ii)에서 $0\le m<2$

답 $0\le m<2$

44 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$

$=\dfrac{(x-2)+4}{x-2}$

$=\dfrac{4}{x-2}+1$

즉, 함수 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$이므로

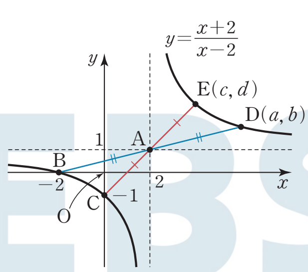
$A(2, 1)$

$y=0$일 때, $\dfrac{x+2}{x-2}=0$에서 $x=-2$이므로

$B(-2, 0)$

$x=0$일 때, $y=-1$이므로

$C(0, -1)$



선분 BD의 중점이 A이므로

$\dfrac{a-2}{2}=2$, $a=6$

$\dfrac{b+0}{2}=1$, $b=2$

에서 $D(6, 2)$

선분 CE의 중점이 A이므로

$\dfrac{c+0}{2}=2$, $c=4$

$\dfrac{d-1}{2}=1$, $d=3$

에서 $E(4, 3)$

따라서

$a+b+c+d=6+2+4+3$

$=15$

답 15

45 함수 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 각각 대칭이므로 $k=0$일 때 $l(k)$는 최소이다.

$\dfrac{4}{x}=x$에서 $x^2=4$

$x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 $k=0$일 때, 두 교점의 좌표는 각각 $(2, 2)$, $(-2, -2)$이므로 $l(k)$의 최솟값은

$l(0)=\sqrt{(2+2)^2+(2+2)^2}$

$=\sqrt{16\times 2}$

$=4\sqrt{2}$

답 ③

참고

함수 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점의 x좌표는 방정식

$\dfrac{4}{x}=x+k$, 즉 $x^2+kx-4=0$의 실근과 같다.

방정식 $x^2+kx-4=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=-4$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=k^2+16$

함수 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 두 교점의 좌표가

$\left(\alpha, \dfrac{4}{\alpha}\right)$, $\left(\beta, \dfrac{4}{\beta}\right)$이므로

$\{l(k)\}^2=(\beta-\alpha)^2+\left(\dfrac{4}{\beta}-\dfrac{4}{\alpha}\right)^2$

$=(\beta-\alpha)^2+\left\{\dfrac{4(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}\right\}^2$

$=2(\beta-\alpha)^2$

$=2k^2+32$

따라서 $k=0$일 때, $l(k)$는 최솟값 $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$를 갖는다.

46 함수 $y=-\dfrac{6}{x-3}+3$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=3$이므로 이 함수의 그래프는 점 $(3, 3)$과 두 직선 $y=x$, $y=-x+6$에 대하여 각각 대칭이다.

$y=0$일 때, $0=-\dfrac{6}{x-3}+3$에서

$\dfrac{6}{x-3}=3$, $x-3=2$, $x=5$

즉, $A(5, 0)$

$x=0$일 때, $y=5$이므로

$B(0, 5)$

두 점 A, B가 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 점이고 두 직선 $y=x$, $y=-x+6$이 서로 수직이므로 사각형 ACDB는 직사각형이다.

$\overline{AB}=5\sqrt{2}$

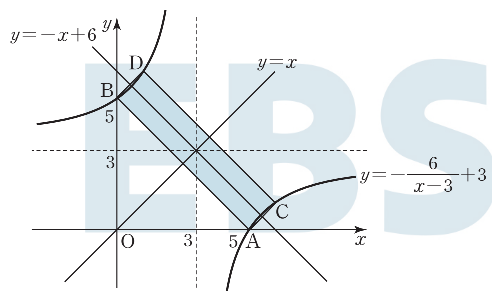
점 A$(5, 0)$과 직선 $y=-x+6$, 즉 $x+y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5+0-6|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=5\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10$



답 10

47 $f(x)=\frac{x}{x-1}$

$=\frac{(x-1)+1}{x-1}$

$=\frac{1}{x-1}+1$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1, 1)$을 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 f의 역함수는 자기 자신이다.

즉, $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$(f\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x$

$f(3)=\frac{3}{2}$

$f^2(3)=(f\circ f^1)(3)=3$

$f^3(3)=(f\circ f^2)(3)=f(3)=\frac{3}{2}$

$f^4(3)=(f\circ f^3)(3)=(f\circ f)(3)=3$

⋮

$f^n(3)=\begin{cases}\frac{3}{2} & (n\text{은 홀수})\\ 3 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

따라서 $f^{10}(3)=3$

답 ⑤

48 $f(x)=-\frac{2x}{x+2}$

$=\frac{-2(x+2)+4}{x+2}$

$=\frac{4}{x+2}-2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-2, -2)$를 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 f의 역함수는 자기 자신이다.

즉, $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$(f\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x$

$f(-1)=2$

$f^2(-1)=(f\circ f^1)(-1)=-1$

$f^3(-1)=(f\circ f^2)(-1)=f(-1)=2$

$f^4(-1)=(f\circ f^3)(-1)=(f\circ f)(-1)=-1$

⋮

$f^n(-1)=\begin{cases}2 & (n\text{은 홀수})\\ -1 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

따라서 $f^{15}(-1)=2$

답 ⑤

49 $f(x)=\frac{2x-5}{x-2}$

$=\frac{2(x-2)-1}{x-2}$

$=-\frac{1}{x-2}+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(2, 2)$를 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 f의 역함수는 자기 자신이다.

즉, $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(x)$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=(f\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x$

⋮

$f^n(x)=\begin{cases}f(x) & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

따라서

$f^9(x)=f(x)=\frac{2x-5}{x-2}=\frac{ax+b}{x+c}$

즉, $a=2$, $b=-5$, $c=-2$이므로

$abc=20$

답 20

50 $f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$

$f(k)=\frac{2k+1}{k+3}=1$

$2k+1=k+3$

$k=2$

따라서 $f^{-1}(1)=2$

답 ⑤

51 $y=\frac{3x+1}{x-a}$에서

$(x-a)y=3x+1$

$x(y-3)=ay+1$

$x=\frac{ay+1}{y-3}$ ...... ㉠

㉠의 x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{ax+1}{x-3}$

따라서

$f^{-1}(x)=\frac{ax+1}{x-3}=\frac{2x+1}{x-b}$

즉, $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=5$

답 ⑤

52 $y=\dfrac{3}{x-2}+a$에서

$y-a=\dfrac{3}{x-2}$

$x-2=\dfrac{3}{y-a}$

$x=\dfrac{3}{y-a}+2$ ······ ㉠

㉠의 x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{3}{x-a}+2$

그러므로 $f^{-1}(x)=\dfrac{3}{x-a}+2$이므로

$f(x)=f^{-1}(x)$에서

$\dfrac{3}{x-2}+a=\dfrac{3}{x-a}+2$

따라서 $a=2$

답 ⑤

53 $2x^2+5x-12\geq0$

$(x+4)(2x-3)\geq0$

따라서 $x\leq-4$ 또는 $x\geq\dfrac{3}{2}$

답 $x\leq-4$ 또는 $x\geq\dfrac{3}{2}$

54 $x+4\geq0$에서 $x\geq-4$ ······ ㉠

$4-3x\geq0$에서 $x\leq\dfrac{4}{3}$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시켜야 하므로

$-4\leq x\leq\dfrac{4}{3}$

따라서 구하는 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0, 1로 6개이다.

답 ④

55 $5-2x\geq0$에서 $x\leq\dfrac{5}{2}$ ······ ㉠

$x+2>0$에서 $x>-2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시켜야 하므로

$-2<x\leq\dfrac{5}{2}$

따라서 구하는 정수 x는 -1, 0, 1, 2로 4개이다.

답 ②

56 $x+3\geq0$에서 $x\geq-3$ ······ ㉠

$3-x\geq0$에서 $x\leq3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시켜야 하므로

$-3\leq x\leq3$

그런데 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)\neq0$에서

$x\neq-2$, $x\neq1$

따라서 구하는 정수 x는 -3, -1, 0, 2, 3으로 5개이다.

답 ③

57 $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}$

$-\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{(x+2)-(x-2)}-\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{(x+2)-(x-2)}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{4}-\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{4}$

$=\dfrac{2\sqrt{x-2}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{x-2}}{2}$

답 ②

58 $\sqrt{x^2-6x+9}+\dfrac{x}{\sqrt{x+9}+3}$

$=\sqrt{(x-3)^2}+\dfrac{x(\sqrt{x+9}-3)}{(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+9}-3)}$

$=|x-3|+\dfrac{x(\sqrt{x+9}-3)}{(x+9)-3^2}$

$=-(x-3)+\dfrac{x(\sqrt{x+9}-3)}{x}$ $(0<x<3$이므로$)$

$=-x+3+\sqrt{x+9}-3$

$=\sqrt{x+9}-x$

답 ③

59 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$=(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2+(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^2$

$=(x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x}+x)+(x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{x}+x)$

$=4x+2$

따라서

$f(10)+f(20)+f(30)+f(40)$

$=(4\times10+2)+(4\times20+2)+(4\times30+2)+(4\times40+2)$

$=4\times(10+20+30+40)+2\times4$

$=4\times100+8$

$=408$

답 408

60 $\dfrac{1}{\sqrt{x+4}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}$

$=\dfrac{\sqrt{x+4}+2}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}-\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt{x+4}-2)}$

$=\dfrac{\sqrt{x+4}+2}{x}-\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

$=\dfrac{4}{x}$

따라서 $x=\sqrt{2}$일 때,

$\dfrac{4}{x}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

답 ③

61 $\dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}-x}+\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$=\dfrac{(\sqrt{x^2+x}+x)^2}{(x^2+x)-x^2}+\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-x)^2}{(x^2+x)-x^2}$

$=\dfrac{(x^2+x)+2x\sqrt{x^2+x}+x^2}{x}+\dfrac{(x^2+x)-2x\sqrt{x^2+x}+x^2}{x}$

$=\dfrac{4x^2+2x}{x}$

$=4x+2$

$x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{2}=2+\sqrt{3}$이므로

$4x+2=4(2+\sqrt{3})+2=10+4\sqrt{3}$

따라서 $a=10$, $b=4$이므로

$a+b=14$

답 14

62 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}-\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x-y}$

$=\dfrac{x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y}{x-y}-\dfrac{x-2\sqrt{x}\sqrt{y}+y}{x-y}$

$=\dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{y}}{x-y}$

$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$에서

$x>0$, $y>0$이고 $x-y=2\sqrt{2}$, $xy=1$이므로

$\dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{y}}{x-y}=\dfrac{4\sqrt{xy}}{x-y}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

답 ②

63 함수 $y=-\sqrt{kx+4}+3$의 그래프가 점 $(3, 2)$를 지나므로

$2=-\sqrt{3k+4}+3$

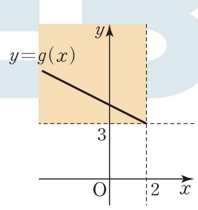
$\sqrt{3k+4}=1$

$k=-1$

따라서 함수 $y=-\sqrt{4-x}+3$의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 4\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\le 3\}$이다.

답 정의역: $\{x\,|\,x\le 4\}$, 치역: $\{y\,|\,y\le 3\}$

64 함수 $f(x)=\sqrt{4-2x}+3$의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge 3\}$이다.



함수 $g(x)=-\dfrac{1}{2}x+k$는 감소하는 함수이므로

정의역이 $\{x\,|\,x\le 2\}$일 때, $g(2)=3$이면 치역이 $\{y\,|\,y\ge 3\}$이 된다.

$g(2)=-\dfrac{1}{2}\times 2+k=3$

따라서 $k=4$

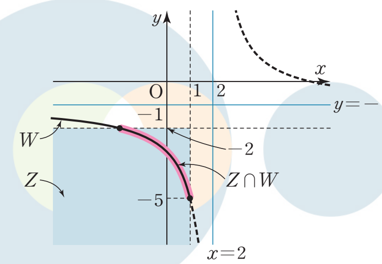
답 ④

65 함수 $y=-\sqrt{1-x}-2$의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 1\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\le -2\}$이므로

$Z=\{(x, y)\,|\,x\le 1, y\le -2\}$

$y=\dfrac{-x+6}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}-1$이므로

$W=\left\{(x, y)\,\middle|\,x\le 1, y=\dfrac{4}{x-2}-1\right\}$



$y=\dfrac{-x+6}{x-2}$에서 $x=1$일 때, $y=-5$이므로

함수 $y=f(x)$의 치역은

$\{y\,|\,-5\le y\le -2\}$

따라서 $a=-5$, $b=-2$이므로

$a+b=-7$

답 ①

66 $y=\sqrt{2x-5}+6$

$=\sqrt{2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)}+6$

이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{5}{2}$만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=2$, $b=\dfrac{5}{2}$, $c=6$이므로

$abc=30$

답 30

67 ㄱ. $y=\sqrt{1-2x}+2$

$=\sqrt{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}+2$

이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=-\sqrt{2x+3}-1$

$=-\sqrt{2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}-1$

이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 $-\dfrac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=-\sqrt{2-x}-2$

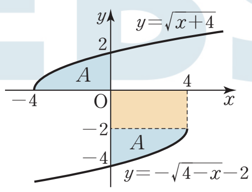
$=-\sqrt{-(x-2)}-2$

이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 평행이동 또는 대칭이동에 의해 겹쳐지는 그래프를 갖는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

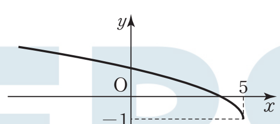
68 함수 $y=-\sqrt{4-x}-2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x+4}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.



따라서 구하는 넓이는 $A+4\times2=A+8$이다.

답 ④

69 함수 $y=\sqrt{5-x}-1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $x=1$일 때, $y=\sqrt{5-1}-1=1$이므로 그래프는 점 $(1,\ 1)$을 지난다. (참)

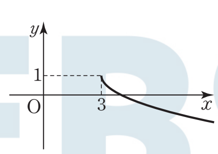
ㄴ. 정의역은 $\{x|x\le5\}$, 치역은 $\{y|y\ge-1\}$이다. (참)

ㄷ. $x=0$일 때, $y=\sqrt{5}-1>0$이므로 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

70 함수 $f(x)=-\sqrt{x-3}+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 그래프는 점 $(3,\ 1)$을 지난다. (참)

ㄴ. 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

ㄷ. $x_2>x_1>3$이면 $f(x_2)<f(x_1)$이다. (거짓)

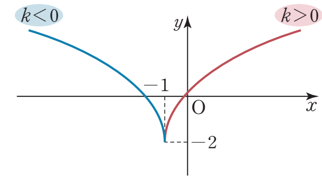
이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

71 $y=\sqrt{kx+k}-2$

$=\sqrt{k(x+1)}-2$

이므로 이 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 치역은 항상 $\{y|y\ge-2\}$이고 정의역은

$k>0$일 때 $\{x|x\ge-1\}$,

$k<0$일 때 $\{x|x\le-1\}$ (거짓)

ㄴ. $k=4$이면 증가하는 함수이다. (참)

ㄷ. $k<0$이면 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

72 정의역이 $\{x|x\ge-2\}$, 치역이 $\{y|y\ge-1\}$이므로

$a>0$이다.

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a(x+2)}-1$

이라 하면 y절편이 1이므로

$1=\sqrt{2a}-1$, $\sqrt{2a}=2$, $a=2$

이때

$y=\sqrt{2(x+2)}-1=\sqrt{2x+4}-1$

이므로 $b=4$, $c=-1$

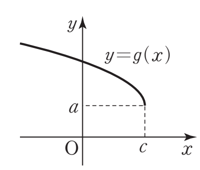
따라서 $a+b+c=2+4+(-1)=5$

답 ①

73 함수 $y=f(x)$의 정의역이 $\{x|x\ge b\}$, 치역이 $\{y|y\le c\}$이므로

$a>0$, $b<0$, $c>0$

그러므로 함수 $g(x)=\sqrt{b(x-c)}+a$의 정의역은 $\{x|x\le c\}$, 치역은 $\{y|y\ge a\}$이고 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 제1, 2사분면을 지난다.

답 ③

74 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$

$=\dfrac{a(x+c)+b-ac}{x+c}$

$=\dfrac{b-ac}{x+c}+a$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=-c$, $y=a$이므로

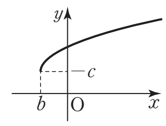
$c<0$, $a>0$

$f(0)=\dfrac{b}{c}>0$이므로 $b<0$

함수 $g(x)=\sqrt{a(x-b)}-c$에서

$a>0$, 정의역은 $\{x|x\ge b\}$, 치역은 $\{y|y\ge-c\}$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



답 ②

75 함수 $f(x)=\sqrt{x+5}+a$의

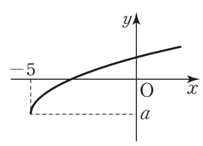
정의역은 $\{x|x\geq-5\}$, 치역은 $\{y|y\geq a\}$

(i) $a\geq0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1, 2사분면만 지난다.

(ii) $a<0$인 경우

$f(0)=\sqrt{5}+a>0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1, 2, 3사분면을 지난다.



즉, $-\sqrt{5}<a<0$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$-\sqrt{5}<a<0$

따라서 구하는 정수 a는 -2, -1로 2개이다.

답 ②

76 함수 $f(x)=-\sqrt{6-x}+a$의

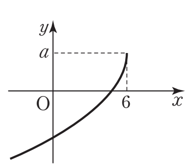
정의역은 $\{x|x\leq6\}$, 치역은 $\{y|y\leq a\}$

(i) $a\leq0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프는 제3, 4사분면만 지난다.

(ii) $a>0$인 경우

$f(0)=-\sqrt{6}+a<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1, 3, 4사분면을 지난다.



즉, $0<a<\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$0<a<\sqrt{6}$

따라서 구하는 정수 a는 1, 2이고, 그 합은 3이다.

답 ⑤

77 함수 $f(x)=\sqrt{a(x-2)}+b$에 대하여

(i) $a>0$인 경우

정의역은 $\{x|x\geq2\}$, 치역은 $\{y|y\geq b\}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 b의 값에 상관없이 제3사분면을 지나지 않는다.

(ii) $a<0$인 경우

정의역은 $\{x|x\leq2\}$, 치역은 $\{y|y\geq b\}$이므로

$f(0)=\sqrt{-2a}+b\geq0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

① $(-4,\ 1)$의 경우

$\sqrt{8}+1\geq0$이므로 조건을 만족시킨다.

② $(-3,\ -2)$의 경우

$\sqrt{6}-2\geq0$이므로 조건을 만족시킨다.

③ $(-2,\ -3)$의 경우

$\sqrt{4}-3=-1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

④ $(2,\ -3)$과 ⑤ $(3,\ 5)$는 (i)에 해당하므로 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키지 않는 순서쌍은 ③ $(-2,\ -3)$이다.

답 ③

78 $1\leq x\leq7$에서 함수 $y=\sqrt{4x-3}-2$는 증가하는 함수이므로

$x=7$일 때, $M=\sqrt{25}-2=3$

$x=1$일 때, $m=\sqrt{1}-2=-1$

따라서 $M+m=2$

답 ④

79 $x\geq-4$에서 함수 $y=\sqrt{5-x}-1$은 감소하는 함수이고 정의역에 의해 $-4\leq x\leq5$이므로

$x=5$일 때, $m=-1$

$x=-4$일 때, $M=\sqrt{9}-1=2$

따라서 $M+m=1$

답 ③

80 $x\geq-2$에서 함수 $y=-\sqrt{a(2-x)}+b$ $(a>0)$은 증가하는 함수이고 정의역에 의해 $-2\leq x\leq2$이므로

$x=-2$일 때, 최솟값 $m=-2\sqrt{a}+b=-1$ ⋯⋯ ㉠

또 함수의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$-\sqrt{a}+b=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=3$

따라서 $a+b=7$

답 ⑤

81 $-2\leq x\leq b$에서 함수 $y=-\sqrt{x+3}+a$는 감소하는 함수이므로

$x=-2$일 때, 최댓값 $M=-1+a=3,\ a=4$

$x=b$일 때, 최솟값 $m=-\sqrt{b+3}+4=1,\ \sqrt{b+3}=3,\ b=6$

따라서 $a+b=10$

답 10

82 (i) 함수 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 접하는 경우

$\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}x+k$

$x-2=\frac{1}{4}x^2+kx+k^2$

$x^2+4(k-1)x+4k^2+8=0$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

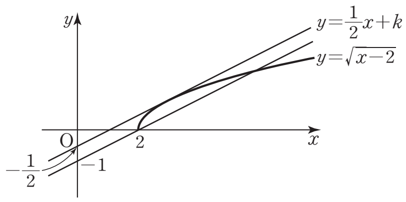
$\frac{D}{4}=4(k-1)^2-4k^2-8=0$

$-8k-4=0$

$k=-\frac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 점 (2, 0)을 지나는 경우

$0=1+k$, $k=-1$



(i), (ii)에서 함수 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는

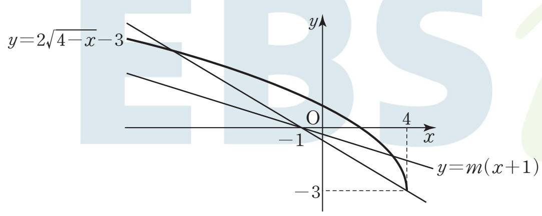
$-1\le k<-\frac{1}{2}$

답 $-1\le k<-\frac{1}{2}$

83 직선 $y=m(x+1)$은 m의 값에 관계없이 점 $(-1, 0)$을 항상 지나는 직선이고 m은 이 직선의 기울기이다. 함수 $y=2\sqrt{4-x}-3$의 그래프와 직선 $y=m(x+1)$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 m의 값은 음수이면서 직선 $y=m(x+1)$이 점 $(4, -3)$을 지날 때보다는 크거나 같아야 한다.

직선 $y=m(x+1)$이 점 $(4, -3)$을 지날 때,

$-3=5m$에서 $m=-\frac{3}{5}$



따라서 조건을 만족시키는 실수 m의 값의 범위는 $-\frac{3}{5}\le m<0$이고 m의 최솟값은 $-\frac{3}{5}$이다.

답 ④

84 (i) 함수 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접하는 경우

$\sqrt{2-x}=-x+k$

$2-x=x^2-2kx+k^2$

$x^2+(1-2k)x+k^2-2=0$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

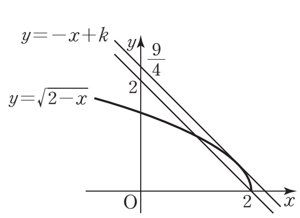
$D=(1-2k)^2-4k^2+8=0$

$-4k+9=0$

$k=\frac{9}{4}$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 (2, 0)을 지나는 경우

$0=-2+k$, $k=2$



그러므로 $g(k)=\begin{cases} 0 & \left(k>\frac{9}{4}\right) \\ 1 & \left(k<2 \text{ 또는 } k=\frac{9}{4}\right) \\ 2 & \left(2\le k<\frac{9}{4}\right) \end{cases}$

따라서

$g(0)+g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(20)$

$=1+1+2+0+0+0+\cdots+0$

$=4$

답 4

85 $f(x)=\sqrt{x+3}-1$, $g(x)=\sqrt{3(x+1)}+2$에 대하여

$(g\circ f)(6)=g(f(6))$

$=g(\sqrt{6+3}-1)$

$=g(2)$

$=\sqrt{3(2+1)}+2$

$=5$

답 ③

86 $(f\circ g)(a)=f(g(a))=3$에서 $g(a)=k$라 하면

$f(k)=3$이므로

$\sqrt{k+2}=3$, $k=7$

즉, $g(a)=7$이므로

$\sqrt{a}-2=7$, $\sqrt{a}=9$

$a=81$

$(g\circ f)(b)=g(f(b))=3$에서 $f(b)=t$라 하면

$g(t)=3$이므로

$\sqrt{t}-2=3$, $\sqrt{t}=5$, $t=25$

즉, $f(b)=25$이므로

$\sqrt{b+2}=25$, $b+2=625$

$b=623$

따라서 $a+b=81+623=704$

답 704

87 함수 $f(x)=-\sqrt{x-2}+3$의

정의역은 $\{x|x\ge 2\}$, 치역은 $\{y|y\le 3\}$

함수 $g(x)=\sqrt{a-x}+1$의

정의역은 $\{x|x\le a\}$, 치역은 $\{y|y\ge 1\}$

합성함수 $y=(g\circ f)(x)$가 정의되기 위해서는 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합이 되어야 한다.

즉, $\{y|y\le 3\}\subset\{x|x\le a\}$

따라서 $a\ge 3$

답 $a\ge 3$

88 $f(4)=-1$에서

$-\sqrt{4a+b}+1=-1$

$\sqrt{4a+b}=2$

$4a+b=4$ ⋯⋯ ㉠

$f^{-1}(-3)=10$에서 $f(10)=-3$

$-\sqrt{10a+b}+1=-3$

$\sqrt{10a+b}=4$

$10a+b=16$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-4$

따라서 $a+b=-2$

답 ①

89 $y=-\sqrt{x-2}+3$에서

$y-3=-\sqrt{x-2}$

$(y-3)^2=x-2$

$x=(y-3)^2+2$ ...... ㉠

㉠의 x와 y를 서로 바꾸면

$y=(x-3)^2+2$

함수 $y=-\sqrt{x-2}+3$의 치역이 $\{y|y\le 3\}$이므로

그 역함수 $y=(x-3)^2+2$의 정의역은 $\{x|x\le 3\}$이다.

즉, $y=(x-3)^2+2\ (x\le 3)$

따라서 $a=-3,\ b=2,\ c=3$이므로

$a+b+c=2$

답 ④

90 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$f(x)=x$에서

$\sqrt{6x+8}-2=x$

$\sqrt{6x+8}=x+2$

$6x+8=x^2+4x+4$

$x^2-2x-4=0$ ...... ㉠

㉠의 두 실근을 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-4$

$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta)$ 또는 $\mathrm{A}(\beta,\ \beta)$, $\mathrm{B}(\alpha,\ \alpha)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=2(\beta-\alpha)^2$

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=4+16=20$

따라서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

답 ③

91 $((f\circ g^{-1})^{-1}\circ g)(1)$

$=(g\circ f^{-1}\circ g)(1)$

$=g(f^{-1}(g(1)))$

$=g(f^{-1}(1))$

$f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$-\sqrt{3-k}+3=1$

$\sqrt{3-k}=2$

$3-k=4$

$k=-1$

따라서

$g(f^{-1}(1))=g(-1)=\dfrac{-8}{-4}=2$

이므로

$((f\circ g^{-1})^{-1}\circ g)(1)=2$

답 ④

92 $(f\circ(g\circ f^{-1})^{-1})(5)=(f\circ f\circ g^{-1})(5)$

한편, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-1+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$f=f^{-1}$, 즉 $f\circ f=f\circ f^{-1}=I$ (I는 항등함수)

그러므로 $(f\circ f\circ g^{-1})(5)=g^{-1}(5)$

$g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$이므로

$\sqrt{2k-2}+1=5$

$\sqrt{2k-2}=4$

$2k-2=16$

$k=9$

따라서 $(f\circ(g\circ f^{-1})^{-1})(5)=9$

답 ②

93 함수 f는 일대일대응이므로 역함수 f^{-1}가 존재한다.

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=a$에서

$f(a)=f^{-1}(a)$

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$f(a)=a$에서

$\sqrt{a-1}+1=a$

$\sqrt{a-1}=a-1$

$a-1=a^2-2a+1$

$a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0$

$a=1$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 3이다.

답 ①

94 세 점 A, B, C의 좌표를 구해 보자.

$f(x)=2\sqrt{x+2}-2=0$에서 $x=-1$이므로

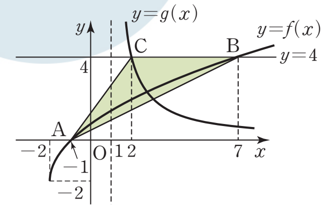
$\mathrm{A}(-1,\ 0)$

$f(x)=2\sqrt{x+2}-2=4$에서 $x=7$이므로

$\mathrm{B}(7,\ 4)$

$g(x)=\dfrac{4}{x-1}=4$에서 $x=2$이므로

$\mathrm{C}(2,\ 4)$



따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(7-2)\times 4=10$

답 ①

95 점 A의 좌표를 구해 보자.

$f(x)=-4\sqrt{x-2}+3=1$에서

$4\sqrt{x-2}=2$

$\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}$

$x-2=\frac{1}{4}$

$x=\frac{9}{4}$

즉, $A\left(\frac{9}{4}, 1\right)$

세 점 B, C, D의 좌표를 구해 보자.

$g(x)=2\sqrt{x-2}-1=1$에서 $x=3$이므로

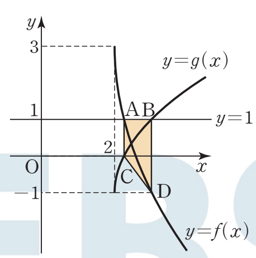
$B(3, 1)$

$g\left(\frac{9}{4}\right)=2\sqrt{\frac{9}{4}-2}-1=0$에서

$C\left(\frac{9}{4}, 0\right)$

$f(3)=-4\sqrt{3-2}+3=-1$에서

$D(3, -1)$



사각형 ACDB의 넓이는

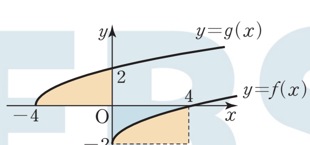
$\frac{1}{2}\times(1+2)\times\left(3-\frac{9}{4}\right)=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{8}$

따라서 $p=8$, $q=9$이므로

$p+q=17$

답 17

96 함수 $f(x)=\sqrt{x}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 함수 $g(x)=\sqrt{x+4}$의 그래프와 겹쳐진다.



따라서 구하는 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=4$, $y=-2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$4\times2-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$

그러므로 $p=3$, $q=16$이므로

$p+q=19$

답 19

97 $f(x)=2\sqrt{x+3}=0$에서 $x=-3$이므로

$A(-3, 0)$

두 함수 f, f^{-1}가 서로 역함수이므로

$B(0, -3)$

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점이므로

$2\sqrt{x+3}=x$에서

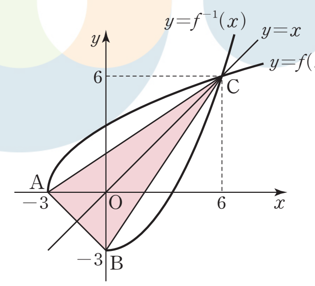
$4x+12=x^2$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$

$x=-2$ 또는 $x=6$

그런데 점 C는 제1사분면 위의 점이므로 $C(6, 6)$이다.



$\overline{AB}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은 $y=-x-3$

점 $C(6, 6)$과 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6+6+3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{15}{\sqrt{2}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{15}{\sqrt{2}}=\frac{45}{2}$

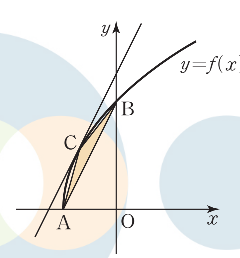
답 ⑤

98 $f(x)=2\sqrt{a(x+a)}=0$에서 $x=-a$이므로

$A(-a, 0)$

$f(0)=2a$이므로 $B(0, 2a)$

직선 AB의 기울기와 직선 $y=2x+b$의 기울기가 모두 2이므로 두 직선은 서로 평행하다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+b$가 접해야 하므로

$2x+b=2\sqrt{a(x+a)}$에서

$4x^2+4bx+b^2=4(ax+a^2)$

$4x^2+4(b-a)x+b^2-4a^2=0$ ...... ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4(b-a)^2-4b^2+16a^2=0$

$8ab=20a^2$

$a>0$이므로 $b=\frac{5}{2}a$

이때 $y=2x+b=2x+\frac{5}{2}a$이므로 $4x-2y+5a=0$

삼각형 ABC의 밑변을 선분 AB라 하면 높이 h는 점 $A(-a,\ 0)$과 직선 $4x-2y+5a=0$ 사이의 거리와 같다.

$\overline{AB}=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}a$,

$h=\frac{|-4a+5a|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{a}{2\sqrt{5}}$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}a\times\frac{a}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{4},\ a^2=1$

$a>0$이므로 $a=1$이고 $b=\frac{5}{2}$

따라서 $a+b=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$

답 ⑤

서술형 완성하기

본문 98쪽

01 $-2<x\le-1$ 또는 $2\le x<5$ **02** $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3}$

03 $a=-2,\ b=-3$ **04** $(4,\ -10),\ (-4,\ 10)$

05 $-2,\ 22$ **06** 10

01 $x^2-x-2\ge0$에서

$(x+1)(x-2)\ge0$

$x\le-1$ 또는 $x\ge2$ …… ㉠ …… ❶

$10+3x-x^2>0$에서

$x^2-3x-10<0,\ (x+2)(x-5)<0$

$-2<x<5$ …… ㉡ …… ❷

㉠, ㉡을 모두 만족시켜야 하므로 구하는 x의 값의 범위는

$-2<x\le-1$ 또는 $2\le x<5$ …… ❸

답 $-2<x\le-1$ 또는 $2\le x<5$

단계	채점 기준	비율
❶	$x^2-x-2\ge0$임을 밝히고 부등식의 해를 구한 경우	30 %
❷	$10+3x-x^2>0$임을 밝히고 부등식의 해를 구한 경우	40 %
❸	x의 값의 범위를 구한 경우	30 %

02 $y=\frac{6x+1}{9x-3}=\frac{6\left(x-\frac{1}{3}\right)+3}{9\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}+\frac{2}{3}$ …… ❶

그러므로 함수 $y=\frac{6x+1}{9x-3}$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼, y축으로 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

…… ❷

따라서 $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3}$ …… ❸

답 $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$y=\frac{6x+1}{9x-3}$을 점근선을 보여주는 함수식으로 변환한 경우	50 %
❷	평행이동을 설명한 경우	30 %
❸	$a,\ b$의 값을 구한 경우	20 %

03 $f(1)=\frac{3+a}{2+b}=-1$에서

$3+a=-2-b,\ a=-b-5$ …… ❶

두 함수 $y=f(x),\ y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 무수히 많기 위해서는 $f=f^{-1}$이어야 한다. …… ❷

$y=\frac{3x+a}{2x+b}$에서 $3x+a=y(2x+b)$

$(2y-3)x=-by+a$

$x=\frac{-by+a}{2y-3}$ …… ㉠

㉠에서 x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{-bx+a}{2x-3}$ …… ❸

$f^{-1}(x)=\frac{-bx+a}{2x-3}=\frac{3x+a}{2x+b}=f(x)$

따라서 $b=-3$이고, $a=-(-3)-5=-2$ …… ❹

답 $a=-2,\ b=-3$

단계	채점 기준	비율
❶	$a,\ b$의 관계식을 구한 경우	20 %
❷	$f=f^{-1}$임을 서술한 경우	20 %
❸	역함수를 구한 경우	40 %
❹	$a,\ b$의 값을 구한 경우	20 %

다른 풀이

❸의 역함수 구하는 과정에 대한 다른 풀이

$$f(x)=\frac{3x+a}{2x+b}=\frac{3\left(x+\frac{b}{2}\right)+a-\frac{3b}{2}}{2\left(x+\frac{b}{2}\right)}=\frac{a-\frac{3b}{2}}{2\left(x+\frac{b}{2}\right)}+\frac{3}{2}$$

$f=f^{-1}$가 성립하기 위해서는 두 점근선의 교점 $\left(-\frac{b}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이 직선 $y=x$ 위에 있어야 하므로

$\frac{3}{2}=-\frac{b}{2},\ b=-3$

04 $f(x)=a\sqrt{6-x}+b$

(i) $a>0$인 경우

함수 f는 감소하는 함수이므로

$f(-3)=3a+b=2$ …… ㉠

$f(2)=2a+b=-2$ …… ㉡ …… ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-10$이므로 …… ❷

구하는 순서쌍은 $(4,\ -10)$

(ii) $a<0$인 경우

함수 f는 증가하는 함수이므로

$f(-3)=3a+b=-2$ ...... ㉢

$f(2)=2a+b=2$ ...... ㉣ ...... ❸

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-4,\ b=10$이므로 ...... ❹

구하는 순서쌍은 $(-4,\ 10)$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍은

$(4,\ -10),\ (-4,\ 10)$ ...... ❺

답 $(4,\ -10),\ (-4,\ 10)$

단계	채점 기준	비율
❶	$a>0$일 때의 방정식을 세운 경우	30 %
❷	❶의 해를 구한 경우	15 %
❸	$a<0$일 때의 방정식을 세운 경우	30 %
❹	❸의 해를 구한 경우	15 %
❺	순서쌍 $(a,\ b)$를 모두 구한 경우	10 %

05 $(g\circ f)(a)=g(f(a))=6$

$f(a)=k$라 하면 $g(k)=6$

$g(k)=\frac{3}{2}(k-1)^2=6$에서

$(k-1)^2=4$

$k=-1$ 또는 $k=3$ ...... ❶

(i) $k=-1$인 경우

$f(a)=\sqrt{a+3}-2=-1$

$\sqrt{a+3}=1,\ a=-2$ ...... ❷

(ii) $k=3$인 경우

$f(a)=\sqrt{a+3}-2=3$

$\sqrt{a+3}=5,\ a=22$ ...... ❸

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 $-2,\ 22$이다. ...... ❹

답 $-2,\ 22$

단계	채점 기준	비율
❶	$g(k)=6$을 만족시키는 k의 값을 구한 경우	30 %
❷	$k=-1$일 때의 a의 값을 구한 경우	30 %
❸	$k=3$일 때의 a의 값을 구한 경우	30 %
❹	a의 값을 모두 구한 경우	10 %

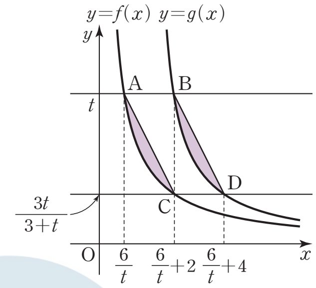
06 $f(x)=\frac{6}{x}=t$에서 $x=\frac{6}{t}$이므로 $\mathrm{A}\left(\frac{6}{t},\ t\right)$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $\mathrm{B}\left(\frac{6}{t}+2,\ t\right)$

$$f\left(\frac{6}{t}+2\right)=\frac{6}{\frac{6}{t}+2}=\frac{6}{\frac{6+2t}{t}}=\frac{6t}{6+2t}=\frac{3t}{3+t}$$

이므로 $\mathrm{C}\left(\frac{6}{t}+2,\ \frac{3t}{3+t}\right),\ \mathrm{D}\left(\frac{6}{t}+4,\ \frac{3t}{3+t}\right)$ ...... ❶

다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 AB, CD로 둘러싸인 부분의 넓이는 사각형 ACDB의 넓이와 같다. ...... ❷



(사각형 ACDB의 넓이)$=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{BC}}=8$

에서 $\overline{\mathrm{BC}}=4$이므로 ...... ❸

$t-\frac{3t}{3+t}=4,\ \frac{t^2}{3+t}=4$

$t^2-4t-12=0$

$(t+2)(t-6)=0$

$t>0$이므로 $t=6$ ...... ❹

그러므로 $\mathrm{A}(1,\ 6),\ \mathrm{B}(3,\ 6),\ \mathrm{C}(3,\ 2),\ \mathrm{D}(5,\ 2)$

함수 $h(x)=a\sqrt{5-x}+b$의 그래프가 두 점 A, D를 지나므로

$h(5)=b=2$

$h(1)=2a+b=6,\ 2a+2=6,\ a=2$ ...... ❺

따라서 $t=6,\ a=2,\ b=2$이므로

$t+a+b=10$ ...... ❻

답 10

단계	채점 기준	비율
❶	A, B, C, D의 좌표를 t로 나타낸 경우	20 %
❷	평행이동에 따른 넓이 상황을 서술한 경우	10 %
❸	선분 BC의 길이를 구한 경우	20 %
❹	t의 값을 구한 경우	20 %
❺	$a,\ b$의 값을 구한 경우	20 %
❻	$t+a+b$의 값을 구한 경우	10 %

내신 + 수능 고난도 도전

본문 99~100쪽

01 163 **02** ① **03** ③ **04** ⑤ **05** ①
06 7 **07** ① **08** 256

01 x가 3 이상 10 이하의 자연수일 때,

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{4x-2}{(x^2-2x)(x^2-1)}\\&=\frac{4x-2}{(x^2-1)-(x^2-2x)}\left(\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2-1}\right)\\&=\frac{4x-2}{2x-1}\left\{\frac{1}{x(x-2)}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right\}\\&=\frac{2}{x(x-2)}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\\&=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\end{aligned}$$

이므로

$f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(10)$

$=\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$\quad-\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{11}$

$=\frac{5}{9}+\frac{1}{11}=\frac{64}{99}$

따라서 $p=99$, $q=64$이므로

$p+q=163$

답 163

02 $\dfrac{\frac{1}{x\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=\dfrac{\frac{1}{x\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}}$

$=\dfrac{\frac{1}{x\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}$

$=\dfrac{\frac{1}{x\sqrt{x}+1}}{\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{x-1}}$

$=\dfrac{\frac{1}{x\sqrt{x}+1}}{\frac{x\sqrt{x}-1}{x-1}}$

$=\dfrac{x-1}{(x\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}-1)}$

$=\dfrac{x-1}{x^3-1}$

$=\dfrac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

$x=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$에서 $x+\frac{1}{2}=\sqrt{2}$

$x^2+x+\frac{1}{4}=2$, $x^2+x=\frac{7}{4}$

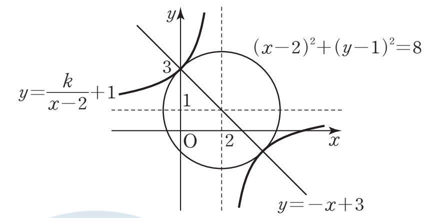
따라서 $\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{\frac{7}{4}+1}=\dfrac{4}{11}$

답 ①

03 조건 (나)에서 함수 $y=\dfrac{k}{x-a}+b$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(2, 1)$이므로 $a=2$, $b=1$

함수 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$의 그래프는 두 직선 $y=x-1$, $y=-x+3$에 대하여 대칭이고 원과 함수 $y=\dfrac{k}{x-a}+b$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 교점은 원과 직선 $y=x-1$ 또는 $y=-x+3$의 교점과 같다.

그런데 조건 (가)에서 함수 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으므로 함수 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$의 그래프는 원과 직선 $y=-x+3$의 교점을 지난다.



원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선 $y=-x+3$의 교점의 좌표는 $(0, 3)$, $(4, -1)$이다.

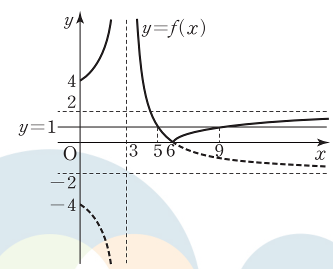
$3=\dfrac{k}{-2}+1$, $k=-4$

따라서 $a=2$, $b=1$, $k=-4$이므로

$a+b+k=-1$

답 ③

04 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 서로 다른 교점이 3개인 실수 t는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 서로 다른 교점이 1개인 정수 t는 0, 2, 3으로 3개이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점을 구하면

$3<x<6$일 때, $\dfrac{6}{x-3}-2=1$에서

$\dfrac{6}{x-3}=3$, $x-3=2$, $x=5$

$x>6$일 때, $-\dfrac{6}{x-3}+2=1$에서

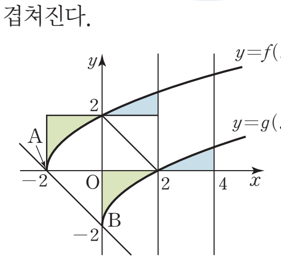
$\dfrac{6}{x-3}=1$, $x-3=6$, $x=9$

그러므로 교점의 x좌표의 합은 $5+9=14$이다. (참)

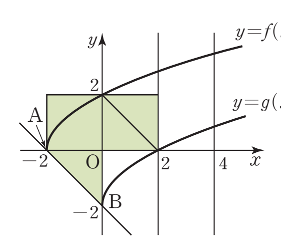
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

05 함수 $g(x)=\sqrt{2x}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 함수 $f(x)=\sqrt{2(x+2)}$의 그래프와 겹쳐진다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 같은 색으로 칠한 부분끼리의 넓이가 같으므로 $S-T$는 [그림 2]에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.

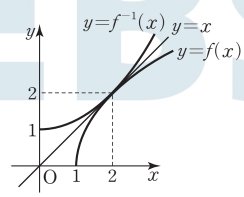
따라서 $S-T=2\times4+\frac{1}{2}\times2\times2=10$

답 ①

06 $2\sqrt{x-1}=x$에서

$4x-4=x^2$, $x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

이므로 함수 $f(x)=2\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=x$는 점 $(2,\ 2)$에서 접한다.



그러므로 구하는 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{4}{3}\right)=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로 $p+q=7$

답 7

07 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점 A는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이므로

$2\sqrt{x-1}+1=x$, $2\sqrt{x-1}=x-1$

$4x-4=x^2-2x+1$

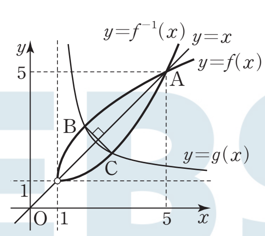
$x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$

$x=1$ 또는 $x=5$

$x>1$이므로 $\mathrm{A}(5,\ 5)$

함수 $g(x)=\frac{a}{x-1}+1\ (x>1)$의 그래프는 두 점근선의 교점인 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 B, C도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



두 직선 OA와 BC가 서로 수직이고 $\overline{\mathrm{OA}}=5\sqrt{2}$이므로

사각형 OCAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{BC}}=5$

에서 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}$

이때 $\mathrm{B}(b,\ c)$라 하면 $\mathrm{C}(c,\ b)$이고 $c-b=1$

즉, $c=b+1$이므로 $\mathrm{B}(b,\ b+1)$

점 B가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있으므로

$b+1=2\sqrt{b-1}+1$, $b=2\sqrt{b-1}$

$b^2=4b-4$, $b^2-4b+4=0$, $(b-2)^2=0$

$b=2$

점 $\mathrm{B}(2,\ 3)$이 함수 $y=g(x)$의 그래프 위에 있으므로

$3=a+1$, $a=2$

즉, $g(x)=\frac{2}{x-1}+1\ (x>1)$

따라서

$(f\circ g)(5)=f(g(5))=f\left(\frac{3}{2}\right)=2\times\sqrt{\frac{1}{2}}+1=\sqrt{2}+1$

답 ①

08 원의 중심을 $\mathrm{E}(a,\ b)$라 하면 함수 $f(x)=\frac{k}{x-a}+b$의 그래프의 두 점근선의 교점은 E이다.

함수 $f(x)=\frac{k}{x-a}+b$의 그래프는 점 E에 대하여 대칭이므로 선분 AD의 중점과 선분 BC의 중점은 E이다.

그러므로 네 점 A, B, C, D의 좌표를

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$, $\mathrm{D}(x_4,\ y_4)$라 하면

$\frac{x_1+x_4}{2}=a$, $\frac{y_1+y_4}{2}=b$

$\frac{x_2+x_3}{2}=a$, $\frac{y_2+y_3}{2}=b$

이때 조건 (가)에서

$x_1+x_2+x_3+x_4=2a+2a=12$이므로 $a=3$

$y_1+y_2+y_3+y_4=2b+2b=4$이므로 $b=1$

즉, $f(x)=\frac{k}{x-3}+1$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 직선 $y=x-2$, $y=-x+4$에 대하여 대칭이므로 직선 AB의 기울기는 1, 직선 AC의 기울기는 -1이고, 직선 AB와 직선 $y=-x+4$의 교점이 M이다.

조건 (나)에서 $\mathrm{M}(0,\ 4)$

$\overline{\mathrm{AM}}=t$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=2t$이고

조건 (다)에서 $\overline{\mathrm{AC}}=6t$

선분 BC가 원의 지름이므로 직각삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$

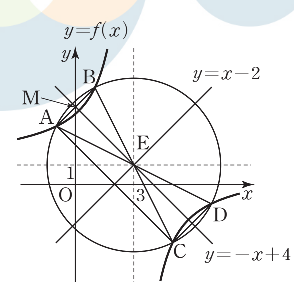
$(2t)^2+(6t)^2=(2\times2\sqrt{5})^2$, $t^2=2$

직선 AB의 방정식은 $y=x+4$이므로 점 A의 좌표를 $(s,\ s+4)$라 하면

$\overline{\mathrm{AM}}^2=2=s^2+s^2$에서 $s=\pm1$이므로 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$

점 A는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(-1)=\frac{k}{-4}+1=3$, $k=-8$



따라서 $a=3$, $b=1$, $k=-8$이므로

$(a+b)\times k^2=4\times64=256$

답 256

VI. 경우의 수

14 순열과 조합

개념 확인하기 본문 103~105쪽

01 4	02 3	03 7	04 25	05 16
06 33	07 7	08 6	09 13	10 9
11 9	12 8	13 36	14 30	15 60
16 24	17 1	18 120	19 210	20 6
21 6	22 2	23 3	24 4	25 120
26 60	27 60	28 20	29 60	30 20
31 3	32 6	33 10	34 20	35 10
36 6	37 21	38 28	39 10	40 6
41 8	42 1	43 1	44 9	45 13
46 11	47 3	48 3, 4	49 84	50 10
51 4	52 40	53 30	54 80	55 74
56 10	57 10	58 4	59 6	60 1260
61 315	62 280			

01 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

답 4

02 (4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

답 3

03 구하는 경우의 수는 눈의 수의 합이 5가 되는 경우의 수와 10이 되는 경우의 수의 합이므로
$4+3=7$

답 7

04 $2\times25=50$에서 50 이하의 2의 배수는 25개이므로 구하는 경우의 수는 25이다.

답 25

05 $3\times16=48$에서 50 이하의 3의 배수는 16개이므로 구하는 경우의 수는 16이다.

답 16

06 50 이하의 2와 3의 최소공배수인 6의 배수는 $6\times8=48$에서 8개이므로 구하는 경우의 수는
$25+16-8=33$

답 33

07 $7\times7=49$에서 50 이하의 7의 배수는 7개이므로 구하는 경우의 수는 7이다.

답 7

08 $8\times6=48$에서 50 이하의 8의 배수는 6개이므로 구하는 경우의 수는 6이다.

답 6

09 7과 8의 최소공배수가 56이므로 50 이하의 7의 배수이면서 동시에 8의 배수인 자연수는 없다.
따라서 구하는 경우의 수는 $7+6=13$

답 13

10 주사위의 눈의 수 중 짝수는 2, 4, 6의 3개, 홀수는 1, 3, 5의 3개이므로 구하는 경우의 수는
$3\times3=9$

답 9

11 주사위의 눈의 수 중 소수는 2, 3, 5의 3개, 4의 약수는 1, 2, 4의 3개이므로 구하는 경우의 수는
$3\times3=9$

답 9

12 주사위의 눈의 수 중 3의 배수는 3, 6의 2개, 6의 약수는 1, 2, 3, 6의 4개이므로 구하는 경우의 수는
$2\times4=8$

답 8

13 a, b가 될 수 있는 수는 각각 6개이므로
$6\times6=36$

답 36

14 ${}_6P_2=6\times5=30$

답 30

15 ${}_5P_3=5\times4\times3=60$

답 60

16 ${}_4P_4=4\times3\times2\times1=24$

답 24

17 ${}_8P_0=1$

답 1

18 $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

답 120

19 $\frac{7!}{4!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=210$

답 210

20 $3!\times0!=(3\times2\times1)\times1=6$

답 6

21 ${}_{n}P_{3}=120=6\times5\times4$이므로 $n=6$

답 6

22 ${}_{5}P_{r}=20=5\times4$이므로 $r=2$

답 2

23 ${}_{n}P_{n}=n!$, $6=3!$이므로 $n=3$

답 3

24 ${}_{8}P_{r}=\frac{8!}{(8-r)!}=\frac{8!}{4!}$에서 $r=4$

답 4

25 ${}_{6}P_{3}=6\times5\times4=120$

답 120

26 일의 자리에 짝수 3개 중 1개를 먼저 선택한 후 나머지 5장의 카드 중에서 2장을 뽑아 백의 자리와 십의 자리를 채우면 된다.
따라서 구하는 짝수의 개수는
$3\times{}_{5}P_{2}=3\times5\times4=60$

답 60

27 일의 자리에 홀수 3개 중 1개를 먼저 선택한 후 나머지 5장의 카드 중에서 2장을 뽑아 백의 자리와 십의 자리를 채우면 된다.
따라서 구하는 홀수의 개수는
$3\times{}_{5}P_{2}=3\times5\times4=60$

답 60

28 일의 자리에 5를 먼저 선택한 후 나머지 5장의 카드 중에서 2장을 뽑아 백의 자리와 십의 자리를 채우면 된다.
따라서 구하는 5의 배수의 개수는
$1\times{}_{5}P_{2}=1\times5\times4=20$

답 20

29 백의 자리에 4, 5, 6 중 1개를 먼저 선택한 후 나머지 5장의 카드 중에서 2장을 뽑아 십의 자리와 일의 자리를 채우면 된다.
따라서 구하는 400 이상의 자연수의 개수는
$3\times{}_{5}P_{2}=3\times5\times4=60$

답 60

30 백의 자리에 1을 먼저 선택한 후 나머지 5장의 카드 중에서 2장을 뽑아 십의 자리와 일의 자리를 채우면 된다.
따라서 구하는 200 이하의 자연수의 개수는
$1\times{}_{5}P_{2}=1\times5\times4=20$

답 20

31 ${}_{3}C_{1}=3$

답 3

32 ${}_{4}C_{2}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

답 6

33 ${}_{5}C_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

답 10

34 ${}_{6}C_{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

답 20

35 ${}_{5}C_{3}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

답 10

36 ${}_{4}C_{2}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

답 6

37 ${}_{7}C_{2}=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

답 21

38 ${}_{8}C_{2}=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

답 28

39 ${}_{5}C_{3}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

답 10

40 ${}_{n}C_{2}=\frac{n(n-1)}{2}$이므로
$\frac{n(n-1)}{2}=15$에서
$n^2-n-30=0$
$(n+5)(n-6)=0$
$n=-5$ 또는 $n=6$
n은 자연수이므로 $n=6$

답 6

41 ${}_{n+2}C_2=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$이므로

$\frac{(n+2)(n+1)}{2}=45$에서

$n^2+3n-88=0$

$(n+11)(n-8)=0$

$n=-11$ 또는 $n=8$

n은 자연수이므로 $n=8$

답 8

42 ${}_7C_0=1$

답 1

43 ${}_7C_7=1$

답 1

44 ${}_9C_8={}_9C_{9-8}={}_9C_1=9$

답 9

45 ${}_{13}C_{12}={}_{13}C_{13-12}={}_{13}C_1=13$

답 13

46 ${}_nC_2={}_nC_{n-2}$이므로

${}_nC_{n-2}={}_nC_9$에서

$n-2=9$

따라서 $n=11$

답 11

47 ${}_9C_n={}_9C_{9-n}$이므로

${}_9C_{9-n}={}_9C_{n+3}$에서

$9-n=n+3$

따라서 $n=3$

답 3

48 ${}_6C_2+{}_6C_3={}_7C_n$에서

${}_6C_2+{}_6C_3={}_7C_3$이므로

$n=3$

${}_7C_3={}_7C_4$이므로

$n=4$

따라서 $n=3$ 또는 $n=4$

답 3, 4

49 ${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

답 84

50 ${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2}=10$

답 10

51 ${}_4C_3={}_4C_1=4$

답 4

52 ${}_5C_2\times{}_4C_1=\frac{5\times4}{2}\times4=10\times4=40$

답 40

53 ${}_5C_1\times{}_4C_2=5\times\frac{4\times3}{2}=5\times6=30$

답 30

54 ${}_9C_3-{}_4C_3={}_9C_3-{}_4C_1=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}-4=84-4=80$

답 80

55 ${}_9C_3-{}_5C_3={}_9C_3-{}_5C_2=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}-\frac{5\times4}{2}=84-10=74$

답 74

56 ${}_5C_2=\frac{5\times4}{2}=10$

답 10

57 ${}_5C_2=\frac{5\times4}{2}=10$

답 10

58 ${}_4C_1=4$

답 4

59 ${}_4C_2=\frac{4\times3}{2}=6$

답 6

60 ${}_9C_4\times{}_5C_3\times{}_2C_2={}_9C_4\times{}_5C_2\times{}_2C_2$

$=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}\times\frac{5\times4}{2}\times1$

$=126\times10\times1$

$=1260$

답 1260

61 ${}_9C_4\times{}_5C_4\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}={}_9C_4\times{}_5C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}$

$=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}\times5\times1\times\frac{1}{2}$

$=126\times5\times1\times\frac{1}{2}$

$=315$

답 315

62 ${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{3\times2\times1}$

$=84\times20\times1\times\frac{1}{6}$

$=280$

답 280

유형 완성하기

본문 106~117쪽

01 ⑤	**02** 6	**03** 5	**04** 12	**05** 14
06 9	**07** 20	**08** 12	**09** 40	**10** 12
11 36	**12** 18	**13** 5	**14** ③	**15** 24
16 ②	**17** ①	**18** 210	**19** ④	**20** 96
21 ⑤	**22** 720	**23** ⑤	**24** 216	**25** 480
26 144	**27** ②	**28** 288	**29** ④	**30** 720
31 ⑤	**32** 40	**33** ③	**34** ①	**35** ③
36 3600	**37** ②	**38** ③	**39** 72	**40** 9
41 6	**42** 10	**43** 5	**44** 70	**45** 2
46 9	**47** ⑤	**48** ③	**49** ⑤	**50** ⑤
51 ③	**52** ③	**53** ⑤	**54** ⑤	**55** ⑤
56 144	**57** ⑤	**58** ④	**59** ⑤	**60** 8
61 ②	**62** ⑤	**63** ②	**64** 5	**65** ③
66 ④	**67** 412	**68** ④	**69** 44	**70** 144
71 10	**72** ②	**73** 18	**74** ②	**75** ①
76 ①	**77** ②	**78** ⑤	**79** 490	

01 8의 약수는 1, 2, 4, 8

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합은 2 이상이므로 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(i) 눈의 수의 합이 2인 경우

(1, 1)의 1가지

(ii) 눈의 수의 합이 4인 경우

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(iii) 눈의 수의 합이 8인 경우

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지

(i)~(iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$1+3+5=9$

답 ⑤

02 4의 배수는 십의 자리와 일의 자리에 해당하는 두 자리의 수가 4의 배수이어야 한다.

(i) □12인 경우

312, 412의 2가지

(ii) □24인 경우

124, 324의 2가지

(iii) □32인 경우

132, 432의 2가지

(i)~(iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 4의 배수의 개수는

$2+2+2=6$

답 6

03 (i) 부분집합의 두 원소의 곱이 홀수인 경우

{1, 3}, {1, 5}, {3, 5}로 3개

(ii) 부분집합의 두 원소의 곱이 6의 배수인 경우

{2, 3}, {3, 4}로 2개

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 부분집합의 개수는

$3+2=5$

답 5

04 $3x+2y+z=15$에서

(i) $x=1$일 때, $2y+z=12$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

(1, 1, 10), (1, 2, 8), (1, 3, 6), (1, 4, 4), (1, 5, 2)의 5개

(ii) $x=2$일 때, $2y+z=9$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

(2, 1, 7), (2, 2, 5), (2, 3, 3), (2, 4, 1)의 4개

(iii) $x=3$일 때, $2y+z=6$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

(3, 1, 4), (3, 2, 2)의 2개

(iv) $x=4$일 때, $2y+z=3$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

(4, 1, 1)의 1개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$5+4+2+1=12$

답 12

05 $xy\le 6$에서

$x=1$일 때, y가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개

$x=2$일 때, y가 될 수 있는 수는 1, 2, 3의 3개

$x=3$일 때, y가 될 수 있는 수는 1, 2의 2개

$x=4$일 때, y가 될 수 있는 수는 1의 1개

$x=5$일 때, y가 될 수 있는 수는 1의 1개

$x=6$일 때, y가 될 수 있는 수는 1의 1개

따라서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$6+3+2+1+1+1=14$

답 14

06 $7\le 3x+y\le 10$에서

(i) $x=1$일 때, $4\le y\le 7$이므로 순서쌍 (x, y)는

(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7)의 4개

(ii) $x=2$일 때, $1\le y\le 4$이므로 순서쌍 (x, y)는

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)의 4개

(iii) $x=3$일 때, $-2\le y\le 1$이므로 순서쌍 (x, y)는

(3, 1)의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$4+4+1=9$

답 9

07 순서쌍 (x, y)에서 x가 될 수 있는 것은 4개, y가 될 수 있는 것은 5개이므로 구하는 집합 Z의 원소의 개수는

$4\times 5=20$

답 20

08 전개식의 각 항은 $x+y+z$에서 하나의 항을 선택하고, $a+b+c+d$에서 하나의 항을 선택해서 곱한 결과이므로

$3\times 4=12$

답 12

09 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 4, 5, 6이고,
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5이므로
(i) 백의 자리에 3 또는 5가 올 경우
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 홀수 2개
이때 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 4개
그러므로 이 경우의 홀수의 개수는
$2\times2\times4=16$
(ii) 백의 자리에 4 또는 6이 올 경우
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 홀수 3개
이때 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 4개
그러므로 이 경우의 홀수의 개수는
$2\times3\times4=24$
(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는
$16+24=40$

답 40

10 $72=2^3\times3^2$이므로 양의 약수의 개수는
$(3+1)(2+1)=12$

답 12

11 $2^3\times3^2\times5^2$의 양의 약수의 개수는
$(3+1)(2+1)(2+1)=36$

답 36

12 $600=2^3\times3\times5^2$, $4500=2^2\times3^2\times5^3$
이므로 600과 4500의 최대공약수는
$2^2\times3\times5^2$
따라서 구하는 양의 공약수의 개수는
$(2+1)(1+1)(2+1)=18$

답 18

13 $72^n=(2^3\times3^2)^n=2^{3n}\times3^{2n}$
이고, 72^n의 양의 약수의 개수가 176이므로
$(3n+1)(2n+1)=176$
$6n^2+5n-175=0$
$(n-5)(6n+35)=0$
n은 자연수이므로 $n=5$

답 5

14 B 영역에 칠할 수 있는 색은 5가지
A 영역에 칠할 수 있는 색은 B 영역에 칠한 색을 제외한 4가지
C 영역에 칠할 수 있는 색은 B 영역에 칠한 색을 제외한 4가지
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times4\times4=80$

답 ③

15 A 지점에서 B 지점으로 가는 도로의 수는 2
B 지점에서 C 지점으로 가는 도로의 수는 3
C 지점에서 D 지점으로 가는 도로의 수는 2
D 지점에서 A 지점으로 가는 도로의 수는 2
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times3\times2\times2=24$

답 24

16 자신이 앉았던 자리에 다시 앉지 않도록 자리를 바꾸는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.

```
A   B    C    D
    A ── D ── C
B < C ── D ── A
    D ── A ── C
    A ── D ── B
C <        A ── B
    D  <
           B ── A
    A ── B ── C
D <        A ── B
    C  <
           B ── A
```

따라서 구하는 경우의 수는 9이다.

답 ②

17 가운데 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수는 5
양 끝 자리에 오는 문자를 택하는 경우의 수는 ${}_4P_2$
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times{}_4P_2=5\times4\times3=60$

답 ①

18 ${}_7P_3=7\times6\times5=210$

답 210

19 남학생으로 회장과 부회장을 뽑는 경우의 수는
${}_4P_2=4\times3=12$
여학생으로 회장과 부회장을 뽑는 경우의 수는
${}_5P_2=5\times4=20$
따라서 구하는 경우의 수는
$12+20=32$

답 ④

20 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4개
나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 숫자이므로 구하는 네 자리 자연수의 개수는
$4\times{}_4P_3=4\times4\times3\times2=96$

답 96

21 a와 e를 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 나열하는 경우의 수는
$4!=24$

이때 a와 e가 묶음 안에서 자리를 바꾸는 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

$4!\times 2=24\times 2=48$

답 ⑤

22 남학생 3명을 한 묶음으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

이때 남학생 3명이 한 묶음 안에서 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5!\times 3!=120\times 6=720$

답 720

23 같은 색의 상의를 각각 한 묶음으로 생각하여 3개를 일렬로 거는 경우의 수는

$3!=6$

이때 각 색깔 별 옷의 묶음 안에서 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\times 2!\times 2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$3!\times(2!\times 2!\times 2!)=6\times 8=48$

답 ⑤

24 (i) a, b, c가 모두 이웃하는 경우

a, b, c를 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

이때 a, b, c가 한 묶음 안에서 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

그러므로 이 경우의 수는

$4!\times 3!=24\times 6=144$

(ii) d, e, f가 모두 이웃하는 경우

(i)에서와 같은 방법으로 144

(iii) a, b, c와 d, e, f가 각각 이웃하는 경우

$2!\times 3!\times 3!=72$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$144+144-72=216$

답 216

25 4개의 문자 a, b, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

4개의 문자의 양 끝과 사이사이에 2개의 숫자 1, 2를 나열하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$4!\times {}_5P_2=24\times 20=480$

답 480

26 남학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

남학생 3명의 양 끝과 사이사이에 여학생 4명을 세우는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$3!\times 4!=6\times 24=144$

답 144

27 학생이 앉지 않는 빈 의자 5개를 일렬로 두고 빈 의자 5개의 양 끝과 사이사이에 학생이 1명씩 앉는 의자 3개를 놓으면 되므로

${}_6P_3=6\times 5\times 4=120$

답 ②

28 a와 b를 한 묶음으로 생각하고 ab, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!\times 3!=2\times 6=12$

ab, c, d의 양 끝과 사이사이에 1, 2, 3, 4를 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$(2!\times 3!)\times 4!=12\times 24=288$

답 288

29 (i) 일의 자리에 0이 오는 경우

나머지 세 자리에는 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택해 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 짝수의 개수는

${}_4P_3=4\times 3\times 2=24$

(ii) 일의 자리에 2 또는 4가 오는 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개이고, 나머지 두 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자 중 2개를 택해 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 짝수의 개수는

$2\times 3\times {}_3P_2=2\times 3\times 3\times 2=36$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$24+36=60$

답 ④

30 양 끝자리에 어른 3명 중 2명이 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times 2=6$

이때 나머지 5명이 자리에 앉는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3P_2\times 5!=6\times 120=720$

답 720

31 a와 b를 나열하는 경우의 수는 2

a와 b 사이에 4개의 숫자 중 2개를 선택해서 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times 3=12$

a, b와 그 사이의 숫자 2개를 모두 한 묶음으로 생각하고 나머지 숫자 2개와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times{}_4\mathrm{P}_2\times3!=2\times12\times6=144$

답 ⑤

32 (ⅰ) A□□□□의 경우

1, 2, 3, 4를 나열하는 경우의 수이므로

$4!=24$

(ⅱ) □A□□□의 경우

A의 오른쪽 세 자리 중 두 자리에 홀수 2개를 나열하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

이때 나머지 두 자리에 숫자 2, 4를 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

그러므로

${}_3\mathrm{P}_2\times2!=6\times2=12$

(ⅲ) □□A□□의 경우

A의 오른쪽에는 홀수를, 왼쪽에는 짝수를 나열하는 경우의 수는

$2!\times2!=4$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$24+12+4=40$

답 40

33 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

양 끝 모두에 여학생을 세우는 경우의 수는

$2!\times3!=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-12=108$

답 ③

34 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

양 끝 모두에 홀수가 오도록 나열하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2\times3!=6\times6=36$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-36=84$

답 ①

35 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

남학생 3명이 서로 이웃하지 않도록 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$2!\times3!=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-12=108$

답 ③

36 7개의 숫자와 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!$

3개의 문자 a, b, c가 서로 이웃하지 않도록 7개의 숫자와 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!\times{}_5\mathrm{P}_3$

따라서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}7!-4!\times{}_5\mathrm{P}_3&=4!\times(7\times6\times5-5\times4\times3)\\&=24\times150\\&=3600\end{aligned}$$

답 3600

37 $n(X)=3$, $n(Y)=5$이므로

X에서 Y로의 일대일함수의 개수는

$a={}_5\mathrm{P}_3=60$

X에서 Y로의 상수함수의 개수는

$b={}_5\mathrm{P}_1=5$

따라서 $a+b=65$

답 ②

38 $n(X)=n$이라 하면

X에서 X로의 일대일대응의 개수는

${}_n\mathrm{P}_n=n!=120$

$120=1\times2\times3\times4\times5=5!$

이므로 $n=5$

따라서 X에서 X로의 상수함수의 개수는

${}_5\mathrm{P}_1=5$

답 ③

39 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이다.

$f(1)$과 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=12$

$f(2)$와 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=6$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_4\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_2=12\times6=72$

답 72

40 ${}_9\mathrm{P}_r=n\times{}_8\mathrm{P}_{r-1}$에서

$$\begin{aligned}\frac{9!}{(9-r)!}&=n\times\frac{8!}{\{8-(r-1)\}!}\\&=n\times\frac{8!}{(9-r)!}\end{aligned}$$

따라서 $n=9$

답 9

41 ${}_n\mathrm{P}_5=6\times{}_n\mathrm{P}_3$에서

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-5)!}&=6\times\frac{n!}{(n-3)!}\\&=6\times\frac{n!}{(n-3)\times(n-4)\times(n-5)!}\end{aligned}$$

$(n-3)(n-4)=6$

$n^2-7n+12=6$

$n^2-7n+6=0$

$(n-1)(n-6)=0$

$n\geq5$이므로 $n=6$

답 6

42 ${}_{n}P_3+3\times{}_{n}P_2={}_{11}P_3$에서

$n(n-1)(n-2)+3n(n-1)=11\times10\times9$

$n(n-1)(n-2+3)=11\times10\times9$

$(n+1)n(n-1)=11\times10\times9$

n은 자연수이므로 $n=10$

답 10

43 ${}_{10}P_5={}_{9}P_r+r\times{}_{9}P_{r-1}$에서

$$\begin{aligned}\frac{10!}{5!}&=\frac{9!}{(9-r)!}+r\times\frac{9!}{\{9-(r-1)\}!}\\&=\frac{9!}{(9-r)!}+r\times\frac{9!}{(10-r)!}\\&=\frac{9!\times(10-r)}{(10-r)\times(9-r)!}+\frac{9!\times r}{(10-r)!}\\&=\frac{9!\times(10-r+r)}{(10-r)!}\\&=\frac{10!}{(10-r)!}\end{aligned}$$

$5=10-r$

따라서 $r=5$

답 5

44 ${}_{5}P_3=5\times4\times3=60$

${}_{5}C_3={}_{5}C_2=\frac{5\times4}{2}=10$

따라서 ${}_{5}P_3+{}_{5}C_3=60+10=70$

답 70

45 ${}_{8}C_{n-2}={}_{8}C_{2n+4}$ ······ ㉠

(i) ㉠에서 $n-2=2n+4$이면

$n=-6$

이는 n이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) ${}_{8}C_{n-2}={}_{8}C_{8-(n-2)}={}_{8}C_{10-n}$이므로 ㉠에서

${}_{8}C_{10-n}={}_{8}C_{2n+4}$

이때 $10-n=2n+4$이면

$n=2$

이는 n이 자연수라는 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $n=2$

답 2

46 ${}_{n}C_3=6(n-1)+{}_{n}C_2$에서

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=6(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}$ ······ ㉠

$n\geq3$이므로 ㉠의 양변을 $n-1$로 나누면

$\frac{n(n-2)}{6}=6+\frac{n}{2}$

$n(n-2)=36+3n$

$n^2-5n-36=0$

$(n+4)(n-9)=0$

n이 3 이상의 자연수이므로

$n=9$

답 9

47 ${}_{6}C_2=15$

답 ⑤

48 서로 다른 n개에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{n}C_2=\frac{n(n-1)}{2}$이므로

$\frac{n(n-1)}{2}=45$에서

$n^2-n-90=0$

$(n+9)(n-10)=0$

n이 2 이상의 자연수이므로

$n=10$

답 ③

49 (i) 뽑은 3장의 카드에 적혀 있는 세 수가 모두 홀수인 경우

홀수가 적혀 있는 카드가 6장이므로 구하는 경우의 수는

${}_{6}C_3=20$

(ii) 뽑은 3장의 카드에 적혀 있는 세 수가 홀수 1개, 짝수 2개인 경우

홀수가 적혀 있는 카드와 짝수가 적혀 있는 카드가 각각 6장씩이므로 구하는 경우의 수는

${}_{6}C_1\times{}_{6}C_2=6\times15=90$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$20+90=110$

답 ⑤

50 A, B를 제외한 8명 중에서 3명을 선출하고, A를 포함시키면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_{8}C_3=56$

답 ⑤

51 1학년 학생을 뺀 나머지 학생 중에서 2명을 택하는 경우의 수는

${}_{5}C_2=10$

1학년 학생 2명을 포함하여 4명이 일렬로 서는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times24=240$

답 ③

52 A, B를 제외한 남학생 3명 중에 1명을 택하는 경우의 수는

${}_{3}C_{1}=3$

C를 제외한 여학생 4명 중에 2명을 택하는 경우의 수는

${}_{4}C_{2}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times6=18$

답 ③

53 10명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_{3}=120$

남학생만으로 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{6}C_{3}=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-20=100$

답 ⑤

54 7개의 공 중에서 4개의 공을 택하는 경우의 수는

${}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}=35$

숫자 1이 적혀 있는 공과 숫자 2가 적혀 있는 공을 제외한 5개의 공 중에서 4개의 공을 택하는 경우의 수는

${}_{5}C_{4}={}_{5}C_{1}=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$35-5=30$

답 ⑤

다른 풀이

숫자 1이 적혀 있는 공을 포함하여 4개의 공을 택하는 경우의 수는

${}_{6}C_{3}=20$

숫자 2가 적혀 있는 공을 포함하여 4개의 공을 택하는 경우의 수는

${}_{6}C_{3}=20$

숫자 1이 적혀 있는 공과 숫자 2가 적혀 있는 공을 모두 포함하여 4개의 공을 택하는 경우의 수는

${}_{5}C_{2}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$20+20-10=30$

55 흰 공과 검은 공이 적어도 하나씩 포함되도록 꺼낸 4개의 공 중 흰 공과 검은 공의 개수를 순서쌍으로 나타내면

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$이다.

(i) 흰 공 1개와 검은 공 3개를 꺼내는 경우의 수는

$\quad{}_{4}C_{1}\times{}_{5}C_{3}=4\times10=40$

(ii) 흰 공 2개와 검은 공 2개를 꺼내는 경우의 수는

$\quad{}_{4}C_{2}\times{}_{5}C_{2}=6\times10=60$

(iii) 흰 공 3개와 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

$\quad{}_{4}C_{3}\times{}_{5}C_{1}=4\times5=20$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$40+60+20=120$

답 ⑤

다른 풀이

9개의 공 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{9}C_{4}=126$

흰 공만 4개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{4}C_{4}=1$

검은 공만 4개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{5}C_{4}=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$126-(1+5)=120$

56 흰 공 4개 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_{4}C_{1}=4$

검은 공 4개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{4}C_{2}=6$

택한 3개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times6\times6=144$

답 144

57 짝수 2, 4, 6, 8 중에서 서로 다른 2개를 택해 일의 자릿수와 십의 자릿수를 정하는 경우의 수는

${}_{4}C_{2}\times2!=6\times2=12$

나머지 6개의 숫자 중에서 서로 다른 2개를 택해 천의 자릿수와 백의 자릿수를 정하는 경우의 수는

${}_{6}C_{2}\times2!=15\times2=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times30=360$

답 ⑤

58 짝수 2, 4, 6, 8 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{4}C_{2}=6$

홀수 1, 3, 5, 7, 9 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{5}C_{2}=10$

택한 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$6\times10\times24=1440$

답 ④

59 A, B를 제외한 5명 중에서 2명을 택하는 경우의 수는

${}_{5}C_{2}=10$

택한 2명이 일렬로 서는 경우의 수는

$2!=2$

일렬로 선 2명의 양 끝과 사이의 세 곳에 A, B가 서는 경우의 수는

${}_{3}P_{2}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times2\times6=120$

답 ⑤

60 1이 적혀 있는 카드와 2가 적혀 있는 카드를 제외한 $(n-2)$장의 카드 중에서 2장의 카드를 택하는 경우의 수는

$${}_{n-2}C_2=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

이고, 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

이므로 1이 적혀 있는 카드와 2가 적혀 있는 카드를 포함한 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2}\times 24=12(n-2)(n-3)$$

따라서 $12(n-2)(n-3)=360$에서

$(n-2)(n-3)=30$

$n^2-5n-24=0$

$(n+3)(n-8)=0$

n이 자연수이므로

$n=8$

답 8

61 A, B를 제외한 8명 중에서 3명을 택하는 경우의 수는

$${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=8\times7$$

A, B를 묶어 한 명이라 생각하고 4명이 일렬로 서는 경우의 수는

$4!$

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$\begin{aligned}8\times7\times4!\times2&=\frac{2}{6\times5}\times8\times7\times6\times5\times4!\\&=\frac{1}{15}\times8!\end{aligned}$$

즉, $p=\frac{1}{15}$

답 ②

62 서로 다른 두 점은 하나의 직선을 결정하므로 9개의 점 중 두 점을 택하는 경우의 수는

${}_9C_2$

그런데 같은 직선 위의 점 중에서 두 점을 택하면 같은 직선이 만들어지므로 같은 직선 위의 점 중에서 두 점을 택하는 경우를 제외해야 한다.

따라서 구하는 직선의 개수는

$$\begin{aligned}{}_9C_2-({}_4C_2+{}_5C_2)+2&=36-(6+10)+2\\&=22\end{aligned}$$

답 ⑤

63 서로 다른 두 대각선의 교점은 서로 다른 네 꼭짓점에 의하여 결정된다.

따라서 팔각형의 대각선의 교점의 개수의 최댓값은

$${}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

답 ②

64 점 A_k 중 세 점 이상이 한 직선 위에 있는 경우가 없으면 임의의 두 점을 지나는 서로 다른 모든 직선의 개수는

${}_{10}C_2=45$

한 직선 위에 3개의 점이 있으면 서로 다른 직선의 개수는

${}_3C_2-1=2$만큼 줄어든다.

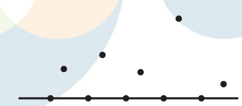
한 직선 위에 4개의 점이 있으면 서로 다른 직선의 개수는

${}_4C_2-1=5$만큼 줄어든다.

한 직선 위에 5개의 점이 있으면 서로 다른 직선의 개수는

${}_5C_2-1=9$만큼 줄어든다.

이때 $45-36=9$이고, 조건 (가)에서 세 점 이상을 지나는 직선의 개수가 1이므로 그림과 같이 5개의 점이 한 직선 위에 있다.



따라서 직선 l 위에 있는 점의 개수는 5이다.

답 5

65 6개의 점 중에서 세 점을 택하면 되므로 구하는 삼각형의 개수는

${}_6C_3=20$

답 ③

66 10개의 점 중에서 세 점을 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 세 점을 택하는 경우의 수는

$2\times{}_3C_3=2\times1=2$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 세 점을 택하는 경우의 수는

$2\times{}_4C_3=2\times4=8$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$120-(2+8)=110$

답 ④

67 15개의 점 중에서 세 점을 택하는 경우의 수는

${}_{15}C_3=455$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 세 점을 택하는 경우의 수는

$13\times{}_3C_3=13\times1=13$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 세 점을 택하는 경우의 수는

$3\times{}_5C_3=3\times10=30$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$455-(13+30)=412$

답 412

68 도형의 선으로 만들어지는 모든 사각형의 개수는 가로 방향의 선 3개 중에서 2개를 택하고, 세로 방향의 선 5개 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_2\times{}_5C_2=3\times10=30$

한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 8

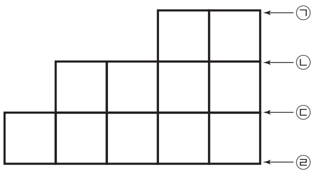
한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 3

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$30-(8+3)=19$

답 ④

69



(i) 가로선 ㉠㉡, 가로선 ㉠㉢, 가로선 ㉠㉣을 택하는 경우

각각의 경우에 직사각형의 개수는

${}_3C_2=3$

이므로 이 경우 직사각형의 개수는

$3\times3=9$

(ii) 가로선 ㉡㉢, 가로선 ㉡㉣을 택하는 경우

각각의 경우에 직사각형의 개수는

${}_5C_2=10$

이므로 이 경우 직사각형의 개수는

$10\times2=20$

(iii) 가로선 ㉢㉣을 택하는 경우

이 경우 직사각형의 개수는

${}_6C_2=15$

(i)~(iii)에서 구하는 직사각형의 개수는

$9+20+15=44$

답 44

70 도형의 선으로 만들어지는 모든 사각형의 개수는 가로 방향의 선 6개 중에서 2개를 택하고, 세로 방향의 선 6개 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_2\times{}_6C_2=15\times15=225$

색칠한 부분을 포함하는 직사각형의 개수는 색칠한 부분 위의 가로의 선 3개 중에서 1개, 색칠한 부분 아래의 가로의 선 3개 중에서 1개를 택하고, 세로의 선도 같은 방법으로 택하는 경우의 수와 같으므로

$({}_3C_1\times{}_3C_1)\times({}_3C_1\times{}_3C_1)=(3\times3)\times(3\times3)=81$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$225-81=144$

답 144

71 집합 Y의 원소 중 세 원소를 택하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 정해지므로 구하는 함수 f의 개수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

답 10

72 (i) $f(2)$, $f(4)$의 값은 공역 X의 원소 1, 3, 5 중에서 각각 택하면 되므로 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3\times3=9$

(ii) $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값은 공역 X의 원소 중 서로 다른 3개를 택하면 되므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$9\times10=90$

답 ②

73 (i) $f(1)$, $f(2)$의 값은 집합 Y의 원소 1, 2, 3 중에서 2개를 택하면 되므로 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

(ii) $f(4)$, $f(5)$의 값은 집합 Y의 원소 5, 6, 7, 8 중에서 2개를 택하면 되므로 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$3\times6=18$

답 18

74 6명의 학생 중 A팀이 될 2명을 정하는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

남은 4명의 학생 중 B팀이 될 2명을 정하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

남은 2명의 학생 중 C팀이 될 2명을 정하는 경우의 수는

${}_2C_2=1$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times6\times1=90$

답 ②

75 6명 중에서 2명을 택하여 2명의 조를 만드는 경우의 수는

${}_6C_2$

남은 4명 중에서 2명을 택하여 2명의 조를 만드는 경우의 수는

${}_4C_2$

남은 2명으로 2명의 조를 만드는 경우의 수는

${}_2C_2$

3개의 조가 모두 2명이므로 구하는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$

답 ①

76 A, B와 같은 조에 포함될 1명을 택하는 경우의 수는

${}_7C_1=7$

남은 6명을 3명씩 2개의 조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=20\times1\times\frac{1}{2}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$7\times10=70$

답 ①

77 6개 팀을 두 팀씩 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$

세 묶음 중 오른쪽에 배치할 한 묶음을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times3=45$

답 ②

78 6개 팀을 세 팀씩 두 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!}=20\times 1\times \frac{1}{2}=10$

각 묶음에서 부전승으로 진출할 한 팀을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times 3\times 3=90$

답 ⑤

79 각 상자에 적어도 2개의 공을 담아야 하므로 각 상자에 담기는 공의 개수를 순서쌍으로 나타내면

$(4,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 3,\ 2)$

뿐이다.

(i) 8개의 공을 4개, 2개, 2개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_4\times {}_4C_2\times {}_2C_2\times \frac{1}{2!}=70\times 6\times 1\times \frac{1}{2}=210$$

(ii) 8개의 공을 3개, 3개, 2개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_3\times {}_5C_3\times {}_2C_2\times \frac{1}{2!}=56\times 10\times 1\times \frac{1}{2}=280$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$210+280=490$

답 490

서술형 완성하기

본문 118쪽

01 85 **02** 30 **03** 48 **04** 60 **05** 48 **06** 540

01 $2^2\times 3^3\times 5^4$의 양의 약수 중 짝수는

$2^l\times 3^m\times 5^n$ $(l=1,\ 2,\ m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

꼴이므로 짝수의 개수는

$a=2\times 4\times 5=40$ …… ❶

$2^2\times 3^3\times 5^4$의 양의 약수 중 3의 배수는

$2^l\times 3^m\times 5^n$ $(l=0,\ 1,\ 2,\ m=1,\ 2,\ 3,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

꼴이므로 3의 배수의 개수는

$b=3\times 3\times 5=45$ …… ❷

따라서 $a+b=40+45=85$ …… ❸

답 85

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구한 경우	45 %
❷	b의 값을 구한 경우	45 %
❸	$a+b$의 값을 구한 경우	10 %

02 전체 경우의 수는 $6\times 6=36$ …… ❶

ab가 짝수인 사건을 A, $a+b$가 3의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 경우의 수는 $n(A\cup B)$이므로

$36-n((A\cup B)^C)=36-n(A^C\cap B^C)$

사건 $A^C\cap B^C$은 ab가 홀수이고 $a+b$가 3의 배수가 아닌 사건이다.

…… ❷

ab가 홀수인 경우의 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 5)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 3)$, $(3,\ 5)$,

$(5,\ 1)$, $(5,\ 3)$, $(5,\ 5)$

이고, 이 중에서 $a+b$가 3의 배수인 경우는

$(1,\ 5)$, $(3,\ 3)$, $(5,\ 1)$이므로

$n(A^C\cap B^C)=9-3=6$ …… ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$36-6=30$ …… ❹

답 30

단계	채점 기준	비율
❶	전체 경우의 수를 구한 경우	10 %
❷	여사건을 정확히 설명한 경우	40 %
❸	여사건의 경우의 수를 구한 경우	40 %
❹	조건을 만족시키는 경우의 수를 구한 경우	10 %

03 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이다. …… ❶

(i) $f(1)=3$, $f(4)=6$이거나 $f(1)=6$, $f(4)=3$인 경우

그 각각의 경우에 대해 $f(2)$와 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$이므로 이 경우 함수 f의 개수는

$2\times {}_4P_2=2\times 12=24$ …… ❷

(ii) $f(1)=4$, $f(4)=5$이거나 $f(1)=5$, $f(4)=4$인 경우

그 각각의 경우에 대해 $f(2)$와 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$이므로 이 경우 함수 f의 개수는

$2\times {}_4P_2=2\times 12=24$ …… ❸

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$24+24=48$ …… ❹

답 48

단계	채점 기준	비율
❶	일대일함수임을 밝힌 경우	10 %
❷	(i)의 경우의 수를 구한 경우	40 %
❸	(ii)의 경우의 수를 구한 경우	40 %
❹	조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구한 경우	10 %

04 (i) a, b, c가 모두 짝수인 경우

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 10 이하의 짝수 2, 4, 6, 8, 10에서 서로 다른 세 수를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_3=10$ …… ❶

(ii) a, b, c가 짝수 1개와 홀수 2개인 경우

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 10 이하의 짝수 2, 4, 6, 8, 10에서 한 수를 택하고, 10 이하의 홀수 1, 3, 5, 7, 9에서 서로 다른 두 수를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_1\times {}_5C_2=50$ …… ❷

(ⅰ), (ⅱ)에서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$10+50=60$ …… ❸

답 60

단계	채점 기준	비율
❶	a, b, c가 모두 짝수인 경우의 순서쌍의 개수를 구한 경우	40 %
❷	a, b, c가 짝수 1개와 홀수 2개인 경우의 순서쌍의 개수를 구한 경우	40 %
❸	모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한 경우	20 %

05 조건 (나)에서 집합 B의 원소 중 집합 X의 원소가 되는 두 원소를 정하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$ …… ❶

조건 (가)에서 집합 X는 집합 A의 부분집합이므로 집합 A의 원소 5, 6, 7 중에서 집합 X의 원소를 정하는 경우의 수는

$2^3=8$ …… ❷

따라서 구하는 모든 집합 X의 개수는

$6\times8=48$ …… ❸

답 48

단계	채점 기준	비율
❶	조건 (나)를 만족시키는 경우의 수를 구한 경우	40 %
❷	조건 (가)를 만족시키는 경우의 수를 구한 경우	40 %
❸	집합 X의 개수를 구한 경우	20 %

06 (ⅰ) 사용된 서로 다른 숫자의 개수가 5인 경우

구하는 자연수의 개수는

$5!=120$ …… ❶

(ⅱ) 사용된 서로 다른 숫자의 개수가 4인 경우

택한 다섯 개의 숫자를 a, a, b, c, d라 하면

숫자 a를 택하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

숫자 b, c, d를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3=4$

이웃한 세 숫자가 모두 다른 다섯 자리 자연수는

a□□a□, □a□□a, a□□□a의 형태이어야 하므로

구하는 자연수의 개수는

$5\times4\times(3\times3!)=360$ …… ❷

(ⅲ) 사용된 서로 다른 숫자의 개수가 3인 경우

택한 다섯 개의 숫자를 a, a, b, b, c라 하면

숫자 a, b를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

숫자 c를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

이웃한 세 숫자가 모두 다른 다섯 자리 자연수는

$abcab$, $bacba$의 형태이어야 하므로

구하는 자연수의 개수는

$10\times3\times2=60$ …… ❸

(ⅰ)~(ⅲ)에서 모든 다섯 자리 자연수의 개수는

$120+360+60=540$ …… ❹

답 540

단계	채점 기준	비율
❶	사용된 서로 다른 숫자의 개수가 5인 경우의 수를 구한 경우	10 %
❷	사용된 서로 다른 숫자의 개수가 4인 경우의 수를 구한 경우	40 %
❸	사용된 서로 다른 숫자의 개수가 3인 경우의 수를 구한 경우	40 %
❹	모든 다섯 자리 자연수의 개수를 구한 경우	10 %

내신 + 수능 고난도 도전

본문 119~120쪽

01 336 **02** ③ **03** 432 **04** ④ **05** ①
06 300 **07** ⑤ **08** ①

01 짝수 2, 4, 6, 8을 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

다음과 같이 나열된 짝수의 양 끝과 사이사이에 홀수가 들어갈 수 있는 자리를 만든다.

□짝수□짝수□짝수□짝수□

(ⅰ) 양 끝자리 중 한 자리에만 홀수가 있는 경우

홀수가 들어갈 끝자리를 선택하는 경우의 수는 2

선택된 끝자리에 들어갈 수 있는 홀수의 개수는 2

이때 나머지 1개의 홀수가 들어갈 수 있는 자리의 개수는 3

그러므로 이 경우의 수는

$4!\times2\times2\times3=24\times12=288$

(ⅱ) 양 끝자리에 모두 홀수가 있는 경우

양 끝자리에 홀수를 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

그러므로 이 경우의 수는

$4!\times2!=24\times2=48$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$288+48=336$

답 336

02 (ⅰ) A와 B가 앞줄에 앉는 경우

A와 B의 자리를 정하는 경우의 수는

$2!=2$

이때 C와 D는 3번, 5번 자리에 앉고 E는 4번 자리에 앉는 경우의 수는

$2!=2$

그러므로 이 경우의 수는

$2\times2=4$

(ii) A와 B가 뒷줄에 앉는 경우

A와 B는 3번, 4번 또는 4번, 5번 자리에 앉을 수 있으므로 A와 B의 자리를 정하는 경우의 수는

$2\times2!=4$

이때 뒷줄의 남은 한 좌석에 앉을 수 있는 사람은 C 또는 D이므로 경우의 수는

2

그리고 C와 D 중 남은 한 사람과 E가 앞줄에 앉는 경우의 수는

$2!=2$

그러므로 이 경우의 수는

$4\times2\times2=16$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+16=20$

답 ③

03 서로 다른 세 개의 꽃다발을 서로 다른 네 개의 선물상자 중 세 개의 선물상자를 택해 각각 하나씩 넣는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

이때 꽃다발을 넣지 않은 한 개의 선물상자에 세 권의 책 중 한 권을 택해서 넣는 경우의 수는

${}_3P_1=3$

그리고 책을 넣지 않은 세 개의 선물상자 중 두 개의 선물상자를 택해 남은 두 권의 책을 넣는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

${}_4P_3\times{}_3P_1\times{}_3P_2=24\times3\times6=432$

답 432

04 함수 f의 정의역과 공역이 같으므로 조건 (가)에서 함수 f는 일대일대응이고 함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재한다.

$f(f(1))=1$에서 $f(1)=f^{-1}(1)$

(i) $f(1)=1$인 경우

$f^{-1}(1)=1$이므로 1을 제외한 정의역의 원소 4개를 각각 일대일대응시키는 경우의 수는 ${}_4P_4=24$

그러므로 이 경우의 함수의 개수는 24

(ii) $f(1)=a$ $(a\neq1)$인 경우

$f^{-1}(1)=a$에서 $f(a)=1$

a가 될 수 있는 수는 2, 3, 4, 5의 4개

이때 1과 a를 제외한 정의역의 원소 3개를 각각 일대일대응시키는 경우의 수는 ${}_3P_3=6$

그러므로 이 경우의 함수의 개수는

$4\times{}_3P_3=4\times6=24$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$24+24=48$

답 ④

05 (i) $a<b<c$인 경우 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

서로 다른 8개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_8C_3=56$

(ii) $a<c<b$인 경우 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

서로 다른 8개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_8C_3=56$

(iii) $a<b=c$인 경우 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

서로 다른 8개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_8C_2=28$

(iv) $a=c<b$인 경우 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

서로 다른 8개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_8C_2=28$

(i)~(iv)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$56+56+28+28=168$

답 ①

다른 풀이

$a<b$, $a\le c$이므로

$a=1$일 때, 순서쌍 (b, c)의 개수는 7×8

$a=2$일 때, 순서쌍 (b, c)의 개수는 6×7

$a=3$일 때, 순서쌍 (b, c)의 개수는 5×6

⋮

$a=7$일 때, 순서쌍 (b, c)의 개수는 1×2

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+6\times7+7\times8$

$=2+6+12+20+30+42+56$

$=168$

06 공을 넣을 주머니 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

조건 (나)에서 택한 2개의 주머니에 넣는 공의 개수를 순서쌍으로 나타내면

(2, 4), (3, 3), (4, 2)

이므로 6개의 공을 넣는 경우의 수는

$${}_6C_2\times{}_4C_4+{}_6C_3\times{}_3C_3+{}_6C_4\times{}_2C_2=15+20+15=50$$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times50=300$

답 300

07 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중 3의 배수는 3뿐이다.

1과 4는 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수이고, 2와 5는 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수이다.

3으로 나누었을 때 나머지에 따라 세 집합

$A_0=\{3\}$, $A_1=\{1, 4\}$, $A_2=\{2, 5\}$

로 나타내기로 하자.

(i) 집합 A_0의 원소가 적힌 공 4개를 뽑는 경우

모두 3이 적힌 공을 뽑는 경우이므로 경우의 수는

$1\times1\times1\times1=1$

(ii) 집합 A_0의 원소가 적힌 공 2개와 집합 A_1의 원소가 적힌 공 1개, 집합 A_2의 원소가 적힌 공 1개를 뽑는 경우

상자를 정하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1=12$

공에 적힌 수를 정하는 경우의 수는

$1\times1\times2\times2=4$

즉, 구하는 경우의 수는

$12\times4=48$

(iii) 집합 A_0의 원소가 적힌 공 1개와 집합 A_1의 원소가 적힌 공 3개를 뽑는 경우

상자를 정하는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_3C_3=4$

공에 적힌 수를 정하는 경우의 수는

$1\times2\times2\times2=8$

즉, 구하는 경우의 수는

$4\times8=32$

(iv) 집합 A_0의 원소가 적힌 공 1개와 집합 A_2의 원소가 적힌 공 3개를 뽑는 경우

상자를 정하는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_3C_3=4$

공에 적힌 수를 정하는 경우의 수는

$1\times2\times2\times2=8$

즉, 구하는 경우의 수는

$4\times8=32$

(v) 집합 A_1의 원소가 적힌 공 2개와 집합 A_2의 원소가 적힌 공 2개를 뽑는 경우

상자를 정하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2=6$

공에 적힌 수를 정하는 경우의 수는

$2\times2\times2\times2=16$

즉, 구하는 경우의 수는

$6\times16=96$

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$1+48+32+32+96=209$

답 ⑤

08 한 문자를 5개의 칸에 써넣으면 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 조건 (나)에서 4회 사용하는 문자가 존재한다.

(i) 두 문자를 각각 4번씩 써넣는 경우

두 문자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$이고, 두 문자 A, B를 택할 때, 그림과 같이 두 가지 경우가 가능하다.

A	B	A	B
B	A	B	A

B	A	B	A
A	B	A	B

즉, 경우의 수는

$3\times2=6$

(ii) 세 문자를 각각 4번, 2번, 2번 써넣는 경우

4번 써넣을 문자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$이고, 택한 문자를 조건 (가)를 만족시키도록 써넣는 경우의 수는 2이다.

남은 칸에 4번 써넣은 문자를 제외한 문자 중 한 문자를 2번 써넣는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

나머지 한 문자는 빈칸에 써넣으면 된다.

즉, 경우의 수는

$3\times2\times6=36$

(iii) 세 문자를 각각 4번, 3번, 1번 써넣는 경우

4번 써넣을 문자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$이고, 택한 문자를 조건 (가)를 만족시키도록 써넣는 경우의 수는 2이다.

3번 써넣을 문자를 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$이고, 택한 문자를 남은 칸 중 3칸에 써넣는 경우의 수는

${}_4C_3=4$

나머지 한 문자는 빈칸에 써넣으면 된다.

즉, 경우의 수는

$3\times2\times2\times4=48$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$6+36+48=90$

답 ①