이책의

정답과 해설

수학 (하)

1 | 집합의 뜻과 표현

본책 8~21쪽

STEP 1 개념 마스터

0001 답 ○

0002 답 ×

0003 답 ×

0004 답 ×

0005 답 ○

0006 답 $1,\ 2,\ 5,\ 10$

0007 답 $2,\ 4,\ 6,\ 8$

0008 답 $\in$

0009 답 $\not\in$

0010 답 $\not\in$

0011 답 $\in$

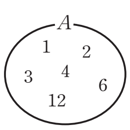
0012 답 $\in$

0013 답 $\not\in$

0014 답 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

0015 답 $A=\{x\,|\,x$는 12의 양의 약수$\}$

0016 답



0017 답 $\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28\}$

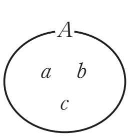
0018 답 $\{\mathrm{a},\ \mathrm{h},\ \mathrm{m},\ \mathrm{t}\}$

0019 답 $\{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots\}$

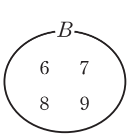
0020 답 $\{x\,|\,x$는 3의 양의 배수$\}$

0021 답 $\{x\,|\,x$는 18의 양의 약수$\}$

0022 답



0023 답



0024 답 무

0025 답 유

0026

$\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \cdots\}$: 무한집합 답 무

0027

1보다 작은 자연수는 존재하지 않으므로 공집합이며, 공집합은 유한집합이다. 답 유, 공

0028

ㄷ. $\{3\}$

ㄹ. $x^2=3$에서 $x=\pm\sqrt{3}$

따라서 자연수 x는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다.

ㅁ. 임의의 실수 x에 대하여 $|x|\geq 0$이므로 $|x|<0$인 정수 x는 존재하지 않는다.

따라서 주어진 집합은 공집합이다.

따라서 공집합인 것은 ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄹ, ㅁ

0029 답 0

0030 답 1

0031 답 5

0032

8의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 4,\ 8$의 4개이므로

$n(\{x\,|\,x$는 8의 양의 약수$\})=4$ 답 4

0033 답 $\subset$

0034 답 $\in$

0035 답 $\subset$

0036 답 $\subset$

0037 답 $\subset$

0038

$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots\}$, $B=\{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots\}$이므로

$B\subset A$ 답 $B\subset A$

0039

2로 나누어떨어지는 홀수는 존재하지 않으므로 $A=\varnothing$

$|x|\leq 2$에서 $-2\leq x\leq 2$

이때, x는 정수이므로 $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

$\therefore\ B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

$\therefore\ A\subset B$ 답 $A\subset B$

0040

$B=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8,\ 9\}$이므로

$A\not\subset B,\ B\not\subset A$ 답 $A\not\subset B,\ B\not\subset A$

0041 답 $\varnothing$

0042 답 $\{a\},\ \{b\},\ \{c\}$

0043 답 $\{a,\ b\},\ \{b,\ c\},\ \{c,\ a\}$

0044 답 $\{a,\ b,\ c\}$

0045 답 $\varnothing,\ \{\varnothing\}$

0046 답 $\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}$

0047

5의 양의 약수는 1, 5이므로 집합 $\{1,\ 5\}$의 부분집합은

$\varnothing,\ \{1\},\ \{5\},\ \{1,\ 5\}$ 답 $\varnothing,\ \{1\},\ \{5\},\ \{1,\ 5\}$

0048

7보다 작은 홀수는 1, 3, 5이므로 집합 $\{1,\ 3,\ 5\}$의 부분집합은

$\varnothing,\ \{1\},\ \{3\},\ \{5\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 5\},\ \{3,\ 5\},\ \{1,\ 3,\ 5\}$

답 $\varnothing,\ \{1\},\ \{3\},\ \{5\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 5\},\ \{3,\ 5\},\ \{1,\ 3,\ 5\}$

0049 답 $=$

0050 답 $\neq$

0051 답 $\neq$

0052 답 $=$

0053 답 $\neq$

0054 답 $\varnothing,\ \{-2\},\ \{2\}$

0055

6 이하의 짝수는 2, 4, 6이므로 집합 $\{2,\ 4,\ 6\}$의 진부분집합은

$\varnothing,\ \{2\},\ \{4\},\ \{6\},\ \{2,\ 4\},\ \{2,\ 6\},\ \{4,\ 6\}$

답 $\varnothing,\ \{2\},\ \{4\},\ \{6\},\ \{2,\ 4\},\ \{2,\ 6\},\ \{4,\ 6\}$

0056

$n(\{1,\ 3\})=2$이므로 부분집합의 개수는

$2^2=4$ 답 4

0057

$\{x\mid x$는 $-2\le x<1$인 정수$\}=\{-2,\ -1,\ 0\}$에서

$n(\{-2,\ -1,\ 0\})=3$이므로 부분집합의 개수는

$2^3=8$ 답 8

0058

$n(A)=4$이므로 부분집합의 개수는

$2^4=16$ 답 16

0059

$n(A)=4$이므로 진부분집합의 개수는

$2^4-1=15$ 답 15

0060

2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$ 집합 $\{1,\ 4,\ 8\}$의 부분집합의 개수와 같다. 답 8

0061

1, 8을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$ 집합 $\{2,\ 4\}$의 부분집합의 개수와 같다. 답 4

0062

1, 2는 반드시 원소로 갖고, 4는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{4-2-1}=2^1=2$ 집합 $\{8\}$의 부분집합의 개수와 같다. 답 2

Lecture

특정한 원소를 갖는(갖지 않는) 부분집합의 개수

집합 $A=\{a,\ b,\ c\}$에 대하여 b를 원소로 갖지 않는 부분집합과 b를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구해 보자.

b를 원소로 갖지 않는 부분집합	b를 반드시 원소로 갖는 부분집합
$\varnothing,\ \{a\},\ \{c\},\ \{a,\ c\}$	$\{b\},\ \{a,\ b\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}$
⇨ 집합 A에서 원소 b를 제외한 집합 $\{a,\ c\}$의 부분집합과 같다. ⇨ 부분집합의 개수는 집합 A의 원소의 개수 $2^{3-1}=2^2=4$ 부분집합에 속하지 않는 원소의 개수	⇨ 집합 A에서 원소 b를 제외한 집합 $\{a,\ c\}$의 부분집합에 원소 b를 넣은 것과 같다. ⇨ 부분집합의 개수는 집합 A의 원소의 개수 $2^{3-1}=2^2=4$ 부분집합에 반드시 속하는 원소의 개수

⇨ (b를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수)
$=$(b를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수)

STEP 2 유형 마스터

0063

|전략| 어떤 조건에 의하여 그 대상을 분명하게 정할 수 있는 것들의 모임이 집합이다.

'작은', '가까운', '아름다운', '인기 있는'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다. 답 ②

0064

① '긴'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다. 답 ①

0065

'작은', '좋아하는'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 보기 중 집합이 아닌 것은 ㄷ, ㄹ의 2개이다. 답 ②

참고 ㄴ에서 '큰'은 조건이 명확하지 않지만 '가장 큰'은 조건이 명확하다. 따라서 집합이다.

0066

| 전략 | 먼저 집합 A를 원소나열법으로 나타낸다.

$x^2+2x-15<0$에서 $(x+5)(x-3)<0$

$\therefore -5<x<3$

따라서 $A=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$이므로

⑤ $2\in A$ 답 ⑤

0067

$A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{1, 5, 9, 13, 17, \cdots\}$이므로

① $1\in A$ ③ $3\in A$

④ $3\notin B$ ⑤ $6\notin B$ 답 ②

0068

ㄱ. i는 허수이므로 $i\notin R$

ㄴ. $\sqrt{3}$은 무리수이므로 $\sqrt{3}\notin Q$

ㄷ. $\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$는 허수이므로 $\dfrac{2}{1-i}\notin R$

ㄹ. $i^{16}=(i^4)^4=1$은 정수이므로 $i^{16}\in Z$

ㅁ. $\sqrt{4}=2$는 정수이므로 $\sqrt{4}\in Z$

ㅂ. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$은 무리수이므로 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\notin Q$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ, ㅂ의 4개이다. 답 4

0069

① $a=1$, $b=1$일 때, $2\cdot1+3\cdot1=5$이므로 $5\in A$

② $a=3$, $b=0$일 때, $2\cdot3+3\cdot0=6$

또는 $a=0$, $b=2$일 때, $2\cdot0+3\cdot2=6$

이때, a, b는 자연수이어야 하므로 $6\notin A$

③ $a=2$, $b=1$일 때, $2\cdot2+3\cdot1=7$이므로 $7\in A$

④ $a=1$, $b=2$일 때, $2\cdot1+3\cdot2=8$이므로 $8\in A$

⑤ $a=3$, $b=1$일 때, $2\cdot3+3\cdot1=9$이므로 $9\in A$ 답 ④

0070

| 전략 | ①~⑤의 집합 A를 각각 원소나열법으로 나타낸 다음 벤 다이어그램으로 표현된 집합 A와 비교한다.

① $A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

② $A=\{1, 2, 4, 8\}$

④ $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

⑤ $A=\{4, 8, 12, 16\}$ 답 ③

0071

| 전략 | 집합 B는 집합 A의 두 원소 a, b의 합 $a+b$를 원소로 갖는 집합이다.

집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

a \ b	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

0, 1, 2, 3, 4 ⋯ ❶

$\therefore B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ⋯ ❷

답 $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

채점 기준	비율
❶ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	80 %
❷ 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %

0072

각각의 수를 소인수분해하면

① $6=2^1\times3^1$ ② $12=2^2\times3^1$ ③ $54=2^1\times3^3$

④ $60=2^2\times3^1\times5^1$ ⑤ $108=2^2\times3^3$

따라서 집합 C의 원소가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

0073

| 전략 | 조건제시법으로 나타낸 집합을 원소나열법으로 나타낸 후 유한집합인 것을 찾는다.

① 무한집합

② $\{3, 5, 7, 9, \cdots\}$: 무한집합

③ -1과 1 사이의 유리수는 무수히 많으므로 무한집합

④ $\{1\}$: 유한집합

⑤ $\{1, 4, 9, 16, \cdots\}$: 무한집합 답 ④

0074

① $\{101, 102, 103, 104, \cdots\}$: 무한집합

② 0과 1 사이의 무리수는 무수히 많으므로 무한집합

③ 1보다 작은 유리수는 무수히 많으므로 무한집합

④ $\varnothing$: 유한집합

⑤ $\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$: 무한집합 답 ④

0075

공집합은 원소가 하나도 없는 집합이므로 '$x<k$인 6의 양의 배수'를 만족시키는 x가 하나도 없으려면 k의 값이 될 수 있는 수는 6 이하의 자연수, 즉 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이다.

따라서 구하는 합은 $1+2+3+4+5+6=21$이다. 답 21

참고 $k=7$이면 $A=\{x \mid x$는 $x<7$인 6의 양의 배수$\}=\{6\}$이 되어 공집합이 아니다.

Lecture

- 집합 $\{x \mid x$는 $x<\square$인 a의 양의 배수$\}$가 공집합
  ⇨ □ 안에 들어갈 수 있는 수는 a 이하의 자연수
- 집합 $\{x \mid x$는 $x>\square$인 a의 양의 약수$\}$가 공집합
  ⇨ □ 안에 들어갈 수 있는 수는 a 이상의 자연수

0076

|전략| 집합 $A,\ B,\ C$를 원소나열법으로 나타낸 다음 각각의 원소의 개수를 구한다.

집합 A는 10의 양의 약수의 집합과 같으므로

$A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

실수 $x,\ y$에 대하여 $x^2+y^2=0$일 때, $x=0,\ y=0$이므로

$C=\{(0,\ 0)\}$

따라서 $n(A)=4,\ n(B)=5,\ n(C)=1$이므로

$n(A)+n(B)+n(C)=10$ 답 10

0077

① $n(\{\varnothing\})=1,\ n(\{-2\})=1$이므로 $n(\{\varnothing\})=n(\{-2\})$

② $n(\{2,\ 3,\ 4\})-n(\{4,\ 5,\ 6\})=3-3=0$

③ $n(\{a,\ b,\ c\})-n(\{b,\ c\})=3-2=1$

④ $n(\{\varnothing\})-n(\varnothing)=1-0=1$

⑤ $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$ 답 ④

0078

$2x+3y=16$을 만족시키는 자연수 $x,\ y$의 값은

$x=2,\ y=4$ 또는 $x=5,\ y=2$

따라서 $A=\{(2,\ 4),\ (5,\ 2)\}$이므로 $n(A)=2$ ··· ❶

또, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k\}$이므로 $n(B)=k$ ··· ❷

이때, $n(B)-n(A)=4$에서

$k-2=4$ $\therefore k=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $n(A)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $n(B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0079

|전략| 집합 A에 대하여 원소와 집합 사이의 관계, 집합과 집합 사이의 포함 관계를 알아본다.

① $a\in A$ 또는 $\{a\}\subset A$ ② $b\in A$ 또는 $\{b\}\subset A$

③ $\{b,\ c\}\subset A$ ④ $\{a,\ b,\ c\}\subset A$ 답 ⑤

0080

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\},\ B=\{2\}$이므로

① $5\notin B$ ② $B\not\subset\{3,\ 5,\ 7\}$

④ $B\subset A$ ⑤ $\{2,\ 7\}\subset A$ 답 ③

0081

집합 A의 원소는 $1,\ \{2,\ 3\}$이다.

①, ④ 1은 집합 A의 원소이므로 $1\in A$이고 $\{1\}\subset A$

② $\{2,\ 3\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{2,\ 3\}\in A$

③ $1\in A,\ \{2,\ 3\}\in A$이므로 $\{1,\ \{2,\ 3\}\}\subset A$ 답 ②

0082

집합 A의 원소는 $1,\ 2,\ \{1,\ 2\},\ \varnothing$이다.

① $1\in A,\ 2\in A$이므로 $\{1,\ 2\}\subset A$

② $\{1,\ 2\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{1,\ 2\}\in A$

③ $\{1,\ 2\}\in A$이므로 $\{\{1,\ 2\}\}\subset A$

④ $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$

⑤ $\varnothing\in A,\ 2\in A$이므로 $\{\varnothing,\ 2\}\subset A$ 답 ⑤

0083

|전략| 집합 사이의 포함 관계는 각 집합을 원소나열법으로 나타내어 각 원소를 비교하여 판단한다.

$A=\{-2,\ 2\},\ B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\},\ C=\{-2,\ 0,\ 2\}$이므로

$A\subset C\subset B$ 답 ②

0084

집합 A의 두 원소 $x,\ y$에 대하여 $2x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	0	1	2
0	0	1	2
1	2	3	4
2	4	5	6

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$\therefore B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

집합 A의 두 원소 $x,\ y$에 대하여 xy의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

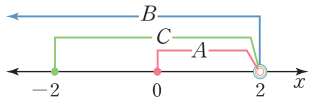
$0,\ 1,\ 2,\ 4$

$\therefore C=\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$

$\therefore A\subset C\subset B$ 답 ②

0085

세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

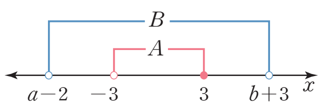


$\therefore A\subset C\subset B$ 답 ②

0086

|전략| 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타낸 후 $A\subset B$임을 이용한다.

두 집합 A, B를 $A\subset B$가 성립하도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $A\subset B$이려면 $a-2\le -3$, $b+3>3$이어야 한다.

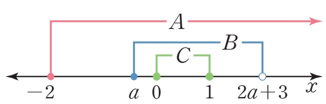
$\therefore a\le -1$, $b>0$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1, 정수 b의 최솟값은 1이다.

답 a의 최댓값 : -1, b의 최솟값 : 1

0087

세 집합 A, B, C를 $C\subset B\subset A$가 성립하도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $C\subset B\subset A$이려면 $-2\le a\le 0$, $2a+3>1$이어야 한다.

$\therefore -1<a\le 0$

따라서 정수 a는 0의 1개이다. 답 ②

0088

$x^3-2x^2-3x=0$에서 $x(x^2-2x-3)=0$

$x(x+1)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{-1,\ 0,\ 3\}$

이때, 집합 $B=\{x\,|\,x$는 $x\ge k$인 정수$\}$에 대하여 $A\subset B$이려면

$k\le -1$이어야 한다.

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다. 답 -1

0089

|전략| $A\subset B$가 성립하려면 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속해야 한다.

$A\subset B$이고 $-4a-3\in A$, $3\in A$이므로 $-4a-3\in B$, $3\in B$이어야 한다.

(i) $-4a-3=-7$일 때, $a=1$

이때, $A=\{-7,\ 3\}$, $B=\{-7,\ 8,\ 3\}$이므로 $A\subset B$

(ii) $-4a-3=a+7$일 때, $a=-2$

이때, $A=\{5,\ 3\}$, $B=\{-7,\ 5,\ 6\}$이므로 $A\not\subset B$

(iii) $-4a-3=a^2+2$일 때, $a^2+4a+5=0$

이때, 실수 a는 존재하지 않는다.

(iv) $3=a+7$일 때, $a=-4$

이때, $A=\{13,\ 3\}$, $B=\{-7,\ 3,\ 18\}$이므로 $A\not\subset B$

(v) $3=a^2+2$일 때, $a=\pm 1$

$a=1$이면 (i)과 같으므로 $A\subset B$

$a=-1$이면 $A=\{1,\ 3\}$, $B=\{-7,\ 6,\ 3\}$이므로 $A\not\subset B$

(i)~(v)에서 $a=1$ 답 1

참고 (iii)에서 얻은 a에 대한 이차방정식 $a^2+4a+5=0$의 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=2^2-1\cdot 5=-1<0$이므로 이차방정식 $a^2+4a+5=0$을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

0090

|전략| 집합 A를 원소나열법으로 나타낸 다음 부분집합을 모두 구해 본다.

x, y는 절댓값이 1 이하인 정수이고, $x<y$이므로 x, y의 값이 될 수 있는 수는

$x=-1$, $y=0$ 또는 $x=-1$, $y=1$ 또는 $x=0$, $y=1$

따라서 집합 A의 원소는

$x=-1$, $y=0$일 때, $3x+4y=-3$,

$x=-1$, $y=1$일 때, $3x+4y=1$,

$x=0$, $y=1$일 때, $3x+4y=4$

이므로 $A=\{-3,\ 1,\ 4\}$

① $\varnothing\subset A$ — 공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

② $\{-3,\ 0,\ 1,\ 4\}\not\subset A$

③ $\{-3\}$, $\{1\}$, $\{4\}$의 3개이다.

④ $\{-3,\ 1\}$, $\{-3,\ 4\}$, $\{1,\ 4\}$의 3개이다.

⑤ $\{-3,\ 1,\ 4\}$의 1개이다. 답 ③

0091

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 $X\subset A$이고 $n(X)=3$을 만족시키는 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 원소가 3개인 집합이다.

따라서 집합 X는 $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 7\}$, $\{1,\ 5,\ 7\}$, $\{3,\ 5,\ 7\}$의 4개이다. 답 4

0092

$P(A)$는 집합 A의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로

$P(A)=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\}$

② $\varnothing\in P(A)$이므로 $\{\varnothing\}\subset P(A)$

③ $\{1\}\subset A$이므로 $\{1\}\in P(A)$

④ $\{1,\ 2\}\subset A$이므로 $\{1,\ 2\}\in P(A)$

⑤ $\{1,\ 2\}\in P(A)$이므로 $\{\{1,\ 2\}\}\subset P(A)$ 답 ①

0093

|전략| $A=B$이므로 두 집합 A, B의 원소가 모두 같음을 이용한다.

$A=B$이고 $3\in B$이므로 $3\in A$이어야 한다.

즉, $a^2-2a=3$에서 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때, $A=\{2, 3, 8\}$, $B=\{-2, 3, 4\}$이므로

$A\neq B$

(ii) $a=3$일 때, $A=\{2, 3, 8\}$, $B=\{2, 3, 8\}$이므로

$A=B$

(i), (ii)에서 $a=3$ 답 3

0094

$A\subset B$이고 $B\subset A$이면 $A=B$이므로 … ❶

$2a+b=7$, $a-2b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$ … ❷

$\therefore ab=3$ … ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $A=B$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0095

$A=B$이고 $-1\in B$이므로 $-1\in A$이어야 한다.

즉, $1+5+a=0 \qquad \therefore a=-6$

방정식 $x^2-5x-6=0$에서 $(x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

따라서 $A=\{-1, 6\}$이므로 $b=6$

$\therefore ab=-36$ 답 -36

다른 풀이 $A=B$이므로 이차방정식 $x^2-5x+a=0$의 두 근이 -1, b이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$-1+b=5 \qquad \therefore b=6$

$(-1)\cdot b=(-1)\cdot 6=a \qquad \therefore a=-6$

$\therefore ab=-36$

Lecture

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

0096

$A=B$이고 $1\in A$이므로 $1\in B$이어야 한다.

즉, $a-1=1$ 또는 $a^2-4=1$

(i) $a-1=1$일 때, $a=2$

이때, $A=\{1, 2, 0\}$, $B=\{2, 1, 0\}$이므로 $A=B$

(ii) $a^2-4=1$일 때, $a=\pm\sqrt{5}$

$a=\sqrt{5}$이면 $A=\{1, 2, 5-2\sqrt{5}\}$, $B=\{2, \sqrt{5}-1, 1\}$이므로

$A\neq B$

$a=-\sqrt{5}$이면 $A=\{1, 2, 5+2\sqrt{5}\}$, $B=\{2, -\sqrt{5}-1, 1\}$이므로

$A\neq B$

(i), (ii)에서 $a=2$ 답 ④

0097

|전략| 집합 X는 2, 5를 반드시 원소로 갖는 집합 A의 진부분집합이다.

집합 $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$의 진부분집합 중에서 2, 5를 반드시 원소로 갖는 집합 X의 개수는

$2^{6-2}-1=2^4-1=15$ 답 15

참고 구하는 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 4, 10, 20\}$의 진부분집합의 개수와 같다.

0098

집합 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중에서 2, 3은 반드시 원소로 갖고, 5는 원소로 갖지 않는 집합 A의 개수는

$2^{6-2-1}=2^3=8$ 답 ②

0099

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, n\}$의 부분집합 중에서 1, 2는 반드시 원소로 갖고, 3, 4는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{n-2-2}=16=2^4$

$n-4=4 \qquad \therefore n=8$ 답 8

0100

|전략| 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낸 후 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

$x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{1, 3\}$

한 자리의 홀수는 1, 3, 5, 7, 9이므로

$B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

따라서 집합 X의 개수는 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합 중 1, 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{5-2}=2^3=8$ 답 ③

0101

$A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

따라서 집합 X의 개수는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중 1, 3, 5, 7은 반드시 원소로 갖고, 4는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-4-1}=2^2=4$ 답 4

0102

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
따라서 집합 X의 개수는 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$의 부분집합 중 2, 3, 5, 7을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수에서 집합 A, B를 제외한 것과 같으므로
$2^{10-4}-2=2^6-2=62$ 답 62

0103

|전략| 집합 X의 개수를 n에 대한 식으로 나타낸다.

집합 X의 개수는 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$의 부분집합 중 1, 2, 4, 8을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로
$2^{n-4}=32=2^5$에서
$n-4=5$ $\quad\therefore n=9$ 답 9

0104

|전략| (적어도 하나의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수)
=(전체 부분집합의 개수)
−(원소가 짝수만으로 이루어진 집합의 부분집합의 개수)

$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$
적어도 하나의 홀수를 원소로 갖는 집합은 집합 A의 부분집합 중 $\{6,\ 12\}$의 부분집합을 제외하면 된다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^5-2^2=32-4=28$ 답 28

Lecture
원소의 개수가 n인 집합 A에 대하여 특정한 $k(k\le n)$개의 원소 중 적어도 한 개를 포함하는 A의 부분집합의 개수 ⇨ 2^n-2^{n-k}

0105

1 또는 3을 원소로 갖는 집합은 집합 A의 부분집합 중 $\{2,\ 4,\ 5\}$의 부분집합을 제외하면 된다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^5-2^3=32-8=24$ 답 ④

다른 풀이 1 또는 3을 원소로 갖는 집합은 집합 $\{2,\ 4,\ 5\}$의 부분집합에 1만 넣거나 3만 넣거나 1, 3을 넣으면 된다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^3\cdot 3=24$

0106

집합 B의 원소를 적어도 하나 포함하는 부분집합은 집합 A의 진부분집합 중 $\{b,\ d\}$의 부분집합을 제외하면 된다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$(2^6-1)-2^2=63-4=59$ 답 ③

0107

|전략| 주어진 조건을 이용하여 집합 A의 원소를 구해 본다.

x와 $8-x$가 모두 자연수이므로
$x\ge 1$, $8-x\ge 1$
$\therefore 1\le x\le 7$
따라서 집합 A의 원소가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.
① $2\in A$이면 $8-2=6\in A$
② 원소의 개수가 1인 집합 A는 $A=\{4\}$
③ 원소의 개수가 2인 집합 A는 $\{1,\ 7\}$, $\{2,\ 6\}$, $\{3,\ 5\}$의 3개이다.
④ 원소의 개수가 5인 집합 A는 $\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7\}$, $\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$, $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 3개이다.
⑤ 원소의 개수가 가장 많은 집합 A는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$로 원소의 개수가 7이다. 답 ④

Lecture
집합 A의 모든 원소는 자연수이고, x가 집합 A의 원소이면 $8-x$도 집합 A의 원소이다.
즉, $1\in A$이면 $7\in A$, $2\in A$이면 $6\in A$, $3\in A$이면 $5\in A$, $4\in A$이면 $4\in A$이므로 1과 7, 2와 6, 3과 5, 4는 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.

0108

|전략| 각각의 원소를 최솟값으로 하는 부분집합의 개수를 구한다.

가장 작은 원소가 1인 부분집합은 1을 원소로 갖는 부분집합과 같으므로 그 개수는
$2^{5-1}=2^4=16$
가장 작은 원소가 2인 부분집합은 2를 원소로 갖고, 1은 원소로 갖지 않는 부분집합과 같으므로 그 개수는
$2^{5-1-1}=2^3=8$
마찬가지로 가장 작은 원소가 3, 4, 5인 부분집합의 개수는 각각
$2^{5-1-2}=2^2=4$, $2^{5-1-3}=2$, $2^{5-1-4}=1$
$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}=1\cdot 16+2\cdot 8+3\cdot 4+4\cdot 2+5\cdot 1$
$=57$ 답 57

0109

|전략| 먼저 원소의 개수가 2이면서 −2를 원소로 갖는 부분집합을 구한다.

집합 $A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2이면서 −2를 원소로 갖는 부분집합은
$\{-2,\ -1\}$, $\{-2,\ 0\}$, $\{-2,\ 1\}$, $\{-2,\ 2\}$, $\{-2,\ 3\}$
의 5개이다.
즉, A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{15} 중에서 −2를 원소로 갖는 집합은 위의 5개이다.
마찬가지로 원소의 개수가 2이면서 −1, 0, 1, 2, 3을 원소로 갖는 부분집합도 각각 5개씩 있다.
$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}=(-2-1+0+1+2+3)\cdot 5$
$=3\cdot 5=15$ 답 15

다른 풀이 집합 $A_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 15)$를 직접 구해 보면

$\{-2,\ -1\}$, $\{-2,\ 0\}$, $\{-2,\ 1\}$, $\{-2,\ 2\}$, $\{-2,\ 3\}$,
$\{-1,\ 0\}$, $\{-1,\ 1\}$, $\{-1,\ 2\}$, $\{-1,\ 3\}$,
$\{0,\ 1\}$, $\{0,\ 2\}$, $\{0,\ 3\}$,
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$,
$\{2,\ 3\}$

각각의 집합을 살펴보면 원소 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$을 포함하는 집합이 5개씩 있음을 알 수 있다.

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}=(-2-1+0+1+2+3)\cdot 5$
$=3\cdot 5=15$

0110

| 전략 | 집합 A의 원소의 개수가 $1,\ 2,\ 3$일 때로 나누어 생각해 본다.

$A\subset B\subset X$이고, $n(X)=3$이므로

(i) $n(A)=1$일 때
집합 A는 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$의 3개이고, 각각의 집합에 대하여 집합 B는 집합 A의 원소를 반드시 포함하므로 집합 B의 개수는
$2^{3-1}=2^2=4$
따라서 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 $3\cdot 4=12$

(ii) $n(A)=2$일 때
집합 A는 $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$의 3개이고, 각각의 집합에 대하여 집합 B는 집합 A의 원소를 반드시 포함하므로 집합 B의 개수는 $2^{3-2}=2$
따라서 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 $3\cdot 2=6$

(iii) $n(A)=3$일 때
집합 A는 $\{1,\ 2,\ 3\}$이고, $A\subset B\subset X$를 만족시키려면 $B=\{1,\ 2,\ 3\}$이어야 한다.
따라서 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 1이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는
$12+6+1=19$ 답 19

STEP 3 내신 마스터

0111

유형 02 집합과 원소 사이의 관계

| 전략 | 집합 A를 원소나열법으로 나타낸 다음 집합과 원소 사이의 관계를 알아본다.

$x^4-2x^2+1=0$에서 $x^2=X$로 놓으면
$X^2-2X+1=0$, $(X-1)^2=0$
$\therefore X=1$
즉, $x^2=1$이므로 $x=\pm1$
$\therefore A=\{-1,\ 1\}$

① $-2\not\in A$ ③ $0\not\in A$
④ $1\in A$ ⑤ $2\not\in A$ 답 ②

0112

유형 03 집합의 표현 방법

| 전략 | a, b의 값의 부호에 따라 집합 A의 원소를 구해 본다.

(i) $a>0$, $b>0$일 때
$$x=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{ab}{ab}+\frac{ab}{ab}=4$$
(ii) $a>0$, $b<0$일 때
$$x=\frac{a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-ab}{ab}+\frac{ab}{-ab}=-2$$
(iii) $a<0$, $b>0$일 때
$$x=\frac{a}{-a}+\frac{b}{b}+\frac{-ab}{ab}+\frac{ab}{-ab}=-2$$
(iv) $a<0$, $b<0$일 때
$$x=\frac{a}{-a}+\frac{-b}{b}+\frac{ab}{ab}+\frac{ab}{ab}=0$$
따라서 $A=\{-2,\ 0,\ 4\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은 2이다. 답 ⑤

0113

유형 03 집합의 표현 방법

| 전략 | 집합 B는 집합 A의 서로 다른 두 원소 x, y의 합 $x+y$를 원소로 갖는 집합이다.

집합 A의 서로 다른 두 원소 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	a	b	c
a		$a+b$	$a+c$
b	$a+b$		$b+c$
c	$a+c$	$b+c$	

$a+b$, $a+c$, $b+c$
$\therefore B=\{a+b,\ a+c,\ b+c\}$
$=\{10,\ 14,\ 18\}$

이때, $a<b<c$라 하면 $a+b<a+c<b+c$이므로

$a+b=10$ …… ㉠
$a+c=14$ …… ㉡
$b+c=18$ …… ㉢

㉡$-$㉠을 하면
$c-b=4$ …… ㉣
㉢, ㉣에서 $b=7$, $c=11$
$b=7$을 ㉠에 대입하면 $a=3$
따라서 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 11이다. 답 ⑤

0114

유형 04 유한집합과 무한집합

| 전략 | 각각의 집합이 유한집합인지 무한집합인지 조사하여 a, b의 값을 구한다.

ㄱ. 무한집합
ㄴ. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2\ge0$이므로 $x^2<0$인 실수 x는 존재하지 않는다.
⇨ $\varnothing$: 공집합(유한집합)
ㄷ. $\{-1\}$: 유한집합
ㄹ. $\{4,\ 7,\ 10,\ \cdots\}$: 무한집합

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $a-b=0$ 답 ③

0115

유형 **05** 유한집합의 원소의 개수

|전략| $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수를 뜻한다.

① $n(\{1,\ 2,\ 3\})-n(\{1,\ 2\})=3-2=1$

② $n(\{x\mid x<3,\ x\text{는 자연수}\})=n(\{1,\ 2\})=2$

③ $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$이면 $n(A)<n(B)$이지만 $A\not\subset B$이다.

⑤ $n(\{\emptyset\})=1$, $n(\emptyset)=0$이므로 $n(\{\emptyset\})\neq n(\emptyset)$ 답 ④

0116

유형 **06** 기호 ∈, ⊂의 사용

|전략| 집합 X에 대하여 원소와 집합 사이의 관계, 집합과 집합 사이의 포함 관계를 알아본다.

집합 X의 원소는 $\emptyset$, x, $\{\emptyset\}$이다.

①, ② $\emptyset$은 집합 X의 원소이므로 $\emptyset\in X$, $\{\emptyset\}\subset X$

③ $x\in X$이므로 $\{x\}\subset X$

④ $\{\emptyset\}\in X$이므로 $\{\{\emptyset\}\}\subset X$

⑤ $x\in X$, $\{\emptyset\}\in X$이므로 $\{x,\ \{\emptyset\}\}\subset X$ 답 ④

0117

유형 **10** 서로 같은 집합에서 미지수 구하기

|전략| $A=B$이므로 두 집합 A, B의 원소가 모두 같음을 이용한다.

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$, $B=\{1,\ 3,\ a-1,\ b+5\}$에 대하여

$A=B$이므로

$a-1=5,\ b+5=15$ 또는 $a-1=15,\ b+5=5$

$\therefore a=6,\ b=10$ 또는 $a=16,\ b=0$

그런데 a, b는 자연수이므로 $a=6$, $b=10$

$\therefore ab=60$ 답 ③

0118

유형 **11** 특정한 원소를 갖는(갖지 않는) 부분집합의 개수

|전략| 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수는 그 원소를 빼고 생각한다.

집합 A의 부분집합 중에서 3, 7은 반드시 원소로 갖고, 11, 13은 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{8-2-2}=2^4=16$ 답 ③

참고 구하는 집합의 개수는 집합 $\{1,\ 5,\ 9,\ 15\}$의 부분집합의 개수와 같다.

0119

유형 **13** 조건이 복잡한 부분집합의 개수

|전략| (4의 양의 약수를 적어도 하나 원소로 갖는 부분집합의 개수)
=(전체 부분집합의 개수)
−(원소가 4의 양의 약수가 아닌 것만으로 이루어진 집합의 부분집합의 개수)

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로 4의 양의 약수를 적어도 하나 원소로 갖는 집합은 집합 A의 부분집합 중 $\{3,\ 6,\ 12\}$의 부분집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^6-2^3=64-8=56$ 답 ⑤

0120

유형 **14** 여러 가지 발전 문제

|전략| 주어진 조건을 이용하여 집합 A의 원소가 될 수 있는 a의 값을 찾는다.

a와 $\dfrac{81}{a}$이 모두 자연수이므로 집합 A의 원소가 될 수 있는 자연수는 81의 양의 약수인 1, 3, 9, 27, 81이다.

이때, $a\in A$이면 $\dfrac{81}{a}\in A$이므로 1과 81, 3과 27, 9는 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A의 원소이다.

따라서 원소의 개수에 따라 집합 A를 구해 보면

원소가 1개일 때, $A=\{9\}$

원소가 2개일 때, $A=\{1,\ 81\}$, $A=\{3,\ 27\}$

원소가 3개일 때, $A=\{1,\ 9,\ 81\}$, $A=\{3,\ 9,\ 27\}$

원소가 4개일 때, $A=\{1,\ 3,\ 27,\ 81\}$

원소가 5개일 때, $A=\{1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81\}$

이므로 조건을 만족시키는 집합 A의 개수는 7이다. 답 ⑤

다른 풀이 $a\in A$이면 $\dfrac{81}{a}\in A$이므로

$1\in A$이면 $81\in A$

$3\in A$이면 $27\in A$

$9\in A$이면 $9\in A$

$27\in A$이면 $3\in A$

$81\in A$이면 $1\in A$

따라서 집합 A는 $(1,\ 81)$, $(3,\ 27)$, 9를 원소로 갖는 집합의 부분집합에서 $\emptyset$을 제외한 것이므로 구하는 집합 A의 개수는

$2^3-1=7$

참고 집합 A를 만들면 다음과 같다.

$\{(1,\ 81),\ (3,\ 27)\}$일 때, $A=\{1,\ 3,\ 27,\ 81\}$

$\{(1,\ 81),\ 9\}$일 때, $A=\{1,\ 9,\ 81\}$

⋮

0121

유형 **08** 집합의 포함 관계를 이용하여 미지수 구하기

|전략| 먼저 이차방정식을 풀어 집합 A의 원소를 구한다.

$x^2-2(a+1)x+a(a+2)=0$에서 $(x-a)(x-a-2)=0$

$\therefore x=a$ 또는 $x=a+2$

$\therefore A=\{a,\ a+2\}$ ··· ❶

이때, 집합 $B=\{x\mid x<4\}$에 대하여 $A\subset B$이려면

$a+2<4$이어야 한다.

$\therefore a<2$ ··· ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	배점
❶ 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	3점
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	2점
❸ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	2점

0122

유형 12 $A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수

|전략| 집합 X는 집합 B의 원소를 반드시 포함하는 집합 A의 부분집합이다.

$A=\{2, 4, 6, \cdots, 18\}$, $B=\{4, 8, 12, 16\}$ ··· ❶

따라서 집합 X의 개수는 $\{2, 4, 6, \cdots, 18\}$의 부분집합 중 4, 8, 12, 16을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로 ··· ❷

$2^{9-4}=2^5=32$ ··· ❸

답 32

채점 기준	배점
❶ 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ 조건을 만족시키는 집합 X의 개수와 같은 경우를 구할 수 있다.	3점
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	3점

0123

유형 05 유한집합의 원소의 개수

|전략| 먼저 집합 A의 원소를 구하고, 집합 A의 두 원소 x, y의 제곱의 합 x^2+y^2을 원소로 갖는 집합 B를 구한다.

(1) 음이 아닌 정수 k에 대하여

$i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, $i^{4k+4}=1$이므로

$A=\{i, -1, -i, 1\}$

(2) 집합 A의 두 원소 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	i	-1	$-i$	1
i	-2	0	-2	0
-1	0	2	0	2
$-i$	-2	0	-2	0
1	0	2	0	2

$-2, 0, 2$

$\therefore B=\{-2, 0, 2\}$

(3) $n(B)=3$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	4점
(2) 집합 B를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	6점
(3) $n(B)$를 구할 수 있다.	2점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0124

|전략| 주어진 조건을 이용하여 집합 $A_k(a)$를 구한다.

ㄱ. $A_1(3)=\{x \mid N(3, x)=1\}$에서 $N(3, x)=1$은 3과 x의 공약수의 개수가 1이라는 의미이므로 $A_1(3)$은 100 이하의 자연수 중 3과 서로소인 자연수의 집합이다.

이때, 3과 4는 서로소이므로 $4 \in A_1(3)$

ㄴ. $A_3(4)=\{x \mid N(4, x)=3\}$에서 $N(4, x)=3$은 4와 x의 공약수의 개수가 3이라는 의미이다.

이때, 4의 약수의 개수가 3이므로 $A_3(4)$는 4의 배수의 집합이다.

따라서 100 이하의 자연수 중 4의 배수는 4, 8, 12, $\cdots$, 100의 25개이므로 집합 $A_3(4)$의 원소의 개수는 25이다.

ㄷ. $A_2(a)=\{x \mid N(a, x)=2\}$에서 $N(a, x)=2$는 a와 x의 공약수의 개수가 2라는 의미이다.

이때, a가 소수이면 a의 약수의 개수는 2이므로 x는 a의 배수이어야 한다. 즉, $A_2(a)$는 a의 배수의 집합이다.

따라서 집합 $A_2(a)$의 원소의 개수는 100 이하의 자연수 중 a의 배수의 개수와 같으므로 $\left[\frac{100}{a}\right]$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

Lecture

k 이하의 자연수 중 n의 배수의 개수는

⇨ $\left[\frac{k}{n}\right]$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

0125

|전략| $\left[\frac{x}{n}\right]=1$에서 $n \le x < 2n$임을 이용하여 $n(A_n)$을 구한다.

$\left[\frac{x}{n}\right]=1$에서 $1 \le \frac{x}{n} < 2$, $n \le x < 2n$

$\therefore n(A_n)=2n-n=n$

따라서 $n(A_3)=3$, $n(A_k)=k$이므로

$n(A_3)=\frac{n(A_k)}{l}$에서 $3=\frac{k}{l}$

$\therefore k=3l$

이때, k, l은 100 이하의 자연수이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (k, l)은 $(3, 1)$, $(6, 2)$, $\cdots$, $(99, 33)$의 33개이다. 답 33

0126

|전략| a, a^2, a^3, $\cdots$의 일의 자리의 수를 구하여 집합 $A(a)$를 원소나열법으로 나타낸다.

ㄱ. $A(2)$는 2를 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수 전체의 집합이다.

2를 거듭제곱하면 일의 자리의 수는 2, 4, 8, 6이 차례로 반복되므로

$A(2)=\{2, 4, 6, 8\}$

$\therefore 6 \in A(2)$

ㄴ. $A(8)$은 8을 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수 전체의 집합이다.

8을 거듭제곱하면 일의 자리의 수는 8, 4, 2, 6이 차례로 반복되므로

$A(8)=\{2, 4, 6, 8\}$

이때, ㄱ에서 $A(2)=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$A(8)=A(2)$

ㄷ. $A(7)$은 7을 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수 전체의 집합이다.

7을 거듭제곱하면 일의 자리의 수는 7, 9, 3, 1이 차례로 반복되므로

$A(7)=\{1, 3, 7, 9\}$

이때, 3을 거듭제곱하면 일의 자리의 수는 3, 9, 7, 1이 차례로 반복되므로

$A(3)=\{1, 3, 7, 9\}$

따라서 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수의 집합이 $\{1, 3, 7, 9\}$이려면 자연수 k의 일의 자리의 수는 3 또는 7이어야 한다.

이때, k는 30 이하의 자연수이므로 조건을 만족시키는 k의 값은 3, 7, 13, 17, 23, 27이다.

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$3+7+13+17+23+27=90$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0127

| 전략 | $x-[x]=\frac{1}{n}$이면 $x=[x]+\frac{1}{n}$이므로 A_n을 구해 본다.

$x-[x]=\frac{1}{n}$에서 $x=[x]+\frac{1}{n}$

이때, $[x]=k$(k는 정수)라 하면

$A_n=\left\{x \middle| x=k+\frac{1}{n}, k\text{는 정수}\right\}$

ㄱ. $A_5=\left\{x \middle| x=k+\frac{1}{5}, k\text{는 정수}\right\}$

$=\left\{\cdots, -\frac{9}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}, \cdots\right\}$

$\therefore -\frac{1}{5}\notin A_5$

ㄴ. $A_4=\left\{x \middle| x=k+\frac{1}{4}, k\text{는 정수}\right\}$

$=\left\{\cdots, -\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \cdots\right\}$

$A_2=\left\{x \middle| x=k+\frac{1}{2}, k\text{는 정수}\right\}$

$=\left\{\cdots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots\right\}$

$\therefore A_4\not\subset A_2$

ㄷ. 2 이상의 두 자연수 m, n에 대하여

$A_m=\left\{x \middle| x=k+\frac{1}{m}, k\text{는 정수}\right\}$

$=\left\{\cdots, -2+\frac{1}{m}, -1+\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, 1+\frac{1}{m}, 2+\frac{1}{m}, \cdots\right\}$

이므로 $a(A_m)=\frac{1}{m}$

$A_n=\left\{x \middle| x=k+\frac{1}{n}, k\text{는 정수}\right\}$

$=\left\{\cdots, -2+\frac{1}{n}, -1+\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}, \cdots\right\}$

이므로 $a(A_n)=\frac{1}{n}$

이때, $2\le m<n$이므로 $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$

$\therefore a(A_m)>a(A_n)$

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

0128

| 전략 | $N=p^a q^b r^c$(p, q, r는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수)일 때, N의 양의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)(c+1)$이다.

조건 ㈎에서 $A_3\subset A_m\subset A_{120}$이므로

m은 3의 배수이고 120의 약수이다.

집합 A_m의 원소의 개수를 a라 하면 조건 ㈏에서 A_m의 부분집합의 개수가 256이므로

$2^a=256=2^8 \quad \therefore a=8$

이때, $120=2^3\cdot3\cdot5$이므로 120의 약수 중 약수의 개수가 8이고, 3의 배수인 자연수 m은 $2^3\cdot3$ 또는 $2\cdot3\cdot5$, 즉 24 또는 30이다.

따라서 모든 자연수 m의 값의 합은

$24+30=54$ 답 54

0129

| 전략 | $S(X)=8$을 만족시키는 경우를 세 가지로 나누어 각각의 경우를 만족시키는 집합 X를 생각한다.

집합 A의 두 원소의 합이 8이 되는 경우는 1과 7, 2와 6, 3과 5이다.

(i) 가장 작은 원소가 1, 가장 큰 원소가 7일 때

집합 X의 개수는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중 1, 7을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-2}=2^5=32$

(ii) 가장 작은 원소가 2, 가장 큰 원소가 6일 때

집합 X의 개수는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중 2, 6을 반드시 원소로 갖고, 1, 7은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-2-2}=2^3=8$

(iii) 가장 작은 원소가 3, 가장 큰 원소가 5일 때

집합 X의 개수는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중 3, 5를 반드시 원소로 갖고, 1, 2, 6, 7은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-2-4}=2$

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$32+8+2=42$ 답 42

본책 24~41쪽

2 | 집합의 연산

STEP 1 개념 마스터

0130 답 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$

0131
$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$, $B=\{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$이므로
$A\cup B=\{1,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20\}$ 답 $\{1,\ 3,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20\}$

0132
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $B=\{10,\ 11,\ 12,\ \cdots\}$이므로
$A\cup B=\{x\mid x$는 자연수$\}$ 답 $\{x\mid x$는 자연수$\}$

0133
$A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$, $B=\varnothing$이므로
$A\cup B=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$ 답 $\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

0134
$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이므로
$A\cap B=\{2,\ 4,\ 8\}$ 답 $\{2,\ 4,\ 8\}$

0135
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 답 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

0136 답 $\varnothing$

0137 답 (1) $\{2,\ 6\}$ (2) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

0138 답 서로소이다.

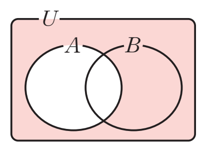
0139
$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$이므로
$A\cap B=\{3,\ 5,\ 7\}$
따라서 A와 B는 서로소가 아니다. 답 서로소가 아니다.

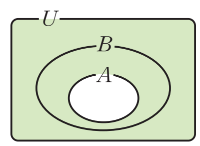
0140
$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{-2,\ 0\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 A와 B는 서로소이다. 답 서로소이다.

0141 답 $\{2,\ 4,\ 6\}$

0142 답 $\{1,\ 2,\ 3\}$

0143
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로
$C^C=\{4,\ 5\}$ 답 $\{4,\ 5\}$

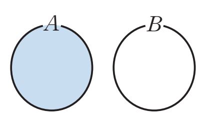
0144 답


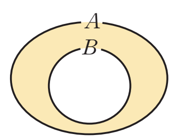
0145 답


0146 답 $\{1,\ 2\}$

0147 답 $\varnothing$

0148
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$이므로
$A-B=\{3,\ 6\}$ 답 $\{3,\ 6\}$

0149 답


0150 답


0151 답 (1) $\{4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ (2) $\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 8\}$ (3) $\{1,\ 2,\ 3\}$
(4) $\{4,\ 7,\ 9\}$ (5) $\{6,\ 8\}$ (6) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

0152
① $\varnothing\subset A$ ③ $A\cap U=A$
④ $A\cup\varnothing=A$ ⑤ $U^C=\varnothing$ 답 ②

0153
ㄱ. $A-A^C=A\cap(A^C)^C=A\cap A=A$
ㅁ. $B-A=B\cap A^C$
ㅂ. $(A\cap B)\subset(A\cup B)$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

0154 답 A

0155 답 B

0156 답 $\varnothing$

0157 답 $\varnothing$

0158

$(A\cup C)\cap(B\cup C)$ 분배법칙

$=(A\cap B)\cup C$

$=\{3\}\cup\{2,\ 4,\ 6\}$

$=\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$ 답 $\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

다른 풀이 $(A\cup C)\cap(B\cup C)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}\cap\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

$=\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

0159

(1) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{4,\ 6,\ 8\}$

(2) $A^C=\{3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $B^C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{4,\ 6,\ 8\}$

(3) $A\cap B=\{1,\ 5\}$이므로

$(A\cap B)^C=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

(4) $A^C=\{3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $B^C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$이므로

$A^C\cup B^C=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

답 (1) $\{4,\ 6,\ 8\}$ (2) $\{4,\ 6,\ 8\}$ (3) $\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ (4) $\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

0160 답 (가) ㄹ (나) ㄴ

0161 답 (가) ㄹ (나) ㄷ

0162

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=12+9-16=5$ 답 5

0163

(1) $n(A^C)=n(U)-n(A)$

$=30-20=10$

(2) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=17-12=5$

(3) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=20+17-12=25$

(4) $n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=20-12=8$

답 (1) 10 (2) 5 (3) 25 (4) 8

0164

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=36+18-10=44$

(2) $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=50-44=6$

(3) $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$

$=50-10=40$

답 (1) 44 (2) 6 (3) 40

0165

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$

$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=10+14+15-5-6-3+2$

$=27$ 답 27

STEP 2 유형 마스터

0166

|전략| 집합 A, B, C를 원소나열법으로 나타낸 후 $(A\cup B)\cap C$를 구한다.

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B=\{1,\ 3,\ 9\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

$(A\cup B)\cap C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}\cap\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

$=\{1,\ 3\}$ 답 ④

0167

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B=\{1,\ 4,\ 7\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

④ $(A\cap B)\cup C=\{4\}\cup\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$ 답 ④

0168

집합 B는 3, 5를 반드시 원소로 갖고, 1, 9, 11을 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 B가 될 수 있는 것은 ④ $\{3,\ 5,\ 6,\ 8\}$이다. 답 ④

0169

|전략| $A\cap B=\varnothing$이면 두 집합 A, B는 서로소이다.

$A=\{x\,|\,x=3n+1,\ n$은 정수$\}$

$=\{\cdots,\ -8,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ \cdots\}$

ㄱ. $B=\{x\,|\,x=2n,\ n$은 정수$\}$

$=\{\cdots,\ -6,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$

ㄴ. $C=\{x\,|\,x=2n+1,\ n$은 정수$\}$

$=\{\cdots,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ \cdots\}$

ㄷ. $D=\{x\,|\,x=3n-1,\ n$은 정수$\}$

$=\{\cdots,\ -7,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \cdots\}$

따라서 $A\cap D=\varnothing$이므로 A와 서로소인 집합은 ㄷ. D이다. 답 ㄷ

0170

구하는 집합은 집합 A의 부분집합 중 a, b를 원소로 갖지 않는 집합이므로 $\{c, d\}$의 부분집합과 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^2=4$ 답 4

0171

집합 B와 서로소인 집합은 집합 A의 부분집합 중 집합 B의 원소를 포함하지 않는 집합이다.

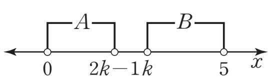
집합 B의 원소의 개수를 n이라 하면

$2^{6-n}=8=2^3$에서

$6-n=3$ $\therefore n=3$ 답 ③

0172

두 집합 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 ··· ❶



$2k-1\le k$ $\therefore k\le 1$ ··· ❷

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 두 집합 A, B가 서로소가 되도록 수직선 위에 나타낼 수 있다.	50 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0173

|전략| 집합 U, A, B를 원소나열법으로 나타낸 후 먼저 $B-A$를 구해 본다.

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$, $A=\{1, 2, 5, 10\}$,

$B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$이므로

$B-A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}-\{1, 2, 5, 10\}$

$=\{4, 6, 8, 12\}$

$\therefore (B-A)^C=\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11\}$

답 $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11\}$

다른 풀이 $(B-A)^C=(B\cap A^C)^C=B^C\cup A$

$B^C=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $A=\{1, 2, 5, 10\}$이므로

$(B-A)^C=B^C\cup A=\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11\}$

0174

$A\cup B=\{a, b, c, d\}$이므로

$(A\cup B)^C=\{e, f\}$ ······ ㉠

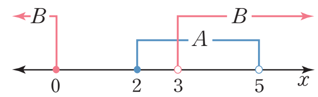
$A=\{a, c, d\}$, $B^C=\{a, c, e, f\}$이므로

$A-B^C=\{a, c, d\}-\{a, c, e, f\}=\{d\}$ ······ ㉡

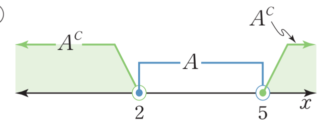
㉠, ㉡에서 $(A\cup B)^C\cup(A-B^C)=\{d, e, f\}$ 답 $\{d, e, f\}$

0175

주어진 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

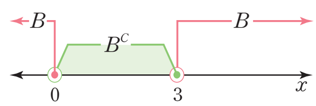


①



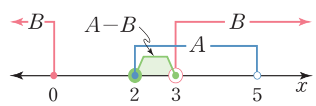
$A^C=\{x\mid x<2$ 또는 $x\ge 5\}$

②



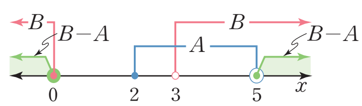
$B^C=\{x\mid 0<x\le 3\}$

③



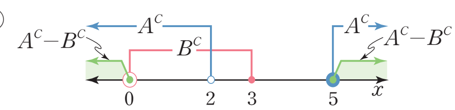
$A-B=\{x\mid 2\le x\le 3\}$

④



$B-A=\{x\mid x\le 0$ 또는 $x\ge 5\}$

⑤



$A^C-B^C=\{x\mid x\le 0$ 또는 $x\ge 5\}$ 답 ⑤

0176

|전략| 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내어 집합 A를 찾는다.

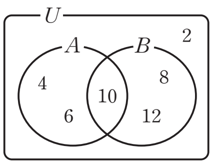
$U=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$,

$(A\cup B)^C=\{2\}$,

$A-B=\{4, 6\}$,

$A^C\cap B=B-A=\{8, 12\}$

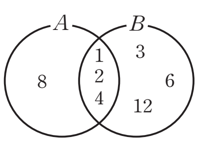
이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore A=\{4, 6, 10\}$ 답 $\{4, 6, 10\}$

0177

$A=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 A, $A\cap B$, $A\cup B$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

답 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

0178

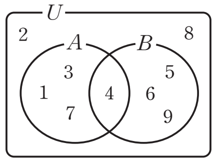
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$,

$(A\cup B)^C=\{2,\ 8\}$,

$A\cap B=\{4\}$,

$A\cap B^C=A-B=\{1,\ 3,\ 7\}$

이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore\ B=\{4,\ 5,\ 6,\ 9\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 $4+5+6+9=24$ 답 ①

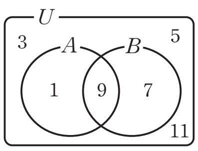
0179

$U=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$이고, 조건 ㈎에서 $(A\cup B)^C=\{3,\ 5,\ 11\}$이므로 $A\cup B=\{1,\ 7,\ 9\}$

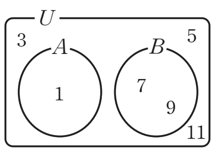
조건 ㈐에서 집합 B의 모든 원소의 합은 16이므로 $B=\{7,\ 9\}$

또한, 조건 ㈏에서 $A\subset\{1,\ 3,\ 9\}$이므로 집합 A의 원소가 될 수 있는 것은 1 또는 9이다.

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



또는

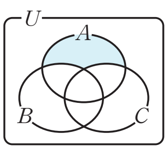


$\therefore\ A-B=\{1\}$ 답 $\{1\}$

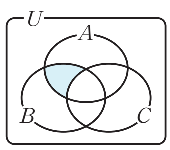
0180

|전략| 각 집합을 벤 다이어그램으로 나타낸 후 주어진 벤 다이어그램과 비교한다.

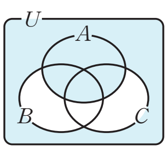
①



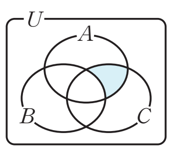
②



③



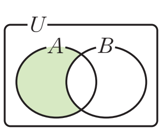
④



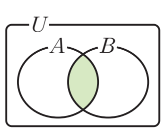
답 ⑤

0181

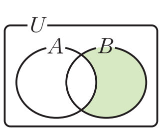
①



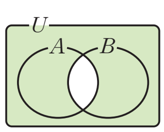
②



④



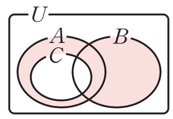
⑤



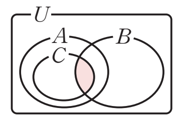
답 ③

0182

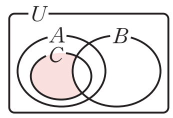
②



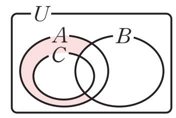
③



④



⑤



답 ①

0183

|전략| $A\cap B=\{a\}$이면 $a\in A$, $a\in B$임을 이용한다.

$A\cap B=\{0,\ 1\}$에서 $0\in A$이므로

$a^2+2a=0$, $a(a+2)=0$ $\quad\therefore\ a=0$ 또는 $a=-2$

(i) $a=0$일 때

$A=\{0,\ 1,\ 2\}$, $B=\{-4,\ 3\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-2$일 때

$A=\{0,\ 1,\ 2\}$, $B=\{0,\ 1,\ 3\}$이므로

$A\cap B=\{0,\ 1\}$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 답 -2

0184

$A\cap B^C=A-B=\{4\}$이므로 $2\in B$, $6\in B$, $a-b\in B$

이때, $B=\{2,\ 9,\ a+2b\}$이므로

$6\in B$에서 $a+2b=6$ ······ ㉠

$a-b\in B$에서 $a-b=9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=-1$

$\therefore\ a+b=7$ 답 7

0185

$A\cap B=\{2,\ 3\}$에서 $3\in A$이므로

$a^2-1=3$, $a^2=4$ $\quad\therefore\ a=\pm2$ ··· ❶

(i) $a=2$일 때

$A=\{0,\ 2,\ 3\}$, $B=\{5,\ 6,\ 7\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다. ··· ❷

(ii) $a=-2$일 때

$A=\{0,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$이므로

$A\cap B=\{2,\ 3\}$ ··· ❸

(i), (ii)에서 $a=-2$ ··· ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ $A\cap B=\{2,\ 3\}$을 이용하여 가능한 a의 값들을 구할 수 있다.	30 %
❷ $a=2$일 때, 주어진 조건이 성립하는지 알 수 있다.	30 %
❸ $a=-2$일 때, 주어진 조건이 성립하는지 알 수 있다.	30 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	10 %

0186

$A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 8\}$이고 $1\in A$, $2\in A$, $2\in B$이므로 세 원소 a^2+2a, $a+1$, a^2-4는 0, 3, 8 중 하나의 값을 각각 가져야 한다.

(i) $a+1=0$, 즉 $a=-1$일 때

$a^2+2a=-1$, $a^2-4=-3$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+1=3$, 즉 $a=2$일 때

$a^2+2a=8$, $a^2-4=0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

이때, $A=\{1,\ 2,\ 8\}$, $B=\{0,\ 2,\ 3\}$에 대하여

$A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 8\}$

(iii) $a+1=8$, 즉 $a=7$일 때

$a^2+2a=63$, $a^2-4=45$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$이고 $B=\{0,\ 2,\ 3\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 $0+2+3=5$ 답 5

0187

|전략| 집합의 연산의 성질을 이용하여 각 보기를 살펴본다.

① $(A^C)^C=A$, $U-A=A^C$이므로 $(A^C)^C\neq U-A$

② $A^C\cap B=B-A$

③ $A\cup\varnothing=A$

④ $A\cup A^C=U$ 답 ⑤

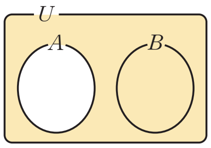
0188

③ $A-B=A\cap B^C$

④ $B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A=A\cap B$

⑤ $A\cap B=\varnothing$일 때, A^C은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분과 같다.

$\therefore A^C\neq B$



답 ③, ⑤

0189

① $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

② $B-A^C=B\cap(A^C)^C=B\cap A=A\cap B$

③ $(U-A^C)\cap B=A\cap B$

④ $(U\cup A)\cap B^C=U\cap B^C=B^C$

⑤ $(A\cap B)\cup(B\cap B^C)=(A\cap B)\cup\varnothing=A\cap B$ 답 ④

0190

|전략| $A\cap B=B$이면 $B\subset A$이므로 집합의 연산의 성질을 이용하여 항상 옳은 것을 찾는다.

$A\cap B=B$이므로 $B\subset A$

ㄱ. $A^C\subset B^C$

ㄷ. $A\cup B=A$

ㄹ. $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A=A\cap B^C=A-B$

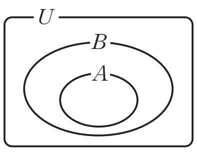
$B\subset A$이지만 $A\neq B$이면 $B^C-A^C=A-B\neq\varnothing$

따라서 항상 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

0191

$B^C\subset A^C$이므로 $A\subset B$

$A\subset B$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A\cap B=A$, $A\cup B=B$,

$(A\cap B)\subset B$, $A-B=\varnothing$

④ $A\subset B$이면 $A^C\cup B=U$

답 ④

0192

$A-(A\cap B)=\varnothing$이므로 $A\subset(A\cap B)$

$\therefore A\subset B$

②, ④ $A\cup B=B$

③ $A\cap B=A$

⑤ $A\subset B$이지만 $A\neq B$이면 $B-A\neq\varnothing$ 답 ①

0193

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$이므로

$A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$

따라서 $A\subset B$, $B\subset A$이므로 $A=B$ 답 ③

0194

|전략| 집합 X에 반드시 속하는 원소 또는 속하면 안 되는 원소를 찾아 주어진 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구한다.

$B\cap X=X$이므로 $X\subset B$

$(A\cap B)\cup X=X$이므로 $(A\cap B)\subset X$

$\therefore (A\cap B)\subset X\subset B$

즉, $\{2,\ 4\}\subset X\subset\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$를 만족시키는 집합 X는 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$의 부분집합 중 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ 답 16

0195

$(B-A)\cup X=X$이므로 $(B-A)\subset X$

$B\cap X=X$이므로 $X\subset B$

$\therefore (B-A)\subset X\subset B$ ··· ❶

이때, $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$이고 $B-A=\{1,\ 9\}$이므로 $\{1,\ 9\}\subset X\subset\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$를 만족시키는 집합 X는 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$의 부분집합 중 1, 9를 반드시 원소로 갖는 집합이다. ··· ❷

따라서 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 이용하여 집합 $B-A$, X, B 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	30 %
❷ ❶을 만족시키기 위한 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0196

U의 부분집합 C가 $\{1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}\cup C=\{2,\ 4,\ 9\}\cup C$를 만족시키려면 집합 C는 두 집합 $\{1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$, $\{2,\ 4,\ 9\}$에서 공통인 원소 4, 9를 제외한 나머지 원소 1, 2, 5, 8을 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 C의 개수는

$2^{10-4}=2^6=64$

답 ⑤

참고 4, 9는 두 집합 A, B의 공통인 원소이므로

$4\in(A\cup C)$, $4\in(B\cup C)$, $9\in(A\cup C)$, $9\in(B\cup C)$

즉, 집합 C가 4, 9를 원소로 갖지 않아도 $A\cup C=B\cup C$가 성립하므로 집합 C는 1, 2, 5, 8을 반드시 원소로 갖는다는 조건만 만족시키면 된다.

0197

$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$

$X-B=X$이므로 $X\cap B=\varnothing$

이때, $A-B=\{1\}$이므로 $\{1\}\subset X$, $X\cap\{4,\ 6\}=\varnothing$을 만족시키는 집합 X는 1을 반드시 원소로 갖고, 4, 6을 원소로 갖지 않아야 한다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{6-1-2}=2^3=8$

답 ③

0198

|전략| 집합의 연산의 성질과 연산법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

ㄱ. $A\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$ → 분배법칙

$=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$

ㄴ. $(A-B)-C=(A\cap B^C)\cap C^C$ 결합법칙

$=A\cap(B^C\cap C^C)$ 드모르간의 법칙

$=A\cap(B\cup C)^C$

$=A-(B\cup C)$

ㄷ. $A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^C$ 드모르간의 법칙

$=A\cap(B^C\cup C^C)$ 분배법칙

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=(A-B)\cup(A-C)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0199

$A\cap\{(B-A^C)^C\cap(A\cup B^C)\}$

$=A\cap\{(B\cap A)^C\cap(A\cup B^C)\}$ 교환법칙, 드모르간의 법칙

$=A\cap\{(A^C\cup B^C)\cap(A\cup B^C)\}$ 분배법칙

$=A\cap\{(A^C\cap A)\cup B^C\}$

$=A\cap(\varnothing\cup B^C)$

$=A\cap B^C=A-B$

따라서 주어진 집합을 나타내는 것은 ①이다.

답 ①

0200

$A-\{(A-B)\cup(A-B^C)\}$

$=A-\{(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\}$ 분배법칙

$=A-\{A\cap(B^C\cup B)\}$

$=A-(A\cap U)$

$=A-A=\varnothing$

답 $\varnothing$

0201

$(A\cup B^C)\cap(A^C\cup B)$

$=\{(A\cup B^C)\cap A^C\}\cup\{(A\cup B^C)\cap B\}$ 분배법칙

$=\{(A\cap A^C)\cup(B^C\cap A^C)\}\cup\{(A\cap B)\cup(B^C\cap B)\}$ 분배법칙

$=\{\varnothing\cup(B^C\cap A^C)\}\cup\{(A\cap B)\cup\varnothing\}$

$=(B^C\cap A^C)\cup(A\cap B)$

이때, 주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B의 포함 관계는

$A\subset B$이므로

$B^C\cap A^C=B^C$, $A\cap B=A$

$\therefore$ (주어진 식)$=B^C\cup A=A\cup B^C$

답 ⑤

다른 풀이 주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B의 포함 관계는 $A\subset B$이므로 $(A\cup B^C)\cap(A^C\cup B)=(A\cup B^C)\cap U=A\cup B^C$

0202

$(A-B)\cup(A\cap C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)$ 분배법칙

$=A\cap(B^C\cup C)$ 드모르간의 법칙

$=A\cap(B\cap C^C)^C$

$=A-(B\cap C^C)$

$=A-(B-C)$

답 ⑤

0203

$\{A-(A^C-B)\}\cap B=\{A-(A^C\cap B^C)\}\cap B$

$=\{A\cap(A^C\cap B^C)^C\}\cap B$ 드모르간의 법칙

$=\{A\cap(A\cup B)\}\cap B$

$=A\cap B$

④ $(A-B)^C\cap A=(A\cap B^C)^C\cap A$
$=(A^C\cup B)\cap A$
$=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$
$=\varnothing\cup(B\cap A)$
$=B\cap A=A\cap B$

드모르간의 법칙
분배법칙

답 ④

0204

|전략| 집합의 연산에 대한 등식을 연산법칙을 이용하여 간단히 한 후 두 집합의 포함 관계를 구한다.

$(A\cup B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$ → 분배법칙
$=\varnothing\cup(B\cap A^C)$
$=B\cap A^C=B-A$

즉, $B-A=\varnothing$이므로 $B\subset A$

따라서 $B\subset A$일 때 항상 옳은 것은 ④ $A^C\subset B^C$이다. 답 ④

0205

$\{(A\cap B)\cup(B-A)\}\cup A=\{(A\cap B)\cup(B\cap A^C)\}\cup A$
$=\{(B\cap A)\cup(B\cap A^C)\}\cup A$
$=\{B\cap(A\cup A^C)\}\cup A$
$=(B\cap U)\cup A$
$=B\cup A$

교환법칙
분배법칙

즉, $B\cup A=A$이므로 $B\subset A$

따라서 $B\subset A$일 때 항상 옳은 것은 ① $A\cap B=B$이다. 답 ①

0206

$\{(A-B^C)\cup(A^C\cup B)^C\}\cup B$
$=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cup B$
$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cup B$
$=(A\cap U)\cup B$
$=A\cup B$

드모르간의 법칙
분배법칙

즉, $A\cup B=B$이므로 $A\subset B$

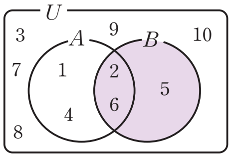
따라서 집합 A, B 사이의 관계를 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ②이다. 답 ②

0207

|전략| 먼저 주어진 식을 집합의 연산법칙을 이용하여 간단히 한 후 조건을 벤 다이어그램으로 나타내어 본다.

$(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$
$=\{1,\ 4,\ 5\}$

이고 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B=\{2,\ 5,\ 6\}$

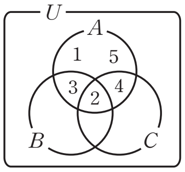
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$2+5+6=13$ 답 13

0208

$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)$
$=A\cap(B^C\cap C^C)$
$=A\cap(B\cup C)^C$
$=A-(B\cup C)$
$=\{1,\ 5\}$

이고 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore 4\in(C-B)$

답 ④

0209

$(B\cup A^C)\cap\{B\cap(A\cap B)^C\}$
$=(B\cup A^C)\cap\{B\cap(A^C\cup B^C)\}$
$=(B\cup A^C)\cap\{(B\cap A^C)\cup(\underbrace{B\cap B^C}_{\varnothing})\}$
$=(B\cup A^C)\cap(B\cap A^C)$
$=\{\underbrace{(B\cup A^C)\cap B}\}\cap A^C$
$=B\cap A^C=B-A$

결합법칙

$B\subset(B\cup A^C)$이므로 $(B\cup A^C)\cap B=B$

$\therefore B-A=\{4\}$ ··· ❶

또, $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로 $(A\cap B)^C=\{1,\ 4,\ 5,\ 7\}$

$\therefore A\cap B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}-\{1,\ 4,\ 5,\ 7\}$
$=\{2,\ 3,\ 6\}$ ··· ❷

따라서 $B=(B-A)\cup(A\cap B)=\{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$이므로 ··· ❸

집합 B의 모든 원소의 합은 $2+3+4+6=15$이다. ··· ❹

답 15

채점 기준	비율
❶ $(B\cup A^C)\cap\{B\cap(A\cap B)^C\}$를 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ 드모르간의 법칙을 이용하여 집합 $A\cap B$를 구할 수 있다.	20 %
❸ 집합 B를 구할 수 있다.	20 %
❸ 집합 B의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

0210

|전략| 자연수 p의 양의 배수의 집합을 A_p라 하면 $A_k\cap A_l$은 k와 l의 공배수의 집합이다. 이때, k와 l의 최소공배수가 m이면 $A_k\cap A_l=A_m$이다.

(단, k, l, m은 자연수)

$A_6\cup(A_3\cap A_4)=A_6\cup A_{12}=A_6$

$A_k\cup A_{mk}=A_k$ (단, m, k는 자연수)

전체집합 U의 원소 중 6의 배수는 16개이므로 구하는 원소의 개수는 16이다. 답 16

Lecture

배수와 약수의 집합

자연수 k에 대하여

(1) k의 배수의 집합을 A_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 배수이면
⇨ $A_m\subset A_n$ ⇨ $A_m\cap A_n=A_m$, $A_m\cup A_n=A_n$

(2) k의 약수의 집합을 B_k라 할 때, 자연수 m이 자연수 n의 약수이면
⇨ $B_m\subset B_n$ ⇨ $B_m\cap B_n=B_m$, $B_m\cup B_n=B_n$

0211

$(A_{12}\cup A_{18})\subset A_k$에서 $A_{12}\subset A_k$, $A_{18}\subset A_k$이므로 k는 12의 약수이고, 18의 약수이다.

즉, k는 $\underbrace{\text{12와 18의 공약수}}_{1,\ 2,\ 3,\ 6}$이므로 자연수 k의 최댓값은 6이다. 답 6

0212

$(A_8\cup A_{16})\cap(A_{12}\cup A_{36})=A_8\cap A_{12}=A_{24}$ 답 ④

0213

ㄱ. A_2는 2와 서로소인 자연수의 집합, 즉 홀수의 집합이고,
B_2는 2의 배수의 집합, 즉 짝수의 집합이다.
$\therefore A_2\cup B_2=\{x\,|\,x$는 자연수$\}$

ㄴ. A_2는 홀수의 집합이고, B_3은 3의 배수의 집합이므로
$A_2\cap B_3=\{3,\ 9,\ 15,\ 21,\ \cdots\}$
한편,
$A_6=\{x\,|\,x$는 6과 서로소인 자연수$\}$
$=\{x\,|\,x$는 2, 3과 서로소인 자연수$\}$
$=\{x\,|\,x$는 2와 3의 배수가 아닌 수$\}$
이므로 $A_6=\{1,\ 5,\ 7,\ 11,\ \cdots\}$
$\therefore A_2\cap B_3\neq A_6$

ㄷ. B_2는 2의 배수의 집합이고, B_3은 3의 배수의 집합이므로 $B_2\cap B_3$은 6의 배수의 집합이다.
즉, $B_2\cap B_3=B_6$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

참고 $A_m=\{x\,|\,x$는 m과 서로소인 자연수$\}$
$=\{x\,|\,x$는 m의 소인수의 배수가 아닌 수$\}$

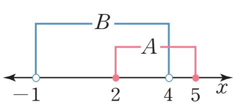
0214

|전략| 집합 A의 부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타낸 후 조건을 이용하여 집합 B를 구한다.

$x^2-7x+10\leq 0$에서 $(x-2)(x-5)\leq 0$ $\quad\therefore 2\leq x\leq 5$

$\therefore A=\{x\,|\,2\leq x\leq 5\}$

$A\cap B=\{x\,|\,2\leq x<4\}$이고,
$A\cup B=\{x\,|\,-1<x\leq 5\}$이려면 오른쪽 그림에서



$B=\{x\,|\,-1<x<4\}$
$=\{x\,|\,(x+1)(x-4)<0\}$
$=\{x\,|\,x^2-3x-4<0\}$

따라서 $a=-3$, $b=-4$이므로 $ab=12$ 답 12

0215

$A\cap B=\{1\}$이므로 $1\in A$, $1\in B$

$1\in A$에서 $1+a-3=0$ $\quad\therefore a=2$

$x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$ 또는 $x=1$ $\quad\therefore A=\{-3,\ 1\}$

$1\in B$에서 $b+b-4=0$ $\quad\therefore b=2$

$2x^2+2x-4=0$에서 $2(x+2)(x-1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$ $\quad\therefore B=\{-2,\ 1\}$

$\therefore A\cup B=\{-3,\ -2,\ 1\}$ 답 $\{-3,\ -2,\ 1\}$

0216

$x^2-6x+8<0$에서 $(x-2)(x-4)<0$ $\quad\therefore 2<x<4$

$\therefore A=\{x\,|\,2<x<4\}$

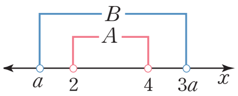
$x^2-4ax+3a^2<0$에서 $(x-a)(x-3a)<0$

$\therefore a<x<3a\ (\because a>0)$

$\therefore B=\{x\,|\,a<x<3a\}$

이때, $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$

두 집합 A, B를 $A\subset B$가 성립하도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a\leq 2$, $4\leq 3a$ $\quad\therefore \frac{4}{3}\leq a\leq 2$ 답 ④

0217

$x^2-4x-12<0$에서 $(x+2)(x-6)<0$ $\quad\therefore -2<x<6$

$\therefore A=\{x\,|\,-2<x<6\}$

$x^2-8x+16>0$에서 $(x-4)^2>0$이므로 해는 $x\neq 4$인 모든 실수

$\therefore B=\{x\,|\,x\neq 4$인 모든 실수$\}$

$x^2-2x+10\leq 0$에서 $(x-1)^2+9\leq 0$이므로 해는 없다.

$\therefore C=\varnothing$

$\therefore (A\cap B)\cup C=\{x\,|\,-2<x<4$ 또는 $4<x<6\}$

따라서 $(A\cap B)\cup C$의 원소 중 정수는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5$의 6개이다. 답 ④

0218

|전략| 새로운 집합의 연산의 약속에 따라 집합의 연산법칙을 이용하여 간단한 연산으로 정리한다.

① $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)=(B\cup A)-(B\cap A)=B\triangle A$

② $A\triangle\varnothing=(A\cup\varnothing)-(A\cap\varnothing)=A-\varnothing=A$

③ $A\triangle A=(A\cup A)-(A\cap A)=A-A=\varnothing$

④ $A\triangle A^C=(A\cup A^C)-(A\cap A^C)=U-\varnothing=U$

⑤ $A\triangle U=(A\cup U)-(A\cap U)=U-A=A^C$ 답 ④

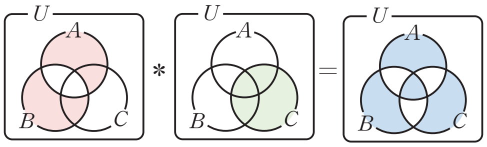
0219

$B\diamond C=(B\cup C)\cap(B\cup C^C)$
$=B\cup(C\cap C^C)$
$=B\cup\varnothing=B$

$\therefore A\diamond(B\diamond C)=A\diamond B$
$=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$
$=A\cup(B\cap B^C)$
$=A\cup\varnothing=A$ 답 A

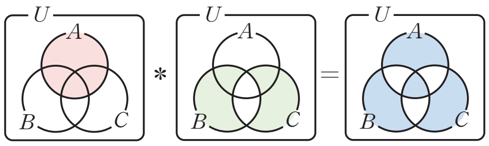
0220

ㄱ. $(A*B)*C$



$A*B$　　C　　$(A*B)*C$

$A*(B*C)$



A　　$B*C$　　$A*(B*C)$

$\therefore (A*B)*C=A*(B*C)$

ㄴ. $A^C*B^C=(A^C-B^C)\cup(B^C-A^C)$

$=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$

$=(B-A)\cup(A-B)=(A-B)\cup(B-A)$

$=A*B$

ㄷ. $(A*B)*A=(B*A)*A$ ($\because A*B=B*A$)

$=B*\underbrace{(A*A)}_{(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing}$ ($\because$ ㄱ)

$=B*\varnothing$

$=(B-\varnothing)\cup(\varnothing-B)$

$=B\cup\varnothing=B$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

0221

|전략| 집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(U)-n(A^C\cup B^C)=50-45=5$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=26+18-5=39$ 답 ④

0222

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)=14-9=5$

$\therefore n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=20-5=15$ 답 ⑤

0223

$n(U-B)=n(U)-n(B)$이므로

$n(B)=n(U)-n(U-B)=25-13=12$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=19-10=9$

따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $B-A$이므로

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=12-9=3$ 답 3

0224

$A\cap B=\varnothing$이므로 $A\cap B\cap C=\varnothing$

$\therefore n(A\cap B)=0,\ n(A\cap B\cap C)=0$

$n(A\cap C)=n(A)+n(C)-n(A\cup C)$

$=5+3-7=1$

$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$

$=4+3-5=2$

$\therefore n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$

$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)$

$=5+4+3-0-2-1+0=9$ 답 9

0225

|전략| 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\subset B$일 때 $n(A\cap B)$는 최대가 되고, $A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$는 최소가 된다. (단, $n(A)<n(B)$)

$n(A\cap B)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면

$A\subset B$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이므로 $M=n(A)=56$

또, $A\cup B=U$일 때, $n(A\cap B)$가 최소이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$m=56+78-100=34$

$\therefore M+m=56+34=90$ 답 90

0226

$B\subset A$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이므로

$n(A\cap B)\le n(B)=15$

이때, $n(A\cap B)\ge 10$이므로 $10\le n(A\cap B)\le 15$ … ❶

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cup B)=25+15-n(A\cap B)$이므로

$40-15\le n(A\cup B)\le 40-10$

$\therefore 25\le n(A\cup B)\le 30$ … ❷

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 30, 최솟값은 25이므로 그 합은 $30+25=55$이다. … ❸

답 55

채점 기준	비율
❶ $n(A\cap B)$의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $n(A\cup B)$의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0227

|전략| 주어진 조건을 집합과 그 원소의 개수로 나타낸 다음 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$임을 이용한다.

어느 학급 학생 전체의 집합을 U, 영어 문제를 푼 학생의 집합을 A, 수학 문제를 푼 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=25,\ n(B)=18,\ n(A^C\cap B^C)=3$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A^C\cap B^C)$

$=40-3=37$

따라서 영어 문제와 수학 문제를 모두 푼 학생 수는

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$\qquad=25+18-37=6$

답 6

0228

수진이네 반 학생 전체의 집합을 U, 인라인스케이트를 탈 수 있는 학생의 집합을 A, 자전거를 탈 수 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=17,\ n(B)=26,\ n((A\cup B)^{C})=5$ ··· ❶

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^{C})$

$\qquad=40-5=35$ ··· ❷

따라서 자전거만 탈 수 있는 학생 수는

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$

$\qquad=35-17=18$ ··· ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 집합으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $n(A\cup B)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 자전거만 탈 수 있는 학생 수를 구할 수 있다.	40 %

0229

어느 고등학교 1학년 1반 학생 전체의 집합을 U, A 놀이 기구를 타본 학생의 집합을 A, B 놀이 기구를 타본 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=30,\ n(A)=15,\ n(B)=17,\ n(A^{C}\cap B^{C})=3$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^{C})=n(U)-n(A^{C}\cap B^{C})$

$\qquad=30-3=27$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$\qquad=15+17-27=5$

따라서 A를 타보지 못하거나 B를 타보지 못한 학생 수는

$n(A^{C}\cup B^{C})=n((A\cap B)^{C})=n(U)-n(A\cap B)$

$\qquad=30-5=25$

답 ⑤

0230

어느 학급 학생 전체의 집합을 U, 수학, 영어, 국어 문제를 푼 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=50,\ n(A)=20,\ n(B)=28,\ n(C)=31$

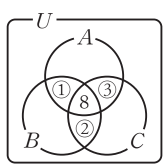
$n(A\cap B\cap C)=8,\ n(A^{C}\cap B^{C}\cap C^{C})=2$

$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^{C})$

$\qquad=n(U)-n(A^{C}\cap B^{C}\cap C^{C})$

$\qquad=50-2=48$

오른쪽 그림에서 꼭 두 문제만을 푼 학생 수는 ①+②+③이므로



$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$\quad-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

에서

$48=20+28+31-(①+8)-(②+8)-(③+8)+8$

$\therefore$ ①+②+③$=15$

따라서 꼭 두 문제만 푼 학생 수는 15이다.

답 15

0231

| 전략 | $n(A)<n(B)$이면 $A\subset B$일 때 $n(A\cup B)$가 최소이고, $n(A\cap B)=0$일 때 $n(A\cup B)$가 최대이다.

지수네 반 학생 전체의 집합을 U, 인터넷으로 수학을 수강하는 학생의 집합을 A, 영어를 수강하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=14,\ n(B)=20,\ n(A^{C}\cap B^{C})=x$

$x=n(A^{C}\cap B^{C})=n(U)-n(A\cup B)$이므로

(i) x가 최대일 때는 $n(A\cup B)$가 최소, 즉 $A\subset B$일 때이므로

$\quad x=n(U)-n(A\cup B)=40-20=20$ $\quad n(A\cup B)=n(B)$일 때 $n(A\cup B)$가 최소가 된다.

$\quad\therefore M=20$

(ii) x가 최소일 때는 $n(A\cup B)$가 최대, 즉 $n(A\cap B)=0$일 때이므로

$\quad x=n(U)-n(A\cup B)=40-(14+20)=6$

$\quad\therefore m=6$

$\therefore M+m=20+6=26$

답 ⑤

0232

어느 학급 학생 전체의 집합을 U, A 포털 사이트의 블로그를 갖고 있는 학생의 집합을 A, B 포털 사이트의 블로그를 갖고 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=23,\ n(B)=19$

이때, 두 사이트의 블로그를 모두 갖고 있는 학생의 집합은 $A\cap B$이다.

(i) $n(A\cap B)$가 최대일 때 : $B\subset A$이어야 하므로

$\quad n(A\cap B)=n(B)=19 \qquad \therefore M=19$

(ii) $n(A\cap B)$가 최소일 때 :

$\quad n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$\quad n(A\cup B)$가 최대이면, 즉 $n(A\cup B)=n(U)$이면 $n(A\cap B)$는 최소가 된다.

$\quad n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(U)$

$\qquad=23+19-40=2$

$\quad\therefore m=2$

$\therefore M+m=19+2=21$

답 21

0233

어느 학급 학생 전체의 집합을 U, A신문을 구독하는 학생의 집합을 A, B신문을 구독하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35,\ n(A)=20,\ n(B)=12,\ n(A\cap B)\geq 5$

이때, A신문과 B신문 중 적어도 하나를 구독하는 학생의 집합은 $A\cup B$이다.

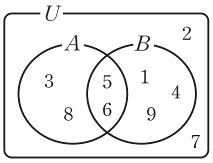
(ⅰ) $n(A\cup B)$가 최대일 때 : $n(A\cap B)$가 최소가 되어야 하므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=20+12-5=27$
$\therefore a=27$
(ⅱ) $n(A\cup B)$가 최소일 때 : $n(A\cap B)$가 최대가 되어야 하므로
$B\subset A$일 때 최대가 되고, 이때 $A\cup B=A$이므로
$n(A\cup B)=n(A)=20 \qquad \therefore b=20$
$\therefore a+b=27+20=47$ 답 ⑤

STEP 3 내신 마스터

0234
유형 02 서로소인 집합
|전략| 두 집합 A, B가 서로소이면 $A\cap B=\varnothing$이다.
두 집합 $A=\{a,\ 2a\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 30\}$에 대하여 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이려면 $a\notin B$, $2a\notin B$이어야 한다.
(ⅰ) a가 홀수일 때
$a\notin B$이므로 $2a\notin B$이려면
$2a>30 \qquad \therefore a>15$
(ⅱ) a가 짝수일 때
$a\notin B$이려면 $a>30$이고, 이때 $2a\notin B$이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 a는 $a>15$인 홀수이거나 $a>30$인 짝수이어야 한다.
따라서 a의 최솟값은 17이다. 답 ③

0235
유형 03 여집합과 차집합
|전략| 집합 U, A, B를 원소나열법으로 나타낸 후 먼저 $A\cup B$, $A\cap B$를 구해 본다.
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B=\{2,\ 5,\ 8\}$ 이므로
$A\cup B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$, $A\cap B=\{2,\ 8\}$
$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}-\{2,\ 8\}$
$=\{4,\ 5,\ 6\}$ 답 ③

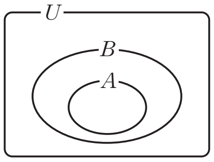
0236
유형 04 벤 다이어그램을 이용한 집합의 연산
|전략| 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내어 집합 A를 찾는다.
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$,
$A\cap B^C=A-B=\{3,\ 8\}$,
$B-A=\{1,\ 4,\ 9\}$,
$A\cup B=U-\{2,\ 7\}$
$=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$
이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore A=\{3,\ 5,\ 6,\ 8\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은 $3+5+6+8=22$ 답 ①

0237
유형 06 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기
|전략| $A-B=\{a\}$이면 $a\in A$, $a\notin B$임을 이용한다.
$A-B=\{6\}$이므로 $2\in B$, $4\in B$, $a^2-4a+10\in B$
이때, $B=\{2,\ 7,\ a^2-5\}$이므로
(ⅰ) $4\in B$에서 $a^2-5=4$
$a^2=9 \qquad \therefore a=\pm3$
(ⅱ) $a^2-4a+10\in B$에서 $a^2-4a+10=7$
$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=3$ 답 ⑤

0238
유형 08 집합의 연산의 성질과 포함 관계
|전략| $A\cap B^C=\varnothing$, 즉 $A-B=\varnothing$이면 $A\subset B$이므로 집합의 연산의 성질을 이용하여 옳지 않은 것을 찾는다.
A와 B^C이 서로소이므로 $A\cap B^C=\varnothing$
즉, $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$
$A\subset B$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B^C\subset A^C$, $A\cap B=A$,
$A-B=\varnothing$, $A^C\cap B^C=B^C$
④ $B\cap A^C=B-A\neq\varnothing$
답 ④

0239
유형 10 연산법칙을 이용하여 식 간단히 하기
|전략| 집합의 연산의 성질과 연산법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.
ㄱ. $\{(A\cup B^C)\cap B\}^C=(A\cup B^C)^C\cup B^C$ 드모르간의 법칙
$=(A^C\cap B)\cup B^C$ 드모르간의 법칙
$=(A^C\cup B^C)\cap(B\cup B^C)$ 분배법칙
$=(A\cap B)^C\cap U$ 드모르간의 법칙
$=(A\cap B)^C$
ㄴ. $(A\cap B^C)\cap(A^C\cap B)=(A\cap A^C)\cap(B^C\cap B)$ → 교환법칙
$=\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$
ㄷ. $\{A^C\cup(A\cap B^C)\}^C=A\cap(A\cap B^C)^C$ 드모르간의 법칙
$=A\cap(A^C\cup B)$ 드모르간의 법칙
$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$ 분배법칙
$=\varnothing\cup(A\cap B)$
$=A\cap B$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0240

유형 10 연산법칙을 이용하여 식 간단히 하기

| 전략 | 집합의 연산의 성질과 연산법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$(A^C-B)\cup(B\cup C)^C$

$=(A^C\cap B^C)\cup(B^C\cap C^C)$ 드모르간의 법칙

$=(B^C\cap A^C)\cup(B^C\cap C^C)$ 교환법칙

$=B^C\cap(A^C\cup C^C)$ 분배법칙

$=B^C\cap(A\cap C)^C$ 드모르간의 법칙

$=B^C-(A\cap C)$

답 ③

0241

유형 11 집합의 연산법칙과 포함 관계

| 전략 | 집합의 연산에 대한 등식을 연산법칙을 이용하여 간단히 한 후 두 집합의 포함 관계를 구한다.

$(A\cup B)\cap(B-A)^C=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C$ 드모르간의 법칙

$=(A\cup B)\cap(B^C\cup A)$ 교환법칙, 분배법칙

$=A\cup(B\cap B^C)$

$=A\cup\varnothing$

$=A$

즉, $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

따라서 $B\subset A$일 때 항상 옳은 것은 ④ $A^C\subset B^C$이다.

답 ④

0242

유형 14 방정식, 부등식과 집합의 연산

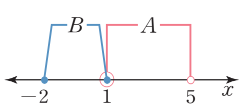
| 전략 | 집합 A의 부등식을 풀어 수직선 위에 나타낸 후 조건을 이용하여 집합 B를 구한다.

$x^2-6x+5<0$에서 $(x-1)(x-5)<0$ $\quad\therefore 1<x<5$

$\therefore A=\{x\mid 1<x<5\}$

$A\cap B=\varnothing$이고,

$A\cup B=\{x\mid -2\le x<5\}$이려면 오른쪽 그림에서



$B=\{x\mid -2\le x\le 1\}$

$=\{x\mid (x+2)(x-1)\le 0\}$

$=\{x\mid x^2+x-2\le 0\}$

따라서 $a=1$, $b=-2$이므로 $a+b=-1$

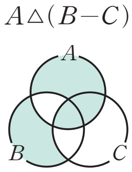
답 ②

0243

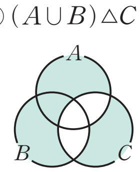
유형 05 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 나타내는 집합 + 15 새로운 집합의 연산

| 전략 | 새로운 집합의 연산의 약속에 따라 각 보기를 벤 다이어그램으로 나타낸 후 주어진 벤 다이어그램과 비교한다.

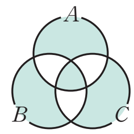
① $A\triangle(B-C)$



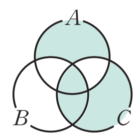
② $(A\cup B)\triangle C$



③ $(A\triangle B)\triangle C$



④ $(A-B)\triangle C$



답 ⑤

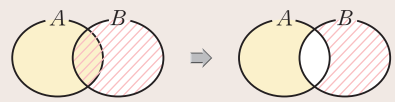
Lecture

$A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A-B)\cup(B-A)$

는 벤 다이어그램으로 나타내면 두 집합 A, B에 대하여 겹쳐지는 부분을 제거하고 남은 부분이다.



이를 이용하여 벤 다이어그램에 색칠한 부분과 빗금친 부분으로 두 집합을 각각 나타낸 후 겹쳐지는 부분을 제거하면 된다.

0244

유형 16 유한집합의 원소의 개수

| 전략 | $A\cap B=\varnothing$이면 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$이고, $n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)$임을 이용한다.

$n(A^C\cap B)=n(B\cap A^C)=n(B-A)=10$ …… ㉠

$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$이므로

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $n(A-B)=10$

$\therefore n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=18-10=8$

답 ④

0245

유형 17 유한집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값

| 전략 | $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로 먼저 $n(A\cap B)$의 최솟값과 최댓값을 구한다.

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=14-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)$가 최대일 때 $n(A-B)$는 최소이고,

$n(A\cap B)$가 최소일 때 $n(A-B)$는 최대이다.

(i) $B\subset A$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이고, 최댓값은 $n(B)=8$이다.

$\therefore m=14-8=6$

(ii) $A\cup B=U$일 때, $n(A\cap B)$가 최소이고, 최솟값은

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cap B)=14+8-20=2$

$\therefore M=14-2=12$

(i), (ii)에서 $M-m=6$

답 ③

0246

유형 18 유한집합의 원소의 개수의 활용

| 전략 | 주어진 모임을 전체집합 U와 그 부분집합 A, B로 나타낸 다음 다른 조건의 모임도 A, B로 나타내어 본다.

어느 학급 학생 전체의 집합을 U, A게임을 해본 학생의 집합을 A, B게임을 해본 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=27$, $n(A-B)=15$, $n(A^C\cap B^C)=5$

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A^C\cap B^C)$

$=40-5=35$

$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=27-15=12$

따라서 B게임을 해본 학생 수는

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$35=27+n(B)-12$ $\quad\therefore n(B)=20$ 답 ⑤

0247

유형 19 유한집합의 원소의 개수의 활용 – 최댓값과 최솟값

|전략| $n(B)$가 최대가 되려면 $n(A\cup B)$, $n(A\cap B)$가 최대, $n(B)$가 최소가 되려면 $n(A\cup B)$, $n(A\cap B)$가 최소이어야 한다.

어느 반 학생 전체의 집합을 U, A은행의 계좌를 갖고 있는 학생의 집합을 A, B은행의 계좌를 갖고 있는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35$, $n(A)=13$, $20\le n(A\cup B)\le 30$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$20\le n(A)+n(B)-n(A\cap B)\le 30$

$20\le 13+n(B)-n(A\cap B)\le 30$

$7+n(A\cap B)\le n(B)\le 17+n(A\cap B)$

이때, $0\le n(A\cap B)\le 13$이므로 $7\le n(B)\le 30$

따라서 $M=30$, $m=7$이므로 $M+m=37$ 답 ⑤

$(A\cap B)\subset A$이므로 $n(A\cap B)\le n(A)$

0248

유형 09 집합의 연산과 부분집합의 개수

|전략| $(A-B)\cup X=X$이면 $(A-B)\subset X$이고, $(A\cup B)\cap X=X$이면 $X\subset(A\cup B)$이다.

조건 (가)에서 $(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$

조건 (나)에서 $(A\cup B)\cap X=X$이므로 $X\subset(A\cup B)$

$\therefore (A-B)\subset X\subset(A\cup B)$ … ❶

이때, $A-B=\{1\}$, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$이므로

$\{1\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$을 만족시키는 집합 X는

$\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$의 부분집합 중 1을 반드시 원소로 갖는 집합이다. … ❷

따라서 집합 X의 개수는

$2^{6-1}=2^5=32$ … ❸

답 32

채점 기준	배점
❶ 조건 (가), (나)를 이용하여 집합 $A-B$, X, $A\cup B$ 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	2점
❷ ❶을 만족시키기 위한 조건을 구할 수 있다.	2점
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	2점

0249

유형 12 집합의 연산을 이용하여 집합의 원소 구하기

|전략| 먼저 주어진 식을 집합의 연산법칙을 이용하여 간단히 한 후 $B=(A\cap B)\cup(B-A)$임을 이용하여 집합 B를 구한다.

$A-(A-B)=A\cap(A\cap B^C)^C=A\cap(A^C\cup B)$

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B=\{3,\ 6\}$

$B-(A\cap B)=B\cap(A\cap B)^C=B\cap(A^C\cup B^C)$

$=(B\cap A^C)\cup(B\cap B^C)=(B\cap A^C)\cup\varnothing$

$=B\cap A^C=B-A=\{2,\ 7\}$ … ❶

이므로

$B=(A\cap B)\cup(B-A)=\{2,\ 3,\ 6,\ 7\}$ … ❷

이때, $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$에 대하여

$B^C=U-B=\{1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$ … ❸

따라서 집합 B^C의 모든 원소의 합은

$1+4+5+8+9=27$이다. … ❹

답 27

채점 기준	배점
❶ $A-(A-B)$, $B-(A\cap B)$를 간단히 할 수 있다.	4점
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	2점
❸ 집합 B^C을 구할 수 있다.	1점
❹ 집합 B^C의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	1점

0250

유형 13 배수와 약수의 집합의 연산

|전략| 자연수 p의 양의 배수의 집합을 A_p라 할 때, $A_k\cap A_l=A_m$이면 m은 k와 l의 최소공배수이고, $(A_k\cup A_l)\subset A_m$이면 m은 k와 l의 공약수이다.

(단, k, l, m은 자연수)

$A_3\cap A_5$는 3과 5의 공배수의 집합, 즉 15의 배수의 집합이므로

$A_3\cap A_5=A_{15}$

즉, $A_m\subset A_{15}$를 만족시키는 m은 15의 배수이므로 자연수 m의 최솟값은 15이다. … ❶

또, $(A_{18}\cup A_{24})\subset A_n$에서 $A_{18}\subset A_n$, $A_{24}\subset A_n$이므로 n은 18의 약수이고, 24의 약수이다.

즉, n은 $\underbrace{18\text{과 }24\text{의 공약수}}_{1,\ 2,\ 3,\ 6}$이므로 자연수 n의 최댓값은 6이다. … ❷

따라서 구하는 값은 $15+6=21$ … ❸

답 21

채점 기준	배점
❶ 자연수 m의 최솟값을 구할 수 있다.	3점
❷ 자연수 n의 최댓값을 구할 수 있다.	3점
❸ m의 최솟값과 n의 최댓값의 합을 구할 수 있다.	1점

0251

유형 06 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기

|전략| $A\cap B=\{a,\ d\}$에서 $a\in B$, $d\in B$이므로 주어진 조건을 이용하여 먼저 a, d의 값을 구한다.

(1) $A\cap B=\{a,\ d\}$에서 $a\in B$이므로 $a=a^2$ ($\because a<b<c<d$)

이때, a는 자연수이므로 $a=1$

$a+d=10$이므로 $d=9$

(2) $9\in B$이므로 $b^2=9$ 또는 $c^2=9$

즉, $b=3$ 또는 $c=3$

이때, $1\in A$, $3\in A$, $9\in A$이므로 집합 A의 나머지 원소를 x라 하면

$A=\{1,\ 3,\ 9,\ x\}$, $B=\{1,\ 3^2,\ 9^2,\ x^2\}$

$A\cup B=\{1,\ 3,\ 9,\ x,\ 81,\ x^2\}$이고, $A\cup B$의 모든 원소의 합이 114이므로

$1+3+9+x+81+x^2=114$

$x^2+x-20=0$, $(x+5)(x-4)=0$

$\therefore x=4$ ($\because$ x는 자연수)

$\therefore A=\{1,\ 3,\ 4,\ 9\}$

(3) 집합 A의 모든 원소의 합은 $1+3+4+9=17$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) a, d의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) 집합 A를 구할 수 있다.	6점
(3) 집합 A의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	2점

0252

유형 11 집합의 연산법칙과 포함 관계

|전략| 연산법칙을 이용하여 주어진 등식을 간단히 한 후 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 알아본다.

(1) $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap\{(A-B)^C\cap(A\cup B)\}$

$=\{(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\}\cap\{(A\cap B^C)^C\cap(A\cup B)\}$

분배법칙, 드모르간의 법칙

$=\{A\cap(B^C\cup B)\}\cap\{(A^C\cup B)\cap(A\cup B)\}$

분배법칙

$=(A\cap U)\cap\{(A^C\cap A)\cup B\}$

$=A\cap(\varnothing\cup B)=A\cap B$

즉, $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$

(2) 집합 A는 집합 B의 부분집합이고, $n(B)=4$이므로 집합 A의 개수는 $2^4=16$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap\{(A-B)^C\cap(A\cup B)\}=A$를 간단히 한 후 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	6점
(2) 조건을 만족시키는 집합 A의 개수를 구할 수 있다.	4점

창의·융합 교과서 속 심화문제

0253

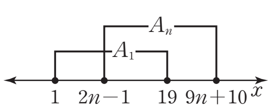
|전략| 집합 A_n(n은 자연수)을 수직선 위에 나타내고 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n\neq\varnothing$이 성립하려면 ($A_n$의 원소의 최솟값)$\le$($A_1$의 원소의 최댓값)임을 이해한다.

$A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n\neq\varnothing$이 성립하려면 $A_1\cap A_n\neq\varnothing$이어야 한다.

이때, $A_1=\{x\mid 1\le x\le 19,\ x$는 정수$\}$,

$A_n=\{x\mid 2n-1\le x\le 9n+10,\ x$는 정수$\}$

이므로 오른쪽 그림에서



$2n-1\le 19$

$2n\le 20$ $\quad\therefore n\le 10$

따라서 자연수 n의 최댓값은 10이다.

답 10

다른 풀이 $A_1=\{x\mid 1\le x\le 19,\ x$는 정수$\}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 19\}$

$A_2=\{x\mid 3\le x\le 28,\ x$는 정수$\}=\{3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 28\}$

$A_3=\{x\mid 5\le x\le 37,\ x$는 정수$\}=\{5,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ 37\}$

$\vdots$

$A_{10}=\{x\mid 19\le x\le 100,\ x$는 정수$\}=\{19,\ 20,\ 21,\ \cdots,\ 100\}$

$A_{11}=\{x\mid 21\le x\le 109,\ x$는 정수$\}=\{21,\ 22,\ 23,\ \cdots,\ 109\}$

이때, $A_1\cap A_{11}=\varnothing$

따라서 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n\neq\varnothing$이 성립하려면 $n\le 10$이어야 하므로 n의 최댓값은 10이다.

0254

|전략| 집합 A의 원소의 합을 $S(A)$라 하면 두 집합 A, B에 대하여 $S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$임을 이용한다.

$n(A)=5$이므로 집합 $A=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$라 하면

집합 $B=\left\{\dfrac{x+a}{2}\,\middle|\,x\in A\right\}$에서

$B=\left\{\dfrac{x_1+a}{2},\ \dfrac{x_2+a}{2},\ \dfrac{x_3+a}{2},\ \dfrac{x_4+a}{2},\ \dfrac{x_5+a}{2}\right\}$

두 집합 A, B에 대하여 집합 A의 원소의 합을 $S(A)$라 할 때,

$S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$

이때, 조건 (가)에서 집합 A의 모든 원소의 합이 28이므로

$S(A)=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=28$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합이 49이므로

$S(A\cup B)=49$

조건 (다)에서 $A\cap B=\{10,\ 13\}$이므로

$S(A\cap B)=10+13=23$

$S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$에 대입하면

$49=28+S(B)-23$

$\therefore S(B)=44$

이때, 집합 B의 모든 원소의 합은

$$S(B)=\frac{x_1+a}{2}+\frac{x_2+a}{2}+\frac{x_3+a}{2}+\frac{x_4+a}{2}+\frac{x_5+a}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+\frac{5}{2}a$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 28+\frac{5}{2}a\ (\because ㉠)$$

$$=14+\frac{5}{2}a$$

이므로 $14+\dfrac{5}{2}a=44$, $\dfrac{5}{2}a=30$

$\therefore a=12$

답 12

0255

|전략| k의 값을 1, 2, 3, 4, 5일 때로 나누어 $\left[\dfrac{9}{4}k\right]$, $\left[\dfrac{9}{5}k\right]$의 값을 구해 본다.

k는 $k\ge 1$인 정수이므로

(i) $k=1$일 때, $\left[\dfrac{9}{4}k\right]=\left[\dfrac{9}{4}\right]=2$, $\left[\dfrac{9}{5}k\right]=\left[\dfrac{9}{5}\right]=1$

(ii) $k=2$일 때, $\left[\frac{9}{4}k\right]=\left[\frac{9}{2}\right]=4$, $\left[\frac{9}{5}k\right]=\left[\frac{18}{5}\right]=3$

(iii) $k=3$일 때, $\left[\frac{9}{4}k\right]=\left[\frac{27}{4}\right]=6$, $\left[\frac{9}{5}k\right]=\left[\frac{27}{5}\right]=5$

(iv) $k=4$일 때, $\left[\frac{9}{4}k\right]=[9]=9$, $\left[\frac{9}{5}k\right]=\left[\frac{36}{5}\right]=7$

(v) $k=5$일 때, $\left[\frac{9}{4}k\right]=\left[\frac{45}{4}\right]=11$, $\left[\frac{9}{5}k\right]=[9]=9$

(i)~(v)에서

$A=\left\{\left[\frac{9}{4}k\right] \middle| k\text{는 } 1\le k\le 4\text{인 정수}\right\}=\{2, 4, 6, 9\}$

$B=\left\{\left[\frac{9}{5}k\right] \middle| k\text{는 } 1\le k\le 5\text{인 정수}\right\}=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

일 때, $A\cap B\neq\varnothing$이다.

따라서 조건을 만족시키는 a의 최솟값은 4, b의 최솟값은 5이므로 구하는 ab의 최솟값은 $4\cdot5=20$ 답 ③

0256

| 전략 | $A_n\cap A_2=A_{2n}$에서 n과 2의 관계를 구하고, $90\in(A_2-A_n)$에서 n과 90의 관계를 구한다.

$A_n\cap A_2$는 n과 2의 공배수의 집합이고, A_{2n}은 $2n$의 배수의 집합이다.

$A_n\cap A_2=A_{2n}$에서 n과 2의 공배수의 집합이 $2n$의 배수의 집합과 같으므로 n과 2는 서로소이다.

즉, n은 홀수이다. …… ㉠

$90\in(A_2-A_n)$에서 $90\in A_2$, $90\notin A_n$이므로 90은 n의 배수가 아니다.

즉, n은 90의 약수가 아니다. …… ㉡

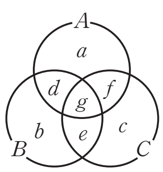
㉠, ㉡에서 n은 90 이하의 홀수 중 90의 약수가 아닌 수이다.

따라서 90 이하의 홀수는 45개이고, 90의 약수 중 홀수는 1, 3, 5, 9, 15, 45의 6개이므로 n의 개수는

$45-6=39$ 답 39

0257

| 전략 | 각 집합에 속하는 원소의 개수를 벤 다이어그램을 이용하여 나타내어 본다.



오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 a, b, c, d, e, f, g로 나타내면

$n(A\cup B\cup C)=40$, $n(A\triangledown B)=30$,

$n(B\triangledown C)=20$, $n(C\triangledown A)=10$

이므로

$a+b+c+d+e+f+g=40$ …… ㉠

$a+f+b+e=30$ …… ㉡

$b+d+c+f=20$ …… ㉢

$a+d+c+e=10$ …… ㉣

㉡+㉢+㉣을 하면

$2(a+b+c+d+e+f)=60$

$\therefore a+b+c+d+e+f=30$ …… ㉤

㉠−㉤을 하면 $g=10$

$\therefore n(A\cap B\cap C)=10$ 답 10

다른 풀이 $n(A\cup B\cup C)=40$에서

$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$

$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=40$ …… ㉠

$n(A\triangledown B)=30$에서

$n(A)+n(B)-2\times n(A\cap B)=30$ …… ㉡

$n(B\triangledown C)=20$에서

$n(B)+n(C)-2\times n(B\cap C)=20$ …… ㉢

$n(C\triangledown A)=10$에서

$n(C)+n(A)-2\times n(C\cap A)=10$ …… ㉣

㉡+㉢+㉣을 하면

$2\times n(A)+2\times n(B)+2\times n(C)$

$-2\times n(A\cap B)-2\times n(B\cap C)-2\times n(C\cap A)$

$=60$

$\therefore n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)=30$

…… ㉤

㉠−㉤을 하면 $n(A\cap B\cap C)=10$

0258

| 전략 | $n(A-B)$를 $n(A\cap B)$에 대한 식으로 만든 후 $n(A\cap B)$가 최소일 때, $n(A-B)$가 최대임을 이용한다.

어느 학교 학생 전체의 집합을 U, 두 과자 A, B를 선호하는 학생의 집합을 각각 A, B라 하면

$n(U)=200$ …… ㉠

$n(A)=n(B)+20$ $\quad\therefore n(B)=n(A)-20$ …… ㉡

$n(A^C\cap B^C)=n(A\cup B)-100$ …… ㉢

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

㉠, ㉢에서 $200-n(A\cup B)=n(A\cup B)-100$

$2\times n(A\cup B)=300$ $\quad\therefore n(A\cup B)=150$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로 ㉡에서

$150=n(A)+n(A)-20-n(A\cap B)$

$2\times n(A)=170+n(A\cap B)$

$\therefore n(A)=\frac{170+n(A\cap B)}{2}$

이때, 과자 A만을 선호하는 학생의 집합은 $A-B$이고,

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

이므로 $n(A\cap B)$가 최소일 때, $n(A-B)$는 최대가 된다.

그런데 $0\le n(A\cap B)\le n(B)$에서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 0이므로

$n(A-B)$의 최댓값은 $\frac{170-0}{2}=85$

따라서 과자 A만을 선호하는 학생 수의 최댓값은 85이다. 답 85

본책 44~67쪽

3 | 명제

STEP 1 개념 마스터 ❶

0259

4의 배수 4, 8, 12, …는 모두 2의 배수이므로 참인 명제이다.

답 참인 명제

0260

x의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 조건이다. 답 조건

참고 $x^2-2x-3=0$은 $x=-1$ 또는 $x=3$일 때에만 참이 된다.

0261

$\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 거짓인 명제이다. 답 거짓인 명제

0262

실수 x에 대하여 $|x|\geq 0$이므로 $|x|+1>0$은 참인 명제이다.

답 참인 명제

0263

$2x-6>4$에서 $2x>10$ $\quad\therefore x>5$

따라서 조건 p의 진리집합은 $\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ 답 $\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

0264

10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7이므로 조건 q의 진리집합은

$\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 답 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

0265

$x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 조건 r의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 답 $\{2,\ 3\}$

0266 답 (가) 참 (나) 홀수 (다) 거짓

0267 답 $\sqrt{9}$는 무리수가 아니다. (참)

0268 답 1은 소수이거나 합성수이다. (거짓)

0269

$\sim p$: x는 10의 약수가 아니다.

10의 약수는 1, 2, 5, 10이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은

$\{3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ 답 풀이 참조

0270

$\sim q$: $x^2-4x+3\neq 0$

$x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 조건 $\sim q$의 진리집합은

$\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ 답 풀이 참조

0271 답 $-2\leq x\leq 3$

0272 답 $x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$

0273 답 $x\leq -1$ 또는 $x>4$

0274 답 (1) $a>0$이다.

(2) $-a<0$이다.

0275 답 (1) a, b가 2의 배수이다.

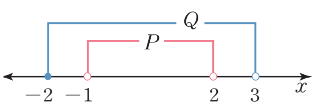
(2) $a+b$가 2의 배수이다.

0276 답 (1) $\triangle$ABC에서 $\angle$B$=\angle$C이다.

(2) $\triangle$ABC에서 $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{AC}}$이다.

0277

두 조건 p : $-1<x<2$, q : $-2\leq x<3$의 진리집합을 각각 P, Q라 하면



따라서 $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다. 답 참

0278

[반례] $x=-2$이면 $x^2=4$이지만 $x\neq 2$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

다른 풀이 두 조건 p : $x^2=4$, q : $x=2$의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=\{-2,\ 2\}$, $Q=\{2\}$

$\therefore P\not\subset Q$

따라서 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

0279
[반례] $x=0$이면 $x^2=0$이다. 답 거짓

0280
(홀수)×(홀수)=(홀수), (홀수)×(짝수)=(짝수),
(짝수)×(홀수)=(짝수), (짝수)×(짝수)=(짝수)
이므로 주어진 명제는 참이다. 답 참

0281
[반례] $a=-3$, $b=\sqrt{3}$이면 $a+b\sqrt{3}=0$이지만 $a\neq0$, $b\neq0$이다.
답 거짓

0282
[반례] $x=0$이면 $|x|=0$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다. 답 거짓

0283
$x=0$이면 $x^2=0$이므로 주어진 명제는 참이다. 답 참

0284 답 어떤 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2}\neq|x|$이다.

0285 답 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x}\le0$이다.

0286 답 역 : $a=0$이고 $b=0$이면 $a^2+b^2=0$이다.
대우 : $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이면 $a^2+b^2\neq0$이다.

0287 답 역 : x와 y가 모두 유리수이면 $x+y$는 유리수이다.
대우 : x 또는 y가 무리수이면 $x+y$는 무리수이다.

0288 답 역 : 이등변삼각형이면 정삼각형이다.
대우 : 이등변삼각형이 아니면 정삼각형이 아니다.

0289 답 (1) $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다. (2) 참 (3) 참

0290
명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 반드시 참인 명제는 그 대우인
$q \longrightarrow \sim p$이다. 답 ③

0291
$Q\subset P$이므로 명제 $q \longrightarrow p$가 참이다.
따라서 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이므로 반드시 참인 명제인 것은
ㄹ, ㅂ이다. 답 ㄹ, ㅂ

0292
3의 양의 약수이면 모두 6의 양의 약수이므로 $p \Longrightarrow q$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

0293
$x^2-x=0$에서 $x(x-1)=0$
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$
따라서 $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다. 답 필요조건

0294
$x^2=y^2$이면 $x=-y$ 또는 $x=y$
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

0295
$xy<0$이면 $x<0$, $y>0$ 또는 $x>0$, $y<0$
따라서 $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다. 답 충분조건

0296
$A\subset B$이면 $A-B=\varnothing$이고, $A-B=\varnothing$이면 $A\subset B$이다.
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
답 필요충분조건

0297
$xy=0 \Longleftrightarrow x=0$ 또는 $y=0$
따라서 $xy=0$은 $x=0$ 또는 $y=0$이기 위한 필요충분조건이다.
답 필요충분조건

0298
$x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow x=0,\ y=0$
$x=0,\ y=0 \Longrightarrow x=0$ 또는 $y=0$
따라서 $x^2+y^2=0$은 $x=0$ 또는 $y=0$이기 위한 충분조건이다.
답 충분조건

0299
$(x+y)^2\ge0 \Longleftrightarrow x+y$는 실수
$x=0$ 또는 $y=0 \Longrightarrow x+y$는 실수
따라서 $(x+y)^2\ge0$은 $x=0$ 또는 $y=0$이기 위한 필요조건이다.
답 필요조건

0300
$|x|+|y|=0 \Longleftrightarrow x=0,\ y=0$
$x=0,\ y=0 \Longrightarrow x=0$ 또는 $y=0$
따라서 $|x|+|y|=0$은 $x=0$ 또는 $y=0$이기 위한 충분조건이다.
답 충분조건

0301

(1) $P=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Q=\{0,\ 1\}$, $R=\{-1,\ 0,\ 1\}$

(2) $Q\subset P$이므로 $q\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(3) $P=R$이므로 $p\Longleftrightarrow r$

따라서 p는 r이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) $P=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Q=\{0,\ 1\}$, $R=\{-1,\ 0,\ 1\}$
(2) 필요조건 (3) 필요충분조건

STEP 2 유형 마스터 ❶

0302

|전략| 미지수의 값에 따라 참, 거짓이 달라지는 식이나 사람에 따라 기준이 달라질 수 있는 문장은 명제가 아님을 이용한다.

①, ②, ⑤ '재미있다', '크다', '많다', '좋다' 등은 주관적인 견해이므로 참, 거짓을 판별할 수 없다.

따라서 명제가 아니다.

③ 거짓인 명제이다.

④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다. (조건이다.)

따라서 명제인 것은 ③이다. 답 ③

0303

ㄱ. 거짓인 명제이다.

ㄴ. 참인 명제이다.

ㄷ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다. (조건이다.)

ㄹ. '멋지다'는 주관적인 견해이므로 참, 거짓을 판별할 수 없다.

따라서 명제가 아니다.

ㅁ. 참인 명제이다.

따라서 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㅁ

0304

①, ⑤ 거짓인 명제이다.

②, ④ 참인 명제이다. 답 ③

0305

|전략| '$=$'의 부정은 '$\neq$'임을 이용한다.

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$의 부정은

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$

$(a-b)^2\neq 0$ 또는 $(b-c)^2\neq 0$ 또는 $(c-a)^2\neq 0$

$\therefore$ $a\neq b$ 또는 $b\neq c$ 또는 $c\neq a$

즉, $a,\ b,\ c$ 중에 서로 다른 것이 적어도 하나 있다. 답 ⑤

0306

'두 실수 $x,\ y$ 중 적어도 하나는 무리수이다.'의 부정은

'두 실수 $x,\ y$ 중 무리수는 없다.'

즉, '두 실수 $x,\ y$는 모두 유리수이다.' 답 ④

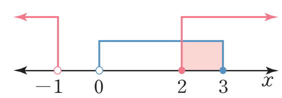
0307

'p 또는 $\sim q$'의 부정은 '$\sim p$이고 q'이다.

$\sim p$: $x<-1$ 또는 $x\geq 2$,

q : $0<x\leq 3$이므로

'$\sim p$이고 q'는 $2\leq x\leq 3$



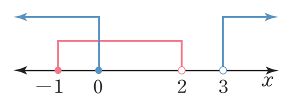
답 $2\leq x\leq 3$

다른 풀이 p : $-1\leq x<2$,

$\sim q$: $x\leq 0$ 또는 $x>3$이므로

'p 또는 $\sim q$'는 $x<2$ 또는 $x>3$

따라서 'p 또는 $\sim q$'의 부정은 $2\leq x\leq 3$



0308

|전략| 먼저 전체집합 U를 구한 다음 조건 p의 진리집합을 구해 본다.

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$이고 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1,\ 2,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$

따라서 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{3,\ 4\}$ 답 $\{3,\ 4\}$

0309

$P=\{x\mid f(x)=0\}$, $Q=\{x\mid g(x)=0\}$이고

$f(x)g(x)=0$에서 $f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$

따라서 조건 $f(x)g(x)=0$의 진리집합은 $P\cup Q$ 답 ②

0310

$P=\{x\mid x\geq 2\}$, $Q=\{x\mid x<-1\}$에서

$P^C=\{x\mid x<2\}$, $Q^C=\{x\mid x\geq -1\}$

이때, 조건 $-1\leq x<2$의 진리집합은 $\{x\mid -1\leq x<2\}$이므로 구하는 집합은

$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$ 답 ②

0311

$U=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

$x^2-x=0$에서 $x(x-1)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$

조건 p의 진리집합을 P라 하면 $P=\{0,\ 1\}$ ··· ❶

$x^2=1$에서 $x=\pm 1$

조건 q의 진리집합을 Q라 하면 $Q=\{-1,\ 1\}$ ··· ❷

이때, '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은 $P^C\cup Q$이고 $P^C=\{-2,\ -1,\ 2\}$이므로 $P^C\cup Q=\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$ ··· ❸

따라서 구하는 집합의 모든 원소의 곱은

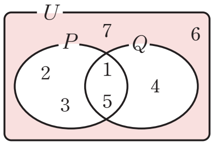
$-2\cdot(-1)\cdot1\cdot2=4$ ··· ❹

답 4

채점 기준	비율
❶ 조건 p의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 q의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❸ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합의 모든 원소의 곱을 구할 수 있다.	10 %

0312

| 전략 | 조건 $\sim p$의 진리집합의 원소 중에서 조건 q의 진리집합의 원소가 아닌 것을 찾는다.



명제 '$\sim p$이면 q이다.'가 거짓임을 보이려면 P^C의 원소 중에서 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 반례는 집합 $P^C\cap Q^C$의 원소인 6, 7이므로 구하는 모든 원소의 합은

$6+7=13$ 답 13

0313

주어진 명제에 대하여 두 조건 p, q를 각각

p : x는 홀수이다.

q : x는 소수이다.

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Q=\{2, 3, 5, 7\}$

이때, 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P\cap Q^C$의 원소이다.

따라서 구하는 반례는 1, 9이다. 답 1, 9

0314

명제 '$\sim p$이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이려면 P^C의 원소 중에서 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 반례가 속하는 집합은

$P^C\cap(Q^C)^C=P^C\cap Q$ 답 ⑤

0315

명제 'p 또는 q이면 r이다.'가 거짓임을 보이려면 $P\cup Q$의 원소 중에서 R의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 반례는 집합 $\underbrace{(P\cup Q)\cap R^C}_{\{a, b, e\}\cap\{a, d\}=\{a\}}$의 원소인 a이다. 답 a

0316

| 전략 | 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이려면 조건 p는 만족시키지만 조건 q는 만족시키지 않는 반례를 찾는다.

ㄱ. $|x|<1$에서 $-1<x<1$

즉, $-1<x<1$이면 $x<1$이다. (참)

ㄴ. [반례] $x=-2$이면 $x\neq2$이지만 $x^2=4$이다. (거짓)

ㄷ. $x=3$이면 $x^2-3x=3^2-3\cdot3=0$ (참)

ㄹ. [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 x, y는 모두 무리수이지만 $x+y=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$, $xy=\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})=-2$로 모두 유리수이다. (거짓)

따라서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0317

③ [반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x+y=0$이지만 $x\neq0$, $y\neq0$이다. (거짓)

⑤ [반례] 1은 16의 양의 약수이지만 2의 배수가 아니다. (거짓)

답 ③, ⑤

0318

ㄱ. [반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2=1\neq0$이다. (거짓)

ㄴ. [반례] $x=0$, $y=-1$이면 $x>y$이지만 $x^2<y^2$이다. (거짓)

ㄹ. [반례] $\angle A=\angle C\neq\angle B$이면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이지만 $\angle A\neq\angle B$이다. (거짓)

따라서 참인 명제인 것은 ㄷ이다. 답 ②

0319

| 전략 | 주어진 각 조건들의 진리집합 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램에서 찾아본다.

① $R\subset Q^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$는 참

② $R\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 참

③ $P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참

④ $P\subset Q$에서 $Q^C\subset P^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참

⑤ $P\not\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 거짓 답 ⑤

0320

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이면 $P\subset Q^C$, 즉 $P\cap Q^C=P$

따라서 항상 옳은 것은 ③ $P-Q=P$이다. 답 ③

0321

$P\cup Q=P$이므로 $Q\subset P$ ······ ㉠

$Q\cap R=Q$이므로 $Q\subset R$ ······ ㉡

따라서 명제 $q \longrightarrow p$와 $q \longrightarrow r$는 참이다.

또, ㉠에서 $P^C\subset Q^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이고

㉡에서 $R^C\subset Q^C$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다. 답 ⑤

0322

조건 (가)에서 $P\cap Q=P$이므로 $P\subset Q$ ······ ㉠

조건 (나)에서 $P\cup R^C=R^C$이므로 $P\subset R^C$ ······ ㉡

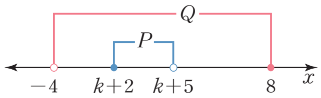
따라서 명제 $p \longrightarrow q$와 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

또, ㉠에서 $Q^C \subset P^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이고
㉡에서 $R \subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다. 답 ④

0323

| 전략 | 두 조건 p, q의 진리집합을 P, Q라 할 때, 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 수직선 위에 나타내어 본다.

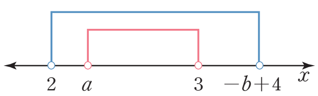
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x \mid k+2 \le x < k+5\}$, $Q=\{x \mid -4 < x \le 8\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-4 < k+2$, $k+5 \le 8$
즉, $k > -6$, $k \le 3$
$\therefore -6 < k \le 3$
따라서 구하는 정수 k는 $-5, -4, -3, \cdots, 2, 3$의 9개이다. 답 ④

0324

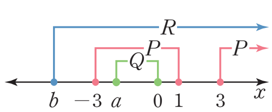
주어진 명제가 참이 되려면 $\{x \mid a < x < 3\} \subset \{x \mid 2 < x < -b+4\}$이어야 하므로 다음 그림에서



$2 \le a < 3$, $-b+4 \ge 3$
$\therefore 2 \le a < 3$, $b \le 1$
따라서 a의 최솟값은 $\alpha=2$, b의 최댓값은 $\beta=1$이므로
$\alpha+\beta=3$ 답 ③

0325

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면
$P=\{x \mid -3 \le x \le 1$ 또는 $x \ge 3\}$
$Q=\{x \mid a \le x \le 0\}$
$R=\{x \mid x \ge b\}$
명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q \subset P$이고, 명제 $p \longrightarrow r$가 참이 되려면 $P \subset R$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

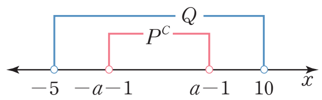


$-3 \le a \le 0$, $b \le -3$
따라서 a의 최솟값은 -3, b의 최댓값은 -3이므로 구하는 곱은
$(-3)\cdot(-3)=9$ 답 9

0326

$p : |x+1| \ge a$에서 $\sim p : |x+1| < a$이므로
$-a < x+1 < a$ $\quad \therefore -a-1 < x < a-1$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P^C=\{x \mid -a-1 < x < a-1\}$, $Q=\{x \mid -5 < x < 10\}$ ··· ❶

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서 ··· ❷



$-5 \le -a-1$, $a-1 \le 10$
즉, $a \le 4$, $a \le 11$
$\therefore 0 < a \le 4$ ($\because a > 0$) ··· ❸
따라서 양수 a의 최댓값은 4이다. ··· ❹

답 4

채점 기준	비율
❶ 두 조건 $\sim p$, q의 진리집합을 구할 수 있다.	20 %
❷ 두 조건 $\sim p$, q의 진리집합 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0327

ㄱ. [반례] $x=-1$이면 $x \ne |x|$이므로 거짓이다.
ㄴ. $x=0$이면 $x^2=0$이므로 참이다.
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$이므로 참이다.
ㄹ. $|x| < 0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 거짓이다.
따라서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0328

① 가장 큰 원소인 $x=5$일 때도 $x-1=4$이므로 참이다.
② $x=1$이면 $x^2-1=0$이므로 참이다.
③ $x=1$, $y=1$이면 $x+y=2$이므로 참이다.
④ [반례] $x=1$이면 $|x-x^2|=0$이므로 거짓이다.
⑤ $x=1$, $y=2$이면 $x^2+y^2=5$이므로 참이다. 답 ④

0329

| 전략 | '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'이고, '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'임을 이용한다.

① 부정 : 모든 실수 x에 대하여 $x < |x|$이다.
[반례] $x=1$이면 $x=|x|$이므로 거짓이다.
② 부정 : 모든 실수 x에 대하여 $x+\frac{1}{x} < 2$이다.
[반례] $x=1$이면 $x+\frac{1}{x}=2$이므로 거짓이다.
③ 부정 : 모든 실수 x에 대하여 $x^2 < x-1$이다.
[반례] $x=0$이면 $x^2 > x-1$이므로 거짓이다.
④ 부정 : 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+6x+10 \le 0$이다.
모든 실수 x에 대하여 $x^2+6x+10=(x+3)^2+1 \ge 1$이므로 거짓이다.
⑤ 부정 : 어떤 실수 x, y에 대하여 $|x+y|=|x|+|y|$이다.
이때, $x=1$, $y=1$이면 $|x+y|=|x|+|y|=2$이므로 참이다.
답 ⑤

0330

|전략| 주어진 명제의 가정과 결론을 서로 바꾸어 그 역을 찾은 다음 그것의 참, 거짓을 판별한다.

① 역 : $xy=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다. (거짓)

[반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $y\neq0$이다.

② 역 : $x\le1$이면 $x^2\le1$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$이면 $x\le1$이지만 $x^2=4>1$이다.

③ 역 : $x>1$ 또는 $y>1$이면 $x+y>2$이다. (거짓)

[반례] $x=2$, $y=-3$이면 $x>1$이지만 $x+y=-1<2$이다.

④ 역 : $x^2=4$이면 $x=-2$이다. (거짓)

[반례] $x=2$이면 $x^2=4$이지만 $x\neq-2$이다.

⑤ 역 : x, y가 짝수이면 xy는 짝수이다. (참) 답 ⑤

참고 (짝수)×(짝수)=(짝수)이다.

0331

① 명제 : $x^2=9$이면 $x=3$이다. (거짓)

[반례] $x=-3$이면 $x^2=9$이지만 $x\neq3$이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

② 명제 : $x>y$이면 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$이다. (거짓)

[반례] $x=2$, $y=-1$이면 $x>y$이지만 $\frac{1}{2}>-1$이 되어 $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

③ 명제 : $xy=yz$이면 $x=z$이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=0$, $z=2$이면 $xy=yz=0$이지만 $x\neq z$이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

④ 대우 : $x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (참)

⑤ 명제 : xy가 유리수이면 x, y는 모두 유리수이다. (거짓)

[반례] $x=\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$이면 $xy=-3$은 유리수이지만 x, y는 모두 유리수가 아니다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다. 답 ④

0332

ㄱ. (i) 명제 : $|x|+|y|=0$이면 $x=0$, $y=0$이므로 $x^2+y^2=0$이다. (참)

주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

(ii) 역 : $x^2+y^2=0$이면 $|x|+|y|=0$이다.

이때, $x^2+y^2=0$에서 $x=0$, $y=0$이므로 $|x|+|y|=0$이다. (참)

ㄴ. (i) 명제 : $x^2=1$이면 $x^3=1$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x^3=-1$이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

(ii) 역 : $x^3=1$이면 $x^2=1$이다.

이때, x는 실수이므로 $x^3=1$에서 $x=1$

$x=1$이면 $x^2=1$이다. (참)

ㄷ. (i) 명제 : $x\ge1$이고 $y\ge1$이면 $x+y\ge2$이다. (참)

주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

(ii) 역 : $x+y\ge2$이면 $x\ge1$이고 $y\ge1$이다. (거짓)

[반례] $x=2$, $y=0$이면 $x+y\ge2$이지만 $y<1$이다.

ㄹ. (i) 명제 : 자연수 x, y에 대하여 x^2+y^2이 짝수이면 xy는 짝수이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=1$이면 $x^2+y^2=2$는 짝수이지만 $xy=1$은 홀수이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

(ii) 역 : 자연수 x, y에 대하여 xy가 짝수이면 x^2+y^2은 짝수이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=2$이면 $xy=2$는 짝수이지만 $x^2+y^2=5$는 홀수이다.

따라서 그 역이 참이고, 대우가 거짓인 명제인 것은 ㄴ이다. 답 ㄴ

0333

|전략| 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용한다.

명제 '$4x^2-ax+3\neq0$이면 $2x-3\neq0$이다.'가 참이므로 그 대우 '$2x-3=0$이면 $4x^2-ax+3=0$이다.'도 참이다.

$x=\frac{3}{2}$을 $4x^2-ax+3=0$에 대입하면

$4\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}a+3=0$, $\frac{3}{2}a=12$

$\therefore a=8$ 답 ④

0334

명제 '$a+b<6$이면 $a<1$ 또는 $b<k$이다.'가 참이 되려면 그 대우 '$a\ge1$이고 $b\ge k$이면 $a+b\ge6$이다.'도 참이 되어야 한다. ··· ❶

이때, $a\ge1$, $b\ge k$에서 $a+b\ge1+k$이므로

'$a+b\ge1+k$이면 $a+b\ge6$이다.'가 참이 되려면

$1+k\ge6 \qquad \therefore k\ge5$ ··· ❷

답 $k\ge5$

채점 기준	비율
❶ 주어진 명제의 대우가 참임을 알 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %

0335

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이 되어야 한다.

p : $|x-1|\ge2$에서 $\sim p$: $|x-1|<2$

$-2<x-1<2 \qquad \therefore -1<x<3$

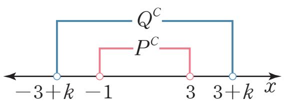
q : $|x-k|\ge3$에서 $\sim q$: $|x-k|<3$

$-3<x-k<3 \qquad \therefore -3+k<x<3+k$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x\,|\,-1<x<3\}$, $Q^C=\{x\,|\,-3+k<x<3+k\}$

명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P^C \subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-3+k \le -1$, $3 \le 3+k$

$\therefore 0 \le k \le 2$

따라서 정수 k는 0, 1, 2의 3개이다. 답 ③

다른 풀이 p : $|x-1| \ge 2$에서 $x-1 \le -2$ 또는 $x-1 \ge 2$

$\therefore x \le -1$ 또는 $x \ge 3$

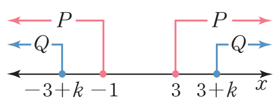
q : $|x-k| \ge 3$에서 $x-k \le -3$ 또는 $x-k \ge 3$

$\therefore x \le -3+k$ 또는 $x \ge 3+k$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid x \le -1$ 또는 $x \ge 3\}$, $Q=\{x \mid x \le -3+k$ 또는 $x \ge 3+k\}$

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-3+k \le -1$, $3 \le 3+k$

$\therefore 0 \le k \le 2$

따라서 정수 k는 0, 1, 2의 3개이다.

0336

|전략| 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이면 $p \longrightarrow r$도 참임을 이용한다.

$\sim q \longrightarrow p$와 $r \longrightarrow \sim p$가 참이므로 각각의 대우 $\sim p \longrightarrow q$, $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

또한, $\sim q \longrightarrow p$와 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0337

$P \cap Q = \varnothing$에서 $P \subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이다.

$Q \cup R^C = Q$에서 $R^C \subset Q$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow q$가 참이다.

$R \cap S = R$에서 $R \subset S$이므로 명제 $r \longrightarrow s$가 참이다.

명제 $\sim r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow r$도 참이다.

$p \longrightarrow \sim q$와 $\sim q \longrightarrow r$가 참이므로 $p \longrightarrow r$도 참이다.

$p \longrightarrow r$와 $r \longrightarrow s$가 참이므로 $p \longrightarrow s$가 참이고 그 대우 $\sim s \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ⑤ $\sim s \longrightarrow \sim p$이다. 답 ⑤

0338

ㄱ. $s \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow r$가 참이므로 $s \longrightarrow r$가 참이고 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim s$도 참이다.

ㄴ. $r \longrightarrow s$와 $s \longrightarrow q$가 참이므로 $r \longrightarrow q$가 참이고 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

ㄷ. 명제 $p \longrightarrow q$는 참이지만 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$의 참, 거짓은 추론할 수 없다.

따라서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0339

명제 $\sim s \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow s$도 참이다.

$p \longrightarrow \sim q$와 $r \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow s$가 참이 되려면 명제 $\sim q \longrightarrow r$가 참이어야 한다.

또한, 명제 $\sim q \longrightarrow r$가 참이면 그 대우 $\sim r \longrightarrow q$도 참이다.

따라서 명제 $p \longrightarrow s$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 ⑤ $\sim r \longrightarrow q$이다. 답 ⑤

0340

p : 영어를 잘한다.

q : 국어를 잘한다.

r : 수학을 잘한다.

로 놓으면 $p \longrightarrow q$와 $\sim p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 각각의 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $r \longrightarrow p$도 참이다.

또, $r \longrightarrow p$와 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $r \longrightarrow q$가 참이고, 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ④이다. 답 ④

참고 각 보기를 p, q, r로 나타내면 다음과 같다.

① $p \longrightarrow r$ ② $q \longrightarrow r$ ③ $\sim p \longrightarrow \sim q$

④ $r \longrightarrow q$ ⑤ $r \longrightarrow \sim p$

0341

p : A가 범인이다. q : B가 범인이다.

r : C가 범인이다. s : D가 범인이다.

로 놓으면 명제 $q \longrightarrow s$, $\sim p \longrightarrow \sim s$, $\sim q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 각각의 대우 $\sim s \longrightarrow \sim q$, $s \longrightarrow p$, $r \longrightarrow q$도 참이다.

또, $r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow s$, $s \longrightarrow p$가 참이므로

$r \longrightarrow q \longrightarrow s \longrightarrow p$도 참이다.

이때, C가 범인이면 B, D, A도 범인이 되어 네 명 모두가 범인이고, B가 범인이면 D, A도 범인이 되어 A, B, D 세 명이 범인이다. 이것은 조건 ㈑에 모순이므로 C, B는 범인이 아니다.

따라서 범인은 A, D이다. 답 A, D

0342

|전략| 두 조건 p, q에 대하여 $p \Longrightarrow q$이고 $q \not\Longrightarrow p$인 것을 찾는다.

ㄱ. $p : x>2 \Longleftarrow q : x>4$

  $\therefore$ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례 : $x=3$]

ㄴ. p : x는 6의 양의 약수 $\Longrightarrow q$: x는 18의 양의 약수

  $\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $x=9$]

ㄷ. $p : x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow q : x=0$이고 $y=0$

  $\therefore$ 필요충분조건

ㄹ. $p : A \subset (B \cap C) \Longrightarrow q : A \subset B$ 또는 $A \subset C$

  $\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $A \subset (B-C)$인 경우]

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0343

① $p : x=0$이고 $y=0 \Longrightarrow q : xy=0$

$\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $x=1,\ y=0$]

② $p : x>y \Longleftrightarrow q : xz>yz$

$\therefore$ 필요충분조건

③ $p : xy=|xy| \Longleftarrow q : x>0$이고 $y>0$

$\therefore$ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례 : $x=1,\ y=0$]

④ $p : xy<0 \Longrightarrow q : x<0$ 또는 $y<0$

$\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $x=-1,\ y=0$]

⑤ $p : x>y \underset{\not\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} q : \dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$

따라서 아무 조건도 아니다.

[$\longrightarrow$의 반례 : $x=1,\ y=-1$, $\longleftarrow$의 반례 : $x=-1,\ y=1$]

답 ③

0344

① $p : a^2+b^2>0 \Longleftarrow q : ab<0$

$\therefore$ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례 : $a=0,\ b=1$]

② $p : a=1 \Longrightarrow q : a^2=a$

$\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $a=0$]

③ $p : |a+b|>a+b \Longleftrightarrow q : a+b<0$

$\therefore$ 필요충분조건

④ $p : a=b=c=0 \Longrightarrow q : (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $a=b=c=1$]

⑤ $p : (A\cup B)-A=\varnothing \Longrightarrow q : A\cap B\neq\varnothing$

$\therefore$ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $A=\{1,\ 2\},\ B=\{2,\ 3\}$] 답 ③

참고 ⑤에서

$$\begin{aligned}(A\cup B)-A&=(A\cup B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)\\&=\varnothing\cup(B\cap A^C)=B\cap A^C\\&=B-A\end{aligned}$$

이므로 $B-A=\varnothing \Longleftrightarrow B\subset A$

Lecture

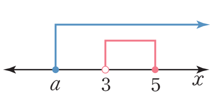
$A\subset B \Longleftrightarrow A\cap B=A \Longleftrightarrow A\cup B=B$

$\Longleftrightarrow A-B=\varnothing \Longleftrightarrow B^C\subset A^C$

0345

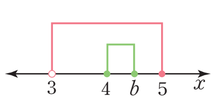
|전략| 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 할 때 $P\subset Q$이면 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건임을 이용한다.

$x\geq a$는 $3<x\leq5$이기 위한 필요조건이므로 명제 '$3<x\leq5$이면 $x\geq a$이다.'가 참이다.



$\therefore a\leq3$

$4\leq x\leq b$는 $3<x\leq5$이기 위한 충분조건이므로 명제 '$4\leq x\leq b$이면 $3<x\leq5$이다.'가 참이다.



$\therefore 4\leq b\leq5$

따라서 a의 최댓값은 3이고, b의 최댓값은 5이므로 두 값의 차는

$|3-5|=2$ 답 2

0346

$x+2\neq0$이 $x^2+ax+4\neq0$이기 위한 필요조건이므로 명제 '$x^2+ax+4\neq0$이면 $x+2\neq0$이다.'는 참이다. ··· ❶

따라서 이 명제의 대우 '$x+2=0$이면 $x^2+ax+4=0$이다.'도 참이다. ··· ❷

$x=-2$를 $x^2+ax+4=0$에 대입하면

$4-2a+4=0 \qquad \therefore a=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $x+2\neq0$이 $x^2+ax+4\neq0$이기 위한 필요조건임을 이용하여 참인 명제를 찾을 수 있다.	40 %
❷ ❶에서 찾은 명제의 대우가 참임을 알 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

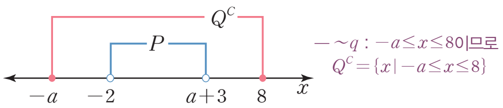
0347

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{x\,|\,-2<x<a+3\},\ Q=\{x\,|\,x<-a$ 또는 $x>8\}$

이때, p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 참이다.

즉, $P\subset Q^C$



위의 그림에서 $-a\leq-2,\ -2<a+3\leq8$이므로

$a\geq2,\ -5<a\leq5$

$\therefore 2\leq a\leq5$

따라서 정수 a는 $2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로 그 합은 14이다. 답 14

0348

$|x-a|\leq1$에서 $-1\leq x-a\leq1$

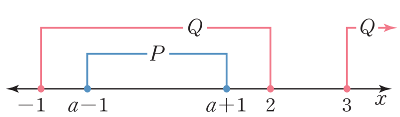
$a-1\leq x\leq a+1 \qquad \therefore P=\{x\,|\,a-1\leq x\leq a+1\}$

이때, p가 q이기 위한 충분조건이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

즉, $P\subset Q$

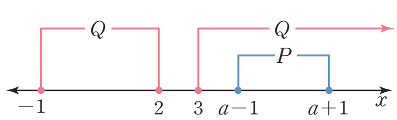
다음과 같이 $P\subset Q$가 되는 두 가지 경우를 생각해 보자.

(i)



위의 그림에서 $-1\leq a-1,\ a+1\leq2 \qquad \therefore 0\leq a\leq1$

(ii)



위의 그림에서 $3\leq a-1 \qquad \therefore a\geq4$

(i), (ii)에서 $0\leq a\leq1$ 또는 $a\geq4$

따라서 실수 a의 최솟값은 0이다. 답 ④

0349

|전략| 주어진 벤 다이어그램에서 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 찾는다.

ㄱ. $Q \subset P$이므로 $q \Longrightarrow p$, 즉 q는 p이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $R \subset Q^C$이므로 $r \Longrightarrow \sim q$, 즉 $\sim q$는 r이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $Q \subset R^C$이므로 $q \Longrightarrow \sim r$, 즉 $\sim r$는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄹ. $R \not\subset P^C$, $P^C \not\subset R$이므로 r는 $\sim p$이기 위한 아무 조건도 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

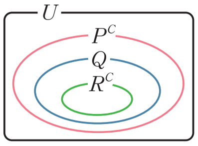
0350

q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이므로

$Q \subset P^C$ …… ㉠

q는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로

$R^C \subset Q$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 $R^C \subset Q \subset P^C$

따라서 위의 벤 다이어그램에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0351

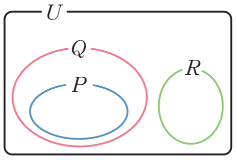
$(Q-R^C) \cup (P-Q) = \varnothing$이므로

$Q-R^C=\varnothing$이고 $P-Q=\varnothing$

즉, $Q \cap R=\varnothing$이고 $P-Q=\varnothing$

따라서 Q와 R는 서로소이고 $P \subset Q$이다.

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $P \subset R^C$



따라서 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로 항상 옳은 것은 ④이다.

답 ④

0352

|전략| 세 조건 p, q, r에 대하여 $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이면 $p \Longrightarrow r$임을 이용한다.

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow q$

p는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로 $\sim r \Longrightarrow p$

$\sim r \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow q$이므로 $\sim r \Longrightarrow q$, 즉 $\sim q \Longrightarrow r$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ의 2개이다. 답 2

0353

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow q$

p는 r이기 위한 필요조건이므로 $r \Longrightarrow p$

r는 s이기 위한 필요충분조건이므로 $r \Longleftrightarrow s$

ㄱ. $r \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow q$이므로 $r \Longrightarrow q$

즉, r는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $s \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow q$이므로 $s \Longrightarrow q$

즉, q는 s이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $s \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow p$이므로 $s \Longrightarrow p$

즉, s는 p이기 위한 충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0354

r는 p, q 모두의 필요조건이므로 $p \Longrightarrow r$, $q \Longrightarrow r$

s는 r이기 위한 필요조건이므로 $r \Longrightarrow s$

s는 p이기 위한 충분조건이므로 $s \Longrightarrow p$

즉, $\begin{array}{ccccc} q & \Longrightarrow & r & \Longrightarrow & s \\ & & \Nwarrow p \swarrow & & \end{array}$

따라서 서로 필요충분조건인 것은 ㄴ. p와 r, ㄷ. p와 s, ㅂ. r와 s의 3개이다. 답 ③

STEP 1 개념 마스터 ❷

0355

주어진 명제의 대우는

'두 실수 a, b에 대하여 $\boxed{(가)\ a<0\text{이고 } b<0}$이면 $\boxed{(나)\ a+b<0}$이다.'

이고, 이는 $\boxed{(다)\ 참}$이므로 주어진 명제도 참이다.

답 (가) $a<0$이고 $b<0$ (나) $a+b<0$ (다) 참

0356

$\sqrt{2}$를 $\boxed{(가)\ 유리수}$라 가정하면

$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 $\boxed{(나)\ 서로소}$인 자연수)으로 놓을 수 있다.

양변을 제곱하여 정리하면

$n^2=2m^2$ …… ㉠

여기서 n^2이 $\boxed{(다)\ 짝수}$이므로 n도 $\boxed{(다)\ 짝수}$이다.

$n=2k$ (k는 자연수)로 놓고 이를 ㉠에 대입하면

$(2k)^2=2m^2$, 즉 $m^2=2k^2$

이때, m^2이 $\boxed{(다)\ 짝수}$이므로 m도 $\boxed{(다)\ 짝수}$이다.

이것은 m, n이 $\boxed{(나)\ 서로소}$인 자연수라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{2}$는 무리수이다. 답 (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 짝수

0357

$$a^2+ab+b^2=a^2+ab+\frac{b^2}{4}+\boxed{(가)\ \frac{3b^2}{4}}$$

$$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\boxed{(가)\ \frac{3b^2}{4}}$$

a, b가 실수이므로 $\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$

따라서 $\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\boxed{(가)\ \dfrac{3b^2}{4}} \geq 0$이므로

$a^2+ab+b^2 \geq 0$

이때, 등호는 $a+\frac{b}{2}=0$, $b=0$, 즉 $\boxed{(나)\ a=b=0}$일 때 성립한다.

답 (가) $\frac{3b^2}{4}$ (나) $a=b=0$

0358

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-\boxed{(가)\ 2\sqrt{ab}}}{2}$$
$$=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}$$
$$=\frac{(\boxed{(나)\ \sqrt{a}-\sqrt{b}})^2}{2}\geq 0$$

$\therefore \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

이때, 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $\boxed{(다)\ a=b}$일 때 성립한다.

답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (다) $a=b$

0359

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

그런데 $a+b=6$이므로 $6\geq 2\sqrt{ab}$

$3\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $ab\leq 9$

따라서 ab의 최댓값은 9이다.

답 9

0360

$a>0$, $4b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+4b\geq 2\sqrt{a\cdot 4b}=4\sqrt{ab}$

$=4\cdot 2=8$ (단, 등호는 $a=4b$일 때 성립)

따라서 $a+4b$의 최솟값은 8이다.

답 8

0361

$x>0$, $\frac{1}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

따라서 $x+\frac{1}{x}$의 최솟값은 2이다.

답 2

참고 등호는 $x=\frac{1}{x}$에서 $x^2=1$, 즉 $x=1$ ($\because x>0$)일 때 성립한다.

0362

$4x>0$, $\frac{9}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4x+\frac{9}{x}\geq 2\sqrt{4x\cdot\frac{9}{x}}=2\cdot 6=12$ $\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $4x+\frac{9}{x}$의 최솟값은 12이다.

답 12

참고 등호는 $4x=\frac{9}{x}$에서 $4x^2=9$, 즉 $x=\frac{3}{2}$ ($\because x>0$)일 때 성립한다.

0363

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$

$=(\boxed{(가)\ bx-ay})^2\geq 0$

$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

이때, 등호는 $bx=ay$, 즉 $\boxed{(나)\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}}$일 때 성립한다.

답 (가) $bx-ay$ (나) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

0364

a, b, x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

$6\cdot 2\geq(ax+by)^2$, $12\geq(ax+by)^2$

$\therefore -2\sqrt{3}\leq ax+by\leq 2\sqrt{3}$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $ax+by$의 최댓값은 $2\sqrt{3}$, 최솟값은 $-2\sqrt{3}$이므로 그 합은 0이다.

답 0

0365

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\geq(3x+4y)^2$

그런데 $3x+4y=5$이므로 $25(x^2+y^2)\geq 25$

$\therefore x^2+y^2\geq 1$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 1이다.

답 1

STEP 2 유형 마스터 ❷

0366

|전략| 주어진 명제의 대우가 참이면 그 명제도 참임을 이용한다.

n이 $\boxed{(가)\ \text{짝수}}$이면 $n=2k$ (k는 자연수)로 놓을 수 있으므로

$n^2=(2k)^2=4k^2=2(\boxed{(나)\ 2k^2})$

즉, n^2은 $\boxed{(다)\ 2}$의 배수이므로 $\boxed{(라)\ \text{짝수}}$이다.

따라서 주어진 명제의 $\boxed{(마)\ \text{대우}}$가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 ②

0367

n이 3의 배수가 아니라고 하면

n은 $3k+1$ 또는 $3k+2$ ($k=0, 1, 2, \cdots$) 중의 하나이다.

(i) $n=3k+1$일 때

$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1$

$=3(3k^2+2k)+\boxed{(가)\ 1}$

(ii) $n=3k+2$일 때

$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4$

$=3(3k^2+4k+1)+\boxed{(나)\ 1}$

3 명제

즉, n^2은 3으로 나누면 나머지가 1인 자연수가 되므로 3의 배수가 아니다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
(가), (나)에 알맞은 수의 합은 $1+1=2$

답 2

0368

|전략| '무리수이다.'의 부정은 '유리수이다.'임을 이용하여 결론을 부정하고 가정에 모순이 생기는 것을 보인다.

$\sqrt{n^2-1}$이 유리수라 가정하면 $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.
이 식의 양변을 제곱하면

$n^2-1=\dfrac{q^2}{p^2}$ ...... ㉠

㉠의 좌변은 자연수이므로 우변도 자연수이어야 하고, p와 q는 서로소이므로

$p^2=\boxed{(가)\ 1}$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $n^2-1=q^2$

$n^2-q^2=\boxed{(나)\ 1}$, $(n+q)(n-q)=\boxed{(나)\ 1}$

따라서 $n+q$, $n-q$의 값은 모두 $\boxed{(다)\ 1 \text{ 또는 } -1}$이다.

이때, n은 $n\geq 2$인 자연수, q는 자연수라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

$n+q=\pm1$, $n-q=\pm1$(복호동순)을 만족시키는 자연수 $n(n\geq 2)$, q가 존재하지 않는다.

답 (가) 1 (나) 1 (다) 1 또는 -1

0369

$b\neq 0$이라 가정하면 $a+b\sqrt{2}=0$에서 $\sqrt{2}=\boxed{(가)\ -\dfrac{a}{b}}$이다.

이때, a, b가 유리수이므로 $\boxed{(가)\ -\dfrac{a}{b}}$도 유리수이다.

즉, $\sqrt{2}$는 $\boxed{(나)\ 유리수}$이다.

이것은 $\sqrt{2}$가 $\boxed{(다)\ 무리수}$라는 사실에 모순이다.

따라서 $b=0$이다.

$b=0$을 등식 $a+b\sqrt{2}=0$에 대입하면 $a=\boxed{(라)\ 0}$이다.

따라서 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{2}=0$이면 $a=b=0$이다.

답 (가) $-\dfrac{a}{b}$ (나) 유리수 (다) 무리수 (라) 0

0370

|전략| $A-B\geq 0 \iff A\geq B$임을 이용한다.

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ca)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\boxed{(가)\ \dfrac{1}{2}}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

a, b, c가 $\boxed{(나)\ 실수}$이므로

$(a-b)^2\geq 0$, $(b-c)^2\geq 0$, $(c-a)^2\geq 0$

따라서 $\boxed{(가)\ \dfrac{1}{2}}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$이므로

$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

이때, 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉 $\boxed{(다)\ a=b=c}$일 때 성립한다.

답 (가) $\dfrac{1}{2}$ (나) 실수 (다) $a=b=c$

0371

$A-B=(a^2-ab+b^2)-(a+b-1)$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2-2ab+2b^2-2a-2b+2)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}$

a, b가 실수이므로 $(a-b)^2\geq 0$, $(a-1)^2\geq 0$, $(b-1)^2\geq 0$

따라서 $\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}\geq 0$이므로

$A-B\geq 0$

$\therefore A\geq B$ (단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)

답 ④

0372

$(xy+1)-(x+y)=xy-x-y+1$

$=x(y-1)-(y-1)$

$=(x-1)(y-1)\geq 0$ ($\because x\leq 1, y\leq 1$)

$\therefore xy+1\geq x+y$ ... ❶

이때, 등호는 $x-1=0$ 또는 $y-1=0$, 즉 $x=1$ 또는 $y=1$일 때 성립한다. ... ❷

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $(xy+1)-(x+y)\geq 0$임을 이용하여 $xy+1\geq x+y$가 성립함을 증명할 수 있다.	70 %
❷ 등호가 성립하는 조건을 찾을 수 있다.	30 %

0373

|전략| $A>0$, $B>0$일 때, $A^2-B^2\geq 0 \iff A\geq B$임을 이용한다.

$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$

$=a-2\sqrt{ab}+b$

$=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$

$=(\boxed{(가)\ \sqrt{a}-\sqrt{b}})^2\geq 0$

$\therefore \{\sqrt{2(a+b)}\}^2\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

그런데 $\sqrt{2(a+b)}>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$이므로

$\sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

이때, 등호는 $\boxed{(가)\ \sqrt{a}-\sqrt{b}}=0$, 즉 $\boxed{(나)\ a=b}$일 때 성립한다.

답 ②

0374

$A>0,\ B>0,\ C>0$이므로

$A^2-B^2=(1-a)^2-(\sqrt{1-a})^2$

$=1-2a+a^2-(1-a)=a^2-a$

$=a(a-1)<0\ (\because 0<a<1)$

즉, $A^2<B^2$

$\therefore A<B$ …… ㉠

$B^2-C^2=(\sqrt{1-a})^2-\left(1-\frac{a}{2}\right)^2$

$=(1-a)-\left(1-a+\frac{a^2}{4}\right)$

$=-\frac{a^2}{4}<0\ (\because 0<a<1)$

즉, $B^2<C^2$

$\therefore B<C$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A<B<C$ 답 ①

0375

| 전략 | 절댓값을 포함한 식은 제곱의 차를 이용하여 부등식이 성립하는지 확인한다.

ㄱ. (i) $|a|\ge|b|$일 때,

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\ge0\ (\because |ab|\ge ab)$

$\therefore |a-b|^2\ge(|a|-|b|)^2$

그런데 $|a-b|\ge0,\ |a|-|b|\ge0$이므로

$|a-b|\ge|a|-|b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때,

$|a-b|>0,\ |a|-|b|<0$이므로

$|a-b|>|a|-|b|$

(i), (ii)에서 $|a-b|\ge|a|-|b|$

(단, 등호는 $|ab|=ab,\ |a|\ge|b|$일 때 성립)

ㄴ. [반례] $a=1,\ b=-1$이면 $|a+b|=0,\ |a-b|=2$이므로

$|a+b|<|a-b|$

ㄷ. $||a|-|b||^2-|a-b|^2$

$=(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)-(a-b)^2$

$=a^2-2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=-2(|ab|-ab)\le0\ (\because |ab|\ge ab)$

$\therefore ||a|-|b||^2\le|a-b|^2$

그런데 $||a|-|b||\ge0,\ |a-b|\ge0$이므로

$||a|-|b||\le|a-b|$ (단, 등호는 $|ab|=ab$일 때 성립)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0376

| 전략 | $a^2>0,\ 4b^2>0$이고, a^2+4b^2의 값이 일정하므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a^2>0,\ 4b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+4b^2\ge2\sqrt{a^2\cdot4b^2}=4|ab|$

그런데 $a^2+4b^2=8$이므로 $8\ge4|ab|,\ |ab|\le2$

$\therefore -2\le ab\le2$ (단, 등호는 $|a|=|2b|$일 때 성립, $ab\ne0$)

따라서 ab의 최댓값은 2이다. 답 2

0377

$2a>0,\ 8b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+8b\ge2\sqrt{2a\cdot8b}=8\sqrt{ab}$

그런데 $ab=16$이므로

$2a+8b\ge8\sqrt{16}=32$ (단, 등호는 $a=4b$일 때 성립)

따라서 $2a+8b$의 최솟값은 32이다. 답 32

0378

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+2b}{ab}=\frac{4}{ab}$ …… ㉠

$a>0,\ 2b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+2b\ge2\sqrt{a\cdot2b}=2\sqrt{2ab}$

그런데 $a+2b=4$이므로 $4\ge2\sqrt{2ab}$

$2\ge\sqrt{2ab}$ (단, 등호는 $a=2b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $4\ge2ab$ $\quad\therefore \frac{4}{ab}\ge2\ (\because ab>0)$

따라서 ㉠에서 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$의 최솟값은 2이다. 답 ②

0379

$3x+2y=10$이므로

$(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2=3x+2y+2\sqrt{6xy}=10+2\sqrt{6xy}$ …… ㉠

한편, $3x>0,\ 2y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+2y\ge2\sqrt{3x\cdot2y}=2\sqrt{6xy}$

그런데 $3x+2y=10$이므로

$10\ge2\sqrt{6xy}$ (단, 등호는 $3x=2y$일 때 성립) …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2=10+2\sqrt{6xy}\le10+10=20$

$\therefore 0<\sqrt{3x}+\sqrt{2y}\le2\sqrt{5}$

따라서 $\sqrt{3x}+\sqrt{2y}$의 최댓값은 $2\sqrt{5}$이다. 답 ②

0380

| 전략 | 주어진 식을 전개한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>0,\ b>0$에서 $ab>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(a+\frac{8}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)=ab+2+8+\frac{16}{ab}$

$\ge10+2\sqrt{ab\cdot\frac{16}{ab}}$

$=10+2\cdot4=18$ (단, 등호는 $ab=4$일 때 성립)

따라서 $\left(a+\frac{8}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)$의 최솟값은 18이다. 답 18

3 명제

0381

$a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(2a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{8}{a}\right)=2a^2+16+1+\frac{8}{a^2}$$
$$\geq 17+2\sqrt{2a^2\cdot\frac{8}{a^2}}$$
$$=17+2\cdot 4=25\ (\text{단, 등호는 } a=\sqrt{2}\text{일 때 성립})$$

따라서 $\left(2a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{8}{a}\right)$의 최솟값은 25이다.

답 25

0382

$x>0,\ y>0$에서 $xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(4x-\frac{1}{y}\right)\left(9y-\frac{1}{x}\right)=36xy-4-9+\frac{1}{xy}$$
$$\geq -13+2\sqrt{36xy\cdot\frac{1}{xy}}$$
$$=-13+2\cdot 6=-1$$

등호는 $36xy=\frac{1}{xy}$일 때 성립하므로 $(xy)^2=\frac{1}{36}$에서

$xy=\frac{1}{6}$ ($\because x>0,\ y>0$)

따라서 $m=-1,\ n=\frac{1}{6}$이므로 $mn=-\frac{1}{6}$

답 ②

0383

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)=\{(a+b)+c\}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$=1+\frac{a+b}{c}+\frac{c}{a+b}+1$$
$$=2+\frac{a+b}{c}+\frac{c}{a+b}$$ … ❶

$a>0,\ b>0,\ c>0$에서 $\frac{a+b}{c}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2+\frac{a+b}{c}+\frac{c}{a+b}\geq 2+2\sqrt{\frac{a+b}{c}\cdot\frac{c}{a+b}}=4$$

(단, 등호는 $a+b=c$일 때 성립)

따라서 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)$의 최솟값은 4이다. … ❷

$\frac{a+b}{c}=\frac{c}{a+b}$에서

$a+b=c$ ($\because a>0, b>0, c>0$)

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	50 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0384

|전략| 주어진 식을 변형하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>1$에서 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+\frac{4}{a-1}=a-1+\frac{4}{a-1}+1$$
$$\geq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{4}{a-1}}+1$$
$$=2\cdot 2+1=5\ (\text{단, 등호는 } a=3\text{일 때 성립})$$

따라서 $a+\frac{4}{a-1}$는 $a=3$일 때 최솟값 5를 가지므로 $m=5,\ n=3$

$\therefore m+n=8$

답 ⑤

참고 등호는 $a-1=\frac{4}{a-1}$일 때 성립하므로

$(a-1)^2=4,\ a-1=2$ ($\because a-1>0$)

$\therefore a=3$

즉, 등호는 $a=3$일 때 성립한다.

0385

$a>1$에서 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a-1+\frac{3}{a-1}=3(a-1)+\frac{3}{a-1}+2$$
$$\geq 2\sqrt{3(a-1)\cdot\frac{3}{a-1}}+2$$
$$=2\cdot 3+2=8\ (\text{단, 등호는 } a=2\text{일 때 성립})$$

따라서 $3a-1+\frac{3}{a-1}$의 최솟값은 8이다.

답 ④

참고 등호는 $3(a-1)=\frac{3}{a-1}$일 때 성립하므로

$3(a-1)^2=3,\ a-1=1$ ($\because a-1>0$)

$\therefore a=2$

즉, 등호는 $a=2$일 때 성립한다.

0386

$x^2\geq 0$에서 $x^2+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^4+4x^2+7}{x^2+1}=x^2+3+\frac{4}{x^2+1}$$

$x^4+4x^2+7=x^2(x^2+1)+3(x^2+1)+4$
$=(x^2+1)(x^2+3)+4$
에서 $\frac{x^4+4x^2+7}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(x^2+3)+4}{x^2+1}$
$=x^2+3+\frac{4}{x^2+1}$

$$=x^2+1+\frac{4}{x^2+1}+2$$
$$\geq 2\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{4}{x^2+1}}+2$$
$$=2\cdot 2+2=6\ (\text{단, 등호는 } x=\pm 1\text{일 때 성립})$$

따라서 $\frac{x^4+4x^2+7}{x^2+1}$의 최솟값은 6이다.

답 6

참고 등호는 $x^2+1=\frac{4}{x^2+1}$일 때 성립하므로

$(x^2+1)^2=4,\ x^2+1=2$ ($\because x^2+1>0$)

$x^2=1\qquad \therefore x=\pm 1$

즉, 등호는 $x=\pm 1$일 때 성립한다.

0387

$x>2$이고 $x^2-2x+4>0$이므로 $\frac{x-2}{x^2-2x+4}>0$

따라서 $\frac{x^2-2x+4}{x-2}$가 최소일 때, $\frac{x-2}{x^2-2x+4}$는 최댓값을 갖는다.

이때, $x>2$에서 $x-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^2-2x+4}{x-2}=x+\frac{4}{x-2}=x-2+\frac{4}{x-2}+2$$
$$\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{4}{x-2}}+2$$
$$=2\cdot 2+2=6 \text{ (단, 등호는 } x=4\text{일 때 성립)}$$

따라서 $\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$의 최솟값이 6이므로 $\dfrac{x-2}{x^2-2x+4}$의 최댓값은 $\dfrac{1}{6}$이다.

답 $\dfrac{1}{6}$

참고 등호는 $x-2=\dfrac{4}{x-2}$일 때 성립하므로
$(x-2)^2=4$, $x-2=2$ ($\because x-2>0$)
$\therefore x=4$
즉, 등호는 $x=4$일 때 성립한다.

0388

| 전략 | $a>0, b>0, c>0$에서 $\dfrac{a}{b}>0, \dfrac{b}{c}>0, \dfrac{c}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c}}=2\sqrt{\dfrac{a}{c}}$, $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{a}}=2\sqrt{\dfrac{b}{a}}$,

$\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=2\sqrt{\dfrac{c}{b}}$이므로

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq 8\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}}=8$$

$b^2=ca$, $c^2=ab$, $a^2=bc$ 이므로 $a=b=c$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

답 8

0389

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$
$$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$
$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) \quad \cdots ❶$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}} \quad \cdots ❷$$
$$=2+2+2=6 \text{ (단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 6이다. … ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

0390

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$1+\dfrac{b}{a}\geq 2\sqrt{1\cdot\dfrac{b}{a}}=2\sqrt{\dfrac{b}{a}}$, $1+\dfrac{c}{b}\geq 2\sqrt{1\cdot\dfrac{c}{b}}=2\sqrt{\dfrac{c}{b}}$,

$1+\dfrac{a}{c}\geq 2\sqrt{1\cdot\dfrac{a}{c}}=2\sqrt{\dfrac{a}{c}}$이므로

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}}=8$$

$1=\dfrac{b}{a}$, $1=\dfrac{c}{b}$, $1=\dfrac{a}{c}$이므로 $a=b=c$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

답 ④

다른 풀이

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=\left(1+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$$
$$=1+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1$$
$$\geq 2+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}$$
$$=2+2+2+2=8$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

0391

$x=a+\dfrac{3}{b}$, $y=b+\dfrac{3}{a}$이므로

$$x^2+y^2=\left(a+\frac{3}{b}\right)^2+\left(b+\frac{3}{a}\right)^2$$
$$=\left(a^2+\frac{6a}{b}+\frac{9}{b^2}\right)+\left(b^2+\frac{6b}{a}+\frac{9}{a^2}\right)$$
$$=\left(a^2+\frac{9}{a^2}\right)+\left(\frac{6a}{b}+\frac{6b}{a}\right)+\left(b^2+\frac{9}{b^2}\right)$$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+\dfrac{9}{a^2}\geq 2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{9}{a^2}}=2\cdot 3=6$ (단, 등호는 $a=\sqrt{3}$일 때 성립)

$\dfrac{6a}{b}+\dfrac{6b}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{6a}{b}\cdot\dfrac{6b}{a}}=2\cdot 6=12$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$b^2+\dfrac{9}{b^2}\geq 2\sqrt{b^2\cdot\dfrac{9}{b^2}}=2\cdot 3=6$ (단, 등호는 $b=\sqrt{3}$일 때 성립)

$\therefore x^2+y^2\geq 6+12+6=24$ (단, 등호는 $a=b=\sqrt{3}$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 24이다.

답 24

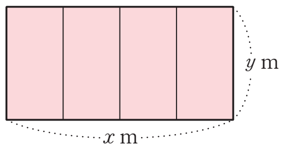
다른 풀이 $x^2>0$, $y^2>0$, $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2\cdot y^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$=2xy=2\left(a+\frac{3}{b}\right)\left(b+\frac{3}{a}\right)$$
$$=2\left(ab+\frac{9}{ab}+6\right)$$
$$\geq 2\left(2\sqrt{ab\cdot\frac{9}{ab}}+6\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$
$$=2(2\cdot 3+6)=24$$

㉠에서 등호는 $x=y$일 때, ㉡에서 등호는 $ab=3$일 때 성립하므로 등호는 $a=b=\sqrt{3}$일 때 성립한다.

0392

| 전략 | 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y로 놓고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 철망의 길이가 80 m이므로

$2x+5y=80$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+5y \geq 2\sqrt{2x \cdot 5y}=2\sqrt{10xy}$

그런데 $2x+5y=80$이므로 $80 \geq 2\sqrt{10xy}$

$40 \geq \sqrt{10xy}$ (단, 등호는 $2x=5y$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $10xy \leq 1600$

$\therefore 0<xy \leq 160$

따라서 울타리 안의 넓이의 최댓값은 160 m^2이다. 답 160 m^2

0393

소포의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 a cm, b cm라 하면 노끈의 길이가 120 cm이므로

$4a+2b+6 \cdot 12=120 \qquad \therefore 2a+b=24$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+b \geq 2\sqrt{2ab}$

그런데 $2a+b=24$이므로 $24 \geq 2\sqrt{2ab}$

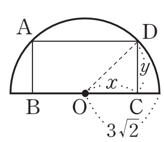
$12 \geq \sqrt{2ab}$ (단, 등호는 $2a=b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $2ab \leq 144$

$\therefore 0<ab \leq 72$

따라서 소포의 부피는 $12ab \leq 12 \cdot 72=864$ (cm^3)이므로 소포의 최대 부피는 864 cm^3이다. 답 ②

0394



오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면 직각삼각형 OCD에서

$x^2+y^2=(3\sqrt{2})^2=18$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2}=2xy$ …… ㉠

㉠에서 등호는 $x^2=y^2$일 때 성립하고 이때 직사각형 ABCD의 넓이 $2xy$가 최대가 되므로 $x^2+y^2=18$에서

$x^2=9$, $y^2=9 \qquad \therefore x=3$, $y=3$ ($\because x>0$, $y>0$)

따라서 그때의 직사각형의 둘레의 길이는

$4x+2y=4 \cdot 3+2 \cdot 3=18$ 답 ③

0395

| 전략 | 코시-슈바르츠의 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$에 $a=3$, $b=4$를 대입한다.

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$

그런데 $x^2+y^2=4$이므로 $100 \geq (3x+4y)^2$

$\therefore -10 \leq 3x+4y \leq 10$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $3x+4y$의 최댓값은 10이다. 답 ③

0396

$x^2+y^2=5$이므로 $x^2+2x+y^2+4y=2x+4y+5$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (2x+4y)^2$

그런데 $x^2+y^2=5$이므로 $100 \geq (2x+4y)^2$

$\therefore -10 \leq 2x+4y \leq 10$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore -5 \leq 2x+4y+5 \leq 15$

따라서 x^2+2x+y^2+4y의 최댓값은 15, 최솟값은 -5이므로 구하는 곱은

$15 \cdot (-5)=-75$ 답 ①

0397

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (2x+3y)^2$

그런데 $x^2+y^2=a$이므로 $13a \geq (2x+3y)^2$

$\therefore -\sqrt{13a} \leq 2x+3y \leq \sqrt{13a}$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $2x+3y$의 최댓값은 $\sqrt{13a}$, 최솟값은 $-\sqrt{13a}$이고 그 차가 26이므로

$2\sqrt{13a}=26$, $13a=169$

$\therefore a=13$ 답 ④

0398

| 전략 | $\dfrac{x^2}{2}=\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$, $\dfrac{y^2}{3}=\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2$임과 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다.

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\}\left\{\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2\right\} \geq (x+y)^2$

그런데 $x+y=2$이므로 $5\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}\right) \geq 4$

$\therefore \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3} \geq \dfrac{4}{5}$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}$의 최솟값은 $\dfrac{4}{5}$이다. 답 $\dfrac{4}{5}$

0399

a, b는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ …… ㉠

$a+b+c=4$, $a^2+b^2+c^2=8$에서

$a+b=4-c$, $a^2+b^2=8-c^2$이므로 ㉠에 대입하면

$2(8-c^2)\geq(4-c)^2$, $3c^2-8c\leq0$, $c(3c-8)\leq0$

$\therefore 0\leq c\leq\frac{8}{3}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 c의 최댓값은 $\frac{8}{3}$, 최솟값은 0이므로 구하는 합은

$\frac{8}{3}+0=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$

다른 풀이 $a+b+c=4$, $a^2+b^2+c^2=8$에서

$a+b=4-c$, $a^2+b^2=8-c^2$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에 $a+b=4-c$, $a^2+b^2=8-c^2$을 대입하면

$(4-c)^2=8-c^2+2ab$

$\therefore ab=c^2-4c+4$

이때, a, b는 t에 대한 이차방정식 $t^2-(a+b)t+ab=0$, 즉

$t^2-(4-c)t+(c^2-4c+4)=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4-c)^2-4(c^2-4c+4)\geq0$, $-3c^2+8c\geq0$

$c(3c-8)\leq0$ $\quad\therefore 0\leq c\leq\frac{8}{3}$

따라서 c의 최댓값은 $\frac{8}{3}$, 최솟값은 0이므로 구하는 합은

$\frac{8}{3}+0=\frac{8}{3}$

0400

| 전략 | x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다.

x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+1^2+1^2)\{(2x)^2+y^2+(3z)^2\}\geq(4x+y+3z)^2$

그런데 $4x+y+3z=12$이므로 $6(4x^2+y^2+9z^2)\geq144$

$\therefore 4x^2+y^2+9z^2\geq24$ (단, 등호는 $x=y=3z$일 때 성립)

따라서 $4x^2+y^2+9z^2$의 최솟값은 24이다. 답 ③

0401

$x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$는 실수이다.

$\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+3^2+4^2)(x+y+z)\geq(\sqrt{x}+3\sqrt{y}+4\sqrt{z})^2$

그런데 $x+y+z=26$이므로 $26^2\geq(\sqrt{x}+3\sqrt{y}+4\sqrt{z})^2$

이때, $\sqrt{x}>0$, $\sqrt{y}>0$, $\sqrt{z}>0$이므로

$0<\sqrt{x}+3\sqrt{y}+4\sqrt{z}\leq26$ $\left(\text{단, 등호는 } \sqrt{x}=\frac{\sqrt{y}}{3}=\frac{\sqrt{z}}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\sqrt{x}+3\sqrt{y}+4\sqrt{z}$의 최댓값은 26이다. 답 26

0402

| 전략 | a, b, c에 대한 식을 세우고, 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다.

$\overline{AG}=\sqrt{3}$이므로 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=3$

a, b, c는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$

$3\cdot3\geq(a+b+c)^2$, $9\geq(a+b+c)^2$

이때, $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$0<a+b+c\leq3$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이므로

$0<4(a+b+c)\leq12$

따라서 구하는 최댓값은 12이다. 답 12

0403

원의 지름의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로 원에 내접하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 a, b라 하면

$a^2+b^2=20$ ··· ❶

이때, 정사각기둥의 밑면의 한 변의 길이는 $\frac{a}{4}$, 높이는 b이므로 정사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합은

$\frac{a}{4}\cdot8+4b=2a+4b$ ··· ❷

a, b는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+4^2)(a^2+b^2)\geq(2a+4b)^2$ ··· ❸

$20^2\geq(2a+4b)^2$

이때, $a>0$, $b>0$이므로

$0<2a+4b\leq20$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{2}=\frac{b}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최댓값은 20이다. ··· ❹

답 20

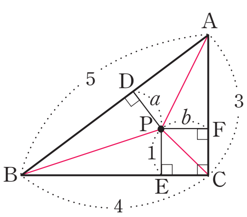
채점 기준	비율
❶ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ 모든 모서리의 길이의 합을 구할 수 있다.	20 %
❸ 코시-슈바르츠의 부등식을 이용할 수 있다.	40 %
❹ 정사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0404

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$이므로 $\triangle ABC$는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

$\overline{PD}=a$, $\overline{PF}=b$라 하면

$\overline{PD}^2+\overline{PF}^2=a^2+b^2$



$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$

에서

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot3=\frac{1}{2}\cdot5\cdot a+\frac{1}{2}\cdot4\cdot1+\frac{1}{2}\cdot3\cdot b$

$\therefore 5a+3b=8$

이때, a, b는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(5^2+3^2)(a^2+b^2)\geq(5a+3b)^2$

$34(a^2+b^2)\geq64$

$\therefore a^2+b^2\geq\frac{64}{34}=\frac{32}{17}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{5}=\frac{b}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\overline{PD}^2+\overline{PF}^2$의 최솟값은 $\frac{32}{17}$이다. 답 ⑤

STEP 3 내신 마스터

0405

유형 **02** 명제와 조건의 부정

| 전략 | '$<$'의 부정은 '$\geq$', '$=$'의 부정은 '$\neq$', '또는'의 부정은 '이고'임을 이용한다.

ㄱ. $\sim p$: $a \geq 0$이고 $b \geq 0$

ㄴ. $ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$이므로

$\sim p$: $a \neq 0$이고 $b \neq 0$

ㄷ. $a^2+b^2+c^2=0$에서 $a=0$, $b=0$, $c=0$이므로

$\sim p$: $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 또는 $c \neq 0$

따라서 조건 p와 그 부정 $\sim p$가 바르게 연결된 것은 ㄱ이다. 답 ①

참고 ㄷ. $abc \neq 0$에서 $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

0406

유형 **04** 거짓인 명제의 반례

| 전략 | 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 집합은 $P \cap Q^C$임을 이용한다.

명제 $p \longrightarrow q$, $p \longrightarrow r$가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은 각각 $P \cap Q^C$, $P \cap R^C$이므로 두 명제가 모두 거짓임을 동시에 보이는 원소가 속하는 집합은

$$\begin{aligned}(P \cap Q^C) \cap (P \cap R^C) &= P \cap (Q^C \cap R^C)\\ &= P \cap (Q \cup R)^C\\ &= P-(Q \cup R)\end{aligned}$$

답 ②

0407

유형 **05** 명제의 참, 거짓

| 전략 | 명제가 거짓임을 보이려면 반례를 찾는다.

① [반례] $x=-3$이면 $x^2=9>4$이지만 $x<2$이다. (거짓)

② [반례] $x=3$, $y=0$이면 $x+y=3>2$이지만 $y<1$이다. (거짓)

④ [반례] $x=\sqrt{3}$, $y=0$이면 $x+y=\sqrt{3}$은 무리수이지만 y는 무리수가 아니다. (거짓)

⑤ [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 $x^2=4$로 홀수가 아니다. (거짓)

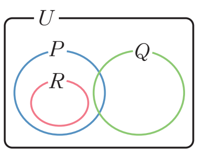
답 ③

0408

유형 **06** 명제의 참, 거짓과 진리집합의 포함 관계

| 전략 | $(P-Q) \cup R = P-Q$를 만족시키도록 세 집합 P, Q, R의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내어 본다.

$(P-Q) \cup R = P-Q$에서 $R \subset (P-Q)$이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $R \subset P$이므로 명제 $r \longrightarrow p$는 참

② $R \not\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 거짓

③ $R \subset Q^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$는 참

④ $Q \subset R^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim r$는 참

⑤ $P^C \subset R^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$는 참

따라서 거짓인 명제인 것은 ② $r \longrightarrow q$이다. 답 ②

0409

유형 **07** 명제가 참이 되도록 하는 미지수 구하기

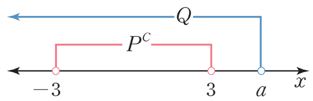
| 전략 | 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때 P, Q 사이의 포함 관계를 수직선 위에 나타내어 본다.

p : $x \leq -3$ 또는 $x \geq 3$에서 $\sim p$: $-3<x<3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x \mid -3<x<3\}$, $Q=\{x \mid x<a\}$

명제 '$\sim p$이면 q이다.'가 참이 되려면 $P^C \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a \geq 3$ 답 ⑤

0410

유형 **08** '모든' 또는 '어떤'이 있는 명제의 참, 거짓

| 전략 | '모든'의 부정은 '어떤', '어떤'의 부정은 '모든'을 이용한다.

ㄱ. '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'이다.

ㄴ. 전체집합 U의 원소는 모두 조건 p를 만족시키므로 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

ㄷ. '모든 x에 대하여 p이거나 q이다.'의 부정은 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이고 $\sim q$이다.'이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

0411

유형 **06** 명제의 참, 거짓과 진리집합의 포함 관계
+ **09** 명제의 역, 대우의 참, 거짓

| 전략 | 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용하여 두 조건 p, q의 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 알아본다.

명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$의 역이 참이므로 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이고, 그 대우 $q \longrightarrow p$도 참이다.

$\therefore Q \subset P$, 즉 $Q \cap P^C = \varnothing$

따라서 항상 옳은 것은 ③ $P^C \cap Q = \varnothing$이다. 답 ③

0412

유형 **09** 명제의 역, 대우의 참, 거짓

| 전략 | 주어진 명제의 가정과 결론을 바꾸어 그 역을 찾은 다음 그것의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 역 : $x \geq 3$이면 $x^2 \geq 9$이다. (참)

ㄴ. 역 : $A \cup B = B$이면 $A \subset B$이다. (참)

ㄷ. 역 : $2x+4>0$이면 $x>2$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$이면 $2x+4=2>0$이지만 $x<2$이다.

따라서 역이 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0413

유형 11 삼단논법

|전략| 세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합 $P,\ Q,\ R$ 사이의 포함 관계를 찾고, 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이면 $p \longrightarrow r$가 참임을 이용한다.

$P-Q=\varnothing$에서 $P\subset Q$ ...... ㉠

$Q-R=\varnothing$에서 $Q\subset R$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $P\subset Q\subset R$

따라서 $\sim p \longrightarrow \sim r$, 즉 $r \longrightarrow p$는 $P=Q=R$일 때에만 참이므로 항상 참이라고 할 수 없다.

답 ⑤

0414

유형 12 충분조건, 필요조건, 필요충분조건

|전략| 명제 $p \longrightarrow q$와 명제 $q \longrightarrow p$의 참, 거짓을 판별하여 충분, 필요, 필요충분조건을 판단한다.

① $p : |x-2|=1 \Longleftarrow q : x=3$

∴ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례 : $x=1$]

② $p : xy=0 \Longleftarrow q : x^2+y^2=0$

∴ 필요조건 [$\longrightarrow$의 반례 : $x=0,\ y=1$]

③ $p : x,\ y$는 유리수 $\Longrightarrow q : x+y,\ xy$는 유리수

∴ 충분조건 [$\longleftarrow$의 반례 : $x=\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}$]

④ $p : x=3 \Longleftrightarrow q : x^2-6x+9=0$

∴ 필요충분조건

⑤ $p : x$는 6의 양의 약수 $\overset{\not\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ $q : x$는 8의 양의 약수

따라서 아무 조건도 아니다.

[$\longrightarrow$의 반례 : $x=3$, $\longleftarrow$의 반례 : $x=4$]

답 ②

0415

유형 13 충분조건, 필요조건이 되는 미지수 구하기

|전략| 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 할 때 $P\subset Q$이면 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건임을 이용한다.

q는 p이기 위한 필요조건이려면 명제

'$3x-a=0$이면 $x^3-7x^2+4x+12=0$이다.'가 참이어야 한다.

$x=\frac{a}{3}$를 $x^3-7x^2+4x+12=0$에 대입하면

$\left(\frac{a}{3}\right)^3-7\left(\frac{a}{3}\right)^2+4\cdot\frac{a}{3}+12=0$

∴ $a^3-21a^2+36a+324=0$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{-21}{1}=21$

답 ②

Lecture

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

(3) $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

0416

유형 15 충분, 필요, 필요충분조건과 삼단논법

|전략| 세 조건 $p,\ q,\ r$에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건이면 $p \Longrightarrow q$, 필요조건이면 $q \Longrightarrow p$임을 이용한다.

p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow \sim r$

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow r$

$q \Longrightarrow r$에서 $\sim r \Longrightarrow \sim q$

$p \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$이므로 $p \Longrightarrow \sim q$

따라서 항상 참인 명제는 ③ $p \longrightarrow \sim q$이다.

답 ③

0417

유형 21 산술평균과 기하평균의 관계 ; 전개식의 이용

|전략| $(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)$를 전개하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$x>0,\ y>0$에서 $\frac{2x}{y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)&=1+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+4\\&\geq 5+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}\\&=5+2\cdot2=9\ (\text{단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

그런데 $x+2y=4$이므로 $4\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)\geq 9$

∴ $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\geq\frac{9}{4}$ — 등호는 $x=y$이고 $x+2y=4$, 즉 $x=\frac{4}{3},\ y=\frac{4}{3}$일 때 성립한다.

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$의 최솟값은 $\frac{9}{4}$이므로

$a=9,\ b=4$

∴ $a-b=5$

답 ⑤

0418

유형 22 산술평균과 기하평균의 관계 ; 식의 변형

|전략| $f(x)+\frac{1}{f(x)}\ (f(x)>0)$ 꼴을 포함하도록 식을 적당히 변형한다.

$a>0$에서 $a^2+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}a+\frac{1}{a}+\frac{4a}{a^2+1}&=\frac{a^2+1}{a}+\frac{4a}{a^2+1}\\&\geq 2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}\cdot\frac{4a}{a^2+1}}\\&=2\cdot2=4\ (\text{단, 등호는 } a=1\text{일 때 성립})\end{aligned}$$

따라서 $a+\frac{1}{a}+\frac{4a}{a^2+1}$의 최솟값은 4이다.

답 ②

참고 등호는 $\frac{a^2+1}{a}=\frac{4a}{a^2+1}$일 때 성립하므로

$(a^2+1)^2=4a^2,\ a^2+1=2a\ (\because a>0,\ a^2+1>0)$

$a^2-2a+1=0,\ (a-1)^2=0$ ∴ $a=1$

즉, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.

0419

유형 **20** 산술평균과 기하평균의 관계 ; 합 또는 곱이 일정할 때
+ 25 코시-슈바르츠의 부등식 ; $ax+by$의 최대 · 최소

| 전략 | 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $ab+cd$의 최댓값을 구하고, 코시-슈바르츠의 부등식을 이용하여 $ac+bd$의 최댓값을 구한다.

(i) $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a^2+b^2 \ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$
그런데 $a^2+b^2=2$이므로 $2\ge 2ab$
$\therefore 0<ab\le 1$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립) ······ ㉠
$c>0$, $d>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$c^2+d^2 \ge 2\sqrt{c^2d^2}=2cd$
그런데 $c^2+d^2=8$이므로 $8\ge 2cd$
$\therefore 0<cd\le 4$ (단, 등호는 $c=d$일 때 성립) ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $0<ab+cd\le 5$
따라서 $ab+cd$의 최댓값은 5이므로 $\alpha=5$

(ii) a, b, c, d가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$
그런데 $a^2+b^2=2$, $c^2+d^2=8$이므로 $16\ge(ac+bd)^2$
$\therefore 0<ac+bd\le 4$ (단, 등호는 $ad=bc$일 때 성립)
따라서 $ac+bd$의 최댓값은 4이므로 $\beta=4$

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta=9$

답 ③

0420

유형 **03** 조건의 진리집합

| 전략 | 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 조건 'p이고 q이고 $\sim r$'의 진리집합을 P, Q, R를 이용하여 나타낸다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 48\}$
$Q=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 28\}$
$x^2-10x+24=0$에서 $(x-4)(x-6)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=6$
조건 r의 진리집합을 R라 하면 $R=\{4,\ 6\}$ ··· ❶
이때, 조건 'p이고 q이고 $\sim r$'의 진리집합은 $P\cap Q\cap R^C$이고
$R^C=\{2,\ 8,\ 10,\ 12,\ \cdots,\ 50\}$이므로
$P\cap Q\cap R^C=\{2,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24\}$ ··· ❷

답 $\{2,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24\}$

채점 기준	배점
❶ 세 조건의 진리집합을 각각 구할 수 있다.	3점
❷ 조건 'p이고 q이고 $\sim r$'의 진리집합을 구할 수 있다.	3점

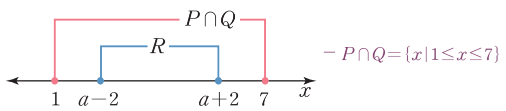
0421

유형 **13** 충분조건, 필요조건이 되는 미지수 구하기

| 전략 | 명제 $r \longrightarrow (p$이고 $q)$가 참이어야 함을 이용한다.

p : $|x|\le 7$에서 $-7\le x\le 7$
q : $x\ge 1$
r : $|x-a|\le 2$에서 $-2\le x-a\le 2$ $\quad\therefore a-2\le x\le a+2$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면
$P=\{x\,|\,-7\le x\le 7\}$, $Q=\{x\,|\,x\ge 1\}$,
$R=\{x\,|\,a-2\le x\le a+2\}$
이때, r는 'p이고 q'이기 위한 충분조건이므로 명제
$r \longrightarrow (p$이고 $q)$가 참이다. ··· ❶
즉, $R\subset(P\cap Q)$



위의 그림에서 $1\le a-2$, $a+2\le 7$
$\therefore 3\le a\le 5$ ··· ❷
따라서 실수 a의 최솟값은 3이다. ··· ❸

답 3

채점 기준	배점
❶ r가 'p이고 q'이기 위한 충분조건임을 이용하여 참인 명제를 찾을 수 있다.	2점
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	1점

0422

유형 **23** 산술평균과 기하평균의 관계 ; 복잡한 식의 최대 · 최소

| 전략 | 양수 x, y에 대하여 $x+y\ge 2\sqrt{xy}$에서 등호는 $x=y$일 때 성립함을 이용한다.

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2-2a+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=(a-1)^2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-1 \quad \cdots ❶$$
$$\ge(a-1)^2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}-1 \quad \cdots ❷$$
$$=(a-1)^2+1$$

이때, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립하고 주어진 식은 $a=1$일 때 최소이므로 $a=b=1$
따라서 $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$이므로 $\alpha+\beta+\gamma=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	배점
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	3점
❷ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	2점
❸ $\alpha+\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	2점

0423

유형 **14** 충분, 필요, 필요충분조건과 진리집합 사이의 관계

| 전략 | 두 집합 A, B에 대하여 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는 B의 부분집합 중 A의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같음을 이용한다.

(1) 'p이고 q'는 r이기 위한 충분조건이므로 명제 $(p$이고 $q) \longrightarrow r$는 참이다. 즉, $(P\cap Q)\subset R$
'p 또는 q'는 r이기 위한 필요조건이므로 명제 $r \longrightarrow (p$ 또는 $q)$는 참이다. 즉, $R\subset(P\cup Q)$
$\therefore (P\cap Q)\subset R\subset(P\cup Q)$

(2) $P=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $Q=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$에서

$P\cap Q=\{3,\ 5\}$, $P\cup Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$

따라서 집합 R의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중 원소 3, 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{6-2}=16$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합 $P,\ Q,\ R$ 사이의 포함 관계를 알 수 있다.	6점
(2) 집합 R의 개수를 구할 수 있다.	4점

Lecture

특정한 원소를 갖는 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$에 대하여 A의 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수

⇨ 2^{n-k} (단, $k\le n$)

0424

유형 16 대우를 이용한 명제의 증명

|전략| 주어진 명제의 대우를 구한 다음 $a\ne0$일 때와 $b\ne0$일 때로 나누어 대우의 참, 거짓을 판별한다.

(1) 주어진 명제의 대우는

'$a\ne0$ 또는 $b\ne0$이면 $a^2+b^2\ne0$이다.'

(2) (i) $a\ne0$이면

$a^2>0$이고 $b^2\ge0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\ne0$이다.

(ii) $b\ne0$이면

$b^2>0$이고 $a^2\ge0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\ne0$이다.

(i), (ii)에서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 주어진 명제의 대우를 말할 수 있다.	4점
(2) (1)을 이용하여 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있다.	8점

다른 풀이 주어진 명제의 결론을 부정하면 $a\ne0$ 또는 $b\ne0$이다.

$a\ne0$ 또는 $b\ne0$이면 $a^2>0$ 또는 $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$이다.

그런데 이것은 $a^2+b^2=0$이라는 가정에 모순이다.

따라서 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

창의·융합 교과서 속 심화문제

0425

|전략| 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, '어떤 x에 대하여 p이다.'가 참이려면 $P\ne\varnothing$이어야 함을 이용한다.

조건 $k-1\le x\le k+3$의 진리집합을 P, 조건 $0\le x\le2$의 진리집합을 Q라 하면

$P=\{x\,|\,k-1\le x\le k+3\}$, $Q=\{x\,|\,0\le x\le2\}$

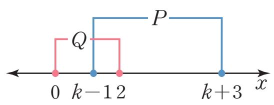
이때, 주어진 명제가 참이려면 집합 P에 속하는 원소 중에서 집합 Q에 속하는 원소가 존재해야 한다.

즉, $P\cap Q\ne\varnothing$

(i) $k-1\ge0$, 즉 $k\ge1$일 때,

오른쪽 그림에서 $P\cap Q\ne\varnothing$이려면 $k-1\le2$, $k\le3$

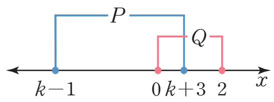
$\therefore\ 1\le k\le3$



(ii) $k-1<0$, 즉 $k<1$일 때,

오른쪽 그림에서 $P\cap Q\ne\varnothing$이려면 $0\le k+3$, $k\ge-3$

$\therefore\ -3\le k<1$



(i), (ii)에서 $-3\le k\le3$

따라서 정수 k는 $-3,\ -2,\ \cdots,\ 3$의 7개이다. 답 ④

0426

|전략| 명제 '어떤 $x,\ y$에 대하여 p이면 q이다.'가 참이 되기 위해서는 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 할 때, $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 한다.

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P=\{(x,\ y)\,|\,y=|x|+a\}$

$Q=\{(x,\ y)\,|\,(x-4)^2+y^2=4\}$

명제 '어떤 $x,\ y$에 대하여 p이면 q이다.'가 참이려면

$P\cap Q\ne\varnothing$이어야 하므로 함수 $y=|x|+a$의 그래프와 원 $(x-4)^2+y^2=4$가 만나야 한다.

이때, 원 $(x-4)^2+y^2=4$는 제1, 4사분면 위에 있으므로 이 원은 함수 $y=|x|+a$의 그래프의 $x>0$인 부분과 만나야 한다.

$x>0$일 때, $|x|+a=x+a$이므로 직선 $y=x+a$, 즉 $x-y+a=0$과 원의 중심 $(4,\ 0)$ 사이의 거리는

$$\frac{|4+a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|4+a|}{\sqrt2}$$

이때, 원의 반지름의 길이는 2이므로 원과 직선이 만나려면

$$\frac{|4+a|}{\sqrt2}\le2,\ |4+a|\le2\sqrt2$$

$-2\sqrt2\le4+a\le2\sqrt2$

$\therefore\ -4-2\sqrt2\le a\le-4+2\sqrt2$

따라서 $M=-4+2\sqrt2$, $m=-4-2\sqrt2$이므로

$Mm=(-4+2\sqrt2)(-4-2\sqrt2)=16-8=8$ 답 8

참고 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$에서 $\overline{\mathrm{AP}}=2$인 좌표평면 위의 점 P는 중심이 $\mathrm{A}(4,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

0427

|전략| A의 답지에서 (1) 금강산이 맞다고 가정하고 이 가정에 모순이 생기는 것을 보인다.

A의 답지에서 (1) 금강산이 맞다고 가정하자.

다섯 명의 학생 모두 2개 중 하나씩만 맞혔으므로 (2) 설악산은 틀린 답이 된다.

이때, C의 답지에서 (5) 금강산이 틀린 답이므로 (3) 설악산이 맞는 답이 된다.
그러므로 B의 답지에서 (3) 한라산이 틀린 답이므로 (2) 백두산이 맞는 답이 되고, D의 답지에서도 (2) 백두산이 맞으므로 (4) 지리산이 틀린 답이 된다.
따라서 E의 답지에서 (4) 지리산이 틀린 답이 되어 (1) 한라산이 맞는 답이 되는데 이는 A의 답지에서 (1) 금강산이 맞다고 한 가정에 모순이므로 A의 답지에서 (1) 금강산이 틀린 답임을 알 수 있다.
따라서 (2) 설악산이 정답이므로 B의 답지에서 (2) 백두산은 틀린 답이 되어 (3) 한라산이 정답이다.
즉, C의 답지의 (3) 설악산, D의 답지의 (2) 백두산이 모두 틀린 답이므로 (4) 지리산, (5) 금강산이 정답이다.
이에 따라 (2) 설악산, (3) 한라산, (4) 지리산, (5) 금강산이 정답이므로 (1)번 사진의 산 이름은 백두산이다.

답 백두산

0428

|전략| 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R,\ S$로 놓고, 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R,\ S$라 하자.
$x\in P$이면 x가 정수이므로 x^2, x^3, x^4도 정수이다.
즉, $x\in Q$, $x\in R$, $x\in S$이므로 $P\subset Q$, $P\subset R$, $P\subset S$
또, x^2이 정수이면 $(x^2)^2=x^4$도 정수이므로 $Q\subset S$

ㄱ. [반례] $x=\sqrt{2}$이면 $x^2=2$는 정수이지만 $x=\sqrt{2}$는 정수가 아니다.
따라서 $q \not\Longrightarrow p$이므로 q는 p이기 위한 충분조건이 아니다. (거짓)

ㄴ. 'p이고 r'의 진리집합은 $P\cap R$
그런데 $P\subset R$이므로 $P\cap R=P$
이때, $P\subset Q$이므로 $(P\cap R)\subset Q$
따라서 (p이고 r) $\Longrightarrow q$이므로 'p이고 r'는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄷ. 'p 또는 s'의 진리집합은 $P\cup S$
그런데 $P\subset S$이므로 $P\cup S=S$
이때, $Q\subset S$이므로 $Q\subset(P\cup S)$
따라서 $q\Longrightarrow$ (p 또는 s)이므로 'p 또는 s'는 q이기 위한 필요조건이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0429

|전략| 결론을 부정하여 가정에 모순이 생기는 것을 보인다.

$a,\ b$가 모두 홀수라 가정하자.
방정식 $x^2+ax-b=0$의 정수인 해를 $x=m$이라 하면
$m^2+am=b$

(i) m이 홀수일 때,
m^2은 홀수이고, am은 두 홀수의 곱이므로 홀수이다.
따라서 m^2+am, 즉 b가 짝수이므로 가정에 모순이다.

(ii) m이 짝수일 때,
m^2은 짝수이고, am은 홀수와 짝수의 곱이므로 짝수이다.
따라서 m^2+am, 즉 b가 짝수이므로 가정에 모순이다.

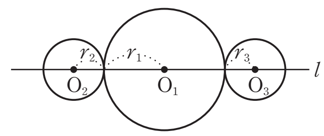
(i), (ii)에서 $a,\ b$ 중 적어도 하나는 짝수이다.

답 풀이 참조

0430

|전략| 조건에 맞도록 세 원을 그려 식을 세운 다음 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다.

조건 (가), (나)를 만족시키는 세 원 $O_1,\ O_2,\ O_3$은 다음 그림과 같다.



세 원 $O_1,\ O_2,\ O_3$의 반지름의 길이를 각각 $r_1,\ r_2,\ r_3$이라 하면
조건 (다)에서 $2r_1+r_2+r_3=18$
$r_1,\ r_2,\ r_3$이 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(2^2+1^2+1^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\ge(2r_1+r_2+r_3)^2$
그런데 $2r_1+r_2+r_3=18$이므로 $6(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\ge324$
$\therefore r_1^2+r_2^2+r_3^2\ge54$
등호는 $\frac{r_1}{2}=r_2=r_3$일 때 성립하고 $2r_1+r_2+r_3=18$이므로
$2r_1+\frac{r_1}{2}+\frac{r_1}{2}=18$, $3r_1=18$ $\quad\therefore r_1=6$
이때 $S_1+S_2+S_3=\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\ge54\pi$이므로 $S_1+S_2+S_3$은 $\frac{r_1}{2}=r_2=r_3=3$일 때, 최솟값 54π를 갖는다.
따라서 $a=54$, $b=6$, $c=3$, $d=3$이므로
$a+b+c+d=66$

답 66

본책 70~89쪽

4 | 함수

STEP 1 개념 마스터 ❶

0431

X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

답 함수가 아니다.

0432

X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
이때, 정의역은 $\{1,\ 2,\ 3\}$, 공역은 $\{a,\ b,\ c\}$, 치역은 $\{a,\ c\}$이다.

답 함수이다. 정의역 : $\{1,\ 2,\ 3\}$, 공역 : $\{a,\ b,\ c\}$, 치역 : $\{a,\ c\}$

0433

X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 b, d의 2개이므로 함수가 아니다.

답 함수가 아니다.

0434

X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
이때, 정의역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, 공역은 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$, 치역은 $\{b,\ c,\ d\}$이다.

답 함수이다. 정의역 : $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, 공역 : $\{a,\ b,\ c,\ d\}$, 치역 : $\{b,\ c,\ d\}$

0435

$y=2x-1$은 모든 실수에서 정의되므로 정의역은 $\{x\,|\,x$는 실수$\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y$는 실수$\}$이다.

답 정의역 : $\{x\,|\,x$는 실수$\}$, 치역 : $\{y\,|\,y$는 실수$\}$

0436

$y=x^2+1$은 모든 실수에서 정의되므로 정의역은 $\{x\,|\,x$는 실수$\}$이고, $x^2+1\ge1$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\ge1\}$이다.

답 정의역 : $\{x\,|\,x$는 실수$\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\ge1\}$

0437

$y=\dfrac{1}{x}$은 $x\ne0$인 실수에서 정의되므로 정의역은 $\{x\,|\,x\ne0$인 실수$\}$이고, $\dfrac{1}{x}\ne0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\ne0$인 실수$\}$이다.

답 정의역 : $\{x\,|\,x\ne0$인 실수$\}$, 치역 : $\{y\,|\,y\ne0$인 실수$\}$

0438

$f(x)$와 $g(x)$의 정의역과 공역이 각각 서로 같으나
$f(-1)=-1$, $g(-1)=1$이므로 $f(-1)\ne g(-1)$
$\therefore f\ne g$

답 서로 같은 함수가 아니다.

0439

$f(x)$와 $g(x)$의 정의역과 공역이 각각 서로 같고
$f(-1)=g(-1)=1$, $f(2)=g(2)=4$
$\therefore f=g$

답 서로 같은 함수이다.

참고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 공역은 실수 전체의 집합이다.

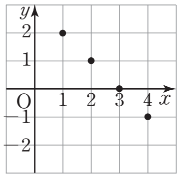
0440

$f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, $g(x)$의 정의역은 $x\ne3$인 실수 전체의 집합이므로 두 함수의 정의역이 서로 다르다.
$\therefore f\ne g$

답 서로 같은 함수가 아니다.

0441

$f(1)=2$, $f(2)=1$, $f(3)=0$, $f(4)=-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 주어진 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0442 답 ㄱ, ㄷ

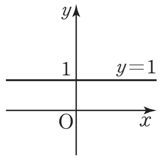
0443 답 ㄱ, ㄷ

0444 답 ㄷ

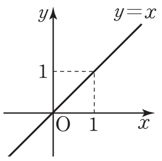
0445 답 ㄴ

[0446~0449]

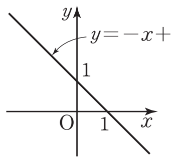
ㄱ.



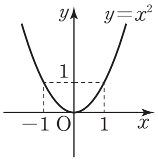
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



0446 답 ㄴ, ㄷ

0447 답 ㄴ, ㄷ

0448 답 ㄴ

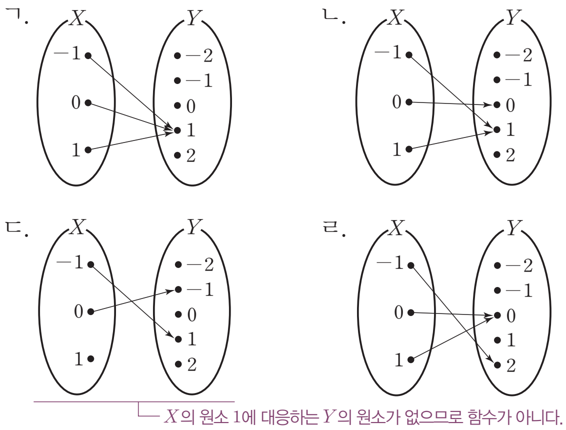
0449 답 ㄱ

STEP 2 유형 마스터 ❶

0450

| 전략 | 각 대응을 그림으로 나타내어 본다.

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ⑤

0451

임의의 실수 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나면 R에서 R로의 함수의 그래프이다.
따라서 R에서 R로의 함수의 그래프는 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

0452

| 전략 | 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 정의되려면 X의 모든 원소가 Y의 원소에 하나씩만 대응해야 한다.

① $-1 \le x \le 1$에서 $-3 \le x-2 \le -1$
　$\therefore -3 \le f(x) \le -1$
② $-1 \le x \le 1$에서 $-2 \le 2x \le 2$
　$-1 \le 2x+1 \le 3$　　$\therefore -1 \le f(x) \le 3$
③ $-1 \le x \le 1$에서 $-11 \le x-10 \le -9$
　$9 \le |x-10| \le 11$, $3 \le \frac{1}{3}|x-10| \le \frac{11}{3}$
　$\therefore 3 \le f(x) \le \frac{11}{3}$
④ $-1 \le x \le 1$에서 $0 \le x^2 \le 1$
　$-1 \le -x^2 \le 0$, $0 \le -x^2+1 \le 1$
　$\therefore 0 \le f(x) \le 1$
⑤ $-1 \le x \le 1$에서 $-2 \le x-1 \le 0$
　$0 \le (x-1)^2 \le 4$, $-3 \le (x-1)^2-3 \le 1$
　$\therefore -3 \le f(x) \le 1$

따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ④이다. 답 ④

0453

| 전략 | 2와 $2-\sqrt{2}$가 유리수인지 무리수인지 구분한다.

2는 유리수이므로 $f(2)=4-2=2$
$2-\sqrt{2}$는 무리수이므로 $f(2-\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$
$\therefore f(2)-f(2-\sqrt{2})=2-(2-\sqrt{2})=\sqrt{2}$ 답 ③

0454

$\frac{3x+1}{2}=5$라 하면 $3x=9$　　$\therefore x=3$
$f\left(\frac{3x+1}{2}\right)=x^2-7$에 $x=3$을 대입하면
$f(5)=3^2-7=2$ 답 2

다른 풀이 $\frac{3x+1}{2}=t$라 하면 $3x+1=2t$　　$\therefore x=\frac{2t-1}{3}$
$f\left(\frac{3x+1}{2}\right)=x^2-7$에 x 대신 $\frac{2t-1}{3}$을 대입하면
$f(t)=\left(\frac{2t-1}{3}\right)^2-7$
따라서 $f(x)=\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2-7$이므로
$f(5)=\left(\frac{2\cdot5-1}{3}\right)^2-7=2$

0455

$f(2)=2^2-2=2$
$f(23)=f(23-6)=f(17)=f(17-6)=f(11)$
$\qquad=\cdots=f(-1)=(-1)^2-2=-1$
$\therefore f(2)+f(23)=2+(-1)=1$ 답 1

0456

조건 (나)에 의하여
$f(1999)=f(2\cdot1000-1)=(-1)^{1000}=1$
조건 (가)에 의하여
$f(2000)=3f(1000)=3^2f(500)=3^3f(250)=3^4f(125)$
이때, $f(125)=f(2\cdot63-1)=(-1)^{63}=-1$이므로
$f(2000)=-3^4=-81$
$\therefore f(1999)+f(2000)=1+(-81)=-80$ 답 -80

0457

| 전략 | 주어진 등식의 양변에 적당한 x, y의 값을 대입한다.

$f(x+y)=f(x)f(y)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=1, y=1$을 대입하면
$f(2)=f(1)f(1)=2\cdot2=4$
㉠의 양변에 $x=2, y=2$를 대입하면
$f(4)=f(2)f(2)=4\cdot4=16$ 답 ⑤

0458

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=0, y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)$　　$\therefore f(0)=0$
㉠의 양변에 $x=1, y=1$을 대입하면
$f(2)=f(1)+f(1)$, $2f(1)=6$　　$\therefore f(1)=3$
㉠의 양변에 $x=1, y=-1$을 대입하면
$f(0)=f(1)+f(-1)$, $0=3+f(-1)$
$\therefore f(-1)=-3$

$f(-2)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)$
$f(-3)=f(-1)+f(-2)=f(-1)+2f(-1)=3f(-1)$
$f(-4)=f(-1)+f(-3)=f(-1)+3f(-1)=4f(-1)$
$\vdots$
$\therefore f(-10)=f(-1)+f(-9)=f(-1)+9f(-1)$
$=10f(-1)=10\cdot(-3)=-30$ 답 -30

0459

$f(24)=f(2)+f(12)=f(2)+f(2)+f(6)$
$=2f(2)+f(6)=2f(2)+f(2)+f(3)$
$=3f(2)+f(3)$
$=3(2+1)+(3+1)=13$ 답 13

0460

$f(x)+2f(1-x)=x^2-3x+9$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$f(0)+2f(1)=9$ …… ㉡
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)+2f(0)=7$ …… ㉢
㉡$-2\times$㉢을 하면
$-3f(0)=-5 \quad \therefore f(0)=\frac{5}{3}$ 답 $\frac{5}{3}$

0461

|전략| $a>0$일 때와 $a<0$일 때로 나누어 생각해 본다.
(i) $a>0$일 때, $f(0)=0, f(3)=3$이어야 하므로
$f(0)=b=0, f(3)=3a+b=3$
$\therefore a=1, b=0 \quad \therefore a+b=1$
(ii) $a<0$일 때, $f(0)=3, f(3)=0$이어야 하므로
$f(0)=b=3, f(3)=3a+b=0$
$\therefore a=-1, b=3 \quad \therefore a+b=2$
(i), (ii)에서 구하는 $a+b$의 값은 1 또는 2이다. 답 1, 2
참고 $a=0$이면 $f(x)=b$이므로 함수 $f(x)$의 치역은 $\{b\}$이다.
따라서 치역과 공역이 같을 수 없으므로 $a\neq0$

0462

음이 아닌 정수 k에 대하여
(i) $x=2k$일 때, $x^2=(2k)^2=4k^2 \quad \therefore f(x)=0$
(ii) $x=2k+1$일 때, $x^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$
$\therefore f(x)=1$
따라서 함수 f의 치역은 $\{0,\ 1\}$이다. 답 $\{0,\ 1\}$

0463

$f(x)=ax+1$이라 하면 $a>0$이므로 $0\le f(-2)<f(2)\le4$가 성립한다.
(i) $f(-2)\ge0$에서 $-2a+1\ge0 \quad \therefore a\le\frac{1}{2}$
(ii) $f(2)\le4$에서 $2a+1\le4 \quad \therefore a\le\frac{3}{2}$
(i), (ii)에서 $a\le\frac{1}{2}$
이때, $a>0$이므로 $0<a\le\frac{1}{2}$ 답 $0<a\le\frac{1}{2}$

0464

함수 f의 치역이 $\{2\}$가 되려면 정의역의 원소는 소수이어야 한다.
전체집합 U의 원소 중 소수는 2, 3, 5, 7이므로 정의역 X는 집합 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$의 부분집합 중에서 $\varnothing$을 제외한 집합이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^4-1=15$ 답 ③

Lecture

부분집합의 개수
집합 $A=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n\}$($n$은 자연수)의 부분집합의 개수 ⇨ 2^n

참고 함수 f의 치역이 $\{3\}$이 되려면 정의역의 원소는 1이 아닌 제곱수이어야 한다.

0465

|전략| $f=g$이려면 $f(1)=g(1),\ f(2)=g(2)$이어야 함을 이용한다.
$f(1)=g(1)$에서 $2=a+b$
$f(2)=g(2)$에서 $5=2a+b$
두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=-1$
$\therefore ab=-3$ 답 ①

0466

ㄱ. $f(-1)=g(-1)=-1,\ f(0)=g(0)=0,\ f(1)=g(1)=-1$이므로 $f=g$
ㄴ. $f(-1)=1, g(-1)=-1$이므로 $f(-1)\neq g(-1)$
$\therefore f\neq g$
ㄷ. $f(-1)=g(-1)=-1,\ f(0)=g(0)=0,\ f(1)=g(1)=1$이므로 $f=g$
따라서 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0467

$f(x)=g(x)$, 즉 $x^2-x-1=2x^3-3x$에서
$2x^3-x^2-2x+1=0,\ x^2(2x-1)-(2x-1)=0$
$(x^2-1)(2x-1)=0,\ (x+1)(x-1)(2x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

즉, 집합 $\left\{-1,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$의 부분집합 중에서 $\emptyset$을 제외한 집합을 정의역 X로 하면 $f=g$를 만족시킨다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^3-1=7$ 답 7

0468

|전략| 정의역의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)$인 반례를 찾는다.

① [반례] $x_1=1$, $x_2=2$이면 $x_1 \neq x_2$이지만
$f(x_1)=2$, $f(x_2)=2$
로 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

③ [반례] $x_1=0$, $x_2=-1$이면 $x_1 \neq x_2$이지만
$f(x_1)=0+|0|=0$, $f(x_2)=-1+|-1|=0$
으로 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

④ [반례] $x_1=1$, $x_2=-1$이면 $x_1 \neq x_2$이지만
$f(x_1)=1^2=1$, $f(x_2)=(-1)^2=1$
로 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

⑤ [반례] $x_1=1.2$, $x_2=1.5$이면 $x_1 \neq x_2$이지만
$f(x_1)=[1.2]=1$, $f(x_2)=[1.5]=1$
로 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다. 답 ②

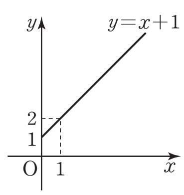
0469

치역에 속하는 임의의 실수 k에 대하여 y축에 수직인 직선 $y=k$를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나고 (치역)=(공역)이면 그 함수는 일대일대응이다.
따라서 일대일대응인 것은 ㄹ이다. 답 ③

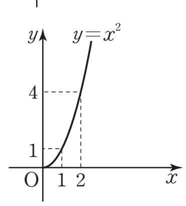
0470

치역에 속하는 임의의 실수 k에 대하여 y축에 수직인 직선 $y=k$를 그었을 때, 그래프와 한 점에서 만나고 (치역)≠(공역)이면 그 함수는 일대일함수이지만 일대일대응이 아니다.

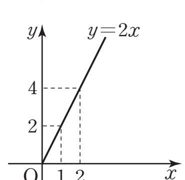
ㄱ. $f(x)=x+1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 일대일함수이지만 일대일대응이 아니다.
치역 $\{y|y\geq 1\}$이 공역과 같지 않으므로 일대일대응이 아니다.



ㄴ. $f(x)=x^2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 일대일대응이다.



ㄷ. $f(x)=2x$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 일대일대응이다.

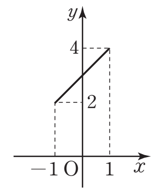


따라서 일대일함수이지만 일대일대응이 아닌 것은 ㄱ이다. 답 ㄱ

0471

|전략| 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 $a>0$이므로 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가함을 이용한다.

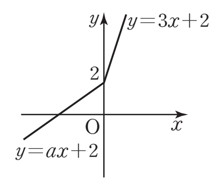
$a>0$이고 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(-1)=2$에서 $-a+b=2$
$f(1)=4$에서 $a+b=4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$
$\therefore ab=3$ 답 3

0472

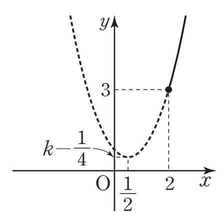
함수 f가 일대일대응이려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=ax+2$의 기울기가 양수이어야 한다.
$\therefore a>0$ 답 $a>0$

0473

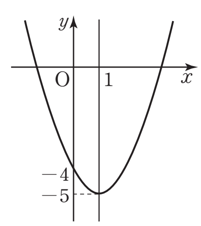
$f(x)=x^2-x+k=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{4}$이므로 오른쪽 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 2$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.



따라서 함수 f가 일대일대응이려면
$f(2)=3$이어야 하므로
$4-2+k=3 \qquad \therefore k=1$ 답 1

0474

$f(x)=x^2-2x-4=(x-1)^2-5$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 f가 일대일대응이려면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가하거나, x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소해야 한다.
즉, $x=1$을 기준으로 어느 한쪽의 전체 또는 일부분이어야 한다.
$\therefore a\geq 1$ …… ㉠
또, 치역과 공역이 같아야 하므로 정의역 $\{x|x\geq a\}$에 대하여 치역은 $\{y|y\geq a\}$이어야 한다.
즉, $f(a)=a$에서 $a^2-2a-4=a$
$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $a=4$ 답 ④

0475

|전략| $f(x)$가 항등함수이면 $f(x)=x$이다.

ㄱ. $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$이므로 항등함수이다.

ㄴ. $g(-1)=1$이므로 항등함수가 아니다.

ㄷ. $h(-1)=-1$, $h(0)=0$, $h(1)=1$이므로 항등함수이다.

ㄹ. $k(-1)=\dfrac{|0|-|-2|}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$,

$k(0)=\dfrac{|1|-|-1|}{2}=\dfrac{0}{2}=0$,

$k(1)=\dfrac{|2|-|0|}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

이므로 항등함수이다.

따라서 항등함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

0476

함수 f는 상수함수이므로 $f(x)=f(2)=1$

$\therefore f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(19)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{10\text{개}}=10$

답 10

0477

함수 g는 항등함수이므로

$g(2)=2$, $g(3)=3$, $g(6)=6$

$f(2)=g(3)=h(6)$에서 $f(2)=h(6)=3$

$f(2)f(3)=f(6)$에서 $3f(3)=f(6)$

이때, 함수 f는 일대일대응이므로

$f(3)=2$, $f(6)=6$ 또는 $f(3)=6$, $f(6)=2$

그런데 $f(3)=6$, $f(6)=2$이면 $3f(3)\neq f(6)$이므로

$f(3)=2$, $f(6)=6$

또, 함수 h는 상수함수이므로

$h(2)=h(3)=h(6)=3$

$\therefore f(6)+g(2)+h(2)=6+2+3=11$ 답 11

0478

함수 $f(x)=x^2+2x$가 항등함수가 되려면 $f(x)=x$를 만족시켜야 한다. ··· ❶

$x^2+2x=x$에서 $x^2+x=0$

$x(x+1)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=0$ ··· ❷

즉, 집합 $\{-1, 0\}$의 부분집합 중에서 $\varnothing$을 제외한 집합을 정의역 X로 하면 함수 f는 항등함수가 된다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^2-1=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)=x$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $f(x)=x$를 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0479

|전략| 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4에 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4가 대응되는 경우의 수를 생각하여 함수의 개수를 구한다.

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의

(i) 함수의 개수 : $4^4=256$

(ii) 일대일대응의 개수 : $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

(iii) 상수함수의 개수 : 4

(iv) 항등함수의 개수 : 1

따라서 $k=256$, $l=24$, $m=4$, $n=1$이므로

$k+l+m+n=285$ 답 285

Lecture

(1) X에서 X로의 함수 f의 개수

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

따라서 함수의 개수는 $4\cdot4\cdot4\cdot4=4^4=256$

(2) X에서 X로의 일대일대응인 f의 개수

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 3개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 2개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 1개

따라서 일대일대응의 개수는 $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

0480

두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 X에서 Y로의

(i) 함수의 개수 : $4^3=64$

(ii) 일대일함수의 개수 : $4\cdot3\cdot2=24$

(iii) 상수함수의 개수 : 4

따라서 $a=64$, $b=24$, $c=4$이므로

$a+b+c=92$ 답 ④

Lecture

X에서 Y로의 일대일함수 f의 개수

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8 중 하나이므로 4개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 3개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 2개

따라서 일대일함수의 개수는 $4\cdot3\cdot2=24$

0481

일대일함수일 때, 정의역과 공역의 원소의 개수가 같으면 (치역)=(공역)

X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이고 치역과 공역이 같으므로 함수 f는 일대일대응이다.

$X=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 집합 X의 원소는 6개이다.

따라서 구하는 함수 $f : X \longrightarrow X$의 개수는

$6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ 답 ⑤

0482

|전략| A의 각 원소가 대응할 수 있는 A의 원소의 개수를 구한다.

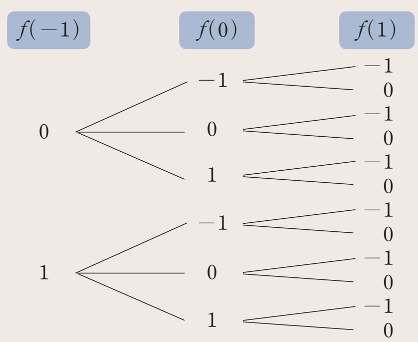
$f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 $-5,\ -3,\ 0,\ 3,\ 5$ 중 하나이므로 5개
$f(-5)=f(5)$에서 $f(-5)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(5)$의 값과 같아야 하므로 1개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $-5,\ -3,\ 0,\ 3,\ 5$ 중 하나이므로 5개
$f(-3)=f(3)$에서 $f(-3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(3)$의 값과 같아야 하므로 1개
$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $-5,\ -3,\ 0,\ 3,\ 5$ 중 하나이므로 5개
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$5\cdot1\cdot5\cdot1\cdot5=125$ 답 125

0483

$\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\}\neq0$에서 $f(-1)\neq-1,\ f(1)\neq1$
$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $0,\ 1$ 중 하나이므로 2개
$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1,\ 0,\ 1$ 중 하나이므로 3개
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1,\ 0$ 중 하나이므로 2개
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$2\cdot3\cdot2=12$ 답 12

Lecture

조건을 만족시키는 함숫값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.



0484

임의의 $x\in X$에 대하여 $xf(x)$의 값이 일정하므로
$xf(x)=k$ (k는 상수)라 하면
$x=0$일 때, $0\cdot f(0)=k$ $\therefore k=0$
$x=1$일 때, $1\cdot f(1)=k$
$x=3$일 때, $3\cdot f(3)=k$
$\therefore f(1)=f(3)=0$
$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $0,\ 2,\ 4$ 중 하나이므로 3개
$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 0뿐이므로 1개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 0뿐이므로 1개
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$3\cdot1\cdot1=3$ 답 3

0485

|전략| 먼저 조건 ㈎의 양변에 적당한 값을 대입하여 함숫값을 유도한다.

조건 ㈎에서 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x_1=0,\ x_2=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$
㉠의 양변에 $x_1=-3,\ x_2=3$을 대입하면
$f(0)=f(-3)+f(3)$ $\therefore f(-3)=-f(3)$
또, 조건 ㈏에서 함수 f는 일대일함수이다. 이때,
$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 0뿐이므로 1개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $\underbrace{-4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4 \text{ 중 } f(0)\text{의 값을 제외}}_{-4,\ -2,\ 2,\ 4 \text{ 중 하나}}$한 4개
$f(-3)=-f(3)$에서 $f(-3)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(3)$의 값과 같아야 하므로 1개
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$1\cdot4\cdot1=4$ 답 ②

STEP 1 개념 마스터 ❷

0486

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(a)=3$ 답 3

0487

$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(b)=1$ 답 1

0488

$(f\circ g)(c)=f(g(c))=f(2)=a$ 답 a

0489

$(f\circ g)(d)=f(g(d))=f(4)=b$ 답 b

0490

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+2)$
$=(x+2)^2-1=x^2+4x+3$
답 $(g\circ f)(x)=x^2+4x+3$

0491

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-1)$
$=(x^2-1)+2=x^2+1$ 답 $(f\circ g)(x)=x^2+1$

0492

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x+2)$
$=(x+2)+2=x+4$ 답 $(f\circ f)(x)=x+4$

0493

$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2-1)$

$=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$ 답 $(g\circ g)(x)=x^4-2x^2$

0494

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

ㄴ. X의 원소 2, 3이 모두 Y의 원소 b에 대응하므로 일대일대응이 아니다.

ㄹ. Y의 원소 b에 대응하는 X의 원소가 없으므로 일대일대응이 아니다.

따라서 역함수가 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0495

$f^{-1}(-3)=a$에서 $f(a)=-3$이므로

$-2a+3=-3,\ -2a=-6\qquad \therefore a=3$ 답 3

0496

$f^{-1}(b)=7$에서 $f(7)=b$이므로

$b=-2\cdot7+3=-11$ 답 -11

0497

함수 $y=3x-5$는 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=3x-5$에서 x를 y로 나타내면

$3x=y+5\qquad \therefore x=\frac{1}{3}y+\frac{5}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ 답 $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

0498

음이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=x^2$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=x^2$에서 x를 y로 나타내면 $x=\pm\sqrt{y}\ (y\ge0)$

그런데 $x\ge0$이므로 $x=\sqrt{y}\ (y\ge0)$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\sqrt{x}\ (x\ge0)$ 답 $y=\sqrt{x}\ (x\ge0)$

0499

$f^{-1}(5)=1$ 답 1

0500

$(f^{-1})^{-1}(4)=f(4)=3$ 답 3

0501

$(f^{-1}\circ f)(2)=f^{-1}(f(2))=f^{-1}(4)=2$ 답 2

0502

$(f\circ f^{-1})(3)=f(f^{-1}(3))=f(4)=3$ 답 3

0503

(1) $y=-\frac{3}{2}x+3$에서 x를 y로 나타내면

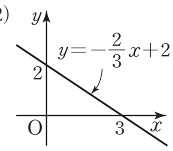
$-\frac{3}{2}x=y-3\qquad \therefore x=-\frac{2}{3}y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{2}{3}x+2$

$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{2}{3}x+2$

(2)



답 (1) $f^{-1}(x)=-\frac{2}{3}x+2$ (2) 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터 ❷

0504

|전략| $(f\circ f)(a)=f(f(a))$이므로 $f(a)$의 값을 구하여 $f(x)$의 x에 대입한다.

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(-3)=3$

$(f\circ f)(\sqrt{2})=f(f(\sqrt{2}))=f(4)=-4$

$\therefore (f\circ f)(3)+(f\circ f)(\sqrt{2})=3+(-4)=-1$ 답 -1

0505

$(f\circ g)(2)+(g\circ f)(0)=f(g(2))+g(f(0))$

$=f(2)+g(-1)$

$=5+5=10$ 답 10

0506

$(h\circ(g\circ f))(5)=((h\circ g)\circ f)(5)$ 합성함수의 결합법칙

$=(h\circ g)(f(5))$

$=(h\circ g)(0)$

$=6\cdot0+7=7$ 답 ③

0507

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(3)=8$

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=10$에서 $g(4)=10$이고, $g(x)$는 일대일대응이므로 $f(2)=4$

$\therefore f(2)+g(3)=4+8=12$ 답 12

0508

|전략| 합성함수 $(f \circ g)(x)$와 $(g \circ f)(x)$를 각각 구하고, 양변의 동류항의 계수를 비교한다.

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+4)=a(-x+4)+3$
$\qquad =-ax+4a+3$
$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+3)=-(ax+3)+4$
$\qquad =-ax+1$
$f \circ g=g \circ f$이므로 $-ax+4a+3=-ax+1$
$4a+3=1,\ 4a=-2 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$ 답 ②

0509

주어진 그림에서
$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4,\ f(4)=5,\ f(5)=1$
$f \circ g=g \circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ ...... ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(g(1))=g(f(1))$
$f(3)=g(2) \qquad \therefore g(2)=4$
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(g(2))=g(f(2))$
$f(4)=g(3) \qquad \therefore g(3)=5$ 답 ⑤

0510

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+k^2)=-2(2x+k^2)+k$
$\qquad =-4x-2k^2+k$
$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(-2x+k)=2(-2x+k)+k^2$
$\qquad =-4x+2k+k^2$
$f \circ g=g \circ f$이므로 $-4x-2k^2+k=-4x+2k+k^2$
$-2k^2+k=2k+k^2,\ 3k^2+k=0$
$k(3k+1)=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{3}$ 또는 $k=0$
이때, $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=-\frac{1}{3},\ \beta=0$
$\therefore 3\alpha+\beta=-1$ 답 -1

0511

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(bx-2)=a(bx-2)+3$
$\qquad =abx-2a+3$
$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+3)=b(ax+3)-2$
$\qquad =abx+3b-2$
$f \circ g=g \circ f$이므로 $abx-2a+3=abx+3b-2$
$-2a+3=3b-2 \qquad \therefore 2a+3b=5$
이때, $2a>0,\ 3b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{2a+3b}{2} \geq \sqrt{2a \cdot 3b},\ \frac{5}{2} \geq \sqrt{6ab}$ (단, 등호는 $2a=3b$일 때 성립)
양변을 제곱하면 $6ab \leq \frac{25}{4} \qquad \therefore 3ab \leq \frac{25}{8}$
따라서 $3ab$의 최댓값은 $\frac{25}{8}$이다. 답 $\frac{25}{8}$

Lecture

산술평균과 기하평균의 관계
$a>0,\ b>0$일 때
$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0512

|전략| $f(x)$의 x에 $f(x)$를 대입하여 $f(f(x))$를 구하고 양변의 동류항의 계수를 비교한다.

$(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$
$\qquad =a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$
즉, $a^2x+ab+b=4x+9$이므로 $a^2=4,\ ab+b=9$
$\therefore a=2,\ b=3\ (\because a>0)$
따라서 $f(x)=2x+3$이므로
$f(2)=2 \cdot 2+3=7$ 답 ③

0513

$(f \circ f)(k)=f(f(k))=f(k^2-1)$
$\qquad =(k^2-1)^2-1=k^4-2k^2$
즉, $k^4-2k^2=-1$이므로 $k^4-2k^2+1=0$
이때, $k^2=t$로 놓으면
$t^2-2t+1=0,\ (t-1)^2=0$
$\therefore t=1$
즉, $k^2=1$이므로 $k=\pm 1$
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은
$(-1) \cdot 1=-1$ 답 -1

다른 풀이 $f(k)=a$라 하면
$(f \circ f)(k)=f(f(k))=f(a)=-1$
이므로 $a^2-1=-1,\ a^2=0$
$\therefore a=0$
즉, $f(k)=0$이므로
$k^2-1=0,\ k^2=1 \qquad \therefore k=\pm 1$
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은
$(-1) \cdot 1=-1$

0514

$a \geq 3$에서 $-2a \leq -6 \qquad \therefore -2a+3 \leq -3$
$f(-2)=\underline{-2a+3<0}$이므로
$(f \circ f)(-2)=f(f(-2))=f(-2a+3)$
$\qquad =a(-2a+3)+3=-2a^2+3a+3$
즉, $-2a^2+3a+3=-17$이므로 $2a^2-3a-20=0$
$(2a+5)(a-4)=0 \qquad \therefore a=4\ (\because a \geq 3)$
$\therefore (f \circ f)(-1)=f(\underline{f(-1)})=f(-1)=-1$ 답 ②
$f(-1)=4 \cdot (-1)+3=-1$

0515

| 전략 | $(f \circ h)(x)=f(h(x))$이므로 $f(x)$의 x 대신 $h(x)$를 대입하여 $f(h(x))$를 구한 다음 $h(x)$에 대한 식으로 정리한다.

$(f \circ h)(x)=f(h(x))=2h(x)+2$

$(f \circ h)(x)=g(x)$이므로 $2h(x)+2=4x-6$

$2h(x)=4x-8 \qquad \therefore h(x)=2x-4$ 　　답 $h(x)=2x-4$

0516

$(h \circ (g \circ f))(x)=((h \circ g) \circ f)(x)$ ← 합성함수의 결합법칙

$=(h \circ g)(f(x))$

$=-2f(x)+1$

즉, $-2f(x)+1=x^2-4x+1$이므로 $-2f(x)=x^2-4x$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$

$\therefore f(-2)=-\frac{1}{2}\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)=-6$ 　　답 -6

0517

| 전략 | $(h \circ f)(x)=h(f(x))$이므로 $f(x)=t$로 치환하여 $h(t)$를 구한다.

$(h \circ f)(x)=h(f(x))=h(3x+2)$

$(h \circ f)(x)=g(x)$이므로 $h(3x+2)=2x-1$

$3x+2=t$라 하면 $3x=t-2 \qquad \therefore x=\frac{t-2}{3}$

따라서 $h(t)=2\cdot\frac{t-2}{3}-1=\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}$이므로

$h(-1)=\frac{2}{3}\cdot(-1)-\frac{7}{3}=-3$ 　　답 -3

다른 풀이 $h(3x+2)=2x-1$에서

$3x+2=-1$이라 하면 $3x=-3 \qquad \therefore x=-1$

$h(3x+2)=2x-1$에 $x=-1$을 대입하면

$h(-1)=2\cdot(-1)-1=-3$

0518

$f(x)=-x+2,\ g(x)=-4x+2$이므로

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+2)$

$=-4(-x+2)+2=4x-6$

이때, $(h \circ (g \circ f))(x)=h((g \circ f)(x))=h(4x-6)$

$(h \circ (g \circ f))(x)=f(x)$이므로 $h(4x-6)=-x+2$

$4x-6=t$라 하면 $4x=t+6 \qquad \therefore x=\frac{t+6}{4}$

따라서 $h(t)=-\frac{t+6}{4}+2=-\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}$이므로

$h(6)=-\frac{1}{4}\cdot 6+\frac{1}{2}=-1$ 　　답 ⑤

다른 풀이 $h(4x-6)=-x+2$에서

$4x-6=6$이라 하면 $4x=12 \qquad \therefore x=3$

$h(4x-6)=-x+2$에 $x=3$을 대입하면

$h(6)=-3+2=-1$

0519

| 전략 | $f^1(2), f^2(2), f^3(2), \cdots$의 값에서 규칙을 찾아 $f^{2018}(2)$의 값을 추정한다.

$f^1(2)=f(2)=\frac{2}{2}=1$

$f^2(2)=f(f(2))=f(1)=\frac{3\cdot1+1}{2}=2$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f(2)=1$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(1)=2$

$\vdots$

즉, $f^n(2)$의 값은 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때, $2018=2\cdot1009$이므로 $f^{2018}(2)=f^2(2)=2$ 　　답 ②

0520

$f^1(x)=f(x)=1-x$

$f^2(x)=f(f(x))=f(1-x)=1-(1-x)=x$

따라서 $f^3(x)=f(x), f^4(x)=f^2(x), \cdots$이므로

$f^n(x)=\begin{cases} 1-x & (n\text{은 홀수}) \\ x & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$ 　　답 $f^n(x)=\begin{cases} 1-x & (n\text{은 홀수}) \\ x & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$

0521

$f^1(1)=f(1)=3$

$f^2(1)=f(f(1))=f(3)=3^2$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(3^2)=3^3$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(3^3)=3^4$ 　　⋯ ❶

$\vdots$

$\therefore f^k(1)=3^k$ 　　⋯ ❷

이때, $f^k(1)=243=3^5$이므로 $3^k=3^5$

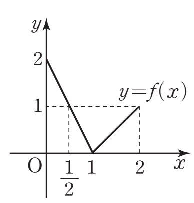
$\therefore k=5$ 　　⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $f^1(1), f^2(1), f^3(1), f^4(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f^k(1)$을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0522

오른쪽 그림에서



$f^1\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

$f^2\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=0$

$f^3\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(0)=2$

$f^4\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^3\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(2)=1$

$f^5\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^4\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=0$

$\vdots$

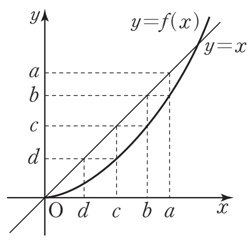
즉, $f^{n}\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은 1, 0, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때, $200=3\cdot66+2$이므로 $f^{200}\left(\frac{1}{2}\right)=f^{2}\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 답 0

0523

|전략| 직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 서로 같음을 이용한다.

오른쪽 그림에서



$f(c)=d$

$(f\circ f)(b)=f(f(b))=f(c)=d$

$(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))$

$=f(f(b))$

$=f(c)$

$=d$

$\therefore f(c)+(f\circ f)(b)+(f\circ f\circ f)(a)$

$=d+d+d=3d$ 답 ⑤

0524

$f(a)=b$라 하면 $(f\circ f)(a)=4$에서

$f(f(a))=f(b)=4$

주어진 그래프에서 $f(b)=4$를 만족시키는 b의 값은

$b=0$ 또는 $b=5$

$\therefore f(a)=0$ 또는 $f(a)=5$

(i) $f(a)=0$일 때, $a=2$ 또는 $a=4$

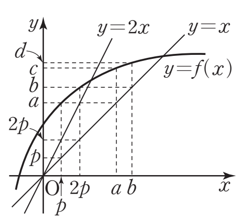
(ii) $f(a)=5$를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$2+4=6$ 답 6

0525

오른쪽 그림에서



$(f\circ f)(p)+(f\circ f)(2p)$

$=f(f(p))+f(f(2p))$

$=f(a)+f(b)$

$=c+d$

답 ⑤

0526

|전략| $f^{-1}(m)=n$이면 $f(n)=m$임을 이용한다.

$f^{-1}(-1)=2$에서 $f(2)=-1$이므로 $2a+b=-1$ ······ ㉠

$f^{-1}(4)=-3$에서 $f(-3)=4$이므로 $-3a+b=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore a+b=0$ 답 0

0527

$f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$이므로

$-3\cdot1+k=2$ $\quad\therefore k=5$

따라서 $f(x)=-3x+5$이므로

$f(3)=-3\cdot3+5=-4$ 답 ①

0528

$\frac{x+1}{2}=t$라 하면 $x=2t-1$

따라서 $f(t)=-(2t-1)+2=-2t+3$이므로

$f(x)=-2x+3$

$f^{-1}(-3)=k$라 하면 $f(k)=-3$이므로

$-2k+3=-3$, $-2k=-6$ $\quad\therefore k=3$ 답 3

다른 풀이 $f^{-1}(-3)=k$라 하면 $f(k)=-3$

$-x+2=-3$에서 $x=5$

$x=5$를 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=-x+2$에 대입하면

$f\left(\frac{5+1}{2}\right)=-5+2$, $f(3)=-3$

$\therefore f^{-1}(-3)=3$

0529

$x\geq0$일 때, $f(x)=2x+1\geq1$

$x<0$일 때, $f(x)=1-x^2<1$

$f^{-1}(5)=m$이라 하면 $f(m)=5>1$이므로

$2m+1=5$, $2m=4$ $\quad\therefore m=2$

$f^{-1}(-3)=n$이라 하면 $f(n)=-3<1$이므로

$1-n^2=-3$, $n^2=4$ $\quad\therefore n=-2$ ($\because n<0$)

$\therefore f^{-1}(5)+f^{-1}(-3)=2+(-2)=0$ 답 ⑤

0530

|전략| $(f^{-1}\circ g)(k)=f^{-1}(g(k))=1$이면 $f(1)=g(k)$임을 이용한다.

$(f^{-1}\circ g)(k)=f^{-1}(g(k))=1$에서 $f(1)=g(k)$

$3\cdot1+1=-k+2$ $\quad\therefore k=-2$ 답 ②

0531

$(f\circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))$이고 $g(2)=1$이므로 $g^{-1}(1)=2$

$\therefore (f\circ g^{-1})(1)=f(2)=3$

$(g\circ f^{-1})(4)=g(f^{-1}(4))$이고 $f(3)=4$이므로 $f^{-1}(4)=3$

$\therefore (g\circ f^{-1})(4)=g(3)=4$

$\therefore (f\circ g^{-1})(1)+(g\circ f^{-1})(4)=3+4=7$ 답 7

0532

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$2+a=1$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=x-1$ ··· ❶

$(g\circ f)(x)=2x-1$에 $x=2$를 대입하면
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(1)=3$
$b+1=3$ $\therefore b=2$
$\therefore g(x)=2x+1$ … ❷
$g^{-1}(f(1))=g^{-1}(0)=k$라 하면 $g(k)=0$이므로
$2k+1=0$ $\therefore k=g^{-1}(f(1))=-\frac{1}{2}$ … ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ a의 값과 $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값과 $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $g^{-1}(f(1))$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0533

$(f^{-1}\circ g)(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지가
$R(x)=ax+b$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면
$(f^{-1}\circ g)(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$
양변에 $x=1$을 대입하면 $(f^{-1}\circ g)(1)=0\cdot Q(1)+a+b$
$\therefore a+b=(f^{-1}\circ g)(1)=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(1)$
$f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로
$2k-2=1$ $\therefore k=\frac{3}{2}$
$\therefore a+b=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

Lecture
다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면
⇨ $A=BQ+R$ (단, (R의 차수)<(B의 차수))

0534

|전략| 함수 f의 역함수가 존재하면 함수 f는 일대일대응이므로 치역과 공역이 같아야 한다.

함수 $f(x)=-2x+1$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 치역과 공역이 같아야 한다.
이때, $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 음수이므로
$f(-1)=b$에서 $-2\cdot(-1)+1=b$ $\therefore b=3$
x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소한다.
$f(1)=a$에서 $-2\cdot1+1=a$ $\therefore a=-1$
$\therefore a+b=2$

답 ⑤

0535

$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$이고, 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로
$a\geq1$, $f(a)=a$
$a^2-2a=a$에서 $a^2-3a=0$
$a(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a\geq1$)

답 3

0536

$$f(x)=2(x-1)-3a|x-2|=\begin{cases}(2-3a)x+6a-2 & (x\geq2)\\(2+3a)x-6a-2 & (x<2)\end{cases}$$
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $x\geq2$일 때와 $x<2$일 때의 직선의 기울기 $2-3a$, $2+3a$의 부호가 서로 같아야 한다.
즉, $(2-3a)(2+3a)>0$이므로
$-\frac{2}{3}<a<\frac{2}{3}$
따라서 정수 a는 0의 1개이다.

답 ②

0537

|전략| $y=2x+a$로 놓고 그 역함수를 구한다.

$y=2x+a$라 하면 $2x=y-a$ $\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}a$
여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a$
즉, $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a=bx+4$이므로
$a=-8$, $b=\frac{1}{2}$ $\therefore ab=-4$

답 ②

0538

$2x-1=t$라 하면 $2x=t+1$ $\therefore x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$
따라서 $f(t)=4\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+5=2t+7$이므로
$f(x)=2x+7$
$y=2x+7$이라 하면 $2x=y-7$ $\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{7}{2}$
여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

답 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

0539

$y=af(x)$라 하면 $f(x)=\frac{y}{a}$이므로 $x=g\left(\frac{y}{a}\right)$
역함수의 정의를 이용하여 x를 y로 나타낸 것
여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=g\left(\frac{x}{a}\right)$
따라서 $af(x)$의 역함수는 $g\left(\frac{x}{a}\right)$이다.
$y=f(ax)$라 하면 $g(y)=ax$
여기서 x와 y를 서로 바꾸면
$g(x)=ay$ $\therefore y=\frac{1}{a}g(x)$
따라서 $f(ax)$의 역함수는 $\frac{1}{a}g(x)$이다.

답 ⑤

4 함수

0540

|전략| $f(x)=f^{-1}(x)$이면 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$임을 이용한다.

① $f(x)=x+1$이므로 $f(f(x))=f(x+1)=x+2$

② $f(x)=2x$이므로 $f(f(x))=f(2x)=4x$

③ $f(x)=-x+2$이므로 $f(f(x))=f(-x+2)=x$

④ $f(x)=-2x$이므로 $f(f(x))=f(-2x)=4x$

⑤ $f(x)=x^3$이므로 $f(f(x))=f(x^3)=x^9$

따라서 $f(x)=f^{-1}(x)$를 만족시키는 함수는 ③이다. 답 ③

0541

$(f\circ f)(x)=x$에서 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$f(5)=f^{-1}(5)=4$

$f^{-1}(5)=4$에서 $f(4)=5$이므로

$f^{-1}(4)=f(4)=5$

$\therefore f(5)+f^{-1}(4)=9$ 답 9

0542

조건 (가), (나)에서 $f(3)=f^{-1}(3)=5$

이때, $f^{-1}(3)=5$에서 $f(5)=3$

$f(3)=5,\ f(5)=3$에서

$3a+b=5,\ 5a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=8$

따라서 $f(x)=-x+8$이므로

$f(1)+f(5)=7+3=10$ 답 ⑤

다른 풀이 조건 (나)에서 $f(3)=3a+b=5$

$\therefore b=5-3a$ …… ㉠

이것을 $f(x)=ax+b$에 대입하면

$f(x)=ax+5-3a$

조건 (가)에서 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$

$f(f(x))=a(ax+5-3a)+5-3a$

$=a^2x-3a^2+2a+5$

즉, $a^2x-3a^2+2a+5=x$이므로 $a^2=1,\ -3a^2+2a+5=0$

(i) $a^2=1$일 때, $a=\pm1$

(ii) $-3a^2+2a+5=0$일 때

$3a^2-2a-5=0,\ (a+1)(3a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\dfrac{5}{3}$

(i), (ii)에서 $a=-1$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=8$

따라서 $f(x)=-x+8$이므로

$f(1)+f(5)=7+3=10$

0543

$f(x)=f^{-1}(x)$에서 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$

$f(f(x))=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

즉, $a^2x+ab+b=x$이므로 $a^2=1,\ ab+b=0$

(i) $a^2=1$일 때, $a=\pm1$

(ii) $ab+b=0$일 때, $b(a+1)=0$

$\therefore b=0$ 또는 $a=-1$

(i), (ii)에서 $ab\neq0$이므로 $a=-1$

$\therefore f(x)=-x+b$

이때, 함수 $f(x)=-x+b$의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이고 그래프의 기울기가 음수인 일차함수이다.

$\therefore f(1)=4,\ f(2)=3,\ f(3)=2,\ f(4)=1$

$f(1)=-1+b=4$에서 $b=5$

따라서 $a=-1,\ b=5$이므로

$a+2b=9$ 답 9

0544

|전략| $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1},\ f^{-1}\circ f=I$임을 이용한다.

$(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(4)=(f\circ g^{-1}\circ \underbrace{f^{-1}\circ f}_{I})(4)$

$=(f\circ g^{-1})(4)$

$=f(g^{-1}(4))$

$g^{-1}(4)=k$라 하면 $g(k)=4$이므로

$2k-2=4 \qquad \therefore k=3$

$\therefore$ (주어진 식)$=f(g^{-1}(4))=f(3)=2$ 답 2

0545

$((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(-1)=(g^{-1}\circ f\circ f)(-1)$

$=g^{-1}(f(f(-1)))$

$=g^{-1}(f(1))$

$=g^{-1}(3)$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로

$k-3=3 \qquad \therefore k=6$

$\therefore$ (주어진 식)$=g^{-1}(3)=6$ 답 ⑤

0546

$(h\circ g\circ f)(x)=(h\circ(g\circ f))(x)=h(x)$이므로 $g\circ f$는 항등함수이고, f가 일대일대응이므로 g는 f의 역함수이다.

$g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$3k-2=1 \qquad \therefore k=1$

$\therefore g(1)=1$ 답 ③

다른 풀이 g는 f의 역함수이므로

$y=3x-2$라 하면 $3x=y+2 \qquad \therefore x=\dfrac{1}{3}y+\dfrac{2}{3}$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

따라서 $g(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$이므로 $g(1)=1$