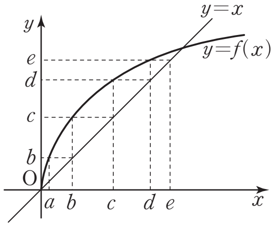
0547

| 전략 | $f^{-1}(a)=b \Longleftrightarrow f(b)=a$임을 이용하여 점선을 따라가며 함숫값을 구한다.



$(f\circ f)^{-1}(e)=(f^{-1}\circ f^{-1})(e)$

$=f^{-1}(f^{-1}(e))$

$f^{-1}(e)=k$라 하면

$f(k)=e \qquad \therefore k=d$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(e))=f^{-1}(d)$

$f^{-1}(d)=l$이라 하면

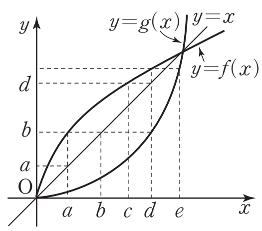
$f(l)=d \qquad \therefore l=c$

$\therefore f^{-1}(d)=c$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(e)=c$

답 ③

0548



$(f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(a)$

$=f^{-1}(g^{-1}(f(a)))$

$=f^{-1}(g^{-1}(b))$

$g^{-1}(b)=k$라 하면

$g(k)=b \qquad \therefore k=d$

$\therefore f^{-1}(g^{-1}(b))=f^{-1}(d)$

$f^{-1}(d)=l$이라 하면

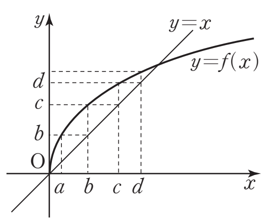
$f(l)=d \qquad \therefore l=c$

$\therefore f^{-1}(d)=c$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(a)=c$

답 ③

0549



① $g(b)=k$라 하면

$f(k)=b \qquad \therefore k=a$

$\therefore g(b)=a$

② $(f\circ f)(b)=f(f(b))=f(c)=d$

③ $(f\circ g)(a)=f(g(a))$

$g(a)=l$이라 하면 $f(l)=a$

그런데 이를 만족시키는 l의 값은

그래프에서 알 수 없지만 $l<a$임을 알 수 있다.

이때, $f(a)=b$이므로 $f(l)<b$

$\therefore (f\circ g)(a)=f(g(a))=f(l)\neq b$

④ $(g\circ g)(d)=g(g(d))$

$g(d)=m$이라 하면

$f(m)=d \qquad \therefore m=c$

$\therefore g(g(d))=g(c)$

$g(c)=n$이라 하면

$f(n)=c \qquad \therefore n=b$

$\therefore g(c)=b$

$\therefore (g\circ g)(d)=b$

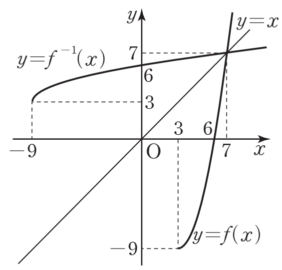
⑤ $(f\circ \overbrace{g\circ f}^{I})(c)=f(c)=d$

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

0550

| 전략 | 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$x^2-6x=x$에서

$x^2-7x=0,\ x(x-7)=0$

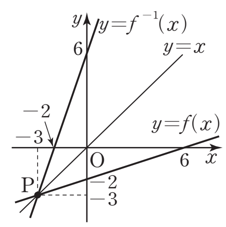
$\therefore x=7\ (\because x\geq 3)$

따라서 교점의 좌표는 $(7,\ 7)$이므로 $a=7,\ b=7$

$\therefore ab=49$

답 ⑤

0551



$y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$\frac{1}{3}x-2=x$에서

$-\frac{2}{3}x=2 \qquad \therefore x=-3$ ··· ❶

점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

따라서 점 $P(-3,\ -3)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$ ··· ❷

답 $3\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	70 %
❷ $\overline{OP}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %

Lecture

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

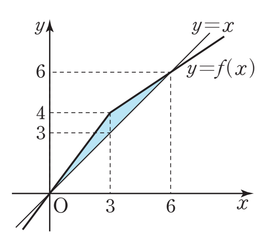
(1) 두 점 $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리

⇨ $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(2) 원점 O와 점 $A(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리

⇨ $\overline{OA}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$

0552



$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

(i) $x\geq3$일 때

$\frac{2}{3}x+2=x \qquad \therefore x=6$

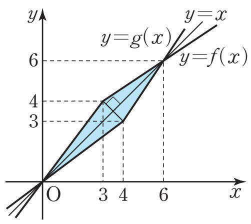
(ii) $x<3$일 때

$\frac{4}{3}x=x \qquad \therefore x=0$

(i), (ii)에서 교점의 좌표는 $(0,\ 0)$, $(6,\ 6)$이므로 구하는 넓이는

$2\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot3+\frac{1}{2}\cdot1\cdot3\right)=6$ 답 ③

다른 풀이 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분은 마름모이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\sqrt{(4-3)^2+(3-4)^2}\cdot\sqrt{6^2+6^2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot6\sqrt{2}=6$

두 대각선의 길이가 a, b인 마름모의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.

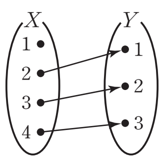
STEP 3 내신 마스터

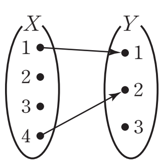
0553

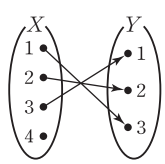
유형 01 함수의 뜻

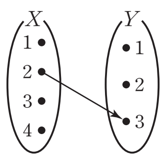
|전략| 각 대응을 그림으로 나타내어 함수인 것을 찾는다.

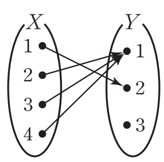
각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0554

유형 04 함수의 정의역, 공역, 치역

|전략| 모든 $x\in A$에 대하여 $f(x)$의 범위를 구한다.

$f(x)=|x-1|+x=\begin{cases}2x-1 & (x\geq1)\\ 1 & (x<1)\end{cases}$

(i) $-2\leq x<1$일 때, $f(x)=1$

(ii) $1\leq x\leq3$일 때, $2\leq2x\leq6$

$1\leq2x-1\leq5 \qquad \therefore 1\leq f(x)\leq5$

(i), (ii)에서 $1\leq f(x)\leq5$

따라서 $a=1$, $b=5$이므로 $a+b=6$ 답 ③

참고 $x\geq1$일 때, $x-1\geq0$이므로 $f(x)=(x-1)+x=2x-1$

$x<1$일 때, $x-1<0$이므로 $f(x)=-(x-1)+x=1$

0555

유형 06 일대일대응

|전략| 주어진 조건을 만족시키는 함수는 일대일대응임을 이용한다.

정의역의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이고, 치역과 공역이 같은 함수는 일대일대응이다.

$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$ (대우)

ㄱ. [반례] $x_1=0$, $x_2=1$이면 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=1$, $f(x_2)=1$

로 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

ㄷ. [반례] $x_1=-3$, $x_2=1$이면 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=|-6|-3=3$, $f(x_2)=|2|+1=3$

으로 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 일대일대응이 아니다.

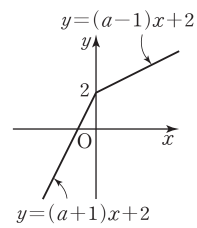
따라서 일대일대응인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

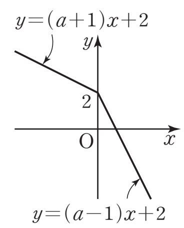
0556

유형 07 일대일대응이 되기 위한 조건

|전략| 함수 f가 일대일대응이려면 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 증가하거나 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 감소해야 함을 이용한다.

함수 f가 일대일대응이려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.





즉, 두 직선의 기울기 $a-1$, $a+1$의 부호가 서로 같아야 하므로

$(a+1)(a-1)>0 \qquad \therefore a<-1$ 또는 $a>1$ 답 ④

0557

유형 08 항등함수와 상수함수

|전략| $f(x)$가 항등함수이면 $f(x)=x$이다.

함수 f가 항등함수이므로 $f(x)=x$이어야 한다.

(i) $x<-4$일 때, $x=-5$

(ii) $-4\leq x<3$일 때,

$x^2+2x-6=x$에서 $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=2$

(iii) $x\geq3$일 때, $x=7$

(i), (ii), (iii)에서 $X=\{-5,\ -3,\ 2,\ 7\}$

따라서 모든 함숫값들의 합은

$f(-5)+f(-3)+f(2)+f(7)=-5-3+2+7=1$ 답 ④

0558

유형 10 조건을 만족시키는 함수의 개수

|전략| $x+f(x)$가 짝수이려면 x와 $f(x)$가 둘 다 짝수이거나 둘 다 홀수이어야 한다.

조건 (가)에서 $x+f(x)$가 짝수이기 위해서는 짝수인 x의 함숫값 $f(x)$는 짝수이어야 하고, 홀수인 x의 함숫값 $f(x)$는 홀수이어야 한다.
조건 (나)에서 함수 f는 일대일대응이므로 짝수는 짝수끼리 일대일대응, 홀수는 홀수끼리 일대일대응이어야 한다.
짝수끼리의 일대일대응의 개수는 $2\cdot1=2$
홀수끼리의 일대일대응의 개수는 $3\cdot2\cdot1=6$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$2\cdot6=12$ 답 ②

0559

유형 11 합성함수의 함숫값

|전략| 함수의 정의에 따라 $f(13)$, $(f\circ f)(13)$, $(f\circ f\circ f)(13)$의 값을 차례로 구해 본다.

13보다 작거나 같은 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13의 6개이므로 $f(13)=6$
$(f\circ f)(13)=f(f(13))=f(6)$
6보다 작거나 같은 소수는 2, 3, 5의 3개이므로 $(f\circ f)(13)=3$
$(f\circ f\circ f)(13)=f((f\circ f)(13))=f(3)$
3보다 작거나 같은 소수는 2, 3의 2개이므로 $(f\circ f\circ f)(13)=2$
$\therefore f(13)+(f\circ f)(13)+(f\circ f\circ f)(13)$
$=6+3+2=11$ 답 ④

0560

유형 13 $f\circ f$에 대한 조건이 주어진 경우

|전략| $(f\circ f\circ f)(x)$를 구하고 x의 값이 증가할 때 $(f\circ f\circ f)(x)$의 값이 증가하는지 감소하는지 알아본다.

$$(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))=f\left(f\left(\frac{1}{2}x+b\right)\right)$$
$$=f\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}b\right)=\frac{1}{8}x+\frac{7}{4}b$$

이때, $(f\circ f\circ f)(0)=\frac{3}{2}$, $(f\circ f\circ f)(a)=\frac{5}{2}$이어야 하므로

$\frac{7}{4}b=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{8}a+\frac{7}{4}b=\frac{5}{2}$ $\quad\therefore a=8,\ b=\frac{6}{7}$

$\therefore a+7b=14$ 답 ④

0561

유형 14 $f\circ g=h$를 만족시키는 함수 f 또는 g 구하기

|전략| $(f\circ g)(x)=h(x)$에서 $f(g(x))=h(x)$이므로 $g(x)=t$로 치환하여 $f(t)$를 구한다.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x+2}{5}\right)$$

$(f\circ g)(x)=h(x)$이므로 $f\left(\frac{x+2}{5}\right)=3x+6$

$\frac{x+2}{5}=t$라 하면 $x+2=5t$ $\quad\therefore x=5t-2$

따라서 $f(t)=3(5t-2)+6=15t$이므로
$f(-1)=-15$ 답 ①

다른 풀이 $f\left(\frac{x+2}{5}\right)=3x+6$에서
$\frac{x+2}{5}=-1$이라 하면 $x+2=-5$ $\quad\therefore x=-7$
$f\left(\frac{x+2}{5}\right)=3x+6$에 $x=-7$을 대입하면
$f(-1)=3\cdot(-7)+6=-15$

0562

유형 18 합성함수와 역함수

|전략| $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$이고, $(f\circ g)^{-1}(a)=b$이면 $(f\circ g)(b)=a$임을 이용한다.

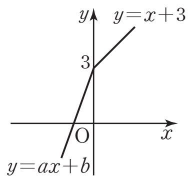
$f^{-1}(2)=-1$에서 $f(-1)=2$이므로
$-a+b=2$ …… ㉠
$(f\circ g)^{-1}(3x+1)=x$에서 $(f\circ g)(x)=3x+1$이므로
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+c)=a(x+c)+b$
$=ax+ac+b$
즉, $ax+ac+b=3x+1$에서 $a=3$, $ac+b=1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=5$, $c=-\frac{4}{3}$
$\therefore a+2b+3c=9$ 답 ④

0563

유형 19 역함수가 존재하기 위한 조건

|전략| 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 함을 이용한다.

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 두 직선 $y=x+3$, $y=ax+b$의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로 $a>0$
(ii) 직선 $y=ax+b$가 점 $(0,\ 3)$을 지나야 하므로
$3=0+b$ $\quad\therefore b=3$
(i), (ii)에서 a, b의 값으로 적당한 것은 ③이다. 답 ③

0564

유형 21 $f=f^{-1}$인 함수

|전략| 점 $(a,\ b)$를 반드시 지나는 직선을 $y=m(x-a)+b\ (m\neq0)$로 놓고, $f=f^{-1}$이면 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$임을 이용한다.

$y=f(x)$의 그래프는 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로
$f(x)=m(x+1)+3=mx+m+3\ (m\neq0)$으로 놓자.
$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$
$f(f(x))=m(mx+m+3)+m+3=m^2x+m^2+4m+3$
즉, $m^2x+m^2+4m+3=x$이므로 $m^2=1$, $m^2+4m+3=0$
(i) $m^2=1$일 때, $m=\pm1$
(ii) $m^2+4m+3=0$일 때, $(m+3)(m+1)=0$
$\therefore m=-3$ 또는 $m=-1$
(i), (ii)에서 $m=-1$

따라서 $f(x)=-x+2$이므로

$f(2)=-2+2=0$ 답 ③

다른 풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1,\ 3)$, $(3,\ -1)$을 지난다.

$f(x)=mx+n\ (m\neq0)$으로 놓으면

$-m+n=3$, $3m+n=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $m=-1$, $n=2$

따라서 $f(x)=-x+2$이므로 $f(2)=0$

0565

유형 22 역함수의 성질

|전략| $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$임을 이용하여 푼다.

$(g\circ f)^{-1}(2)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=(f^{-1}\circ g^{-1})(2)+(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=2(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$=2f^{-1}(g^{-1}(2))$

$g^{-1}(2)=m$이라 하면 $g(m)=2$이므로

$m-3=2 \qquad \therefore m=5$

$f^{-1}(5)=n$이라 하면 $f(n)=5$이므로

$3n^2+2=5$, $n^2=1 \qquad \therefore n=1\ (\because n\geq0)$

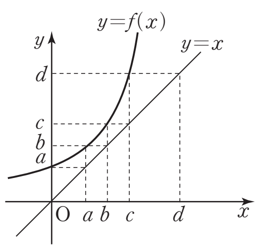
$\therefore$ (주어진 식)$=2f^{-1}(g^{-1}(2))=2f^{-1}(5)$

$=2\cdot1=2$ 답 ①

0566

유형 23 함수의 그래프와 역함수

|전략| $f^{-1}(d)=k$로 놓고, k의 값을 구한다.



$(f\circ f\circ f)^{-1}(d)$

$=(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(d)$

$=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$

$f^{-1}(d)=k$라 하면

$f(k)=d \qquad \therefore k=c$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$

$=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$f^{-1}(c)=l$이라 하면

$f(l)=c \qquad \therefore l=b$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)$

$f^{-1}(b)=m$이라 하면

$f(m)=b \qquad \therefore m=a$

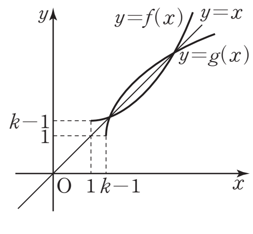
$\therefore f^{-1}(b)=a$

$\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(d)=a$ 답 ②

0567

유형 24 역함수의 그래프의 성질

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 함을 이용한다.



$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2-2x+k=x$, 즉 $x^2-3x+k=0$이 1보다 크거나 같은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4k>0 \qquad \therefore k<\frac{9}{4}$

(ii) $1-3+k\geq0$이므로 $k\geq2$

(iii) $-\frac{-3}{2}>1$

(i), (ii), (iii)에서 $2\leq k<\frac{9}{4}$

따라서 정수 k는 2의 1개이다. 답 ①

Lecture

이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $f(x)=0$의 근의 조건이 주어진 경우

⇨ 조건을 만족시키도록 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 다음 세 가지 조건을 생각한다.

(i) $f(x)=0$의 판별식의 부호

(ii) 경계에서의 함숫값의 부호

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 위치

0568

유형 02 함숫값 구하기

|전략| 함숫값 $f(a)$는 $f(x)$의 x 대신 a를 대입하여 계산한다.

(i) 7은 홀수이므로 $f(7)=f\left(\frac{7+1}{2}\right)=f(4)$

4는 짝수이므로 $f(4)=f\left(\frac{4}{2}\right)=f(2)$

2는 짝수이므로 $f(2)=f\left(\frac{2}{2}\right)=f(1)=1$ … ❶

(ii) 10은 짝수이므로 $f(10)=f\left(\frac{10}{2}\right)=f(5)$

5는 홀수이므로 $f(5)=f\left(\frac{5+1}{2}\right)=f(3)$

3은 홀수이므로 $f(3)=f\left(\frac{3+1}{2}\right)=f(2)=f(1)=1$ … ❷

(i), (ii)에서 $f(7)+f(10)=1+1=2$ … ❸

답 2

채점 기준	배점
❶ $f(7)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ $f(10)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f(7)+f(10)$의 값을 구할 수 있다.	2점

0569

유형 05 서로 같은 함수

|전략| 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 서로 같은 함수이므로 모든 $x\in X$에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.

$f(x)=g(x)$, 즉 $x=x^3$에서

$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ … ❶

즉, 집합 $\{-1,\ 0,\ 1\}$의 부분집합 중에서 $\varnothing$을 제외한 집합을 정의역 X로 하면 $f=g$를 만족시킨다.

따라서 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$일 때 원소의 개수가 최대이므로 구하는 집합 X의 원소의 개수의 최댓값은 3이다. … ❷

답 3

채점 기준	배점
❶ $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ 집합 X의 원소의 개수의 최댓값을 구할 수 있다.	3점

0570

유형 17 역함수의 함숫값 + 19 역함수가 존재하기 위한 조건

|전략| 먼저 a, b의 값을 구한 다음 $x\ge2$, $x<2$일 때의 $f(x)$의 범위를 생각해 본다.

$f^{-1}(3)=1$에서 $f(1)=3$이므로

$b+1=3\qquad\therefore b=2$

또, 함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다. 즉,

$f(2)=2+a=2\cdot2+1\qquad\therefore a=3$

$\therefore f(x)=\begin{cases}x+3 & (x\ge2)\\ 2x+1 & (x<2)\end{cases}$ … ❶

$x\ge2$일 때, $f(x)=x+3\ge5$

$x<2$일 때, $f(x)=2x+1<5$

$f^{-1}(-5)=m$이라 하면 $f(m)=-5<5$이므로

$2m+1=-5$, $2m=-6\qquad\therefore m=-3$ … ❷

$f^{-1}(6)=n$이라 하면 $f(n)=6>5$이므로

$n+3=6\qquad\therefore n=3$ … ❸

$\therefore f^{-1}(-5)+f^{-1}(6)=-3+3=0$ … ❹

답 0

채점 기준	배점
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	2점
❷ $f^{-1}(-5)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ $f^{-1}(6)$의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ $f^{-1}(-5)+f^{-1}(6)$의 값을 구할 수 있다.	1점

0571

유형 12 $f\circ g=g\circ f$인 경우

|전략| $(f\circ g)(x)$와 $(g\circ f)(x)$를 각각 구해서 비교해 본다.

(1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)=3(ax+b)+4$
$=3ax+3b+4$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+4)=a(3x+4)+b$
$=3ax+4a+b$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $3ax+3b+4=3ax+4a+b$

$3b+4=4a+b\qquad\therefore b=2a-2$

(2) $g(x)=ax+b=ax+2a-2$
$=a(x+2)-2$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ -2)$를 지난다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	4점
(2) $y=g(x)$의 그래프가 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	6점

0572

유형 20 역함수 구하기

|전략| $x\ge0$, $x<0$인 경우로 구간을 나누어 $f(x)$의 역함수를 구한 다음 주어진 $f^{-1}(x)$와 비교해 본다.

$f(x)=2x+|x|=\begin{cases}3x & (x\ge0)\\ x & (x<0)\end{cases}$의 역함수는

$f^{-1}(x)=ax+b|x|=\begin{cases}(a+b)x & (x\ge0)\\ (a-b)x & (x<0)\end{cases}$

(1) $x\ge0$일 때, $y=3x$라 하면 $y\ge0$이고 $x=\frac{1}{3}y$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x\ (x\ge0)$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x\ (x\ge0)$

$\therefore a+b=\frac{1}{3}$

(2) $x<0$일 때, $y=x$라 하면 $y<0$이고 $x=y$

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=x\ (x<0)$

$\therefore f^{-1}(x)=x\ (x<0)$

$\therefore a-b=1$

(3) (1), (2)에서 구한 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) $x\ge0$일 때, $f(x)$의 역함수를 구한 다음 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	5점
(2) $x<0$일 때, $f(x)$의 역함수를 구한 다음 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	5점
(3) a, b의 값을 구할 수 있다.	2점

Lecture

함수 f의 치역은 역함수 f^{-1}의 정의역이 되므로 $y=f(x)$에서 y의 값의 범위를 구해 준다.

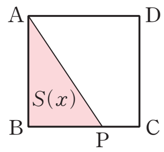
4 함수

창의·융합 교과서 속 심화문제

0573

|전략| 점 P가 정사각형의 세 변 BC, CD, DA 위에 있을 때의 넓이를 각각 구해 본다.

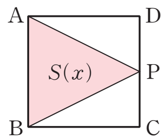
(i) $0<x<2$일 때



$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BP}$

$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot x=x$

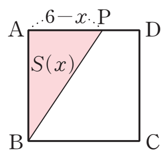
(ii) $2\le x<4$일 때



$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$

(iii) $4\le x<6$일 때



$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AP}$

$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot(6-x)=6-x$

(i), (ii), (iii)에서 $S(x)=\begin{cases} x & (0<x<2) \\ 2 & (2\le x<4) \\ 6-x & (4\le x<6) \end{cases}$

ㄱ. $S(1)=1$, $S(2)=2$이므로 $2S(1)=S(2)$

ㄴ. $2\le x<4$일 때, $S(x)=2$이므로 상수함수이다.

ㄷ. $4\le x<6$일 때, $S(x)=6-x$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

0574

|전략| 2 이상의 자연수 p에 대하여 p가 짝수이면 p^2도 짝수이고 p가 홀수이면 p^2도 홀수이다.

ㄱ. $f(p)=2^p-1$ (참)

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $2k$는 짝수이므로

$(2k)^2=4k^2$

$\therefore g(2k)=0$

자연수 k에 대하여 $2k+1$은 홀수이므로

$(2k+1)^2=4k^2+4k+1$

$\therefore g(2k+1)=1$ …… ㉠

$\therefore g(2k)+g(2k+1)=1$ (거짓)

ㄷ. 임의의 자연수 p에 대하여 $f(p)=2^p-1$은 홀수이므로 ㉠에 의하여

$(g\circ f)(p)=g(f(p))=g(2^p-1)=1$

즉, $g\circ f$는 상수함수이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0575

|전략| 주어진 조건을 이용하여 함수 f의 대응 관계를 찾는다.

$f^3=I$에서 $f^3(0)=0$이므로

$f^3(0)=f(f(f(0)))=f(f(2))=0$

이때, $f(0)=2$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(1)=0$, $f(2)=1$ 또는 $f(1)=1$, $f(2)=0$

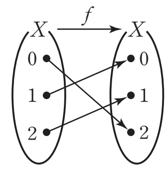
$f(1)=1$, $f(2)=0$이면

$f^3(0)=f(f(f(0)))=f(f(2))=f(0)=2$이므로

$f^3(0)\ne0$

$\therefore f(1)=0$, $f(2)=1$

따라서 f의 대응 관계는 오른쪽 그림과 같으므로 f의 역함수 g에 대하여



$g(0)=1$, $g(1)=2$, $g(2)=0$

(i) $g^1(2)=g(2)=0$

$g^2(2)=g(g(2))=g(0)=1$

$g^3(2)=g(g^2(2))=g(1)=2$

$g^4(2)=g(g^3(2))=g(2)=0$

⋮

즉, $g^n(2)$의 값은 0, 1, 2가 이 순서대로 반복되므로

$g^{330}(2)=g^3(2)=2$

(ii) $g^1(1)=g(1)=2$

$g^2(1)=g(g(1))=g(2)=0$

$g^3(1)=g(g^2(1))=g(0)=1$

$g^4(1)=g(g^3(1))=g(1)=2$

⋮

즉, $g^n(1)$의 값은 2, 0, 1이 이 순서대로 반복되므로

$g^{331}(1)=g(1)=2$

(i), (ii)에서 $g^{330}(2)+g^{331}(1)=2+2=4$ 답 4

다른 풀이 $(f\circ f\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}=g\circ g\circ g=g^3=I$이므로

$g^3(x)=x$

$\therefore g^{330}(2)+g^{331}(1)=g^3(2)+g(1)=2+2=4$

0576

|전략| $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$의 값을 구한 다음 $f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$임을 이용하여 $(g\circ f)^{-1}(1)$의 값을 구한다.

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=2$이고 $f(1)=2$이므로 $g(1)=1$

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=1$이고 $f(5)=1$이므로 $g(2)=5$

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=4$이고 $f(2)=4$이므로 $g(3)=2$

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=3$이고 $f(3)=3$이므로 $g(4)=3$

$(f\circ g)(5)=f(g(5))=5$이고 $f(4)=5$이므로 $g(5)=4$

$(g\circ f)^{-1}=(f^{-1}\circ g^{-1})(1)$

$=f^{-1}(g^{-1}(1))$ $g(1)=1$에서 $g^{-1}(1)=1$

$=f^{-1}(1)$ $f(5)=1$에서 $f^{-1}(1)=5$

$=5$

$\therefore g(2)+(g\circ f)^{-1}(1)=5+5=10$ 답 10

다른 풀이 $(g\circ f)^{-1}(1)=a$라 하면

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=1$

이때, $g(1)=1$이므로 $f(a)=1$

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(5)=1$이므로

$a=5$ $\quad\therefore (g\circ f)^{-1}(1)=5$

0577

| 전략 | 함수 $y=f(f(x))$의 그래프를 그린 다음 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수를 찾는다.

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$$

(i) $0\le x<\frac{1}{4}$일 때, $0\le f(x)=2x<\frac{1}{2}$이므로

$f(f(x))=f(2x)=4x$

(ii) $\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}$일 때, $\frac{1}{2}\le f(x)=2x<1$이므로

$f(f(x))=f(2x)=-4x+2$

(iii) $\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{4}$일 때, $\frac{1}{2}<f(x)=-2x+2\le 1$이므로

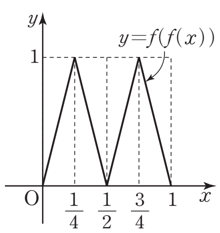
$f(f(x))=f(-2x+2)=4x-2$

(iv) $\frac{3}{4}\le x\le 1$일 때,

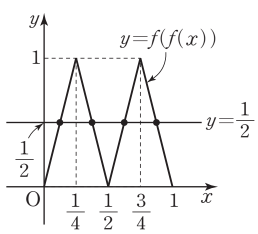
$0\le f(x)=-2x+2\le\frac{1}{2}$이므로

$f(f(x))=f(-2x+2)=-4x+4$

(i)~(iv)에서 함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수는 4이므로 방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}$의 실근의 개수는 4이다.



답 ④

다른 풀이

(i) $0\le f(x)<\frac{1}{2}$일 때

$f(f(x))=\frac{1}{2}$에서 $\underbrace{2f(x)=\frac{1}{2}}_{2x\text{에 }x\text{ 대신 }f(x)\text{를 대입한 것}}$ $\quad\therefore f(x)=\frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{1}{4}$을 만족시키는 x의 값은

$2x=\frac{1}{4}$ 또는 $-2x+2=\frac{1}{4}$에서 $x=\frac{1}{8}$ 또는 $x=\frac{7}{8}$

(ii) $\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$일 때

$f(f(x))=\frac{1}{2}$에서 $\underbrace{-2f(x)+2=\frac{1}{2}}_{-2x+2\text{에 }x\text{ 대신 }f(x)\text{를 대입한 것}}$ $\quad\therefore f(x)=\frac{3}{4}$

$f(x)=\frac{3}{4}$을 만족시키는 x의 값은

$2x=\frac{3}{4}$ 또는 $-2x+2=\frac{3}{4}$에서 $x=\frac{3}{8}$ 또는 $x=\frac{5}{8}$

(i), (ii)에서 방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}$의 실근의 개수는 4이다.

본책 92~111쪽

5 | 유리식과 유리함수

STEP 1 개념 마스터 ❶

0578 답 ㄹ, ㅂ

0579 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ

0580 답 $\frac{3y}{2x}$

0581

$\frac{x^3+1}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}=x+1$ 답 $x+1$

0582

$\frac{1}{2ab^2}$, $\frac{1}{3a^3b}$의 분모의 최소공배수는 $6a^3b^2$이므로

$\frac{3a^2}{6a^3b^2}$, $\frac{2b}{6a^3b^2}$ 답 $\frac{3a^2}{6a^3b^2}$, $\frac{2b}{6a^3b^2}$

0583

$x^2-3xy+2y^2=(x-y)(x-2y)$,

$x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$

즉, 분모의 최소공배수는 $(x-y)(x-2y)(x+2y)$이므로

$\frac{(x+2y)^2}{(x-y)(x-2y)(x+2y)}$, $\frac{(x-2y)^2}{(x-y)(x-2y)(x+2y)}$

답 $\frac{(x+2y)^2}{(x-y)(x-2y)(x+2y)}$, $\frac{(x-2y)^2}{(x-y)(x-2y)(x+2y)}$

참고 다항식의 최소공배수는 각 다항식을 인수분해한 후 각 다항식의 인수(공통인수는 차수가 높은 것)를 곱하여 구한다.

0584

$\frac{x}{x^2+x-2}+\frac{1-x}{x^2-x-6}$

$=\frac{x}{(x-1)(x+2)}+\frac{1-x}{(x+2)(x-3)}$

$=\frac{x(x-3)+(1-x)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

$=\frac{x^2-3x+x-1-x^2+x}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

$=\frac{-x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$ 답 $\frac{-x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

0585

$\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+4}=\frac{x(x+4)-x(x-2)}{(x-2)(x+4)}$

$=\frac{x^2+4x-x^2+2x}{(x-2)(x+4)}$

$=\frac{6x}{(x-2)(x+4)}$ 답 $\frac{6x}{(x-2)(x+4)}$

0586

$$\frac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3}\times\frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$$
$$=\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)}\times\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+5)}$$
$$=1$$

답 1

0587

$$\frac{10x^3y^2}{3a^3b^2}\div\frac{5x^5y^4}{6a^4b^3}=\frac{10x^3y^2}{3a^3b^2}\times\frac{6a^4b^3}{5x^5y^4}=\frac{4ab}{x^2y^2}$$

답 $\frac{4ab}{x^2y^2}$

0588

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x}{x(x+2)}$$
$$=\frac{2}{x(x+2)}$$

답 $\frac{2}{x(x+2)}$

0589

$$\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x+6-(x+2)}{(x+2)(x+6)}$$
$$=\frac{2}{(x+2)(x+6)}$$

답 $\frac{2}{(x+2)(x+6)}$

0590

$$\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}$$

답 $\frac{x-1}{x+1}$

0591

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}=1-\frac{x}{x-1}$$
$$=\frac{x-1-x}{x-1}=\frac{1}{1-x}$$

답 $\frac{1}{1-x}$

0592

$x:y=3:4$이므로 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$

이때, $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=k\,(k\neq0)$로 놓으면 $x=3k,\ y=4k$

(1) $\frac{x+2y}{x-y}=\frac{3k+8k}{3k-4k}=\frac{11k}{-k}=-11$

(2) $\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{9k^2+16k^2}{9k^2-12k^2+16k^2}=\frac{25k^2}{13k^2}=\frac{25}{13}$

답 (1) -11 (2) $\frac{25}{13}$

0593

가비의 리에 의하여

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{3+2+4}=\frac{x+y+z}{9}$$

$\therefore k=9$

답 9

0594

$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=k\,(k\neq0)$로 놓으면 $x=2k,\ y=3k,\ z=5k$

$$\therefore \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}=\frac{4k^2+9k^2+25k^2}{6k^2+15k^2+10k^2}$$
$$=\frac{38k^2}{31k^2}=\frac{38}{31}$$

답 $\frac{38}{31}$

STEP 2 유형 마스터 ❶

0595

| 전략 | 유리식의 덧셈과 뺄셈은 분모를 통분하여 계산한다.

$$\frac{2}{x^2+2x-3}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{2}{x^2+4x+3}$$
$$=\frac{2}{(x+3)(x-1)}-\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}$$
$$=\frac{2(x+1)-(x+3)+2(x-1)}{(x+1)(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{3(x-1)}{(x+1)(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{3}{(x+1)(x+3)}$$

답 $\frac{3}{(x+1)(x+3)}$

0596

| 전략 | 유리식의 곱셈과 나눗셈은 분자, 분모를 인수분해한 후 공통인수로 약분하여 계산한다. 특히 나눗셈은 역수로 곱하여 계산한다.

$$\frac{x-3}{x^2+3x+2}\times\frac{x^3+x^2-2x}{x^2-4x+3}\div\frac{x^2-x}{x+1}$$
$$=\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}\times\frac{x(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)}\div\frac{x(x-1)}{x+1}$$
$$=\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}\times\frac{x(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)}\times\frac{x+1}{x(x-1)}$$
$$=\frac{1}{x-1}$$

답 $\frac{1}{x-1}$

0597

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$$

간단한 식이 되도록 분모의 차가 같은 것끼리 두 개씩 짝지어 계산한다.

$$=\frac{x+1-x}{x(x+1)}-\frac{x+3-(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{(x+2)(x+3)-x(x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{4x+6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

따라서 $\frac{4x+6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{ax+b}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$이므로 $a=4,\ b=6$

$\therefore a-b=-2$

답 -2

0598

$$\frac{2x^2-4x-3}{x-2}-\frac{2x^2+2x+2}{x+1}$$
$$=\frac{2x(x-2)-3}{x-2}-\frac{2x(x+1)+2}{x+1}$$
$$=2x-\frac{3}{x-2}-2x-\frac{2}{x+1}$$
$$=\frac{-3(x+1)-2(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\frac{1-5x}{(x-2)(x+1)}$$

답 $\frac{1-5x}{(x-2)(x+1)}$

0599

| 전략 | 주어진 등식의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 식을 변형하고, 항등식의 성질을 이용한다.

$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$이므로 주어진 등식의 양변에

$(x+2)(x+4)$를 곱하면

$a(x+4)+b(x+2)=x+6$

$\therefore (a+b)x+4a+2b=x+6$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=1,\ 4a+2b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

$\therefore a-b=3$

답 3

Lecture

항등식의 성질

(1) $ax+b=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=0,\ b=0$

(2) $ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=a',\ b=b'$

(3) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0$

(4) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식

$\Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

0600

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로 주어진 등식의 양변에

$(x-1)(x^2+x+1)$을 곱하면

$3x^2=a(x^2+x+1)+(bx+1)(x-1)$

$\therefore 3x^2=(a+b)x^2+(a-b+1)x+a-1$ ··· ❶

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=3,\ a-b+1=0,\ a-1=0$

따라서 $a=1,\ b=2$이므로 ··· ❷

$ab=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 양변에 알맞은 식을 곱하여 정리할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0601

$x^2(x+1)-(x+1)=(x^2-1)(x+1)$
$=(x-1)(x+1)(x+1)$

$\underline{x^3+x^2-x-1=(x-1)(x+1)^2}$이므로 주어진 등식의 양변에

$(x-1)(x+1)^2$을 곱하면

$x^2-5=a(x+1)^2+b(x-1)(x+1)+2(x-1)$

$\therefore x^2-5=(a+b)x^2+(2a+2)x+a-b-2$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=1,\ 2a+2=0,\ a-b-2=-5$

따라서 $a=-1,\ b=2$이므로

$ab=-2$

답 ④

0602

주어진 등식의 양변에 $(x-1)^9$을 곱하면

$x^8+1=a_1(x-1)^8+a_2(x-1)^7+\cdots+a_8(x-1)+a_9$ ······ ㉠

이 식이 x에 대한 항등식이므로

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^8+1=a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9$ ······ ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_1-a_2+\cdots-a_8+a_9$ ······ ㉢

㉡+㉢을 하면

$2^8+2=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=2^7+1=129$

답 129

0603

| 전략 | $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$임을 이용한다. (단, $A\neq B$)

$$\frac{3}{x(x+3)}+\frac{4}{(x+3)(x+7)}+\frac{5}{(x+7)(x+12)}$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+7}\right)+\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+12}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+12}=\frac{12}{x(x+12)}$$

따라서 $\frac{12}{x(x+12)}=\frac{b}{x(x+a)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로 $a=12,\ b=12$

$\therefore a+b=24$

답 ⑤

0604

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}$$
$$=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}=\frac{4}{(x-1)(x+3)}$$

따라서 $\frac{4}{(x-1)(x+3)}=\frac{a}{(x-1)(x-b)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로 $a=4,\ b=-3$

$\therefore ab=-12$

답 -12

0605

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{11}=\frac{5}{11}$$

따라서 $\frac{5}{11}=\frac{a}{b}$이고, a, b는 서로소인 자연수이므로

$a=5$, $b=11$

$\therefore a+b=16$

답 ①

0606

$f(x)=x^2+x=x(x+1)$이므로

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(50)}$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{50\cdot 51}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)$$
$$=1-\frac{1}{51}=\frac{50}{51}$$

답 $\frac{50}{51}$

0607

| 전략 | $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\dfrac{AD}{BC}$임을 이용한다. (단, $BCD\neq 0$)

$$1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}}=1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\frac{x-1}{x}}}}$$
$$=1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\frac{x}{x-1}}}=1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\frac{-1}{x-1}}}$$
$$=1+\frac{1}{1+x-1}=\frac{x+1}{x}$$

답 ④

0608

$$\frac{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}}=\frac{\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}}{\frac{(x-y)^2-(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}}$$
$$=\frac{\frac{2x^2+2y^2}{(x+y)(x-y)}}{\frac{-4xy}{(x+y)(x-y)}}$$
$$=\frac{2x^2+2y^2}{-4xy}=-\frac{x^2+y^2}{2xy}$$

답 $-\frac{x^2+y^2}{2xy}$

0609

$$\frac{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-x}}}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x-1}}}=\frac{1-\cfrac{1}{\frac{-x}{1-x}}}{1-\cfrac{1}{\frac{x-2}{x-1}}}=\frac{1+\frac{1-x}{x}}{1-\frac{x-1}{x-2}}$$
$$=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x-2}}=\frac{-x+2}{x}\quad\cdots ❶$$

따라서 $\frac{-x+2}{x}=\frac{bx+c}{x+a}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=0$, $b=-1$, $c=2$ … ❷

$\therefore a+b+c=1$ … ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0610

| 전략 | a_1, a_2, a_3, $\cdots$의 값을 구하는 과정에서 주기적으로 반복되는 규칙을 찾는다.

$a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$, $a_3=\dfrac{1}{1-\frac{3}{2}}=-2$,

$a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$ (n은 자연수)

$a_4=\dfrac{1}{1-(-2)}=\frac{1}{3}$, $a_5=\frac{3}{2}$, $\cdots$이므로

$a_{3k-2}=\frac{1}{3}$, $a_{3k-1}=\frac{3}{2}$, $a_{3k}=-2$ (k는 자연수)

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{16}+a_{17}+a_{18}$

$=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\right)\cdot 6=-1$

답 -1

0611

| 전략 | $\dfrac{A}{B}=\dfrac{1}{\frac{B}{A}}$임을 이용한다. (단, $AB\neq 0$)

$$\frac{16}{21}=\cfrac{1}{\frac{21}{16}}=\cfrac{1}{1+\frac{5}{16}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{16}{5}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{1}{5}}}$$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=5$이므로

$abc=15$

답 15

0612

$$\frac{79}{23}=3+\frac{10}{23}=3+\cfrac{1}{\frac{23}{10}}=3+\cfrac{1}{2+\frac{3}{10}}$$
$$=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{10}{3}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}$$

따라서 $a=3$, $b=2$, $c=3$, $d=3$이므로

$a+b+c+d=11$ 답 11

0613

$$\frac{59}{45}=1+\frac{14}{45}=1+\cfrac{1}{\cfrac{45}{14}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{3}{14}}$$

$$=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{14}{3}}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{2}{3}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=4$, $d=1$, $e=2$이므로

$abcde=24$ 답 24

0614

| 전략 | 주어진 식의 양변을 x로 나누어 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$x^2-3x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=3$

$$\therefore x^2+3x-1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1$$
$$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1$$
$$=(3^2-2)+3\cdot3-1=15$$

답 15

참고 $x=0$을 $x^2-3x+1=0$에 대입하면 $1\neq0$이므로 $x\neq0$이다.

0615

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=14+2=16$$

$\therefore x+\frac{1}{x}=4$ ($\because x>0$)

$$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=4^3-3\cdot4=52$$

답 52

0616

$x+\frac{1}{x}=-3$의 양변에 x를 곱하여 정리하면 $x^2+3x+1=0$

$$\therefore x^{3n+2}+3x^{3n+1}+x^{3n}+\frac{1}{x^{3n}}+\frac{3}{x^{3n+1}}+\frac{1}{x^{3n+2}}$$
$$=x^{3n}\cdot x^2+3x^{3n}\cdot x+x^{3n}+\frac{x^2}{x^{3n+2}}+\frac{3x}{x^{3n+2}}+\frac{1}{x^{3n+2}}$$
$$=x^{3n}(\underbrace{x^2+3x+1}_{0})+\frac{\overbrace{x^2+3x+1}^{0}}{x^{3n+2}}$$
$$=0$$

답 ③

0617

| 전략 | $a+b+c=0$이면 $b+c=-a$, $c+a=-b$, $a+b=-c$임을 이용한다.

$a+b+c=0$에서 $b+c=-a$, $c+a=-b$, $a+b=-c$이므로

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$$
$$=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$
$$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}$$
$$=-1-1-1=-3$$

답 ①

다른 풀이

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$=a\cdot\frac{b+c}{bc}+b\cdot\frac{c+a}{ac}+c\cdot\frac{a+b}{ab}$$
$$=a\cdot\frac{-a}{bc}+b\cdot\frac{-b}{ac}+c\cdot\frac{-c}{ab}$$
$$=-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

이때, 인수분해 공식

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서

$a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0 \qquad \therefore a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{3abc}{abc}=-3$

0618

$a+b+c=0$에서 $b+c=-a$, $c+a=-b$, $a+b=-c$이므로

$$\left(1-\frac{a}{a+b}\right)\left(1-\frac{b}{b+c}\right)\left(1-\frac{c}{c+a}\right)$$
$$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{b+c}\cdot\frac{a}{c+a}$$
$$=\frac{b}{-c}\cdot\frac{c}{-a}\cdot\frac{a}{-b}=-1$$

답 ②

0619

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$에서 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$

$\therefore ab+bc+ca=0$

$$\therefore \frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$$
$$=\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$$

답 0

다른 풀이 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$에서 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$

$\therefore ab+bc+ca=0$

5 유리식과 유리함수

이때, 주어진 식의 분모는

$(a+b)(a+c)=a^2+ab+bc+ca=a^2$

$(b+c)(b+a)=b^2+ab+bc+ca=b^2$

$(c+a)(c+b)=c^2+ab+bc+ca=c^2$

$$\therefore \frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$$
$$=\frac{a}{a^2}+\frac{b}{b^2}+\frac{c}{c^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

0620

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$이고,

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$이므로

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=0,\ \frac{a+b+c}{abc}=0$

$\therefore a+b+c=0$ ⋯ ❶

따라서 인수분해 공식

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서

$a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0 \quad \therefore a^3+b^3+c^3=3abc$ ⋯ ❷

$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}=\frac{3abc}{3abc}=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $a+b+c=0$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $a^3+b^3+c^3=3abc$임을 알 수 있다.	40 %
❸ $\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0621

| 전략 | a에서 p %만큼 감소하면 $a\left(1-\frac{p}{100}\right)$임을 이용한다.

어느 해 4월의 판매 가격을 a원이라 하면

5월의 판매 가격은 $a\left(1-\frac{15}{100}\right)=0.85a$(원)

6월의 판매 가격은 $0.85a\left(1-\frac{10}{100}\right)=0.765a$(원)

따라서 6월의 판매 가격은 4월의 판매 가격의 76.5 %이므로 4월의 판매 가격에서 23.5 % 할인된 것이다. 답 ①

0622

$\frac{a}{a+b}\times100=20$에서 $10a=2a+2b \quad \therefore b=4a$

20 % 늘어난 소금의 양은 $a\left(1+\frac{20}{100}\right)=\frac{6}{5}a$ (g)

10 % 줄어든 물의 양은 $b\left(1-\frac{10}{100}\right)=\frac{9}{10}b=\frac{18}{5}a$ (g)

따라서 변화된 소금물의 농도는

$$\frac{\frac{6}{5}a}{\frac{6}{5}a+\frac{18}{5}a}\times100=\frac{6}{24}\times100=25\ (\%)$$

답 25 %

0623

오렌지 원액 전체의 양은

$100\times\frac{w}{100}+x\times\frac{y}{100}=w+\frac{xy}{100}$

이고 오렌지 주스 전체의 양은 $(100+x)$ L이므로 새로 만든 오렌지 주스의 농도는

$$z=\frac{w+\frac{xy}{100}}{100+x}\times100=\frac{100w+xy}{100+x}$$

이 식에서 x를 $y,\ z,\ w$에 대한 식으로 나타내면

$(100+x)z=100w+xy,\ 100(z-w)=x(y-z)$

$\therefore x=\frac{100(z-w)}{y-z}$ 답 ④

Lecture

(1) (용액의 농도) $=\frac{(\text{용질의 양})}{(\text{용액의 양})}\times100$

(2) (용질의 양) $=$ (용액의 양) $\times\frac{(\text{용액의 농도})}{100}$

0624

| 전략 | $\frac{a+b}{5}=\frac{b+c}{6}=\frac{c+a}{7}=k\ (k\neq0)$로 놓고 $a=xk,\ b=yk,\ c=zk$ 꼴로 나타내어 주어진 식에 대입한다.

$\frac{a+b}{5}=\frac{b+c}{6}=\frac{c+a}{7}=k\ (k\neq0)$라 하면

$a+b=5k,\ b+c=6k,\ c+a=7k$ ⋯⋯ ㉠

세 식을 변끼리 더하면 $2(a+b+c)=18k$

$\therefore a+b+c=9k$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3k,\ b=2k,\ c=4k$

$\therefore \frac{(a+b)^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}=\frac{25k^2-16k^2}{9k^2-4k^2+16k^2}=\frac{9k^2}{21k^2}=\frac{3}{7}$ 답 $\frac{3}{7}$

0625

$2x=5y$이므로 $\frac{x}{5}=\frac{y}{2}$

이때, $\frac{x}{5}=\frac{y}{2}=k\ (k\neq0)$라 하면 $x=5k,\ y=2k$

$\therefore \frac{x^2+3xy+2y^2}{x^2-y^2}=\frac{25k^2+30k^2+8k^2}{25k^2-4k^2}=\frac{63k^2}{21k^2}=3$ 답 3

0626

$2x=3y$에서 $x=\frac{3}{2}y,\ 2y=3z$에서 $z=\frac{2}{3}y$

$\therefore x:y:z=\frac{3}{2}y:y:\frac{2}{3}y=9:6:4$

따라서 $x=9k,\ y=6k,\ z=4k\ (k\neq0)$라 하면

$\frac{x^2-2xy+y^2}{y^2-2yz+z^2}=\frac{(x-y)^2}{(y-z)^2}=\frac{9k^2}{4k^2}=\frac{9}{4}$ 답 $\frac{9}{4}$

0627

$(x+y):(y+z):(z+x)=3:5:4$에서

$\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{5}=\frac{z+x}{4}=k\ (k\neq0)$라 하면

$x+y=3k,\ y+z=5k,\ z+x=4k$ ······ ㉠ ··· ❶

세 식을 변끼리 더하면 $2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $x=k,\ y=2k,\ z=3k$ ··· ❷

$\therefore \frac{(x+y+z)^2}{xy-yz+zx}=\frac{36k^2}{2k^2-6k^2+3k^2}=\frac{36k^2}{-k^2}=-36$ ··· ❸

답 -36

채점 기준	비율
❶ $x+y,\ y+z,\ z+x$를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $x,\ y,\ z$를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0628

| 전략 | 주어진 연립방정식을 이용하여 $y,\ z$를 x에 대한 식으로 나타낸다.

$3x+2y-z=0$ ······ ㉠

$x-2y-z=0$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면 $4x-2z=0$ $\therefore z=2x$

$z=2x$를 ㉡에 대입하면 $x-2y-2x=0$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x$

$\therefore \frac{x^2-yz}{xy+yz+zx}=\frac{x^2+x^2}{-\frac{1}{2}x^2-x^2+2x^2}=\frac{2x^2}{\frac{1}{2}x^2}=4$

답 ⑤

0629

$x,\ y,\ z$가 실수이므로 $(2x-y)^2+(3y-2z)^2=0$에서

$2x-y=0,\ 3y-2z=0$

$\therefore y=2x,\ z=\frac{3}{2}y=3x$

$\therefore \frac{3x^2+yz+z^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{3x^2+6x^2+9x^2}{x^2-2x^2+4x^2}=\frac{18x^2}{3x^2}=6$

답 6

0630

$a-\frac{2}{c}=1$에서 $\frac{2}{c}=a-1,\ \frac{c}{2}=\frac{1}{a-1}$ $\therefore c=\frac{2}{a-1}$

$\frac{1}{a}-b=1$에서 $b=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}$

이때, $abc=a\cdot\frac{1-a}{a}\cdot\frac{2}{a-1}=-2$이므로

$\frac{2}{abc}+3=\frac{2}{-2}+3=2$

답 ②

0631

| 전략 | 각 분수의 분모의 합이 0일 때와 0이 아닐 때로 나누어 생각한다.

(i) $2p+3q+r=0$일 때, $3q+r=-2p$이므로

$\frac{3q+r}{2p}=\frac{-2p}{2p}=-1$ $\therefore k=-1$

(ii) $2p+3q+r\neq0$일 때, 가비의 리에 의하여

$$\frac{3q+r}{2p}=\frac{r+2p}{3q}=\frac{2p+3q}{r}$$
$$=\frac{(3q+r)+(r+2p)+(2p+3q)}{2p+3q+r}$$
$$=\frac{2(2p+3q+r)}{2p+3q+r}=2$$

$\therefore k=2$

(i), (ii)에서 구하는 모든 k의 값의 합은 1이다.

답 1

0632

$\frac{3a}{5}=\frac{b+2c}{3}=\frac{4c}{7}$에서 가비의 리에 의하여

$\frac{3a}{5}=\frac{2(b+2c)}{2\cdot3}=\frac{-4c}{-7}=\frac{3a+2(b+2c)-4c}{5+6-7}=\frac{3a+2b}{4}$

$\therefore k=4$

답 ①

0633

$a+b+c\neq0$이므로 가비의 리에 의하여

$\frac{a-b-c}{a}=\frac{b-c-a}{b}=\frac{c-a-b}{c}=\frac{-(a+b+c)}{a+b+c}=-1$

즉, $a-b-c=-a,\ b-c-a=-b,\ c-a-b=-c$이므로

$b+c=2a,\ c+a=2b,\ a+b=2c$

$$\therefore \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{2a}+\frac{b}{2b}+\frac{c}{2c}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ⑤

0634

| 전략 | 남녀 학생 수를 각각 비례상수를 이용하여 나타낸다.

안경을 낀 남녀 학생 수를 각각 $2a,\ a$ (a는 자연수)라 하고 안경을 끼지 않은 남녀 학생 수를 각각 $4b,\ 3b$ (b는 자연수)라 하면 전체 남녀 학생 수는 다음 표와 같다.

	남자	여자	계
안경을 낀 학생	$2a$	a	$3a$
안경을 끼지 않은 학생	$4b$	$3b$	$7b$
전체 학생	$2a+4b$	$a+3b$	$3a+7b$

이때, 전체 학생의 남녀 구성비가 $5:3$이므로

$(2a+4b):(a+3b)=5:3$

$3(2a+4b)=5(a+3b)$ $\therefore a=3b$

안경을 낀 학생 수와 전체 학생 수의 비는

$3a:(3a+7b)=9b:(9b+7b)=9:16$

따라서 $p=9,\ q=16$이므로 $pq=144$

답 ③

0635

$a:b=2:3=4:6,\ b:c=2:3=6:9$이므로

$a:b:c=4:6:9$

$a=4k,\ b=6k,\ c=9k\ (k>0)$라 하면 세 면 $A,\ B,\ C$의 넓이의 비는

$ab : ca : bc = 24k^2 : 36k^2 : 54k^2$

$= 4 : 6 : 9$ 답 $4 : 6 : 9$

0636

두 자동차 A, B의 연료통의 용량을 각각 $9a$ L, $7a$ L $(a>0)$라 하고, 1 L로 갈 수 있는 거리를 각각 $8b$ km, $9b$ km $(b>0)$라 하면 144 km를 간 후 남아 있는 휘발유의 양은 다음 표와 같다.

	연료통의 용량(L)	1 L로 갈 수 있는 거리 (km)	144 km를 간 후 남아 있는 휘발유의 양 (L)
A	$9a$	$8b$	$9a-\frac{144}{8b}$
B	$7a$	$9b$	$7a-\frac{144}{9b}$

이때, 남아 있는 휘발유의 양의 비가 4 : 3이므로

$\left(9a-\frac{144}{8b}\right) : \left(7a-\frac{144}{9b}\right) = 4 : 3$

$3\left(9a-\frac{18}{b}\right) = 4\left(7a-\frac{16}{b}\right)$, $\frac{10}{b} = a$ $\quad \therefore ab = 10$

따라서 연료통에 휘발유를 가득 채웠을 때, 자동차 B가 갈 수 있는 최대 거리는

$7a \cdot 9b = 63ab = 630$ (km)

$\therefore x = 630$ 답 630

STEP 1 개념 마스터 ❷

0637 답 ×

0638 답 ×

0639 답 ○

0640 답 ×

0641

$2x=0$에서 $x=0$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x \mid x \neq 0$인 실수$\}$이다.

답 $\{x \mid x \neq 0$인 실수$\}$

0642

$x-1=0$에서 $x=1$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x \mid x \neq 1$인 실수$\}$이다.

답 $\{x \mid x \neq 1$인 실수$\}$

0643

$x^2-4=0$에서 $x=\pm 2$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x \mid x \neq \pm 2$인 실수$\}$이다.

답 $\{x \mid x \neq \pm 2$인 실수$\}$

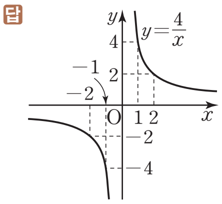
0644

$x^2+2>0$이므로 ─분모를 0으로 하는 x의 값이 존재하지 않는다.

주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다. 답 $\{x \mid x$는 실수$\}$

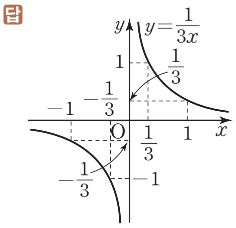
0645

답



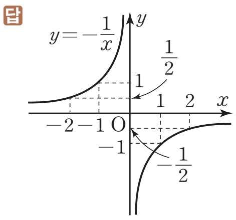
0646

답



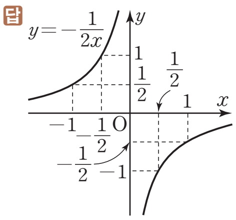
0647

답



0648

답



0649 답 (가) 1 (나) 2 (다) 3

0650

$y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면 $y=\frac{2}{x-1}-4$ 답 $y=\frac{2}{x-1}-4$

0651

$y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=-\frac{1}{x-(-2)}+3$

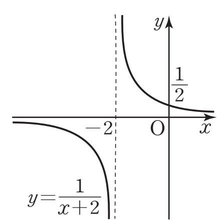
$\therefore y=-\frac{1}{x+2}+3$ 답 $y=-\frac{1}{x+2}+3$

0652

$y=\frac{1}{x+2}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x \mid x \neq -2$인 실수$\}$,

치역은 $\{y \mid y \neq 0$인 실수$\}$이다.



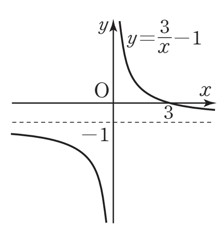
답 풀이 참조

0653

$y=\frac{3}{x}-1$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x \mid x \neq 0$인 실수$\}$,

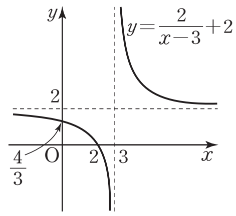
치역은 $\{y \mid y \neq -1$인 실수$\}$이다.



답 풀이 참조

0654

$y=\frac{2}{x-3}+2$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



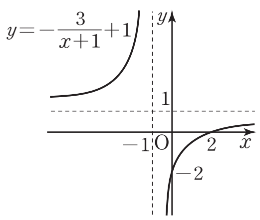
정의역은 $\{x|x\neq3$인 실수$\}$,
치역은 $\{y|y\neq2$인 실수$\}$이다.

답 풀이 참조

0655

$y=-\frac{3}{x+1}+1$의 그래프는

$y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



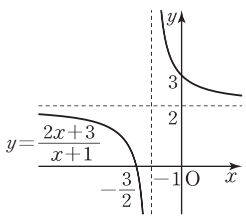
정의역은 $\{x|x\neq-1$인 실수$\}$,
치역은 $\{y|y\neq1$인 실수$\}$이다.

답 풀이 참조

0656

(1) $y=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}+2$

(2) $y=\frac{2x+3}{x+1}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



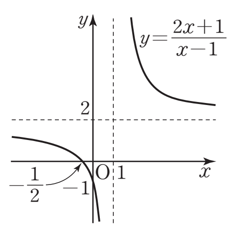
(3) 정의역은 $\{x|x\neq-1$인 실수$\}$, 치역은 $\{y|y\neq2$인 실수$\}$이다.

답 (1) $y=\frac{1}{x+1}+2$
(2) 풀이 참조
(3) 정의역 : $\{x|x\neq-1$인 실수$\}$, 치역 : $\{y|y\neq2$인 실수$\}$

0657

$y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$

따라서 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=2$이다.

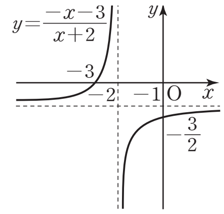


답 풀이 참조

0658

$y=\frac{-x-3}{x+2}=\frac{-(x+2)-1}{x+2}=-\frac{1}{x+2}-1$

따라서 $y=\frac{-x-3}{x+2}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-1$이다.



답 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터 ❷

0659

| 전략 | $y=\frac{-2x+5}{x-1}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.

$y=\frac{-2x+5}{x-1}=\frac{-2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}-2$

이므로 $y=\frac{-2x+5}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $k=3$, $p=1$, $q=-2$이므로

$k+p+q=2$

답 ⑤

0660

ㄱ. $y=\frac{-2x+3}{x-1}=\frac{-2(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}-2$

이므로 $y=\frac{-2x+3}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{x-2}{x-1}=\frac{(x-1)-1}{x-1}=-\frac{1}{x-1}+1$

이므로 $y=\frac{x-2}{x-1}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{-x-1}{x+2}+3=\frac{-(x+2)+1}{x+2}+3=\frac{1}{x+2}+2$

이므로 $y=\frac{-x-1}{x+2}+3$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

Lecture

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형했을 때, k의 값이 같은 유리함수끼리는 그 그래프를 평행이동하여 서로 겹쳐지게 할 수 있다.

0661

$y=\frac{3x+5}{x+2}=\frac{3(x+2)-1}{x+2}=-\frac{1}{x+2}+3$

이므로 $y=\frac{3x+5}{x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{x-p+2}+3+q$ — $y=-\frac{1}{x+2}+3$에 x 대신 $x-p$, y 대신 $y-q$를 대입

이 식이 $y=\frac{2x-3}{x-1}=\frac{2(x-1)-1}{x-1}=-\frac{1}{x-1}+2$와 일치하므로

$p-2=1,\ 3+q=2 \qquad \therefore p=3,\ q=-1$

$\therefore p+q=2$ 답 ②

0662

| 전략 | 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q(k\neq0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p,\ y=q$이다.

$y=\frac{4x+1}{x-2a}=\frac{4(x-2a)+8a+1}{x-2a}=\frac{8a+1}{x-2a}+4$

이므로 점근선의 방정식은

$x=2a,\ y=4$

따라서 $2a=1,\ b=4$이므로 $a=\frac{1}{2},\ b=4$

$\therefore a-b=-\frac{7}{2}$ 답 $-\frac{7}{2}$

다른 풀이 $y=\frac{4x+1}{x-2a}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2a,\ y=4$

따라서 $2a=1,\ b=4$이므로 $a=\frac{1}{2},\ b=4$

$\therefore a-b=-\frac{7}{2}$

Lecture

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 그래프의 점근선의 방정식은

⇨ $x=-\frac{d}{c},\ y=\frac{a}{c}$

0663

$y=\frac{3x+7}{x+1}=\frac{3(x+1)+4}{x+1}=\frac{4}{x+1}+3$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=3$

$y=\frac{bx-9}{2x+a}=\frac{\frac{b}{2}(2x+a)-\frac{ab}{2}-9}{2x+a}=\frac{-\frac{ab}{2}-9}{2x+a}+\frac{b}{2}$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}$

따라서 $-\frac{a}{2}=-1,\ \frac{b}{2}=3$이므로 $a=2,\ b=6$

$\therefore a+b=8$ 답 ④

0664

점근선의 방정식이 $x=3,\ y=4$이므로 주어진 함수를

$y=\frac{k}{x-3}+4\ (k\neq0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{k}{1-3}+4 \qquad \therefore k=4$

따라서 $y=\frac{4}{x-3}+4=\frac{4+4(x-3)}{x-3}=\frac{4x-8}{x-3}$이므로

$a=4,\ b=-8,\ c=-3 \qquad \therefore a+b+c=-7$ 답 -7

다른 풀이 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\frac{-ac+b}{x+c}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-c,\ y=a$

$\therefore c=-3,\ a=4$

또, $y=\frac{b+12}{x-3}+4$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{b+12}{1-3}+4,\ b+12=4 \qquad \therefore b=-8$

$\therefore a+b+c=4+(-8)+(-3)=-7$

0665

| 전략 | 유리함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이면 점근선의 방정식은 $x=p,\ y=q$이다.

함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\frac{b}{c} \qquad \therefore b=3c$ ······ ㉠

$y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\frac{-ac+b}{x+c}+a$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-c,\ y=a$

이 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-c,\ a)$에 대하여 대칭이므로

$-c=2,\ a=1 \qquad \therefore a=1,\ c=-2$

$c=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=-6$

$\therefore a-b+c=5$ 답 ④

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이므로
점근선의 방정식은 $x=2,\ y=1$

$y=\frac{k}{x-2}+1\ (k\neq0)$

로 놓을 수 있다. 이 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=-\frac{k}{2}+1 \qquad \therefore k=-4$

따라서 $y=\frac{-4}{x-2}+1=\frac{-4+(x-2)}{x-2}=\frac{x-6}{x-2}$이므로

$a=1,\ b=-6,\ c=-2 \qquad \therefore a-b+c=5$

0666

$y=\frac{4x-3}{-x+2}=\frac{-4(-x+2)+5}{-x+2}=-\frac{5}{x-2}-4$

이므로 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=-4$

이 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(2,\ -4)$에 대하여 대칭이므로

$a=2,\ b=-4$

$\therefore a^2+b^2=20$ 답 20

0667

$y=\frac{ax+1}{x+1}=\frac{a(x+1)-a+1}{x+1}=\frac{-a+1}{x+1}+a$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=a$

이때, 두 점근선의 교점 $(-1,\ a)$가 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$a=-1$ 답 -1

0668

$y=\frac{ax+1}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+1}{x+b}=\frac{-ab+1}{x+b}+a$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-b,\ y=a$ ··· ❶

이때, 두 점근선의 교점 $(-b,\ a)$가 두 직선 $y=x-2,\ y=-x+3$의 교점이므로

$a=-b-2,\ a=b+3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2}$ ··· ❷

$\therefore\ ab=-\frac{5}{4}$ ··· ❸

답 $-\frac{5}{4}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\frac{ax+1}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

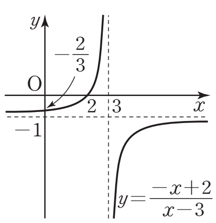
0669

| 전략 | $y=\frac{-x+2}{x-3}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그린다.

$y=\frac{-x+2}{x-3}=\frac{-(x-3)-1}{x-3}=-\frac{1}{x-3}-1$

이므로 $y=\frac{-x+2}{x-3}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\frac{-x+2}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제 2사분면이다.



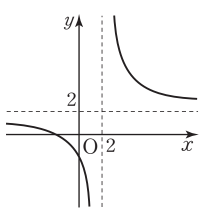
답 제 2 사분면

0670

$y=\frac{2x+k-6}{x-2}=\frac{2(x-2)+k-2}{x-2}=\frac{k-2}{x-2}+2$

이므로 $y=\frac{2x+k-6}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{k-2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $k-2>0$이어야 하므로 $k>2$

(ii) $x=0$일 때, $y<0$이어야 하므로

$\frac{k-6}{-2}<0,\ k-6>0\qquad\therefore\ k>6$

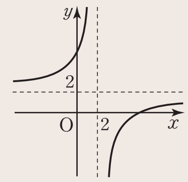
(i), (ii)에 의하여 $k>6$

따라서 정수 k의 최솟값은 7이다.

답 7

Lecture

$k-2<0$인 경우, 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 제 3사분면을 지나지 않는다.



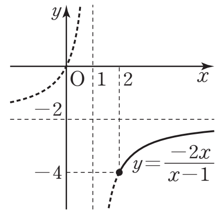
0671

| 전략 | $y=\frac{-2x}{x-1}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그린다.

$y=\frac{-2x}{x-1}=\frac{-2(x-1)-2}{x-1}=-\frac{2}{x-1}-2$

이므로 $y=\frac{-2x}{x-1}$의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\le y<-2$에서 $y=\frac{-2x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은 $\{x\,|\,x\ge2\}$



답 ④

0672

$y=\frac{bx+3}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+3}{x+a}=\frac{-ab+3}{x+a}+b$이므로

정의역은 $\{x\,|\,x\ne-a$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\ne b$인 실수$\}$

따라서 $a=2,\ b=2$이므로

$a+b=4$

답 4

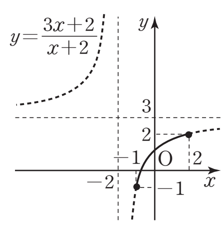
0673

| 전략 | $y=\frac{3x+2}{x+2}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 주어진 정의역에서 그래프를 그리고, y의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$y=\frac{3x+2}{x+2}=\frac{3(x+2)-4}{x+2}=-\frac{4}{x+2}+3$

이므로 $y=\frac{3x+2}{x+2}$의 그래프는 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le2$에서 $y=\frac{3x+2}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때 최댓값 2, $x=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.



$\therefore\ a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=1$

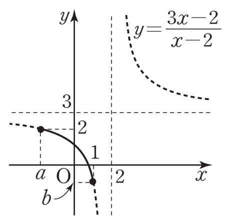
답 ④

0674

$y=\dfrac{3x-2}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+4}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$a\le x\le 1$에서 $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶



즉, $x=a$일 때 최댓값 2를 가지므로

$2=\dfrac{3a-2}{a-2}$에서 $2a-4=3a-2$

$\therefore a=-2$ ··· ❷

또, $x=1$일 때 최솟값 b를 가지므로

$b=\dfrac{3-2}{1-2}=-1$ ··· ❸

$\therefore ab=2$ ··· ❹

답 2

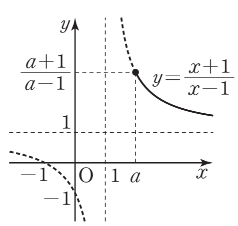
채점 기준	비율
❶ $y=\dfrac{3x-2}{x-2}$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0675

$y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

이므로 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$x\ge a$에서 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$이 최댓값을 가지려면 $a>1$이어야 하므로 $x\ge a$에서 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $x=a$일 때 최댓값 $\dfrac{a+1}{a-1}$을 가지므로 $\dfrac{a+1}{a-1}=a+1$에서

$a+1=(a+1)(a-1)$

$a^2-a-2=0,\ (a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>1)$

답 ③

0676

$y=f(x)=\dfrac{x+c}{ax+b}=\dfrac{\frac{1}{a}(ax+b)+c-\frac{b}{a}}{ax+b}=\dfrac{c-\frac{b}{a}}{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+\dfrac{1}{a}$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{a},\ y=\dfrac{1}{a}$

이 함수의 그래프가 점 (2, 1)에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은 $x=2, y=1$

$-\dfrac{b}{a}=2,\ \dfrac{1}{a}=1\qquad \therefore a=1,\ b=-2$

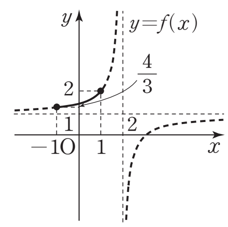
또, $y=\dfrac{x+c}{x-2}$의 그래프가 점 (1, 2)를 지나므로

$2=\dfrac{1+c}{1-2}\qquad \therefore c=-3$

$\therefore f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}+1$

$y=f(x)$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$-1\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$일 때 최댓값 2, $x=-1$일 때 최솟값 $\dfrac{4}{3}$를 갖는다.



따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$2\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$

답 $\dfrac{8}{3}$

다른 풀이 $f(x)=\dfrac{x+c}{ax+b}$의 그래프가 점 (2, 1)에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은 $x=2, y=1$

주어진 함수를 $f(x)=\dfrac{k}{a(x-2)}+1\ (k\ne0)$로 놓으면 이 함수의 그래프가 점 (1, 2)를 지나므로

$2=\dfrac{k}{-a}+1\qquad \therefore k=-a$

$\therefore f(x)=\dfrac{-a}{a(x-2)}+1=-\dfrac{1}{x-2}+1$

0677

| 전략 | 점근선의 방정식이 $x=p, y=q$이면 구하는 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 놓을 수 있다.

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1, y=-2$이므로 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x+1}-2\ (k>0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 (0, −1)을 지나므로

$-1=k-2\qquad \therefore k=1$

따라서 $y=\dfrac{1}{x+1}-2=\dfrac{1-2(x+1)}{x+1}=\dfrac{-2x-1}{x+1}$이므로

$a=-2, b=-1, c=1$

$\therefore abc=2$

답 2

0678

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1, y=-1$이므로 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-1}-1\ (k<0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\dfrac{k}{-1}-1\qquad \therefore k=-1$

따라서 $y=\dfrac{-1}{x-1}-1$이므로 $p=1,\ q=-1,\ k=-1$

$\therefore\ k+p+q=-1$ 답 -1

0679

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2,\ y=1$이므로 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{-2(x-2)}+1\ (k<0)$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\dfrac{k}{4}+1 \qquad \therefore\ k=-4$

따라서 $y=\dfrac{-4}{-2(x-2)}+1=\dfrac{-4-2(x-2)}{-2x+4}=\dfrac{-2x}{-2x+4}$이므로

$a=-2,\ b=0,\ c=4$

$\therefore\ a+b+c=2$ 답 2

0680

$y=\dfrac{bx+c}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-ab+c}{x+a}=\dfrac{-ab+c}{x+a}+b$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-a,\ y=b$

따라서 $-a>0,\ b>0$이므로 $a<0,\ b>0$

또, 주어진 그래프의 개형에서 $-ab+c<0$이므로 $c<ab$

이때, $ab<0$이므로 $c<0$

$\therefore\ a<0,\ b>0,\ c<0$ 답 ③

참고 함수 $y=\dfrac{bx+c}{x+a}$의 그래프에서 $x=0$일 때 y의 값은 양수이므로

$\dfrac{c}{a}>0 \qquad \therefore\ c<0\ (\because\ a<0)$

0681

| 전략 | $y=\dfrac{-2x-4}{x+1}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.

$y=\dfrac{-2x-4}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)-2}{x+1}=-\dfrac{2}{x+1}-2$

① 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$이다.

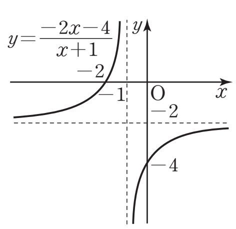
② $y=\dfrac{-2x-4}{x+1}$에 $x=0$을 대입하면 $y=-4$

따라서 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0,\ -4)$이다.

③ 점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=-2$이므로 점 $(-1,\ -2)$에 대하여 대칭이다.

④ $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

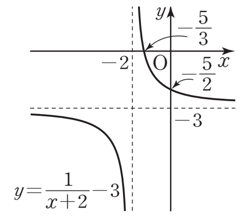
⑤ $y=\dfrac{-2x-4}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

0682

ㄱ. $y=\dfrac{1}{x+2}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.



ㄴ. $y=\dfrac{1}{x+2}-3$에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{1}{x+2}-3,\ \dfrac{1}{x+2}=3$

$x+2=\dfrac{1}{3} \qquad \therefore\ x=-\dfrac{5}{3}$

따라서 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{5}{3},\ 0\right)$이다.

ㄷ. 점근선의 방정식이 $x=-2,\ y=-3$이므로 점 $(-2,\ -3)$에 대하여 대칭이다.

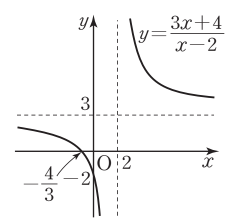
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0683

$y=\dfrac{3x+4}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+10}{x-2}=\dfrac{10}{x-2}+3$

① $y=\dfrac{-x+12}{x-2}=\dfrac{-(x-2)+10}{x-2}=\dfrac{10}{x-2}-1$이므로 평행이동에 의해 $y=\dfrac{-x+12}{x-2}$의 그래프와 겹쳐질 수 있다.

② $y=\dfrac{3x+4}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.



③ 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=3$이다.

④ 치역은 $\{y\,|\,y\neq3$인 실수$\}$이다.

⑤ $y=\dfrac{3x+4}{x-2}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{3x+4}{x-2},\ 3x+4=0 \qquad \therefore\ x=-\dfrac{4}{3}$

따라서 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{4}{3},\ 0\right)$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0684

| 전략 | 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수와 같다.

함수 $y=-\dfrac{4x}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=kx-1$이 한 점에서 만나려면 $-\dfrac{4x}{x-1}=kx-1$이 한 개의 실근을 가져야 한다.

이 식을 정리하면

$-4x=(kx-1)(x-1),\ -4x=kx^2-kx-x+1$

$\therefore\ kx^2-(k-3)x+1=0$

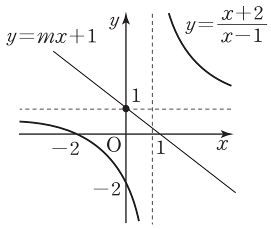
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(k-3)^2-4\cdot k\cdot 1=0,\ k^2-10k+9=0$

$(k-1)(k-9)=0 \qquad \therefore\ k=1$ 또는 $k=9$

따라서 모든 양수 k의 값의 합은 $1+9=10$ 답 10

0685



$y=\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x-1)+3}{x-1}$

$=\frac{3}{x-1}+1$

이므로 $y=\frac{x+2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, 직선 $y=mx+1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

(i) $m=0$일 때, 두 그래프는 만나지 않는다.

(ii) $m\neq0$일 때, 두 그래프가 만나지 않으려면

$\frac{x+2}{x-1}=mx+1$, 즉 $mx^2-mx-3=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

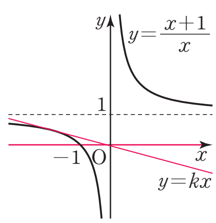
$D=(-m)^2-4\cdot m\cdot(-3)<0$, $m^2+12m<0$

$m(m+12)<0$ $\quad\therefore -12<m<0$

(i), (ii)에서 $-12<m\leq0$

답 ②

0686



$y=\frac{x+1}{x}$, 즉 $y=\frac{1}{x}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, $n(P\cap Q)=1$이므로 함수 $y=\frac{x+1}{x}$의 그래프와 직선 $y=kx$는 한 점에서 만난다.

(i) $k=0$일 때, 두 그래프는 한 점에서 만난다.

(ii) $k\neq0$일 때, 두 그래프가 한 점에서 만나려면

$\frac{x+1}{x}=kx$, 즉 $kx^2-x-1=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

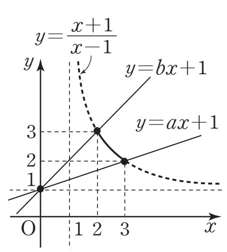
$D=1+4k=0$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $k=0$ 또는 $k=-\frac{1}{4}$

답 $0,\ -\frac{1}{4}$

0687

$y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$



이므로 $2\leq x\leq3$에서 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, 두 직선 $y=ax+1$, $y=bx+1$은 a, b의 값에 관계없이 각각 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

$ax+1\leq\frac{x+1}{x-1}\leq bx+1$이 항상 성립하려면 기울기 a의 값은 점 $(3,\ 2)$를 지날 때보다 작거나 같고, 기울기 b의 값은 점 $(2,\ 3)$을 지날 때보다 크거나 같아야 한다.

이때, 직선 $y=ax+1$이 점 $(3,\ 2)$를 지날 때의 a의 값은 $\frac{1}{3}$이고, 직선 $y=bx+1$이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때의 b의 값은 1이므로

$a\leq\frac{1}{3}$, $b\geq1$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{3}$, b의 최솟값은 1이므로 구하는 합은 $\frac{4}{3}$이다.

답 $\frac{4}{3}$

0688

| 전략 | $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$, $\cdots$를 직접 구하여 $f^n(x)$를 추정한 다음 x 대신 a를 대입한다.

$f(x)=\frac{x-1}{x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=-\frac{1}{x-1}$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=\frac{-\frac{1}{x-1}-1}{-\frac{1}{x-1}}=x$$

$\vdots$

따라서 함수 $f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3n}(x)$($n$은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{2018}(x)=f^{3\cdot672+2}(x)=f^2(x)$

$\therefore f^{2018}(8)=f^2(8)=-\frac{1}{8-1}=-\frac{1}{7}$

답 $-\frac{1}{7}$

다른 풀이 $f^1(8)=f(8)=\frac{8-1}{8}=\frac{7}{8}$

$$f^2(8)=(f\circ f)(8)=f(f(8))=\frac{\frac{7}{8}-1}{\frac{7}{8}}=-\frac{1}{7}$$

$$f^3(8)=(f\circ f^2)(8)=f(f^2(8))=\frac{-\frac{1}{7}-1}{-\frac{1}{7}}=8$$

$$f^4(8)=(f\circ f^3)(8)=f(f^3(8))=\frac{8-1}{8}=\frac{7}{8}$$

$\vdots$

즉, $f^n(8)$은 $\frac{7}{8}$, $-\frac{1}{7}$, 8이 이 순서대로 반복된다.

이때, $2018=3\cdot672+2$이므로

$f^{2018}(8)=f^2(8)=-\frac{1}{7}$

0689

$f(x)=\frac{x-2}{x-1}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x-2}{x-1}-2}{\frac{x-2}{x-1}-1}=\frac{\frac{-x}{x-1}}{\frac{-1}{x-1}}=x$$

$\vdots$

즉, 함수 $f^2(x)=f^4(x)=f^6(x)=\cdots=f^{2n}(x)$($n$은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{200}(x)=f^{2\cdot 100}(x)=x$

따라서 $f^{200}(k)=k$이므로 $k=9$ 답 9

참고 $f^{n}(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} & (n\text{은 홀수}) \\ x & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$

0690

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$에서

$f^{2}(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$

$f^{3}(x)=(f\circ f^{2})(x)=f(f^{2}(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$

⋮

따라서 함수 $f^{3}(x)=f^{6}(x)=f^{9}(x)=\cdots=f^{3n}(x)$($n$은 자연수)는 항등함수이므로

$f^{1004}(x)=f^{3\cdot 334+2}(x)=f^{2}(x)$

$\therefore f^{1004}(2)=f^{2}(2)=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$ 답 ③

다른 풀이 $f^{1}(2)=f(2)=\dfrac{1}{1-2}=-1$

$f^{2}(2)=(f\circ f)(2)=f(f(2))=\dfrac{1}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}$

$f^{3}(2)=(f\circ f^{2})(2)=f(f^{2}(2))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$

$f^{4}(2)=(f\circ f^{3})(2)=f(f^{3}(2))=\dfrac{1}{1-2}=-1$

⋮

즉, $f^{n}(2)$는 -1, $\dfrac{1}{2}$, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때, $1004=3\cdot 334+2$이므로

$f^{1004}(2)=f^{2}(2)=\dfrac{1}{2}$

0691

|전략| 역함수를 구하려면 $x=(y$에 대한 식) 꼴로 정리한 후 x와 y를 서로 바꾼다.

$y=\dfrac{3x+7}{x+k}$이라 하고 x를 y로 나타내면 $y(x+k)=3x+7$

$(y-3)x=-ky+7 \qquad \therefore x=\dfrac{-ky+7}{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{-kx+7}{x-3}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-kx+7}{x-3}$

$f(x)$와 $f^{-1}(x)$가 서로 같으므로 $\dfrac{3x+7}{x+k}=\dfrac{-kx+7}{x-3}$

$\therefore k=-3$ 답 -3

0692

두 함수 $y=\dfrac{4x+7}{2x-5}$, $y=\dfrac{bx+c}{2x+a}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$y=\dfrac{4x+7}{2x-5}$에서 x를 y로 나타내면 $y(2x-5)=4x+7$

$(2y-4)x=5y+7 \qquad \therefore x=\dfrac{5y+7}{2y-4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{5x+7}{2x-4}$

따라서 $\dfrac{bx+c}{2x+a}=\dfrac{5x+7}{2x-4}$이므로

$a=-4, b=5, c=7 \qquad \therefore a-b+c=-2$ 답 -2

0693

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$의 그래프가 점 (2, 3)을 지나므로

$3=\dfrac{2a+b}{2-1} \qquad \therefore 2a+b=3$ ······ ㉠

또, $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$의 역함수의 그래프가 점 (2, 3)을 지나므로

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$의 그래프는 점 (3, 2)를 지난다.

$2=\dfrac{3a+b}{3-1} \qquad \therefore 3a+b=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=1$

$\therefore a+b=2$ 답 2

Lecture

함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계

$y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지난다.

$\Longleftrightarrow y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (b, a)를 지난다.

0694

$f(x)=\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{(x+2)-2}{x+2}=-\dfrac{2}{x+2}+1$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\dfrac{2}{x-p+2}+1+q$ ······ ㉠ ··· ❶

한편, $y=\dfrac{x}{x+2}$라 하고 x를 y로 나타내면 $y(x+2)=x$

$x(1-y)=2y \qquad \therefore x=\dfrac{2y}{1-y}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{2x}{1-x}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{2x}{1-x}=-\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}$

$=-\dfrac{2}{x-1}-2$ ······ ㉡ ··· ❷

이때, ㉠, ㉡의 그래프가 일치하므로

$p-2=1, 1+q=-2$

따라서 $p=3, q=-3$이므로 $pq=-9$ ··· ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ pq의 값을 구할 수 있다.	20 %

5 유리식과 유리함수

0695

| 전략 | 먼저 역함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$ (I는 항등함수)이므로

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(1)+(f\circ f^{-1})(-2)$

$=(f^{-1}\circ I)(1)+I(-2)$

$=f^{-1}(1)-2$

이때, $f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$1=\frac{k+1}{2k-1}$, $2k-1=k+1$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore (f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(1)+(f\circ f^{-1})(-2)=2-2=0$

답 ③

0696

$f(g(x))=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$\frac{3\cdot 2+k}{2\cdot 2-1}=1$, $6+k=3$ $\quad\therefore k=-3$

$\therefore f(x)=\frac{3x-3}{2x-1}$

$g(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로

$\frac{3a-3}{2a-1}=3$, $3a-3=6a-3$ $\quad\therefore a=0$

즉, $g(3)=0$이므로

$(g\circ g)(3)=g(g(3))=g(0)$

$g(0)=b$라 하면 $f(b)=0$이므로

$\frac{3b-3}{2b-1}=0$, $3b-3=0$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore (g\circ g)(3)=1$

답 1

다른 풀이 $y=\frac{3x-3}{2x-1}$이라 하고 x를 y로 나타내면

$y(2x-1)=3x-3$

$(2y-3)x=y-3$ $\quad\therefore x=\frac{y-3}{2y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x-3}{2x-3}$

$\therefore g(x)=\frac{x-3}{2x-3}$

따라서 $g(3)=0$, $g(0)=1$이므로

$(g\circ g)(3)=g(g(3))=g(0)=1$

0697

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))$

이때, $g(2)=\frac{-3\cdot 2+1}{2+2}=-\frac{5}{4}$이므로

$f^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)=k$라 하면 $f(k)=-\frac{5}{4}$

$\frac{k-1}{2k+1}=-\frac{5}{4}$에서 $-4k+4=10k+5$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{14}$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=-\frac{1}{14}$

답 $-\frac{1}{14}$

0698

$(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(a)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(a)$

$=(f^{-1}\circ g)(a)$

$=f^{-1}(g(a))$

이므로 $f^{-1}(g(a))=2$에서 $g(a)=f(2)$

이때, $f(2)=\frac{3\cdot 2}{2+1}=2$이므로

$g(a)=\frac{a+2}{a-1}=2$, $a+2=2a-2$ $\quad\therefore a=4$

답 ④

STEP 3 내신 마스터

0699

유형 02 유리식과 항등식

| 전략 | 주어진 등식의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 식을 변형하고, 항등식의 성질을 이용한다.

주어진 등식의 양변에 $x(x-1)(x-2)$를 곱하면

$a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)=4$

$\therefore (a+b+c)x^2-(3a+2b+c)x+2a=4$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b+c=0$, $3a+2b+c=0$, $2a=4$

$2a=4$에서 $a=2$
즉, $2+b+c=0$, $6+2b+c=0$이므로
두 식을 연립하여 풀면 $b=-4$, $c=2$

따라서 $a=2$, $b=-4$, $c=2$이므로

$\frac{ac}{b}=\frac{2\cdot 2}{-4}=-1$

답 ②

0700

유형 03 부분분수로의 변형

| 전략 | $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$임을 이용한다. (단, $A\neq B$)

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+96}-\frac{1}{x+98}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+98}-\frac{1}{x+100}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+100}\right)$$

$\therefore f(1)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{101}=\frac{50}{101}$

답 ③

다른 풀이

$$f(1)=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 101}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{101}=\frac{50}{101}$$

0701

유형 04 번분수식의 계산

| 전략 | 주어진 유리식을 간단히 하고, (분모)$\neq 0$임을 이용한다.

$$\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}=\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=\frac{n+2}{n}=1+\frac{2}{n}$$

이 값이 정수가 되려면 $\frac{2}{n}$의 값이 정수이어야 하므로 n의 값은 $-2,\ -1,\ 1,\ 2$이다.
그런데 주어진 식의 (분모)$\neq 0$이어야 하므로
$n\neq 0,\ n\neq -1,\ n\neq -2$
따라서 정수 n의 값은 $1,\ 2$이므로 구하는 합은 3이다. 답 ⑤

0702

유형 06 유리식의 값 구하기 – $x\pm\frac{1}{x}$의 값 이용

| 전략 | 주어진 식의 양변을 x로 나누어 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$x^2-4x+1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-4+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=4$

$$\begin{aligned}\therefore x^3-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3} &= x^3+\frac{1}{x^3}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\\ &=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\\ &=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\\ &=4^3-5\cdot 4+3=47\end{aligned}$$

답 ④

0703

유형 09 유리식의 값 구하기 – 비례식이 주어진 경우

| 전략 | $\frac{3x-2y}{x-y}=\frac{1}{2}$을 변형하여 $x=ak,\ y=bk$ 꼴로 나타낸다.

$\frac{3x-2y}{x-y}=\frac{1}{2}$에서 $2(3x-2y)=x-y \qquad \therefore 5x=3y$

$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=k\ (k\neq 0)$라 하면 $x=3k,\ y=5k$

$\therefore \frac{5x^2-3y^2}{xy}=\frac{45k^2-75k^2}{15k^2}=\frac{-30k^2}{15k^2}=-2$ 답 ①

0704

유형 11 가비의 리

| 전략 | $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$임을 이용한다. (단, $b+d+f\neq 0$)

$\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}$에서 가비의 리에 의하여

$\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}=\frac{y+(x+y)+x}{(x-z)+z+y}=\frac{2(x+y)}{x+y}=2$

$x,\ y,\ z$가 서로 다른 양수이므로 (분모의 합)$\neq 0$

$\therefore k=2$ 답 ②

0705

유형 12 유리식의 활용 – 비례식

| 전략 | 남녀의 수를 각각 비례상수를 이용하여 나타낸다.

남녀 합격자 수를 각각 $5a,\ 4a$ (a는 자연수), 남녀 불합격자 수를 각각 $4b,\ 3b$ (b는 자연수)라 하면 전체 남녀 지원자 수는 다음 표와 같다.

	남자	여자	계
합격자	$5a$	$4a$	$9a$
불합격자	$4b$	$3b$	$7b$
전체 지원자	$5a+4b$	$4a+3b$	$9a+7b$

이때, 전체 지원자의 남녀의 비가 $9:7$이므로
$(5a+4b):(4a+3b)=9:7$
$7(5a+4b)=9(4a+3b) \qquad \therefore a=b$
합격자 수가 3600이므로 $9a=3600 \qquad \therefore a=400$
따라서 전체 지원자 수는
$9a+7b=16a=16\cdot 400=6400$ 답 ③

0706

유형 13 유리함수의 그래프의 평행이동

| 전략 | 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$의 중심인 점 $(2,\ -1)$이 점 $(3,\ 4)$로 옮겨지므로 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하는 것이다.

따라서 함수 $y=\frac{2}{x-1}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-5=\frac{2}{(x-1)-1}$

$\therefore y=\frac{2}{x-2}+5=\frac{2+5(x-2)}{x-2}=\frac{5x-8}{x-2}$

따라서 $a=5,\ b=-8,\ c=-2$이므로 $abc=80$ 답 ③

0707

유형 14 유리함수의 그래프의 점근선

| 전략 | 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p,\ y=q$이다.

$y=\frac{ax-2}{x+b}=\frac{a(x+b)-2-ab}{x+b}=\frac{-2-ab}{x+b}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-b,\ y=a$

따라서 $-b=1,\ a=-2$이므로 $a=-2,\ b=-1$

$\therefore a+b=-3$ 답 ①

다른 풀이 점근선의 방정식이 $x=1,\ y=-2$이므로 주어진 함수를

$y=\frac{k}{x-1}-2\ (k\neq 0)$로 놓을 수 있다.

$y=\frac{k}{x-1}-2=\frac{-2(x-1)+k}{x-1}=\frac{-2x+k+2}{x-1}$에서

$a=-2,\ k+2=-2,\ b=-1$

$\therefore a+b=-3$

0708

유형 18 유리함수의 최대·최소

| 전략 | $y=\frac{4x+1}{1-x}$을 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 주어진 정의역에서 그래프를 그리고, y의 최댓값과 최솟값을 구한다.

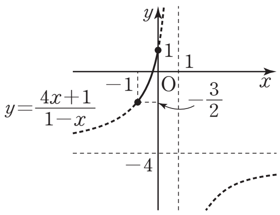
$y=\dfrac{4x+1}{1-x}=\dfrac{-4(1-x)+5}{1-x}=\dfrac{5}{1-x}-4$

이므로 $y=\dfrac{4x+1}{1-x}$의 그래프는 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 0$에서

$y=\dfrac{4x+1}{1-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=0$일 때 최댓값 1,

$x=-1$일 때 최솟값 $-\dfrac{3}{2}$을 갖는다.



$\therefore 1+\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

답 ②

0709

유형 **20** 유리함수의 그래프의 성질

| 전략 | $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.

$y=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+2$

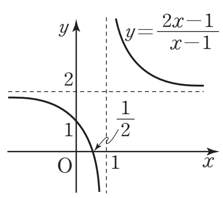
① 정의역은 1이 아닌 실수 전체의 집합이다.

② 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=2$이다.

③ $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

④ 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이다.

⑤ $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0710

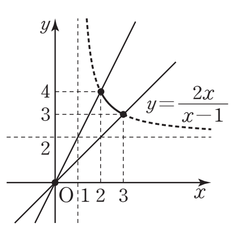
유형 **21** 유리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

| 전략 | $y=\dfrac{2x}{x-1}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그리고 직선이 반드시 지나는 점을 이용한다.

$y=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+2$

이므로 $2\le x\le 3$에서 $y=\dfrac{2x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, 직선 $y=ax$는 a의 값에 관계없이 점 $(0,\ 0)$을 지난다.



함수 $y=\dfrac{2x}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=ax$가 만나려면 기울기 a의 값은 점 $(3,\ 3)$을 지날 때보다 크거나 같고, 점 $(2,\ 4)$를 지날 때보다 작거나 같아야 한다.

이때, 직선 $y=ax$가 점 $(3,\ 3)$을 지날 때의 a의 값은 1이고 직선 $y=ax$가 점 $(2,\ 4)$를 지날 때의 a의 값은 2이므로

$1\le a\le 2$

답 ③

0711

유형 **22** 유리함수의 합성 + **23** 유리함수의 역함수

| 전략 | $f(1)$, $f^2(1)$, $f^3(1)$, $\cdots$의 값에서 규칙을 찾아 $f^n(1)$의 값을 구한다.

주어진 그래프에서 $f^{-1}(1)=0$, $f^{-1}(0)=1$이므로

$f(0)=1$, $f(1)=0$

$f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(0)=1$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=0$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(0)=1$

$\vdots$

따라서 $f^n(1)=\begin{cases}0\ (n\text{은 홀수})\\ 1\ (n\text{은 짝수})\end{cases}$이므로

$f^{999}(1)=0$

답 ②

0712

유형 **24** 유리함수의 합성함수와 역함수

| 전략 | 먼저 역함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$ (I는 항등함수)이므로

$(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)=f^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)$

$f^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)=2x+a$에서 $f(2x+a)=\dfrac{x+1}{2x-1}$

$2x+a=t$라 하면 $x=\dfrac{t-a}{2}$이므로

$f(t)=\dfrac{\dfrac{t-a}{2}+1}{2\cdot\dfrac{t-a}{2}-1}=\dfrac{t-a+2}{2t-2a-2}$

이때, $f(1)=2$이므로 $\dfrac{1-a+2}{2-2a-2}=2$

$-a+3=-4a$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 $f(t)=\dfrac{t+3}{2t}$이므로 $f(3)=1$

답 ④

0713

유형 **16** 유리함수의 그래프가 지나는 사분면

| 전략 | $k>0$인 경우와 $k<0$인 경우로 나누어 함수의 그래프를 그리고 k의 값의 범위를 구한다.

$y=\dfrac{k}{x-1}+2$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

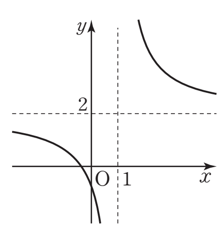
(i) $k>0$일 때

오른쪽 그림과 같이 $y=\dfrac{k}{x-1}+2$의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 $x=0$일 때 $y<0$이어야 하므로

$y\ge 0$이면 제 3 사분면을 지나지 않는다.

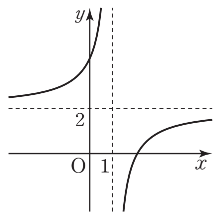
$-k+2<0$

$\therefore k>2$ $\cdots$ ❶



(ii) $k<0$일 때

오른쪽 그림과 같이 $y=\dfrac{k}{x-1}+2$의 그래프는 k의 값에 관계없이 제 3 사분면을 지나지 않는다.



… ❷

(i), (ii)에서 $k>2$ … ❸

답 $k>2$

채점 기준	배점
❶ $k>0$일 때, 조건에 맞는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점
❷ $k<0$일 때, 조건에 맞는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	3점
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	1점

0714

유형 19 유리함수의 그래프와 미정계수 구하기

| 전략 | 점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이면 구하는 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 놓을 수 있다.

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=1$이므로 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x+3}+1\,(k>0)$로 놓을 수 있다. … ❶

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{k}{3}+1 \qquad \therefore k=3$

따라서 $y=\dfrac{3}{x+3}+1=\dfrac{3+(x+3)}{x+3}=\dfrac{x+6}{x+3}$이므로

$a=1,\ b=6,\ c=3$ … ❷

$\therefore y=\dfrac{a-bx}{cx+1}=\dfrac{1-6x}{3x+1}$

$=\dfrac{-2(3x+1)+3}{3x+1}=\dfrac{3}{3x+1}-2$

따라서 구하는 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=-2$ … ❸

답 $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=-2$

채점 기준	배점
❶ 점근선의 방정식을 이용하여 주어진 함수를 식으로 나타낼 수 있다.	2점
❷ $a,\ b,\ c$의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ 함수 $y=\dfrac{a-bx}{cx+1}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	2점

0715

유형 23 유리함수의 역함수

| 전략 | $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)+b-ac}{x+c}=\dfrac{b-ac}{x+c}+a$

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프의 두 점근선 중 하나가 직선 $y=2$이므로

$a=2$ … ❶

$f(x)=\dfrac{2x+b}{x+c}$에서 $f^{-1}(0)=2$이므로 $f(2)=0$

$\dfrac{4+b}{2+c}=0,\ 4+b=0 \qquad \therefore b=-4$ … ❷

$f(x)=\dfrac{2x-4}{x+c}$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $f(1)=1$

$\dfrac{2-4}{1+c}=1,\ 1+c=-2 \qquad \therefore c=-3$ … ❸

따라서 $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}$이므로 $f(-1)=\dfrac{3}{2}$ … ❹

답 $\dfrac{3}{2}$

채점 기준	배점
❶ a의 값을 구할 수 있다.	2점
❷ b의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ c의 값을 구할 수 있다.	1점
❹ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	1점

0716

유형 14 유리함수의 그래프의 점근선

| 전략 | 함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\,(k\neq 0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

(1) $y=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)-2}{x+1}=\dfrac{-2}{x+1}+1$이므로 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=1$

(2) $y=\dfrac{bx+1}{x-a}=\dfrac{b(x-a)+ab+1}{x-a}=\dfrac{ab+1}{x-a}+b$이므로 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$

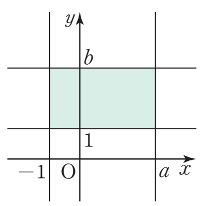
(3) 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이가 13이므로

$(a+1)(b-1)=13$

이때, $a,\ b$는 자연수이므로

$a+1=13,\ b-1=1 \qquad \therefore a=12,\ b=2$

$\therefore a+b=14$



답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 함수 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	2점
(2) 함수 $y=\dfrac{bx+1}{x-a}$의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	3점
(3) $a+b$의 값을 구할 수 있다.	5점

0717

유형 23 유리함수의 역함수

| 전략 | 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 사이의 관계를 이용한다.

(1) $y=\dfrac{-x+k}{x-1}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{-x+k}{x-1},\ -x+k=0 \qquad \therefore x=k$

따라서 그래프가 x축의 양의 부분과 만나는 점은 $\mathrm{A}(k,\ 0)$이다.

이때, $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(k,\ 0)$을 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(0,\ k)$를 지난다.

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 y축의 양의 부분과 만나는 점은 $\mathrm{B}(0,\ k)$이다.

(2) $\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-k)^2+k^2}=k\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ $\qquad\therefore k=4$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 두 점 A, B의 좌표를 각각 k로 나타낼 수 있다.	8점
(2) k의 값을 구할 수 있다.	4점

Lecture

두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여

⇨ $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

창의·융합 교과서 속 심화문제

0718

| 전략 | (거리)=(속력)×(시간)이고, (평균 속력)$=\dfrac{(\text{총 이동 거리})}{(\text{총 걸린 시간})}$임을 이용한다.

A지점에서 B지점까지의 거리는 자동차가 30분, 즉 $\frac{1}{2}$시간 동안 평균 100 km/h의 속력으로 달렸으므로

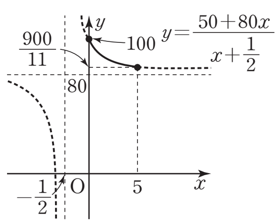
$100\cdot\frac{1}{2}=50(\mathrm{km})$

B지점에서 C지점까지의 거리는 자동차가 x시간 동안 평균 80 km/h의 속력으로 달렸으므로 $80x$ km

즉, A지점에서 C지점까지 자동차의 평균 속력은

$$y=\frac{50+80x}{x+\frac{1}{2}}=\frac{80\left(x+\frac{1}{2}\right)+10}{x+\frac{1}{2}}=\frac{10}{x+\frac{1}{2}}+80$$

따라서 $0\le x\le 5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=5$일 때 최솟값

$$\frac{50+80\cdot 5}{5+\frac{1}{2}}=\frac{900}{11}$$

을 갖는다.

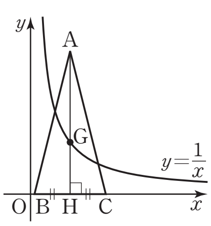
답 ④

0719

| 전략 | $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$임을 이용한다. (단, $A\ne B$)

점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 G는 △ABC의 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{AH}}$를 2 : 1로 내분한다.

즉, $\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{GH}}=3:1$



이때, 점 G는 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 점이고 점 G의 x좌표는 n이므로 $\mathrm{G}\left(n,\ \frac{1}{n}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{GH}}=\frac{1}{n}$, $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{3}{n}$

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\frac{3}{n}=3n$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=2n^2$

$\therefore \overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{CH}}=n^2$ —— △ABC는 이등변삼각형이므로 A에서 밑변 BC에 내린 수선 AH는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 이등분한다.

$\therefore f(n)=n-n^2$, $g(n)=n+n^2$

이때,

$$\frac{1}{g(n)}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{n(1-n)}=-\frac{1}{n(n-1)}=-\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore 90\left\{\left(\frac{1}{g(2)}-\frac{1}{f(2)}\right)+\left(\frac{1}{g(3)}-\frac{1}{f(3)}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{g(9)}-\frac{1}{f(9)}\right)\right\}$$

$$=90\left\{\left(\frac{1}{g(2)}+\frac{1}{g(3)}+\cdots+\frac{1}{g(9)}\right)-\left(\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(9)}\right)\right\}$$

$$=90\left[\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{10}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\frac{1}{9}\right)\right\}\right]$$

$$=90\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}+1-\frac{1}{9}\right)=116$$

답 116

0720

| 전략 | 점 A의 좌표를 $\left(p,\ \frac{1}{p}\right)$이라 하고 두 점 B, C의 좌표를 구한다.

점 A의 좌표를 $\left(p,\ \frac{1}{p}\right)$이라 하면

점 B의 좌표는 $\left(pk,\ \frac{1}{p}\right)$이고, 점 C의 좌표는 $\left(p,\ \frac{k}{p}\right)$

이때, △ABC의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\cdot(pk-p)\cdot\left(\frac{k}{p}-\frac{1}{p}\right)=18$

$\frac{1}{2}\cdot p(k-1)\cdot\frac{1}{p}(k-1)=18$, $\frac{1}{2}(k-1)^2=18$

$(k-1)^2=36$, $k-1=\pm 6$

$\therefore k=7$ ($\because k>1$)

답 7

0721

| 전략 | 점 A의 좌표를 $\left(p,\ \frac{1}{p}\right)$이라 하고 점 C가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

점 A의 좌표를 $\left(p,\ \frac{1}{p}\right)$이라 하면

점 C의 좌표는 $\left(p+2,\ \frac{1}{p}+2\right)$

즉, 점 C의 자취는 $y=\frac{1}{x}(x>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같으므로 자취의 방정식은

$$y=\frac{1}{x-2}+2=\frac{1+2(x-2)}{x-2}=\frac{2x-3}{x-2}\ (x>2)$$

따라서 $a=2$, $b=-3$, $c=1$이므로

$a+b+c=0$

답 0

다른 풀이 점 A의 좌표를 $\left(p,\ \frac{1}{p}\right)$이라 하고, 점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=p+2,\ y=\frac{1}{p}+2 \qquad \therefore p=x-2,\ \frac{1}{p}=y-2$

따라서 $y-2=\frac{1}{x-2}\ \underline{(x>2)}$이므로
점 A가 제 1 사분면 위의 점이므로 $p>0$ $\therefore x=p+2>2$

$y=\frac{1}{x-2}+2=\frac{2x-3}{x-2}\ (x>2)$

Lecture

자취의 방정식

(i) 구하는 자취 위의 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓는다.

(ii) 주어진 조건을 이용하여 $x,\ y$ 사이의 관계식을 구한다.

0722

| 전략 | $f(x)=f^{-1}(x)$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이어야 하므로 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.

$y=\frac{(a+2)x+1}{x-a}=\frac{(a+2)(x-a)+a^2+2a+1}{x-a}$

$=\frac{a^2+2a+1}{x-a}+a+2$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선이 $y=f(x)$이므로

$f(x)=\frac{a^2+2a+1}{x-3-a}+a+2+k$

이때, $f(x)=f^{-1}(x)$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이어야 한다.

$y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a+3,\ y=a+2+k$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a+3,\ a+2+k)$이다.

이 점이 직선 $y=x$ 위의 점이므로

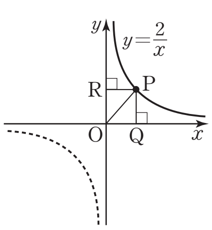
$a+2+k=a+3$

$\therefore k=1$ 답 ⑤

0723

| 전략 | 임의의 점 P의 좌표를 $\left(p,\ \frac{2}{p}\right)$라 하고 직사각형 OQPR의 대각선의 길이를 구해 본다.

점 P의 좌표를 $\left(p,\ \frac{2}{p}\right)$라 하면 직사각형 OQPR의 대각선의 길이는



$\overline{OP}=\sqrt{p^2+\frac{4}{p^2}}$

이때, $p>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$p^2+\frac{4}{p^2}\ge 2\sqrt{p^2\cdot\frac{4}{p^2}}=4$

$\left(\text{단, 등호는 } p^2=\frac{4}{p^2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\overline{OP}\ge\sqrt{4}=2$이므로 구하는 대각선의 길이의 최솟값은 2이다.

답 ③

본책 114~129쪽

6 | 무리식과 무리함수

STEP 1 개념 마스터 ❶

0724 답 ㄱ, ㄴ

0725

$x+3\ge0$이어야 하므로 $x\ge-3$ 답 $x\ge-3$

0726

$2-x\ge0,\ x+1\ge0$이어야 하므로 $x\le2,\ x\ge-1$

$\therefore -1\le x\le2$ 답 $-1\le x\le2$

0727

(분모)$\neq$0이므로 $5-x\neq0$

$x-1\ge0,\ \underline{5-x>0}$이어야 하므로 $x\ge1,\ x<5$

$\therefore 1\le x<5$ 답 $1\le x<5$

0728

(분모)$\neq$0이므로 $4-x\neq0$

$x+3\ge0,\ \underline{4-x>0}$이어야 하므로 $x\ge-3,\ x<4$

$\therefore -3\le x<4$ 답 $-3\le x<4$

0729

ㄱ. $a<0,\ b>0$일 때, $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$

ㄴ. $a<1$일 때, $a-1<0$이므로

$\sqrt{(a-1)^2}+a=|a-1|+a=1-a+a=1$

ㄷ. $a<0,\ b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

ㄹ. $a<0,\ b<0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

ㅁ. $a<0$일 때, $-a>0$이므로

$(-\sqrt{-a})^2=(\sqrt{-a})^2=-a$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

0730

$a>-1$에서 $a+1>0$이므로

$\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|=a+1$ 답 $a+1$

0731

$1<a<2$에서 $a-1>0,\ a-2<0$이므로

$\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a-2)^2}=|a-1|+|a-2|$

$=a-1-(a-2)=1$ 답 1

0732

$a>b>c$일 때, $a-b>0$, $b-c>0$, $c-a<0$이므로

$\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-c)^2}+\sqrt{(c-a)^2}$

$=|a-b|+|b-c|+|c-a|$

$=(a-b)+(b-c)-(c-a)$

$=2a-2c$

답 $2a-2c$

0733

$(\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{x+2}-1)=(\sqrt{x+2})^2-1^2$

$=(x+2)-1=x+1$

답 $x+1$

0734

$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})=(\sqrt{x-1})^2-(\sqrt{x})^2$

$=(x-1)-x=-1$

답 -1

0735

$\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

답 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

0736

$\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

답 $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

0737

$\dfrac{1-3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{(1-3\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{2-\sqrt{2}-6\sqrt{2}+6}{4-2}=\dfrac{8-7\sqrt{2}}{2}$

답 $\dfrac{8-7\sqrt{2}}{2}$

0738

$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{3}-1-\sqrt{2}}{\{(\sqrt{3}-1)+\sqrt{2}\}\{(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}\}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-1-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-1)^2-2}=\dfrac{\sqrt{3}-1-\sqrt{2}}{2-2\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(\sqrt{3}-1-\sqrt{2})(2+2\sqrt{3})}{(2-2\sqrt{3})(2+2\sqrt{3})}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}+6-2-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{4-12}$

$=\dfrac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{-8}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{4}$

답 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{4}$

0739

$\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\dfrac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(x+2)-2}=\dfrac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x}$

$=\sqrt{x+2}+\sqrt{2}$

답 $\sqrt{x+2}+\sqrt{2}$

0740

$\dfrac{-6}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}=\dfrac{-6(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})}$

$=\dfrac{-6(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})}{x-3-(x+3)}$

$=\dfrac{-6(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})}{-6}$

$=\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}$

답 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}$

0741

$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$

답 $\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$

참고 무리식을 계산할 때는 (근호 안의 식의 값)≥ 0이 되는 범위에서만 생각하므로 $\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$로 계산할 수 있다.

0742

$\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\dfrac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$=\dfrac{x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x}+x}{x+1-x}=2x+1+2\sqrt{x^2+x}$

답 $2x+1+2\sqrt{x^2+x}$

0743

$\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

답 $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

0744

$\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}-\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

$=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}-\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1}$

$=\dfrac{4\sqrt{x}}{x-1}$

답 $\dfrac{4\sqrt{x}}{x-1}$

0745

$\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1}+\dfrac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}$

$=\dfrac{(\sqrt{x+2}-1)^2}{(\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{x+2}-1)}+\dfrac{(\sqrt{x+2}+1)^2}{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}$

$=\dfrac{x+2-2\sqrt{x+2}+1}{x+2-1}+\dfrac{x+2+2\sqrt{x+2}+1}{x+2-1}$

$=\dfrac{2x+6}{x+1}$

답 $\dfrac{2x+6}{x+1}$

STEP 2 유형 마스터 ❶

0746

|전략| $\sqrt{f(x)}$의 값이 실수가 되려면 $f(x)\geq 0$이어야 한다.

$8x^2+10x-3\geq 0$에서 $(2x+3)(4x-1)\geq 0$

$\therefore\ x\leq -\frac{3}{2}$ 또는 $x\geq \frac{1}{4}$ 답 $x\leq -\frac{3}{2}$ 또는 $x\geq \frac{1}{4}$

0747

$3x+1\geq 0$에서 $x\geq -\frac{1}{3}$, $1-2x>0$에서 $x<\frac{1}{2}$

$\therefore\ -\frac{1}{3}\leq x<\frac{1}{2}$

따라서 구하는 정수 x는 0의 1개이다. 답 1

0748

$10-3x\geq 0$에서 $x\leq \frac{10}{3}$

$x-2\neq 0$에서 $x\neq 2$

따라서 구하는 자연수 x는 1, 3으로 그 합은 4이다. 답 4

0749

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq \frac{3}{4}$

따라서 $x^2+x+1\geq 0$의 해는 모든 실수이다.

$5-x\geq 0$에서 $x\leq 5$

$2x-3>0$에서 $x>\frac{3}{2}$

$\therefore\ \frac{3}{2}<x\leq 5$ 답 ⑤

0750

|전략| $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases} A & (A\geq 0) \\ -A & (A<0)\end{cases}$이므로 A의 부호를 조사한다.

$-1<a<2$에서 $a+1>0$, $a-2<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-4a+4}&=\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-2)^2}\\&=|a+1|+|a-2|\\&=(a+1)-(a-2)\\&=3\end{aligned}$$

답 ⑤

0751

$x^2-4=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=a^2+\frac{1}{a^2}-2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

이때, $0<a<1$이므로 $\frac{1}{a}>1$이고 $a-\frac{1}{a}<0$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sqrt{x^2-4}-x&=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}-\left(a+\frac{1}{a}\right)\\&=\left|a-\frac{1}{a}\right|-\left(a+\frac{1}{a}\right)\\&=-\left(a-\frac{1}{a}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)=-2a\end{aligned}$$

답 $-2a$

0752

$$\begin{aligned}x-y&=4a^2-4a+4=4(a^2-a+1)\\&=4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+3\geq 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+y&=4a^2+4a+4=4(a^2+a+1)\\&=4\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+3\geq 3\end{aligned}$$

따라서 $x-y\geq 0$, $x+y\geq 0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-y)^2}-\sqrt{(x+y)^2}&=|x-y|-|x+y|\\&=x-y-(x+y)\\&=-2y=-8a\end{aligned}$$

답 ①

0753

$\sqrt{x+2}$에서 $x+2\geq 0$ $\quad\therefore\ x\geq -2$ ...... ㉠

$\sqrt{2-x}$에서 $2-x\geq 0$ $\quad\therefore\ x\leq 2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 무리식의 값이 실수가 되도록 하는 x의 값의 범위는 $-2\leq x\leq 2$

$-2\leq x\leq 2$일 때, $2x-5<0$, $x-4<0$이므로

$$\begin{aligned}|2x-5|-\underbrace{\sqrt{x^2-8x+16}}_{\sqrt{(x-4)^2}}&=|2x-5|-|x-4|\\&=-(2x-5)+(x-4)\\&=-2x+5+x-4\\&=-x+1\end{aligned}$$

답 ②

0754

|전략| $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a\geq 0$, $b<0$이다.

$\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{a-6}}=-\sqrt{\frac{a-2}{a-6}}$이므로

$a-2\geq 0$, $a-6<0$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-6)^2}&=|a-2|+|a-6|\\&=(a-2)-(a-6)=4\end{aligned}$$

답 ②

0755

|전략| $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a\leq 0$, $b\leq 0$이다.

$\sqrt{x-1}\sqrt{2-y}=-\sqrt{(x-1)(2-y)}$이므로

$x-1<0$, $2-y<0$ $\quad\therefore\ x<1$, $y>2$

따라서 $x-2<0$, $y-x>0$, $y-1>0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(y-x)^2}+|y-1|&=|x-2|-|y-x|+|y-1|\\&=-(x-2)-(y-x)+(y-1)\\&=1\end{aligned}$$

답 1

0756

$\sqrt{a-4}\sqrt{2-a}=-\sqrt{(a-4)(2-a)}$ 이므로

$a-4\leq 0$, $2-a\leq 0$ $\quad\therefore\ 2\leq a\leq 4$

$\frac{\sqrt{b-5}}{\sqrt{b-6}}=-\sqrt{\frac{b-5}{b-6}}$이므로

$b-5\geq 0$, $b-6<0$ $\quad\therefore\ 5\leq b<6$

따라서 $a-b<0$, $a-5<0$, $b-3>0$이므로

$$|a-b|-|a-5|-|b-3|=-(a-b)+(a-5)-(b-3)$$
$$=-2$$

답 ②

0757

|전략| 분모의 유리화를 이용한다.

$$\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}+\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{x(1-\sqrt{x+1})}{(1+\sqrt{x+1})(1-\sqrt{x+1})}+\frac{x(1+\sqrt{x+1})}{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}$$
$$=\frac{x-x\sqrt{x+1}}{1-(x+1)}+\frac{x+x\sqrt{x+1}}{1-(x+1)}$$
$$=\frac{2x}{-x}=-2$$

답 ①

0758

$$\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2}{(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})}$$
$$+\frac{(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2}{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})}$$
$$=\frac{(x+y-2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}+x-y)+(x+y+2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}+x-y)}{(x+y)-(x-y)}$$
$$=\frac{4x}{2y}=\frac{2x}{y}$$

답 ①

0759

$$1+\frac{1}{1-\frac{1}{1+x}}=1+\frac{1}{\frac{1+x-1}{1+x}}=1+\frac{1}{\frac{x}{1+x}}$$
$$=1+\frac{1+x}{x}=\frac{x+1+x}{x}=\frac{1+2x}{x}$$
$$=\frac{1}{x}+2$$

이때, $x=-\sqrt{2}-1$이므로

$$\frac{1}{x}+2=\frac{1}{-\sqrt{2}-1}+2=\frac{\sqrt{2}-1}{-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+2$$
$$=-(\sqrt{2}-1)+2=3-\sqrt{2}$$

답 $3-\sqrt{2}$

0760

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$
$$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(x+1)-x}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$ … ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(48)$

$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$$
$$=\sqrt{49}-\sqrt{1}=7-1=6$$ … ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 간단히 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(48)$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0761

|전략| 먼저 주어진 식을 간단히 한다.

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$$
$$=\frac{x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1}{(x+1)-(x-1)}$$
$$=\frac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2}$$
$$=x+\sqrt{x^2-1}$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{3-1}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

답 ③

0762

$$x-\frac{1}{x}=2+\sqrt{3}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}-\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$
$$=2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$$

이므로

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3\right\}$$
$$=2\sqrt{3}\{(2\sqrt{3})^2+3\}=30\sqrt{3}$$

답 ⑤

0763

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$$이므로

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$
$$=\frac{-2}{x-1}=\frac{-2}{\sqrt{3}+1-1}$$
$$=\frac{-2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

0764

$$x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$$이므로

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$
$$=\frac{(x-2\sqrt{x}+1)+(x+2\sqrt{x}+1)}{x-1}$$
$$=\frac{2(x+1)}{x-1}=\frac{2(3+2\sqrt{2}+1)}{3+2\sqrt{2}-1}$$
$$=\frac{4(2+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}}$$
$$=2\sqrt{2}$$

답 ③

0765

|전략| $x+y$, xy의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$x+y=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$

$xy=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=4-2=2$

이므로

$$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$$
$$=4^2-3\cdot 2=10$$
답 ④

Lecture

자주 이용되는 곱셈 공식의 변형

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x-y)^2+2xy$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

0766

$$x+y=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\sqrt{3}$$
$$xy=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}}{\frac{x+y}{xy}}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{x^2y^2(x+y)}$$
$$=\frac{(x+y)^2-3xy}{x^2y^2}=\frac{3-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}=6$$

답 ③

0767

$$x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$$
$$y=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2}$$

이므로

$$x+y=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$$
$$xy=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=9-8=1$$
$$\therefore \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{y})^2+(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}\sqrt{y}}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{6}{\sqrt{1}}=6$$

답 6

0768

$a-b=3+\sqrt{3}$, $b-c=3-\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$a-c=6$

$$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(3+\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2+(-6)^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(9+6\sqrt{3}+3)+(9-6\sqrt{3}+3)+36\}=30$$

답 ③

STEP 1 개념 마스터 ❷

0769 답 ×　　**0770** 답 ○

0771 답 ○

0772

$y=\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

이므로 $y=\sqrt{x^2-2x+1}$은 무리함수가 아니다.

답 ×

0773

$x-2\geq 0$에서 $x\geq 2$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\geq 2\}$

답 $\{x|x\geq 2\}$

0774

$1-2x\geq 0$에서 $x\leq\frac{1}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\middle|x\leq\frac{1}{2}\right\}$

답 $\left\{x\middle|x\leq\frac{1}{2}\right\}$

0775

$3x+2\geq 0$에서 $x\geq -\frac{2}{3}$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\middle|x\geq -\frac{2}{3}\right\}$

답 $\left\{x\middle|x\geq -\frac{2}{3}\right\}$

0776

$1-x^2\geq 0$에서 $x^2-1\leq 0$

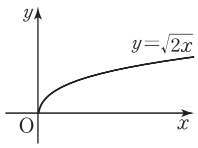
$(x+1)(x-1)\leq 0$　　$\therefore -1\leq x\leq 1$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|-1\leq x\leq 1\}$

답 $\{x|-1\leq x\leq 1\}$

0777

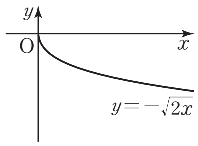
$y=\sqrt{2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
정의역은 $\{x|x\geq 0\}$, 치역은 $\{y|y\geq 0\}$이다.



답 풀이 참조

0778

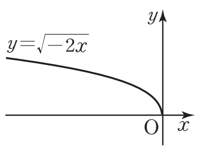
$y=-\sqrt{2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
정의역은 $\{x|x\geq 0\}$, 치역은 $\{y|y\leq 0\}$이다.



답 풀이 참조

0779

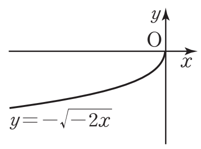
$y=\sqrt{-2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
정의역은 $\{x|x\leq 0\}$, 치역은 $\{y|y\geq 0\}$이다.



답 풀이 참조

0780

$y=-\sqrt{-2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\le 0\}$, 치역은 $\{y|y\le 0\}$이다.



답 풀이 참조

0781

ㄱ. $a>0$이면 원점과 제 4 사분면을 지난다.

ㄷ. $a>0$이든지 $a<0$이든지 치역은 항상 $\{y|y\le 0\}$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

0782

y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{-5x}\qquad \therefore y=-\sqrt{-5x}$

답 $y=-\sqrt{-5x}$

0783

x 대신 $-x$를 대입하면

$y=\sqrt{-5(-x)}\qquad \therefore y=\sqrt{5x}$

답 $y=\sqrt{5x}$

0784

x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{-5(-x)}\qquad \therefore y=-\sqrt{5x}$

답 $y=-\sqrt{5x}$

0785

$y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$y-(-3)=\sqrt{2(x-1)}\qquad \therefore y=\sqrt{2(x-1)}-3$

답 $y=\sqrt{2(x-1)}-3$

0786

$y=\sqrt{-4x+8}+2=\sqrt{-4(x-2)}+2$

이므로 $y=\sqrt{-4x+8}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

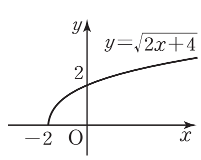
$\therefore a=2,\ b=2$

답 $a=2,\ b=2$

0787

$y=\sqrt{2x+4}=\sqrt{2(x+2)}$

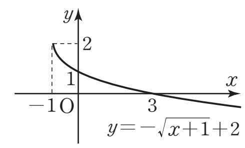
따라서 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\ge -2\}$, 치역은 $\{y|y\ge 0\}$이다.



답 풀이 참조

0788

$y=-\sqrt{x+1}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\ge -1\}$, 치역은 $\{y|y\le 2\}$이다.

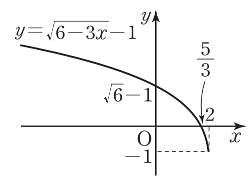


답 풀이 참조

0789

$y=\sqrt{6-3x}-1=\sqrt{-3(x-2)}-1$

따라서 $y=\sqrt{6-3x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\le 2\}$, 치역은 $\{y|y\ge -1\}$이다.

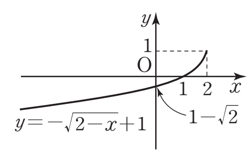


답 풀이 참조

0790

$y=-\sqrt{2-x}+1=-\sqrt{-(x-2)}+1$

따라서 $y=-\sqrt{2-x}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\le 2\}$, 치역은 $\{y|y\le 1\}$이다.



답 풀이 참조

STEP 2 유형 마스터 ❷

0791

|전략| 함수 $y=\sqrt{x-p}+q$에서 정의역은 $\{x|x\ge p\}$이고, 치역은 $\{y|y\ge q\}$이다.

$x-4\ge 0$에서 $x\ge 4$이므로 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x\ge 4\}\qquad \therefore a=4$

또, $\sqrt{x-4}\ge 0$이므로 주어진 함수의 치역은

$\{y|y\ge b\}\qquad \therefore b=1$

$\therefore ab=4$

답 4

0792

$ax-8\ge 0$에서 $ax\ge 8$

이때, 정의역이 $\{x|x\le -4\}$이려면 $a<0$이어야 하므로 $ax\ge 8$의 양변을 a로 나누면 $x\le \dfrac{8}{a}$

즉, $\dfrac{8}{a}=-4$이므로 $a=-2$

또, $-\sqrt{-2x-8}\le 0$이므로 주어진 함수의 치역은

$\{y|y\le 2\}\qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b=0$

답 0

0793

$-\sqrt{ax+6}\le 0$이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y\,|\,y\le b\}$
이때, 주어진 함수의 치역이 $\{y\,|\,y\le 1\}$이므로 $b=1$
또, 주어진 함수의 그래프가 점 $(1,\ -2)$를 지나므로
$-2=-\sqrt{a+6}+1,\ \sqrt{a+6}=3$
$\therefore\ a=3$
따라서 $3x+6\ge 0$에서 $x\ge -2$이므로 주어진 함수의 정의역은
$\{x\,|\,x\ge -2\}$

답 $\{x\,|\,x\ge -2\}$

0794

$y=\dfrac{-3x+4}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-2}{x-2}=-\dfrac{2}{x-2}-3$
이므로 $y=\dfrac{-3x+4}{x-2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
$\therefore\ a=-2,\ b=2,\ c=-3$
따라서 함수 $y=\sqrt{-2x+2}-3$에서 $\sqrt{-2x+2}\ge 0$이므로
치역은 $\{y\,|\,y\ge -3\}$

답 $\{y\,|\,y\ge -3\}$

0795

|전략| 먼저 주어진 함수를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한다.

$y=\sqrt{-2x+4}-3=\sqrt{-2(x-2)}-3$
이므로 $y=\sqrt{-2x+4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $a=-2,\ b=2,\ c=-3$이므로
$a+b+c=-3$

답 -3

0796

$y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{(x-3)+2}-2=\sqrt{x-1}-2$ ··· ❶
이 그래프를 다시 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
x 대신 $-x$ 대입
$y=\sqrt{-x-1}-2$ ··· ❷
따라서 $a=-1,\ b=-1,\ c=-2$이므로
$abc=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ ❶에서 구한 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	20 %

0797

ㄱ. $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=-\sqrt{2-x}=-\sqrt{-(x-2)}$
$-y=\sqrt{-x}$ $\quad\therefore\ y=-\sqrt{-x}$
이므로 $y=-\sqrt{2-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-2}+3=-\sqrt{\dfrac{1}{4}(4x-2)}+3$
$=-\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}+3$
$-y=\sqrt{x}$ $\quad\therefore\ y=-\sqrt{x}$
이므로 $y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-2}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

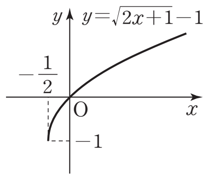
따라서 그 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

0798

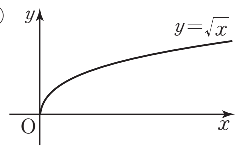
|전략| 무리함수의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 다음 그래프를 그려 본다.

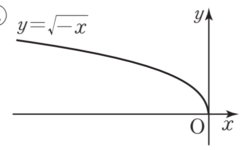
$y=\sqrt{2x+1}-1=\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}-1$
따라서 $y=\sqrt{2x+1}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 제 1, 3 사분면을 지난다.

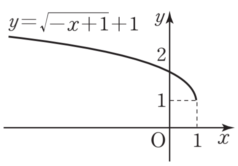


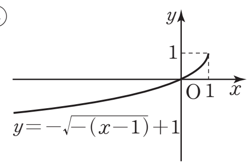
답 ②

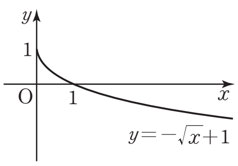
0799

①


②


③


④


⑤


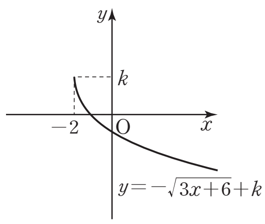
따라서 제 4 사분면을 지나는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0800

$y=-\sqrt{3x+6}+k=-\sqrt{3(x+2)}+k$이므로 이 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\sqrt{3x+6}+k$의 그래프가 제 2, 3, 4 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $k>0$이고, $x=0$일 때 $y<0$이어야 하므로



$-\sqrt{6}+k<0$ $\quad\therefore 0<k<\sqrt{6}$

따라서 정수 k는 1, 2의 2개이다.

답 2

참고 $x=0$일 때, $y=0$이면 제 3 사분면을 지나지 않고, $y>0$이면 제 1 사분면을 지난다.

0801

|전략| 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-ax}$ $(a>0)$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용한다.

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-ax}$ $(\underbrace{a>0}_{-a<0\text{이므로 } a>0})$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{-a(x-1)}-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\sqrt{a}-2$, $\sqrt{a}=2$ $\quad\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-4(x-1)}-2=\sqrt{-4x+4}-2$

따라서 $a=4$, $b=4$, $c=-2$이므로

$a+b+c=6$

답 ③

Lecture

주어진 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프가 오른쪽을 향해 뻗어나가면 $a>0$이고, 왼쪽을 향해 뻗어나가면 $a<0$이다.

0802

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-1)}+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{-2a}+2$, $\sqrt{-2a}=2$ $\quad\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-2(x-1)}+2=-\sqrt{-2x+2}+2$

따라서 $a=-2$, $b=2$, $c=2$이므로

$abc=-8$

답 -8

0803

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+2)}+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{2a}+1$, $\sqrt{2a}=2$ $\quad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{2(x+2)}+1=\sqrt{2x+4}+1$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=1$이므로

$a+b+c=7$

답 7

0804

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-m)}+n=-\sqrt{ax-am}+n$

이 함수가 $y=-\sqrt{ax-b}+c$와 같으므로

$b=am$, $c=n$

주어진 함수의 그래프에서 $a<0$, $m<0$, $n<0$이므로

$a<0$, $b>0$, $c<0$

답 $a<0$, $b>0$, $c<0$

0805

|전략| 주어진 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용하여 a, b, c의 값을 먼저 구한다.

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x-1)}+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{-a}+1$, $\sqrt{-a}=1$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-(x-1)}+1=\sqrt{-x+1}+1$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=1$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{x-1}+1$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$

$\dfrac{1}{k-1}+1=2$, $k-1=1$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore f^{-1}(2)=2$

답 2

0806

주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=a$, $y=b$이므로

$a<0$, $b>0$

$y=\sqrt{ax+1}+b$에서 $ax+1\ge 0$, $ax\ge -1$

$\therefore x\le -\dfrac{1}{a}$ $(\because a<0)$

즉, 정의역은 $\left\{x \,\middle|\, x\le -\dfrac{1}{a}\right\}$이다.

또, $\sqrt{ax+1}\ge 0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\ge b\}$이다.

이때, $-\dfrac{1}{a}>0$, $b>0$이므로 $y=\sqrt{ax+1}+b$의 그래프의 개형은 ②와 같다.

답 ②

0807

|전략| 주어진 함수를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

① $3x+9\ge 0$에서 $x\ge -3$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -3\}$이다.

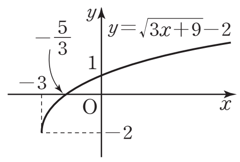
② $\sqrt{3x+9}\ge 0$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\ge -2\}$이다.

③ $y=\sqrt{3x+9}-2$에 $y=0$을 대입하면 $x=-\dfrac{5}{3}$

따라서 그래프는 x축과 점 $\left(-\dfrac{5}{3},\ 0\right)$에서 만난다.

④ $y=\sqrt{3x+9}-2=\sqrt{3(x+3)}-2$

따라서 $y=\sqrt{3x+9}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 제 4 사분면을 지나지 않는다.



⑤ $y=\sqrt{3x+9}-2$의 그래프는 $\underbrace{y=-\sqrt{3x}}_{}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 평행이동만해서는 겹쳐지게 할 수 없다.

$-y=-\sqrt{3x}$ $\quad\therefore y=\sqrt{3x}$

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

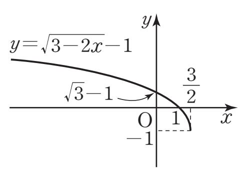
0808

① $3-2x\ge0$에서 $x\le\frac{3}{2}$이므로 정의역은 $\left\{x \middle| x\le\frac{3}{2}\right\}$이다.

② $\sqrt{3-2x}\ge0$이므로 치역은 $\{y|y\ge-1\}$이다.

③ $y=\sqrt{3-2x}-1=\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}-1$

따라서 $y=\sqrt{3-2x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



④ $y=\sqrt{3-2x}-1$에 $x=0$을 대입하면 $y=\sqrt{3}-1$

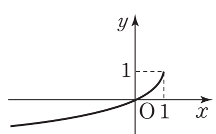
따라서 그래프는 y축과 점 $(0,\ \sqrt{3}-1)$에서 만난다.

⑤ 함수 $y=\sqrt{3-2x}+1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=\sqrt{3-2x}+1$, 즉 $y=-\sqrt{3-2x}-1$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0809

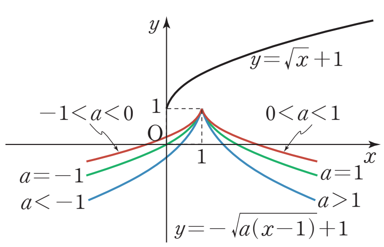
ㄱ. $a=-1$일 때, $y=-\sqrt{-(x-1)}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 제 1, 3 사분면을 지난다.



ㄴ. $a>0$일 때, $-\sqrt{a(x-1)}\le0$이므로 치역은 $\{y|y\le1\}$이다.

ㄷ. $a<0$일 때, $-\sqrt{a(x-1)}\le0$이므로 치역은 $\{y|y\le1\}$이다.

ㄹ. $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $y=\sqrt{x}+1$의 그래프와 만나지 않는다.



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0810

|전략| 주어진 함수를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형하고, $a>0$이면 $\alpha\le x\le\beta$에서 $x=\alpha$일 때 최소, $x=\beta$일 때 최대임을 이용한다.

$y=\sqrt{2x+k}+4=\sqrt{2\left(x+\frac{k}{2}\right)}+4$

이므로 $y=\sqrt{2x+k}+4$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{k}{2}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

즉, $-2\le x\le4$에서 $x=-2$일 때 최솟값을 갖고, $x=4$일 때 최댓값 8을 가지므로

$8=\sqrt{2\cdot4+k}+4$에서 $4=\sqrt{8+k}$

$16=8+k\qquad\therefore k=8$

따라서 $y=\sqrt{2x+8}+4$는 $x=-2$일 때 최솟값 6을 갖는다. 답 ④

$y=\sqrt{2\cdot(-2)+8}+4=\sqrt{4}+4=6$

0811

$y=\sqrt{4x+1}+1=\sqrt{4\left(x+\frac{1}{4}\right)}+1$

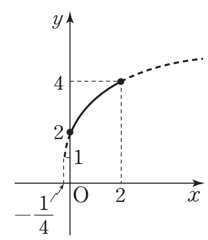
이므로 $y=\sqrt{4x+1}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$0\le x\le2$에서 $y=\sqrt{4x+1}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $x=2$일 때 최댓값 4, $x=0$일 때 최솟값 2를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$4+2=6$



답 ④

0812

$y=\sqrt{4-3x}+3=\sqrt{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+3$

이므로 $y=\sqrt{4-3x}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

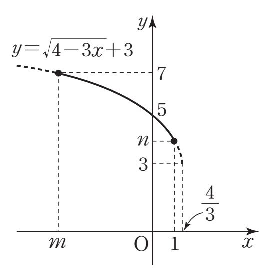
$m\le x\le1$에서 $y=\sqrt{4-3x}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶

즉, $x=m$일 때 최댓값 7을 가지므로

$7=\sqrt{4-3m}+3$에서

$4=\sqrt{4-3m}$, $16=4-3m$

$\therefore m=-4$ ··· ❷



또, $x=1$일 때 최솟값 n을 가지므로

$n=\sqrt{4-3\cdot1}+3=4$ ··· ❸

$\therefore m+n=-4+4=0$ ··· ❹

답 0

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=\sqrt{4-3x}+3$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ 최댓값을 이용하여 m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 최솟값 n을 구할 수 있다.	30 %
❹ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0813

|전략| $y=\sqrt{2x+6}$의 그래프와 직선 $y=x+k$를 좌표평면 위에 그려 보고 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 알아본다.

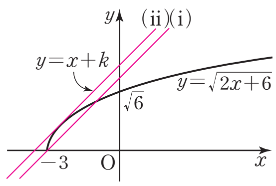
$y=\sqrt{2x+6}=\sqrt{2(x+3)}$

이므로 $y=\sqrt{2x+6}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

또, $y=x+k$는 기울기가 1, y절편이 k인 직선이다.

(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-3,\ 0)$을 지날 때,

$0=-3+k \qquad \therefore k=3$



(ii) $y=\sqrt{2x+6}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$\sqrt{2x+6}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x+6=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2-6=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-6)=0$

$-2k+7=0 \qquad \therefore k=\dfrac{7}{2}$

(i), (ii)에서 $3\le k<\dfrac{7}{2}$

답 $3\le k<\dfrac{7}{2}$

0814

$-\sqrt{3x-2}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$3x-2=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-(2k+3)x+k^2+2=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

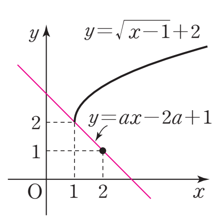
$D=(2k+3)^2-4(k^2+2)=0$

$12k+1=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{12}$

답 ②

0815

$y=\sqrt{x-1}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax-2a+1$, 즉 $a(x-2)+(1-y)=0$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 1)$을 지난다.



이때, 그래프와 직선이 만나려면 기울기 a의 값은 0보다 크거나 점 $(1,\ 2)$를 지날 때보다 작거나 같아야 한다.

직선 $y=ax-2a+1$이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때

$2=a-2a+1 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore a\le -1$ 또는 $a>0$

답 $a\le -1$ 또는 $a>0$

0816

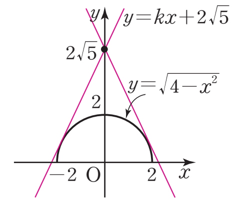
$A\cap B=\varnothing$이므로 함수 $y=\sqrt{4-x^2}$의 그래프와 직선 $y=kx+2\sqrt{5}$는 만나지 않는다.

$y=\sqrt{4-x^2}$의 양변을 제곱하면

$y^2=4-x^2$

$\therefore x^2+y^2=4\ (y\ge 0)$

즉, 함수 $y=\sqrt{4-x^2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 중심이 점 $(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원에서 $y\ge 0$인 부분이다. 또, 직선 $y=kx+2\sqrt{5}$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2\sqrt{5})$를 지난다.



직선 $y=kx+2\sqrt{5}$가 원 $x^2+y^2=4$ $(y\ge 0)$에 접할 때, 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=kx+2\sqrt{5}$, 즉 $kx-y+2\sqrt{5}=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\dfrac{|2\sqrt{5}|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$에서 $\sqrt{k^2+1}=\sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $k^2+1=5$, $k^2=4$

$\therefore k=\pm 2$

따라서 그래프와 직선이 만나지 않으려면 $-2<k<2$

답 $-2<k<2$

0817

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프의 역함수가 점 $(\alpha,\ \beta)$를 지나면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(\beta,\ \alpha)$를 지난다.

함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$\sqrt{a+b}=4 \qquad \therefore a+b=16$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지나면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4,\ 1)$을 지나므로

$\sqrt{4a+b}=1 \qquad \therefore 4a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=21$

따라서 $f(x)=\sqrt{-5x+21}$이므로

$f(-3)=\sqrt{-5\cdot(-3)+21}=6$

답 6

0818

$y=\sqrt{x-2}+1$에서 $y-1=\sqrt{x-2}$

양변을 제곱하면 $(y-1)^2=x-2$

$\therefore x=(y-1)^2+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=(x-1)^2+2$

이때, 함수 $y=\sqrt{x-2}+1$의 치역은 $\{y\,|\,y\ge 1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 1\}$이다.

따라서 주어진 함수의 역함수는 $y=x^2-2x+3\ (x\ge 1)$이므로

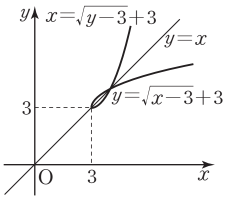
$a=-2$, $b=3$, $c=1$

$\therefore a+b+c=2$

답 ③

0819

$y=\sqrt{x-3}+3$, $x=\sqrt{y-3}+3$은 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 또, 오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 $y=\sqrt{x-3}+3$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 두 함수의 그래프의 교점과 같다. ··· ❶



$\sqrt{x-3}+3=x$에서 $\sqrt{x-3}=x-3$

양변을 제곱하면 $x-3=x^2-6x+9$

$x^2-7x+12=0$, $(x-3)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=3$ 또는 $x=4$ ··· ❷

따라서 주어진 두 함수의 그래프는 두 점 $(3,\ 3)$, $(4,\ 4)$에서 만나므로 구하는 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(4-3)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2}$ ··· ❸

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 함수의 그래프가 역함수 관계임을 이용할 수 있다.	30 %
❷ 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

0820

$y=\sqrt{2x-a}+2$와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\sqrt{2x-a}+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{2x-a}+2=x$에서 $\sqrt{2x-a}=x-2$

양변을 제곱하면 $2x-a=x^2-4x+4$

$\therefore$ $x^2-6x+a+4=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 두 교점의 좌표가 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$, $(\alpha-\beta)^2=4$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=a+4$이므로

$6^2-4(a+4)=4$, $4a=16$

$\therefore$ $a=4$

답 ⑤

0821

|전략| $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$(f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(2)=(f\circ g^{-1}\circ \overbrace{f\circ f^{-1}}^{I})(2)$

$=(f\circ g^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))$

$g^{-1}(2)=k$라 하면 $g(k)=2$

$\sqrt{k-1}=2$에서 $k-1=4$ $\therefore$ $k=5$

$\therefore$ $f(g^{-1}(2))=f(5)=\dfrac{4}{5+1}-1=-\dfrac{1}{3}$

답 ②

0822

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(5)=(g^{-1}\circ f)(5)=g^{-1}(\underbrace{f(5)}_{f(5)=\sqrt{2\cdot5+6}+2=6})$

$=g^{-1}(6)$

$g^{-1}(6)=k$라 하면 $g(k)=6$

$\sqrt{k+3}=6$에서 양변을 제곱하면

$k+3=36$ $\therefore$ $k=33$

$\therefore$ $(f^{-1}\circ g)^{-1}(5)=33$

답 33

0823

$(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(a)))=\dfrac{5}{4}$이므로

$f\left(f\left(f\left(\dfrac{5}{4}\right)\right)\right)=a$

$\dfrac{5}{4}>1$이므로 $f\left(\dfrac{5}{4}\right)=-2\sqrt{\dfrac{5}{4}-1}+1=0$

$0<1$이므로 $f(0)=\dfrac{0-2}{0-1}=2$

$2>1$이므로 $f(2)=-2\sqrt{2-1}+1=-1$

$\therefore$ $a=f\left(f\left(f\left(\dfrac{5}{4}\right)\right)\right)=f(f(0))=f(2)=-1$

답 ②

STEP 3 내신 마스터

0824

유형 **01** 무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건

|전략| $\sqrt{f(x)}$의 값이 실수가 되려면 $f(x)\geq0$이어야 한다.

$-2x^2+2x+24\geq0$에서

$x^2-x-12\leq0$, $(x-4)(x+3)\leq0$

$\therefore$ $-3\leq x\leq4$

따라서 정수 x는 -3, -2, $\cdots$, 3, 4로 그 합은 4이다.

답 ③

0825

유형 **03** 음수의 제곱근의 성질

|전략| $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $a\geq0$, $b<0$임을 이용하여 x의 값의 범위를 먼저 구한다.

$\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-9}}=-\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-9}}$이므로

$x+2\geq0$, $x^2-9<0$

$x+2\geq0$에서 $x\geq-2$ ······ ㉠

$x^2-9<0$에서 $(x-3)(x+3)<0$

$\therefore$ $-3<x<3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2\leq x<3$

따라서 $x+4>0$, $x-5<0$이므로

$\sqrt{(x+4)^2}+\sqrt{(x-5)^2}=|x+4|+|x-5|$

$=(x+4)-(x-5)=9$

답 ⑤

0826

유형 04 분모의 유리화

|전략| 먼저 분모의 유리화를 이용하여 $\frac{1}{f(n)}$을 간단히 한다.

$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$이므로

$$\frac{1}{f(n)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(99)}$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$
$$=\sqrt{100}-1=10-1=9$$

답 ③

0827

유형 05 무리식의 값 구하기

|전략| 먼저 분모의 유리화를 이용하여 주어진 수와 식을 간단히 한다.

$x=\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\sqrt{5}+1$이므로

$$\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+5\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$
$$=\frac{10x}{x-1}=\frac{10(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{10\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{5}$$
$$=10+2\sqrt{5}$$

답 ⑤

0828

유형 05 무리식의 값 구하기

|전략| $x=\sqrt{a}-b$ 즉, $x+b=\sqrt{a}$의 양변을 제곱하여 $x^2+Ax+B=0$ 꼴로 변형한다.

$x=\sqrt{5}-2$에서 $x+2=\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$x^2+4x+4=5$

따라서 $x^2+4x-1=0$이므로

$$x^3+6x^2+7x+1=x(x^2+4x-1)+2x^2+8x+1$$
$$=x(\underbrace{x^2+4x-1}_{0})+2(\underbrace{x^2+4x-1}_{0})+3$$
$$=3$$

답 ②

다른 풀이 다항식의 세로셈을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x^2+4x-1\,\overline{)\,x^3+6x^2+7x+1} \\ x^3+4x^2-\ x \\ \hline 2x^2+8x+1 \\ 2x^2+8x-2 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\therefore x^3+6x^2+7x+1=(\underbrace{x^2+4x-1}_{0})(x+2)+3$$
$$=3$$

0829

유형 06 무리식의 값 구하기 – $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 꼴

|전략| $x-y$, xy의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$x-y=(\sqrt{7}+1)-(\sqrt{7}-1)=2$

$xy=(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)=7-1=6$

이므로

$$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$$
$$=2^3+3\cdot6\cdot2=44$$

답 ④

0830

유형 08 무리함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

|전략| 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프이다.

$y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x+2)}-1$

이 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=\sqrt{a}-1 \qquad \therefore a=1$

$\therefore y=\sqrt{x+2}-1$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-1$이므로

$a+b-c=4$

답 ④

0831

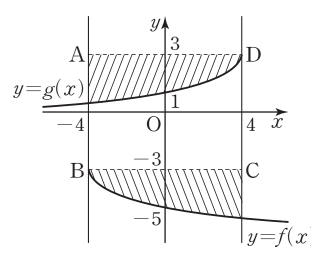
유형 08 무리함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

|전략| 평행이동을 이용하여 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프를 그리고, 넓이가 같은 부분을 찾는다.

함수 $f(x)=-\sqrt{x+4}-3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

또, 함수 $g(x)=-\sqrt{-x+4}+3=-\sqrt{-(x-4)}+3$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 도형의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$6\cdot8=48$

답 ④

0832

유형 10 무리함수의 그래프와 미정계수 구하기

|전략| 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용한다.

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x+2)}+1$ ······ ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{2a}+1,\ \sqrt{2a}=2 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{2(x+2)}+1=-\sqrt{2x+4}+1$

따라서 $a=2,\ b=4,\ c=1$이므로

$a+b+c=7$

답 ②

0833

유형 12 무리함수의 그래프의 성질

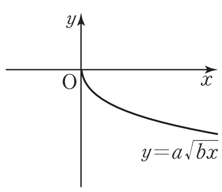
|전략| 함수 $y=a\sqrt{bx}$에서 정의역은 b의 부호, 치역은 a의 부호에 따라 달라진다.

ㄱ. $bx\geq0$을 만족시키는 x의 값들의 집합이 정의역이므로 b의 부호에 의하여 정의역이 결정된다.

ㄴ. 치역은 a의 부호에 의하여 결정된다. $b>0$이어도 $a<0$이면 치역은 $\{y\,|\,y\leq0\}$이다.

ㄷ. 함수 $y=a\sqrt{bx}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=a\sqrt{b(-x)}$, 즉 $y=a\sqrt{-bx}$이다.

ㄹ. $a<0,\ b>0$이면 정의역이 $\{x\,|\,x\geq0\}$, 치역이 $\{y\,|\,y\leq0\}$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지난다.



따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

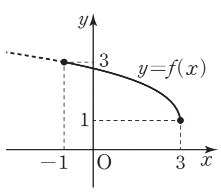
답 ⑤

0834

유형 13 무리함수의 최대·최소

|전략| $a>0$일 때와 $a<0$일 때로 나누어서 생각한다.

(i) $a>0$이면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-1$일 때 최댓값 3, $x=3$일 때 최솟값 1을 갖는다.



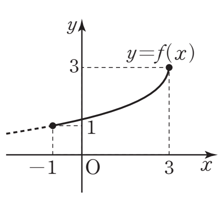
즉, $f(-1)=2a+b=3$,

$f(3)=b=1$

따라서 $a=1,\ b=1$이므로

$a^2+b^2=2$

(ii) $a<0$이면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-1$일 때 최솟값 1, $x=3$일 때 최댓값 3을 갖는다.



즉, $f(-1)=2a+b=1$,

$f(3)=b=3$

따라서 $a=-1,\ b=3$이므로

$a^2+b^2=10$

(i), (ii)에서 a^2+b^2의 최댓값은 10이다.

답 ⑤

0835

유형 14 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

|전략| 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하는 경우 방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이다.

함수 $y=\sqrt{5-x}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+n$이 접하므로

$\sqrt{5-x}=-\frac{1}{2}x+n$의 양변을 제곱하면

$5-x=\frac{1}{4}x^2-nx+n^2,\ \frac{1}{4}x^2-(n-1)x+n^2-5=0$

$\therefore x^2-4(n-1)x+4n^2-20=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{2(n-1)\}^2-(4n^2-20)=0$

$-8n+24=0 \qquad \therefore n=3$

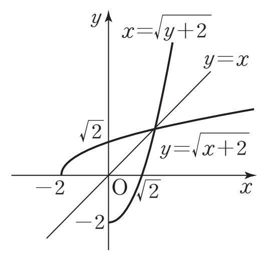
답 ③

0836

유형 15 무리함수의 역함수

|전략| $y=\sqrt{x+2}$와 $x=\sqrt{y+2}$는 서로 역함수임을 이용한다.

$y=\sqrt{x+2},\ x=\sqrt{y+2}$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 또, 오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 두 함수의 그래프의 교점과 같다.



$\sqrt{x+2}=x$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2,\ x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=2\ (\because x\geq0)$

따라서 주어진 두 함수의 그래프의 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로

$a=2,\ b=2$

$\therefore a+b=4$

답 ①

0837

유형 14 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계 + 15 무리함수의 역함수

|전략| 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$도 접한다.

$y=2\sqrt{x-3}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=2\sqrt{(x-a)-3}$이므로 $f(x)=2\sqrt{x-a-3}$

$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$도 접한다.

$2\sqrt{x-a-3}=x$의 양변을 제곱하면

$4(x-a-3)=x^2,\ x^2-4x+4a+12=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(4a+12)=0$

$-4a-8=0 \qquad \therefore a=-2$

답 ④

0838

유형 **16** 무리함수의 합성함수와 역함수

|전략| $(f^{-1}\circ g)^{-1}(x)=(g^{-1}\circ f)(x)=g^{-1}(f(x))$임을 이용한다.

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(\underbrace{f(3)}_{f(3)=\sqrt{3-2}+2=3})$

$\qquad\qquad\quad =g^{-1}(3)$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$

$\dfrac{1}{k-2}+2=3$에서 $k-2=1\qquad \therefore k=3$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=3$

답 ③

0839

유형 **02** 제곱근의 성질

|전략| $x+a$와 $x-a+2$를 a에 대한 식으로 나타낸 후 $\sqrt{A^2}=|A|$임을 이용한다.

$\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}(1-a)$의 양변을 제곱하면 $x=\dfrac{1}{4}(1-a)^2$

$x+a=\dfrac{1}{4}(1-a)^2+a=\dfrac{1}{4}(1+a)^2$

$x-a+2=\dfrac{1}{4}(1-a)^2-a+2=\dfrac{1}{4}(3-a)^2$ … ❶

$a<-1$에서 $1+a<0$, $3-a>0$이므로

$\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a+2}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{4}(1+a)^2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}(3-a)^2}$

$=\dfrac{1}{2}|1+a|-\dfrac{1}{2}|3-a|$

$=\dfrac{1}{2}(-1-a)-\dfrac{1}{2}(3-a)$

$=-2$ … ❷

답 -2

채점 기준	배점
❶ $x+a$와 $x-a+2$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	3점
❷ $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a+2}$의 값을 구할 수 있다.	3점

0840

유형 **11** 유리함수와 무리함수의 그래프

|전략| 주어진 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용하여 a, b, c의 값을 먼저 구한다.

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x+1)}+2$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{a}+2$, $\sqrt{a}=1\qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $y=\sqrt{x+1}+2$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=2$ … ❶

$y=\dfrac{cx+3}{ax+b}=\dfrac{2x+3}{x+1}$에서

$y=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+2$

따라서 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=2$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-1,\ 2)$이다. … ❷

답 $(-1,\ 2)$

채점 기준	배점
❶ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	3점
❷ 두 점근선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	3점

0841

유형 **14** 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

|전략| 집합 $A\cap B$의 원소의 개수는 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$의 그래프와 직선 $y=k(x+2)$의 교점의 개수와 같다.

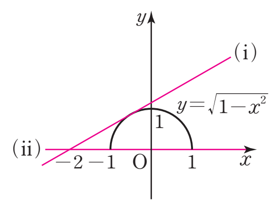
$n(A\cap B)=2$이므로 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$의 그래프와 직선 $y=k(x+2)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$y=\sqrt{1-x^2}$의 양변을 제곱하면 $y^2=1-x^2$

$\therefore x^2+y^2=1\ (y\geq 0)$

즉, 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$의 그래프는 중심이 $(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원에서 $y\geq 0$인 부분이다.

또, 직선 $y=k(x+2)$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다. … ❶



(i) 직선 $y=k(x+2)$가 원 $x^2+y^2=1(y\geq 0)$에 접할 때, 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=k(x+2)$, 즉 $kx-y+2k=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 1과 같으므로

$\dfrac{|0-0+2k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1$에서

$|2k|=\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면 $4k^2=k^2+1$, $k^2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ (\because k>0)$ … ❷

(ii) 직선 $y=k(x+2)$가 x축일 때, 기울기가 0이므로 $k=0$ … ❸

(i), (ii)에서 $0\leq k<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ … ❹

답 $0\leq k<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

채점 기준	배점
❶ 무리함수 $y=\sqrt{1-x^2}$의 그래프와 직선의 개형을 알 수 있다.	2점
❷ (i)일 때, k의 값을 구할 수 있다.	2점
❸ (ii)일 때, k의 값을 구할 수 있다.	2점
❹ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	1점

0842

유형 **07** 무리함수의 정의역과 치역

|전략| 함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

(1) $y=\dfrac{ax+1}{x-2}=\dfrac{a(x-2)+2a+1}{x-2}=\dfrac{2a+1}{x-2}+a$

따라서 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=a$이므로 $a=3$, $b=2$

(2) $f(x)=-\sqrt{ax+b}=-\sqrt{3x+2}$

$3x+2\geq 0$에서 $x\geq -\frac{2}{3}$이므로 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x \middle| x\geq -\frac{2}{3}\right\}$

따라서 정의역에 속하는 정수의 최솟값은 0이다.

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) a, b의 값을 구할 수 있다.	4점
(2) 주어진 함수의 정의역에 속하는 정수의 최솟값을 구할 수 있다.	6점

0843

유형 09 무리함수의 그래프가 지나는 사분면

|전략| 이차함수의 그래프의 모양, 축의 위치, y절편의 위치 등을 살펴보고 계수의 부호를 판별한다.

(1) 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $-\frac{b}{2a}>0$에서 $b<0$

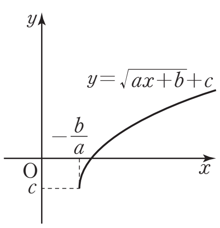
y절편이 x축의 아래쪽에 있으므로 $c<0$

$\therefore a>0,\ b<0,\ c<0$

(2) $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

따라서 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때, $a>0$, $-\frac{b}{a}>0$, $c<0$이므로 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 제 1, 4 사분면을 지난다.

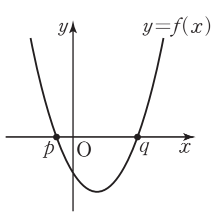


답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) a, b, c의 부호를 결정할 수 있다.	6점
(2) 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 지나는 사분면을 구할 수 있다.	6점

다른 풀이 (1) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $a>0$ …… ㉠

오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 p, q라 하면 $p<0$, $q>0$이고, $|p|<|q|$이므로



$p+q>0$, $pq<0$ …… ㉡

이때, 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 p, q이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=-\frac{b}{a}$, $pq=\frac{c}{a}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $-\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}<0$

㉠에서 $a>0$이므로 $b<0$, $c<0$

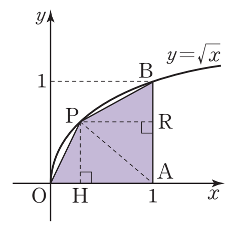
$\therefore a>0,\ b<0,\ c<0$

창의·융합 교과서 속 심화문제

0844

|전략| 사각형 OABP의 넓이는 두 삼각형 OAP, ABP의 넓이의 합이다.

점 P의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t})$로 놓고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 R라 하면



$\triangle OAP=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{PH}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{t}$

$\triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PR}=\frac{1}{2}(1-t)$

$\square OABP=\triangle OAP+\triangle ABP$이므로

$\square OABP=\frac{1}{2}(-t+\sqrt{t}+1)$

$=-\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{t}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right\}$

$=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{8}$

따라서 사각형 OABP의 넓이의 최댓값은 $\frac{5}{8}$이다.

답 ⑤

0845

|전략| 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프와 직선 $y=mx+1$을 좌표평면 위에 그려 보고 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 알아본다.

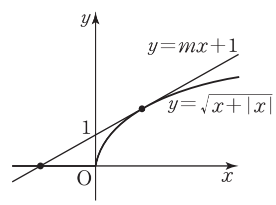
$x\geq 0$일 때, $y=\sqrt{x+|x|}=\sqrt{x+x}=\sqrt{2x}$

$x<0$일 때, $y=\sqrt{x+|x|}=\sqrt{x-x}=0$

$\therefore y=\sqrt{x+|x|}=\begin{cases}\sqrt{2x} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$

또, 직선 $y=mx+1$, 즉 $mx-y+1=0$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프와 직선 $y=mx+1$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx+1$이 함수 $y=\sqrt{2x}\,(x\geq 0)$의 그래프와 접해야 한다.



$\sqrt{2x}=mx+1$의 양변을 제곱하면

$2x=m^2x^2+2mx+1\qquad\therefore m^2x^2+2(m-1)x+1=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-m^2=0$

$-2m+1=0\qquad\therefore m=\frac{1}{2}$

답 ③

0846

|전략| $q-p=k$라 하면 점 $(p,\ q)$는 직선 $y=x+k$ 위의 점이므로 그래프를 이용하여 k의 최댓값을 구한다.

함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{-x+2}$

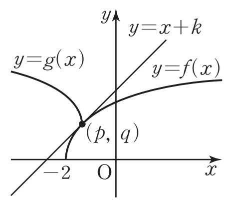
$y=\sqrt{-x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 $p-2$만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{-\{x-(p-2)\}+2}+q$

$\quad=\sqrt{-x+p}+q=\sqrt{-(x-p)}+q$

즉, $g(x)=\sqrt{-(x-p)}+q$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이고, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 만나려면 점 $(p,\ q)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프의 위에 있거나 그래프의 아랫 부분에 있어야 한다.

이때, $q-p=k$라 하면 점 $(p,\ q)$는 직선 $y-x=k$, 즉 $y=x+k$ 위의 점이고, k의 값은 직선 $y=x+k$의 y절편이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x+k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때 최대이다.



$\sqrt{x+2}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-2=0$

위의 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-2)=0$

$-4k+9=0 \qquad \therefore k=\dfrac{9}{4}$

따라서 $q-p$의 최댓값은 $\dfrac{9}{4}$이다. 답 ⑤

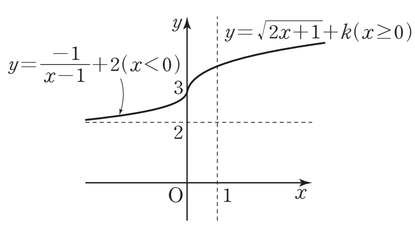
0847

|전략| 두 조건 ㈎, ㈏를 만족시키도록 $y=f(x)$의 그래프를 그려서 k의 값을 먼저 찾는다.

$y=\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-1}{x-1}=\dfrac{-1}{x-1}+2\ (x<0)$

$y=\sqrt{2x+1}+k=\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}+k\ (x\geq 0)$

이때, 조건 ㈎에서 함수 f의 치역이 $\{y\,|\,y>2\}$이고 조건 ㈏에서 함수 f가 일대일함수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(0)=1+k=3$이므로 $k=2$

$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x-1} & (x<0)\\ \sqrt{2x+1}+2 & (x\geq 0)\end{cases}$

$f(4)=\sqrt{8+1}+2=5$이므로

$5+f^{-1}(a)=4$에서 $f^{-1}(a)=-1$

즉, $f(-1)=a$

$\therefore a=\dfrac{-2-3}{-1-1}=\dfrac{5}{2}$ 답 ⑤

0848

|전략| $f(x)=\sqrt{2x+3}$과 $g(x)=\dfrac{1}{2}(x^2-3)\ (x\geq 0)$은 서로 역함수 관계임을 이용한다.

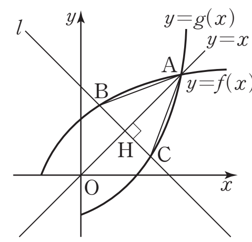
$y=\sqrt{2x+3}$의 양변을 제곱하면 $y^2=2x+3$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}(y^2-3)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{1}{2}(x^2-3)$

이때, 함수 $f(x)=\sqrt{2x+3}$의 치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 0\}$이다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 또, 오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 두 함수의 그래프의 교점과 같다.



$\sqrt{2x+3}=x$의 양변을 제곱하면

$2x+3=x^2$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=3\ (\because x\geq 0)$

$\therefore \mathrm{A}(3,\ 3)$

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

직선 l의 방정식은 $y-2=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, 즉 $x+y-\dfrac{5}{2}=0$이고, $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이는 점 A와 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{\left|3+3-\dfrac{5}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\dfrac{7}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$

$\overline{\mathrm{BH}}$의 길이는 점 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-2\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

이때, $\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AH}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{21}{8}$ 답 ④

7 | 경우의 수와 순열

본책 132~145쪽

STEP 1 개념 마스터 ❶

0849

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 차가 3이 되는 경우

$(1,\ 4), (2,\ 5), (3,\ 6), (4,\ 1), (5,\ 2), (6,\ 3)$의 6가지

(ii) 눈의 수의 차가 4가 되는 경우

$(1,\ 5), (2,\ 6), (5,\ 1), (6,\ 2)$의 4가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$6+4=10$ 답 10

0850

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우

$(1,\ 4), (2,\ 3), (3,\ 2), (4,\ 1)$의 4가지

(ii) 눈의 수의 합이 10이 되는 경우

$(4,\ 6), (5,\ 5), (6,\ 4)$의 3가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$4+3=7$ 답 7

0851

7의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

$7,\ 14,\ 21,\ \cdots,\ 49$의 7가지

11의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

$11,\ 22,\ 33,\ 44$의 4가지

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$7+4=11$ 답 11

다른 풀이 **집합을 이용한 합의 법칙으로 풀기**

7의 배수의 집합을 A, 11의 배수의 집합을 B라 하면

$n(A)=7,\ n(B)=4$

$A\cap B$는 7과 11의 최소공배수인 77의 배수의 집합이므로

$A\cap B=\varnothing \qquad \therefore n(A\cap B)=0$

따라서 7의 배수 또는 11의 배수의 집합은 $A\cup B$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=7+4=11$

0852

3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

$3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 48$의 16가지

5의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

$5,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ 50$의 10가지

3과 5의 최소공배수인 15의 배수가 적힌 카드를 뽑는 경우는

$15,\ 30,\ 45$의 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$16+10-3=23$ 답 23

다른 풀이 **집합을 이용한 합의 법칙으로 풀기**

3의 배수의 집합을 A, 5의 배수의 집합을 B라 하면

$n(A)=16,\ n(B)=10$

$A\cap B$는 3과 5의 최소공배수인 15의 배수의 집합이므로

$n(A\cap B)=3$

따라서 3의 배수 또는 5의 배수의 집합은 $A\cup B$이므로

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=16+10-3=23\end{aligned}$$

0853

서울에서 대전으로 가는 방법은 $a,\ b,\ c,\ d$의 4가지이고, 대전에서 서울로 오는 방법은 $x,\ y$의 2가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$4\cdot 2=8$ 답 8

0854

48을 소인수분해하면

$48=2^4\cdot 3$

2^4의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4$의 5개, 3의 양의 약수는 $1,\ 3$의 2개이다.

이때, 2^4의 양의 약수와 3의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수는 모두 48의 약수가 된다.

$\times$	1	3
1	1	3
2	2	$2\cdot 3$
2^2	2^2	$2^2\cdot 3$
2^3	2^3	$2^3\cdot 3$
2^4	2^4	$2^4\cdot 3$

따라서 구하는 약수의 개수는

$5\cdot 2=10$ 답 10

0855

72를 소인수분해하면

$72=2^3\cdot 3^2$

2^3의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3$의 4개, 3^2의 양의 약수는 $1,\ 3,\ 3^2$의 3개이다.

$\times$	1	3	3^2
1	1	3	3^2
2	2	$2\cdot 3$	$2\cdot 3^2$
2^2	2^2	$2^2\cdot 3$	$2^2\cdot 3^2$
2^3	2^3	$2^3\cdot 3$	$2^3\cdot 3^2$

이때, 2^3의 양의 약수와 3^2의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 수는 모두 72의 약수가 된다.

따라서 구하는 약수의 개수는

$4\cdot 3=12$ 답 12

0856

바지를 입는 방법의 수는 4, 셔츠를 입는 방법의 수는 5, 점퍼를 입는 방법의 수는 3이므로 구하는 방법의 수는

$4\cdot 5\cdot 3=60$ 답 60

STEP 2 유형 마스터 ❶

0857

|전략| 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합으로 만들 수 있는 8의 약수는 $2,\ 4,\ 8$이다.

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 2가 되는 경우
$(1,\ 1)$의 1가지

(ii) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우
$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$의 3가지

(iii) 눈의 수의 합이 8이 되는 경우
$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$의 5가지

(i), (ii), (iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$1+3+5=9$

답 9

0858

두 번 꺼낸 카드에 적힌 수를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

(i) $|a-b|=0$이 되는 경우
$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$의 6가지

(ii) $|a-b|=1$이 되는 경우
$(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5),\ (5,\ 4),$
$(4,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 1)$의 10가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$6+10=16$

답 16

0859

10과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수이므로 1에서 100까지의 자연수 중에서 2의 배수 또는 5의 배수를 제외하면 된다.

2의 배수의 집합을 A, 5의 배수의 집합을 B라 하면
$n(A)=50,\ n(B)=20$
$A\cap B$는 2와 5의 최소공배수인 10의 배수의 집합이므로
$n(A\cap B)=10$
이때, 2의 배수 또는 5의 배수의 집합은 $A\cup B$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=50+20-10=60$
따라서 구하는 수의 개수는
$100-60=40$

답 ②

0860

|전략| $x,\ y,\ z$ 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 조건을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$를 찾는다.

$x,\ y,\ z$가 자연수이므로 $x+2y+3z=10$에서

(i) $z=1$일 때, $x+2y=7$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(5,\ 1),\ (3,\ 2),\ (1,\ 3)$의 3개

(ii) $z=2$일 때, $x+2y=4$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(2,\ 1)$의 1개

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는
$3+1=4$

답 4

0861

$x,\ y$가 자연수이므로 $x+2y<7$을 만족시키는 경우는
$x+2y=3,\ x+2y=4,\ x+2y=5,\ x+2y=6$

(i) $x+2y=3$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 1)$의 1개

(ii) $x+2y=4$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(2,\ 1)$의 1개

(iii) $x+2y=5$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 2),\ (3,\ 1)$의 2개

(iv) $x+2y=6$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(2,\ 2),\ (4,\ 1)$의 2개

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는
$1+1+2+2=6$

답 ②

다른 풀이

(i) $y=1$일 때, $x+2<7$, 즉 $x<5$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1)$의 4개

(ii) $y=2$일 때, $x+4<7$, 즉 $x<3$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(1,\ 2),\ (2,\ 2)$의 2개

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는
$4+2=6$

0862

|전략| 이차방정식이 실근을 가지려면 (판별식)≥ 0임을 이용한다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4b\ge 0 \qquad \therefore a^2\ge 4b$
이때, $a\in A,\ b\in A$이므로

(i) $a=0$일 때, $4b\le 0$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 0)$의 1개

(ii) $a=1$일 때, $4b\le 1$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 0)$의 1개

(iii) $a=2$일 때, $4b\le 4$, 즉 $b\le 1$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(2,\ 0),\ (2,\ 1)$의 2개

(iv) $a=3$일 때, $4b\le 9$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(3,\ 0),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)$의 3개

(v) $a=4$일 때, $4b\le 16$, 즉 $b\le 4$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(4,\ 0),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4)$의 5개

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는
$1+1+2+3+5=12$

답 12

Lecture

이차방정식의 근의 판별

이차방정식의 판별식을 D라 할 때

(1) 서로 다른 두 실근을 갖는다. ⇨ $D>0$
(2) 중근을 갖는다. ⇨ $D=0$
실근을 갖는다. ⇨ $D\ge 0$
(3) 서로 다른 두 허근을 갖는다. ⇨ $D<0$

0863

1000원, 5000원, 10000원짜리 지폐를 각각 x장, y장, z장 사용한다고 하면

$1000x+5000y+10000z=34000$

$\therefore x+5y+10z=34$ ······ ㉠

그런데 세 종류의 지폐를 각각 적어도 한 장씩 사용해야 하므로 이 식을 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하면 된다.

(i) $z=1$일 때, ㉠에서 $x+5y=24$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(19, 1), (14, 2), (9, 3), (4, 4)$의 4개

(ii) $z=2$일 때, ㉠에서 $x+5y=14$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(9, 1), (4, 2)$의 2개

따라서 구하는 방법의 수는

$4+2=6$ 답 ④

0864

|전략| 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것과 십의 자리와 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것을 생각해 본다.

백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

3, 6, 9의 3개

십의 자리와 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 각각

1, 3, 5, 7, 9의 5개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\cdot5\cdot5=75$ 답 75

0865

x의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4개

y의 값이 될 수 있는 것은 -1, 0의 2개

$\therefore n(C)=4\cdot2=8$ 답 ⑤

0866

|전략| 곱해지는 각 항의 문자가 모두 다르면 동류항이 생기지 않으므로 곱의 법칙을 이용하여 항의 개수를 구한다.

$(a+b+c)(p+q+r+s)(x+y)$를 전개하면 a, b, c에 p, q, r, s를 각각 곱하여 항이 만들어지고 그것에 다시 x, y를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는

$3\cdot4\cdot2=24$ 답 ⑤

Lecture

항의 개수

두 식 A, B를 곱할 때, 곱해지는 각 항의 문자가 모두 다르면 식 AB의 전개식의 항의 개수는

⇨ (식 A의 항의 개수)×(식 B의 항의 개수)

0867

세 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수는

(전체 경우의 수)$-$(세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수)

이때, 3개의 주사위를 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6\cdot6\cdot6=216$

또, 세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수는

$3\cdot3\cdot3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$216-27=189$ 답 189

0868

|전략| 먼저 120과 180의 최대공약수를 구한 후 최대공약수의 약수가 5의 배수가 되는 것을 생각한다.

120과 180의 최대공약수는 60이므로 120과 180의 양의 공약수 중에서 5의 배수의 개수는 60의 양의 약수 중에서 5의 배수의 개수와 같다.

이때, 60을 소인수분해하면 $60=2^2\cdot3\cdot5$

5의 배수는 5를 소인수로 가지므로 60의 양의 약수 중 5의 배수의 개수는 $2^2\cdot3$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$(2+1)(1+1)=6$ 답 ③

0869

108을 소인수분해하면 $108=2^2\cdot3^3$ ··· ❶

따라서 108의 양의 약수의 개수는

$(2+1)(3+1)=12 \quad \therefore a=12$ ··· ❷

108의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)=280 \quad \therefore b=280$ ··· ❸

$\therefore a+b=12+280=292$ ··· ❹

답 292

채점 기준	비율
❶ 108을 소인수분해할 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Lecture

자연수의 양의 약수의 총합

자연수 N이 $N=a^pb^qc^r$ (a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 총합은

⇨ $(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)$

0870

480을 소인수분해하면 $480=2^5\cdot3\cdot5$

짝수는 2를 소인수로 가지므로 480의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $2^4\cdot3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$\therefore m=(4+1)(1+1)(1+1)=20$

3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 480의 양의 약수 중에서 3의 배수의 개수는 $2^5 \cdot 5$의 양의 약수의 개수와 같다.

$\therefore n=(5+1)(1+1)=12$

$\therefore m+n=20+12=32$ 답 32

0871

18을 소인수분해하면 $18=2\cdot3^2$이므로 자연수 n에 대하여

$18^n=2^n\cdot3^{2n}$

18^n의 양의 약수의 개수가 28이므로

$(n+1)(2n+1)=28,\ 2n^2+3n-27=0$

$(2n+9)(n-3)=0 \qquad \therefore n=3\ (\because n$은 자연수$)$

따라서 구하는 수는 18^3이다. 답 ②

0872

|전략| 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸어 지불할 수 있는 금액의 수를 생각해 본다.

(i) 지불 방법의 수

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 0장, 1장, 2장의 3가지

500원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$a=3\cdot4\cdot5-1=59$

(ii) 지불 금액의 수

500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액은 같으므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 7개와 100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개, 6개, 7개의 8가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$b=8\cdot5-1=39$

$\therefore a-b=59-39=20$ 답 20

0873

10원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

50원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개의 3가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은 0개, 1개, 2개의 3가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로 구하는 방법의 수는

$4\cdot3\cdot3-1=35$ 답 ③

0874

(i) 지불 방법의 수

10000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

5000원짜리 지폐를 지불하는 방법은 0장, 1장, 2장의 3가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장, 5장, 6장의 7가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$a=4\cdot3\cdot7-1=83$

(ii) 지불 금액의 수

5000원짜리 지폐 2장으로 지불하는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액은 같고, 1000원짜리 지폐 5장으로 지불하는 금액과 5000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액은 같으므로 10000원짜리 지폐 3장과 5000원짜리 지폐 2장을 1000원짜리 지폐 40장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 46장으로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, $\cdots$, 46장의 47가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$b=47-1=46$

$\therefore a-b=83-46=37$ 답 37

0875

|전략| 동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙을, 동시에 가거나 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.

(i) $P \to Q \to S$로 가는 방법의 수는 $2\cdot3=6$

(ii) $P \to R \to S$로 가는 방법의 수는 $2\cdot2=4$

따라서 구하는 방법의 수는

$6+4=10$ 답 ③

0876

(i) 집 → 학교 → 도서관 → 집으로 가는 방법의 수는 $2\cdot2\cdot3=12$

(ii) 집 → 도서관 → 학교 → 집으로 가는 방법의 수는 $3\cdot2\cdot2=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$12+12=24$ 답 24

0877

(i) $A \to B \to C$로 가는 방법의 수는 $3\cdot1=3$

(ii) $A \to D \to C$로 가는 방법의 수는 $2\cdot2=4$

(iii) $A \to B \to D \to C$로 가는 방법의 수는 $3\cdot2\cdot2=12$

(iv) $A \to D \to B \to C$로 가는 방법의 수는 $2\cdot2\cdot1=4$

따라서 구하는 방법의 수는

$3+4+12+4=23$ 답 ④

0878

|전략| 각 영역을 칠하는 방법의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용하여 색칠하는 모든 방법의 수를 구한다.

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ 답 48

0879

(i) C에 A와 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot1\cdot3=36$ … ❶

(ii) C에 A와 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ … ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$36+48=84$ … ❸

답 84

채점 기준	비율
❶ C에 A와 같은 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ C에 A와 다른 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 색을 칠하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0880

A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

이때, D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 경우와 B에 칠한 색과 다른 경우로 나누어진다.

(i) D에 B와 같은 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot3=180$

(ii) D에 B와 다른 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2=240$

따라서 구하는 방법의 수는

$180+240=420$ 답 ④

다른 풀이

(i) 모두 다른 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

(ii) B와 D에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2=120$

(iii) C와 E에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2=120$

(iv) B와 D, C와 E에 각각 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3=60$

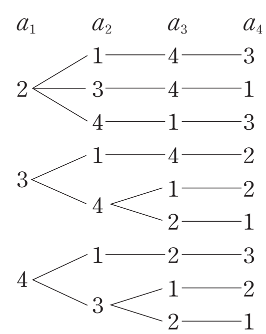
따라서 구하는 방법의 수는

$120+120+120+60=420$

0881

|전략| $a_1\neq1$, $a_2\neq2$, $a_3\neq3$, $a_4\neq4$이어야 함을 이용하여 조건을 만족시키는 수형도를 그려 본다.

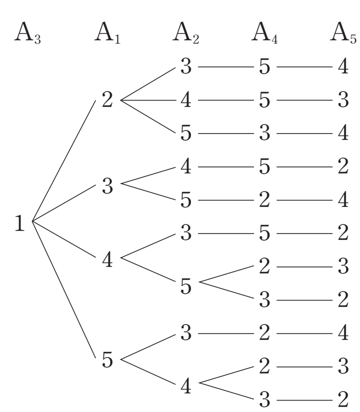
$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)(a_4-4)\neq0$을 만족시키려면 $a_1\neq1$, $a_2\neq2$, $a_3\neq3$, $a_4\neq4$이어야 하므로 이를 만족시키는 경우는 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 9이다. 답 9

0882

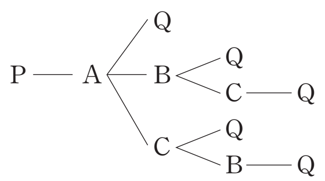
1번 축구공은 A_3에 넣고 i번 축구공은 A_i에 넣지 않는 경우는 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 11이다. 답 11

0883

주어진 육면체의 꼭짓점 P에서 출발하여 꼭짓점 A로 움직인 후 꼭짓점 Q에 도착하는 경우는 다음과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 P에서 출발하여 꼭짓점 B 또는 C로 움직인 후 꼭짓점 Q에 도착하는 경우도 각각 5가지씩이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$5\cdot3=15$ 답 15

STEP 1 개념 마스터 ❷

0884

${}_4P_2=4\cdot3=12$ 답 12

0885

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

0886

${}_6P_0=1$ 답 1

0887

${}_3P_3=3\cdot2\cdot1=6$ 답 6

0888

${}_nP_2=n(n-1)$이므로

$n(n-1)=20=5\cdot4 \qquad \therefore n=5$ 답 5

0889

$210=7\cdot6\cdot5$이므로

${}_7P_3=210 \qquad \therefore r=3$ 답 3

0890

${}_8P_r=\dfrac{8!}{(8-r)!}=\dfrac{8!}{5!}$이므로

$8-r=5 \qquad \therefore r=3$ 답 3

0891

${}_nP_n=n!$이고 $120=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$이므로

$n!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 \qquad \therefore n=5$ 답 5

0892

6명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수는

$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ 답 720

0893

6명 중 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수는

${}_6P_2=6\cdot5=30$ 답 30

0894

5명의 가족을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 답 120

0895

아빠를 제외한 4명을 일렬로 세우고, 그 앞에 아빠를 세우면 되므로 구하는 방법의 수는

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 답 24

0896

부모를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

이때, 각 경우에 대하여 아빠, 엄마 두 사람이 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!=2$이므로 구하는 방법의 수는

$24\cdot2=48$ 답 48

STEP 2 유형 마스터 ❷

0897

|전략| ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$임을 이용한다. (단, $0<r\le n$)

$6{}_nP_2={}_nP_4$에서

$6n(n-1)=n(n-1)(n-2)(n-3)$

${}_nP_4$에서 $n\ge4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$6=(n-2)(n-3)$, $n^2-5n=0$

$n(n-5)=0 \qquad \therefore n=5\ (\because n\ge4)$ 답 ②

0898

${}_nP_2+4{}_nP_1=28$에서

$n(n-1)+4n=28$, $n^2+3n-28=0$

$(n+7)(n-4)=0 \qquad \therefore n=4\ (\because n\ge2)$ 답 ③

0899

$4{}_{2n}P_2=5{}_{2n-1}P_2$에서

$4\cdot2n(2n-1)=5(2n-1)(2n-2)$

${}_{2n-1}P_2$에서 $2n-1\geq 2$, 즉 $n\geq \frac{3}{2}$이므로 양변을 $2n-1$로 나누면

$4\cdot 2n=5(2n-2)$, $8n=10n-10$

$2n=10$ $\quad\therefore n=5$

답 5

0900

n명의 학생 중에서 2명을 택하는 순열의 수가 210이므로

${}_{n}P_2=210$

$n(n-1)=210=15\cdot 14$

$\therefore n=15$

답 ⑤

0901

|전략| 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 순열의 수를 구한 다음 묶음 안에서의 순열의 수와 곱한다.

모음인 A와 E를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!=120$

A와 E가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$120\cdot 2=240$

답 240

0902

커플을 각각 한 사람으로 생각하여 세 사람을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

각각의 커플이 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!\cdot 2!\cdot 2!=8$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot 8=48$

답 48

0903

국어책 4권을 한 묶음, 수학책 3권을 한 묶음으로 생각하여 4권을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$

국어책끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4!=24$

수학책끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot 24\cdot 6=3456$

답 ⑤

0904

어른 4명을 한 사람으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $(n+1)!$

어른 4명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 $(n+1)!\cdot 24=576$이므로 $(n+1)!=24=4!$

$n+1=4$ $\quad\therefore n=3$

답 3

0905

|전략| 이웃해도 상관없는 것을 먼저 일렬로 나열한 후 그 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열한다.

남학생 4명을 한 줄로 세우는 방법의 수는 $4!=24$

남학생의 양 끝과 사이사이의 5곳 중 3곳 ∨남∨남∨남∨남∨

에 여학생을 세우는 방법의 수는 ${}_{5}P_3=60$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot 60=1440$

답 ⑤

0906

세 개의 문자 D, E, F를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

이 세 개의 문자의 양 끝과 사이사이의 4개의 자리에 A, B, C 세 문자를 나열하는 방법의 수는 ${}_{4}P_3=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot 24=144$

답 144

0907

8개의 의자에 4명이 앉게 되면 빈 의자는 4개이다.

이 4개의 빈 의자의 양 끝과 사이사이의 5곳 중 4곳에 앉을 4명을 배열하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_{5}P_4=120$

답 ③

0908

|전략| 먼저 양 끝에 소수가 오는 경우의 수를 구한다.

소수는 2, 3, 5의 3개이므로 양 끝에 소수가 오는 경우의 수는

${}_{3}P_2=6$

양 끝의 2개의 숫자를 제외한 나머지 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 6=36$

답 ②

0909

e□□t를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$ ··· ❶

e와 t 사이에 2개의 문자를 나열하는 방법의 수는 ${}_{5}P_2=20$ ··· ❷

e와 t가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$ ··· ❸

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot 20\cdot 2=960$ ··· ❹

답 960

채점 기준	비율
❶ e□□t를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❷ e와 t 사이에 2개의 문자를 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ e와 t가 자리를 바꾸는 방법의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ exploit를 조건에 맞게 나열하는 방법의 수를 구할 수 있다.	10 %

0910

(i) 홀수, 짝수의 순서로 교대로 오는 경우의 수

$5!\cdot5!=120\cdot120=14400$

(ii) 짝수, 홀수의 순서로 교대로 오는 경우의 수

$5!\cdot5!=120\cdot120=14400$

따라서 구하는 경우의 수는

$14400+14400=28800$ 답 ⑤

참고 홀수와 짝수가 교대로 오는 경우는

(홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀 짝), (짝 홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀)의 2가지이다.

0911

한국의 탁구 선수는 5명, 중국의 탁구 선수는 4명이므로 한국의 탁구 선수 5명을 일렬로 세우고 그 사이사이에 중국의 탁구 선수 4명을 세우면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$5!\cdot4!=120\cdot24=2880$ 답 2880

0912

|전략| 8개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 방법의 수에서 양 끝에 모두 모음이 오도록 나열하는 방법의 수를 뺀다.

8개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $8!=40320$

양 끝에 모두 모음이 오도록 나열하는 방법의 수는 모음 o, u, e 중에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 방법의 수가 ${}_3P_2=6$이고, 양 끝의 모음을 제외한 나머지 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수가 $6!=720$이므로

$6\cdot720=4320$

따라서 구하는 방법의 수는

$40320-4320=36000$ 답 ⑤

0913

7명의 학생 중에서 반장, 부반장을 뽑는 방법의 수는 7명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 ${}_7P_2=42$ ··· ❶

반장, 부반장을 모두 남학생으로 뽑는 방법의 수는 남학생 3명 중에서 반장, 부반장을 뽑으면 되므로 ${}_3P_2=6$ ··· ❷

따라서 구하는 방법의 수는

$42-6=36$ ··· ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ 7명의 학생 중에서 반장, 부반장을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❷ 반장, 부반장을 모두 남학생으로 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %
❸ 적어도 한 명은 여학생을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %

0914

a, b, c, d, e, f의 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$6!=720$

3개의 문자 a, b, c 중에서 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는 d, e, f를 일렬로 나열하고 그 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 a, b, c를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$3!\cdot{}_4P_3=6\cdot24=144$

따라서 구하는 방법의 수는

$720-144=576$ 답 576

0915

6개의 한 자리의 자연수를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $6!=720$

짝수의 개수를 n이라 하면 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 방법의 수는 짝수 n개 중에서 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 방법의 수가 ${}_nP_2=n(n-1)$이고, 양 끝의 짝수를 제외한 나머지 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수가 $4!=24$이므로

$n(n-1)\cdot24=24n(n-1)$

이때, 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오도록 나열하는 방법의 수가 432이므로

$720-24n(n-1)=432$

$24n(n-1)=288$

$n(n-1)=12=4\cdot3 \qquad \therefore n=4$

따라서 짝수의 개수가 4이므로 홀수의 개수는

$6-4=2$ 답 2

0916

|전략| 배수에 대한 경우의 수는 배수의 조건을 만족시키는 특정한 자리에 올 수 있는 수를 먼저 정한다.

네 자리의 자연수가 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개의 숫자가 올 수 있으므로 ${}_5P_3=60$

즉, 5의 배수의 개수는 60

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에는 0이 올 수 없다.

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5를 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지

나머지 자리에는 천의 자리에 온 숫자와 일의 자리의 숫자인 5를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개의 숫자가 올 수 있으므로

${}_4P_2=12$

즉, 5의 배수의 개수는 $4\cdot12=48$

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$60+48=108$ 답 108

Lecture

배수판정법

(1) 2의 배수 ⇨ 일의 자리의 숫자가 짝수

(2) 3의 배수 ⇨ 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수

(3) 4의 배수 ⇨ 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수

(4) 5의 배수 ⇨ 일의 자리의 숫자가 0 또는 5

0917

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4의 4가지

나머지 자리에는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개의 숫자가 올 수 있으므로 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 네 자리의 정수의 개수는

$4\cdot24=96$ 답 96

0918

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3의 2가지

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지

나머지 자리에는 만의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있으므로 $3!=6$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$2\cdot3\cdot6=36$ 답 ①

0919

어떤 수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로 5개의 숫자 0, 6, 7, 8, 9에서 서로 다른 4개를 택했을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

(0, 6, 7, 8), (0, 7, 8, 9), (6, 7, 8, 9)

(i) (0, 6, 7, 8)인 경우 : $3\cdot3!=3\cdot6=18$

(ii) (0, 7, 8, 9)인 경우 : $3\cdot3!=3\cdot6=18$

(iii) (6, 7, 8, 9)인 경우 : $4!=24$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$18+18+24=60$ 답 ③

0920

|전략| 32000보다 큰 수는 32□□□, 34□□□, 35□□□, 4□□□□, 5□□□□ 꼴이다.

32□□□ 꼴인 수의 개수는 $3!=6$

34□□□ 꼴인 수의 개수는 $3!=6$

35□□□ 꼴인 수의 개수는 $3!=6$

4□□□□ 꼴인 수의 개수는 $4!=24$

5□□□□ 꼴인 수의 개수는 $4!=24$

따라서 32000보다 큰 수의 개수는

$6+6+6+24+24=66$ 답 ④

다른 풀이 모든 다섯 자리의 정수의 개수는 $5!=120$

1□□□□ 꼴인 수의 개수는 $4!=24$

2□□□□ 꼴인 수의 개수는 $4!=24$

31□□□ 꼴인 수의 개수는 $3!=6$

따라서 32000보다 큰 수의 개수는

$120-(24+24+6)=66$

0921

A□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$

BA□□ 꼴인 단어의 개수는 $2!=2$

BE□□ 꼴인 단어의 개수는 $2!=2$

BF□□ 꼴인 단어는 순서대로 BFAE, BFEA의 2개

따라서 BFEA까지의 개수는

$6+2\cdot2+2=12$

이므로 BFEA는 12번째에 배열된다. 답 12번째

0922

1□△ 꼴인 수의 개수는 $9\cdot8=72$

2□△ 꼴인 수의 개수는 $9\cdot8=72$

이때, 102부터 298까지의 각 자리의 숫자가 서로 다른 세 자리의 자연수의 개수는

$72+72=144$

따라서 150번째에 오는 수는 3□△ 꼴인 수 중에서 6번째로 작은 수이므로 307이다. 답 307

0923

A□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$

B□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$

C□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$

DA□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$

DB□□□ 꼴인 단어의 개수는 $3!=6$

DCA□□ 꼴인 단어는 순서대로 DCABE, DCAEB의 2개

따라서 A로 시작하는 단어부터 DCA로 시작하는 단어까지 총 개수는

$24\cdot3+6\cdot2+2=86$

이므로 86번째에 오는 단어는 DCAEB이고, 마지막 문자는 B이다.

답 ②

0924

|전략| $n(X)=k$인 집합 X에 대하여 함수 $f : X \longrightarrow X$의 일대일대응의 개수는 $k!$이다.

$f(a)\neq e$이므로 $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d의 4개

그 각각에 대하여 일대일대응인 f의 개수는 $4!=24$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$4\cdot24=96$ 답 96

다른 풀이 일대일대응인 f의 개수는 $5!=120$

이때, $f(a)=e$이고 일대일대응인 f의 개수는 $4!=24$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$120-24=96$

Lecture

일대일함수와 일대일대응

(1) 일대일함수 : 함수 $f : X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$가 성립하는 함수

(2) 일대일대응 : 일대일함수이고 치역과 공역이 같은 함수

0925

함수 f는 일대일함수이므로 구하는 함수의 개수는

${}_4P_3=24$ 답 ④

0926

치역과 공역이 일치하는 일대일함수 f는 일대일대응이다.

(i) $f(1)=2$ 또는 $f(1)=4$인 경우

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값과 3을 제외한 2개이므로 일대일대응인 f의 개수는

$2\cdot2\cdot2!=8$

(ii) $f(1)=3$인 경우

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 4의 3개이므로 일대일대응인 f의 개수는

$1\cdot3\cdot2!=6$

(i), (ii)에서 함수 f의 개수는

$8+6=14$ 답 14

다른 풀이 전체 함수의 개수에서 $f(1)=1$ 또는 $f(3)=3$인 일대일대응의 개수를 뺀다.

X에서 X로의 일대일대응인 f의 개수는 $4!=24$

$f(1)=1$이고 일대일대응인 f의 개수는 $3!=6$

$f(3)=3$이고 일대일대응인 f의 개수는 $3!=6$

$f(1)=1$이고 $f(3)=3$이면서 일대일대응인 f의 개수는 $2!=2$

이때, 일대일대응인 f 중에서 $f(1)=1$ 또는 $f(3)=3$인 함수 f의 개수는

$6+6-2=10$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$24-10=14$

0927

집합 Y의 모든 원소의 곱이 36^2이므로 조건을 만족시키는 경우는 $1\times4\times9=2\times3\times6$이다.

이때, (x_1, x_3, x_5)가 $(1, 4, 9)$에 대응되는 경우의 수는 $3!=6$

(x_2, x_4, x_6)이 $(2, 3, 6)$에 대응되는 경우의 수는 $3!=6$

또, $f(x_1), f(x_3), f(x_5)$와 $f(x_2), f(x_4), f(x_6)$이 서로 바뀌는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$6\cdot6\cdot2=72$ 답 72

STEP 3 내신 마스터

0928

유형 01 합의 법칙

|전략| 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

뽑힌 카드에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 적힌 세 수의 곱이 3이 되는 경우

$(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)$의 3가지

(ii) 적힌 세 수의 곱이 4가 되는 경우

$(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1),$

$(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)$의 6가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$3+6=9$ 답 ③

0929

유형 02 방정식, 부등식의 해의 개수

|전략| 문제의 조건에 맞도록 $ax+by+cz=d$ 꼴의 방정식을 세우고 x, y, z 중 계수의 절댓값이 큰 것부터 수를 대입하여 구한다.

200원, 500원, 700원짜리 쿠키를 각각 x개, y개, z개 산다고 하면

$200x+500y+700z=3000$

$\therefore 2x+5y+7z=30$ ······ ㉠

이 식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하면 된다.

(i) $z=0$일 때, ㉠에서 $2x+5y=30$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(15, 0), (10, 2), (5, 4), (0, 6)$의 4개

(ii) $z=1$일 때, ㉠에서 $2x+5y=23$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(9, 1), (4, 3)$의 2개

(iii) $z=2$일 때, ㉠에서 $2x+5y=16$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(8, 0), (3, 2)$의 2개

(iv) $z=3$일 때, ㉠에서 $2x+5y=9$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$의 1개

(v) $z=4$일 때, ㉠에서 $2x+5y=2$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 0)$의 1개

따라서 구하는 방법의 수는

$4+2+2+1+1=10$ 답 ②

0930

유형 01 합의 법칙 + 03 곱의 법칙

|전략| 두 자연수의 합이 짝수이려면 두 자연수가 모두 짝수이거나 두 자연수가 모두 홀수이어야 한다.

십의 자리의 숫자를 $a(a\neq0)$, 일의 자리의 숫자를 b라 하면

$a+b=$(짝수)인 경우는 다음과 같다.

(i) (a, b)가 (짝수, 0)인 경우

a가 될 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4가지

(ii) (a, b)가 (짝수, 짝수)인 경우

a가 될 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4가지이고, b가 될 수 있는 숫자도 2, 4, 6, 8의 4가지이므로

$4\cdot4=16$

(iii) $(a,\ b)$가 (홀수, 홀수)인 경우

a가 될 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이고, b가 될 수 있는 숫자도 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이므로

$5\cdot5=25$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4+16+25=45$ 답 ②

0931

유형 01 합의 법칙 + 03 곱의 법칙

|전략| 곱해지는 각 항의 문자가 모두 다를 때, 전개식의 항의 개수는 곱해지는 각 다항식의 항의 개수의 곱과 같음을 이용한다.

$(a+b)^2(p+q)=(a^2+2ab+b^2)(p+q)$를 전개하면 a^2, $2ab$, b^2에 p, q를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는

$3\cdot2=6$

$(x+y+z)(l+m+n)$을 전개하면 x, y, z에 l, m, n을 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는

$3\cdot3=9$

이때, $(a+b)^2(p+q)$와 $(x+y+z)(l+m+n)$의 전개식에 동류항이 없으므로 구하는 항의 개수는

$6+9=15$ 답 ①

0932

유형 04 약수의 개수

|전략| 먼저 270을 소인수분해한 후 약수가 홀수가 되는 경우를 생각한다.

270을 소인수분해하면 $270=2\cdot3^3\cdot5$

홀수는 2를 소인수로 갖지 않으므로 270의 양의 약수 중에서 홀수의 개수는 $3^3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 구하는 홀수의 개수는

$(3+1)(1+1)=8$ 답 ④

다른 풀이 $270=2\cdot3^3\cdot5$이므로 270의 양의 약수의 개수는

$(1+1)(3+1)(1+1)=16$

짝수는 2를 소인수로 가지므로 270의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $3^3\cdot5$의 양의 약수의 개수와 같다.

즉, 짝수의 개수는 $(3+1)(1+1)=8$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$16-8=8$

0933

유형 05 지불 방법의 수와 지불 금액의 수

|전략| a원짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 금액과 b원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같을 때에는 b원짜리 동전 1개를 a원짜리 동전 n개로 바꾸어 생각한다.

(i) 지불 방법의 수

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$p=4\cdot5\cdot5-1=99$

(ii) 지불 금액의 수

500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액은 같으므로 1000원짜리 지폐 3장을 500원짜리 동전 6개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 10개와 100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, $\cdots$, 9개, 10개의 11가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

$q=11\cdot5-1=54$

$\therefore p+q=99+54=153$ 답 ③

0934

유형 06 도로망에서의 경우의 수

|전략| 동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙을, 동시에 가거나 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.

(i) A → B → C → D → A로 가는 방법의 수는

$3\cdot3\cdot2\cdot4=72$

(ii) A → D → C → B → A로 가는 방법의 수는

$4\cdot2\cdot3\cdot3=72$

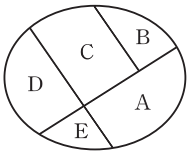
따라서 구하는 방법의 수는

$72+72=144$ 답 ②

0935

유형 07 색칠하는 방법의 수

|전략| 각 영역을 칠하는 방법의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용하여 색칠하는 모든 방법의 수를 구한다.



주어진 그림의 영역을 오른쪽 그림과 같이 A, B, C, D, E로 나타내면 A에 칠할 수 있는 색은 3가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 1가지이다.

이때, D에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 경우와 A에 칠한 색과 다른 경우로 나누어진다.

(i) D에 A와 같은 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2=12$

(ii) D에 A와 다른 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 1가지이므로 경우의 수는

$3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$12+6=18$

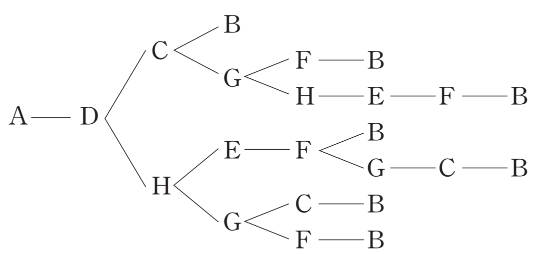
답 ④

0936

유형 08 수형도를 이용하는 경우의 수

|전략| 규칙성을 찾기 어려울 때는 수형도를 이용한다.

주어진 정육면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 주어진 조건에 맞게 모서리를 따라 움직인 후 꼭짓점 B에 도착하는 경우는 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 7이다.

답 ③

0937

유형 09 ${}_nP_r$의 계산

|전략| ${}_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ 임을 이용한다. (단, $0\le r\le n$)

${}_6P_n\le 2{}_6P_{n-2}$에서

$\dfrac{6!}{(6-n)!}\le 2\cdot\dfrac{6!}{\{6-(n-2)\}!}$

$\dfrac{1}{(6-n)!}\le 2\cdot\dfrac{1}{(8-n)!}$, $(8-n)!\le 2(6-n)!$

$(8-n)(7-n)\le 2$, $n^2-15n+54\le 0$

$(n-6)(n-9)\le 0$ $\quad\therefore 6\le n\le 9$

그런데 $2\le n\le 6$이므로 $n=6$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 6의 1개이다.

답 ①

참고 ${}_6P_n$에서 $n\le 6$ …… ㉠

${}_6P_{n-2}$에서 $0\le n-2\le 6$ $\quad\therefore 2\le n\le 8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2\le n\le 6$

0938

유형 10 이웃하는 순열의 수 + 11 이웃하지 않는 순열의 수

|전략| 2학년 학생들을 제외하고 1학년 학생들을 한 묶음으로 생각하여 먼저 나열한다.

1학년 학생 3명을 한 묶음으로 생각하여 3학년 학생 2명과 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

1학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$

1학년 학생 한 묶음과 3학년 학생 2명의 양 끝과 사이사이의 4개의 자리에 2학년 학생 3명을 세우는 방법의 수는 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot6\cdot24=864$

답 ⑤

0939

유형 12 특정한 조건이 있는 순열의 수

|전략| 먼저 한쪽 끝에는 자음, 다른 쪽 끝에는 모음이 오는 경우의 수를 구한다.

KOREA의 5개의 문자 중에서 자음은 K, R의 2개이고 모음은 O, E, A의 3개이다.

(i) 맨 앞에 자음, 맨 뒤에 모음이 오는 경우의 수

$2\cdot3=6$

(ii) 맨 앞에 모음, 맨 뒤에 자음이 오는 경우의 수

$3\cdot2=6$

(i), (ii)에서 한쪽 끝에는 자음, 다른 쪽 끝에는 모음이 오는 경우의 수는 $6+6=12$

양 끝의 2개의 문자를 제외한 나머지 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\cdot6=72$

답 ③

0940

유형 15 사전식 배열법을 이용하는 순열의 수

|전략| A로 시작하는 단어, B로 시작하는 단어, C로 시작하는 단어로 나누어 생각한다.

A□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$

B□□□□ 꼴인 단어의 개수는 $4!=24$

CAB□□ 꼴인 단어의 개수는 $2!=2$

CAD□□ 꼴인 단어의 개수는 $2!=2$

따라서 A로 시작하는 단어부터 CAD로 시작하는 단어까지 총 개수는

$24\cdot2+2\cdot2=52$

이므로 CAEBD는 53번째에 배열된다.

답 ④

0941

유형 16 함수의 개수

|전략| 먼저 $f(a)+f(b)=12$를 만족시키는 순서쌍 $(f(a), f(b))$를 구한다.

함수 f 중에서 $f(a)+f(b)=12$를 만족시키는 순서쌍 $(f(a), f(b))$는 $(2, 10)$, $(4, 8)$, $(8, 4)$, $(10, 2)$의 4개

그 각각에 대하여 일대일대응인 f의 개수는 $3!=6$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$4\cdot6=24$

답 ④

0942

유형 **10** 이웃하는 순열의 수

|전략| A, B 두 사람이 서로 옆 자리에 앉게 되는 경우를 생각해 본다.

A, B 두 사람의 좌석 번호를 순서쌍 (A, B)로 나타낼 때, A, B가 서로 옆자리에 앉게 되는 경우는 (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (6, 7), (7, 6)의 6가지이다. … ❶

각 경우에 나머지 3명이 남아 있는 세 자리에 앉는 경우의 수는 3명을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3!=6$ … ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot6=36$ … ❸

답 36

채점 기준	배점
❶ A, B가 서로 옆자리에 앉게 되는 경우를 알 수 있다.	3점
❷ 나머지 3명이 남아 있는 세 자리에 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점
❸ A, B가 서로 옆자리에 앉게 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	2점

다른 풀이

(i) A, B 두 사람이 좌석 번호가 6, 7인 자리에 앉는 경우

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

나머지 3명이 남아 있는 세 자리에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 A, B 두 사람이 좌석 번호가 6, 7인 자리에 앉게 되는 경우의 수는

$2\cdot6=12$

(ii) A, B 두 사람이 좌석 번호가 1, 2, 3인 자리에 앉는 경우

A, B를 한 사람으로 생각하여 자리에 앉는 경우의 수는 2

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

나머지 3명이 남아 있는 세 자리에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 A, B 두 사람이 좌석 번호가 1, 2, 3인 자리에 앉게 되는 경우의 수는

$2\cdot2\cdot6=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+24=36$

0943

유형 **12** 특정한 조건이 있는 순열의 수

|전략| 짝수와 홀수를 교대로 사용하여 비밀번호를 만드는 경우를 생각해 본다.

(i) (짝 홀 짝 홀 짝)인 경우

3개의 짝수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

4개의 홀수 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 (짝 홀 짝 홀 짝)으로 비밀번호를 만드는 경우의 수는

$6\cdot12=72$ … ❶

(ii) (홀 짝 홀 짝 홀)인 경우

4개의 홀수 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

3개의 짝수 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 (홀 짝 홀 짝 홀)로 비밀번호를 만드는 경우의 수는

$24\cdot6=144$ … ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$72+144=216$ … ❸

답 216

채점 기준	배점
❶ (짝 홀 짝 홀 짝)으로 비밀번호를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
❷ (홀 짝 홀 짝 홀)로 비밀번호를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	3점
❸ 홀수와 짝수를 교대로 사용하여 비밀번호를 만드는 경우의 수를 구할 수 있다.	1점

0944

유형 **14** 순열의 수를 이용한 정수의 개수

|전략| 어떤 자연수가 4의 배수이려면 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수이어야 한다.

네 자리의 자연수가 4의 배수이려면 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수이어야 한다. … ❶

(i) 끝의 두 자리에 0이 없는 경우

□□12, □□24, □□32

세 경우 모두 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 끝의 두 자리에 온 2개의 숫자를 제외한 2가지

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리에 온 숫자와 끝의 두 자리에 온 2개의 숫자를 제외한 2가지

즉, 4의 배수의 개수는 $3\cdot2\cdot2=12$ … ❷

(ii) 끝의 두 자리에 0이 있는 경우

□□04, □□20, □□40

세 경우 모두 천의 자리, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 끝의 두 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개이므로 ${}_3P_2=6$

즉, 4의 배수의 개수는 $3\cdot6=18$ … ❸

따라서 구하는 4의 배수의 개수는

$12+18=30$ … ❹

답 30

채점 기준	배점
❶ 네 자리의 자연수가 4의 배수가 되는 경우를 알 수 있다.	1점
❷ 끝의 두 자리에 0이 없는 4의 배수의 개수를 구할 수 있다.	2점
❸ 끝의 두 자리에 0이 있는 4의 배수의 개수를 구할 수 있다.	2점
❹ 4의 배수의 개수를 구할 수 있다.	1점

0945

유형 **11** 이웃하지 않는 순열의 수

|전략| 이웃해도 상관없는 것을 먼저 일렬로 나열한 후 그 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열한다.

(1) 4개의 주스를 일렬로 놓는 방법의 수는 $4!=24$

(2) 주스의 양 끝과 사이사이의 5곳 중 4곳에 커피를 놓는 방법의 수는

${}_5P_4=120$

7 경우의 수와 순열

(3) 커피를 이웃하지 않게 놓는 방법의 수는

$24 \cdot 120 = 2880$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 주스를 일렬로 놓는 방법의 수를 구할 수 있다.	4점
(2) 양 끝과 주스 사이사이에 커피를 놓는 방법의 수를 구할 수 있다.	4점
(3) 커피끼리 이웃하지 않게 놓는 방법의 수를 구할 수 있다.	2점

0946

유형 **13** '적어도'의 조건이 있는 순열의 수

|전략| '적어도'의 조건이 있는 사건이 일어나는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 뺀다.

(1) 6명의 가족이 일렬로 서는 방법의 수는 $6! = 720$

(2) (i) 부모 사이에 자녀가 한 명도 서지 않는 경우

부모를 한 묶음으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

즉, 부모 사이에 자녀가 한 명도 서지 않는 경우의 수는

$120 \cdot 2 = 240$

(ii) 부모 사이에 자녀가 한 명만 서는 경우

부모 사이에 자녀가 한 명만 설 때 부모 사이에 서는 1명의 자녀를 택하는 경우의 수는 4

부 자녀 모를 한 묶음으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

즉, 부모 사이에 자녀가 한 명만 서는 경우의 수는

$4 \cdot 24 \cdot 2 = 192$

(i), (ii)에서 부모 사이에 자녀가 어느 한 명도 서지 않거나 한 명만 서는 방법의 수는

$240 + 192 = 432$

(3) 자녀 4명 중에서 부모 사이에 적어도 2명이 서는 방법의 수는

$720 - 432 = 288$

답 풀이 참조

채점 기준	배점
(1) 6명의 가족이 일렬로 서는 방법의 수를 구할 수 있다.	3점
(2) 자녀 4명 중에서 부모 사이에 어느 한 명도 서지 않거나 한 명만 서는 방법의 수를 구할 수 있다.	6점
(3) 자녀 4명 중에서 부모 사이에 적어도 2명이 서는 방법의 수를 구할 수 있다.	3점

다른 풀이

(i) 부모 사이에 자녀 2명이 서는 경우

부모 사이에 자녀 2명이 설 때 부모 사이에 서는 2명의 자녀를 택하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$

부□□모를 한 묶음으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

즉, 부모 사이에 자녀 2명이 서는 경우의 수는

$12 \cdot 6 \cdot 2 = 144$

(ii) 부모 사이에 자녀 3명이 서는 경우

부모 사이에 자녀 3명이 설 때 부모 사이에 서는 3명의 자녀를 택하는 경우의 수는 ${}_4P_3 = 24$

부□□□모를 한 묶음으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $2! = 2$

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

즉, 부모 사이에 자녀 3명이 서는 경우의 수는

$24 \cdot 2 \cdot 2 = 96$

(iii) 부모 사이에 자녀 4명이 서는 경우

부모 사이에 자녀 4명이 모두 서는 경우의 수는 $4! = 24$

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

즉, 부모 사이에 자녀 4명이 서는 경우의 수는

$24 \cdot 2 = 48$

(i), (ii), (iii)에서 부모 사이에 적어도 2명의 자녀가 서는 방법의 수는

$144 + 96 + 48 = 288$

창의·융합 교과서 속 심화문제

0947

|전략| 직선 $y = ax + b$가 x축과 만나지 않으려면 $a = 0$, $b \neq 0$이어야 한다.

$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((3-b)x + 2)$

$= (a-4)\{(3-b)x + 2\} + 6$

$= (a-4)(3-b)x + 2a - 2$

이 그래프가 x축과 만나지 않으려면

$(a-4)(3-b) = 0$, $2a - 2 \neq 0$

(i) $(a-4)(3-b) = 0$일 때, $a = 4$ 또는 $b = 3$

(ii) $2a - 2 \neq 0$일 때, $a \neq 1$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a, b의 값을 순서쌍 (a, b)로 나타내면

$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$,

$(2, 3)$, $(3, 3)$, $(5, 3)$, $(6, 3)$

따라서 구하는 경우의 수는 10이다.

답 ④

0948

|전략| (다)에 대입하는 수가 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나눈다.

(i) (다)에 대입하는 수가 짝수일 때

(다)에 대입할 수 있는 수는 2, 4, 6, 8의 4가지이고, (가)에는 (다)에 대입한 수를 제외한 8가지, (나)에는 (가), (다)에 대입한 수를 제외한 7가지를 대입할 수 있으므로 $4 \cdot 8 \cdot 7 = 224$

(ii) (다)에 대입하는 수가 홀수일 때

(다)에 대입할 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이다.

이때, (가)+(나)가 짝수이어야 하므로 (가), (나)에 대입하는 수는 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다.

(가), (나)에 홀수를 대입하는 경우, (가)에는 (다)에 대입한 홀수를 제외한 4가지, (나)에는 (가), (다)에 대입한 홀수를 제외한 3가지를 대입할 수 있으므로 $5\cdot4\cdot3=60$

또한, (가), (나)에 짝수를 대입하는 경우, (가)에는 2, 4, 6, 8의 4가지, (나)에는 (가)에 대입한 짝수를 제외한 3가지를 대입할 수 있으므로

$5\cdot4\cdot3=60$

따라서 (다)에 대입하는 수가 홀수인 경우의 수는 $60+60=120$

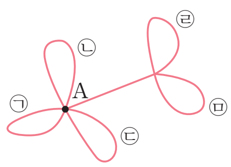
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$224+120=344$

답 344

0949

|전략| 그리는 순서와 그리는 방향을 각각 생각한다.



오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡, ㉢을 그리는 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$

㉠, ㉡, ㉢을 각각 시계 방향과 시계 반대 방향으로 그리는 경우의 수는

$2\cdot2\cdot2=8$

따라서 점 A에서 시작하여 ㉠, ㉡, ㉢을 한 번에 그리는 경우의 수는

$6\cdot8=48$

같은 방법으로 ㉣, ㉤을 한 번에 그리는 경우의 수는 $2!\cdot(2\cdot2)=8$

따라서 구하는 방법의 수는

$48\cdot8=384$

답 384

0950

|전략| $a_3<a_2<a_1$이 되려면 가장 큰 수인 2^9은 1열에 써넣어야 한다.

a_1의 값이 가장 크려면 2^9은 1열에 써넣어야 한다.

1열에 2^9을 써넣는 경우의 수는 3이고, 8개의 숫자 중 2개를 1열의 남은 자리에 써넣는 경우의 수는 ${}_8P_2$이므로 1열에 숫자를 써넣는 경우의 수는

$3\cdot{}_8P_2$

a_2의 값이 두 번째로 크려면 남은 6개의 숫자 중 가장 큰 수를 2열에 써넣어야 한다.

그 수를 2열에 써넣는 경우의 수는 3이고, 남은 5개의 숫자 중 2열의 남은 자리에 써넣는 경우의 수는 ${}_5P_2$이므로 2열에 숫자를 써넣는 경우의 수는

$3\cdot{}_5P_2$

남은 3개의 숫자를 3열에 써넣는 경우의 수는

${}_3P_3$

따라서 구하는 경우의 수는

$$(3\cdot{}_8P_2)\cdot(3\cdot{}_5P_2)\cdot{}_3P_3=3^2\cdot\frac{8!}{6!}\cdot\frac{5!}{3!}\cdot3!$$
$$=3^2\cdot\frac{8!}{6}=12\cdot7!$$

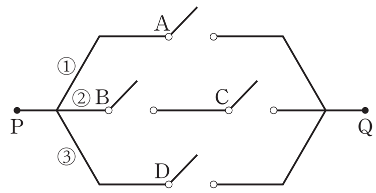
$\therefore p=12$

답 12

0951

|전략| 세 개의 경로 중에서 하나의 경로만 전류가 흘러도 P, Q 사이에 전류가 흐름을 이용한다.

P와 Q 사이에 전류가 흐르는 경우는 다음 그림에서 ①의 경로 또는 ②의 경로 또는 ③의 경로로 전류가 흐를 때이다.



이때, ①의 경로로 전류가 흐르는 사건을 X, ②의 경로로 전류가 흐르는 사건을 Y, ③의 경로로 전류가 흐르는 사건을 Z라 하면

(i) ①의 경로로 전류가 흐를 때

스위치 A가 닫힐 때, 스위치 B, C, D는 닫히거나 닫히지 않을 수 있으므로

$n(X)=2\cdot2\cdot2=8$

(ii) ②의 경로로 전류가 흐를 때

스위치 B와 C가 닫힐 때, 스위치 A, D는 닫히거나 닫히지 않을 수 있으므로

$n(Y)=2\cdot2=4$

(iii) ③의 경로로 전류가 흐를 때

스위치 D가 닫힐 때, 스위치 A, B, C는 닫히거나 닫히지 않을 수 있으므로

$n(Z)=2\cdot2\cdot2=8$

(iv) ①, ②의 경로로 전류가 흐를 때

스위치 A, B, C가 닫힐 때, 스위치 D는 닫히거나 닫히지 않을 수 있으므로

$n(X\cap Y)=2$

(v) ②, ③의 경로로 전류가 흐를 때

스위치 B, C, D가 닫힐 때, 스위치 A는 닫히거나 닫히지 않을 수 있으므로

$n(Y\cap Z)=2$

(vi) ①, ③의 경로로 전류가 흐를 때

스위치 A, D가 닫힐 때, 스위치 B, C는 닫히거나 닫히지 않을 수 있으므로

$n(Z\cap X)=2\cdot2=4$

한편, $n(X\cap Y\cap Z)=1$이므로 P, Q 사이에 전류가 흐를 수 있도록 스위치를 조작하는 방법의 수는

$n(X\cup Y\cup Z)$
$=n(X)+n(Y)+n(Z)-n(X\cap Y)-n(Y\cap Z)$
$\quad-n(Z\cap X)+n(X\cap Y\cap Z)$
$=8+4+8-2-2-4+1$
$=13$

답 13

Lecture

①의 경로에 전류가 흐르는 경우의 수와 ②의 경로에 전류가 흐르는 경우의 수에는 ①, ②에 동시에 전류가 흐르는 경우의 수가 중복되어 있다.
다른 경우도 마찬가지이므로 합집합의 원소의 개수를 구하는 방법을 이용해야 한다.

8 | 조합

본책 148~159쪽

STEP 1 개념 마스터

0952

${}_8C_2=\frac{{}_8P_2}{2!}=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$ 답 28

0953

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{{}_6P_2}{2!}=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

0954

${}_5C_0=1$ 답 1

0955

${}_{10}C_{10}=1$ 답 1

0956

${}_nC_2=36$에서 $\frac{n(n-1)}{2\cdot1}=36$

$n(n-1)=72=9\cdot8 \qquad \therefore n=9$ 답 9

0957

${}_6C_r=20$에서 $\frac{6!}{r!(6-r)!}=20$

$6!=20\cdot r!(6-r)!$

$6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5\cdot4\cdot r!(6-r)!$

$6\cdot3\cdot2\cdot1=r!(6-r)!$

$3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1=r!(6-r)!$

$\therefore r=3$ 답 3

0958

ㄷ. ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 ${}_{n+1}C_r={}_{n+1}C_{n-r+1}$ 답 ㄱ, ㄴ

0959

${}_nC_4={}_nC_5$에서 $5=n-4 \qquad \therefore n=9$ 답 9

0960

${}_8C_r={}_8C_{r-4}$에서 $r=r-4$ 또는 $r-4=8-r$

이때, $r\neq r-4$이므로 $2r=12$

$\therefore r=6$ 답 6

0961

${}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ 답 56

0962

동호회 회원 6명 중에서 순서를 생각하지 않고 2명을 선택하면 되므로 구하는 횟수는

${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ 답 15

0963

5개의 팀 중에서 순서를 생각하지 않고 2개의 팀을 선택하면 되므로 구하는 경기 수는

${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 답 10

0964

7개의 원소 중에서 순서를 생각하지 않고 3개를 선택하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ 답 35

0965

9명 중에서 3명의 대표를 뽑는 방법의 수는

${}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ 답 84

0966

남자 6명 중에서 3명의 대표를 뽑는 방법의 수는

${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$

여자 3명 중에서 1명의 대표를 뽑는 방법의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$20\cdot3=60$ 답 60

0967 답 (가) 2 (나) 3 (다) 2 (라) 6

0968

서로 다른 6권의 책을 1권, 2권, 3권으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\cdot10\cdot1=60$ 답 60

0969

서로 다른 6권의 책을 2권, 2권, 2권으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{6}=15$ 답 15

0970

서로 다른 6권의 책을 2권씩 나누어 3명에게 나누어 주는 방법의 수는

$\left({}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}\right)\cdot 3!=15\cdot 6=90$ 답 90

STEP 2 유형 마스터

0971

|전략| ${}_nC_r$와 ${}_nP_r$의 관계를 이용한다.

${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$이므로 $136=\frac{272}{r!}$

$r!=2=2\cdot 1 \quad \therefore r=2$

또, ${}_nP_2=n(n-1)=272=17\cdot 16$에서 $n=17$

$\therefore n+r=17+2=19$ 답 ④

0972

${}_nP_2+6{}_nC_2=20{}_{n-1}C_3$에서

$n(n-1)+6\cdot\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=20\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2\cdot 1}$

$4n(n-1)=\frac{10}{3}(n-1)(n-2)(n-3)$

$n-1\ge 3$, 즉 $n\ge 4$이므로 등식의 양변을 $(n-1)$로 나누면

$4n=\frac{10}{3}(n-2)(n-3)$, $6n=5(n^2-5n+6)$

$5n^2-31n+30=0$, $(n-5)(5n-6)=0$

$\therefore n=5$ 또는 $n=\frac{6}{5}$

이때, $n\ge 4$이므로 $n=5$ 답 5

Lecture

${}_nC_r$에서 구한 n의 값이 $0\le r\le n$을 만족시키는 자연수인지 반드시 살펴보아야 한다.

0973

${}_{15}C_{r+2}={}_{15}C_{2r-5}$에서

$r+2=2r-5$ 또는 $15-(r+2)=2r-5$

(i) $r+2=2r-5$일 때, $r=7$

(ii) $15-(r+2)=2r-5$일 때,

$13-r=2r-5$, $3r=18 \quad \therefore r=6$

따라서 모든 자연수 r의 값의 합은

$7+6=13$ 답 ③

0974

이차방정식 ${}_nC_2x^2-{}_nC_3x+{}_nC_4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\frac{{}_nC_3}{{}_nC_2}=2 \quad \therefore {}_nC_3=2{}_nC_2$

즉, $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=2\cdot\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}$에서 $n\ge 4$이므로 등식의 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$\frac{n-2}{6}=1 \quad \therefore n=8$

$\therefore$ (두 근의 곱)$=\frac{{}_nC_4}{{}_nC_2}=\frac{{}_8C_4}{{}_8C_2}=\frac{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}}=\frac{70}{28}=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0975

|전략| $n!$의 의미와 유리식의 성질을 이용한다.

${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$=\frac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{(\boxed{(가)\ n-r})\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{\boxed{(나)\ r}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{\{(n-r)+r\}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{\boxed{(다)\ n}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r$

$\therefore {}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ 답 (가) $n-r$ (나) r (다) n

Lecture

조합의 수 ${}_nC_r$는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$에서 r개의 원소를 택하는 방법의 수로 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) n을 선택한 경우 : n을 이미 선택하였으므로 나머지 $(n-1)$개의 수에서 $(r-1)$개를 선택하여야 하고, 이 방법의 수는 ${}_{n-1}C_{r-1}$이다.

(ii) n을 선택하지 않은 경우 : n을 제외한 나머지 $(n-1)$개의 수에서 r개를 선택하여야 하고, 이 방법의 수는 ${}_{n-1}C_r$이다.

(i), (ii)는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여

${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

0976

${}_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(\boxed{(가)\ n-r})\}!}$

$=\frac{n!}{(n-r)!\boxed{(나)\ r!}}={}_nC_r$

$\therefore {}_nC_r={}_nC_{n-r}$ 답 (가) $n-r$ (나) $r!$

0977

$n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{r\cdot n!}{r!(n-r)!}=r\cdot{}_nC_r$

$\therefore r\cdot{}_nC_r=n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$ 답 풀이 참조

0978

|전략| 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 합의 법칙을 이용한다.

야구 선수 9명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_9C_3=84$

축구 선수 11명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{11}C_3=165$

따라서 구하는 경우의 수는

$84+165=249$ 답 ④

0979

택한 두 수의 합이 짝수가 되는 경우는

(홀수)+(홀수) 또는 (짝수)+(짝수)이다. … ❶

(i) (홀수)+(홀수)인 경우의 수

5개의 홀수 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$ … ❷

(ii) (짝수)+(짝수)인 경우의 수

4개의 짝수 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$ … ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$10+6=16$ … ❹

답 16

채점 기준	비율
❶ 두 수의 합이 짝수가 되는 경우를 알 수 있다.	20 %
❷ (홀수)+(홀수)인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❸ (짝수)+(짝수)인 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건에 맞는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

0980

남자 직원의 수를 n이라 하면 남자 직원 n명 중에서 2명을 선발하는 방법의 수는 ${}_nC_2$

여자 직원 5명 중에서 2명을 선발하는 방법의 수는 ${}_5C_2=10$

즉, ${}_nC_2\cdot 10=210$이므로 ${}_nC_2=21$

$\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=21$, $n(n-1)=42=7\cdot 6$

$\therefore n=7$ 답 7

0981

|전략| 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법은 특정한 k개를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 뽑는 방법과 같다.

은석이와 선규를 뽑고 남은 10명 중에서 3명을 뽑으면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_{10}C_3=120$ 답 120

0982

C를 제외한 11명의 학생 중에서 A, B를 선발한 다음 남은 9명의 학생 중에서 4명을 선발하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_9C_4=126$ 답 ①

0983

원소의 개수가 3이고 가장 큰 원소가 6인 부분집합은 6을 원소로 선택하고 나머지 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 선택하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_5C_2=10$ 답 ②

0984

|전략| 짝이 맞는 1켤레의 신발을 뽑는 경우의 수와 나머지 8짝의 신발 중에서 짝이 맞지 않도록 2짝을 뽑는 경우의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용한다.

5켤레의 신발 중에서 1켤레의 신발을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

1켤레를 제외한 나머지 4켤레의 신발 8짝 중에서 2짝을 택하는 경우의 수는 ${}_8C_2=28$

이때, 신발 4켤레 중에서 짝이 맞는 1켤레의 신발을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$이므로 신발 8짝 중에서 짝이 맞지 않는 신발을 택하는 경우의 수는 $28-4=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot 24=120$ 답 ③

0985

|전략| '적어도'의 조건이 있는 조합의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 빼서 구한다.

전체 10명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{10}C_4=210$

소방관만 뽑는 방법의 수는 ${}_6C_4=15$

경찰관만 뽑는 방법의 수는 ${}_4C_4=1$

따라서 구하는 방법의 수는

$210-(15+1)=194$ 답 194

0986

전체 10개의 공 중에서 3개를 뽑는 방법의 수는 ${}_{10}C_3=120$

4 이상의 자연수가 적힌 7개의 공 중에서 3개를 뽑는 방법의 수는

${}_7C_3=35$

따라서 구하는 방법의 수는

$120-35=85$ 답 ②

0987

전체 12편 중에서 2편을 선택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_2=66$

외국 영화를 n편이라 하면 외국 영화 n편 중에서 2편을 선택하는 경우의 수는 ${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}$

즉, $66-\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}=56$이므로 $n(n-1)=20=5\cdot 4$

$\therefore n=5$ 답 ①

0988

전체 10권 중에서 4권을 택하는 방법의 수는 ${}_{10}C_4=210$

소설책과 수필집 중에서 4권을 택하는 방법의 수는 ${}_7C_4=35$

소설책과 수필집 중에서 3권을 택하고, 시집 중에서 1권을 택하는 방법의 수는 ${}_7C_3\cdot{}_3C_1=35\cdot3=105$

따라서 구하는 방법의 수는

$210-(35+105)=70$ 답 70

다른 풀이 시집이 2권 포함되도록 택하는 방법의 수는

${}_3C_2\cdot{}_7C_2=63$

시집이 3권 포함되도록 택하는 방법의 수는

${}_3C_3\cdot{}_7C_1=7$

따라서 구하는 방법의 수는

$63+7=70$

0989

|전략| 먼저 조합을 이용하여 뽑는 경우의 수를 구한 후 순열을 이용하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

남자 4명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$

여자 6명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_6C_3=20$

5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot20\cdot120=14400$ 답 14400

0990

할머니와 어머니를 뽑고 남은 4명의 가족 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$

4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$6\cdot24=144$ 답 ⑤

0991

홀수 1, 3, 5, 7의 네 수 중에서 두 수를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$

짝수 2, 4, 6의 세 수 중에서 두 수를 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$

이때, 홀수 2개와 짝수 2개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$6\cdot3\cdot24=432$ 답 432

0992

회장과 부회장을 뽑고 남은 8명의 학생 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_8C_2=28$

회장과 부회장을 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

회장과 부회장이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$28\cdot6\cdot2=336$ 답 ④

0993

|전략| 서로 다른 n개에서 순서에 상관없이 r개를 선택할 때에는 조합의 수를 이용한다.

X의 각 원소에 대응되는 Y의 원소의 순서가 정해져 있으므로 Y의 원소 4개 중에서 3개를 택하여 크기 순서대로 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_4C_3=4$ 답 4

0994

조건 (가), (나)에 의하여 치역의 원소는 5개이고, 정의역의 원소 1, 2는 공역의 원소 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 택하여 크기 순서대로 대응시키고 정의역의 원소 4, 5는 공역의 원소 6, 7, 8, 9, 10, 11 중에서 2개를 택하여 크기 순서대로 대응시켜야 한다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_6C_2=6\cdot15=90$ 답 ③

0995

$f(1)<f(3)$이므로 $f(1)$, $f(3)$의 값은 5, 6, 7, 8, 9, 10 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 작은 수를 $f(1)$, 큰 수를 $f(3)$으로 정하면 된다.

또, $f(2)<f(4)$이므로 $f(2)$, $f(4)$의 값도 5, 6, 7, 8, 9, 10 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 작은 수를 $f(2)$, 큰 수를 $f(4)$로 정하면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_6C_2\cdot{}_6C_2=15\cdot15=225$ 답 225

0996

|전략| 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 주어진 점을 이어서 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 ${}_nC_2$이다.

5개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는

${}_5C_2=10$ 답 10

0997

8개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

${}_8C_2=28$ 답 ④

0998

7개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는 ${}_7C_2=21$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$

일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$

그런데 일직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$21-6-3+1+1=14$ 답 ②

다른 풀이 서로 다른 평행선 위의 점을 하나씩 택하여 연결하면 1개의 직선을 만들 수 있으므로 그 개수는 ${}_4C_1\cdot{}_3C_1=4\cdot3=12$

주어진 평행선 2개를 포함하면 구하는 직선의 개수는

$12+2=14$

8 조합

0999

12개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

${}_{12}C_2=66$ ⋯ ❶

가로 방향으로 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 $3\cdot{}_4C_2=3\cdot6=18$ ⋯ ❷

세로 방향으로 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 $4\cdot{}_3C_2=4\cdot3=12$ ⋯ ❸

대각선 방향으로 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 $4\cdot{}_3C_2=4\cdot3=12$ ⋯ ❹

그런데 일직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$66-18-12-12+3+4+4=35$ ⋯ ❺

답 35

채점 기준	비율
❶ 12개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❷ 가로 방향으로 일직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❸ 세로 방향으로 일직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❹ 대각선 방향으로 일직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
❺ 서로 다른 직선의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1000

| 전략 | n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 n을 뺀 값과 같다.

구하는 대각선의 개수는 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 8을 뺀 값과 같으므로

${}_8C_2-8=28-8=20$

답 ③

1001

구하는 다각형을 n각형이라 하면 대각선의 개수가 54이므로

${}_nC_2-n=54$, $\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}-n=54$

$n^2-3n-108=0$, $(n+9)(n-12)=0$

$\therefore n=12\ (\because n\geq3)$

따라서 십이각형의 꼭짓점의 개수는 12이다.

답 ①

1002

대각선의 교점은 십일각형의 내부에서 만나는 두 대각선에 의해 결정되고 이를 만족시키는 두 대각선은 4개의 꼭짓점에 의하여 결정되므로 십일각형의 서로 다른 대각선의 교점의 최대 개수는 ${}_{11}C_4=330$

11개의 꼭짓점에서 서로 다른 4개를 택하는 경우의 수와 같다.

따라서 $n=330=2\cdot3\cdot5\cdot11$이므로 n의 약수가 아닌 것은 ③ 4이다.

답 ③

1003

| 전략 | 일직선 위에 있는 n개의 점으로 만들 수 있는 삼각형은 없다.

7개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_7C_3=35$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_3=4$

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$35-4=31$

답 31

1004

9개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_9C_3=84$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_3=4$이고, 4개의 점이 있는 직선은 3개이다.

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-3\cdot4=72$

답 72

1005

10개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_{10}C_3=120$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_3=4$이고, 4개의 점이 있는 직선은 5개이다.

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$120-5\cdot4=100$

답 ②

1006

| 전략 | m개의 평행선과 n개의 평행선이 만날 때, 이 평행선으로 만들어지는 평행사변형의 개수는 ${}_mC_2\cdot{}_nC_2$이다.

가로로 나열된 5개의 평행선 중에서 2개, 세로로 나열된 6개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정된다.

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

${}_5C_2\cdot{}_6C_2=10\cdot15=150$

답 150

1007

가로로 놓인 선 5개 중에서 2개, 세로로 놓인 선 5개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 주어진 도형의 선들로 만들 수 있는 직사각형의 개수는

${}_5C_2\cdot{}_5C_2=10\cdot10=100$

이때, 처음 정사각형의 한 변의 길이를 4라 하면 한 변의 길이가 1, 2, 3, 4인 정사각형의 개수는 각각 16, 9, 4, 1이므로 정사각형의 개수는 $16+9+4+1=30$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$100-30=70$

답 70

1008

n개의 평행선 중에서 2개, n개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정되므로 주어진 평행선으로 만들 수 있는 평행사변형의 개수는 ${}_nC_2 \cdot {}_nC_2$

이때, 평행사변형의 개수가 441이므로

${}_nC_2 \cdot {}_nC_2 = 441$, $\left\{\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\right\}^2 = 441$

$\frac{n(n-1)}{2} = 21\left(\because \frac{n(n-1)}{2} > 0\right)$

$n(n-1) = 42 = 7\cdot 6$

$\therefore n = 7$ 답 7

1009

| 전략 | 먼저 6명을 세 개의 조로 나누는 경우를 생각해 본다.

6명을 세 개의 조로 나눌 때, 각 조의 인원수는

1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(ⅰ) 1명, 1명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 6\cdot 5\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 15$$

(ⅱ) 1명, 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 6\cdot 10\cdot 1 = 60$$

(ⅲ) 2명, 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{3!} = 15\cdot 6\cdot 1\cdot \frac{1}{6} = 15$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 방법의 수는

$15+60+15=90$ 답 90

1010

9명의 학생을 2명, 3명, 4명의 세 조로 나누는 방법의 수는

$a = {}_9C_2 \cdot {}_7C_3 \cdot {}_4C_4 = 36\cdot 35\cdot 1 = 1260$ … ❶

9명의 학생을 4명, 4명, 1명의 세 조로 나누는 방법의 수는

$b = {}_9C_4 \cdot {}_5C_4 \cdot {}_1C_1 \cdot \frac{1}{2!} = 126\cdot 5\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 315$ … ❷

9명의 학생을 3명, 3명, 3명의 세 조로 나누는 방법의 수는

$c = {}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 84\cdot 20\cdot 1\cdot \frac{1}{6} = 280$ … ❸

$\therefore a-b+c = 1260-315+280 = 1225$ … ❹

답 1225

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a-b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1011

(ⅰ) 8명의 학생을 2명, 3명, 3명의 세 조로 나누는 방법의 수는

$${}_8C_2 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 28\cdot 20\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 280$$

(ⅱ) 8명의 학생을 2명, 2명, 2명, 2명의 네 조로 나누는 방법의 수는

$${}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{4!} = 28\cdot 15\cdot 6\cdot 1\cdot \frac{1}{24} = 105$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$280+105=385$ 답 ③

1012

| 전략 | 8종류의 꽃을 세 묶음으로 분할한 후 3명에게 나누어 주는 방법의 수를 곱한다.

서로 다른 8종류의 꽃을 2종류, 3종류, 3종류로 묶어 세 개의 꽃다발을 만드는 경우의 수는

${}_8C_2 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 28\cdot 20\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 280$

세 개의 꽃다발을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$280\cdot 6 = 1680$ 답 1680

1013

X의 원소 4개를 1개, 1개, 2개로 나누는 방법의 수는

${}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 4\cdot 3\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 6$

이를 Y의 원소 a, b, c에 대응시키는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$6\cdot 6 = 36$ 답 36

1014

운전자를 제외한 나머지 9명을 세 팀으로 나눌 때, 각 팀의 인원수는

1, 4, 4 또는 2, 3, 4 또는 3, 3, 3

(ⅰ) 1명, 4명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_9C_1 \cdot {}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 9\cdot 70\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 315$$

(ⅱ) 2명, 3명, 4명으로 나누는 방법의 수는

$${}_9C_2 \cdot {}_7C_3 \cdot {}_4C_4 = 36\cdot 35\cdot 1 = 1260$$

(ⅲ) 3명, 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 84\cdot 20\cdot 1\cdot \frac{1}{6} = 280$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 세 팀으로 나누는 방법의 수는

$315+1260+280=1855$

세 팀을 승용차 3대에 분배하는 방법의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 방법의 수는

$1855\cdot 6 = 11130$ 답 11130

1015

(ⅰ) 특정한 2명을 2명인 팀에 배정하는 경우

나머지 회원 5명을 2명, 3명으로 나누는 방법의 수는

${}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 10\cdot 1 = 10$

8 조합

(ⅱ) 특정한 2명을 3명인 팀에 배정하는 경우

나머지 회원 5명을 2명, 2명, 1명으로 나누는 방법의 수는

$${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}=10\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 세 팀으로 나누는 방법의 수는

$10+15=25$

세 팀을 3개의 방에 배정하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$25\cdot6=150$ 답 150

1016

|전략| 6명을 3명, 3명의 두 조로 나눈 후, 각 조의 3명을 2명, 1명으로 나눈다.

6명을 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\frac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\frac{1}{2}=10$$

나누어진 3명을 2명, 1명으로 나누는 방법의 수는

${}_3C_2\cdot{}_1C_1=3\cdot1=3$

따라서 구하는 방법의 수는

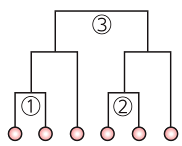
$10\cdot3\cdot3=90$ 답 90

다른 풀이 6명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $6!=720$

이때, 오른쪽 그림에서 ①~③은 자리를 바꾸어도 같은 경우이므로 이러한 방법의 수는

$2\cdot2\cdot2=8$

따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{720}{8}=90$



1017

6개의 팀을 4개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_4\cdot{}_2C_2=15\cdot1=15$

나누어진 4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\cdot3=45$ 답 ⑤

1018

9개의 팀을 4개, 5개의 팀으로 나누는 방법의 수는

${}_9C_4\cdot{}_5C_5=126\cdot1=126$

나누어진 4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$$

나누어진 5개의 팀을 2개, 3개의 팀으로 나눈 다음 3개의 팀을 다시 2개, 1개의 팀으로 나누는 방법의 수는

$({}_5C_2\cdot{}_3C_3)\cdot({}_3C_2\cdot{}_1C_1)=(10\cdot1)\cdot(3\cdot1)=30$

따라서 구하는 방법의 수는

$126\cdot3\cdot30=11340$ 답 11340

STEP 3 내신 마스터

1019

유형 01 ${}_nC_r$의 계산

|전략| $a:b=c:d$이면 $bc=ad$임을 이용한다.

${}_nC_7:{}_{n+1}C_6=5:14$에서 $5{}_{n+1}C_6=14{}_nC_7$

$$5\cdot\frac{{}_{n+1}P_6}{6!}=14\cdot\frac{{}_nP_7}{7!}$$ — $5\cdot\frac{{}_{n+1}P_6}{\cancel{6!}}=\overset{2}{\cancel{14}}\cdot\frac{{}_nP_7}{\cancel{7\cdot6!}}$

$5{}_{n+1}P_6=2{}_nP_7$에서

$5(n+1)n(n-1)\cdots(n-4)=2n(n-1)\cdots(n-4)(n-5)(n-6)$

$5(n+1)=2(n-5)(n-6),\ 2n^2-27n+55=0$

$(n-11)(2n-5)=0$

$\therefore n=11$ 또는 $n=\frac{5}{2}$

이때, $n\ge7$이므로 $n=11$ 답 ④

1020

유형 03 조합의 수

|전략| 세 수의 곱이 홀수가 되려면 (홀수)×(홀수)×(홀수)이어야 한다.

세 수의 곱이 홀수가 되는 경우의 수는 1, 3, 5, 7, 9 중에서 세 수를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_3=10$ 답 ①

1021

유형 03 조합의 수

|전략| 초콜릿의 자를 수 있는 부분을 고르는 경우의 수로 생각한다.

초콜릿을 A, B, C 3명의 학생에게 한 조각 이상 나누어 주는 경우의 수는 초콜릿을 자를 수 있는 부분 8곳 중에서 2곳을 선택하여 자르는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_2=28$ 답 ④

1022

유형 04 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수

|전략| 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수는 ${}_{n-k}C_{r-k}$임을 이용한다.

2에서 20까지의 자연수 중에서 6과 서로소인 수는 5, 7, 11, 13, 17, 19의 6개이다.

이 중에서 7은 반드시 포함해야 하므로 나머지 5개의 수 중에서 2개를 택하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$ 답 ⑤

1023

유형 06 뽑아서 나열하는 경우의 수

|전략| 먼저 조합을 이용하여 뽑는 방법의 수를 구한 후 순열을 이용하여 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.

지현이와 지수를 뽑고 남은 5명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$

지현이와 지수를 제외한 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$

3명의 양 끝과 사이사이의 4곳 중 2곳에 지현이와 지수를 일렬로 세우는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot6\cdot12=720$ 답 ③

1024

유형 07 함수의 개수

|전략| $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이므로 함수 f는 일대일함수이다.

$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이므로 치역의 원소의 개수는 4이고, 치역의 최솟값이 4, 최댓값이 9이므로 1, 2, 3, 10은 치역의 원소가 아니다.

이때, 4, 9는 치역의 원소이므로 치역의 나머지 원소 2개는 5, 6, 7, 8 중에서 택해야 한다.

5, 6, 7, 8 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$이고, 정의역의 원소에 치역의 원소를 각각 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $4!=24$이므로 구하는 함수 f의 개수는

$6\cdot24=144$ 답 ④

1025

유형 08 직선의 개수

|전략| 일직선 위에 있는 n개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는 1이다.

8개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는

${}_8C_2=28$

일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

그런데 일직선 위에 있는 점들을 연결하여 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

$28-10+1=19$ 답 ②

1026

유형 09 n각형의 대각선의 개수

|전략| 꼭짓점 중 4개의 점을 택하면 대각선의 교점을 만들 수 있다.

볼록 10각형에서 대각선의 개수는

$a={}_{10}C_2-10=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}-10=35$

볼록 b각형의 b개의 꼭짓점 중에서 4개를 택하면 한 개의 대각선의 교점을 만들 수 있으므로 볼록 b각형의 서로 다른 대각선의 교점의 최대 개수는

${}_bC_4=\frac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$

$b(b-1)(b-2)(b-3)=8\cdot7\cdot6\cdot5$

$\therefore b=8$

$\therefore a+b=35+8=43$ 답 ③

1027

유형 13 분할하여 분배하는 경우의 수

|전략| 특정한 조건을 고려하여 분할하는 방법의 수를 먼저 구한 후 분배하는 방법의 수를 곱한다.

여학생 3명은 각자 다른 차에 타야 하므로 먼저 남학생 4명을 세 팀으로 나누고, 각 팀에 여학생 3명을 분배하여 7명의 학생을 세 팀으로 나눈다.

남학생을 세 팀으로 나눌 때, 각 팀의 남학생 수는

1, 1, 2 또는 $\underbrace{0,\ 2,\ 2}_{\text{차 한 대에 여학생 한 명이 혼자 타는 경우}}$

(i) 남학생을 1명, 1명, 2명으로 나누고, 여학생 3명을 분배하여 세 팀으로 나누는 방법의 수는

${}_4C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\cdot3!=4\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot6=36$

(ii) 남학생을 0명, 2명, 2명으로 나누고, 여학생 3명을 분배하여 세 팀으로 나누는 방법의 수는

${}_4C_0\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\cdot3!=1\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot6=18$

(i), (ii)에서 7명의 학생을 세 팀으로 나누는 방법의 수는

$36+18=54$

세 팀을 서로 다른 3대의 차에 분배하는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$54\cdot6=324$ 답 ⑤

1028

유형 14 대진표 작성하기

|전략| 8명을 4명, 4명의 두 조로 나눈 후, 각 조의 4명을 2명, 2명으로 나눈다.

8명을 4명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_8C_4\cdot{}_4C_4\cdot\frac{1}{2!}=70\cdot1\cdot\frac{1}{2}=35$

나누어진 4명을 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\cdot3\cdot3=315$ 답 ④

1029

유형 05 '적어도'의 조건이 있는 조합의 수

|전략| '적어도'의 조건이 있는 사건이 일어나는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 사건이 일어나지 않는 경우의 수를 뺀다.

전체 14명의 학생 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{14}C_4=1001$ ⋯ ❶

1학년 학생 8명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_8C_4=70$ ⋯ ❷

2학년 학생 6명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_6C_4=15$ ⋯ ❸

8 조합

따라서 구하는 방법의 수는

$1001-(70+15)=916$ … ④

답 916

채점 기준	배점
① 14명의 학생 중 4명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	1점
② 1학년 학생만 4명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	1점
③ 2학년 학생만 4명을 뽑는 방법의 수를 구할 수 있다.	1점
④ 각 학년의 학생이 적어도 1명씩 포함되도록 하는 방법의 수를 구할 수 있다.	3점

1030

유형 **13** 분할하여 분배하는 경우의 수

|전략| 먼저 분할하는 방법의 수를 구한 후 분배하는 방법의 수를 곱한다.

2층에서 6층까지 5개의 층 중에서 사람들이 내리게 될 세 개의 층을 택하는 방법의 수는

${}_5C_3=10$ … ①

5명을 2명, 2명, 1명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}=10\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$ … ②

3개의 조를 서로 다른 세 개의 층에 분배하는 방법의 수는

$3!=6$ … ③

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot15\cdot6=900$ … ④

답 900

채점 기준	배점
① 5개의 층 중에서 세 개의 층을 택하는 방법의 수를 구할 수 있다.	2점
② 5명을 2명, 2명, 1명으로 나누는 방법의 수를 구할 수 있다.	2점
③ 3개의 조를 서로 다른 세 개의 층에 분배하는 방법의 수를 구할 수 있다.	2점
④ 세 개의 층에서 2명, 2명, 1명이 내리는 방법의 수를 구할 수 있다.	1점

다른 풀이 5명을 2명, 2명, 1명의 3개의 조로 나누는 방법의 수는

${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}=10\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$

이때, 3개의 조가 2층부터 6층까지 5개의 층에서 세 개의 층을 택하여 내리는 방법의 수는 ${}_5P_3=60$

따라서 구하는 방법의 수는 $15\cdot60=900$

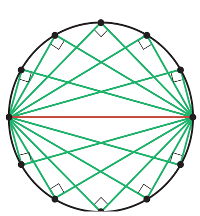
1031

유형 **10** 삼각형의 개수

|전략| 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 n개의 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는 ${}_nC_3$이다.

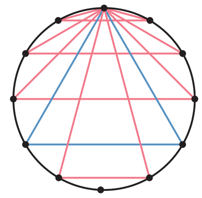
(1) 원 위의 점들은 어떤 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는 ${}_{12}C_3=220$

(2) 오른쪽 그림과 같이 1개의 지름을 기준으로 지름의 양 끝점을 제외한 10개의 점 중에서 1개를 택하면 직각삼각형이 생기고, 두 점을 이어 만들 수 있는 지름은 6개이므로 구하는 직각삼각형의 개수는



${}_{10}C_1\cdot6=10\cdot6=60$

(3) 오른쪽 그림과 같이 1개의 점을 기준으로 5개의 이등변삼각형이 생기고, 이 중에서 파란색과 같은 정삼각형은 1개가 생기므로 정삼각형을 제외한 이등변삼각형의 개수는 4이다.



12개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_1=12$이고, 파란색과 같은 정삼각형은 총 4개가 생기므로 구하는 이등변삼각형의 개수는

$4\cdot12+4=52$

답 풀이 참조

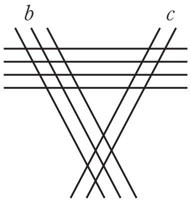
채점 기준	배점
(1) 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	3점
(2) 직각삼각형의 개수를 구할 수 있다.	4점
(3) 이등변삼각형의 개수를 구할 수 있다.	5점

창의·융합 교과서 속 심화문제

1032

|전략| 평행사변형이 만들어지는 조건과 평행사변형이 아닌 사다리꼴이 만들어지는 조건을 생각한다.

오른쪽 그림과 같이 4개의 평행선, 3개의 평행선, 2개의 평행선을 각각 a, b, c라 하면 평행사변형을 만드는 방법은 다음과 같다.



(ⅰ) a에서 2개, b에서 2개를 택하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_3C_2=6\cdot3=18$

(ⅱ) a에서 2개, c에서 2개를 택하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2=6\cdot1=6$

(ⅲ) b에서 2개, c에서 2개를 택하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는

${}_3C_2\cdot{}_2C_2=3\cdot1=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $p=18+6+3=27$

또, 평행사변형이 아닌 사다리꼴을 만드는 방법은 다음과 같다.

(ⅳ) a에서 2개, b, c에서 각각 1개씩을 택하여 만들 수 있는 사다리꼴의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_1=6\cdot3\cdot2=36$

(ⅴ) b에서 2개, a, c에서 각각 1개씩을 택하여 만들 수 있는 사다리꼴의 개수는

${}_3C_2\cdot{}_4C_1\cdot{}_2C_1=3\cdot4\cdot2=24$

(ⅵ) c에서 2개, a, b에서 각각 1개씩을 택하여 만들 수 있는 사다리꼴의 개수는

${}_2C_2\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_1=1\cdot4\cdot3=12$

(ⅳ), (ⅴ), (ⅵ)에서 $q=36+24+12=72$

$\therefore q-p=72-27=45$

답 45

1033

| **전략** | 주어진 조건을 만족시키는 집합 A와 집합 B의 원소를 먼저 생각하고, 함수의 개수를 구한다.

집합 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9,\ 10\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\cup B=S$, $A\cap B=\emptyset$이고, A에서 B로의 함수 f가 일대일대응이므로 $n(A)=5$, $n(B)=5$이어야 한다.

또, $f(1)=5$이므로 $1\in A$, $5\in B$이다.

1과 5를 제외한 집합 S의 8개의 원소 중에서 A의 원소가 되는 4개를 택하는 방법의 수는 ${}_8C_4=70$

1을 제외한 A의 원소 4개를 5를 제외한 B의 원소에 대응시키는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$70\cdot 24=1680$ 　　답 1680

1034

| **전략** | 주어진 조건에 맞게 빨간 공을 넣는 방법의 수를 먼저 생각하고, 파란 공을 넣는 방법의 수를 생각한다.

빨간 공 4개를 서로 다른 세 개의 주머니에 적어도 한 개 이상씩 넣는 방법의 수는 세 주머니 중에서 빨간 공 2개를 넣는 주머니를 고르는 방법의 수와 같으므로

${}_3C_1=3$

파란 공 5개를 서로 다른 세 개의 주머니에 조건을 만족시키면서 넣는 방법은 다음과 같다.

(i) 1개, 1개, 3개로 나누어 넣는 방법의 수는

${}_2C_1=2$ — 파란 공 3개는 빨간 공 1개가 들어있는 주머니 중 하나에 넣어야 한다.

(ii) 1개, 2개, 2개로 나누어 넣는 방법의 수는

${}_3C_1=3$ — 파란 공 1개를 넣는 주머니를 선택한다.

(iii) 0개, 2개, 3개로 나누어 넣는 방법의 수는

${}_2C_1\cdot{}_2C_1=2\cdot 2=4$ — 파란 공 3개는 빨간 공 1개가 들어있는 주머니 중 하나에 넣고, 파란 공 2개는 나머지 주머니 중 하나에 넣어야 한다.

따라서 구하는 방법의 수는

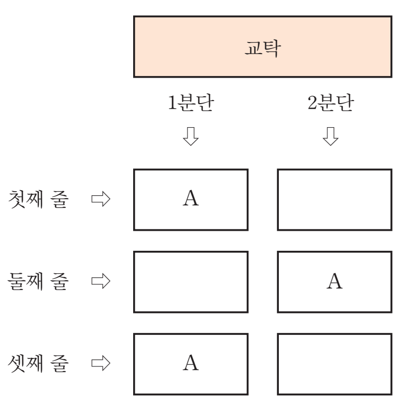
$3\cdot(2+3+4)=27$ 　　답 ③

1035

| **전략** | 참가 인원이 가장 많은 A반 학생들의 자리를 먼저 정한 후 나머지 세 자리에 B반과 C반 학생들을 앉히는 방법의 수를 생각한다.

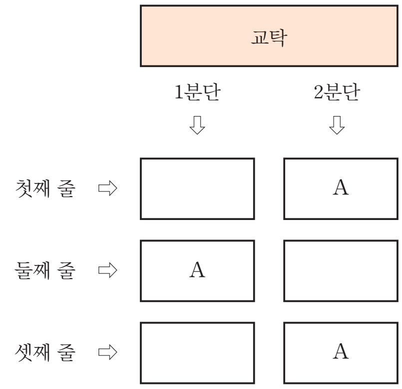
같은 반 학생은 옆 혹은 앞뒤로 이웃하지 않게 앉아야 하므로 A반 학생 3명의 자리를 정하는 방법은 다음과 같다.

(i)



이때, 나머지 세 자리에 B반 학생 2명과 C반 학생 1명을 앉히는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$

(ii)



이때, 나머지 세 자리에 B반 학생 2명과 C반 학생 1명을 앉히는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

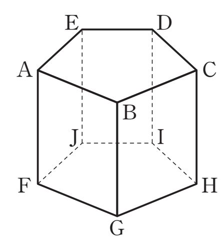
$3+3=6$ 　　답 6

참고 같은 반 학생들끼리는 출석 번호가 작을수록 교탁에 가까운 자리로 배정하므로 순서를 따로 생각할 필요가 없다.

1036

| **전략** | 주어진 조건을 만족시키는 삼각형을 만들기 위한 방법을 생각한다.

삼각형의 어떤 변도 오각기둥 ABCDE−FGHIJ의 모서리가 아닌 경우는 다음과 같다.



(i) 면 ABCDE에서 꼭짓점 1개, 면 FGHIJ에서 꼭짓점 2개를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$5\cdot({}_5C_2-5-2)=15$

(ii) 면 ABCDE에서 꼭짓점 2개, 면 FGHIJ에서 꼭짓점 1개를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는 (i)과 동일하다.

따라서 구하는 경우의 수는

$15+15=30$ 　　답 30

Lecture

꼭짓점 A와 면 FGHIJ에서 꼭짓점 2개를 택하여 만든 삼각형 중 어떤 변도 오각기둥 ABCDE−FGHIJ의 모서리가 아닌 삼각형의 개수를 구해 보자.

삼각형의 어떤 변도 오각기둥 ABCDE−FGHIJ의 모서리가 아니려면 면 FGHIJ에서 꼭짓점 2개를 택하여 만든 선분은 오각형 FGHIJ의 대각선이어야 한다.

그런데 점 A에서 면 FGHIJ에 내린 수선의 발 F를 포함하는 △AFI, △AFH는 모서리 AF를 포함한다.

따라서 구하는 삼각형의 개수는

${}_5C_2-5-2$

8 조합

Memo